UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DOUTORADO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

PAULO NOCERA ALVES JUNIOR

**Gestão de estoque e eficiência dinâmica: Uma abordagem
integrada entre Análise Envoltória de Dados (DEA) e Teoria do
Controle Ótimo (OCT)**

São Carlos

2018

PAULO NOCERA ALVES JUNIOR

**Gestão de estoque e eficiência dinâmica: Uma abordagem
integrada entre Análise Envoltória de Dados (DEA) e Teoria do
Controle Ótimo (OCT)**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de
São Carlos da Universidade de São Paulo, como
requisito para obtenção do Título de Doutor em
Engenharia de Produção.

Área de concentração: Economia,
Organizações e Gestão do Conhecimento

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Daisy Aparecida do
Nascimento Rebelatto

São Carlos

2018

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

A474g Alves Junior, Paulo Nocera
 Gestão de estoque e eficiência dinâmica: Uma
 abordagem integrada entre Análise Envoltória de Dados
 (DEA) e Teoria do Controle Ótimo (OCT) / Paulo Nocera
 Alves Junior; orientadora Daisy Aparecida do Nascimento
 Rebelatto. São Carlos, 2018.

 Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Produção e Área de Concentração em
Economia, Organizações e Gestão Conhecimento -- Escola
de Engenharia de São Carlos da Universidade de São
Paulo, 2018.

 1. Análise Envoltória de Dados (DEA). 2. Teoria do
Controle Ótimo (OCT). 3. Restrição Variacional. 4.
Eficiência dinâmica. 5. Controle de estoque. 6.
Sistemas produção-estoque. 7. Benchmarking. 8.
Variáveis contábeis. I. Título.

Eduardo Graziosi Silva - CRB - 8/8907

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **PAULO NOCERA ALVES JÚNIOR.**

Título da tese: "Gestão de estoque e eficiência dinâmica: uma abordagem integrada entre análise envoltória de dados (DEA) e teoria do controle ótimo (OCT)".

Data da defesa: 26/09/2018.

Comissão Julgadora:

Resultado:

Profa. Associada **Daisy Aparecida do Nascimento Rebelatto**
(Orientadora)

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Dr. **Elmer Pablo Tito Cari**

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Dr. **Enzo Barberio Mariano**

(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/UNESP - Bauru)

aprovado

Prof. Dr. **Antônio Fernando Crepaldi**

(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/UNESP - Bauru)

aprovado

Prof. Dr. **Wilfredo Fernando Yushimito Del Valle**

(Universidad Adolfo Ibáñez)

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de
Produção:

Prof. Associado **Aldo Roberto Ometto**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**

DEDICATÓRIA

***DEDICO** este trabalho aos meus pais, Paulo e Marisa, que sempre me apoiaram durante todos esses anos.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, inicialmente, à Prof.^a Dr.^a Daisy Aparecida do Nascimento Rebelatto, pela orientação e confiança depositada;

Ao Prof. Dr. Elmer Pablo Tito Cari, pela coorientação e contribuição em meu exame de qualificação;

Ao Prof. Dr. Enzo Barberio Mariano, pelo apoio e contribuição em meu exame de qualificação;

Ao Prof. Dr. Luiz Ricardo Kabbach de Castro, pelas indicações;

Aos Prof. Dr. Wilfredo Yushimito, Prof. Dr. Enrique Canessa, Prof. Dr. Jorge Pereira, e Prof. Dr. Filadelfo de Mateo, pelo apoio durante o período no exterior;

Aos professores dos Departamentos de Engenharia de Produção da USP de São Carlos/SP e da UNESP de Bauru/SP, pelos ensinamentos;

Aos funcionários, familiares, amigos e colegas, do Brasil e do Chile, e a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para minha formação pessoal, acadêmica e para a realização deste trabalho, especialmente para Isotilia Costa Melo, Naja Brandão Santana, Jessica Suárez Campoli, Guilherme Roiz, Marcos Raiz, Daniel Alvarez, Lucas Alves, Thiago Suricat e Leonardo Afonso;

Finalmente, à CAPES, pelo apoio financeiro.

EPÍGRAFE

“One must divide one’s time between politics and equations. But our equations are much more important to me, because politics is for the present, while our equations are for eternity. “

Albert Einstein

RESUMO

ALVES JUNIOR, P. N. **Gestão de estoque e eficiência dinâmica: Uma abordagem integrada entre Análise Envoltória de Dados (DEA) e Teoria do Controle Ótimo (OCT).** 2018. 187 f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2018.

Este trabalho tem por objetivo propor um método eficiente para avaliar gestão de estoque, aplicando conjuntamente a Teoria de Controle Ótimo (OCT), para obter funções de estocagem dinamicamente ótimas, e Análise Envoltória de Dados (DEA), para calcular as eficiências relativas. Tendo em vista esse objetivo foi desenvolvido um modelo integrado DEA-OCT para calcular a eficiência de custo otimizada ao longo do tempo, quando o sistema possui variáveis relacionadas entre si, como no caso de sistemas de controle de estoque, e para analisar produção e demanda (assim como a variável estoque, oriunda dessa relação), estendendo o modelo variacional. Este trabalho aplica o modelo proposto a 647 empresas das Américas do Sul e do Norte, depois faz uma comparação entre Brasil e Chile (países emergentes economicamente), posteriormente focando no setor de comércio, considerando seus sistemas produção-estoque com dados de variáveis contábeis. Os modelos minimizam os custos de produção e de estoque para calcular a eficiência de custo ao longo do tempo. O *output* (produto, ou variável de saída) é a demanda; o *input* (insumo, ou variável de entrada) é a produção, e o *intermediate* (variável intermediária) é o estoque. Seus custos são considerados na função objetivo. É acrescentada uma restrição variacional da OCT para descrever a relação entre demanda, produção e estoque. Em resumo, o modelo é relevante por calcular eficiência prevenindo a possibilidade de obter uma projeção que ignora a relação entre as variáveis, uma vez que essa relação sempre ocorre, na prática, em sistemas de controle de estoque. As principais contribuições são: possibilitar o uso de OCT como a ferramenta de *benchmarking* DEA no contexto de eficiência dinâmica, estender o modelo DEA variacional de Sengupta (1995), incluindo restrições de modelos mais recentes e possibilitar o cálculo de eficiência quando há relação entre as variáveis.

Palavras-chave: Análise Envoltória de Dados (DEA), Teoria do Controle Ótimo (OCT), Controle de estoque, Sistemas produção-estoque, Restrição Variacional, Eficiência dinâmica, Benchmarking, Variáveis contábeis.

ABSTRACT

ALVES JUNIOR, P. N. **Inventory management and dynamics efficiency: Data Envelopment Analysis (DEA) and Optimal Control Theory (OCT) integrated approach.** 2018. 187 f. Thesis (Ph.D.), School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo. São Carlos, 2018.

This work aims to propose an efficient method to evaluate inventory management, jointly applying optimal control theory (OCT), obtaining dynamically optimal production and inventory functions, and data envelopment analysis (DEA), calculating the relative efficiencies. With this objective in mind, it was developed a DEA-OCT integrated model to calculate allocative efficiency optimized over time, when systems have variable with relationship among themselves, like in the case of inventory control systems, and for analyzing production and demand (as the inventory variable obtained from this relationship), extending the variational model. This paper applies the proposed model to 647 companies from South and North America, after that it was made a comparison between Brazil and Chile (economically emerging countries), then focusing on the commercial sector, considering its production-inventory systems and data from accounting variables. The model minimizes the inventory and production costs to calculate the allocative efficiency over time. The *output* is demand; the *input* is production, and the intermediate variable is inventory. Their costs are considered in the objective function. A variational constraint OCT is added to describe the relationship among demand, production, and inventory. In summary, the model is relevant to calculate efficiency by preventing the possibility of finding a projection that ignores the relationship among variables, since this relationship always occur in practice in inventory control systems. The main contributions are: using OCT as the benchmarking tool DEA in the context of dynamic efficiency, extending the Sengupta (1995) variational DEA model, including constraints from recent model and making it possible to calculate efficiency when there is a relationship among variables.

Keywords: Data Envelopment Analysis (DEA), Optimal Control Theory (OCT), Inventory control, Production-inventory systems, Variational constraint, Dynamic efficiency, Benchmarking, Accounting variables.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Variação de Estoque	31
Figura 2 – Solução ótima do exemplo constante	49
Figura 3 – Solução ótima do exemplo variável (modelo de penalização Equação (2.19))	50
Figura 4 – Modelo conceitual	62
Figura 5 – Relação entre os tipos de variáveis da DEA, OCT, e do sistema de controle de estoque	64
Figura 6 – Estrutura do sistema discreto, com medida intermediária e interação entre variáveis, mas sem considerar a interação entre períodos	65
Figura 7 – Estrutura do sistema dinâmico discreto	65
Figura 8 – Estrutura do sistema dinâmico contínuo (criando funções que dependem do tempo em vez de nós temporais)	66
Figura 9 – Tela Screening do <i>software</i> Economática	67

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Descrição de funções, variáveis e parâmetros .	68
Tabela 2 – <i>Ranking</i> de DMUs mais eficientes para o exemplo simulado.	91
Tabela 3 – Empresas mais eficientes (geral) de acordo com modelo proposto (dados em milhares de dólares).	93
Tabela 4 – Empresas eficientes usando o modelo proposto	94
Tabela 5 – Eficiências médias, desvio padrão e número de empresas eficientes por setor	96
Tabela 6 – As eficiências das empresas utilizando o modelo CRS proposto	108
Tabela 7 – As eficiências das empresas utilizando o modelo VRS proposto	109
Tabela 8 – Cluster médio dos setores	114
Tabela 9 – <i>Rankings</i> e eficiências das DMUs usando os modelos DEA-OCT e OCT	135
Tabela 10 – <i>Ranking</i> geral e eficiências das DMUs eficientes de cada setor	168
Tabela 11 – Número de DMUs de cada setor por cluster	171
Tabela 12 – Estatística descritiva dos dados para os modelos propostos (dados em milhares de dólares)	177
Tabela 13 - Coeficiente de correlação Tau de Kendall	181
Tabela 14 - Resultados das DMUs eficientes no exemplo simulado	184

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BCC – Modelo DEA para Retorno Variável de Escala de Banker, Charnes e Cooper

CEF – Custo de Estoque Final

CEI -Custo de Estoque Inicial

CPP – Custo de Produção do Período

CPV – Custo do Produto Vendido

CRR – Modelo DEA de Charnes, Cooper e Rhodes

CRS – Constant Returns to Scale (Retorno Constante de Escala)

DEA – Data Envelopment Analysis (Análise Envoltória de Dados)

DDEA – Dynamic DEA (DEA Dinâmico)

DMU – Decision-Making Unit (Unidade Tomadora de Decisão)

OCT – Optimal Control Theory (Teoria do Controle Ótimo)

SBM – Slack-Based Measure (Medida de eficiência Baseada em Folga)

VRS – Variable Returns to Scale (Retorno Variável de Escala)

LISTA DE SÍMBOLOS

C_d é o custo unitário do bem vendido;

C_f é o custo unitário do estoque final;

C_i é o custo unitário do estoque inicial;

C_p é o custo unitário de produção;

C_{j0}^{p*} é o custo total ótimo de *inputs* e

Cx_{j0}^p é a projeção do custo total ótimo de *inputs* a ser otimizado,

Cx_{j0} é o custo total observado de *inputs*.

Cx_{jk} é o custo total observado de *inputs* da k-ésima DMU,

Cy_{jk} é o preço total observado de *outputs* da k-ésima DMU,

Cz_{0t}^{-p} é a projeção do custo do link de *input* (custo do estoque inicial) no período t ,

Cz_{0t}^{+p} é a projeção do custo do link de *output* (custo do estoque final) no período t ,

$c(z_m(t))$ é o custo de investimento,

CES é o “custo do estoque de segurança”

CES_k é o valor alvo do custo do estoque da k-ésima DMU,

CES_{z0t} são variáveis de linearização da DMU em análise no período t ,

ES é o estoque de segurança;

$e^{-\rho t}$ é o fator de desconto

F_{Safety} é o fator de segurança;

H é o Hamiltoniano

I_f é o nível de estoque final;

I_i é o nível de estoque inicial;

$I(t)$ é a função de estoque ao longo do tempo

I_0 é o estoque inicial do primeiro período ($t=0$),

$I(T)$ é o nível de estoque no último período T do horizonte de tempo,

$\hat{I}$ é o valor alvo do estoque;

J é a função objetivo de custo;

m é o número de *outputs* analisados;

n é o número de *inputs* analisados;

P é a produção;

$P(t)$ é a função de produção ao longo do tempo

$\hat{P}$ é o valor alvo da produção;

q_j é o custo unitário observado de *inputs*,

$q_m(t)$ é o preço do *input* capital e

R é a receita unitária;

S é a demanda;

s_h^{free} e s_l^{free} são as folgas que denotam o desvio do link

S_{xt}^- é a folga do *input* no período t ,

S_{zt}^- é a folga do link de *input* no período t ,

S_{zt}^+ é a folga do link de *output* no período t ,

S_{yt}^+ é a folga do *output* no período t ,

t é o período de tempo;

T é o último período do horizonte de tempo analisado;

u_i é o peso do i -ésimo *output*;

v_j , o peso do j -ésimo *input*;

w_0 é a variável de escala

x_{j0}^p é a projeção do *input* a ser otimizado,

x_{j0}^{p*} é a quantidade ótima de *inputs*,

x_{j0} , a quantidade do *j*-ésimo *input*;

x_{jk} , a quantidade do *j*-ésimo *input*;

$x_m(t)$ é o *input* capital no tempo *t*,

$\dot{x}_m(t)$ é a expansão do *input* capital (derivada do *input* capital em relação ao tempo),

y_{i0} é a quantidade do *i*-ésimo *output* da DMU analisada;

y_{ik} é a quantidade do *i*-ésimo *output* da *k*-ésima DMU;

z é o número de DMUs analisadas.

z_{hk} é a *h*-ésima medida intermediária da *k*-ésima DMU;

z_{lk} é a principal variável intermediária de controle da *k*-ésima DMU;

z^+ é o valor da variável intermediária no final do período;

z^- é o valor da variável intermediária no início do período;

z_{0t}^{+p} é a projeção da variável z^+ ;

z_{0t}^{-p} é a projeção da variável z^- ;

$\dot{z}_l(t)$ é a derivada da principal variável intermediária de estado em relação ao tempo *t*

$z_m(t)$ é o investimento bruto,

σ_{CPV} é o desvio-padrão do custo total do produto vendido;

σ_{SLT} é o desvio-padrão da demanda durante o *lead time*;

σ_S é o desvio-padrão da demanda;

δ é a taxa de depreciação,

λ_k é a contribuição da *k*-ésima DMU para a meta da DMU analisada;

ρ é a taxa de desconto;

θ é a eficiência relativa da DMU analisada;

θ_{ae} é a eficiência alocativa

θ_{ce} é a eficiência de custo

θ_{nce} é a nova eficiência de custo

θ_{te} é a eficiência técnica.

θ_{cek}^{std} é a eficiência normalizada da k-ésima DMU,

θ_{ncek}^{std} é a nova eficiência de custo normalizada da k-ésima DMU,

$\max\{\theta_{cek}\}$ é a maior eficiência das eficiências de custo das k DMUs.

$\max\{\theta_{ncek}\}$ é a maior das novas eficiências de custo dentre as k DMUs.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	31
1.1. Problema de pesquisa	33
1.2 Objetivos	34
1.3. Justificativa e originalidade.....	35
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	38
2.1. Gestão e controle de estoque	38
2.1.1. Custos	38
2.1.1.1 Outras relações e medidas financeiras.....	40
2.1.2. Estoque de segurança	41
2.2. Desempenho de sistemas dinâmicos	42
2.2.1. Teoria do controle ótimo	42
2.2.1.1 História da Teoria do Controle Ótimo, expansão do Cálculo Variacional e Programação Dinâmica	43
2.2.1.2. Formulações e Aplicações da OCT à sistemas de controle de estoque	44
2.2.1.3. Como os modelos de OCT funcionam	48
2.2.1.4. Métodos para resolver problemas de OCT.....	50
2.2.2. Eficiência.....	53
2.2.3. Análise Envoltória de Dados (DEA).....	54
2.2.4. DEA alocativo	57
2.2.5. DEA dinâmico.....	58
3. MÉTODO DE PESQUISA.....	62
3.1. Amostra de Dados e Variáveis de Pesquisa	66
3.2. Definição da aplicação empírica e como será tratada	70

4. MODELOS PROPOSTOS.....	72
4.1. Modelo DEA-OCT a tempo contínuo para cálculo da eficiência de custo	72
4.2. Modelo DEA-OCT a tempo discreto para cálculo da eficiência de custo.....	74
4.3. Modelo DEA-OCT a tempo discreto para cálculo da Nova Eficiência de Custo.....	76
4.4. Modelo DEA-OCT a tempo discreto para cálculo da Nova Eficiência de Custo com penalização e custo de ajustamento.....	77
4.5. Extensões adicionando ou retirando restrições e seus efeitos (VRS, $x_0 t p \leq P_0 t$, I0 ou CEI01)	80
4.6. Modelo OCT como ferramenta de benchmarking para cálculo da eficiência de custo.....	82
4.7. Modelo OCT como ferramenta de benchmarking para cálculo da Nova Eficiência de Custo...	84
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES	87
5.1 Solução analítica do modelo a tempo contínuo proposto.....	87
5.3 Modelo discreto e discussão sobre as soluções ótimas (relações entre custos e eficiências)	89
5.4. Aplicação em exemplo simulado para mostrar como funciona o modelo DEA-OCT a tempo discreto para a nova eficiência de custo	90
5.5. Aplicação empírica usando o modelo a tempo discreto com estimação de custos unitários e quantidades.....	93
5.6. Aplicação Empírica usando o modelo a tempo discreto com custos totais para cálculo da nova eficiência de custo com suposições de CRS e VRS	107
5.7. Aplicação empírica usando o modelo OCT (sem DEA) como ferramenta de benchmarking para cálculo da eficiência de custo com e sem valores alvos.....	111
5.8. Aplicação empírica usando o modelo DEA-OCT com penalização para nova eficiência de custo e pressuposto VRS	112
5.9 Correlação e Concordância de Kendall	113
5.10. Clusterização Onion	114
6. CONCLUSÕES	116
6.1. Trabalho futuros	120
REFERÊNCIAS.....	121
APÊNDICE A - SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO	130
APÊNDICE B – RANKING E EFICIÊNCIAS (MODELO DEA-OCT PROPOSTO E OCT)	135

APÊNDICE C – EFICIENTES POR SETOR	168
APÊNDICE D - CLUSTERS	171
APÊNDICE E – ESTATÍSTICA DESCRITIVA POR SETOR.....	177
APÊNDICE F – COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO TAU DE KENDALL.....	181
APÊNDICE G – RESULTADOS DAS DMUS EFICIENTES NO EXEMPLO SIMULADO.....	184
APÊNDICE H – PUBLICAÇÕES (ACEITAS E SUBMETIDAS) RELACIONADAS À PESQUISA	187

1. INTRODUÇÃO

Um dos indicadores de desempenho de sistemas produção-estoque é o nível de serviço (quantidade da demanda atendida, em porcentagem), que está relacionado com o problema de ruptura de estoque, pois a demanda deixa de ser totalmente atendida quando ocorre a falta de estoque. Outro problema que pode ser medido é o excesso de estoque.

Segundo Aguiar e Sampaio (2013) poucos estudos sobre falta de estoque foram realizados no Brasil, mas essa ruptura de estoque é reconhecida como sendo um problema crítico da gestão de estoque, pois deixa-se de atender uma parte da demanda e distorce sua previsão, aumentando os erros que resultam em perdas de receita ou investimentos exagerados em estoque.

Estoques são itens acumulados por determinado tempo para atender necessidades futuras de consumo dos clientes internos ou externos, ou seja, um *buffer* (também chamado de “pulmão”, que é a diferença entre a produção para indústrias, ou compras para comércio, e a demanda) entre o suprimento e a demanda (GODINHO FILHO, FERNANDES, 2010, p. 163) e existirão em um sistema produtivo sempre que houver uma diferença entre a taxa de suprimento e a de demanda, sendo que, quando a taxa de suprimento for maior do que a de demanda, haverá um aumento do estoque (Figura 1); quando for menor, o estoque diminuirá (SLACK, CHAMBERS, JOHNSTON, 2008).

Figura 1 – Variação de Estoque

Segundo Hobbs, “um estoque é justificado se você, ao desfazer-se dele, tiver de perder dinheiro” (HOBBS, 1976, p. 15), mas também é conveniente tentar minimizar os níveis de estoque e, conseqüentemente, os custos.

Na prática, embora produtos exclusivos e uma marca forte sejam fatores importantes, isso não garante o sucesso de um negócio, pois o gerenciamento adequado do estoque também é fundamental. Um estoque inadequado pode inviabilizar um negócio, pois uma manutenção de estoque superestimada incorre em custos altos, que podem facilmente superar a margem de lucro. (ZAPAROLLI, 2009). Já quando há falta de estoque, também pode inviabilizar um negócio, pois um suprimento confiável tem mais impacto no lucro do que a própria variabilidade da demanda (ZHU, 2013). Ou seja, ambos os casos podem inviabilizar um negócio, mas perder demanda por falta de estoque tem um impacto mais negativo no lucro do que ficar com excesso de estoque por uma variação aleatória da demanda. Então deve-se minimizar o estoque, mas mantendo um estoque de segurança para cobrir atrasos e altas variações.

Uma das maneiras de tentar minimizar os custos associados ao estoque e à produção, é utilizar a Teoria de Controle Ótimo (OCT, do inglês *Optimal Control Theory*), que serve para otimizar o controle de sistemas dinâmicos, aplicada ao modelo produção-estoque para encontrar funções dinamicamente ótimas de produção e estoque (SETHI, THOMPSON, 2006).

A partir das quantidades produzidas e estocadas ao longo do tempo, com base em uma demanda e levando em conta os custos, é possível analisar o desempenho dos sistemas de controle de estoque de Unidades Tomadoras de Decisão (DMUs, do inglês *Decision Making Units*) por meio da Análise Envoltória de Dados (DEA, do inglês *Data Envelopment Analysis*).

Segundo Reinas, Mariano e Rebelatto (2011), uma DMU é um sistema autônomo que transforma um conjunto de insumos ou entradas (*inputs*) em um conjunto de produtos ou saídas (*outputs*) e a DEA é um método não paramétrico de programação matemática usada para medir a eficiência relativa de DMUs em um sistema com múltiplas variáveis de *inputs* e *outputs* (respectivamente insumos e produtos).

Com o desenvolvimento da DEA, outras características foram incorporadas, como as medidas intermediárias ou variáveis de ligação (*carry-over* e *link*), por exemplo, para se atribuir interdependência entre períodos de tempo ou redes de estruturas (LIANG, COOK, ZHU, 2008;

TONE, TSUTSUI, 2010, 2014; KAO, HWANG, 2010; DESPOTIS, KORONAKOS, SOTIRO, 2016).

Essas variáveis quase sempre estão associadas a modelos dinâmicos, de rede, ou de dois estágios. Segundo Fallah-Fini, Triantis e Johnson (2014), estoque é um dos cinco fatores mais comuns a que se atribui a interdependência temporal entre diferentes períodos, no contexto de eficiência dinâmica

1.1. Problema de pesquisa

Segundo Fallah-Fini, Triantis e Johnson (2014) que trata do estado da arte sobre eficiência dinâmica, um problema conhecido relacionado à DEA é a relação entre a demanda e a produção, que já foi estudado de maneira estática, mas que seria interessante a incorporação da relação entre variáveis de sistemas produção-estoque, com interação entre períodos para atender a demanda, considerando antecipação e postergação de custos, para o estudo desse problema nos modelos dinâmicos.

No contexto estático, por exemplo, Johnson e Ruggiero (2011) propuseram um modelo DEA para medir a eficiência de receita de DMUs que ao produzir diferentes níveis de *outputs* permitem que a variável preço seja determinada por uma curva de demanda, ao invés do modelo clássico com preços constantes que não consideram esse ajuste. Também, Cherchye, Kuosmanen, e Post (2002) analisaram a consistência dos dados de produção com comportamento de otimização econômica, no contexto de análise de eficiência de custo e lucro, usando informações de preço, custo, produção e demanda.

No contexto dinâmico, especificamente em sistemas produção-estoque, pode acontecer que todas as DMU obtenham máxima eficiência técnica, mesmo com excesso e falta de estoques, uma vez que a relação entre as três variáveis (demanda, produção e estoque) é constante. Além disso, quando dois ou mais períodos são considerados, por exemplo, se forem feitos vários estudos estáticos, um para cada período, poderão ser obtidos resultados menos realistas, com projeções ótimas que não consideram as conexões entre períodos, que são impossíveis de se obter na prática. Esse problema pode ser resolvido usando um modelo dinâmico que considere esses *links* entre períodos, que é mais realista.

Outro ponto importante de ser analisado, é que nem sempre é desejável um nível de estoque muito baixo ou igual a zero, pois assim, uma alta variação de uma demanda incerta ou um atraso no *lead time* de fornecimento (também chamado de tempo de ressuprimento), pode

levar à ocorrência de falta de estoque, que diminui a demanda atendida, podendo gerar um prejuízo maior do que os custos em se manter um pequeno excesso de estoque. Ou seja, uma alta variação da demanda aumenta o risco de falta de estoque e esse problema pode ser resolvido incorporando um estoque mínimo a ser mantido para cobrir essa variação da demanda durante o *lead time*. Esse estoque também é chamado de estoque de segurança e pode ser calculado com base no desvio-padrão da demanda durante o *lead time*.

Nos modelos, essa incorporação pode ser feita utilizando uma penalização por desvio de um valor alvo na função objetivo de minimização de custos, onde esse possível valor alvo do nível de estoque é o estoque de segurança, enquanto um possível valor alvo da produção é a demanda, transformando a função objetivo em uma minimização de custos de ajustamento.

Com esse entendimento, este trabalho se baseou nas seguintes questões de pesquisa:

Como incorporar a relação entre demanda, produção e estoque, para avaliar o sistema de controle de estoque por meio da Análise Envoltória de Dados (DEA) e da Teoria de Controle Ótimo (OCT), auxiliando a tomada de decisão das DMUs para torná-las mais competitivas?

Qual a eficiência de controle (ou índice de performance que mistura eficiência e valores alvos/preferência gerencial) de uma DMU para atingir um valor alvo baseado na variação da demanda incerta, estoque de segurança e custos de ajustamento (eficiência em atender a demanda incerta, mas sem aumentar o risco de falta de estoque)?

1.2 Objetivos

Com esse entendimento, o objetivo geral do presente trabalho é desenvolver modelos de eficiência dinâmica de custo que incorporem a relação entre demanda e produção, e consequentemente a variável estoque que surge desta relação, para avaliar a eficiência do controle de estoque de DMUs. Como são usados dados de vários setores, ao final é utilizado o método de agrupamento conhecido como “cebola” (*onion clustering*) com as DMUs todas juntas para verificar se os setores se agrupam por nível de eficiência.

Para atingir tais objetivos, serão realizados os seguintes passos:

- Relacionar/unificar a nomenclatura e conceitos/tipos de variáveis da OCT e da DEA dinâmica;

- Determinar um modelo OCT que relacione os *inputs*, *outputs* e variáveis intermediárias dinamicamente de maneira ótima;
- Usar modelos OCT para calcular eficiência de custo como uma ferramenta de *benchmarking*;
- Aprimorar o modelo integrado DEA-OCT de Sengupta, estendendo a aplicação para sistemas produção-estoque;
- Estender o modelo proposto para aplicar em situações onde se possui apenas os dados de custos totais (não se tem as informações de custos unitários e quantidades), para o cálculo da Nova Eficiência de Custo;
- Incorporar estoque de segurança aos modelos;
- Estudar possíveis extensões adicionando ou retirando restrições e seus efeitos;
- Aplicar os modelos a exemplo simulado para ilustrar o funcionamento dos modelos;
- Aplicar modelo proposto à dados reais, comparando o desempenho de empresas de países das Américas do Sul e do Norte (EUA, Brasil e Chile), depois somente de países emergentes economicamente (Brasil e Chile), posteriormente focando no setor de comércio;
- Usar a técnica Onion para verificar se as DMUs se agrupam por setores de acordo com suas eficiências.

Para atender aos objetivos, será levado em consideração um tipo de restrição chamada variacional (ou de diferença de estado) considerada no modelo dinâmico de Sengupta (1995), que advém da Teoria do Controle Ótimo (OCT).

1.3. Justificativa e originalidade

Algumas das possíveis aplicações da OCT, que envolve o controle de sistemas dinâmicos, estão na gestão da produção e no controle de estoque (SETHI; THOMPSON, 2006).

Este trabalho pode ser justificado devido ao fato de que a incorporação da demanda em modelos de eficiência dinâmica envolvendo produção, levantada por Fallah-Fini, Triantis e Johnson (2014), pode ser feita por meio da integração entre DEA e OCT, do ponto de vista

teórico, para analisar a relação entre produção e demanda (e a variável estoque que surge desta relação).

Sendo assim, o modelo proposto nesse trabalho pode ser considerado uma extensão do modelo de Sengupta (1999), por ser um modelo variacional, mas com restrições e variáveis de modelos mais recentes (como as medidas intermediárias) e considerando características de sistemas produção-estoque.

Do ponto de vista prático, além do que foi exposto de forma geral na introdução, que um estoque inadequado pode inviabilizar um negócio, uma das motivações para este trabalho foi a falta de estoque em uma das DMUs, que foi se estendendo, incorrendo em custos por causa disso e acumulando prejuízos durante meia década, até que no último ano isso a levou a fazer um pedido de recuperação judicial (EXAME, 2018).

Os resultados desse trabalho poderão servir de apoio a estudos sobre análise de sistemas de controle de estoque no contexto de eficiência dinâmica. Diversos modelos de eficiência foram desenvolvidos por outros pesquisadores e utilizados em diversas áreas, sendo alguns utilizados para avaliarem sistemas de produção-estoque, mas faltam trabalhos que se utilizam de conceitos variacionais para modelarem a relação entre demanda, produção e estoque nesses sistemas.

Os principais resultados deste trabalho são os modelos propostos. A principal inovação é a inclusão de uma restrição que incorpora a característica de variáveis relacionadas ao longo do tempo para medir a eficiência dinâmica e a aplicação em sistemas de controle de estoque (considerando a dinâmica específica deste tipo de sistema). Como o modelo envolve a minimização de custos, o modelo é alocativo e é calculada a eficiência de custo.

As principais contribuições para a OCT, é possibilitar o uso desta como a ferramenta de *benchmarking* DEA no contexto de fronteiras de eficiência dinâmica, ou seja, usar OCT como um modelo concorrente para o cálculo de eficiência baseado apenas nos dados da própria empresa e de uma projeção otimizada, sendo esta abordagem vantajosa quando não há dados disponíveis de outras empresas.

Já do ponto de vista de DEA, as principais contribuições são: estender o modelo de Sengupta (1995), incluindo restrições de modelos mais recentes e possibilitar o cálculo de eficiência quando há relação entre as variáveis (variável intermediária relacionada com *input* e *output*), e aumentar o horizonte de aplicações de modelos variacionais, aplicando DEA-OCT à sistemas de produção-estoque (já que os modelos DEA-OCT existentes, inclusive o do próprio

Sengupta (1995), são aplicados somente a situações que envolvem capital e custos de ajustamento).

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo aborda gestão e controle de estoque; assim como conceitos e modelos utilizados para calcular eficiência e medir o desempenho de sistemas, envolvendo desde simples conceitos até formulações matemáticas complexas.

2.1. Gestão e controle de estoque

Esta seção traz elementos relativos à gestão e controle de estoque; onde serão abordados alguns conceitos de custos e estoque de segurança que serão utilizados nos modelos DEA-OCT para calcular as eficiências dinâmicas.

2.1.1. Custos

Conforme Ching (1999) e Pozo (2004), a função mais importante do controle de estoque é a administração dos níveis de estoques, sendo que os tipos principais de custos são:

- Custo de produção: é a combinação dos custos envolvidos na produção de uma unidade do produto, incluindo mão-de-obra, materiais e gastos gerais com a fabricação.
- Custo de manutenção de estoque: é a combinação dos custos envolvidos na manutenção do material em estoque (custo de oportunidade, operação, ocupação e obsolescência):
 - Custo de falta: são os custos ocorridos quando houver falta de estoque, como os custos por perda de vendas, multas, ociosidade, entre outros:
 - Custo total: é a soma de todos os custos.

Já de acordo com Araújo e Neto (2010), em relatórios financeiros existem outros tipos importantes de custos:

- Custos de produção do período: custo da produção do período analisado.

$$CPP = C_p * P \quad (2.1)$$

Onde: CPP é o custo de produção do período; C_p é o custo unitário de produção, P é a produção.

- Custo do produto vendido: custo atribuído à produção dos bens vendidos.

$$CPV = C_d * S \quad (2.2)$$

Onde: CPV é o custo do produto vendido; C_d é o custo unitário do bem vendido, S é a quantidade de bens vendidos (igual à demanda atendida).

E os custos de estoque poderiam ser divididos em custo de estoque final e custo de estoque inicial:

$$CEF = C_f * I_f \quad (2.3)$$

$$CEI = C_i * I_i \quad (2.4)$$

Onde: CEF é o custo de estoque final, no fechamento do período em análise; CEI é o custo de estoque inicial, no começo do período em análise (igual ao custo de estoque final do período anterior $t-1$); C_i é o custo unitário do estoque inicial, C_f é o custo unitário do estoque final, I_f é o nível de estoque final, e I_i é o nível de estoque inicial.

Para Engenharia, é possível estimar o custo unitário dos estoques (C_f e C_i) baseado no custo do estoque médio do período $C_d (I_f + I_i)/2$ (GodinhoFilho, e Fernandes, 2010), e sua soma é equivalente às quantidades de estoques final e inicial incorridos em custos médios. Lembrando que o estoque final I_f de um período t é igual ao estoque inicial $I_{i(t+1)}$ do próximo período $t+1$, ou seja, $I_f = I_{i(t+1)}$:

$$\sum_{t=1}^T C_{dt} \frac{(I_{ft} + I_{it})}{2} = C_{d1} \frac{(I_{i1})}{2} + \sum_{1}^{T-1} I_{ft} \frac{(C_{dt} + C_{d(t+1)})}{2} + C_{dT} \frac{(I_{fT})}{2} \quad (2.5)$$

Considerando que os custos são proporcionais ao custo médio do produto vendido C_d da Equação (2.2) para estimar C_f e C_i das Equações (2.3) e (2.4) para períodos intermediários ($t=2, \dots, T-1$), então:

$$C_{f_t} = \frac{(C_{d_t} + C_{d_{t+1}})}{2} \quad (2.6)$$

$$Ci_t = \frac{(Cd_{t-1} + Cd_t)}{2} \quad (2.7)$$

De acordo com Almeida (2007), como há um alto custo associado a estoques, é economicamente viável administrá-lo, de maneira a minimizar os custos associados à produção e à sua manutenção, e um estoque de segurança pode ser incorporado para que não faltem itens com uma possível variação repentina da demanda (além da prevista) e não incorra em custos de falta.

2.1.1.1 Outras relações e medidas financeiras

De forma similar à relação entre Produção P, Demanda S, e Estoques If e Ii na Equação (2.8) de variação de estoque:

$$P_t = S_t + I_t - I_{t-1} \quad (2.8)$$

que é a equação das restrições do modelo OCT. Já em termos de custos totais, a relação é similar, conforme é descrito por Araújo and Neto (2010):

$$CPP = CPV + CEF - CEI \quad (2.9)$$

Onde: CPP é o custo de produção do período; CPV é o custo do período vendido; CEF é o custo de manter o estoque no final do período, e CEI é o custo de manter o estoque no início do período (igual ao custo de estoque final do período anterior).

Para um dos modelos DEA-OCT para eficiência de custo (unitário) é necessário usar o custo relativo (CR) para gerar \$1,00 de receita unitária ($R = 1$) como uma medida financeira, porque não é possível estimar o custo unitário real de cada produto e suas quantidades, usando apenas as informações de custos totais de relatórios contábeis e financeiros. Então, pode-se decompor a receita em receita unitária (R) por produto vendido e demanda (S):

$$\text{Receita} = R * S$$

E o Custo Relativo é Calculado como:

$$CR = \frac{CPV}{\text{revenue}} = \frac{Cd * S}{R * S} = \frac{Cd}{R} \quad (2.10)$$

Onde CR é o custo relativo, CPV é o custo do produto vendido, Cd é o custo unitário do produto vendido, S é a demanda, R é a receita unitária.

Para $R = 1$, $CR = Cd$.

2.1.2. Estoque de segurança

Existem vários tipos de modelos de controle de estoque considerados pelos autores, mas alguns apenas possuem nomes diferentes com a mesma formulação. Por exemplo, o que é chamado por Hobbs (1976) de estoque para greves, é o mesmo que autores mais recentes, por exemplo, Pozo (2004) e Correa, Giansesi e Caon (2009), chamam de estoque de segurança.

Em vários trabalhos, ao considerar um modelo estocástico, assume-se que a demanda segue uma distribuição normal, ou uma aproximação pela uma curva normal.

Segundo Correa, Giansesi e Caon (2009), o estoque de segurança pode ser calculado de forma mais geral utilizando uma abordagem probabilística.

- Estoque de segurança (abordagem probabilística):

$$ES = F_{Safety} \cdot \sigma_{SLT} \quad (2.11)$$

Onde: ES é o estoque de segurança; F_{Safety} é o fator de segurança (em função do nível de serviço); e σ_{SLT} é o desvio-padrão da demanda durante o *lead time*, que pode ser modelado de várias maneiras diferentes.

O F_{Safety} é calculado, em função do nível de serviço, com base na distribuição normal de probabilidade.

O desvio-padrão da demanda durante o período do *lead time* ($\sigma_{DduranteLT}$) pode ser calculado, segundo Correa, Giansesi e Caon (2009), das seguintes formas:

- Desvio-padrão da demanda durante o *lead time* com variação tanto da demanda quanto do *lead time* (probabilidade conjunta):

$$\sigma_{SLT} = \sqrt{\sigma_S^2 \cdot \sigma_{LT}^2 + S^2 \cdot \sigma_{LT}^2 + LT^2 \cdot \sigma_S^2} \quad (2.12)$$

- Desvio-padrão da demanda durante o *lead time* com variação tanto da demanda quanto do *lead time* (movimento browniano):

$$\sigma_{SLT} = \sqrt{S^2 \cdot \sigma_{LT}^2 + LT \cdot \sigma_S^2} \quad (2.13)$$

- Desvio-padrão da demanda durante o *lead time* com variação da demanda e *lead time* constante, ou seja, $\sigma_{LT} = 0$:

$$\sigma_{SLT} = \sigma_S \cdot \sqrt{LT} \quad (2.14)$$

- Desvio-padrão da demanda durante o *lead time* com demanda constante e variação do *lead time*, ou seja, $\sigma_S = 0$:

$$\sigma_{SLT} = \sigma_{LT} \cdot S \quad (2.15)$$

Onde: σ_{SLT} é o desvio-padrão da demanda durante o *lead time*; S é a Demanda; σ_{LT} é o desvio-padrão do *lead time*; LT é o *lead time* de ressuprimento; σ_S é o desvio-padrão da demanda.

Nesta tese será utilizado um fator de segurança igual a 1 ($F_{Safety} = 1$) e um desvio-padrão da demanda durante o *lead time* com *lead time* constante e unitário ($LT = 1$, $\sigma_{LT} = 0$, $\sigma_{SLT} = \sigma_S$). Isso significa que o nível de serviço baseado na distribuição normal de probabilidade (para $F_{Safety} = 1$) é aproximadamente 84,14% e $\sigma_{SLT} = \sigma_S$, para assim ser possível comparar as unidades tomadoras de decisão com os mesmos parâmetros.

2.2. Desempenho de sistemas dinâmicos

Na próxima seção serão abordados conceitos referentes a eficiência, Análise Envoltória de Dados (DEA), DEA dinâmica, e OCT. Um dos modelos que será apresentado foi desenvolvido por Sengupta (1999), para calcular a eficiência de custo (e não a eficiência técnica), utilizando um funcional de custo a ser otimizado com uma equação de estado descrevendo a depreciação do capital (típicos de OCT), e com restrições de eficiência das DMUs (restrições do DEA).

2.2.1. Teoria do controle ótimo

A OCT, assim como outras técnicas de Pesquisa Operacional (PO), consiste de modelos com uma função objetivo a ser otimizada, sujeita a restrições, mas otimizando uma função com base em uma variável de controle (e uma variável de estado que varia conforme o controle). No

controle contínuo, a função objetivo é um funcional com integral e uma das restrições é variacional com uma derivada. Também existe o controle a tempo discreto, assim como as aproximações, discretizações das funções contínuas, e as resoluções por métodos numéricos.

2.2.1.1 História da Teoria do Controle Ótimo, expansão do Cálculo Variacional e Programação Dinâmica

Segundo Sethi e Thompson (2006), o Cálculo Variacional (CV) foi criado por Euler e Lagrange, quase imediatamente após a invenção e formalização do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) por Newton e Leibniz.

Usa-se o CDI em problemas de otimização onde quer se encontrar o valor extremante de uma variável (ex: $x = x^*$) que maximize ou minimize uma função $f(x)$; já o CV é usado quando se quer encontrar uma função $q(t)$ que otimize uma integral (ex: $\int_a^b L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$) ou um funcional (uma função composta de outras funções e variáveis), sujeito a condições de contorno, iniciais e finais (ex: $q(a) = q_a, q(b) = q_b, a \leq t \leq b$).

Embora exista discondância quanto à origem, ao ano e aos autores que foram os primeiros a desenvolver a OCT (KHARATISHVILI, 1997; PESCH, BULIRSCH, 1994; PESCH, PLAIL, 2009, 2012; SUSSMANN, WILLEMS, 1997), pois desde a criação do Cálculo Variacional, vários autores resolveram problemas de controle ótimo, desenvolveram condições e equações aplicáveis a situações específicas; pode-se dizer que os principais autores que contribuíram para o desenvolvimento de condições necessárias e suficientes para máximos (e mínimos) locais e globais, em casos gerais, e para a forma como os problemas de controle ótimo são tratados hoje em dia, foram Pontryagin et al (1962) e Bellman (1952).

A primeira formulação rigorosa da Teoria do Controle Ótimo (OCT), bem como o desenvolvimento do “Princípio do Máximo de Pontryagin”, foi feita em 1956 (e traduzida para o inglês 6 anos depois) pelo russo Pontryagin (Pontryagin et. al., 1962; Kharatishvili, 1997).

Uma abordagem alternativa utilizada para resolver os problemas de controle ótimo, além do CV e dos princípios inerentes da própria OCT, é a Programação Dinâmica. Até então chamada de “tomada de decisão multiestágio”, foi criada por Bellman (1952) e aprimorada simultaneamente ao desenvolvimento da OCT.

Para resolver os problemas de controle ótimo através de Programação Dinâmica, foi necessário estender o “Princípio de Otimalidade de Bellman” para que se pudesse resolver tais problemas em casos gerais. Posteriormente foi provada a equivalência entre o gradiente da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman e a equação de co-estado do princípio de Pontryagin (PESCH, PLAAIL, 2009, 2012).

Maiores detalhes sobre a história da Teoria do Controle Ótimo, Cálculo Variacional e Programação Dinâmica e sobre como outros autores contribuíram para o desenvolvimento das teorias e a resolução do primeiro problema de OCT (braquistócrona) sob diferentes perspectivas (princípio de Fermat, métodos geométricos, CV, OCT, etc), podem ser encontrados em Pesch e Bulirsch (1994), Pesch e Plail (2009, 2012), Kharatishvili (1997), Sussmann e Willems (1997), e Dreyfus (2002).

2.2.1.2. Formulações e Aplicações da OCT à sistemas de controle de estoque

A OCT foi desenvolvida como uma extensão do Cálculo Variacional e da Programação Dinâmica, para otimizar um funcional, considerando variáveis de estado $x(t)$ e de controle $u(t)$, com restrições de desigualdade, dinâmicas e variacionais, que descrevem, restringem e controlam a dinâmica de um sistema.

As variáveis de controle $u(t)$ são, basicamente, as variáveis a serem otimizadas, as quais se pressupõe que a unidade tomadora de decisão pode controlá-las (por exemplo, uma empresa decide as quantidades de produtos que serão produzidas). As variáveis de estado $x(t)$ são, basicamente, as variáveis que não são diretamente controláveis, mas que variam conforme o controle das variáveis $u(t)$ (por exemplo, uma empresa que sempre atende a sua demanda, não controla diretamente o seu nível de estoque, mas pode decidir o quanto produzir para atender a demanda e a variação do estoque surge da relação entre a produção e a demanda) e atingem o ótimo $x^*(t)$ quando o ótimo é alcançado pelas variáveis $u^*(t)$.

Uma formulação padrão simples de OCT tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \max_{u(t)} \int_{t_0}^T -L(u(t), x(t), \dot{x}(t), t) dt \\ \text{s. t.: } & \begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) + c \\ x(t_0) = x_0 \\ x(T) = x_T \\ t_0 \leq t \leq T \end{cases} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Onde: L é o funcional a ser maximizado, t é o período de tempo, $u(t)$ é a variável de controle, c é um valor conhecido (em alguns casos pode ser uma função conhecida), $x(t)$ é a variável de estado, $\dot{x}(t)$ é a variação (derivada) da variável de estado, usada para descrever a dinâmica do sistema com a equação de estado, x_0 é o valor inicial, x_T é o valor final, e $t_0 \leq t \leq T$ é o horizonte de tempo.

Segundo Bertsekas (2005), um dos modelos mais simples da aplicação da Teoria do Controle Ótimo consiste na minimização de uma função quadrática de custos em um sistema linear de controle de estoque, para obter as funções ótimas de produção e estocagem, relacionadas à demanda dinamicamente.

Segundo Sethi e Thompson (2006), métodos de otimização são aplicados a problemas de produção e estoque desde a criação do clássico modelo estático do Lote Econômico de Compra (LEC). Um importante modelo dinâmico de controle de estoque e planejamento da produção, chamado de HMMS (acrônimo do nome dos autores: Holt, Modigliani, Muth e Simon), foi criado por Holt, Modigliani, Muth e Simon (1960) e resolvido utilizando técnicas de CV.

Outros modelos importantes, dentro do contexto dinâmico e de OCT, foram desenvolvidos por Thompson e Sethi (1980), considerando as restrições do modelo HMMS, mas otimizando diferentes funções objetivo, e resolvendo através da OCT.

Um dos modelos consiste de uma função objetivo J escrita como minimizar os custos associados à produção e estocagem no tempo t , e sujeita à condição da equação diferencial de estado que representa a variação do estoque (diferença entre a produção P e a demanda S). Esse modelo proposto por Sethi e Thompson (2006) é formulado como na Equação (2.17):

$$\begin{aligned}
\max_{P(t)} J &= \int_0^T -[C_e \cdot I(t) + C_p \cdot P(t)] dt \\
\text{s. t.: } &\begin{cases} \dot{I}(t) = \frac{\partial I}{\partial t} = P(t) - S(t) \\ I(0) = I_0 \\ I(T) \geq I_{\min} \\ P_{\min} \leq P(t) \leq P_{\max} \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

A função objetivo de custo J pode ser interpretada da seguinte maneira: T é o último período do horizonte de tempo analisado, C_e é o custo unitário do estoque, $I(t)$ é a função de estoque ao longo do tempo, consequentemente $C_e \cdot I(t)$ é o custo total de estocagem, C_p é o custo unitário de produção, $P(t)$ é a função de produção ao longo do tempo, que deve respeitar o intervalo $[P_{\min}; P_{\max}]$, consequentemente $C_p \cdot P(t)$ é o custo total de produção, I_0 é o estoque inicial do primeiro período ($t=0$), $I(T)$ é o nível de estoque no último período T do horizonte de tempo, $I_{\min}$ é uma quantidade mínima de estoque, consequentemente $I(T) \geq I_{\min}$ é o nível de estoque mínimo que deseja-se estar no último período T do horizonte de tempo analisado, caso não deseje que o estoque seja nulo no último período.

Essa função objetivo pode ser modificada, por exemplo, para ter pontos ótimos em suas metas, ou seja, penalizar as funções que fugirem de seus valores alvos (também chamados de “metas” na literatura de OCT, mas que não é a mesma “meta” encontrada na literatura sobre DEA ao multiplicar um dado pela eficiência); para incluir um fator de desconto que traga os custos para o presente; para analisar o sistema em um horizonte de tempo tendendo ao infinito; etc. Três exemplos de função penalização baseada em valores alvos (Equação (2.18) com função de penalização, sem desconto, Equação (2.19) que é a versão discreta da Equação (2.18), e a Equação (2.20) que é a Equação (2.18) com desconto), desenvolvida por Sethi e Thompson (2006), têm respectivamente as seguintes formulações:

$$\max_{P(t)} J = \int_0^T - \left[\frac{C_e}{2} \cdot (I(t) - \hat{I})^2 + \frac{C_p}{2} \cdot (P(t) - \hat{P})^2 \right] dt \tag{2.18}$$

A função objetivo J , com função de penalização, sem desconto, pode ser interpretada da seguinte maneira: T refere-se ao último período do horizonte de tempo e o problema pode ser de horizonte infinito ($T \rightarrow +\infty$), $\frac{C_e}{2} \cdot (I(t) - \hat{I})^2$ impõe que terá custos de estocagem C_e

maiores quando o nível de estoque I estiver abaixo do estoque de segurança $\hat{I}$ (ex: custo por falta de estoque, por não atender a demanda, senão a melhor alternativa seria 0 de estoque) ou acima de $\hat{I}$ (ex: custo por excesso de estoque), e $\frac{c_p}{2} \cdot (P(t) - \hat{P})^2$ impõe que terá custos de produção C_p maiores quando a taxa de produção P estiver abaixo da meta de produção $\hat{P}$ (ex: custo por não atingir a meta de produção, por não atender a demanda, senão a melhor alternativa seria 0 de produção) ou acima de $\hat{P}$ (ex: custo por excesso de produção, por gerar um excesso de estoque).

A versão discreta (Equação (2.19)) dessa função objetivo da Equação (2.18) de Sethi e Thompson (2006):

$$\max_{P(t)} J = - \left[\frac{c_e}{2} \cdot (I_{i1} - \hat{I})^2 + \sum_1^T \frac{c_e}{2} \cdot (I_{ft} - \hat{I})^2 + \sum_1^T \frac{c_p}{2} \cdot (P_t - \hat{P})^2 \right] \quad (2.19)$$

Que usa os os mesmos termos da Equação (2.18), mas na forma discreta.

E a Equação (2.20) com desconto (SETHI & THOMPSON, 2006):

$$\max_{P(t)} J = \int_0^T -e^{-\rho t} \left[\frac{c_e}{2} \cdot (I(t) - \hat{I})^2 + \frac{c_p}{2} \cdot (P(t) - \hat{P})^2 \right] dt \quad (2.20)$$

A função objetivo J , com função de penalização e com desconto, pode ser interpretada da seguinte maneira: ρ é a taxa de desconto e $e^{-\rho t}$ é o fator de desconto da Equação (2.20). Os demais termos são os mesmos da Equação (2.18).

O modelo a tempo contínuo, possui uma forma a tempo discreto que é equivalente à discretização da função integral pela Soma de Riemann $\int f(t)dt = \sum f_t \Delta t$, com $\Delta t = 1$, e da derivada pela equação de diferença $\frac{df(t)}{dt} = \frac{\Delta f_t}{\Delta t}$, com $\Delta t = 1$ e $\Delta f_t = f_t - f_{(t-1)}$, equivalente ao modelo de tempo discreto de “soma de custos” (Equação (2.21)) de Sethi e Thompson (2006):

$$\begin{aligned}
& \max J = \sum_{t=0}^T -[C_e \cdot I_t + C_p \cdot P_t] \\
& \text{s. t.:} \begin{cases} P_t = S_t + I_t - I_{(t-1)} \\ I_{t=0} = I_0 \\ I_T \geq I_{\min} \\ P_{\min} \leq P(t) \leq P_{\max} \end{cases} \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Este modelo pode ser resolvido por programação linear (assim como DEA), de modo mais rápido e simples do que a versão não-linear. Portanto, para o cálculo da eficiência de custo com um dos modelos propostos, será utilizada a restrição variacional de diferença igual à usada nos modelos de Thompson e Sethi (1980) e Holt et al. (1960), que descreve a variação de estoque $I_t - I_{(t-1)} = P_t - S_t$, a partir de um estoque inicial $I_{t=0} = I_0$. Já a função objetivo, que consiste na minimização de custo, se dá também por encontrar a produção ótima, ou seja, otimizando a variável de controle, pois a variável intermediária de estado (estoque) também será ótima quando o controle e os custos forem ótimos.

Dois exemplos para ilustrar o funcionamento da OCT são dados no tópico 2.2.1.3.

2.2.1.3. Como os modelos de OCT funcionam

Considerando uma empresa com demanda constante S , e nenhum estoque inicial ($I_0 = 0$), que produz P produtos. O *lead time* é constante (unitário) e sem atraso. Como a demanda é constante, a demanda prevista é a demanda média, o estoque de segurança é 0 (porque não há desvio padrão) e o valor alvo de produção é a demanda média.

Neste exemplo teórico, o estoque inicial é igual ao estoque de segurança, portanto o custo mínimo de estoque deve ocorrer quando o nível de estoque igual a 0 é mantido. De acordo com a restrição de variação de estoque, se não houver variação (sempre igual a 0), a produção deve ser igual à demanda (média). O valor alvo da produção é igual à demanda prevista, portanto, os custos devem ser mínimos na solução ótima $I = 0$ e $P = S$ em ambos os modelos OCT Equação (2.19) e Equação (2.21) para todos os períodos, já que tudo é constante.

A Figura 2 é um gráfico da solução ótima deste exemplo constante com $S = 30$, $I_0 = 0$, $C_e = C_p = 1$, para ambos os modelos Equação (2.19) e Equação (2.21), e $\hat{I} = \hat{P} = 0$ para o modelo de penalização Equação (2.19) (nesse caso, ambos os modelos levam aos mesmos resultados).

Figura 2 – Solução ótima do exemplo constante

As soluções dos modelos diferem de acordo com a mudança da demanda e do estoque inicial. O modelo “soma dos custos” Equação (2.21) sempre tende a levar o nível de estoque para 0, a menos que esteja considerando um limite da capacidade de produção P_{max} , mas considerando uma demanda variável, no modelo de penalidade, o estoque de segurança não é 0, então ele tende a levar o nível de estoque para próximo do nível de estoque de segurança. Dependendo da relação entre os custos e valores alvos de produção e estoque, pode ser necessário incorrer em risco de falta de estoque, excesso de estoque, ou de não atingir o valor alvo de produção, para que o modelo obtenha a solução ideal que minimize todos os custos considerados.

A Figura 3 é um gráfico da solução ótima do exemplo variável usando a Equação (2.19) com as demandas $S_1=30$, $S_2=15$, $S_3=30$, $S_4=39$, $S_5=30$, $S_6=15$, $S_7=30$, estoque inicial $I_0=30$, $\hat{I}=9$, $\hat{P}=27$, e os custos unitários de estocagem e de produção $C_e=C_p=1$. Se necessário, usar estoque de segurança (desvio-padrão) $\hat{I}=9$ e meta de produção (média) $\hat{P}=27$ (que são os valores alvos) como uma estimativa para a solução ótima (por exemplo, se for resolver usando alguma metaheurística ou programa de programação não-linear que necessite dessa informação de estimativa inicial) de I e P para os sete períodos. O resultado mostra os valores obtidos para I e P , sendo que é possível observar que as variáveis buscam o custo mínimo oscilando em torno dos valores alvos.

Figura 3 – Solução ótima do exemplo variável (modelo de penalização Equação (2.19))

OCT pode ser aplicada em setores da mesma forma que é aplicada em apenas uma empresa.

2.2.1.4. Métodos para resolver problemas de OCT

Algumas das maneiras de se resolver esses problemas de OCT em sistemas de produção-estoque são:

- Analiticamente (por exemplo, quando a demanda tem uma forma polinomial);
- Princípio do Máximo de Pontryagin;
- Transformada de Laplace;
- Programação matemática;
- Métodos numéricos (por exemplo, Diferença Finita);
- Metaheurísticas.

Normalmente, antes de resolver o problema da OCT é necessário encontrar um sistema de equações diferenciais que descreva o sistema (a partir do modelo inicial), ou simplificar, discretizar e linearizar o modelo (dependendo do método a ser utilizado).

Para transformar o problema em um sistema de equações diferenciais, a partir do Princípio do Máximo de Pontryagin, é necessário, por exemplo, associar uma variável conjunta $\mu_H(t)$ à restrição variacional da Equação (2.17) e adicioná-la à função objetivo da Equação (2.18) para criar um Hamiltoniano:

$$H = \mu_H(t) \cdot (P(t) - S(t)) - \left[\frac{c_e}{2} \cdot (I(t) - \hat{I})^2 + \frac{c_p}{2} \cdot (P(t) - \hat{P})^2 \right] \quad (2.22)$$

Para simplificar a notação, os termos que dependem do tempo serão escritos sem explicitar tal dependência, como $P(t)=P$, $S(t)=S$, $I(t)=I$. De acordo com o Princípio do Máximo de Pontryagin:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial P} = 0 \\ \frac{\partial \mu_H}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial I} \\ \mu_H(T) = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

então:

$$P = \hat{P} + \frac{\mu_H}{c_p} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \mu_H}{\partial t} = c_e \cdot (I - \hat{I}) \quad (2.25)$$

Finalmente, o sistema de equações diferenciais:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\mu_H}{c_p} + \hat{P} - S \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \mu_H}{\partial t} = c_e \cdot (I - \hat{I}) \quad (2.27)$$

Ou uma equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{c_e}{c_p} I = -\frac{c_e}{c_p} \hat{I} - \frac{\partial S}{\partial t} \quad (2.28)$$

Para resolver por Diferença Finita a partir do sistema de equações, é possível encontrar (derivar) a condição de contorno de Neumann (para o tempo final):

$$\frac{\partial I(T)}{\partial t} = \hat{P} - S(T) \quad (2.29)$$

Usando essa condição junto com o valor inicial, temos um problema de valor de contorno com dois pontos (TPBVP, do inglês Two-Point Boundary Value Problem). A matriz tridiagonal utilizada para resolver este problema foi a mesma utilizada em Alves junior e Cari (2017), que foi adaptada de LeVeque (2007), e é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} -(2+k) & 1 & & & & & \\ 1 & -(2+k) & 1 & & & & \\ & 1 & -(2+k) & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -(2+k) & 1 & \\ & & & & -\Delta t & \Delta t & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_n \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\dot{S}_1 - \hat{I} \cdot Ce/Cp) \cdot \Delta t^2 - I_0 \\ (-\dot{S}_2 - \hat{I} \cdot Ce/Cp) \cdot \Delta t^2 \\ (-\dot{S}_3 - \hat{I} \cdot Ce/Cp) \cdot \Delta t^2 \\ \vdots \\ (-\dot{S}_{T-1} - \hat{I} \cdot Ce/Cp) \cdot \Delta t^2 \\ (-S(T) + \hat{P}) \cdot \Delta t^2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Onde: $k = \Delta t^2 \cdot Ce/Cp$, $\dot{S}_t = \frac{S(t+1)-S(t)}{\Delta t}$ é a variação da demanda, $\Delta t = 1$, Ce é o custo unitário de estoque, Cp é o custo unitário de produção, $S(T)$ é a demanda no último período T , $\hat{I}$ é o estoque de segurança, $\hat{P}$ é o valor alvo da produção, e I_t é o nível de estoque no período t .

Outra maneira de resolver é considerando a Equação (2.28) como sendo uma equação diferencial não-homogênea de 2ª ordem. O procedimento completo está no Apêndice A. Outras formas: pode ser por Transformada de Laplace, basta aplicar a transformada diretamente na Equação (2.28), ou por programação matemática, aplicando diretamente na Equação (2.21).

Nas próximas seções serão abordadas a Análise Envoltória de Dados (DEA) e DEA dinâmica, bem como os conceitos de eficiência. Um dos modelos que será apresentado foi desenvolvido por Sengupta (1999), para calcular a eficiência de custo (e não a eficiência técnica), utilizando um funcional de custo a ser otimizado com uma equação de estado descrevendo a depreciação do capital (típicos de OCT), e com restrições de eficiência das DMUs (restrições do DEA).

2.2.2. Eficiência

Segundo Farrell (1957), eficiência pode ser dividida em eficiência econômica, técnica e alocativa. A eficiência técnica reflete à obtenção do máximo de *outputs* com o mínimo de *inputs*, ou seja, encontra a eficiência otimizada (melhores conjuntos de peso) de cada DMU. Já a alocativa mede a eficiência em se alocar uma proporção ótima de *inputs* para atender os *outputs*, dados os seus custos, enquanto para a eficiência de custo calcula-se a eficiência, de maneira focada em minimizar custos. Segundo Cooper, Seiford e Tone (2007), a “eficiência alocativa” definida por Farrell (1957) como a eficiência de preço (ou custo), na verdade, atualmente, é comumente chamada de eficiência de custo, já a eficiência alocativa é uma relação entre as eficiências técnica e de custo, embora os modelos continuem sendo denominados como alocativos, o que causa confusão de conceitos quando artigos recentes são comparados com artigos mais antigos. Alguns autores também usam outros nomes, como eficiência econômica ou total como sendo a combinação multiplicativa entre a eficiência técnica e a alocativa (FERREIRA, GOMES, 2009).

A relação entre esses três tipos de eficiência é dada pela Equação (2.31):

$$\theta_{ae} = \frac{\theta_{ce}}{\theta_{te}} \quad (2.31)$$

Onde θ_{ae} é a eficiência alocativa, θ_{ce} é a eficiência de custo, e θ_{te} é a eficiência técnica.

A DEA calcula os melhores pesos não arbitrário para uma DMU e uma única medida de desempenho relativa (eficiência relativa) entre 0 e 1 para cada DMU, gerando uma fronteira de eficiência, onde as DMUs que obtêm valor igual a 1 são consideradas eficientes.

De acordo com Zhu (2003) e Hatefi et al. (2009), o cálculo de eficiência usando variáveis de ligação como *inputs* ou *outputs*, sem analisar o contexto, pode levar a um resultado falho que não condiz com realidade. No caso específico de sistemas produção-estoque, quando se quer calcular a eficiência técnica considerando estoque como uma variável intermediária livre, pode acontecer que todas as DMUs obtenham eficiência máxima, pois a relação entre as variáveis (demanda + estoque final) / (produção + estoque inicial) é constante e igual a 1, então qualquer relação de pesos iguais leva à eficiência 1.

Para contornar este problema de relação entre as variáveis, o modelo proposto é alocativo, sendo a função objetivo construída com base nos custos, de forma semelhante ao

custo de ajustamento do modelo OCT de Thompson e Sethi (1980), sem penalização, e DEA de Sengupta (1999), pois assim essa relação deixa de ser constante.

2.2.3. Análise Envoltória de Dados (DEA)

O primeiro modelo DEA, chamado CCR por causa do acrônimo dos nomes dos autores que criaram este modelo, foi criado por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), baseado no trabalho de Farrell (1957) sobre mensuração da eficiência produtiva. Este modelo era orientado ao *input* e originalmente de Programação Fracionária, uma técnica de Pesquisa Operacional, que era formulada por Charnes, Cooper e Rhodes (1978) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \max_{u_i, v_j} \frac{\sum_{i=1}^m u_i y_{i0}}{\sum_{j=1}^n v_j x_{j0}} \\ \text{s.t.: } & \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^m u_i y_{ik}}{\sum_{j=1}^n v_j x_{jk}} \leq 1; & k = 1, 2, \dots, Z \\ u_i, v_j \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Onde: y_{i0} é a quantidade do i-esimo *output* da DMU analisada; x_{j0} , a quantidade do j-esimo *input*; y_{ik} é a quantidade do i-esimo *output* da k-esima DMU; x_{jk} , a quantidade do j-esimo *input*; u_i é o peso do i-esimo *output*; v_j , o peso do j-esimo *input*; m é o número de *outputs* analisados; n, o número de *inputs* analisados; e z, o número de DMUs analisadas.

A forma linear do modelo CCR, conhecido como o modelo CCR na forma dos multiplicadores, orientado ao *input*, com fronteira padrão; é obtida através da transformação de Charnes e Cooper (CHARNES e COOPER, 1962, 1973; CHARNES, COOPER e RHODES, 1978; TONE, 2001) e tem a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} & \max_{u_i, v_j} \sum_{i=1}^m u_i y_{i0} \\ \text{s.t.: } & \begin{cases} \sum_{j=1}^n v_j x_{j0} = 1 \\ \sum_{i=1}^m u_i y_{ik} - \sum_{j=1}^n v_j x_{jk} \leq 0; & k = 1, 2, \dots, Z \\ u_i, v_j \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Onde as variáveis da Equação (2.33) são as mesmas da Equação (2.32), apenas sendo diferente quanto à inclusão da restrição de linearização $\sum_{j=1}^n v_j x_{j0} = 1$.

O modelo CCR pode ser classificado como constante em relação ao retorno de escala, com relação linear entre *inputs* e *outputs*, radial, e orientado (pode ser em relação ao *input* ou ao *output*). Após a criação do modelo CCR, vários outros modelos DEA foram desenvolvidos, levando em conta essas características específicas relacionadas à relação entre os *inputs* e *outputs*; quanto ao modelo ser radial ou não; à orientação (*input*, *output* ou sem orientação); e ao tipo de retorno de escala (constante, variável ou híbrido). É importante enfatizar que, dado um nível de *outputs*, modelos orientados a *inputs* buscam reduzir os *inputs*; e dado um nível de *inputs*, modelos orientados aos *outputs*, buscam aumentar os *outputs*; enquanto modelos sem orientação são não radiais e buscam reduzir os *inputs* e aumentar os *outputs* simultaneamente (Mariano et al., 2015).

Cada modelo primal na forma linear dos multiplicadores tem o seu respectivo dual, por exemplo, o modelo CCR orientado ao *input* na forma do envelope, é formulado da seguinte maneira (1):

$$\begin{aligned} & \min \theta - \varepsilon (\sum_{i=1}^m S_i^+ + \sum_{j=1}^n S_j^-) \\ \text{s.t.: } & \begin{cases} \sum_{k=1}^z \lambda_k x_{jk} + S_j^- - \theta x_{j0} = 0; & j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{k=1}^z \lambda_k y_{ik} - S_i^+ = y_{i0}; & i = 1, 2, \dots, m \\ \lambda_k \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Onde θ é a eficiência da DMU analisada; λ_k é a contribuição da k-ésima DMU para a meta da DMU analisada; y_{i0} é a quantidade do i-ésimo *output* da DMU analisada; x_{j0} é a quantidade do j-ésimo *input* da DMU analisada; y_{ik} é a quantidade do i-ésimo *output* da k-ésima DMU; x_{jk} é a quantidade do j-ésimo *input* da k-ésima DMU; m é o número de *outputs* analisados; e z, n, e m são respectivamente os números de DMUs, *inputs*, e *outputs* analisados.

Essa formulação dual permite encontrar as folgas das variáveis e identificar quais DMUs servem como benchmarks, ao em vez de encontrar os pesos como na formulação primal.

O segundo modelo DEA, chamado BCC, foi desenvolvido por Bankers, Charnes e Cooper (1984), e sua diferença para o CCR é quanto ao retorno de escala ser variável.

Modelo BCC orientado ao *input*, na forma dos multiplicadores (BANKERS, CHARNES e COOPER, 1984):

$$\begin{aligned} & \max_{u_i, v_j} \sum_{i=1}^m u_i y_{i0} - w_0 \\ \text{s.t.: } & \begin{cases} \sum_{j=1}^n v_j x_{j0} = 1 \\ \sum_{i=1}^m u_i y_{ik} - \sum_{j=1}^n v_j x_{jk} - w_0 \leq 0; & k = 1, 2, \dots, z \\ u_i, v_j \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Onde w_0 é a variável de escala, os demais parâmetros são os mesmos da Equação (2.33) do CCR.

Modelo BCC orientado ao *input*, na forma do envelope (BANKERS, CHARNES e COOPER, 1984):

$$\begin{aligned} & \min \theta - \varepsilon (\sum_{i=1}^m S_i^+ + \sum_{j=1}^n S_j^-) \\ \text{s.t.: } & \begin{cases} \sum_{k=1}^z \lambda_k x_{jk} + S_j^- - \theta x_{j0} = 0; & j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{k=1}^z \lambda_k y_{ik} - S_i^+ = y_{i0}; & i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{k=1}^z \lambda_k = 1 \\ \lambda_k \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Onde $\sum_{k=1}^z \lambda_k = 1$ é a restrição de escala, os demais parâmetros são os mesmos da Equação (2.34) do CCR. As características de retornos variáveis de escala podem ser incorporadas em outros modelos, como o de Medida de eficiência Baseada em Folgas (SBM, do inglês Slack-Based Measure), o Alocativo, etc..

Esse pressuposto de retorno variável de escala pode ser incorporado em outros modelos, basta incluir a restrição da soma dos lambdas ou a variável de escala.

Um outro modelo importante foi desenvolvido por Tone (2001), é o chamado SBM, que calcula a eficiência com base nas folgas. Este modelo não possui orientação e é não radial, podendo ser variante ou invariante quanto ao tipo de retorno de escala (basta acrescentar ou retirar a restrição referente a esta informação).

Também existem vários outros modelos, inclusive modelos multiplicativos, ou com outras características, mas que são pouco utilizados.

Além desses modelos para eficiência técnica, existem modelos chamados de alocativos, para se medir a eficiência econômica, de custos, de receita, ou de lucro.

2.2.4. DEA alocativo

Segundo Cooper, Seiford, e Tone (2007), quando se conhece a razão entre os custos dos *inputs* ou o preço dos *outputs*, pode-se calcular a eficiência de custo, de receita ou de lucro, Esta vem do resultado da minimização de custos ou maximização da receita (ou do lucro) em comparação com os custos ou preços (ou lucro) observados, para calcular a eficiência de custo, receita ou lucro.

O modelo de minimização de custos mais simples é baseado no CCR dual orientado ao *input*, mas com informações de custos, e é formulado a partir do modelo de eficiência de lucro, mas sem informação de preço, de Färe, Grosskopf, e Lovell (1985):

$$\begin{aligned} & \min \sum_{j=1}^n q_j x_{j0}^p \\ \text{s.t.: } & \begin{cases} \sum_{k=1}^z \lambda_k x_{jk} \leq x_{j0}^p; & j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{k=1}^z \lambda_k y_{ik} \geq y_{i0}; & i = 1, 2, \dots, m \\ \lambda_k, x_{j0}^p \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Onde: x_{j0}^p é a projeção do *input* a ser otimizado, q_j é o custo unitário observado de *inputs*, x_{jk} é a quantidade observada de *inputs* da k-ésima DMU, y_{jk} é a quantidade observada de *outputs* da k-ésima DMU, λ_k é a contribuição da k-ésima DMU para a DMU0 em análise, n é o número de *inputs*, m é o número de *outputs*, e z é o número de DMUs.

Sendo a eficiência de custo (θ_{ce}) calculada posteriormente como:

$$\theta_{ce} = \frac{\sum_{j=1}^n q_j x_{j0}^{p*}}{\sum_{j=1}^n q_j x_{j0}} \quad (2.38)$$

Onde: x_{j0}^{p*} é a quantidade ótima de *inputs*, x_{j0} é a quantidade observada de *inputs*, e q_j é o custo unitário observado.

É importante mencionar que nesse modelo não é somente um único custo q_j constante e igual para todos os *inputs*, mas sim n custos unitários de n *inputs* x_{j0} , ou seja, não é possível comparar apenas as quantidades, nem colocá-los em evidência, se não forem iguais.

De acordo com Tone (2002), quando todos os custos unitários são constants e iguais ($q_j = q$) para todos os *inputs* das DMUs, a eficiência de custo passa a ser apenas uma comparação de quantidades $\left(\theta_{ce} = \frac{\sum_{j=1}^n x_{j0}^{p*}}{\sum_{j=1}^n x_{j0}}\right)$, então duas DMUs poderiam ser eficientes se uma mesma quantidade foi produzida, mesmo com diferentes custos unitários (entre as DMUs). Para resolver esse problema, foi proposta uma nova eficiência de custo baseada em outra medida de custo que não o unitário. Ao em vez de usar as informações de custo unitário q_j e as quantidades x_{j0} , é utilizado o custo total $C(q_j, x_{j0})_{j0} = Cx_{j0}^p$, mas considerando o custo unitário como igual a 1 ($c_j = 1$) para as DMUs. Então a nova eficiência de custo sempre será uma comparação de custos em todas as circunstâncias.

$$\begin{aligned} & \min \sum_{j=1}^n Cx_{j0}^p \\ \text{s.t.: } & \begin{cases} \sum_{k=1}^z \lambda_k Cx_{jk} \leq Cx_{j0}^p; & j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{k=1}^z \lambda_k Cy_{ik} \geq Cy_{i0}; & i = 1, 2, \dots, m \\ \lambda_k, Cx_{j0}^p \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Onde: Cx_{j0}^p é a projeção do custo total ótimo de *inputs* a ser otimizado, Cx_{jk} é o custo total observado de *inputs* da k-ésima DMU, Cy_{jk} é o preço total observado de *outputs* da k-ésima DMU, λ_k é a contribuição da k-ésima DMU para a DMU0 em análise, n é o número de *inputs*, m é o número de *outputs*, e z é o número de DMUs.

A nova eficiência de custo (θ_{nce}) é calculada como:

$$\theta_{nce} = \frac{\sum_{j=1}^n Cx_{j0}^{p*}}{\sum_{j=1}^n Cx_{j0}} \quad (2.40)$$

Onde: Cx_{j0}^{p*} e Cx_{j0} são, respectivamente, os custos totais ótimo e observado de *inputs*.

2.2.5. DEA dinâmico

Além dos modelos mais importantes apresentados anteriormente, existem outros tipos de modelos que são dinâmicos e podem visar o cálculo da eficiência ao longo do tempo, em redes e levando em consideração as estruturas internas de uma DMU, ou em sistemas com pelo menos dois estágios distintos e variáveis que ligam esses estágios.

Conforme esses modelos foram sendo desenvolvidos, vários fatores foram incorporados. A característica mais comum para capturar o comportamento inter-temporal nos modelos foi o uso de *outputs* de um período como *inputs* do próximo período, e essas variáveis que ligam os períodos foram chamadas de intermediárias.

Segundo Fallah-Fini e Triantis (2014), a interdependência temporal entre diferentes períodos pode ser atribuída a 5 fatores: 1) atraso na produção ou quando a utilização de insumos e a realização de produtos não é imediata; 2) estoques; 3) capital ou fatores quasi-fixos; 4) custos de ajustamento; 5) e melhoria incremental ou aprendizagem.

Entre estudos importantes no contexto de DEA dinâmico, do ponto de vista de sistemas de produção multi-estágio estão: Färe and Grosskopf (1996), que desenvolveram um modelo de DEA dinâmico com *inputs* que podem ser estocados, onde alguns estoques do tempo t são transferidos para o período $t+1$; e Chen (2009), que adotou um *framework* mais amplo, incluindo sub-DMUs (sub-processos de produção) e que permitia estoque deteriorável em seu modelo de DEA dinâmico.

Recentemente, Tone e Tsutsui (2014) desenvolveram modelos “mistos”, incorporando várias características em um único modelo de Network DEA dinâmico (DNDEA), inclusive um modelo sem orientação baseado em folgas (DNSBM), considerando variáveis intermediárias tanto entre períodos, como entre divisões da estrutura interna de uma DMU.

A respeito apenas dos estudos importantes que usam OCT combinado com DEA dinâmico, geralmente essas pesquisas são realizadas sob a perspectiva do *framework* de custos de ajustamento, como pode ser visto nos artigos de Sengupta (1995), Sengupta (1999), Nemoto e Goto (1999, 2003), Sueyoshi e Sekitani (2005), Mateo, Coelli, e O'Donnell (2006), Silva, e Stefanou (2007), e Kapelko, Lansink, e Stefanou (2014).

Nemoto e Goto (1999, 2003), Silva, e Stefanou (2007), e Kapelko, Lansink, e Stefanou (2014), descrevem modelos que usam características da OCT, porém com outros nomes, como equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), ou restrição de transição como no caso de Mateo, Coelli, e O'Donnell (2006). Sueyoshi e Sekitani (2005) estenderam o modelo de Nemoto e Goto (1999) incorporando Retorno Variável de Escala (VRS) nesse tipo modelo de DEA dinâmico.

Uma outra característica utilizada para descrever o comportamento dinâmico, incorporada no modelo variacional de Sengupta (1999), é a taxa de variação de uma variável ao longo do tempo, ou seja, uma equação de estado ou uma restrição em que um dos termos é uma derivada, utilizada para descrever, por exemplo, uma depreciação ou uma expansão de

capital. Este modelo é alocativo e dinâmico, e tem a seguinte formulação segundo Sengupta (1995):

$$\begin{aligned} \max J = & - \int_0^T e^{-rt} \left[\sum_{i=1}^{m-1} q_i(t)x_i(t) + c(z_m(t)) \right] dt \\ \text{s. t.:} \quad & \begin{cases} \sum_{k=1}^z x_{ik}\lambda_k(t) \leq x_i(t), & i = 1, 2, \dots, m-1 \\ \sum_{k=1}^z x_{mk}\lambda_k(t) \geq x_m(t) \\ \sum_{k=1}^z y_{jk}\lambda_k(t) \geq Y_{jk}, & j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{k=1}^z \lambda_k(t) = 1 \\ \dot{x}_m(t) = \frac{\partial x_m}{\partial t} = z_m(t) - \delta x_m(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Onde a função objetivo de custo J deve ser interpretada como: T é o ultimo período do horizonte de tempo analisado, e^{-rt} é o fator de desconto, r é a taxa de desconto, $c(z_m(t))$ é o custo de investimento, $q_i(t)$ é o preço do i-ésimo *input*, $x_i(t)$ é o i-ésimo *input*, $q_m(t)$ é o preço do *input* capital e $x_m(t)$ é o *input* capital no tempo t, então $q_m(t)x_m(t)$ é o investimento em bens duráveis no processo, $\dot{x}_m(t)$ é a expansão do *input* capital (derivada do *input* capital em relação ao tempo), $z_m(t)$ é o investimento bruto, δ é a taxa de depreciação, e $\lambda_k(t)$ é a contribuição da k-ésima DMU para a meta da DMU analisada no tempo t. os índices z, n, e m são respectivamente o número de DMUs, o número de *outputs* e o número de *inputs*, sendo que o m-ésimo *input* sempre será o *input* capital.

Embora o modelo de Sengupta (1995) não seja aplicado a sistemas com estoques, essa formulação tem uma função objetivo que pode ser interpretada de forma similar à do modelo HMMS de planejamento ótimo da produção, desenvolvido por Holt et al. (1960), mas com restrições de DEA e uma equação de estado que descreve a depreciação do capital, ao invés das restrições de um sistema de controle de estoque.

Então a maior contribuição dessa tese são os modelos propostos, e uma das inovações desses modelos propostos explora esse *gap*, considerando os custos de produção e estoque, a relação da produção com a demanda na restrição variacional típica de problemas de OCT em sistemas produção-estoque, e aplicando os modelos integrados DEA-OCT a sistemas de controle de estoques, além da aplicação de modelos apenas de OCT no contexto de eficiência dinâmica.

Na próxima seção serão descritos a metodologia e os modelos propostos levando em consideração o fator estoque com a característica variacional para resolver o problema de relação entre demanda, produção e estoque.

3. MÉTODO DE PESQUISA

O método de pesquisa possui uma abordagem quantitativa e emprega modelagem para descrever o funcionamento de um sistema a partir de modelos matemáticos (MIGUEL, 2010). Além disso, é feito um desenvolvimento teórico e aplicado, típico de Pesquisa Operacional, a partir dos modelos propostos que obtém soluções ótimas de problemas multi-critério para melhorar o desempenho de unidades tomadoras de decisão.

O modelo conceitual pode ser observado na Figura 4, considerando a dinâmica variacional do modelo de Sengupta (1995) que é o principal modelo de referência usado nesta tese, expandido e aplicado a sistemas de controle de estoque.

Figura 4 – Modelo conceitual

Na primeira etapa, que consiste de uma pesquisa bibliográfica, foi feita uma revisão de literatura em livros e foram buscados trabalhos científicos nas bases de dados Web of Science e Scopus. Os resultados dessa pesquisa bibliográfica estão expostos a seguir.

As buscas de artigos em bases de dados foram feitas utilizando termos relacionados a: “data envelopment analysis”, “optimal control”, “dynamic efficiency”, e “inventory control”, bem como a combinação dessas palavras para refinar resultados. Como as palavras centrais do tema deste trabalho são “análise envoltória de dados” e “eficiência dinâmica”, elas serão utilizadas para refinar todos os resultados.

Ao fazer as buscas separadamente no Web of Science por “data envelopment analysis” e “dynamic efficiency”, foram encontrados, respectivamente, 8548 e 392 artigos. Já a busca de “data envelopment analysis” refinada por “dynamic efficiency” resultou em 38 artigos, enquanto refinada por “inventory control” encontrou-se 4 artigos. As mesmas buscas feitas no Scopus resultaram, respectivamente, em 10910, 557, 265, e 40 artigos.

Ao fazer a busca por “Optimal Control” no Web of Science, foram encontrados 37095 artigos, refinando com as palavras “inventory control” foram encontrados 122 artigos, já refinando por “dynamic efficiency” foram encontrados 4 artigos, e também foi refinado por “data envelopment analysis” sendo encontrados 3 artigos, mas apenas 2 eram realmente relacionados ao tema eficiência dinâmica; no Scopus foram encontrados 69242 artigos sobre “Optimal Control”, refinando com as palavras “inventory control” foram encontrados 739 artigos, já refinando por “data envelopment analysis” foram encontrados 18 artigos, e também foi refinado por “dynamic efficiency” sendo encontrados 13 artigos.

Como pode-se observar, essas buscas reforçam a originalidade do tema deste projeto, pois, por exemplo, quanto às palavras-chave relacionadas ao modelo desenvolvido, a principal busca seria pelo termo “Data Envelopment Analysis” e refinadas com o termo “Optimal Control”. Foram encontrados apenas 3 artigos sobre o tema na ISI Web of Science, sendo dois artigos do autor Sengupta (1999), dos anos de 1994 e 1999, que realmente contém os dois termos, e um artigo de Tone e Tsutsui (2010), que descreve um novo uso da análise de janela, da “data envelopment analysis” dinâmica, citando termos como “optimal” e “control”, mas não contém exatamente o termo referente à teoria “optimal control”, e 18 artigos na Scopus, sendo seis artigos do autor Sengupta (1999), publicados entre os anos de 1994 e 1999, e outros quatro artigos, publicados entre 2009 e 2014, que realmente contém os dois termos, sendo um deles o artigo de Fallah-Fini, Triantis e Johnson (2014) que trata do estado da arte sobre eficiência dinâmica e serviu de justificativa para este projeto.

Após a revisão foi desenvolvido um modelo DEA dinâmico integrado a um determinado modelo de OCT que relaciona dinamicamente os recursos do sistema de controle, de forma a obter, com base nos custos e na demanda, a partir de um estoque inicial, as funções de produção e estocagem ótimas, para estender o modelo dinâmico de DEA variacional de Sengupta (1999) e estudar a relação entre demanda, produção e estoque no contexto de eficiência dinâmica. Para o desenvolvimento dos modelos nesta tese, os tipos de variáveis da OCT e DEA (e de sistemas de controle de estoque) foram relacionados conforme a Figura 5.

Figura 5 – Relação entre os tipos de variáveis da DEA, OCT, e do sistema de controle de estoque

Essa relação se dá pelo próprio conceito envolvido com esses tipos de variáveis em sistemas de controle de estoque. Nesses sistemas, quanto maior for a variável exógena atendida (demanda), melhor, ou seja, se comporta como um *output*; e quanto menor for o custo da variável de controle (produção), melhor, ou seja, se comporta como um *input*. Já a variável de estado (estoque) varia conforme o controle, é otimizada de forma indireta, quando a variável de controle é otimizada, e pode se comportar ora como *output*, ora como *input* (ou *output* indesejável), ou seja, se comporta como uma variável intermediária.

Pensando na estrutura do sistema de controle de estoque, mesmo que do ponto de vista estático (Figura 6), em termos de entradas e saídas em um processo, o estoque inicial é uma entrada (um *input* junto com a produção), para atender a demanda, sobrando um estoque final (*output* junto com a demanda) como saída do processo.

Figura 6 – Estrutura do sistema discreto, com medida intermediária e interação entre variáveis, mas sem considerar a interação entre períodos

Do ponto de vista dinâmico (Figura 7), esta saída do processo em um período vai para a entrada do próximo período (ou seja, comportamento intermediário, *output* de um período e *input* do próximo período). Já em termos de nível de estoque, quando há risco de falta, o estoque é desejável para não perder vendas, então quanto maior, melhor (*output*), mas a partir de um determinado nível, quando há excesso, quanto menor, melhor (*input* ou *output* indesejável), ou seja, pensando em termos de seu nível, também tem um comportamento intermediário.

Figura 7 – Estrutura do sistema dinâmico discreto

É importante reforçar que o estoque como uma medida intermediária, também é uma variável de estado que tem uma relação direta com o *input* (produção) e a demanda (*output*), e

essa relação também pode ser descrita com uma equação diferencial de estado do modelo OCT a tempo contínuo, que é a restrição variacional usada em um dos modelos da tese.

Em termos de estrutura do sistema, se considerarmos o sistema dinâmico a tempo contínuo, a parte temporal é embutida em uma função que depende do tempo, não sendo necessário criar um nó para cada período de tempo (Figura 8).

Figura 8 – Estrutura do sistema dinâmico contínuo (criando funções que dependem do tempo em vez de nós temporais)

Essas estruturas serão consideradas para desenvolver os modelos. No próximo tópico são abordadas as variáveis usadas nos modelos (tanto dos que calculam a eficiência dinâmica de custo padrão quanto da nova eficiência de custo), bem como a base de dados e a amostra.

3.1. Amostra de Dados e Variáveis de Pesquisa

A amostra total de dados foi tomada de forma não aleatória, considerando todas as DMUs com dados trimestrais cadastrados no *software* Economática (incluindo empresas das Américas do Sul e do Norte, principalmente dos EUA, Brasil, e Chile), a partir do quarto trimestre de 2010 (para cálculo do custo médio de estoque e uso do estoque inicial no próximo trimestre) até o primeiro trimestre de 2016. Este período foi escolhido pois coincide com o momento em que passou a ser obrigatório adotar o método contábil descrito nas normas internacionais de contabilidade (International Financial Reporting Standards - IFRS) para fazer demonstrações financeiras no Brasil, assim como a maioria das empresas do Chile já seguiam

este método. A Figura 9 mostra um exemplo da planilha (tela Screening) no *software* Econômica.

Figura 9 – Tela Screening do *software* Econômica

Econômica										
Magaz Luiza • ON • MGLU3 Bovespa										
Nome	Classe	Código	Pais Sede	Sector Econômica	MetCon < Dez 2010 consolid: sim*	Estoques < Dez 2010 Em US Dollars em milhares consolid: sim*	Estoques < Mar 2011 Em US Dollars em milhares consolid: sim*	CPV < Mar 2011 Em US Dollars em milhares no exercício consolid: sim*	Receita < Mar 2011 Em US Dollars em milhares no exercício consolid: sim*	
5910 Magaz Luiza	ON	MGLU3	BRA	Comércio	IFRS	510.022	455.041	580.951	869.438	
5911 Magellan Health Inc	Com	MGLN	USA	Outros	-	-	-	-	-	
5912 Magellan Midstream Pa...	Com	MMP	USA	Outros	-	-	-	-	-	
5913 Magenta Therapeutics, L...	Com	MGTA	USA	Química	-	-	-	-	-	
5914 Magic Software Enterpri...	Com	MGIC	ISR	Software e D...	-	-	-	-	-	
5915 Magicjack Vocaltec Ltd	Com	CALLN	ISR	Telecomunica...	-	-	-	-	-	
5916	Com	CALL	ISR	Telecomunica...	-	-	-	-	-	
5917 Magister	Ord	MAGISTER	CHL	Fundos	-	-	-	-	-	
5918	Com	MGA	CAN	Veiculos e pe...	-	-	-	-	-	
5919 Magna International Inc	Com	MGAN	CAN	Veiculos e pe...	-	-	-	-	-	
5920 Magnegas Corp	Com	MNGA	USA	Máquinas Ind...	-	-	-	-	-	
5921	ON	MAGS3	BRA	Mineração	-	-	-	-	-	
5922 Magnesita	PNA	MAGS5	BRA	Mineração	-	-	-	-	-	
5923	PNC	MAGS7	BRA	Mineração	-	-	-	-	-	
5924 Magnesita Mineração S/A	ON	24244 ON	BRA	Mineração	-	-	-	-	-	
5925 Magnesita SA	ON	MAGG3	BRA	Mineração	IFRS	318.603	328.548	239.209	353.221	

Como o propósito do trabalho é analisar o sistema de controle de estoque das empresas, foram excluídas da análise os setores de finanças e seguros, *software* e dados, fundos, assim como os setores ligados à prestação de serviços, como os setores de energia elétrica, transportes, telecomunicações, e a categoria outros. As DMUs que continham dados negativos, iguais a zeros, não informados, ou que por algum motivo constavam como fora dos padrões internacionais (com exceção dos EUA, pois foi considerado que o método utilizado pelas empresas norte americanas era semelhante aos padrões internacionais), também foram excluídas. No total, foram analisadas 647 empresas de 14 setores, depois foi feita uma comparação entre Brasil e Chile (países emergentes economicamente), posteriormente focando no setor de comércio.

As descrições das variáveis e parâmetros utilizados nos modelos DEA, e de acordo com a OCT, podem ser vistos no Tabela 1.

Tabela 1 – Descrição de funções, variáveis e parâmetros .

Funções, variáveis e parâmetros:	Descrições:	Funções, variáveis e parâmetros:	Descrições:
J	Função objetivo (função custo);	Receita	Receita total;
t	Tempo;	R	Receita unitária;
I_0	Estoque inicial (estoque do período 0 no tempo 1);	C_p	Custo unitário de produção;
S	Demanda (<i>output</i> exógeno);	C_f	Custo unit. de estoque (final);
P	Produção (<i>input</i> de controle);	C_i	Custo un. de estoque (inicial);
$I(t)$	Estoque em t (variável intermediária de estado);	C_d	Custo unitário da produção vendida;
I_{ft}	Estoque final ou estoque em t (ligação de <i>output</i>);	CR	Custo relativo;
I_{it}	Estoque inicial ou estoque em $t-1$ (ligação de <i>input</i>);	CPP	Custo de Produção (ou de ComPra) do Período;
$\lambda(t)$	Contribuição das DMUs para a DMU analisada;	CEF	Custo de Estoque Final;
S^+	Folga do <i>output</i> (ou ligação de <i>output</i>);	CEI	Custo de Estoque Inicial;
S^-	Folga do <i>input</i> (ou ligação de <i>input</i>);	CPV	Custo do Produto Vendido.

Seguindo a classificação de variáveis de Tone e Tsutsui (2010), classificam-se as variáveis do modelo como: Produção é o *input*, Demanda é o *output*, e Estoque é a variável intermediária, sendo esta do tipo livre. Como a variável de ligação intermediária é livre, esta pode ser dividida em duas variáveis, uma para ligação de *output* (estoque final do período t) e outra para ligação de *input* (estoque inicial do período t é igual ao estoque final do período $t-1$).

É importante observar que, no modelo alocativo padrão, os custos dos *inputs* (e das variáveis intermediárias) fazem parte da função objetivo, não sendo incluídos diretamente como uma variável *input*. Já nos modelos que calculam a Nova Eficiência de Custo (dinâmica), as variáveis relativas às quantidades são substituídas pelos custos totais, considerando os custos unitários como sendo iguais a 1.

Para os modelos propostos nessa tese, que utilizam a medida clássica de eficiência de custos, é necessário ter as informações de custos unitários e quantidades. Os relatórios contábeis contêm custos totais, então não é possível obter diretamente os custos unitários e quantidades.

Para resolver esse problema, é proposta uma forma de estimar essas informações (nos parágrafos a seguir, do método).

Como DEA é invariante à escala, então, por exemplo, não importa se os custos de produção e estocagem foram respectivamente \$10,00 e \$20,00 para gerar uma receita de \$60,00, ou \$100,00 e \$200,00 para gerar \$600,00. O que importa é que um custo seria metade do outro e a receita, o dobro das soma dos custos, portanto, foi utilizado como medida financeira o custo relativo (CR) para se gerar \$1,00 de receita ($R=1$). Para obter-se este custo e os demais valores necessários, foram feitas estimativas acerca dos custos unitários e quantidades relativas, a partir dos dados informados nos relatórios.

Como estão disponíveis os valores de Receita, custos de produtos vendidos (CPV) e estoques (CE), que podem ser divididos em custos de estoque final (CEF) e estoque inicial (CEI), então utilizou-se a fórmula do CPV, descrita por Araújo e Neto (2010), para o cálculo de Compras do Período (CPP), no caso de comércios, que, neste artigo, será considerado para o Custo de Produção do Período (CPP) em setores industriais (pois nos relatórios contábeis não há diferenciação entre os tipos de estoques, considerando todos), de acordo com a Equação (2.8): $CPP = CPV + CEF - CEI$.

Considerando que estes custos podem ser decompostos em custos médios unitários e quantidades (e a receita em receita unitária R e demanda D), então as informações foram estimadas a partir das Equações (2.1) a (2.10).

Podendo os custos Cd_0 e Cd_{T+1} serem os custos do primeiro e do último período dos dados obtidos para a análise, sendo posteriormente excluídos para não ter que estimá-los (já que seria necessário usar períodos fora do período de análise).

Após calcular os custos de estocagem (usando as Equações (2.3), (2.4), (2.6), (2.7) e (2.9) com $R=1$), pode-se obter os valores das variáveis intermediárias (estoques finais e iniciais):

$$z^+ = I_f = CEF/C_f \quad (3.1)$$

e

$$z^- = I_i = CEI/C_i \quad (3.2)$$

Os valores dos *outputs* (demanda, proporcional à receita) usando a Equação (2.2) e (2.10):

$$y = S = CPV/Cd \quad (3.3)$$

E dos *inputs* (produção) usando as Equações (2.9), (3.1), (3.2) e (3.3):

$$x = P = y + z^+ - z^- \quad (3.4)$$

Já o custo médio unitário de produção pode ser calculado, usando a Equação (2.1) e (3.4), como:

$$Cp = CPP/x \quad (3.5)$$

Uma outra maneira de se lidar com esse problema de não possuir essas informações de custos unitários e quantidades é utilizando um outro modelo proposto nessa tese, que utiliza o conceito da chamada Nova Eficiência de Custos de Tone (2002), que é baseada em custos totais. As quantidades são substituídas pelos custos totais e os custos unitários são considerados como iguais a 1. Ou seja, as Equações (3.1), (3.2), (3.3), e (3.4) são substituídas pelas Equações (3.6), (3.7), (3.8), e (3.9) a seguir:

Variáveis intermediárias (estoques finais e iniciais substituídos por CEF e CEI):

$$z^+ = CEF \quad (3.6)$$

e

$$z^- = CEI \quad (3.7)$$

Outputs (demanda substituída por CPV):

$$y = CPV \quad (3.8)$$

Inputs (produção substituída por CPP):

$$x = CPP \quad (3.9)$$

3.2. Definição da aplicação empírica e como será tratada

O problema abordado na aplicação empírica é sobre o controle de estoque das empresas (onde cada empresa é uma DMU) de países das Américas, mais especificamente quanto a empresas brasileiras e chilenas, para avalia-las, incluindo variáveis relacionadas ao sistema de estoques de produção com as interações entre períodos (o estoque final de um período é o estoque inicial do próximo período e sua variação relacionada à longo do tempo).

Se resolvido de maneira estática, o modelo pode obter soluções ótimas no final de um período, que não coincidem com as entradas no início do próximo período. Outro problema

surge se tentar usar soluções estáticas para compor uma solução dinâmica que não foi obtida de uma só vez, pois pode levar à contabilização do mesmo estoque mais de uma vez. Se resolvido sem a restrição variacional, o modelo pode obter soluções ótimas que não respeitam as relações entre as variáveis (por exemplo, não é possível diminuir a produção e o estoque inicial, sem variar o estoque final ou a demanda). Ou seja, os modelos estáticos e dinâmicos existentes podem levar a soluções fisicamente impossíveis de ocorrer na prática, servindo de motivação para desenvolver os modelos propostos, que são dinâmicos e possuem a restrição variacional para considerar as interações que ocorrem na prática em sistema de controle de estoques, obtendo soluções ótimas mais realistas.

Como são muitos modelos e extensões, serão calculados o τ de Kendall (correlação) e a estatística W (concordância) entre os modelos, para verificar se os modelos (que podem ser usados em situações distintas) geram resultados semelhantes.

O coeficiente de correlação tau de Kendall (τ), desenvolvido por Kendall (1938), é descrito por Taylor (1987) como um método não paramétrico usado para medir a correlação entre dois *rankings* ou duas variáveis, e foi aplicado para analisar a relação entre os *rankings* obtidos por cada par de modelos DEA-OCT propostos neste trabalho (assim como o de OCT e Dynamic DEA (DDEA)).

Segundo Legendre (2005), o coeficiente de concordância W de Kendall (estatística W) é uma medida da concordância entre “avaliações de especialistas”. Essas “avaliações de especialistas” podem ser feitas por pessoas, modelos, *rankings*, etc. Neste trabalho serão utilizados os resultados de cada modelo.

Também foi utilizado o método de análise de agrupamento chamado “cebola” (*onion clustering*) de Barr, Durchholz and Seiford (2000) para analisar o cluster médio dos setores e investigar se os setores se agrupam pelas eficiências (sugerindo que alguns setores têm características intrínsecas que os impede de serem eficientes) ou se eles se dispersam (sugerindo que algumas DMUs tem problemas de gestão e poderiam ser tão eficientes quanto o *benchmark* do setor).

O software MATLAB foi usado para realizar as programações matemáticas e fazer os cálculos das funções, variáveis, parâmetros e coeficientes de todos os modelos. Nos próximos tópicos são abordadas as formulações e desenvolvimento dos modelos propostos.

4. MODELOS PROPOSTOS

A principal contribuição desta tese são os modelos propostos. Este tópico está estruturado em 7 subtópicos, um para cada modelo ou extensão, dentre estes: modelo DEA-OCT a tempo contínuo (os demais a tempo discreto); eficiência de custo; Nova Eficiência de Custo; modelo que incorpora estoque de segurança, um tópico discutindo os efeitos de retirar ou incluir certas restrições, um modelo de OCT (sem DEA) para a eficiência de custo, e um modelo de OCT (sem DEA) para a Nova Eficiência de Custo.

4.1. Modelo DEA-OCT a tempo contínuo para cálculo da eficiência de custo

O modelo DEA-OCT a tempo contínuo proposto possui algumas funções e restrições similares aos modelos padrões de DEA alocativo da literatura, considerando minimização de custos, adicionando custos de estoques (iniciais e finais ao longo dos períodos de tempo) e os custos de produção e dos períodos analisados. O modelo proposto incorpora a restrição variacional do modelo de OCT, de forma semelhante ao do artigo de Sengupta (1995), porém com as características dos sistemas de controle de estoque apresentadas em Thompson e Sethi (1980), Sethi e Thompson (2006), e Holt et al. (1960), para estudar a relação entre demanda, produção e estoque.

Também são adicionadas características de modelos dinâmicos recentes, como as medidas intermediárias, que fazem o *link* entre os períodos e a restrição de *links* equivalentes apresentados em Tone e Tsutsui (2010). Uma das características dessas medidas é que, embora algumas possam ser consideradas como indesejáveis (*undesirable*), no geral os *links* podem ser considerados como sendo do tipo livre (*free*) e são tratadas como *input* e *output* ao mesmo tempo.

Neste primeiro modelo proposto ela é considerada como sendo do tipo livre, por causa do comportamento de sistemas de controle de estoque explicado anteriormente. E a relação entre produção e demanda é descrita pela equação diferencial de estado da variação de estoque.

A formulação geral deste modelo proposto pode ser vista na Equação (4.1) a seguir:

$$\begin{aligned}
& \max \quad - \int_0^T \left[\sum_{j=1}^{n-1} Cx_{j0}(t, x_{j0}(t)) + \sum_{h=1}^{l-1} Cz_{h0}(t, z_{h0}(t)) + Cx_{n0}(t, x_{n0}(t)) + \right. \\
& \left. Cz_{l0}(t, z_{l0}(t)) \right] dt \\
& \text{s. t.:} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^z x_{jk}(t) \lambda_k(t) \leq x_{j0}(t), \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \\ \sum_{k=1}^z x_{nk}(t) \lambda_k(t) \leq x_{n0}(t) \\ \sum_{k=1}^z z_{hk}(t) \lambda_k(t) + s_h^{free}(t) = z_{h0}(t), \quad h = 1, 2, \dots, l-1 \\ \sum_{k=1}^z z_{lk}(t) \lambda_k(t) + s_l^{free}(t) = z_{l0}(t) \\ \sum_{k=1}^z y_{ik}(t) \lambda_k(t) \geq y_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \\ \sum_{k=1}^z y_{mk}(t) \lambda_k(t) \geq y_{m0} \\ \dot{z}_l(t) = \frac{\partial z_l(t)}{\partial t} = x_n(t) - y_m(t) \end{array} \right. \quad (4.1)
\end{aligned}$$

Onde essa função objetivo J de custo da DMU0 em análise pode ser interpretada como: T é o ultimo período do horizonte de tempo analisado, $Cx_j(t)$ é o custo do i-ésimo *input*, $Cz_h(t)$ é o custo da h-ésima medida intermediária, $Cx_n(t)$ é o custo da variável de controle (exemplo: custo de produção), $Cz_l(t)$ é o custo da variável de estado (exemplo: custo de estoque).

Nas restrições, $\lambda_k(t)$ é a contribuição da k-ésima DMU para a DMU0 em análise, x_{jk} é o j-ésimo *input* da k-ésima DMU, y_{ik} é o i-ésimo *output* da k-ésima DMU, z_{hk} é a h-ésima medida intermediária da k-ésima DMU, x_{nk} é a principal variável *input* de controle da k-ésima DMU, y_{nk} é a principal variável *output* exógena da k-ésima DMU (exemplo: a demanda), z_{lk} é a principal variável intermediária de controle da k-ésima DMU, s_h^{free} and s_l^{free} são as folgas que denotam o desvio do link (pode ser assumido como igual a 0 no caso da medida intermediária ser considerada como do tipo fixo ao invés de livre), e $\dot{z}_l(t)$ é a derivada da principal variável intermediária de estado em relação ao tempo t (por exemplo: variação do estoque).

Os resultados da solução desse modelo são expostos na seção 5.2. É importante observar que a demanda deve ser conhecida. No caso de os dados serem discretos, pode-se utilizar um método para estimar uma função (por exemplo, fazer um *fit* em uma função polinomial, de forma que se utilize o menor grau da função com um coeficiente de determinação forte).

4.2. Modelo DEA-OCT a tempo discreto para cálculo da eficiência de custo

Já que nem sempre os sistemas reais são analisados de forma contínua e nem sempre é possível resolver analiticamente o modelo a tempo contínuo, então este modelo proposto é a tempo discreto, para ser aplicado a dados discretos e facilitar a solução. Este modelo da Equação (4.2) é basicamente a versão discreta do modelo da Equação (4.1).

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{t=1}^T \left[\sum_{j=1}^{n-1} C_{j0t} x_{j0t}^p + \sum_{h=1}^{l-1} C_{h0t} z_{h0t}^p + C_{e0t} z_{l0t}^p + C_{p0t} x_{n0t}^p \right] \\
 \text{s. t.:} \quad & \begin{cases} \sum_{k=1}^z x_{jkt} \lambda_{kt} \leq x_{j0t}, & j = 1, 2, \dots, n-1 \\ \sum_{k=1}^z x_{nkt} \lambda_{kt} \leq x_{n0t}^p \\ \sum_{k=1}^z z_{hkt} \lambda_{kt} + s_h^{free} = z_{h0t}, & h = 1, 2, \dots, l-1 \\ \sum_{k=1}^z z_{lkt} \lambda_{kt} + s_l^{free} = z_{l0t}^p, & t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{k=1}^z y_{ikt} \lambda_{kt} \geq Y_{i0}, & i = 1, 2, \dots, m-1 \\ \sum_{k=1}^z y_{mkt} \lambda_{kt} \geq Y_{m0t} \\ \Delta z_{lt} = z_{lt} - z_{l(t-1)} = x_{nt} - y_{mt} \end{cases} \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

A descrição geral deste modelo é a mesma do modelo anterior (Equação (4.1)), porém a tempo discreto. Para a aplicação empírica, como a variável z_{l0t} é a variável intermediária de estado, na aplicação empírica será o estoque. Como na prática podemos dividir o estoque entre inicial $z_{lkt}^- = z_{l(t-1)}$ e estoque final $z_{lkt}^+ = z_{l(t)}$ em um determinado período $t=1,2,\dots,T$, então a folga livre s_l^{free} pode ser dividida em duas variáveis de folga s_l^{-free} e s_l^{+free} não-negativas combinadas linearmente ($s_l^{free} = s_l^{-free} - s_l^{+free}$), conforme foi proposto por Tone e Tsutsui (2014). As restrições também são divididas em $\sum_{k=1}^z I_{kt}^+ \lambda_{kt} + s_t^{+free} = z_t^+$, para $t=1,\dots,T$ e $\sum_{k=1}^z I_{kt}^- \lambda_{kt} + s_t^{-free} = z_t^-$, para $t=1,\dots,T$. E a restrição variacional do modelo proposto passa a ser uma equação de diferença que representa a variação do estoque a tempo discreto, da seguinte forma: $\Delta z_{l0t} = z_{l0t}^+ - z_{l0t}^- = x_{n0t} - Y_{m0t}$.

Este modelo pode ser resolvido por programação linear, assim como DEA. Como o foco deste trabalho é aplicar o modelo usando apenas dados de sistemas de controle de estoque, então serão consideradas apenas as variáveis produção, demanda e estoque. Com todas as variáveis e

custos estimados, deve-se minimizar a função objetivo, que é a eficiência de custo com base na soma dos custos otimizados de produção e estoque divididos pelos custos observados (as projeções são expressas como z_{0t}^{-p}, z_{0t}^{+p} , e x_{0t}^p). A forma final deste modelo a tempo discreto proposto e aplicado somente às variáveis de sistemas de controle de estoque é apresentada no modelo da Equação (4.3) a seguir:

$$\min_{z_{0t}^{-p}, z_{0t}^{+p}, x_{0t}^p} \frac{c_{i01}z_{01}^{-p} + \sum_{t=1}^T c_{f0t}z_{0t}^{+p} + \sum_{t=1}^T c_{p0t}x_{0t}^p}{c_{i01}I_{i01} + \sum_{t=1}^T c_{f0t}I_{f0t} + \sum_{t=1}^T c_{p0t}P_{0t}} \quad (4.3)$$

Sujeito a:

Restrições de projeção de *output*:

$$\sum_{k=1}^Z y_{kt} \lambda_{kt} - S_{ykt}^+ = y_{0t}, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

Restrições de projeção de *input*:

$$\sum_{k=1}^Z x_{kt} \lambda_{kt} + S_{xkt}^- = x_{0t}^p, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

Restrições de ligação:

$$\sum_{k=1}^Z z_{kt}^+ \lambda_{kt} - S_{zkt}^+ = z_{0t}^{+p}, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

$$\sum_{k=1}^Z z_{kt}^- \lambda_{kt} + S_{zkt}^- = z_{0t}^{-p}, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

Restrições de igualdade intermediária:

$$\sum_{k=1}^Z z_{kt}^+ \lambda_{kt} - z_{k(t+1)}^- \lambda_{k(t+1)} - S_{zkt}^+ - S_{zk(t+1)}^- = 0, \quad t = 1, \dots, T-1$$

Restrições variacionais de controle:

$$x_{0t}^p - z_{0t}^{+p} + z_{0t}^{-p} = y_{0t}, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

Restrições de valor inicial:

$$z_{01}^{-p} = I_{i01}$$

Restrições de projeção:

$$x_{0t}^p \leq P_{0t}, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

Onde a descrição geral deste modelo é a mesma do modelo da Equação (4.1) e das descrições das divisões de variáveis entre esta Equação (4.3) e a Equação (4.2).

Na função objetivo, o custo considerado é o custo relativo (de estocagem e produção) para se gerar \$1,00 de receita (Equação (2.10)). Como o custo relativo envolve a receita unitária, utiliza-se também a restrição de projeção do modelo de maximização de lucro exposta por Zhu (2003), pois assim, o custo de cada período também deve ser inferior ao observado, indicando que se a empresa mantivesse a mesma gestão (sem antecipação de custos para ter custos menores no período desejado em análise), ela ainda assim poderia ter diminuído os seus custos (a gestão/controle não foi eficiente). Em algumas situações, como de risco de falta de estoque, onde os estoques e seus custos estão muito baixos, esta restrição pode ser indesejada e pode-se preferir, por exemplo, manter a característica dinâmica de antecipação de custos, ou seja, não usar esta restrição. Seus efeitos serão melhor discutidos no tópico 4.5.

Também é importante notar que na função objetivo deste modelo, z_{l0t}^- não é considerado para os períodos de $t \geq 2$ (períodos intermediários), pois são iguais a $z_{l0(t-1)}^+$, assim os custos não são duplicados, porém é considerado o custo da variável z_{l01}^- , apesar da restrição de valor inicial $z_{l01}^- = z_{l00} = I_0$, pois dependendo do que se deseja medir, essa restrição pode ser excluída do modelo, assim z_{l01}^- deixa de ser uma constante, mas essa extensão e seus efeitos serão melhor explicados no tópico 4.5.

4.3. Modelo DEA-OCT a tempo discreto para cálculo da Nova Eficiência de Custo

Como exposto anteriormente no texto, uma outra maneira de se lidar com o problema de não possuir informações de custos unitários e quantidades é utilizar-se do conceito da Nova Eficiência de Custos (TONE, 2002), que é baseada em custos totais. As quantidades da Equação (4.3) são substituídas pelos custos totais (Equações (3.6), (3.7), (3.8), e (3.9)) e os custos unitários são considerados como iguais a 1.

$$\min_{Cz_{0t}^{-p}, Cz_{0t}^{+p}, Cx_{0t}^p} \frac{Cz_{01}^{-p} + \sum_{t=1}^T Cz_{0t}^{+p} + \sum_{t=1}^T Cx_{0t}^p}{CEI_{01} + \sum_{t=1}^T CEF_{0t} + \sum_{t=1}^T CPP_{0t}} \quad (4.4)$$

Sujeito a:

Restrições de projeção de *output*:

$$\sum_{k=1}^Z CPV_{kt} \lambda_{kt} - S_{ykt}^+ = CPV_{0t}, t = 1, 2, \dots, T$$

Restrições de projeção de *input*:

$$\sum_{k=1}^Z CPP_{kt} \lambda_{kt} + S_{xkt}^- = Cx_{0t}^p, t = 1, 2, \dots, T$$

Restrições de ligação:

$$\sum_{k=1}^Z CEF_{kt}^+ \lambda_{kt} + S_{zkt}^+ = Cz_{0t}^{+p}, t = 1, 2, \dots, T$$

$$\sum_{k=1}^Z CEI_{kt}^- \lambda_{kt} + S_{zkt}^- = Cz_{0t}^{-p}, t = 1, 2, \dots, T$$

Restrições de igualdade intermediária:

$$\sum_{k=1}^Z CEF_{kt}^+ \lambda_{kt} - CEI_{k(t+1)}^- \lambda_{k(t+1)} + S_{zkt}^+ - S_{zk(t+1)}^- = 0, \quad t = 1, \dots, T-1$$

Restrições variacionais de controle:

$$Cx_{0t}^p - Cz_{0t}^{+p} + Cz_{0t}^{-p} = CPV_{0t}, t = 1, 2, \dots, T$$

Restrições de valor inicial:

$$Cz_{01}^{-p} = CEI_{01}$$

4.4. Modelo DEA-OCT a tempo discreto para cálculo da Nova Eficiência de Custo com penalização e custo de ajustamento

Este modelo incorpora valores alvos (por exemplo, estoque de segurança como valor alvo do nível de estoque) através de penalizações na função objetivo, semelhantes à Equação (2.16), porém a tempo discreto e de forma absoluta (módulo) ao em vez de quadrática, pois assim facilita a programação matemática, que além de discreta pode ser linearizada.

Como o parâmetro ES depende de σ_{SLT} (e não do seu custo), este modelo será desenvolvido a partir da Equação (4.3), mas usando as características de penalização da Equação (2.19).

$$\min_{z_{0t}^{-p}, z_{0t}^{+p}, x_{0t}^p} \frac{C_{i01} |z_{01}^{-p} - ES| + \sum_{t=1}^T C_{f0t} |z_{0t}^{+p} - ES| + \sum_{t=1}^T C_{p0t} |x_{0t}^p - S|}{C_{i01} |i_{01} - ES| + \sum_{t=1}^T C_{f0t} |f_{0t} - ES| + \sum_{t=1}^T C_{p0t} |p_{0t} - S|} \quad (4.5)$$

Vale a pena observar que $\Delta z_{0t} = x_{0t}^p - S$ e $\Delta I_{0t} = P_{0t} - S$, ou seja, considerando os custos e a penalização, estamos passando a considerar as variações de estoque e os custos de ajustamento.

O custo unitário é positivo e a multiplicação desse custo pelo módulo da diferença entre a quantidade e o valor alvo é a mesma coisa que o módulo dessa multiplicação. O custo unitário multiplicado pela quantidade é o custo total (variável que será usada para o cálculo da Nova Eficiência de Custo com essa função de penalização).

Se o custo unitário de produção C_{p0t} for igual ao custo unitário do produto vendido C_{d0t} , como é o caso que acontece na nova eficiência de de custo, já que são considerados que todos os custos unitários são iguais a 1, então $C_{p0t}S = C_{d0t}S = CPV_{0t}$.

Já para o estoque de segurança ES (Equação (2.14)) com $LT=1$ (ou seja, considerando $\sigma_{SLT} = \sigma_S$), se o custo unitário do produto vendido C_{d0t} for igual ao custo unitário dos estoques (inicial e final) C_{e0t} , ou seja, $C_{e0t} = C_{i0t} = C_{f0t} = C_{d0t}$, como é o caso que acontece na nova eficiência de de custo, já que são considerados que todos os custos unitários são iguais a 1, então pode-se considerar a propriedade multiplicativa do desvio-padrão. Para CES como sendo o “custo do estoque de segurança”:

$$\sigma_{CPV} = \sigma(CPV_{0t}) = \sigma(C_{d0t} \cdot S_{0t}) = \sigma(C_{e0t} \cdot S_{0t}) = C_{e0t} \cdot \sigma_S$$

$$\sigma_{CPV} = C_{e0t} \cdot \sigma_S \quad (4.6)$$

Então, considerando as Equações (2.11), (2.14) e (4.6), com $LT=1$ ($\sigma_{SLT} = \sigma_S$) e os custos unitários iguais, o valor alvo do estoque (custo) é o seguinte:

$$CES = C_{e0t} \cdot ES = C_{e0t} \cdot FS \cdot \sigma_{SLT} = FS \cdot \sqrt{LT} \cdot C_{e0t} \cdot \sigma_S = FS \cdot \sigma_{CPV}$$

$$CES = FS \cdot \sigma_{CPV} \quad (4.7)$$

Com isso, pode-se utilizar o “custo do estoque de segurança” CES como um valor alvo baseado no desvio-padrão do custo total do produto vendido σ_{CPV} . Vale a pena notar que da mesma forma que na Equação (2.11), se o fator de segurança FS da CES na Equação (4.7) for igual a 1 (FS=1), o nível de serviço baseado na distribuição normal de probabilidade (para FS=1) é aproximadamente 84,14%. Então, considerando as Equações (4.5), (4.6) e (4.7), a formulação da função objetivo é a seguinte:

$$\min_{Cz_{0t}^{-p}, Cz_{0t}^{+p}, Cx_{0t}^p} \frac{|Cz_{01}^{-p} - CES| + \sum_{t=1}^T |Cz_{0t}^{+p} - CES| + \sum_{t=1}^T |Cx_{0t}^p - CPV|}{|CEI_{01} - CES| + \sum_{t=1}^T |CEF_{0t} - CES| + \sum_{t=1}^T |CPP_{0t} - CPV|} \quad (4.8)$$

Considerando a penalização da Equação (4.8) nas restrições da Equação (4.4), a formulação do modelo proposto é o seguinte:

$$\min_{Cz_{0t}^{-p}, Cz_{0t}^{+p}, Cx_{0t}^p} \frac{|Cz_{01}^{-p} - CES_0| + \sum_{t=1}^T |Cz_{0t}^{+p} - CES_0| + \sum_{t=1}^T |Cx_{0t}^p - CPV_0|}{|CEI_{01} - CES_0| + \sum_{t=1}^T |CEF_{0t} - CES_0| + \sum_{t=1}^T |CPP_{0t} - CPV_{0t}|} \quad (4.9)$$

S.t.:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^Z CPV_{kt} \lambda_{kt} - S_{ykt}^+ = CPV_{0t}, t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{k=1}^Z |CPP_{kt} - CPV_k| \lambda_{kt} + S_{xkt}^- = |Cx_{0t}^p - CPV_0|, t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{k=1}^Z |CEF_{kt}^+ - CES_k| \lambda_{kt} + S_{zkt}^+ = |Cz_{0t}^{+p} - CES_0|, t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{k=1}^Z |CEI_{kt}^- - CES_k| \lambda_{kt} + S_{zkt}^- = |Cz_{0t}^{-p} - CES_0|, t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{k=1}^Z |CEF_{kt}^+ - CES_k| \lambda_{kt} - |CEI_{k(t+1)}^- - CES_k| \lambda_{k(t+1)} + S_{zkt}^+ - S_{zk(t+1)}^- = 0, t = 1, \dots, T-1 \\ Cx_{0t}^p - Cz_{0t}^{+p} + Cz_{0t}^{-p} = CPV_{0t}, t = 1, 2, \dots, T \\ Cz_{01}^{-p} = CEI_{01} \end{array} \right.$$

Este modelo da Equação (4.9) é a tempo discreto, porém não pode ser resolvido diretamente por Programação Linear, então, segundo (BERTSIMAS e TSITSIKLIS, 1997, p.18), pode-se linearizar as funções absolutas (módulos), adicionando uma variável e duas restrições para cada função absoluta (módulo) que contenha uma variável de decisão (projeção). O modelo linear proposto é o seguinte:

$$\min_{Cz_{0t}^{-p}, Cz_{0t}^{+p}, Cx_{0t}^p} \frac{CES_{z01}^{-p} + \sum_{t=1}^T CES_{z0t}^{+p} + \sum_{t=1}^T CES_{p0t}^p}{|CEI_{01} - CES_0| + \sum_{t=1}^T |CEF_{0t} - CES_0| + \sum_{t=1}^T |CPP_{0t} - CPV_0|} \quad (4.10)$$

S.t.:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^Z CPV_{kt} \lambda_{kt} - S_{ykt}^+ = CPV_{0t}, t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{k=1}^Z |CPP_{kt} - CPV_k| \lambda_{kt} + S_{xkt}^- = CES_{p0t}^p, t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{k=1}^Z |CEF_{kt}^+ - CES_k| \lambda_{kt} + S_{zkt}^+ = CES_{z0t}^{+p}, t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{k=1}^Z |CEI_{kt}^- - CES_k| \lambda_{kt} + S_{zkt}^- = CES_{z0t}^{-p}, t = 1, 2, \dots, T \\ \sum_{k=1}^Z |CEF_{kt}^+ - CES_k| \lambda_{kt} - |CEI_{k(t+1)}^- - CES_k| \lambda_{k(t+1)} + S_{zkt}^+ - S_{zk(t+1)}^- = 0, t = 1, \dots, T-1 \\ Cx_{0t}^p - Cz_{0t}^{+p} + Cz_{0t}^{-p} = CPV_{0t}, t = 1, 2, \dots, T \\ Cz_{01}^{-p} = CEI_{01} \\ Cz_{0t}^{-p} - CES_{z0t}^{-p} \leq CES_0, t = 1, 2, \dots, T \\ -Cz_{0t}^{-p} - CES_{z0t}^{-p} \leq -CES_0, t = 1, 2, \dots, T \\ Cz_{0t}^{+p} - CES_{z0t}^{+p} \leq CES_0, t = 1, 2, \dots, T \\ -Cz_{0t}^{+p} - CES_{z0t}^{+p} \leq -CES_0, t = 1, 2, \dots, T \\ Cx_{0t}^p - CES_{p0t}^p \leq CPV_0, t = 1, 2, \dots, T \\ -Cx_{0t}^p - CES_{p0t}^p \leq -CPV_0, t = 1, 2, \dots, T \end{array} \right.$$

Onde CES_{z0t}^{-p} é a variável de linearização de $|Cz_{0t}^{-p} - CES_0|$ da DMU em análise no período t, CES_{z0t}^{+p} é a variável de linearização de $|Cz_{0t}^{+p} - CES_0|$ da DMU em análise no período t, CES_{p0t}^p é a variável de linearização de $|Cx_{0t}^p - CPV_0|$ da DMU em análise no período t, Cz_{0t}^{-p} é a projeção do link de *input* (custo do estoque inicial) da k-ésima DMU no período t, Cz_{0t}^{+p} é a projeção do link de *output* (custo do estoque final) da k-ésima DMU no período t, Cx_{0t}^p é a projeção do *input* (custo de produção) da k-ésima DMU no período t, CES_k é o valor alvo do custo do estoque (Equação (4.7)) da k-ésima DMU, CPV_k é o valor alvo do custo de produção da k-ésima DMU, CPP_{kt} é o custo de produção do período t da k-ésima DMU, CEI_{kt} é o custo do estoque inicial da k-ésima DMU no período t, CEF_{kt} é o custo do estoque final da k-ésima DMU no período t, CPV_{kt} é o custo do produto vendido da k-ésima DMU no período t, S_{xt}^- é a folga do *input* no período t, S_{zt}^- é a folga do link de *input* no período t, S_{zt}^+ é a folga do link de *output* no período t, S_{yt}^+ é a folga do *output* no período t, λ_{kt} é a contribuição da k-ésima DMU para a DMU0 em análise (no tempo t), T é o número de períodos (horizonte de tempo), z é o número de DMUs, e k=0 indica a DMU em análise.

Este modelo proposto da Equação (4.10) pode ser resolvido por Programação Linear, assim como DEA. Os valores $|CEI_{kt}^- - CES_k|$, $|CEF_{kt}^+ - CES_k|$, e $|CPP_{kt} - CPV_k|$ (incluindo os da DMU em análise) não interferem na linearidade do modelo, pois são dados conhecidos a priori, ou seja, são coeficientes que multiplicam as variáveis e não precisam ser encontrados pelo modelo.

Restrições, como as de retorno variável de escala (VRS), podem ser incluídas ou retiradas nesses modelos propostos, então no próximo tópico serão abordados extensões e efeitos das restrições de valor inicial, de projeção, e VRS.

4.5. Extensões adicionando ou retirando restrições e seus efeitos (VRS, $x_{0t}^p \leq P_{0t}$, I_0 ou CEI_{01})

Como pode ser observado, dependendo do que se pretende medir com a eficiência e das informações disponíveis, algumas características podem ser assumidas no modelo, por exemplo, eficiência de controle (modelos propostos, com restrições variacionais), nova eficiência de custo total (TONE, 2002), projeção (ZHU, 2003), escala (BANKERS, CHARNES e COOPER, 1984), etc. Como a DEA encontra os valores ótimos com base nos dados dos

benchmarks, algumas restrições podem ser descartadas dependendo do tipo de análise que se deseja fazer. Por exemplo, a restrição de valor inicial $z_{01}^{-p}=I_0$ (ou de custo inicial $Cz_{01}^{-p}=CEI_{01}$) nem sempre é necessária nesses modelo DEA-OCT, apesar de ser necessária em um modelo puramente da OCT. A restrição de custo inicial (ou de custo inicial) é a seguinte:

$$z_{01}^{-p}=I_0 \quad \text{ou} \quad Cz_{01}^{-p}=CEI_{01} \quad (4.11)$$

Em certas circunstâncias, o nível de estoque inicial do primeiro período t pode ser importante e considerado. Se a DMU começa com um excesso de estoque, possivelmente devido à ineficiência de períodos anteriores aos períodos analisados, o modelo DEA pode classificar essa DMU como ineficiente (devido a um efeito cascata), apesar de práticas eficientes no período analisado. Se é desejado medir a eficiência da gestão e controle exclusivamente durante o horizonte de tempo analisado, essa restrição precisa ser considerada, uma vez que a DMU pode apresentar uma gestão eficiente no horizonte de tempo analisado, superando uma possível má gestão de períodos anteriores aos analisados. Se a DMU é eficiente considerando a restrição de valor inicial, mas ineficiente sem esta, pode-se recomendar que a DMU otimize seus níveis de estoque, se necessário fazendo promoção/liquidação dos estoques antigos (no caso de excesso de estoque) ou analisar o suprimento (no caso de falta de estoque), para verificar se foi uma ineficiência pontual e as possíveis causas (atraso no ressurgimento, previsão imprecisa, capacidade limitada, etc.), e ajuste sua política de controle de estoque para que continue atendendo a demanda de maneira eficiente.

Outras restrições que podem ser examinadas são as de projeção:

$$x_{0t}^p \leq P_{0t} \quad \text{ou} \quad Cx_{0t}^p \leq CPP_{0t} \quad (4.12)$$

(e pode-se acrescentar $y_{0t}^p \geq y_{0t}$ no caso de se usar esses modelos para medir eficiência de lucro).

Se esse tipo de restrição for considerado, o modelo pode cobrir alguns efeitos práticos refletidos nos dados, relacionados a previsão de demanda ou capacidade limitada, mas pode também mascarar alguns efeitos indesejáveis, como a falta de estoque. Por outro lado, um modelo sem essa restrição considera que os custos (ou receitas) podem ser postergados ou antecipados livremente. Assumindo que algumas empresas analisadas incorrem em um alto risco de falta de estoque (vista como uma das consequências de uma previsão imprecisa de demanda), embora os casos de capacidade limitada possam ocorrer em um mercado em expansão, esse tipo de restrição deve ser descartado para deixars os custos serem adiantados ou

postergados, bem como dar maior importância à falta de estoque, que pode ser considerado mais relevante do ponto de vista da gestão de estoque e da eficiência de custos.

O terceiro tipo de restrição que também pode ser considerada nos modelos é a restrição que leva ao Retorno Variável de Escala (do inglês, Variable Returns to Scale - VRS), já que nem sempre um aumento nas produções e estoques leva a um aumento proporcional e constante da demanda. Restrição VRS:

$$\sum_{k=1}^Z \lambda_k(t) = 1 \quad (4.13)$$

Exemplos de DMUs onde é possível esperar comportamentos VRS são grandes supermercados ou lojas de departamento que precisam estocar uma grande variedade de todos os tipos de produtos, embora o que demora ser vendido acabe sendo colocado em promoção e vendido a um preço mais baixo. Algumas dessas DMUs podem ser consideradas eficientes se o efeito VRS for considerado. O presente trabalho comparou os resultados com e sem essa restrição. Os resultados para ambas as configurações são discutidos no tópico 5. “Resultados da aplicação empírica”.

4.6. Modelo OCT como ferramenta de *benchmarking* para cálculo da eficiência de custo

Além dos modelos propostos até o tópico 4.4, também é aplicado modelos OCT a tempo discreto (sem misturar com DEA), para achar os custos ótimos e dividir pelos custos observado, para comparar o *ranking* das soluções quando a DMU tem como referência apenas um *benchmark* (uma DMU teórica que corresponde a seus valores ótimos) e quando ela toma a decisão somente com base em seus próprios dados e sua própria gestão.

Este modelo, apesar de ser mais simples do que os modelos DEA-OCT propostos, também serve para o cálculo da eficiência dinâmica de custo. Este modelo não considera as restrições da DEA devido aos motivos explicitados abaixo da Equação (4.14). A formulação proposta é a mais simples possível, misturando a função objetivo da Equação (4.3) com a restrição da variação de estoque do modelo OCT a tempo discreto da Equação (2.21), como se segue:

$$\min_{z_{0t}^{-p}, z_{0t}^{+p}, x_{0t}^p} \theta_{ce} = \frac{c_{i01}z_{01}^{-p} + \sum_{t=1}^T c_{f0t}z_{0t}^{+p} + \sum_{t=1}^T c_{p0t}x_{0t}^p}{c_{i01}I_{i01} + \sum_{t=1}^T c_{f0t}I_{f0t} + \sum_{t=1}^T c_{p0t}P_{0t}} \quad (4.14)$$

Sujeito a:

$$\begin{cases} x_{0t}^p + z_{0t}^{-p} - z_{0t}^{+p} = y_{0t}, & t = 1, 2, \dots, T \\ z_{01}^{-p} = I_0 \end{cases}$$

As variáveis e parâmetros utilizados neste modelo são os mesmos da Equação (4.3).

Este modelo pode ser particularmente útil no caso de não se possuir dados de outras empresas, então a DMU0 é comparada apenas com uma DMU teórica que corresponde a seus valores ótimos pela OCT. Como são apenas duas DMUs e a DMU teórica será sempre eficiente, então as restrições advindas da DEA se tornam redundantes e o resultado deste modelo já é a eficiência dinâmica de custo da DMU0. Características da função objetivo da Equação (4.10), como a incorporação do estoque de segurança (valor alvo) em uma função absoluta (módulo) de penalização, porém com custos unitários e quantidades ao invés de quantidades, ou da restrição de projeção da Equação (4.12), podem ser acrescentadas ao modelo. Com essas características a formulação é a seguinte:

$$\min_{z_{0t}^{-p}, z_{0t}^{+p}, x_{0t}^p} \frac{c_{i01}ES_{z01}^{-p} + \sum_{t=1}^T c_{f0t}ES_{z0t}^{+p} + \sum_{t=1}^T c_{p0t}ES_{p0t}^p}{c_{i01}|I_{i01} - ES_0| + \sum_{t=1}^T c_{f0t}|I_{f0t} - ES_0| + \sum_{t=1}^T c_{p0t}|P_{0t} - S_0|} \quad (4.15)$$

$$\text{S.t.:} \begin{cases} x_{0t}^p + z_{0t}^{-p} - z_{0t}^{+p} = y_{0t}, & t = 1, 2, \dots, T \\ z_{01}^{-p} = I_0 \\ z_{0t}^{-p} - ES_{z0t}^{-p} \leq ES_0, & t = 1, 2, \dots, T \\ -z_{0t}^{-p} - ES_{z0t}^{-p} \leq -ES_0, & t = 1, 2, \dots, T \\ z_{0t}^{+p} - ES_{z0t}^{+p} \leq ES_0, & t = 1, 2, \dots, T \\ -z_{0t}^{+p} - ES_{z0t}^{+p} \leq -ES_0, & t = 1, 2, \dots, T \\ x_{0t}^p - ES_{p0t}^p \leq S_0, & t = 1, 2, \dots, T \\ -x_{0t}^p - ES_{p0t}^p \leq -S_0, & t = 1, 2, \dots, T \end{cases}$$

Onde ES_{z0t}^{-p} é a variável de linearização de $|z_{0t}^{-p} - ES_0|$ da DMU em análise no período t , ES_{z0t}^{+p} é a variável de linearização de $|z_{0t}^{+p} - ES_0|$ da DMU em análise no período t , ES_{p0t}^p é a variável de linearização de $|x_{0t}^p - S_0|$ da DMU em análise no período t , z_{0t}^{-p} é a projeção do

link de *input* (estoque inicial) da k-ésima DMU no período t, z_{0t}^{+p} é a projeção do link de *output* (estoque final) da k-ésima DMU no período t, x_{0t}^p é a projeção do *input* (produção) da k-ésima DMU no período t, ES_k é o valor alvo do estoque (Equação (2.14)) da k-ésima DMU, z_{0t}^{-p} é o estoque inicial, z_{0t}^{+p} é o estoque final, x_{0t}^p é a produção, C_{i01} é o custo unitário do estoque inicial no primeiro período, C_{f0t} é o custo unitário do estoque final no período t, C_{p0t} é o custo unitário da produção no período t, T é o número de períodos (horizonte de tempo), z é o número de DMUs, e k=0 indica a DMU em análise.

No caso de se possuir dados de outras empresas e desejar usar este método para fazer comparações entre as DMUs, pode ser interessante normalizar as eficiências pelo valor máximo (sem considerar as DMUs teóricas), da seguinte forma:

$$\theta_{cek}^{std} = \frac{\theta_{cek}}{\max\{\theta_{cek}\}} \quad (4.16)$$

Onde θ_{cek}^{std} é a eficiência normalizada da k-ésima DMU, θ_{cek} é a eficiência da k-ésima DMU, e $\max\{\theta_{cek}\}$ é a maior eficiência das eficiências das k DMUs.

Uma forma de comparar as DMUs é, como em DEA, verificando por meio do nível de eficiência, a % que o custo deveria ter sido reduzido.

Uma outra forma de comparar pode ser feita conforme em Alves Junior e Cari (2017), rodando os modelos das equações (4.14) e (4.15) e verificando em que faixa de nível de estoque estão as DMUs. Por exemplo, se uma DMU é ineficiente nos dois modelos, então é um indicativo de possuir um excesso de estoque (já que está acima dos níveis até considerando o estoque de segurança), já se uma DMU é eficiente nos dois modelos, então é um indicativo de que a DMU possui uma demanda estável, logo o estoque de segurança é baixo (então neste caso um estoque baixo não necessariamente é um indicativo de risco de falta, pois está cobrindo variações aleatórias da demanda) e o resultado dos dois modelos são próximos, sendo eficiente nos dois.

4.7. Modelo OCT como ferramenta de *benchmarking* para cálculo da Nova Eficiência de Custo

Já este modelo, que serve para o cálculo da nova eficiência de custo, também não considera as restrições da DEA devido aos mesmos motivos. A formulação proposta é misturar

apenas a função objetivo da Equação (4.4) com a própria restrição da variação de estoque do modelo da Equação (4.4), pois na literatura não se encontra nenhuma relação entre a Nova Eficiência de Custo de Tone (2002) e os modelos OCT, ainda mais no contexto da eficiência dinâmica (que entre DEA e OCT, no geral, já é pouca). A formulação é a seguinte:

$$\min_{Cz_{0t}^{-p}, Cz_{0t}^{+p}, Cx_{0t}^p} \theta_{nce} = \frac{Cz_{01}^{-p} + \sum_{t=1}^T Cz_{0t}^{+p} + \sum_{t=1}^T Cx_{0t}^p}{CEI_{01} + \sum_{t=1}^T CEF_{0t} + \sum_{t=1}^T CPP_{0t}} \quad (4.17)$$

Sujeito a:

$$\begin{cases} Cx_{0t}^p + Cz_{0t}^{-p} - Cz_{0t}^{+p} = CPV_{0t}, & t = 1, 2, \dots, T \\ Cz_{01}^{-p} = CEI_{01} \end{cases}$$

Onde as variáveis e parâmetros utilizados neste modelo são os mesmos da Equação (4.4).

Além desse modelo ser particularmente útil no caso de não se possuir dados de outras empresas, pelo mesmo motivo do modelo da Equação (4.14), este modelo também pode ser usado para não incorrer em erro de estimação de custos unitários e quantidades.

As observações feitas para as Equações (4.14), (4.15) e (4.16) também servem para este modelo.

Características do modelo da Equação (4.10) ou da restrição da Equação (4.12) podem ser acrescentadas ao modelo. Com essas características a formulação é a seguinte:

$$\min_{Cz_{0t}^{-p}, Cz_{0t}^{+p}, Cx_{0t}^p} \frac{CES_{z01}^{-p} + \sum_{t=1}^T CES_{z0t}^{+p} + \sum_{t=1}^T CES_{p0t}^p}{|CEI_{01} - CES_0| + \sum_{t=1}^T |CEF_{0t} - CES_0| + \sum_{t=1}^T |CPP_{0t} - CPV_0|} \quad (4.18)$$

$$\text{S.t.:} \begin{cases} x_{0t}^p + z_{0t}^{-p} - z_{0t}^{+p} = y_{0t}, & t = 1, 2, \dots, T \\ Cz_{01}^{-p} = CEI_{01} \\ Cz_{0t}^{-p} - CES_{z0t}^{-p} \leq CES_0, & t = 1, 2, \dots, T \\ -Cz_{0t}^{-p} - CES_{z0t}^{-p} \leq -CES_0, & t = 1, 2, \dots, T \\ Cz_{0t}^{+p} - CES_{z0t}^{+p} \leq CES_0, & t = 1, 2, \dots, T \\ -Cz_{0t}^{+p} - CES_{z0t}^{+p} \leq -CES_0, & t = 1, 2, \dots, T \\ Cx_{0t}^p - CES_{p0t}^p \leq CPV_0, & t = 1, 2, \dots, T \\ -Cx_{0t}^p - CES_{p0t}^p \leq -CPV_0, & t = 1, 2, \dots, T \end{cases}$$

Onde as variáveis e parâmetros utilizados neste modelo são os mesmos da Equação (4.10).

Da mesma forma que na Equação (4.16), no caso de se possuir dados de outras empresas e desejar usar este método para fazer comparações entre as DMU0s, pode ser interessante normalizar as eficiências pelo valor máximo:

$$\theta_{ncek}^{std} = \frac{\theta_{ncek}}{\max\{\theta_{ncek}\}} \quad (4.16)$$

Onde θ_{ncek}^{std} é a nova eficiência de custo normalizada da k-ésima DMU, θ_{ncek} é a nova eficiência de custo da k-ésima DMU, e $\max\{\theta_{ncek}\}$ é a maior das novas eficiências de custo dentre as k DMUs.

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

5.1 Solução analítica do modelo a tempo contínuo proposto

Esse modelo da Equação (4.1) foi resolvido usando o Princípio do Máximo de Pontryagin, criando o Hamiltoniano H , associando a variável de coestado μ_H à restrição variacional, e adicionando à função objetivo. Logo após, o Hamiltoniano é incorporado ao Lagrangiano L , e são associados os Multiplicadores de Lagrange μ_L às outras restrições.

$$H = - \left[\sum_{j=1}^{n-1} C_{X_j} \left(t, x_j(t) \right) + \sum_{h=1}^{l-1} C_{Z_h} \left(t, z_h(t) \right) + C_{X_n} \left(t, x_n(t) \right) + C_{Z_l} \left(t, z_l(t) \right) \right] + \mu_H \left[x_n(t) - y_m(t) \right] \quad (5.1)$$

$$L = H - \mu_{L1} \left[\sum_{k=1}^Z x_{jk} \lambda_k(t) - x_j(t) \right] - \mu_{L2} \left[\sum_{k=1}^Z x_{nk} \lambda_k(t) - x_n(t) \right] - \mu_{L3} \left[\sum_{k=1}^Z z_{hk} \lambda_k(t) - z_h(t) \right] - \mu_{L4} \left[\sum_{k=1}^Z z_{lk} \lambda_k(t) - z_l(t) \right] - \mu_{L5} \left[y_i - \sum_{k=1}^Z y_{ik} \lambda_k(t) \right] - \mu_{L6} \left[y_m - \sum_{k=1}^Z y_{mk} \lambda_k(t) \right] \quad (5.2)$$

Do Princípio do Máximo de Pontryagin, temos que:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_n(t)} = \frac{\partial H}{\partial x_n(t)} + \mu_{L2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z_l(t)} = \frac{\partial H}{\partial z_l(t)} + \mu_{L4} = -\dot{\mu}_H \\ \mu_H(T) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Onde $\dot{\mu}_H$ indica a derivada de μ_H em relação ao tempo t .

Considerando x_n como sendo a produção, z_l como o estoque, e y_m como a demanda. Se o custo da produção for a função quadrática $C_{X_n}(t, x_n(t)) = \frac{C_{Xn} x_n^2(t)}{2}$ e o custo de estoque for a função quadrática $C_{Z_l}(t, z_l(t)) = \frac{C_{Zl} z_l^2(t)}{2}$, então:

$$\begin{cases} \mu_H = C_{Xn} x_n(t) - \mu_{L2} \\ \dot{\mu}_H = C_{Zl} z_l(t) - \mu_{L4} \\ \dot{z}_l(t) = \frac{\mu_H + \mu_{L2}}{C_{Xn}} - y_m(t) \end{cases} \quad (5.4)$$

Ou pode ser escrito como um equação diferencial de segunda ordem:

$$\ddot{z}_l(t) - \frac{C_{Zl}}{C_{Xn}} z_l(t) = -\frac{\mu_{L4}}{C_{Xn}} + \frac{\dot{\mu}_{L2}}{C_{Xn}} - \dot{y}_m(t) \quad (5.5)$$

Essa equação não tem uma solução para termos gerais do “right-hand side” (RHS) da equação $\left(-\frac{\mu_{L4}}{C_{xn}} + \frac{\dot{\mu}_{L2}}{C_{xn}} - \dot{y}_m(t)\right)$, por causa do tipo da integral gerada, mas esta equação diferencial de segunda ordem pode ser resolvida para casos específicos desta integral (por exemplo, quando suas funções tem natureza cíclica ou polinomial).

$$z_1^*(t) = k_1 e^{t\sqrt{C_{zl}/C_{xn}}} + k_2 e^{-t\sqrt{C_{zl}/C_{xn}}} + \frac{1}{2\sqrt{C_{zl}/C_{xn}}} \left(e^{-t\sqrt{C_{zl}/C_{xn}}} \int \left(e^{t\sqrt{C_{zl}/C_{xn}}} \left(\frac{\mu_{L4}^*}{C_{xn}} - \frac{\dot{\mu}_{L2}^*}{C_{xn}} + \dot{y}_m(t) \right) dt - e^{t\sqrt{C_{zl}/C_{xn}}} \int \left(e^{-t\sqrt{C_{zl}/C_{xn}}} \left(\frac{\mu_{L4}^*}{C_{xn}} - \frac{\dot{\mu}_{L2}^*}{C_{xn}} + \dot{y}_m(t) \right) dt \right) \right) dt \right) \quad (5.6)$$

Onde k_1 e k_2 são constantes. k_1 depende do estado inicial em $t=0$ e k_2 depende do estado final em $t=T$. Com isso, $k_2 e^{-t\sqrt{C_{zl}/C_{xn}}}$ é um termo que indica uma correção inicial na trajetória ótima da eficiência, por exemplo, se existe um excesso de estoque inicial, o modelo controla o nível de estoque para se corrigir logo nos primeiros períodos de tempo até obter um nível ótimo. Enquanto $k_1 e^{t\sqrt{C_{zl}/C_{xn}}}$ é o termo que indica uma correção final (para modelo de tempo finito), por exemplo, se tiver que incorrer em altos custos para atender a demanda próximo do período final, o modelo se corrige para manter um nível de estoque mais alto e que garanta que a demanda será atendida com uma produção ótima a custos mínimos.

Geralmente, a integral sem solução em OCT depende somente do tempo e da variação da demanda $\dot{y}_m(t)$, então para que o estoque e a produção possam acompanhar a flutuação da demanda e atender, em níveis ótimos, toda a demanda no tempo t .

A novidade da solução deste modelo integrado é a dependência dos termos $\frac{\mu_{L4}^*}{C_{xm}}$ e $-\frac{\dot{\mu}_{L2}^*}{C_{xmn}}$ que vem dos multiplicadores de Lagrange das restrições da DEA. Os termos indicam o multiplicador associado, respectivamente, à restrição de *input* e à medida intermediária. Ambos levam a uma solução de OCT otimizada alterada devido ao efeito das restrições da DEA no modelo. Nessa condição, é possível que nenhuma das DMUs atinja os valores teóricos ótimos, mas alguns deles ainda podem ser relativamente eficientes do ponto de vista da DEA (em comparação com a amostra de DMUs na análise).

Se a demanda conhecida for um polinômio de grau “2d”, $y_m(t) = \alpha_0 t^{2d} + \alpha_1 t^{2d-1} + \dots + \alpha_{2d} t^0$, e assumindo valores de estado estacionário fixos para os multiplicadores de Lagrange ótimos, a equação diferencial de segunda ordem pode ser completamente resolvida para o estoque:

$$z_l^*(t) = k_1 e^{t\sqrt{C_{zl}/C_{xn}}} + k_2 e^{-t\sqrt{C_{zl}/C_{xn}}} + \frac{\mu_{L4}}{C_{zl}} + \left[\frac{C_{xn}}{C_{zl}} \dot{y}_n(t) + \frac{C_{xn}^2}{C_{zl}^2} \ddot{y}_n(t) + \dots + \frac{C_{xn}^d}{C_{zl}^d} \frac{\partial^{2d-1} y_m(t)}{\partial t^{2d-1}} \right] \quad (5.7)$$

E para a produção:

$$x_n^*(t) = k_1 \sqrt{C_{zl}/C_{xn}} e^{t\sqrt{C_{zl}/C_{xn}}} + k_2 \sqrt{C_{zl}/C_{xn}} e^{-t\sqrt{C_{zl}/C_{xn}}} + y_m(t) + \left[\frac{C_{xn}}{C_{zl}} \ddot{y}_n(t) + \frac{C_{xn}^2}{C_{zl}^2} \frac{\partial^4 y_m(t)}{\partial t^4} + \dots + \frac{C_{xn}^d}{C_{zl}^d} \frac{\partial^{2d} y_m(t)}{\partial t^{2d}} \right] \quad (5.8)$$

Em outras palavras, como consequência dessas suposições, uma DMU pode ser considerada relativamente eficiente pela DEA, mesmo que seu estoque tenha um eventual custo adicional, caso a projeção da quantidade de produção para as DMUs eficientes seja ótima.

Quando se considera outras variáveis além do sistema de controle de estoque, os outros multiplicadores de Lagrange podem ser obtidos, por exemplo, utilizando métodos numéricos.

5.3 Modelo discreto e discussão sobre as soluções ótimas (relações entre custos e eficiências)

Semelhante à análise feita por Kao (2013), uma vez que é obtida a solução ótima das projeções z_{0t}^{-p*} , z_{0t}^{+p*} , e x_{0t}^{p*} (denotada por $*$) com quantidades ótimas de produção e estoques (final e inicial) para todos os períodos de tempo, é possível calcular o custo ótimo do sistema, $C_{system}^* = \sum_{t=0}^T [Cf_{0t} z_{l0t}^* + Cp_{0t} x_{n0t}^*]$ e ao compara-lo ao custo real observado $C_{system} = \sum_{t=0}^T [Cf_{0t} I_{0t} + Cp_{0t} P_{0t}]$ é obtida a eficiência de custo do sistema:

$$E_{system} = \frac{C_{system}^*}{C_{system}} = \frac{\sum_{t=0}^T [Cf_{0t} z_{l0t}^* + Cp_{0t} x_{n0t}^*]}{\sum_{t=0}^T [Cf_{0t} I_{0t} + Cp_{0t} P_{0t}]} \quad (5.9)$$

Onde E_{system} representa a eficiência do sistema com estrutura dinâmica.

De maneira semelhante, é possível calcular o custo ótimo do período t , $C_t^* = Cf_{0t} z_{l0t}^* + Cp_{0t} x_{n0t}^*$ e ao compara-lo ao custo real observado do período t $C_t = Cf_{0t} I_{0t} + Cp_{0t} P_{0t}$ é obtida a eficiência de custo do período t :

$$E_t = \frac{C_t^*}{C_t} = \frac{Cf_{0t} z_{l0t}^* + Cp_{0t} x_{n0t}^*}{Cf_{0t} I_{0t} + Cp_{0t} P_{0t}} \quad (5.10)$$

Onde E_t representa a eficiência decomposta para o período t .

Estes custos ótimos do sistema e por período podem ser expressos como uma projeção dos custos reais para a fronteira ótima considerando as eficiências:

$$C_{system}^* = E_{system} \cdot C_{system} \quad (5.11)$$

$$C_t^* = E_t \cdot C_t \quad (5.12)$$

Onde C_{system}^* é o custo ótimo do sistema, C_{system} é o custo real observado do sistema, C_t^* é o custo ótimo do período t , C_t é o custo real observado do período t , E_{system} é a eficiência do sistema com estrutura dinâmica, e E_t é a eficiência do período t .

Já que o custo ótimo do sistema C_{system}^* pode ser calculado como a soma dos custos de produção e estoques finais mais o estoque inicial no tempo $t = 1$ (somente como um *input* para o sistema no primeiro período), então não se deve calculá-lo apenas somando os custos ótimos C_t^* de cada período de tempo $t = 1, \dots, T$, pois em C_t^* é considerado o estoque inicial em cada tempo t (como um *input* para cada período), portanto se todos forem considerados na soma, será computado o dobro dos custos dos estoques iniciais dos períodos intermediários $t = 2, \dots, T-1$ no cálculo.

Assim, a soma dos custos ótimos de cada período de tempo t pode ser representada em relação ao custo ótimo do sistema, como se segue:

$$\sum_{t=1}^T C_t^* = C_{system}^* + \sum_{t=2}^{T-1} z_{10t}^{p*} \quad (5.13)$$

Consequentemente, a eficiência do sistema pode ser representada em relação às eficiências de cada período de tempo t da seguinte forma:

$$E_{system} = \frac{\sum_{t=1}^T E_t \cdot C_t - \sum_{t=2}^{T-1} z_{10t}^{p*}}{C_{system}} \quad (5.14)$$

Esses resultados e análise podem ser obtidos de maneira semelhante para os demais modelos.

5.4. Aplicação em exemplo simulado para mostrar como funciona o modelo DEA-OCT a tempo discreto para a nova eficiência de custo

Este exemplo simula um setor com DMUs homogêneas a serem avaliadas, onde os dados de St , Pt e $Ii0$ variam entre 5 e 7 (são apenas dados próximos para gerar as DMUs homogêneas e realizar a simulação) com $T = 2$ períodos, de modo que todos os valores, até mesmo dos estoques finais Ift , são não negativos. O número de combinações totais possíveis de valores inteiros que vão gerar as DMUs é $(7-5 + 1) * (7-5 + 1) \wedge T * (7-5 + 1) \wedge T = 243$. Os estoques finais Ift são calculados como $Ift = Ift-1 + Pt-Dt$ e os estoque inicial do próximo

período como $I_{it} + 1 = I_{ft}$. À medida que a nova medida de eficiência de custo é considerada, os custos unitários são considerados como sendo constantes e iguais a 1. O conjunto de dados é uma combinação dos valores $St = [5,6,7]$; $Pt = [5,6,7]$; $Ii0 = [5,6,7]$; calculado $I_{it} = [3,4,5,6,7,8,9]$; e calculado $I_{ft} = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11]$.

Considerando os sistemas de controle de estoque dessas 243 DMUs geradas para compor um setor homogêneo, o gerenciamento e controle em dois períodos é avaliado. O *lead time* é assumido como insignificante, constante e sem atrasos. Os *outputs* são as demandas dos dois períodos, os *inputs* são as produções dos dois períodos, e as medidas intermediárias do tipo livre e indesejável são os estoques que podem ser divididos em estoque inicial e estoque final de cada um dos dois períodos. Como exemplo, será usado o modelo da Equação (4.4). Os demais modelos funcionam de maneira semelhante. A classificação com as 12 primeiras DMUs que obtiveram as maiores eficiências, incluindo as eficientes, pode ser vista na Tabela 2.

Tabela 2 – *Ranking* de DMUs mais eficientes para o exemplo simulado.

<i>Ranking</i>	Eficiência	Custo ótimo	Custo Real	S1	S2	If1	If2	Ii1	Ii2	P1	P2
DMU1	1,0000	19,00	19	7	7	3	1	5	3	5	5
DMU2	1,0000	22,00	22	7	7	4	2	6	4	5	5
DMU3	1,0000	25,00	25	7	7	5	3	7	5	5	5
DMU4	0,9451	24,57	26	7	6	5	4	7	5	5	5
DMU5	0,9379	21,57	23	7	6	4	3	6	4	5	5
DMU6	0,9286	18,57	20	7	6	3	2	5	3	5	5
DMU7	0,9259	25,00	27	7	7	5	4	7	5	5	6
DMU8	0,9206	24,86	27	6	7	6	4	7	6	5	5
DMU9	0,9167	22,00	24	7	7	4	3	6	4	5	6
DMU10	0,9107	21,86	24	6	7	5	3	6	5	5	5
DMU11	0,9048	19,00	21	7	7	3	2	5	3	5	6
DMU12	0,8980	18,86	21	6	7	4	2	5	4	5	5

Os custos ótimos são obtidos com base na relação entre o estoque inicial do primeiro período $Ii1 = Ii0$ e as demandas Dt , de forma que a eficiência de custo dinâmica do sistema é a

comparação dos custos ótimos com os custos observados. Eventualmente, produções ótimas e estoques finais ótimos são obtidos e a eficiência de cada período pode ser decomposta para cada período.

Como pode ser visto na Tabela 2, a DMU1 é aquela com os menores custos observados e os menores níveis de produção e estoques, e atendendo as maiores demandas em todos os períodos. Na prática, se a produção igual a 5 for a menor produção observada entre as DMUs analisadas e a maior demanda for atendida (7 no melhor cenário simulado), a DMU será eficiente. Embora teoricamente, um cenário de estoque e/ou produção nula pudesse ocorrer, a parte DEA do modelo sempre classificaria a DMU de acordo com os valores mínimos relativos, que realmente ocorreram, então a DMU com o menor custo relativo de produção = 5 é considerada relativamente eficiente.

A DMU2 e a DMU3 também são eficientes e têm um estoque inicial relativamente alto no primeiro período (comparadas à DMU1). Elas são eficientes simultaneamente, devido à sua gestão e controle (por causa da OCT) e suas medidas relativas (por causa da DEA), pois possuem as melhores relações entre os custos ótimos e os custos observados, mesmo que não possuam os menores custos observados (de todas as DMUs da amostra). Do ponto de vista contábil, é necessário um estoque inicial menor no primeiro período para obter um custo observado menor do que o atual. Embora, em termos de gerenciamento e controle dos períodos analisados, um estoque inicial alto possa indicar situações ineficientes em períodos anteriores (tais como, má gestão operacional anterior ou previsão de demanda inadequada), as DMUs 2 e 3 são consideradas eficientes na análise atual porque conseguem diminuir o excesso inicial e servirem de benchmarking para as práticas de outras DMUs nos períodos analisados.

Por exemplo, a DMU6 tem um custo observado menor do que o custo das DMUs 2 e 3, mas, em termos de gerenciamento, a DMU1 atende a uma demanda maior usando a mesma produção e um nível de estoque final mais baixo. Assim, comparado aos custos ótimos e benchmarking, a DMU6 não é eficiente, pois não alcançou um custo ótimo / observado igual a 1, podendo atender uma demanda maior ou utilizar uma produção menor para atender a mesma demanda e ser comparável a seu benchmarking eficiente, enquanto as DMUs 2 e 3 são eficientes, porque seus custos observados alcançam os custos ótimos e são benchmarking para outras.

É importante mencionar que nem sempre uma demanda maior levará a uma DMU eficiente (ou menos ineficiente). Foi apenas no presente caso de DMUs similares, onde todos os conjuntos estavam bem alinhados (entre 5 e 7) e as DMUs eficientes produzindo os valores

mínimos (sem falta de estoque) da amostra. Por exemplo, se as DMUs forem comparadas a uma DMU com demanda duplicada e produção triplicada (e, eventualmente, níveis de estoque mais altos), a DMU com demanda mais alta não seria considerada eficiente.

Outro ponto importante de se observar é que usando um DDEA “comum” (equivalente ao modelo da Equação (4.4), mas sem a restrição variacional) obtém-se uma eficiência, porém com a soma das relações da Equação (2.8) não constante (impossível de acontecer na prática), enquanto todos os modelos propostos possuem tal restrição, reforçando que eles obtêm resultados mais realistas e possíveis de se obter na prática.

Os resultados dos demais modelos propostos podem ser observados na Tabela 14 (Apêndice G). As publicações (aceitas e submetidas) relacionadas à esta tese, podem ser observadas no Apêndice H. Os próximos tópicos abordam os exemplos empíricos.

5.5. Aplicação empírica usando o modelo a tempo discreto com estimação de custos unitários e quantidades

Este tópico traz os resultados do modelo proposto aplicado a dados de empresas das Américas do Sul e do Norte (rodando todas as DMUs juntas), e também uma segunda aplicação apenas a empresas do Brasil e Chile para comparar o desempenho desses dois países em desenvolvimento, setor por setor. A estatística descritiva por setor e por variável de custo total pode ser observado na Tabela 12 (Apêndice E).

Primeiramente, rodando com todas as 647 empresas juntas, conforme pode ser observado na Tabela 3, as empresas mais eficientes, considerando os 14 setores, são Targa Resources (setor de mineração), dos EUA, e CEG (setor de Petróleo e Gás) e Lix da Cunha (Construção), do Brasil. A tabela completa com todos os *rankings* e eficiências pode ser observada no Apêndice B.

Tabela 3 – Empresas mais eficientes (geral) de acordo com modelo proposto (dados em milhares de dólares).

DMU	Setor	País	Ef.	CPV	CPP	CEF	CEI	Receita	CE21	CE0
Lix da Cunha	Construção	BR	1	55506	54356	6532	7682	71530	95	1245
Targa Resources	Mineração	US	1	7567850	7568980	239950	238820	8720200	6170	5040
Ceg	Petróleo e Gás	BR	1	1133537	1133519	29416	29598	1605433	591	773

Vale a pena ressaltar que algumas empresas, como é o caso da Lix da Cunha, possuem um alto custo, mas os menores valores de *input* e de variáveis intermediárias, portanto, de acordo como o modelo foi formulado, ela foi considerada eficiente por causa dos valores baixos dessas variáveis, resultando em custo relativo menor do que das outras empresas e equivalente ao seu custo ótimo calculado. Isso pode ser considerado uma limitação do modelo proposto, mas pode-se sugerir a incorporação de metas e análise de erros de estimação para evitar tais situações.

As empresas eficientes por setor podem ser observadas no Apêndice C. Dentre os 14 setores e 647 empresas, 50 foram eficientes quando consideradas apenas DMUs do próprio setor.

Já considerando apenas empresas brasileiras e chilenas, para comparação dos desempenhos setor por setor de cada um desses dois países em desenvolvimento, são apresentados resultados gerais, resultados de eficiências do DDEA (DEA Dinâmico) e visão geral dos setores dos dois países comparativamente.

5.5.1 Resultados gerais.

O modelo foi aplicado a empresas de cada setor dos dois países. Entre as 141 empresas analisadas, 29 DMUs foram eficientes (20,57% do total): 12 empresas chilenas e 17 brasileiras (como pode ser visto na Tabela 4). Foi possível encontrar casos eficientes de ambos os países nos setores de Alimentos e Bebidas, Papel e Celulose e Óleo e Gás, enquanto nos demais setores havia a predominância de DMUs eficientes de um país.

Tabela 4 – Empresas eficientes usando o modelo proposto

Setor	País	DMU	Eficiência
Agr. e Pesca	Chile	Schwager	1
	Chile	Viconto	1
Alimentos e Bebidas	Chile	Concha y Toro	1
	Chile	Emiliana	1
	Brasil	Josapar	1

	Brasil	Minupar	1
	Brasil	Tereos	1
Comércio	Brasil	Battistella	1
	Brasil	BR Pharma	1
Construção	Brasil	Azevedo	1
	Brasil	Lix da Cunha	1
	Brasil	PDG Realt	1
Mineração	Chile	Pucobre	1
	Chile	Soprocál	1
	Chile	Sqm	1
Minerais não metálicos	Chile	Cementos	1
	Chile	Cristales	1
	Chile	Polpaico	1
Papel e celulose	Chile	Celulosa Arauco	1
	Brasil	Celul Irani	1
	Brasil	Santher Fab de Papel Sta Terezinha	1
Petróleo e Gás	Chile	Gasco	1
	Brasil	CEG	1
Química	Brasil	Cristal	1
	Brasil	Fer Heringer	1
	Brasil	Ultrapar	1

Sid.	E	Brasil	Ferbasa	1
Met.		Brasil	Iguaçu	1
		Brasil	Paranapanema	1

Como pode ser visto na Tabela 5, as empresas brasileiras eficientes são dos setores de Alimentos e Bebidas, Comércio, Construção, Papel e Celulose, Petróleo e Gás, Químico e Siderúrgico e Metalúrgico. O Brasil é exclusivamente responsável pelos casos de eficiência nos setores de Comércio, Construção, Química e Siderurgia e Metalúrgica. O setor químico é responsável por 5,5% de suas exportações e o siderúrgico e metalúrgico por 7,5% (OEC 2016a). Por outro lado, as empresas chilenas mais eficientes são dos setores de Agricultura e Pesca, Alimentos e Bebidas, Mineração, Minerais Não-Metálicos e Papel e Celulose. O Chile é totalmente responsável pelos casos de eficiência nos setores de Agricultura e Pesca, Mineração e Não-Metálicos. O setor de Agricultura e Pesca correspondem a 19,5% de seu total exportado, e Mineração e Minerais Não-Metálicos correspondem a 53,76% (OEC 2016b). Uma análise rápida leva à conclusão de que o Chile está mais focado em ser eficiente em setores importantes para suas exportações.

Tabela 5 – Eficiências médias, desvio padrão e número de empresas eficientes por setor

Setores	Eficiências médias			Desvio-padrão das eficiências			Número de empresas eficientes		
Setor	Geral	BR	CL	Geral	BR	CL	Geral	BR	CL
Agr. & Pesca	0,9628	0,9710	0,9623	0,0467	0,0000	0,0483	2	0	2
Alimentos & Bebidas	0,9630	0,9604	0,9660	0,0546	0,0609	0,0489	5	3	2
Comércio	0,9408	0,9594	0,9055	0,0583	0,0438	0,0679	2	2	0
Construção	0,9232	0,9293	0,8991	0,0820	0,0828	0,0909	3	3	0
Mineração	0,9986	0,9965	1,0000	0,0025	0,0030	0,0000	3	0	3
Minerais não metálicos	0,9899	0,9797	1,0000	0,0139	0,0133	0,0000	3	0	3

Papel & Celulose	0,9849	0,9882	0,9766	0,0196	0,0159	0,0331	3	2	1
Petróleo e Gás	0,9826	0,9908	0,9724	0,0283	0,0092	0,0422	2	1	1
Química	0,9789	0,9867	0,9653	0,0276	0,0195	0,0372	3	3	0
Sid. & Met.	0,9647	0,9746	0,9330	0,0478	0,0285	0,0820	3	3	0

BR= Brasil, CL = Chile

5.5.2 Análise descritiva dos setores onde ambos os países apresentam empresas eficientes

Abaixo são feitas análises descritivas dos setores, discutindo comparativamente os *benchmarks* e os casos mais relevantes de ineficiência. Primeiramente são analisados os setores onde ambos os países apresentam empresas eficientes.

5.5.2.1 Setor de Alimentos e Bebidas.

As eficientes empresas chilenas Concha y Toro (Concha y Toro 2017) e Emiliana são ambas vinhas focadas no mercado internacional. Segundo fontes oficiais, a Concha y Toro exportou produtos com valor total de mais de US \$ 320 milhões em 2012, e Emiliana, US \$ 29 milhões no mesmo período (Departamento Comercial do Chile 2017). Apenas 422 empresas brasileiras exportaram um valor total superior a US \$ 100 milhões em 2012 e 351 em 2016 (Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços, 2016).

Emiliana tem se caracterizado também por ser focada em vinhos orgânicos e atualmente é a maior vinícola orgânica do mundo, exportando para não menos que 60 municípios (Concha y Toro 2017; Emiliana 2017).

A penetração da Concha y Toro nos mercados internacionais começou no início dos anos 2000, com o aumento astronômico nos anos seguintes. (Mora 2009) aponta crescimento de 257% no volume de vendas entre 2000 e 2004 (cerca de três vezes o crescimento dos demais produtores chilenos) e 226% no faturamento (cinco vezes o crescimento dos demais produtores chilenos). Entre 2000 e 2013, ganhou uma presença em escala global e atualmente é o sétimo maior produtor de vinho do mundo.

Ao contrário dos casos chilenos, as empresas brasileiras do setor estão focadas no mercado nacional e local. A Josapar é uma distribuidora de grãos (Josapar 2017) e está entre as

1000 maiores exportadoras do Brasil, entre US \$ 10 e US \$ 50 milhões em 2016 (Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços 2016). A Minupar é uma holding voltada ao comércio de alimentos (principalmente frango) no mercado nacional e local, através de importação e exportação. Não é mencionado nos relatórios oficiais como um dos maiores operadores brasileiros. A Tereos é um grupo internacional que opera no Brasil. Suas atividades no Brasil estão relacionadas à plantação de cana-de-açúcar para o açúcar (com foco no mercado interno e externo) e à produção de etanol (mercado interno) (Tereos 2017). Está entre os 5000 maiores exportadores do Brasil, entre US \$ 1 e US \$ 5 milhões em 2016 (Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços 2016).

A AMBEV domina o mercado brasileiro de bebidas e é uma das maiores empresas do setor no mundo, mas é a última no *ranking* de eficiência entre as empresas analisadas do setor de Alimentos e Bebidas, utilizando essa abordagem DEA. Em 2004, a AMBEV fundiu-se com a Interbrew, criando a InBev, que se tornou a maior do mundo (Financial Times, 2017). Segundo o software Economática, em 2012, a AMBEV sozinha foi a maior empresa da América Latina. Uma das razões para sua classificação pode ser a variável retornar à escala. A AMBEV está entre as 1000 maiores exportadoras do Brasil, entre US \$ 10 e US \$ 50 milhões em 2016 (Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços 2016).

A JBS é uma empresa brasileira de alimentos, com foco no processamento e comercialização de proteína animal para o mercado interno e externo. Também está envolvida na produção, cogeração e comercialização de energia elétrica, prestação de serviços de engorda e transporte de gado. A JBS também gerencia resíduos industriais, produz e comercializa latas de aço, resinas plásticas, sabonete, barra de sabão, biodiesel, glicerina, ácido graxo, colágeno e invólucro, além de produtos de couro wet blue, semi-acabados e acabados; e compra e vende soja. Além disso, envolve-se no comércio de carne congelada cozida; operações logísticas e de armazenagem; e centro de distribuição e porto, resíduos, entre outros negócios (JBS Fiboi 2017). A JBS é classificada no setor de Alimentos e Bebidas segundo a Economática e está entre as empresas que exportaram mais de U \$ 100 milhões em 2012 e em 2016 (Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços 2016), mas é considerada ineficiente pela abordagem DEA. Uma das razões para sua classificação é um retorno variável à escala.

A Feria de Osorno é uma empresa chilena na produção, distribuição, importação, exportação e venda de produtos alimentícios para agricultores no Chile. Feria de Osorno opera por meio de dois segmentos, Agrícola e Investimento. Ele oferece principalmente produtos de carne consumíveis e industriais, e subprodutos de alimentos, bem como produtos lácteos (Feria

de Osorno 2017). Embora este segmento possa ser diretamente comparável às principais operações da JBS (fornecimento de carne), a Feria de Osorno é classificada no setor de Agricultura e Pesca pela Economática. A empresa também oferece tecnologia e suprimentos agrícolas, serviços de aluguel de carros, máquinas e equipamentos tecnológicos, veículos, combustíveis, serviços financeiros e administrativos, serviços de intermediação de gado, adubação e suprimentos e serviços veterinários, agroquímicos, itens de segurança e abate de gado. serviços, entre outros negócios (Feria de Osorno 2017). A empresa foi responsável por mais de US \$ 95 milhões em exportações em 2012 (Departamento Comercial do Chile 2017). Além da JBS, a Feria de Osorno também é considerada ineficiente em seu setor (Agricultura e Pesca), provavelmente pela ineficiência da escala. Uma comparação direta entre as duas empresas não foi possível devido às limitações de classificação do banco de dados.

5.5.2.2 Setor de Papel e Celulose.

A eficiente empresa chilena Celulosa Arauco e Constitución S.A (Arauco) faz parte da holding COPEC e produz a polpa de madeira, a madeira engenheirada e a silvicultura. Posicionou-se como um dos maiores proprietários florestais da América Latina, com uma área total de cerca de 1,5 bilhão de hectares, com 4 fábricas no Chile, 2 na Argentina e 2 no Brasil (Arauco 2017). Arauco foi responsável por mais de US \$ 1,7 bilhão. Exportações chilenas em 2012. Os outros segmentos do grupo Arauco foram co-responsáveis por mais de US \$ 800 milhões no mesmo ano (Departamento Comercial do Chile 2017). Atualmente, a Arauco tem clientes em 75 países, cobrindo diferentes segmentos, desde produtores de produtos domésticos à base de fibra de madeira até negócios que criam móveis, construção e indústria.

A Celulose Irani e a Santher são empresas menores no mercado brasileiro de celulose. A Irani produz resinas de papel e madeira (Irani 2017). Santher é uma holding diversificada, mas Santa Teresinha se refere especificamente às operações de produção de papel (Santher 2017). A Santher e a CMPC estão entre as 1000 maiores exportadoras do Brasil, entre US \$ 10 e US \$ 50 milhões em 2016 (Ministério da Indústria. Comércio Exterior e Serviços 2016).

As três maiores empresas brasileiras responsáveis pelas exportações de celulose (e derivados), Kablin, Suzano e Fibria (cada uma responsável por mais de US \$ 100 milhões em exportações) foram consideradas ineficientes (MINISTÉRIO DA INDÚSTRIA. COMÉRCIO EXTERIOR E SERVIÇOS 2016; EXAME, 2017).

A CMPC fez seu maior investimento entre 2009 e 2015 com o início da segunda linha de Guaíba, Brasil (CMPC 2017). É a última no *ranking* entre as empresas analisadas do setor de Papel e Celulose, utilizando essa abordagem DEA, mas sendo eficiente até 2015 e ineficiente no sistema como um todo. Este período coincide com o maior investimento.

5.5.2.3 Setor de Óleo e gás

A Gasco é uma distribuidora de gás para consumo doméstico (através de dutos) e industrial (através de cilindros e dutos) em 13 dos 17 estados chilenos (Gasco 2017). O suprimento de gás através de dutos para consumo doméstico é comum nas regiões mais populosas do Chile.

A CEG RIO explora a distribuição de gás natural (através de dutos) e seus subprodutos no Estado do Rio de Janeiro (um dos 27 estados brasileiros) (CEG Rio 2017). No Brasil, é comum o fornecimento de gás para consumo interno em cilindros (mesmo para as áreas mais povoadas). O fornecimento de gás através de dutos favorece a eficiência do sistema de controle de estoque porque não há necessidade de armazenamento físico dos cilindros de gás. Isso sugere que ambas as empresas foram beneficiadas por suas características operacionais.

A COPEC é uma holding chilena que comercializa combustíveis, mas devido a investimentos em setores como silvicultura, gás liquefeito, gás natural e pesca, responsável por US \$ 99 milhões das exportações chilenas em 2012 (Departamento Comercial do Chile 2017). O COPEC também controla a celulose Arauco (COPEC 2017). Embora a Arauco seja a empresa mais eficiente do setor, a COPEC é a última no *ranking* entre as empresas analisadas do setor de Petróleo e Gás, usando essa abordagem DEA. Uma das razões para sua classificação é um retorno variável à escala.

A Petrobras é responsável por grande parte das exportações brasileiras (está entre as 3 maiores exportadoras, juntamente com a Vale e a Embraer) (Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços 2016; Petrobras 2017). É o último no *ranking* entre as empresas analisadas do setor de Petróleo e Gás usando essa abordagem DEA, sendo eficiente até o terceiro trimestre de 2015, mas ineficiente no sistema geral. O primeiro período ineficiente coincide com o anúncio da pior perda da empresa. Outra razão para o seu *ranking* é por causa de um retorno variável à escala.

5.5.3 Análise descritiva dos setores onde apenas o Chile apresenta empresas eficientes

5.5.3.1 Setor de Agricultura e Pesca

A Viconto é uma empresa chilena que planta frutas e castanhas para exportação, entre os desafios de suas operações é estocar e transportar os frutos em baixas temperaturas eleva, comercializa e exporta frutas e vegetais frescos e congelados. Possui plantações no Chile Central e cultiva maçãs, pêras, pêssegos, nectarinas, ameixas, damascos, cerejas, framboesas, mirtilos, kiwis, aspargos, abacates e limões (Viconto 2017). Em 2012, onze empresas especializadas no comércio de frutas exportam em conjunto mais de U \$ 11 milhões (Departamento Comercial do Chile 2017), a Viconto poderá exportar através de um desses revendedores. Eles operam 447,45 ha em quatro vales diferentes no Chile. A partir de 2015, eles têm um mercado de 65.366 toneladas com os principais destinos nos Estados Unidos da América, Canadá e Europa (Viconto 2016).

A Schwager é classificada no *software* como agricultura e pesca, mas na verdade é mineração e energia (Schwager 2017). A classificação errônea deste banco de dados é uma das limitações do presente artigo.

A Sofruco é uma empresa de produtos relacionados a nozes, sucos, frutas frescas, ameixas e mel. Em termos de preços, a empresa vem enfrentando um cenário disperso, com declínios moderados, principalmente em vinhos, e vem mantendo uma estratégia de otimização dos custos de produção desde 2011 (Sofruco 2017). A Sofruco exportou mais de US \$ 11 milhões em 2012 (Departamento Comercial do Chile 2017). É o último no *ranking* entre as empresas analisadas do setor de Agricultura e Pesca usando esta abordagem DEA. Os períodos ineficientes coincidem com a adoção de sua estratégia de custos.

5.5.3.2 Setor de Mineração

Considerando o número de empresas chilenas estudadas, 10,17% eram dos setores de mineração ou minerais não-metálicos, e todas eram eficientes.

A Pucobre é uma mineradora chilena que atua na mineração de cobre na região norte do Atacama. Em 2011, aumentou sua participação no projeto de cobre-ouro El Espino para 100% (Pucobre 2017). É importante ressaltar que o cobre (cobre refinado e minério de cobre) é responsável por 44% das exportações chilenas. A Soprocal é uma empresa chilena que adquire depósitos de minério e produz cálcio, carbonatos e cal, vendendo-o nas indústrias de mineração

(Soprocal 2017). A SQM é uma empresa chilena focada em exportações e é a maior produtora mundial de lítio. Seus recursos naturais são extraídos da região do Atacama (SQM 2017). Em 2012, a Pucobre e a SQM exportaram, respectivamente, U \$ 47 e U \$ 430 milhões (Departamento Comercial do Chile 2017).

A Vale é uma das maiores mineradoras do mundo e também a maior produtora de minério de ferro, pelotas e níquel. É também o maior exportador brasileiro (mais de US \$ 10 bilhões, representando 5,9% das exportações brasileiras). A empresa sofreu em 2015 com as adversidades do setor de mineração, a queda nos preços do minério de ferro e a desvalorização do real (Vale 2017). É o último no *ranking* entre as empresas analisadas do setor de Mineração utilizando essa abordagem DEA. O período ineficiente coincide com as adversidades sofridas. Outra razão para o seu *ranking* é por causa de um retorno variável à escala.

5.5.3.3 Minerais não metálicos

A Cementos Bío-Bío é uma empresa chilena, fundada em 1957, que produz cimento, cal e concreto pré-misturado e presta serviços para a indústria de cimento (Bio Bio 2017) e exportou US \$ 12 milhões em 2012 (Departamento Comercial do Chile 2017). A Cemento Polpaico é uma empresa chilena, fundada em 2001, que também produz cimento e oferece agregados, incluindo areia e cascalho. Polpaico é controlado pelo grupo construtor Lafarge Holcim. Embora seja uma empresa de capital aberto, não há dados sobre essa empresa na Economática, pois ela é negociada na Euronext (Polpaico 2017). Esse tipo de solução (um construtor que incorpora o fornecedor de cimento) é inexistente entre os maiores construtores brasileiros. Empresas que gerenciam toda a cadeia de suprimentos aparentemente tendem a ser mais eficientes. A Cristalerias do Chile produz embalagens de vidro e plástico no Chile e vende seus produtos para fabricantes de produtos farmacêuticos, alimentos, vinhos, licores, cervejas e bebidas não-alcoólicas (CristalChile 2017). Exportou US \$ 0,9 milhão em 2012 (Departamento Comercial do Chile 2017).

O ineficiente Nadir Figueiredo é um produtor brasileiro de vidro entre os 1000 maiores exportadores do Brasil, entre US \$ 10 e US \$ 50 milhões em 2016 (Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços 2016). A empresa sofreu com a crise industrial no Brasil desde 2015 (Nadir 2017). É o último no *ranking* entre as empresas analisadas do setor de minerais não-metálicos usando esta abordagem DEA. O período ineficiente coincide com a crise industrial.

5.5.4 Análise descritiva dos setores onde apenas o Brasil apresenta empresas eficientes

5.5.4.1 Setor de Siderurgia e Metalurgia

A Paranapanema é uma empresa produtora de cobre refinado e também oferece produtos semi-acabados de cobre e liga de cobre (Paranapanema 2017). Está entre os 40 maiores exportadores do Brasil, acima de US \$ 100 milhões em 2016 (Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços 2016). Já citada empresa chilena de eficiência no setor de mineração (Pucobre) é uma das fornecedoras da Paranapanema, que também é eficiente na fabricação de produtos com cobre. A relação entre empresas eficientes na mesma cadeia de fornecimento merece um estudo mais aprofundado.

A Ferbasa é uma empresa metalúrgica que fabrica produtos de metais ferrosos e também explora depósitos de ferro (Ferbasa, 2017). Está entre os 300 maiores exportadores do Brasil, acima de US \$ 100 milhões em 2016 (Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços 2016). A Iguaçu é uma empresa metalográfica que fabrica produtos de embalagem. É especializada em latas de metal e focada no mercado interno (Iguaçu 2017).

Uma das limitações da análise deste setor é que um dos dez maiores produtores mundiais de cobre refinado, a empresa chilena Antofagasta Minerals, não está no banco de dados Económica. É a maior empresa negociada no Chile, mas suas ações são negociadas apenas na Bolsa de Valores de Londres (LSE) (Antofagasta 2017). A Antofagasta Minerals exportou US \$ 2 milhões em 2012 (Departamento Comercial do Chile 2017). Maior produtora mundial de cobre refinado, a empresa chilena CODELCO, é uma estatal, portanto seus dados também estão fora do banco de dados Económica (Codelco 2017). Nos últimos 12 anos, a CODELCO exportou aproximadamente 18% das exportações totais do Chile (Codelco 2015; Departamento Comercial do Chile 2017).

A Elecmetal é uma empresa siderúrgica chilena (Elecmetal 2017) e uma exportadora chilena representativa cujos principais importadores são os EUA, Peru e Brasil, responsáveis por US \$ 9 milhões em exportações (Departamento Comercial do Chile 2017). A Elecmetal é ineficiente de acordo com a atual abordagem da DEA, mas detém as principais ações da Cristalerias, que é uma referência de eficiência no setor de minerais não-metálicos.

Embora tenhamos observado casos em que várias empresas da mesma cadeia de suprimentos (mesmo de diferentes setores e países) eram eficientes, como a Pucobre (chilena) e a Paranapanema (brasileira), não houve nenhum caso de eficiência simultânea entre uma

empresa controlada e a controladora. . por exemplo, Arauco (eficiente) -COPEC (ineficiente), Cristalerías (eficiente) -Eleceto (ineficiente). Este tópico merece um estudo mais aprofundado.

5.5.4.2 Setor de produtos químicos

A Ultra-Ultrapar é uma holding voltada para a distribuição de combustíveis e produtos químicos, focada principalmente no mercado interno (Ultra 2017). A Cristal Pigmentos produz produtos químicos (BMFBOVESPA, 2017a). Está entre os 4000 maiores exportadores do Brasil, entre US \$ 1 e US \$ 5 milhões em 2016 (Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços, 2016). A Fer Heringer produz e distribui fertilizantes agrícolas (BMFBOVESPA, 2017b). Está entre os 2500 maiores exportadores do Brasil, entre US \$ 5 e US \$ 10 milhões em 2016 (Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços, 2016).

A Edelpa é uma empresa chilena que fabrica embalagens e embalagens de produtos alimentícios líquidos (como sopa, bebidas, etc.) e é considerada ineficiente pelos resultados da DEA. Está focada no mercado interno (Edelpa 2017). Uma razão óbvia pela qual esta empresa é fortemente menos eficiente do que seus pares (outras empresas de embalagem) não foi encontrada. Um estudo de caso deve ser conduzido para entender este outlier.

5.5.4.3 Setor de Comércio

A Battistella é uma empresa brasileira cuja atividade principal é o fornecimento de equipamentos e equipamentos industriais no atacado (Battistella 2017). Faz parte de um conglomerado que atua em outros setores e está entre os 2000 maiores exportadores do Brasil, entre US \$ 10 e US \$ 50 milhões em 2016 (Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços 2016). Esta empresa foi eficiente aplicando a DEA-OCT por setor.

A BR Pharma é uma empresa brasileira focada no mercado interno. A empresa opera uma rede de farmácias de varejo localizadas nas regiões Centro-Oeste, Nordeste e Sul do Brasil. O mercado brasileiro de drogarias mudou e aumentou drasticamente de 2008 até 2012, devido ao envelhecimento da população e ao boom econômico. É altamente competitivo e pulverizado (BR Pharma 2017). Até mesmo a holding Ultra-Ultrapar ingressou nesse mercado no período, mas é considerada ineficiente nessa abordagem de DEA. Este é um caso em que o controlador é eficiente, mas o controlado não é. A BR Pharma (assim como a Ultra) é um dos dez maiores players desse mercado (que atendem em conjunto 36%), é o resultado de várias fusões e

aquisições de 2010 a 2012. É importante ressaltar que este resultado de eficiência não era esperado, porque a BR Pharma foi uma das únicas empresas (entre seus pares) com resultados negativos constantes desde sua criação até 2015, e esse resultado de eficiência se deve ao uso da restrição de projeção, conforme explicitado no tópico de análise do efeito de se incluir (ou não) determinada restrição. Quando essa restrição é excluída, essa DMU deixa de ser eficiente em todos os períodos. Já para uma visão completa do mercado de drogarias no varejo brasileiro, um leitor interessado pode consultar (Fernandes et al. 2016). A BR Pharma pode ser o foco de futuras investigações.

Uma das limitações da análise deste setor é que as maiores redes chilenas de farmácias varejistas não estão no banco de dados Economática, porque não possuem dados públicos. A Farmacias Ahumada tinha ações na Bolsa de Santiago, mas cancelou sua participação no segundo trimestre de 2015 (Santiago Stock Exchange 2015). As outras redes chilenas de drogarias varejistas (por exemplo, Cruz Verde e Salcobrand) são empresas controladas.

A Forus é uma empresa chilena que fabrica produtos para calçados (Forus 2017). É o último no *ranking* entre as empresas analisadas do setor de comércio usando esta abordagem DEA, por isso é ineficiente, mas só eficiente durante o primeiro período do primeiro ano. Uma das razões pode ser a sazonalidade, porque geralmente os produtos de calçados têm picos de vendas em uma data específica, como próximo ao dia das mães e próximo à véspera de ano novo. Foi possível notar uma redução mais pronunciada da eficiência no último trimestre do ano, sugerindo níveis de estoque descontrolados para atender à demanda durante o quarto trimestre da véspera de ano novo. Antes dessas datas, o nível dos estoques é alto e, após essas datas, os estoques são baixos (comparados com os anteriores). Assim, as empresas que têm vendas sazonais tendem a ser menos eficientes do que as que vendem muitos tipos de produtos o ano todo.

De acordo com o Instituto Brasileiro de Executivos de Varejo e Mercado de Consumo (IBEVAR 2017), Lojas Americana é a maior empresa brasileira de varejo de eletrônicos e móveis, seguida pelo Magazine Luiza, que também é uma das dez maiores empresas varejistas brasileiras considerando todos os produtos, bem como Cencosud, uma empresa chilena com operações no Brasil. (IBEVAR 2017). Embora ambos sejam ineficientes, o Magazine Luiza alcançou maior eficiência em determinados períodos. Isso coincide com o lucro recorde antes do início da crise econômica brasileira (a partir de 2015), enquanto o período ineficiente da Lojas Americanas coincide com as perdas da controladora B2W (principalmente a partir de junho de 2014, ou seja, um ano antes da queda crítica de consumo devido à crise nacional). As

perdas da B2W podem ser consequência de alterações internas da gestão, um leitor interessado pode consultar (Correa 2013). Outra observação que pode ser feita é que, durante 2015 (o pico da crise), o Magazine Luiza cresceu mais que o concorrente chileno Cencosud, que também atua no Brasil, superando-o naquele ano (IBEVAR 2017). Embora 2011 e 2012 tenham sido anos de lucros seguidos de pequenas perdas para o Magazine Luiza, 2013 e 2014 foram anos de lucros recordes para a empresa. No ano de 2015, a empresa sofreu uma perda de R \$ 52,4 milhões (7,82 vezes maior que a perda de 2012). As lojas físicas começaram a crescer novamente apenas no terceiro trimestre de 2016.

5.5.4.4 Setor de Construção

Entre os casos eficientes, a Azevedo & Travassos é uma empresa de engenharia e construção que opera com obras pesadas, como aeroportos, rodovias, pontes, túneis e outros projetos de engenharia civil (Azevedo 2017); A Lix da Cunha também é uma empresa de engenharia que constrói rodovias, edifícios comerciais e complexos habitacionais (Lix da Cunha 2017); e a PDG Realty é uma companhia de investimentos imobiliários que atua no desenvolvimento residencial, loteamentos e também tem como objetivo a receita de aluguel comercial (PDG, 2017).

Entre os casos ineficientes chilenos, a Salfacorp é a maior empresa chilena do setor, está focada no desenvolvimento e gerenciamento de projetos de engenharia, construção e montagem, e investe em imóveis comerciais e títulos financeiros (Salfacorp 2017). Este caso de ineficiência é possível devido ao retorno variável à escala, uma vez que é a maior empresa do setor. A Besalco presta serviços de construção, constrói rodovias, pontes, edifícios, túneis, sistemas de saneamento, tubulações industriais e sistemas subterrâneos (Besalco, 2017). A Socovesa é uma empresa imobiliária que fornece serviços de construção, gerenciamento de projetos, desenvolvimento, engenharia, design e vendas (Socovesa 2017). Estudos comparativos de casos entre Azevedo & Travassos, Lix da Cunha e Belsaco, e entre PDG Realty e Socovesa são recomendados.

A MRV é uma empresa brasileira que planeja e constrói edifícios residenciais em seis estados do Brasil. Foi considerado ineficiente. Recomenda-se realizar um estudo de caso. Não foi encontrada uma empresa brasileira que integrasse outros segmentos da cadeia de suprimentos da mesma holding, como o construtor chileno Lafarge Holcim, que controla a

Cimentos Polpaico, empresa produtora de cimento e que oferece agregados, incluindo areia e cascalho. Este caso requer mais estudos, além do escopo do presente estudo.

5.6. Aplicação Empírica usando o modelo a tempo discreto com custos totais para cálculo da nova eficiência de custo com suposições de CRS e VRS

Nesse tópico, são apresentados os resultados para o modelo de custos totais da nova eficiência de custo, testando possibilidades de excluir e incluir as restrições. Os resultados usando custos totais foram próximos aos dos modelos com estimação de custo unitário e quantidades, então decidiu-se neste tópico focar nos resultados da aplicação no setor de comércio para verificar o efeito das restrições, principalmente da restrição de projeção, que não apresentou grandes diferenças em aplicação simulada.

A característica que mais influencia as eficiências é o retorno da escala. Decidiu-se manter o valor de contorno (valor inicial) e remover a restrição de projeção, porque, embora os resultados fossem semelhantes, a eficiência de uma determinada DMU com falta de estoque estava sendo superestimada. Esta DMU foi considerada como eficiente com o uso desta restrição, mas é uma empresa que pediu recuperação judicial, por causa de um custo operacional alto, falta de estoque e perda de vendas (EXAME, 2018), ou seja, considerar que a projeção deve ser sempre menor que o observado pode distorcer os resultados quando há risco de falta de estoque.

5.6.1. Suposições constantes (CRS)

Como pode ser visto na Tabela 6, a empresa eficiente sob a premissa de Retorno Constante de Escala (CRS) é a Battistella, uma empresa brasileira cuja atividade principal é o comércio de caminhões e ônibus, materiais e equipamentos industriais atacadistas (BATTISTELLA, 2018). Ela faz parte de uma holding diversificada que atua em outros setores (B3, 2018), e está entre os 2.000 maiores exportadores do Brasil (MDIC, 2018).

Tabela 6 – As eficiências das empresas utilizando o modelo CRS proposto

DMU	Setor	Ranking	$\theta_{ncsystem}$	$\overline{\theta}_{ncet}$	$\sigma_{\theta_{ncet}}$
Battistella	Comércio	1	1,0000	1,0000	0,0000
Wlm Ind Com	Comércio	2	0,9746	0,9276	0,0618
Minasmaquinas	Comércio	3	0,9058	0,8104	0,1049
Lojas Hering	Comércio	4	0,8774	0,7874	0,0789
Cencosud S.A.	Comércio	5	0,8632	0,7554	0,0858
Pão de Açúcar	Comércio	6	0,8556	0,7466	0,0884
Profarma	Comércio	7	0,8553	0,7395	0,0969
Dimed	Comércio	8	0,8244	0,7053	0,1014
Viavarejo	Comércio	9	0,8203	0,6915	0,1061
B2W Digital	Comércio	10	0,8104	0,6869	0,1098
Empresas Hites S.A.	Comércio	11	0,8088	0,6751	0,1178
Magaz Luiza	Comércio	12	0,8005	0,6768	0,1029
S.A.C.I. Falabella	Comércio	13	0,7930	0,6643	0,1066
Compañia Industrial El Volcan S.A.	Comércio	14	0,7680	0,6379	0,1154
Ripley Corp S.A.	Comércio	15	0,7639	0,6257	0,1272
Lojas Americ	Comércio	16	0,7617	0,6257	0,1264
RaiaDrogasil	Comércio	17	0,7541	0,6198	0,1107
BR Pharma	Comércio	18	0,7397	0,6074	0,1460
Empreend Pague Menos S/A	Comércio	19	0,7382	0,5980	0,1156
Lojas Marisa	Comércio	20	0,7358	0,5843	0,1503
Lojas Renner	Comércio	21	0,7083	0,5548	0,1361
Dufry AG	Comércio	22	0,6929	0,5431	0,1395
Soquimich Comercial S.A.	Comércio	23	0,6908	0,5149	0,1702
Grazziotin	Comércio	24	0,6567	0,5048	0,1531
Natura	Comércio	25	0,6503	0,4981	0,1454
Forus S.A.	Comércio	26	0,5817	0,4578	0,1606
Inbrands SA	Comércio	27	0,5329	0,3855	0,1263

A Inbrands (a menos eficiente DMU) é uma empresa chilena com operações no Brasil. Embora esteja entre as três menores empresas do segmento de vestuário, moda e esportes (IBEVAR, 2017), foi a empresa com maior possibilidade de melhorar a eficiência de custos.

5.6.2. Suposições Variáveis (VRS)

Como pode ser visto na Tabela 7, as empresas eficientes sob o pressuposto de Retornos Variáveis de Escala (VRS) são, também, a Battistella (Brasil) e, adicionalmente, Lojas Hering (Brasil), Cencosud SA (Chile) e Pão de Açúcar (Brasil).

A Hering é uma empresa brasileira que tem como atividade principal o varejo de vestuário (Hering, 2018). Ela parte de um conglomerado de consumo cíclico e têxtil (B3, 2018), está entre os 3 mil maiores exportadores do Brasil (MDIC, 2018) e ficou entre os 50 maiores varejistas em 2015 (IBEVAR, 2017). Pão de Açúcar é a maior rede brasileira de supermercados (IBEVAR, 2017). Faz parte do grupo de empresas do GPA (Grupo Pão de Açúcar), o maior grupo brasileiro de varejo e distribuição (GPA, 2018). Já a Cencosud é uma rede de supermercados chilena, parte de um dos principais conglomerados varejistas da América Latina, e possui operações no Brasil (CENCOSUD, 2018).

Tabela 7 – As eficiências das empresas utilizando o modelo VRS proposto

DMU	Setor	Ranking	$\theta_{ncsystem}$	$\overline{\theta}_{ncet}$	$\sigma_{\theta_{ncet}}$
Battistella	Comércio	1	1,0000	1,0000	0,0000
Lojas Hering	Comércio	2	1,0000	1,0000	0,0000
Cencosud S.A.	Comércio	3	1,0000	1,0000	0,0000
Pão de Açúcar	Comércio	4	1,0000	1,0000	0,0000
Wlm Ind Com	Comércio	5	0,9861	0,9768	0,0398
Profarma	Comércio	6	0,9700	0,9447	0,0458
Viavarejo	Comércio	7	0,9503	0,9120	0,0658
B2W Digital	Comércio	8	0,9230	0,8776	0,0615
Magaz. Luiza	Comércio	9	0,9149	0,8687	0,0597
S.A.C.I. Falabella	Comércio	10	0,9145	0,8648	0,0452
Minasmaquinas	Comércio	11	0,9109	0,8267	0,1031
Dimed	Comércio	12	0,9016	0,8394	0,0699

Lojas Americ	Comércio	13	0,8746	0,8072	0,0826
RaiaDrogasil	Comércio	14	0,8668	0,7892	0,0649
Ripley Corp S.A.	Comércio	15	0,8635	0,7835	0,0834
Empresas Hites S.A.	Comércio	16	0,8504	0,7416	0,1168
Empreend Pague Menos S/A	Comércio	17	0,8318	0,7452	0,0718
BR Pharma	Comércio	18	0,8221	0,7323	0,1446
Lojas Marisa	Comércio	19	0,8048	0,6985	0,1327
Dufry AG	Comércio	20	0,7952	0,6840	0,1141
Compañia Industrial El Volcan S.A.	Comércio	21	0,7869	0,6698	0,1067
Lojas Renner	Comércio	22	0,7862	0,6731	0,1082
Natura	Comércio	23	0,7351	0,6208	0,1188
Soquimich Comercial S.A.	Comércio	24	0,7089	0,5479	0,1653
Grazziotin	Comércio	25	0,6620	0,5147	0,1508
Forus S.A.	Comércio	26	0,6092	0,4915	0,1490
Inbrands SA	Comércio	27	0,5441	0,4017	0,1192

Vale ressaltar que a empresa Lojas Hering (Brasil) possui os menores custos (mas também a menor demanda), enquanto a Cencosud S.A. (Chile) e a Pão de Açúcar (Brasil) são grandes empresas que vendem uma grande variedade de produtos. Eles possuem uma variedade considerável de produtos estocados e, às vezes, colocam seus produtos em promoção para venderem o excesso de estoque. Dessa forma, embora tenham estoques relativamente altos, suas escalas compensam seus custos.

Como foi dito no desenvolvimento do modelo, era esperado que houvesse supermercados entre DMUs eficientes com a suposição VRS, mas os resultados da Renner e Magazine Luiza foram uma surpresa. A Renner é do mesmo segmento da Hering e, segundo a IBEVAR (2017), está entre as três maiores “produtividades de receita” em relação ao número de lojas e de funcionários do segmento. Mesmo assim, poderia melhorar sua eficiência de custos para obter um lucro maior e melhorar o gerenciamento de estoque. Já o Magazine Luiza, embora esteja entre os cinco maiores varejistas do Brasil e a maior valorização de ações em 2016, não teve isso refletido em seus balanços patrimoniais, nem no sistema de controle de estoque.

Esse modelo não captura incerteza de demanda ou valor alvo de produção (compra). Por exemplo, uma DMU com alta incerteza de demanda poderia manter um alto nível de estoque, ou o gerente poderia definir um valor alvo de produção (compra), como a produção (compra) de valores constantes ou proporcionais a uma demanda prevista. Dessa forma, pode ser sugerido a incorporação de componentes estocásticos, valores alvos e estimativas de erro na análise para evitar tais situações.

5.7. Aplicação empírica usando o modelo OCT (sem DEA) como ferramenta de benchmarking para cálculo da eficiência de custo com e sem valores alvos

Também foi testada a eficiência dinâmica de custo calculada sem levar em consideração a fronteira de eficiência gerada pelo grupo de DMUs, considerando apenas a relação entre os custos ótimos e os custos observados da própria DMU em análise, gerados pela aplicação do modelo de OCT a tempo discreto exposto na Equação (4.14).

Os resultados estão tabulados no Apêndice B. Como a eficiência não depende de outras DMUs, mas apenas da própria DMU em análise e de uma DMU teórica com valores ótimos melhores ou iguais aos valores observados, então as eficiências serão sempre entre 0 e 1, mas não normalizados. Com isso a eficiência geral ou por setor é a mesma, mas pode acontecer de nenhuma DMU alcançar o valor 1.

Pode-se observar que 2 das 3 DMUs eficientes (modelo proposto) mantém as primeiras posições utilizando somente o modelo OCT para o cálculo das eficiências. Entre as 5 primeiras do *ranking*, 4 DMUs são as mesmas com ambos os modelos.

Enquanto entre as 15 primeiras posições aparecem somente DMUs que estão entre as 27 primeiras posições do *ranking* com o modelo proposto, a empresa que apresenta a maior diferença é a Helbor, que aparece em 53º com o modelo proposto, mas está em 621º entre as últimas posições usando somente OCT.

Apesar dessas diferenças nos *rankings* e nas eficiências, no geral, os modelos apresentam *rankings* semelhantes. Calculando a correlação entre as eficiências usando o modelo OCT e o modelo DEA-OCT, obtém o seguinte resultado: a correlação geral entre as eficiências dos dois modelos é de 0,9190 (rodando tudo junto), já rodando apenas o setor de

comércio é de 0,7446, ou seja, por mais baixo que seja, ainda é uma forte correlação, sugerindo que as empresas buscam seus próprios ótimos antes analisar a concorrência.

A seguir são apresentados os resultados do modelo com valores alvos e penalizações, pois na prática as empresas lidam com incerteza da demanda, devendo manter um estoque de segurança mínimo para atender variações da demanda e atrasos, mas sem aumentar o risco, nem incorrer em custos de falta de estoque.

5.8. Aplicação empírica usando o modelo DEA-OCT com penalização para nova eficiência de custo e pressuposto VRS

Os resultados deste modelo (Equação (4.10)) com pressupostos VRS (Equação (4.13)) para o setor de comércio podem ser observados na Tabela 8.

Tabela 8 – Eficiência com penalização (setor de comércio)

DMU	<i>Ranking</i>	Eficiência
B2W Digital	16	0,704201
Battistella	26	0,490137
BR Pharma	15	0,72915
Cem	13	0,772225
Cencosud	6	0,842885
Dimed	19	0,649086
Empreend Pague Menos S/A	5	0,845771
Falabella	3	0,902334
Forus	27	0,471027
Grazziotin	21	0,61236
Hites	22	0,594246
Inbrands SA	25	0,496061
Lojas Americ	4	0,890838
Lojas Hering	1	1

Lojas Marisa	8	0,816173
Lojas Renner	7	0,83908
Magaz Luiza	14	0,756054
Minasmaquinas	23	0,578019
Natura	18	0,684517
Pão de Açúcar	1	1
Profarma	20	0,628151
RaiaDrogasil	12	0,780745
Ripley	11	0,786058
Soquicom	17	0,701382
Viavarejo	10	0,793123
Volcan	9	0,796079
Wlm Ind Com	24	0,49841

Pode-se observar que as DMUs Pão de Açúcar e Lojas Hering são eficientes, assim como usando o modelo VRS sem penalização. Isso sugere que essas DMUs possuem demandas mais estáveis e melhores previsões, então conseguem ser eficientes nos dois modelos (pois o estoque de segurança é baixo).

5.9 Correlação e Concordância de Kendall

Primeiramente, foi calculado o W de Kendall para verificar a concordância entre os modelos. O resultado foi uma forte concordância de 0,8220, ou seja, no geral, os resultados obtidos com os modelos propostos são semelhantes. Obviamente existem pequenas diferenças e para verificar quais são os modelos em discordância com os demais, a partir das correlações, pode-se calcular o τ de Kendall.

A Tabela 13 (Apêndice F) mostra o τ de Kendall para os modelos (dois a dois). Pode-se observar que as correlações variam de 0,2050 a 1,0000, porém a média das correlações é 0,6622, sendo que 51% das correlações são moderadas (entre 0,5 e 0,7), 36% são fortes (acima de 0,7), e somente 13% são fracas (abaixo de 0,5). A maioria das correlações fracas são dos

modelos mais distintos, como os modelos VRS, de penalização, e sem I_0 . Os demais modelos, que são recomendados para situações distintas (como por exemplo, quando se tem todos os dados, somente dados de custos totais, ou somente dados da própria empresa) geram resultados semelhantes com moderada a forte concordância/correlação.

5.10. Clusterização Onion

Também foi feita uma clusterização pelo método da cebola de Barr, Durchholz e Seiford (2000). Foram obtidos 99 clusters. Analisando os clusters médios dos setores (Tabela 8), observa-se que, entre os mais eficientes, estão os setores de 2 das 3 empresas mais eficientes, que são os setores de Petróleo e Gás, e Mineração. Apesar de não possuir nenhuma DMU tida como eficiente, na média o setor de Comércio possui DMUs entre as melhores. No Apêndice D pode ser observada a tabela com o número de DMUs de cada setor em cada cluster.

Tabela 8 – Cluster médio dos setores

Setor	Petróleo & Gás	Mineração	Comércio	Eletroeletrônicos	Siderur & Metalur	Veículos e peças	Alimentos e Beb
Cluster médio	26	37	32	41	40	48	42

Setor	Construção	Química	Máquinas Indust	Têxtil	Agro e Pesca	Minerais não Met	Papel e Celulose
Cluster médio	74	50	49	54	57	60	51

Já, entre os menos eficientes, estão os setores Têxtil, Agro e Pesca, e Minerais Não Metálicos. Apesar de possuir 1 das 3 empresas mais eficientes, o setor de Construção pode ser considerado o setor com as DMUs mais ineficientes (na média).

Uma outra observação pode ser feita acerca da classificação das DMUs em cada setor. Por exemplo, seguindo a classificação dada pelo software, o setor de Minerais Não Metálicos possui empresas heterogêneas, podendo não refletir a realidade do setor.

Observando os clusters no geral (Tabela 8), na média um setor inteiro pode ser melhor do que outro, por exemplo, o cluster médio do Petróleo e Gás é o 26, enquanto a primeira DMU dos setores de minerais não-metálicos e de papel e celulose aparecem somente depois do cluster 30, mas ao mesmo tempo, o cluster médio do setor de construção é o 74, porém este possui uma DMU entre as mais eficientes. Com isso, é importante ressaltar a necessidade de um estudo mais aprofundado sobre as empresas e os setores, para conhecer as peculiaridades de cada setor e saber se algum fator pode influenciar a gestão a ponto de um setor nunca poder ser mais eficiente do que outro (como é o caso de minerais não-metálicos e papel e celulose), ou se é uma questão de gestão (como é o caso de construção).

6. CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo desenvolver modelos de eficiência dinâmica de custo (e nova eficiência dinâmica de custos totais) que incorporem a relação entre medidas intermediárias, *inputs* e *outputs* (por exemplo, estoque, produção e demanda em sistemas de controle de estoque), para avaliar a eficiência do sistema de controle das DMUs.

Os modelos propostos podem ser considerados melhores para medir a eficiência de custo de sistemas que possuem variáveis com relações entre si, pois essa relação entre as variáveis foi incorporada ao modelo DEA através de uma restrição usada na OCT. Essa restrição faz diferença no modelo, pois, por exemplo, um modelo padrão poderia sugerir que as DMUs variassem apenas uma das variáveis separadamente, algo impossível de acontecer na realidade, pois essa relação chega a ser física (exemplo: é impossível aumentar o estoque sem variar a produção, nem a demanda).

Antes de desenvolver os modelos, foi feita uma pesquisa bibliográfica, onde no início deste trabalho foram encontrados poucos trabalhos que relacionassem OCT à eficiência dinâmica ou DEA. Para desenvolver os modelos propostos, foi considerado uma restrição variacional da Teoria do Controle Ótimo (OCT) para descrever a dinâmica do sistema de controle de estoque e incorporar a relação entre as variáveis estoque, produção e demanda.

A principal referência para os modelos propostos foi o modelo integrado DEA-OCT de Sengupta (1995), que foi aprimorado com características dos modelos DDEA mais recentes, como a inclusão de variáveis intermediárias, relacionando os tipos de variáveis e conceitos da OCT e da DDEA, e também foi estendida sua aplicação a sistemas de controle de estoque.

Os modelos propostos consistem em modelos integrados DEA-OCT e em modelos concorrentes puramente de OCT (sem DEA) usados como ferramentas de *benchmarking* e análise de eficiência. Cada modelo proposto tem um propósito de ser aplicado em uma determinada situação.

O modelo DEA-OCT a tempo contínuo (Equação (4.1)) é composto por funções que dependem do tempo, então não cria um nó por período. Embora a ideia de se obter uma solução funcional que possa ser usada com recorrência para um determinado set de possibilidades de produção para atender uma demanda em um sistema de controle de estoque, esse modelo nem

sempre é possível de ser resolvido de forma analítica e depende de uma série de fatores que nem sempre estão presentes. Por exemplo, a função demanda deve ser conhecida e com características específicas, como assumir uma forma polinomial ou de natureza cíclica (como as trigonométricas). Ainda assim, mesmo que seja possível encontrar uma solução para o Hamiltoniano, ainda deve-se encontrar os multiplicadores de Lagrange, por exemplo, assumindo valores de estado estacionário fixos, ou utilizando algum outro método.

O modelo DEA-OCT a tempo discreto (Equação (4.3)) é composto por variáveis de custos unitários e quantidades, mas que, por exemplo, não são dados em relatórios contábeis, sendo necessário estima-las antes de aplicar o modelo. O método sugerido para estimar tais variáveis baseia-se em uma informação de custo relativo para se obter \$1,00 de receita e média de custos entre dois períodos. Ou seja, com isso é necessário coletar dados de uma variável a mais (receita), estimar variáveis (que pode incorrer em erros de estimação), descartar o primeiro e o último período para estimação dos custos, e um período inicial extra que será usado apenas para a informação sobre o estoque inicial.

O modelo DEA-OCT a tempo discreto para cálculo da nova eficiência dinâmica de custo total (Equação (4.4)) é composto por variáveis de custos totais, que pode ser usado diretamente com os dados de relatórios contábeis, resolvendo alguns problemas do modelo anterior e sendo necessário apenas de um período inicial extra que será usado para obter a informação sobre o estoque inicial.

O modelo DEA-OCT com penalização (Equação (4.10)) é composto por custos totais e valores alvos, sendo que as funções são penalizadas quando a solução não vai de encontro ao valor alvo. Foi considerado o estoque de segurança baseado no desvio-padrão da demanda (e sem atrasos de ressuprimento) como valor alvo do estoque. Já para a produção, foi considerado a demanda como valor alvo. Como a diferença entre produção e demanda é a variação de estoque, este modelo leva em conta os custos de ajustamento.

Foi feita uma análise do efeito de três tipos de restrições nos modelos DEA-OCT. A primeira é a restrição de valor inicial, que quando retirada, causa um efeito cascata, onde nível de estoque inicial do primeiro período pode contar para a ineficiência da DMU, mesmo com uma prática de gestão e controle eficiente no horizonte de tempo analisado, ou seja, uma possível ineficiência de períodos anteriores aos períodos analisados causa um efeito cascata. A segunda é a restrição de projeção, que quando considerada, pode cobrir alguns efeitos práticos refletidos nos dados (relacionados a previsão de demanda ou capacidade limitada), porém restringe a dinâmica do sistema, pois os custos não podem mais ser postergados ou antecipados

livremente e pode distorcer a eficiência de DMUs com alto risco de falta de estoque. A terceira é a restrição de VRS, que quando considerada, permite que a análise de eficiência seja feita considerando retornos variáveis de escala, e isso pode ser importante, já que nem sempre um aumento nas produções e estoques leva a um aumento proporcional e constante da demanda.

Também foram utilizados modelos puramente de OCT para o cálculo das eficiências dinâmicas de custos. Esses modelos, apesar de serem mais simples que os modelos DEA-OCT, são recomendados para quando não se possui dados de outras empresas, então o único benchmarking da DMU analisada é o seu próprio ótimo. A forte correlação entre as eficiências dos modelos DEA-OCT e somente OCT sugerem que as empresas buscam seus próprios ótimos antes de analisar a concorrência. Esses modelos de OCT para eficiência também possuem variações, como por exemplo, pode-se incorporar a penalização, restrição de projeção, usar para cálculo da nova eficiência dinâmica de custos toatis, etc.

De forma geral, nas aplicações empíricas, quando os dados de todas as DMU são rodados juntos (sem separar por setores), incluindo DMUs das Américas do Sul e do Norte, apenas CEG, Lix da Cunha, e Targa Resources são eficientes. Quando foram consideradas apenas DMUs do Brasil e Chile, separadas por setores, o Brasil foi exclusivamente responsável pelos casos de eficiência nos setores de Comércio, Construção, Química e Siderurgia e Metalúrgica. O setor químico é responsável por 5,5% das exportações brasileiras e o siderúrgico e metalúrgico por 7,5% (OEC 2016a); enquanto o Chile foi totalmente responsável pelos casos de eficiência nos setores de Agricultura e Pesca, Mineração e Não-Metálicos. O setor de Agricultura e Pesca correspondem a 19,5% do total exportado pelo Chile, e Mineração e Minerais Não-Metálicos correspondem a 53,76% (OEC 2016b). Ou seja, o Chile está mais focado em ser eficiente em setores importantes para suas exportações. As constatações de que empresas eficientes eram principalmente exportadoras podem ser devidas ao fato de que, para serem competitivas globalmente, elas precisam ser bem administradas.

Foi observado que as DMUs mais ineficientes e as DMUs que eram eficientes apenas por alguns períodos (mas ineficiente no sistema), tiveram piores desempenhos após 2015, sugerindo que um grande evento ocorreu nesta época (sim, uma crise financeira) e afetou mais estas empresas. A diferença entre uma empresa eficiente e uma empresa ineficiente apenas durante a crise econômica não é porque os eficientes não sofrem com a crise, mas sim tomam melhores decisões e tem melhores estratégias nesses períodos. Para as grandes empresas é uma dificuldade natural mudar e adaptar suas estratégias ao longo do tempo, devido à sua inércia. Outro padrão é que empresas de *holdings* e conglomerados que operam em cadeias de

suprimentos tendem a estar entre as DMUs eficientes, principalmente sob o pressuposto VRS. Uma das razões é porque quando um grupo gerencia bem toda a cadeia de suprimentos, ele pode evitar o efeito chicote, controlando e gerenciando estoques de maneira mais eficaz e com ganhos de escala.

Especificamente para o setor de comércio, os modelos CRS com restrição de projeção indicam Battistella e BR Pharma como eficientes, porém quando tal restrição é descartada, apenas Battistella é eficiente. Isso se dá pelo fato de que faltou estoque em tal DMU (EXAME, 2018) e o problema apresentado com tal restrição. Já considerando os modelos VRS, as DMUs eficientes foram as brasileiras Battistella, Lojas Hering, e Pão de Açúcar, e a chilena Cencosud.

Vale ressaltar que a empresa Battistella já era eficiente do ponto de vista CRS, as Lojas Hering (Brasil) possuem os menores custos (mas também a menor demanda), enquanto a Cencosud S.A. (Chile) e a Pão de Açúcar (Brasil) são grandes empresas que vendem uma grande variedade de produtos, sendo seus custos e estoques compensados pela escala.

Por fim, foi utilizada a técnica Onion para verificar se as DMUs se agrupam por setores de acordo com suas eficiências. Foi verificado que para alguns setores, a média de um setor inteiro pode ser mais eficiente do que as melhores DMUs de um outro setor, indicando que as peculiaridades de cada setor podem influenciar sua eficiência (como é o caso do setor de Petróleo e Gás em comparação aos setores de minerais não-metálicos e de papel e celulose), porém também tiveram setores com uma média ruim, mas com DMUs eficientes, indicando que nesses casos pode ser apenas uma questão de gestão (como é o caso da construção).

Uma das limitações deste trabalho é o uso da classificação das DMUs em cada setor dada pelo *software*. Por exemplo, seguindo a classificação dada pelo *software*, a indústria de Minerais Não-Metálicos tem empresas heterogêneas e pode não refletir a realidade do setor.

Outras limitações estão relacionadas à disponibilidade de dados. Não foi possível encontrar dados de algumas empresas importantes para alguns setores, como Antofagasta Minerals e CODELCO. Seis setores (finanças e seguros, software e dados, fundo, assim como os setores relacionados à prestação de serviços, como energia elétrica, transportes, telecomunicações, e a categoria outros) e DMUs com zeros, dados negativos ou ausentes, também foram excluídos. E depois disso, quatro setores (Eletrônicos, Máquinas Industriais, Têxtil e Veículos e Peças) tinham apenas dados de um país, então não foi possível usá-los para fazer comparações entre países.

6.1. Trabalho futuros

Além dos modelos propostos, este estudo fornece *insights* sobre o desempenho da gestão de estoques de empresas de países emergente economicamente (do Brasil e do Chile), e pode ser usado para fins de *benchmarking* por outros pesquisadores. Fatores não incluídos no modelo podem afetar o desenvolvimento de países, então, para estudos futuros, sugere-se a inclusão de outras variáveis, análise dos impactos sociais e ambientais, e de outros países.

Também para trabalhos futuros, pode-se sugerir a análise de DMUs e setores caso a caso, ou seja, fazer um estudo do porquê das DMUs eficientes possuírem aqueles valores, ou de um determinado setor, no geral, ser mais eficiente do que outro, do porquê de uma determinada DMU ser quase eficiente, e também estudar o efeito da crise econômica na eficiência das empresas.

Algumas outras sugestões são referentes a estender o desenvolvimento dos modelos DEA-OCT estocásticos, para análise de eficiência técnica, integração com modelos Benefit of Doubt (BoD) para construção de indicadores compostos, uso com machine learning e reinforcement learning, chance constrained (permitindo definir o nível de serviço nas restrições), suavização de fronteira, e previsão de eficiência.

REFERÊNCIAS

- AGUIAR, F. H. O; SAMPAIO, M. *Identificação dos fatores que afetam a ruptura de estoque utilizando análise de agrupamentos*. **Revista Produção**. São Carlos. 2013.
- ALMEIDA, T. R. *Desenvolvimento de uma política de decisões de ressuprimento para materiais de demanda dependente*. 2007. 64 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.
- ALVES JUNIOR, P. N.; & CARI, E. P. T. The Use of Optimal Control Theory as a Benchmarking Tool in Production-Inventory Systems. In: Ö. F. Yılmaz & S. Tüfekçi (Eds.), *Handbook of Research on Applied Optimization Methodologies in Manufacturing Systems*. Hershey, PA: IGI Global. 2017.
- Antofagasta (2017). Antofagasta PLC. <http://www.antofagasta.co.uk/> [20.09.2017].
- Arauco (2017). Celulosa Arauco y Constitucion S.A. - Sustainable Forest Product Manufacturer. <http://www.arauco.cl/> [20.09.2017].
- ARAÚJO, A.M.P., NETO, A.A. *Aprendendo a contabilidade: Como entender o processo contábil, como interpretar as deonstrações contábeis, como aplicar a contabilidade em negócios*. Ribeirão Preto: Inside Books, 2010.
- Azevedo (2017). Azevedo & Travassos S.A. <http://azevedotravassos.com.br/portal/> [26.09.2017].
- Banker, R. D.; Charnes, A.; and Cooper, W.W. Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, v. 30, n. 9, p. 1078-1092, 1984.
- BARR, R. S.; DURCHHOLZ, M. L.; SEIFORD, L. M. Peeling the DEA onion: layering and rank ordering DMUs using tiered DEA. Southern Methodist University, 2000.
- BATTISTELLA (2018). Battistella. <http://www.battistella.com.br/> [20.05.2018]
- BELLMAN, R. On the Theory of Dynamic Programming. **P.N.A.S.** v. 38, p. 716–719, 1952.
- BERTSEKAS, D. P. *Dynamic programming and optimal control*. Belmont: Athena Scientific, 2005.

- Besalco (2017) Besalco S.A. Available at: <http://www.besalco.cl/> [26.09.2017].
- Bio Bio (2017) Cementos Bío Bío S.A. <https://cementosbiobio.cl/> [20.09.2017].
- BMFBOVESPA (2017a) Cristal Pigmentos do Brasil S.A. <http://bvmf.bmfbovespa.com.br/cias-listadas/empresas-listadas/ResumoEmpresaPrincipal.aspx?codigoCvm=11398&idioma=pt-br> [20.09.2017].
- BMFBOVESPA (2017b) Fertilizantes Heringer S.A. <http://bvmf.bmfbovespa.com.br/cias-listadas/empresas-listadas/ResumoEmpresaPrincipal.aspx?codigoCvm=20621&idioma=pt-br> [20.09.2017].
- B3 (2018). BVMFBOVESPA/CETIP. http://www.b3.com.br/pt_br/ [20.05.2018].
- BR Pharma (2017) BR Pharma. <http://ri.brasilpharma.com.br/> [21.09.2017].
- CANESSA, E. C. T.; MATEO, F. G.; e YUSHIMITO, D. V. W. F. Data envelopment analysis and Pareto genetic algorithm applied to robust design in multiresponse systems. *Revista Facultad de Ingeniería, Universidad de Antioquia*, n. 79, p. 119-129. 2016.
- CEG Rio (2017) Ceg Rio S.A. - Gas Natural Fenosa Brasil. <https://www.gasnaturalfenosa.com.br/br/servicos+de+gas+rio+de+janeiro/para+a+sua+casa/distribuicao+de+gas+natural/tarifas/1297313692091/ceg+rio+.html> [20.09.2017].
- CHARNES, A., & COOPER, W.W. Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics Quarterly*, 15, 333-334, 1962.
- CHARNES, A., & COOPER, W.W. An Explicit General Solution in Linear Fractional Programming, *Naval Research Logistics Quarterly*, 20, 449– 467, 1973.
- CHARNES, A., COOPER, W.W., & RHODES, E. Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research*, 2, 429-444, 1978.
- CHEN, C.-M. A network-DEA model with new efficiency measures to incorporate the dynamic effect in production networks. *European Journal of Operational Research*, 194, 687-699. 2009.
- CHING, H. Y. *Gestão de estoques na cadeia de logística integrada: Supply chain*. São Paulo: Atlas, 1999.
- CMPC. (2017). Empresas CMPC S.A. - Celulose Riograndense. <http://www.celuloseriograndense.com.br/empresa/cmpec> [20.09.2017].

Codelco. (2015). Codelco - Memorial Anual. <https://www.codelco.com/memoria2015/pdf/memoria-anual/memoria-anual-codelco-2015.pdf> [20.09.2017].

Codelco. (2017). Codelco - Corporación Nacional del Cobre , Chile. <https://www.codelco.com/> [20.09.2017].

Commercial Department of Chile. (2017). ProChile – Importadores - Directorio exportador. <http://www.prochile.gob.cl/importadores/directorio-exportador/?re=1> [20.09.2017].

Concha y Toro. (2017). Vina Concha y Toro S.A. https://www.conchaytoro.com/?lang=es_es [19.09.2017].

COOPER, W. W., SEIFORD, L. M., & TONE, K. Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software. New York: Springer. 2007.

Copec. (2017). Empresas Copec S.A. - History. <http://www.empresascopec.cl/en/empresas-copec/historia/> [20.09.2017].

CORREA, H. L.; GIANESI, I. G. N.; CAON, M. *Planejamento, programação e controle da produção*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2001.

CORREA, H. L.; GIANESI, I. G. N.; CAON, M. *Planejamento, programação e controle da produção*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

CristalChile. (2017). Cristalerías de Chile S.A. <http://www.cristalchile.cl/> [20.09.2017].

DESPOTIS, D.K., KORONAKOS, G., SOTIRO, D. Composition versus decomposition in two-stage network DEA: a reverse approach. *Journal of Productivity Analysis*. v. 45, p. 71 - 87, 2016.

DREYFUS, S. Richard Bellman on the Birth of Dynamic Programming. **Operations Research**, v. 50, n. 1, p.48–51, 2002.

Edelpa. (2017). Edelpa - Envases del Pacífico S.A. <http://www.edelpa.cl/> [20.09.2017].

Elecmetal. (2017). Elecmetal - Compañía Electro Metalúrgica S.A. <http://www.elecmetal.com/es/> [20.09.2017].

Emiliana. (2017). Viñedos Emiliana S.A. - Organic Vineyards. <http://www.emiliana.cl/> [19.09.2017].

Exame. (2017). Revista Exame - Ranking do setor de papel e celulose em 2016 (Ranking of the pulp and paper sector in 2016). São Paulo. mm.exame.abril.com.br/empresas/filtrar/2016/papel-e-celulose/Todos [20.09.2017].

EXAME. Revista Exame - Os erros e a queda da BR Pharma, criada com planos grandiosos. Disponível em: < <https://exame.abril.com.br/negocios/os-erros-e-a-queda-da-br-pharma-criada-com-planos-grandiosos/> >. Acesso em: 05 mar. 2018.

FALLAH-FINI, S.; TRIANTIS, K.; JOHNSON, A. L. Reviewing the literature on non-parametric dynamic efficiency measurement: State-of-the-art. *Journal of Productivity Analysis*. v. 41, p. 51 - 67, 2014.

FÄRE, R., & GROSSKOPF, S. Intertemporal Production Frontiers: With Dynamic DEA. Boston: Kluwer Academic Publishers. 1996.

FARRELL, M. J. The measurement of Productive Efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society*, v. 120, n. 3, p. 253 – 290, 1957.

Ferbasa. (2017). Ferbasa - Cia de Ferro Ligas da Bahia S.A. http://www.ferbasa.com.br/default_pti.asp?idioma=0&conta=45 [20.09.2017].

Feria de Osorno. (2017). Feria de Osorno S.A. <http://www.fossa.cl/inicio.html> [21.09.2017].

FERNANDES, I. R. C., MELO, I. C., ALVES JUNIOR, P. N., RBELATTO, D.A.N. Brazilian Drugstores Market: An Overview Of The Main Characteristics and Players, in Annals of XXIV SIMPEP (Synposium of Production Engineering). Bauru: UNESP - State University of São Paulo, pp. 2–14. doi: ISSN 1809-7189. 2016.

FERREIRA, C.M.C., GOMES, A.P. *Introdução à Análise Envoltória de Dados: Teoria, Modelos e Aplicações*. Editora: UFV, Viçosa – MG, 2009.

Financial Times. (2017). The lean and mean approach of 3G Capital. <https://www.ft.com/content/268f73e6-31a3-11e7-9555-23ef563ecf9a> [19.09.2017].

Forus (2017) Forus S.A. <http://forus.cl/en> [28.09.2017].

Gasco. (2017). Empresas Gasco S.A. <http://www.gasco.cl/> [20.09.2017].

GODINHO FILHO, M.; FERNANDES, F. C. F. *Planejamento e controle da produção: dos fundamentos ao essencial*. São Paulo: Atlas, 2010.

HATEFI, S.M., JOLAI, F., IRANMANESH, H., KOR, H. A New DEA Model for Classification Intermediate Measures and Evaluating Supply Chain and its members. *International Conference on Computer Engineering and Technology*, 2009.

HOBBS, J. A. *Controles de estoque e de produção*. Tradução de Manoel Galhart Vieira. São Paulo: McGraw-Hill, 1976. Título original: *Control Over Inventory and Production*.

HOLLAND, J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. University of Michigan Press, 1975.

HOLT, C.C., MODIGLIANI, F., MUTH, J.F., SIMON, H.A. *Planning Production, Inventories, and Work Force*. New Jersey: Prentice-Hall, 1960.

IBEVAR. (2017). IBEVAR - Brazilian Institute of Retail and Consumer Executives. <http://www.ibevar.org.br/> [27.09.2017].

Iguaçu. (2017). Metalgráfica Iguaçu S.A. <http://www.metaliguacu.com.br/index.php> [20.09.2017].

Irani. (2017). Celulose Irani S.A. <http://www.irani.com.br/> [20.09.2017].

JBS Friboi. (2017). Friboi-JBS S.A. <https://www.friboi.com.br/a-empresa> [21.09.2017].

Josapar. (2017). Josapar - Joaquim Oliveira Participações S.A. <http://josapar.com.br/> [19.09.2017].

KAPELKO, M., OUDE LANSINK, A., & STEFANO, S.E. Assessing dynamic inefficiency of the Spanish construction sector pre- and post-financial crisis. *European Journal of Operational Research*, 237, 349-357. 2014.

KAO, C., HWANG, S.N. Efficiency measurement for network systems: IT impact on firm performance. *Decision Support Systems*, v. 48, p. 437 - 446, 2010.

KHARATISHVILI, G. "Revaz Gamkrelidze is 70". **Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics**. v. 11, p. 3-7, 1997.

LIANG, L., COOK, W.D., ZHU, J. DEA models for two-stage processes: Game approach and efficiency decomposition. *Naval Research Logistics*, v. 55, n. 7, p. 643 - 653, 2008.

Lix da Cunha. (2017). Construtora Lix da Cunha S.A. <http://www.lix.com.br/> [26.09.2017].

MARIANO, E.B., SOBREIRO, V.A., & REBELATTO, D.A.N. Human development and data envelopment analysis: A structured literature review. *Omega*, 54, 33-49, 2015.

MATEO, F.d., COELLI, T., & O'DONNELL. Optimal Paths And Costs Of Adjustment In Dynamic DEA Models: With Application To Chilean Department Stores. *C. Ann Oper Res*, v. 145, p. 211-227, 2006.

MDIC (2018). Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços. <http://www.mdic.gov.br/> [20.05.2018].

MIGUEL, P. A. C. et al (Org.). *Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

Ministry of Industry. Exterior Commerce and Services. (2016). Brazilian Companies: Importers and Exporters. <http://www.mdic.gov.br/comercio-exterior/estatisticas-de-comercio-exterior/empresas-brasileiras-exportadoras-e-importadoras> [09.09.2017].

MORA, P. Is Branding an Efficient Tool for the Wine Industry? Three Case Studies, *International Journal of Case Method Research & Application*, 21(2), pp. 128–138. 2009.

Nadir. (2017). Nadir - Nadir Figueiredo Indústria e Comércio S.A. <http://www.nadir.com.br/> [20.09.2017].

NEMOTO, J.; GOTO, M. Dynamic data envelopment analysis: modeling intertemporal behavior of a firm in the presence of productive inefficiencies. *Economics Letters*, v. 64, p. 51-56, 1999.

NEMOTO, J.; GOTO, M. Measurement of Dynamic Efficiency in Production: An Application of Data Envelopment Analysis. *JPA*, v. 19, p. 191-210, 2003.

OECD. (2016a). The Observatory of Economic Complexity - Brazil. <http://atlas.media.mit.edu/en/profile/country/bra/#Exports> [09.09.2017].

OECD. (2016b). The Observatory of Economic Complexity - Chile. <http://atlas.media.mit.edu/en/profile/country/chl/> [09.09.2017].

OECD. (2017a). OECD Economic Outlook - BRAZIL - Preliminar. <https://www.oecd.org/eco/outlook/economic-forecast-summary-brazil-oecd-economic-outlook-june-2017.pdf> [20.09.2017].

OECD. (2017b). OECD Economic Outlook - CHILE - Preliminar. <http://www.oecd.org/eco/outlook/economic-forecast-summary-chile-oecd-economic-outlook-june-2017.pdf> [20.09.2017].

Paranapanema. (2017). Paranapanema S.A. <http://www.caraiba.com.br/> [20.09.2017].

PDG. (2017). PDG S.A. ri.pdg.com.br [26.09.2017].

PESCH, H. J.; BULIRSCH, R. The Maximum Principle, Bellman's Equation, and Carathodory's Work. **Journal Of Optimization Theory And Applications**, v. 80, n. 2, 1994.

PESCH, H. J.; PLAIL, M. The Maximum Principle of Optimal Control: A History of Ingenious Ideas and Missed Opportunities. **Control and Cybernetics**. v. 38, n. 4, p. 973-995, 2009.

PESCH, H. J.; PLAIL, M. The Cold War and The Maximum Principle of Optimal Control. **Documenta Mathematica**. v. extra, p. 331-343, 2012.

Petrobras (2017) Petrobras - Petróleo Brasileiro S.A. <http://www.petrobras.com.br/pt/> [20.09.2017].

Polpaico. (2017). Cemento Polpaico S.A. - LafargeHolcim. <http://www.holcim.cl/parking> [20.09.2017].

PONTRYAGIN, L. S.; BOLTYANSKII, V. G.; GAMKRELIDZE, R. V.; MISCHENKO, E. F. The mathematical theory of optimal processes. Wiley, New York. 1962.

POZO, H. *Administração de recursos materiais e patrimoniais: Uma abordagem logística*. São Paulo: Atlas, 2004.

Pucobre. (2017). Pucobre - Sociedad Punta del Cobre S.A. <http://www.pucobre.cl/> [20.09.2017].

REINAS, R. I.; MARIANO, E. B.; REBELATTO, D. A. N. *Custo/benefício de aeronaves: uma abordagem pela análise envoltória de dados*. **Revista Produção**. São Carlos, v. 21, n. 4, p. 684-695, dez., 2011.

Salfacorp. (2017). SalfaCorp S.A. <http://www.salfacorp.com/> [26.09.2017].

Santher. (2017). Santher - Fábrica de Papel Santa Therezinha S.A. <http://www.santher.com.br/> [20.09.2017].

Santiago Stock Exchange. (2015). Comunicacion Interna N° 12.721. http://www.bolsadesantiago.com/noticias/SiteAssets/Lists/Noticias_BCS/EditForm/CI_12721_Cancela_inscripción_a_FASA.pdf [20.09.2017].

Schwager. (2017). Schwager S.A. <http://www.schwager.cl/web/> [20.09.2017].

SENGUPTA, J. K. *Dynamics of Data Envelopment Analysis: Theory of Systems Efficiency*. Dordrecht, Holanda: Kluwer. 1995.

- SENGUPTA, J. K. A dynamic efficiency model using data envelopment analysis. *International Journal of Production Economics*. v. 62, p. 209 - 218, 1999.
- SETHI, S.P., & THOMPSON, G. L. *Optimal control theory: applications to management science and economics*. New York: Springer, 2006.
- SILVA, E., & STEFANO, S.E. Dynamic efficiency measurement: theory and application. *American Journal of Agricultural Economics*, 89(2), 398-419. 2007.
- SLACK, N.; CHAMBERS, S.; JOHNSTON, R. *Administração da produção*. Tradução de Maria Teresa Corrêa de Oliveira, Fábio Alher. São Paulo: Atlas. 2008. Título original: *Operations management*.
- Socovesa. (2017). Empresas Socovesa S.A. <http://www.empresassocovesa.cl/> [26.09.2017].
- Sofruco. (2017). Sociedad Agrícola La Rosa Sofruco S.A. <http://www.sofruco.com/en/> [20.09.2017].
- Soprocal. (2017). Soprocal S.A. <http://www.soprocal.cl/soprocal/> [20.09.2017].
- SQM. (2017). SQM - Sociedad Química y Minera S.A. <http://www.sqm.com/> [20.09.2017].
- SUEYOSHI, T., & SEKITANI, K. Returns to scale in dynamic DEA. *European Journal of Operational Research*, 161, 536-544. 2005.
- SUSSMANN, H. J.; WILLEMS, J. C. 300 Years of Optimal Control: From the Brachystochrone to the Maximum Principle. **IEEE Control Systems**. v. 17, n. 3, p. 32-44, 1997.
- Tereos. (2017). Tereos S.A. <https://tereos.com/pt> [19.09.2017].
- THOMPSON, G. L., & SETHI, S.P. (1980). Turnpike Horizons for Production Planning. *Management Science*, v. 26, n. 3, p. 229-241.
- TONE, K. A slack-based measure of efficiency in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 130, 498-509, 2001.
- TONE, K., TSUTSUI, M. Dynamic DEA: A slacks-based measure approach. *Omega*, v. 38, p. 145 - 156, 2010.
- TONE, K., TSUTSUI, M. Dynamic DEA with network structure: A slacks-based measure approach. *Omega*, v. 42, p. 124 – 131, 2014.
- Ultra. (2017). Ultrapar - Ultra Participações S.A. <http://www.ultra.com.br/> [20.09.2017].
- Vale. (2017). Vale S.A. <http://www.vale.com/brasil/PT/Paginas/default.aspx> [20.09.2017].

Viconto. (2016). Frutícola Viconto S.A. - Memória 2015. Santiago. <http://www.viconto.cl/wp/wp-content/uploads/2016/04/Memoria-2015-Final-SVS.pdf> [20.09.2017].

Viconto. (2017). Frutícola Viconto S.A. <http://www.viconto.cl/> [20.09.2017].

World Bank. (2016a). Brazil Overview. <http://www.worldbank.org/en/country/brazil/overview> [09.09.2017].

World Bank. (2016b). Chile Overview. <http://www.worldbank.org/en/country/chile/overview> [09.09.2017].

Yun, Nakayama e Yoon. Generation of Pareto optimal solutions using generalized DEA and PSO. v. 64, p. 49-61. 2016.

ZAPAROLLI, D. *Em um ramo aparentemente saturado, redes de calçados mostram que a força da marca faz diferença.* **Revista Pequenas Empresas & Grandes Negócios**. São Paulo, n. 246, jul., 2009.

ZHU, J. *Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking: Data Envelopment Analysis with Spreadsheets*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003.

ZHU, J. Quantitative models for performance evaluation and benchmarking: data envelopment analysis with spreadsheets. 2009. doi: 10.1007/978-0-387-85981-1.

APÊNDICE A - SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO

Considerando que a Equação (2.28) é uma equação diferencial ordinária linear não homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes, uma das maneiras de resolvê-la analiticamente (além da solução por diferença finita exposta após a Equação 2.28) é através de uma técnica que encontra uma solução particular e uma solução característica homogênea associada a ela, para então compor uma solução geral (Sodré, 2003).

Solução geral:

$$I(t) = I_h(t) + I_p(t)$$

Solução particular:

$$I_p(t) = Q(t)$$

Solução associada:

$$I_h(t) = a_1 I_1(t) + a_2 I_2(t)$$

Resolvendo a EDO de 2ª ordem na forma de operador diferencial:

$$\begin{aligned} \left(D^2 - \frac{h}{c}\right) I &= 0 \\ \left(D + \sqrt{h/c}\right) \left(D - \sqrt{h/c}\right) I &= 0 \\ \begin{cases} \frac{\partial I_1}{\partial t} = -\sqrt{h/c} I_1 \\ \frac{\partial I_2}{\partial t} = \sqrt{h/c} I_2 \end{cases} \\ \int \frac{1}{I} \partial I &= -\sqrt{h/c} \int \partial t \\ \ln(I) &= -\sqrt{h/c} t + C_1 \\ I &= K_1 e^{-\sqrt{h/c} t} \\ \begin{cases} I_1 = a_1 e^{-\sqrt{h/c} t} \\ I_2 = a_2 e^{\sqrt{h/c} t} \end{cases} \end{aligned}$$

Solução geral:

$$I(t) = a_1 e^{-\sqrt{h/c} t} + a_2 e^{\sqrt{h/c} t} + Q(t)$$

Derivando a solução geral em t e substituindo na equação de estado, obtém-se a variável adjunta $\lambda(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial t} &= -\sqrt{h/c} a_1 e^{-\sqrt{h/ct}} + \sqrt{h/c} a_2 e^{\sqrt{h/ct}} + \frac{\partial Q(t)}{\partial t} \\ -\sqrt{h/c} a_1 e^{-\sqrt{h/ct}} + \sqrt{h/c} a_2 e^{\sqrt{h/ct}} + \frac{\partial Q(t)}{\partial t} &= \hat{P} + \frac{\lambda(t)}{c} - S(t) \\ \lambda(t) &= c \left(-\sqrt{h/c} a_1 e^{-\sqrt{h/ct}} + \sqrt{h/c} a_2 e^{\sqrt{h/ct}} + \frac{\partial Q(t)}{\partial t} + S(t) - \hat{P} \right)\end{aligned}$$

Para obter a produção ótima, tem-se que substituir a equação adjunta na condição necessária (2):

$$P(t) = -\sqrt{h/c} a_1 e^{-\sqrt{h/ct}} + \sqrt{h/c} a_2 e^{\sqrt{h/ct}} + \frac{\partial Q(t)}{\partial t} + S(t)$$

Agora que se tem as variáveis de estado e adjunta, bem como as condições iniciais e de contorno, pode-se calcular os coeficiente a_1 e a_2 através de um sistema de equações:

Condição de valor inicial:

$$\begin{aligned}I(0) &= a_1 e^{-\sqrt{h/c}0} + a_2 e^{\sqrt{h/c}0} + Q(0) \\ I_0 - Q(0) &= a_1 + a_2\end{aligned}$$

Condição de transversalidade (3):

$$\begin{aligned}\lambda(T) &= c \left(-\sqrt{h/c} a_1 e^{-\sqrt{h/c}T} + \sqrt{h/c} a_2 e^{\sqrt{h/c}T} + \frac{\partial Q(T)}{\partial t} + S(T) - \hat{P} \right) = 0 \\ -\frac{\partial Q(T)}{\partial t} - S(T) + \hat{P} &= -\sqrt{h/c} a_1 e^{-\sqrt{h/c}T} + \sqrt{h/c} a_2 e^{\sqrt{h/c}T}\end{aligned}$$

Pode-se escrever o sistema linear da seguinte maneira:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = I_0 - Q(0) \\ -\sqrt{h/c} a_1 e^{-\sqrt{h/c}T} + \sqrt{h/c} a_2 e^{\sqrt{h/c}T} = -\frac{\partial Q(T)}{\partial t} - S(T) + \hat{P} \end{cases}$$

Este sistema de equações pode ser resolvido pela regra de Cramer:

$$\begin{cases} m_1 = -\sqrt{h/c} \\ m_2 = \sqrt{h/c} \\ b_1 = I_0 - Q(0) \\ b_2 = \hat{P} - \frac{\partial Q(T)}{\partial t} - S(T) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ m_1 e^{m_1 T} & m_2 e^{m_2 T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Obtendo a_1 :

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & 1 \\ b_2 & m_2 e^{m_2 T} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m_1 e^{m_1 T} & m_2 e^{m_2 T} \end{vmatrix}}$$

$$a_1 = \frac{b_1 m_2 e^{m_2 T} - b_2}{m_2 e^{m_2 T} - m_1 e^{m_1 T}}$$

Obtendo a_2 :

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b_1 \\ m_1 e^{m_1 T} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m_1 e^{m_1 T} & m_2 e^{m_2 T} \end{vmatrix}}$$

$$a_2 = \frac{b_2 - b_1 m_1 e^{m_1 T}}{m_2 e^{m_2 T} - m_1 e^{m_1 T}}$$

Solução geral:

$$I(t) = \frac{\sqrt{h/c} [I_0 - Q(0)] e^{\sqrt{h/c} T} - \left[\hat{P} - \frac{\partial Q(T)}{\partial t} - S(T) \right]}{\sqrt{h/c} e^{\sqrt{h/c} T} + \sqrt{h/c} e^{-\sqrt{h/c} T}} e^{-\sqrt{h/c} t}$$

$$+ \frac{\left[\hat{P} - \frac{\partial Q(T)}{\partial t} - S(T) \right] + \sqrt{h/c} [I_0 - Q(0)] e^{-\sqrt{h/c} T}}{\sqrt{h/c} e^{\sqrt{h/c} T} + \sqrt{h/c} e^{-\sqrt{h/c} T}} e^{\sqrt{h/c} t} + Q(t)$$

Após obter a solução geral e seus coeficientes, deve-se calcular a solução particular, que pode ser escrita como:

$$Q(t) = q_1(t)I_1(t) + q_2(t)I_2(t)$$

Segundo Sodré (2003), nesse caso, para obtê-la, pode-se utilizar o método da variação dos parâmetros (Lagrange), que consiste em supor que os coeficientes sejam uma função de t , ou

seja, $q_1 = q_1(t)$ e $q_2 = q_2(t)$, e deve-se impor que $\frac{\partial q_1(t)}{\partial t} I_1(t) + \frac{\partial q_2(t)}{\partial t} I_2(t) = 0$, forçando

$\frac{\partial q_1(t)}{\partial t} \frac{\partial I_1(t)}{\partial t} + \frac{\partial q_2(t)}{\partial t} \frac{\partial I_2(t)}{\partial t} = f(t)$, onde $f(t) = \rho(S - \hat{P}) - \frac{h}{c} \hat{I} - \frac{\partial S}{\partial t}$. Com isso é possível

montar o seguinte sistema de equações:

$$f(t) = -\frac{h}{c} \hat{I} - \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial q_1}{\partial t} I_1(t) + \frac{\partial q_2}{\partial t} I_2(t) = 0 \\ \frac{\partial q_1}{\partial t} \frac{\partial I_1(t)}{\partial t} + \frac{\partial q_2}{\partial t} \frac{\partial I_2(t)}{\partial t} = f(t) \end{cases}$$

Este sistema de equações pode ser resolvido pela regra de Cramer.

$$\begin{bmatrix} I_1(t) & I_2(t) \\ \frac{\partial I_1(t)}{\partial t} & \frac{\partial I_2(t)}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial t} \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

Obtendo $q_1(t)$:

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & I_2(t) \\ f(t) & \frac{\partial I_2(t)}{\partial t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_1(t) & I_2(t) \\ \frac{\partial I_1(t)}{\partial t} & \frac{\partial I_2(t)}{\partial t} \end{vmatrix}} = \frac{-I_2(t)f(t)}{I_1(t)\frac{\partial I_2(t)}{\partial t} - I_2(t)\frac{\partial I_1(t)}{\partial t}}$$

$$q_1(t) = \int \frac{-I_2(t)f(t)}{I_1(t)\frac{\partial I_2(t)}{\partial t} - I_2(t)\frac{\partial I_1(t)}{\partial t}} dt$$

$$q_1(t) = \int \frac{-e^{\sqrt{h/ct}} \left(-\frac{h}{c} \hat{I} - \frac{\partial S(t)}{\partial t} \right)}{2a_1 \sqrt{h/c}} dt$$

$$q_1(t) = \int \frac{\hat{I} \sqrt{h/c} e^{\sqrt{h/ct}} + \left(e^{\sqrt{h/ct}} \frac{\partial S(t)}{\partial t} \right)}{2a_1} dt$$

$$q_1(t) = \frac{\hat{I} e^{\sqrt{h/ct}}}{2a_1} + \frac{1}{2a_1} \int \left(e^{\sqrt{h/ct}} \frac{\partial S(t)}{\partial t} \right) dt$$

Obtendo $q_2(t)$:

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} = \frac{\begin{vmatrix} I_1(t) & 0 \\ \frac{\partial I_1(t)}{\partial t} & f(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_1(t) & I_2(t) \\ \frac{\partial I_1(t)}{\partial t} & \frac{\partial I_2(t)}{\partial t} \end{vmatrix}} = \frac{I_1(t)f(t)}{I_1(t)\frac{\partial I_2(t)}{\partial t} - I_2(t)\frac{\partial I_1(t)}{\partial t}}$$

$$q_2(t) = \int \frac{I_1(t)f(t)}{I_1(t)\frac{\partial I_2(t)}{\partial t} - I_2(t)\frac{\partial I_1(t)}{\partial t}} dt$$

$$q_2(t) = \int \frac{e^{-\sqrt{h/c}t} \left(-\frac{h}{c} \hat{I} - \frac{\partial S(t)}{\partial t} \right)}{2a_1 \sqrt{h/c}}$$

Após obter $q_1(t)$ e $q_2(t)$, a solução particular $Q(t)$ pode ser calculada, mas dependendo da forma da função demanda $S(t)$ e pela forma da integral de $q_1(t)$ e $q_2(t)$, é impossível resolvê-las analiticamente, então é necessário usar aproximação, discretização, linearização, ou algum outro método numérico para se obter uma solução numérica.

Ainda assim podem existir funções demanda que admitem solução analítica, como é o caso de funções polinomiais, mas é necessário assumir que a demanda é um polinômio de grau $2p$ ou $2p-1$, conforme sugerido por Sethi e Thompson (2006):

$$S(t) = C_0 t^{2p} + C_1 t^{2p-1} + \dots + C_{2p}$$

Pode-se calcular $Q(t)$ somando as derivadas através da seguinte equação:

$$Q(t) = \hat{I} + \frac{c}{h} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{c^2}{h^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \dots + \frac{c^p}{h^p} \frac{\partial^{2p-1} S}{\partial t^{2p-1}}$$

Com isso é possível substituir de volta à equação de estado e à condição de estacionaridade e obter as funções dinamicamente ótimas de produção e estoque.

APÊNDICE B – RANKING E EFICIÊNCIAS (MODELO DEA-OCT PROPOSTO E OCT)

Tabela 9 – *Rankings* e eficiências das DMUs usando os modelos DEA-OCT e OCT

			DEA-OCT						OCT		
			Geral			Setor			Geral	Setor	
Setor	País	DMU	Rank. geral	Eficiência do sistema	Ef. média dos períodos	Rank. no setor	Ef. do sistema	Ef. média dos períodos	Rank. geral	Rank. no setor	Ef. da DMU
Agro e Pesca	CL	Anasac	598	0,6308	0,49	15	0,8779	0,8554	600	16	0,5816
Agro e Pesca	CL	Blumar	161	0,8857	0,8112	11	0,9568	0,9338	251	6	0,8192
Agro e Pesca	CL	Camanchaca	271	0,8438	0,7456	13	0,9403	0,9022	295	9	0,7976
Agro e Pesca	CL	Corpesca	189	0,8735	0,804	3	0,997	0,9967	489	11	0,7071
Agro e Pesca	CL	Eperva	189	0,8735	0,804	3	0,997	0,9967	489	11	0,7071
Agro e Pesca	CL	Feriaosor	142	0,8935	0,7998	5	0,9966	0,9947	132	4	0,8677
Agro e Pesca	CL	Hipermarc	123	0,9074	0,8555	9	0,9811	0,9749	567	14	0,647
Agro e Pesca	CL	Iquique	174	0,8802	0,8353	7	0,991	0,9896	533	13	0,6771
Agro e Pesca	CL	Masisa	331	0,8173	0,6893	8	0,9833	0,9727	283	7	0,8025
Agro e Pesca	CL	Multifoods	125	0,9068	0,8307	6	0,9949	0,9931	127	3	0,8725
Agro e Pesca	BR	Pomifrutas	74	0,9403	0,8924	10	0,971	0,9567	173	5	0,8429

Agro e Pesca	CL	Schwager	45	0,9618	0,9502	1	1	1	22	1	0,9561
Agro e Pesca	CL	Siemel	317	0,8243	0,7339	12	0,9442	0,9315	407	10	0,7474
Agro e Pesca	CL	Sofruco	581	0,6631	0,55	16	0,8409	0,7995	580	15	0,6243
Agro e Pesca	CL	Viconto	54	0,9519	0,8876	1	1	1	55	2	0,9272
Agro e Pesca	CL	Soprole Inversiones S.A.	307	0,8285	0,718	14	0,933	0,8931	287	8	0,8003
Alimentos e Beb	BR	Ambev S/A	474	0,7533	0,6204	44	0,796	0,6873	457	36	0,7231
Alimentos e Beb	CL	Andina	241	0,8532	0,7391	29	0,9225	0,8713	171	17	0,8441
Alimentos e Beb	US	Archer Daniels Midlland	182	0,8774	0,7713	21	0,9696	0,938	136	14	0,8634
Alimentos e Beb	BR	BRF SA	245	0,8526	0,7306	28	0,9303	0,8694	194	20	0,8374
Alimentos e Beb	US	Brown-Forman	636	0,4239	0,2887	48	0,561	0,4759	637	48	0,4012
Alimentos e Beb	US	Campbell Soup	286	0,8376	0,7262	1	1	1	284	25	0,802
Alimentos e Beb	CL	Carozzi	503	0,7339	0,6108	26	0,9511	0,9347	463	37	0,72
Alimentos e Beb	CL	Ccu	542	0,7103	0,5549	43	0,8069	0,7083	496	39	0,7026
Alimentos e Beb	US	Coca Cola	362	0,8039	0,663	42	0,8598	0,7615	306	27	0,791
Alimentos e Beb	US	Coca Cola Enterprises	127	0,9052	0,8056	16	0,9869	0,9729	91	6	0,8974
Alimentos e Beb	US	Conagra	354	0,8086	0,6672	31	0,9093	0,844	311	28	0,789
Alimentos e Beb	CL	Conchatoro	605	0,6114	0,5015	1	1	1	617	45	0,5342
Alimentos e Beb	US	Constellation Brands	626	0,533	0,3775	47	0,7473	0,7153	626	46	0,5015
Alimentos e Beb	US	Dean Foods	29	0,9743	0,9359	8	0,9986	0,9963	29	2	0,9499

Alimentos e Beb	US	Dr Pepper Snapple Group	153	0,8885	0,7803	23	0,9608	0,9254	113	11	0,8795
Alimentos e Beb	CL	Embonor	313	0,8247	0,6935	37	0,8815	0,7995	261	23	0,8134
Alimentos e Beb	CL	Emiliana	592	0,644	0,5586	13	0,9952	0,9955	627	47	0,5011
Alimentos e Beb	BR	Excelsior	70	0,9452	0,8871	14	0,9944	0,9889	61	4	0,9218
Alimentos e Beb	US	General Mills	244	0,8527	0,7408	7	0,9986	0,9989	189	19	0,8385
Alimentos e Beb	US	Hain Celestial Grp	441	0,7664	0,6138	35	0,8885	0,8243	386	33	0,7567
Alimentos e Beb	US	Hershey	384	0,7959	0,6601	40	0,8719	0,7897	363	31	0,765
Alimentos e Beb	US	Hormel Foods	318	0,8242	0,6825	36	0,886	0,7986	259	22	0,8153
Alimentos e Beb	US	Ingredion	348	0,8111	0,6659	38	0,8783	0,7855	288	26	0,7999
Alimentos e Beb	CL	Ipal	130	0,9015	0,7914	20	0,9723	0,9427	96	7	0,8886
Alimentos e Beb	BR	J. Macedo S/A	158	0,887	0,7937	18	0,98	0,9623	122	12	0,8741
Alimentos e Beb	BR	JBS	152	0,8895	0,7863	22	0,9643	0,9323	105	9	0,8825
Alimentos e Beb	BR	Josapar	92	0,9292	0,8852	1	1	1	389	34	0,7554
Alimentos e Beb	US	Lancaster Colony	112	0,917	0,8445	1	1	1	102	8	0,8851
Alimentos e Beb	BR	M.Diasbranco	284	0,838	0,7204	33	0,896	0,8216	257	21	0,8157
Alimentos e Beb	BR	Marfrig	42	0,9641	0,915	12	0,9954	0,9871	46	3	0,9355
Alimentos e Beb	US	Mccormick & Co	556	0,6928	0,5206	46	0,7524	0,6202	525	40	0,682
Alimentos e Beb	US	Mead Johnson	575	0,6722	0,5111	45	0,7813	0,6794	551	41	0,6638
Alimentos e Beb	BR	Minerva	97	0,925	0,8482	17	0,9867	0,9756	73	5	0,9129
Alimentos e Beb	BR	Minupar	25	0,9805	0,946	6	0,999	0,9962	14	1	0,9701

Alimentos e Beb	US	Molson Coors	132	0,9	0,8012	11	0,9954	0,9916	108	10	0,8814
Alimentos e Beb	US	Mondelez International	230	0,8579	0,7393	24	0,9589	0,9139	155	16	0,8558
Alimentos e Beb	US	Monster Beverage Corp	401	0,7896	0,6395	41	0,8686	0,7853	345	29	0,7741
Alimentos e Beb	BR	Oderich	589	0,6504	0,5261	32	0,9081	0,8755	580	43	0,6243
Alimentos e Beb	US	Pepsico Inc	218	0,8627	0,7383	27	0,9428	0,8911	152	15	0,8564
Alimentos e Beb	US	Pilgrims Pride	224	0,8592	0,7369	30	0,9195	0,8511	173	18	0,8429
Alimentos e Beb	CL	Santa Rita	472	0,7549	0,6784	9	0,9972	0,9966	568	42	0,6467
Alimentos e Beb	US	Smithfield Foods	412	0,7811	0,6254	39	0,8742	0,7858	353	30	0,7696
Alimentos e Beb	US	Smucker J M	430	0,7739	0,651	34	0,8926	0,8333	453	35	0,7248
Alimentos e Beb	BR	Tereos	175	0,8799	0,7939	1	1	1	263	24	0,8131
Alimentos e Beb	US	Tootsie Roll	364	0,8026	0,6766	15	0,9912	0,9871	365	32	0,7644
Alimentos e Beb	US	Tyson Foods	181	0,8787	0,7633	19	0,9742	0,9529	125	13	0,8735
Alimentos e Beb	CL	Vspt	602	0,621	0,5007	10	0,9962	0,9959	593	44	0,6051
Alimentos e Beb	CL	Empresas Carozzi S.A.	503	0,7339	0,6108	25	0,9511	0,9347	463	37	0,72
Comércio	US	1-800-Flowers.Com	19	0,988	0,9935	13	0,9905	0,9948	255	49	0,8173
Comércio	US	Abercrombie & Fitch	329	0,8177	0,721	59	0,8993	0,8455	493	103	0,7054
Comércio	US	Aeropostale	49	0,9555	0,9128	1	1	1	93	12	0,8944
Comércio	US	Amazon Com	290	0,8349	0,7089	85	0,8554	0,7488	238	41	0,8225

Comércio	US	American Eagle Outfitters	72	0,9437	0,9032	11	0,9936	0,9903	244	45	0,821
Comércio	US	Amerisourcebergen	141	0,8943	0,7995	46	0,9191	0,8478	99	14	0,8868
Comércio	US	Arrow Electronics	285	0,8379	0,6973	80	0,8587	0,7369	212	37	0,8318
Comércio	US	Asbury Automotive Group	406	0,7849	0,6325	100	0,8141	0,6851	337	65	0,7796
Comércio	US	Ashland	295	0,833	0,7012	87	0,8496	0,7314	275	53	0,8065
Comércio	US	Autonation	436	0,7703	0,6199	107	0,7908	0,6595	366	73	0,7634
Comércio	US	Autozone	634	0,4599	0,3061	132	0,511	0,382	633	132	0,455
Comércio	US	Avnet	217	0,8629	0,7414	64	0,8888	0,7903	156	25	0,8557
Comércio	BR	B2W Digital	89	0,9311	0,8828	20	0,9823	0,973	241	43	0,8217
Comércio	US	Barnes & Noble	9	0,9919	0,9915	9	0,995	0,9947	412	82	0,7443
Comércio	BR	Battistella	5	0,994	0,972	6	0,9996	0,9945	4	1	0,992
Comércio	US	Bed Bath & Beyond	582	0,6614	0,5031	126	0,7027	0,5661	587	125	0,6158
Comércio	US	Best Buy	199	0,8699	0,7667	45	0,9217	0,8578	274	52	0,8068
Comércio	US	Big Lots	409	0,7823	0,6567	90	0,8346	0,7405	480	99	0,711
Comércio	BR	BR Pharma	93	0,9289	0,8665	1	1	1	177	27	0,8426
Comércio	US	Cabelas	551	0,6987	0,5671	115	0,773	0,6831	584	123	0,6212
Comércio	US	Cardinal Health	159	0,8859	0,7798	50	0,9127	0,8309	114	19	0,8767
Comércio	US	Carmax	298	0,8317	0,7012	53	0,9092	0,8432	254	48	0,8174
Comércio	US	Carters	256	0,8487	0,7618	44	0,9218	0,8882	424	88	0,7373
Comércio	US	Cato	405	0,7863	0,6525	63	0,8942	0,8445	364	72	0,7646

Comércio	CL	Cem	291	0,8341	0,7298	27	0,9716	0,9558	328	61	0,7848
Comércio	CL	Cencosud	292	0,834	0,7	78	0,8624	0,752	220	38	0,8295
Comércio	US	Chicos Fas	344	0,8115	0,6867	60	0,8978	0,8446	356	69	0,7679
Comércio	US	Childrens Place	404	0,7869	0,6549	93	0,8272	0,7189	423	87	0,7378
Comércio	US	Christopher & Banks	206	0,867	0,764	49	0,9153	0,8497	253	47	0,8182
Comércio	US	Claire's Stores	335	0,8162	0,6932	72	0,8737	0,79	357	70	0,7676
Comércio	US	Columbia Sportswear	443	0,7658	0,6714	91	0,8341	0,7789	562	119	0,6534
Comércio	US	Copart	21	0,9851	0,9659	1	1	1	11	3	0,9794
Comércio	US	Costco Wholesale	163	0,8849	0,7795	55	0,9075	0,8227	130	21	0,8681
Comércio	US	CVS Health Corp	259	0,8485	0,7176	77	0,8673	0,7546	172	26	0,8438
Comércio	CL	Detroit	572	0,6789	0,5989	74	0,8715	0,8572	619	130	0,5179
Comércio	US	Dicks Sporting Goods	456	0,7612	0,6338	102	0,8106	0,7057	535	111	0,6754
Comércio	US	Dillard	322	0,8202	0,7342	32	0,9501	0,9304	548	114	0,6664
Comércio	BR	Dimed	238	0,8537	0,7472	33	0,9472	0,9115	233	40	0,8231
Comércio	US	Dollar General	475	0,7532	0,5909	111	0,7849	0,6446	414	84	0,7436
Comércio	US	Dollar Tree	452	0,7634	0,637	98	0,8162	0,7316	451	94	0,726
Comércio	US	DSW	498	0,7381	0,5831	116	0,7717	0,6367	485	100	0,7093
Comércio	OT	Dufry Ag	607	0,6103	0,4491	128	0,637	0,4988	594	126	0,598
Comércio	BR	Empreend Pague Menos S/A	82	0,9352	0,9118	31	0,9578	0,9462	459	95	0,7223
Comércio	US	Evine Live	220	0,8619	0,7537	57	0,9028	0,8263	206	34	0,834

Comércio	CL	Falabella	486	0,7461	0,5855	118	0,7676	0,6255	430	90	0,7352
Comércio	MX	Far-Ben	450	0,7637	0,6229	99	0,8145	0,7077	415	85	0,7409
Comércio	US	Fastenal	621	0,5654	0,4	130	0,6007	0,4617	604	129	0,561
Comércio	US	Ferrellgas Partners	101	0,9221	0,8401	12	0,991	0,9802	86	10	0,9008
Comércio	US	Finish Line	496	0,7392	0,5971	110	0,7851	0,6705	507	107	0,6969
Comércio	US	Foot Locker	535	0,7149	0,5551	121	0,7471	0,6049	516	108	0,6902
Comércio	CL	Forus	591	0,6467	0,5383	117	0,7683	0,7078	603	128	0,5669
Comércio	US	Freds	446	0,7649	0,6191	101	0,8125	0,6973	413	83	0,7441
Comércio	US	Gamestop	100	0,9231	0,8684	1	1	1	318	59	0,7873
Comércio	US	Gap	274	0,8415	0,7287	58	0,9013	0,8318	349	67	0,7725
Comércio	US	Genuine Parts	563	0,687	0,5145	124	0,7171	0,5672	529	110	0,6795
Comércio	US	Grainger (Ww)	531	0,7187	0,5511	120	0,7477	0,6035	487	101	0,7082
Comércio	BR	Grazziotin	480	0,7496	0,6404	61	0,8949	0,85	470	97	0,7161
Comércio	US	Group 1 Automotive	444	0,7655	0,6098	108	0,7877	0,6515	379	75	0,7602
Comércio	US	Henry Schein	426	0,7767	0,6212	106	0,7953	0,6562	355	68	0,7688
Comércio	US	Herbalife	584	0,6552	0,4924	127	0,6823	0,5412	576	122	0,6283
Comércio	CL	Hites	368	0,802	0,6627	43	0,9233	0,8763	333	64	0,7819
Comércio	US	Home Depot	439	0,7679	0,6171	104	0,8038	0,6758	410	80	0,7452
Comércio	BR	Inbrands SA	594	0,635	0,5002	28	0,9701	0,9702	585	124	0,6185
Comércio	US	Ingram Micro	195	0,8715	0,7496	56	0,9054	0,816	131	22	0,868
Comércio	US	Insight Enterprises	56	0,9517	0,8911	15	0,9852	0,9677	34	5	0,9465

Comércio	US	Kohls	448	0,7648	0,6406	92	0,8308	0,7402	552	115	0,6636
Comércio	US	Krispy Kreme Doughn	50	0,9552	0,9036	7	0,9965	0,9928	40	6	0,9402
Comércio	US	Kroger	144	0,8933	0,7952	38	0,9292	0,8636	101	16	0,8861
Comércio	US	L Brands	216	0,8631	0,7634	41	0,9267	0,8738	332	63	0,7827
Comércio	US	Lincoln Electric	360	0,8049	0,667	89	0,8357	0,7205	286	54	0,8015
Comércio	BR	Lojas Americ	392	0,7927	0,6659	37	0,9307	0,8956	397	79	0,7524
Comércio	BR	Lojas Hering	150	0,8903	0,7907	48	0,9164	0,8409	111	18	0,8798
Comércio	BR	Lojas Marisa	142	0,8935	0,8255	18	0,9834	0,9716	182	29	0,8409
Comércio	BR	Lojas Renner	492	0,7424	0,6059	94	0,8243	0,7327	418	86	0,7388
Comércio	US	Lowes Companies	464	0,759	0,6211	82	0,857	0,7903	467	96	0,7169
Comércio	US	Lululemon Athletica	463	0,7592	0,622	103	0,8075	0,6979	472	98	0,7139
Comércio	US	Macys	276	0,8411	0,761	16	0,9852	0,978	559	117	0,656
Comércio	BR	Magaz Luiza	208	0,8663	0,7719	19	0,9826	0,9711	205	33	0,8344
Comércio	US	Mckesson	167	0,8837	0,7704	42	0,9237	0,8486	119	20	0,8748
Comércio	US	Miller Herman	131	0,9009	0,8126	40	0,9284	0,8676	94	13	0,8921
Comércio	BR	Minasmaquinas	80	0,9353	0,8413	22	0,9785	0,9367	66	9	0,9178
Comércio	US	MSC Indl Direct	559	0,6904	0,5311	125	0,7144	0,5695	543	113	0,6695
Comércio	BR	Natura	545	0,708	0,5818	76	0,868	0,8108	492	102	0,7056
Comércio	US	Nordstrom	364	0,8026	0,6715	84	0,8556	0,7605	395	78	0,7531
Comércio	US	Nu Skin Enterprises	544	0,7084	0,5835	30	0,9603	0,9679	555	116	0,6616

Comércio	US	Nutri System	120	0,9107	0,8441	26	0,9733	0,9639	107	17	0,8817
Comércio	US	Office Depot	287	0,8372	0,7173	83	0,8566	0,7545	256	50	0,8166
Comércio	US	O'Reilly Automotive	632	0,4769	0,3346	131	0,5369	0,4248	631	131	0,464
Comércio	BR	Pão de Açúcar	251	0,8507	0,7385	39	0,9287	0,8775	208	36	0,833
Comércio	US	Pacific Sunwear Ca	107	0,9199	0,8602	24	0,9749	0,9575	245	46	0,8207
Comércio	US	Patterson Cos	369	0,8019	0,6706	81	0,857	0,7715	310	57	0,7891
Comércio	US	Penney (Jc)	369	0,8019	0,6973	65	0,8865	0,8242	504	106	0,6994
Comércio	US	Penske Auto Goup	446	0,7649	0,6131	109	0,7852	0,6518	383	76	0,7581
Comércio	US	Pier 1 Imports	540	0,7109	0,5762	119	0,7659	0,6591	573	121	0,6379
Comércio	US	Pool Corp	513	0,7279	0,5924	36	0,9367	0,9268	501	104	0,7002
Comércio	US	Pricesmart	183	0,8773	0,7812	54	0,9079	0,8358	180	28	0,8411
Comércio	BR	Profarma	184	0,8761	0,7733	29	0,9619	0,9322	153	24	0,8562
Comércio	BR	RaiaDrogasil	439	0,7679	0,6465	73	0,8728	0,8176	428	89	0,7356
Comércio	US	Reliance Steel	477	0,7519	0,5946	113	0,7837	0,6485	411	81	0,7451
Comércio	CL	Ripley	505	0,7336	0,5754	114	0,7794	0,6531	450	93	0,7262
Comércio	US	Rite Aid	279	0,8386	0,7115	68	0,8793	0,7837	239	42	0,8224
Comércio	US	Ross Stores	347	0,8112	0,6707	86	0,8521	0,7406	340	66	0,7791
Comércio	US	Sally Beauty Hdgs	613	0,5892	0,4188	129	0,6146	0,4578	602	127	0,5792
Comércio	US	Sears Hldgs	319	0,8227	0,7111	69	0,8785	0,8012	308	56	0,7895
Comércio	US	Sonic Automotive	391	0,7928	0,6446	97	0,8173	0,6901	330	62	0,7838
Comércio	CL	Soquicom	59	0,9511	0,9129	23	0,9774	0,9602	390	77	0,7542

Comércio	US	Staples	256	0,8487	0,7236	66	0,8865	0,7923	191	32	0,8379
Comércio	US	Suburban Propane	55	0,9518	0,897	10	0,9945	0,9845	42	7	0,9387
Comércio	US	Supervalu	37	0,9679	0,9179	17	0,9839	0,9582	43	8	0,9373
Comércio	US	Sysco	124	0,9069	0,812	35	0,9374	0,8739	88	11	0,9007
Comércio	US	Target Co	305	0,8287	0,6972	71	0,8775	0,7834	314	58	0,7882
Comércio	US	Te Connectivity	415	0,7795	0,6296	95	0,8213	0,7002	358	71	0,7674
Comércio	US	Tech Data	133	0,8988	0,7983	34	0,9444	0,8914	100	15	0,8866
Comércio	US	Tiffany	645	0,3469	0,2417	133	0,4899	0,4339	642	133	0,3166
Comércio	US	TJX	294	0,8335	0,71	70	0,8783	0,7879	320	60	0,7859
Comércio	US	Toys R US	178	0,8791	0,813	14	0,9854	0,9782	502	105	0,6997
Comércio	US	Tractor Supply	564	0,6869	0,541	123	0,7371	0,6222	561	118	0,6551
Comércio	US	Tuesday Morning	522	0,7246	0,6191	47	0,9187	0,907	569	120	0,6458
Comércio	US	Ulta Salon Cosmetics	479	0,7498	0,6368	105	0,8004	0,715	518	109	0,687
Comércio	US	Urban Outfitters	213	0,8635	0,7654	52	0,9097	0,845	300	55	0,7948
Comércio	BR	Viavarejo	179	0,8788	0,7789	25	0,9745	0,951	146	23	0,8607
Comércio	CL	Volcan	458	0,7607	0,6171	51	0,9112	0,868	437	91	0,7321
Comércio	US	Wal Mart Stores	234	0,856	0,7298	62	0,8949	0,8019	207	35	0,8334
Comércio	US	Walgreens Boots Alliance	246	0,8523	0,7389	67	0,8852	0,7993	189	31	0,8385
Comércio	US	Watsco	488	0,7444	0,5876	112	0,7848	0,6578	446	92	0,7291
Comércio	US	Weis Markets	251	0,8507	0,7228	75	0,8692	0,7584	183	30	0,8405

Comércio	US	Wesco International	325	0,819	0,6728	88	0,8389	0,7099	262	51	0,8133
Comércio	US	Williams Sonoma	548	0,704	0,5426	122	0,743	0,6041	540	112	0,6708
Comércio	BR	Wlm Ind Com	28	0,9788	0,9238	8	0,9962	0,9787	18	4	0,9637
Comércio	US	World Fuel Svcs	14	0,9889	0,9705	5	0,9996	0,9986	8	2	0,9843
Comércio	CL	Cencosud	292	0,834	0,7	78	0,8624	0,752	220	38	0,8295
Comércio	BR	B2W Digital	89	0,9311	0,8828	20	0,9823	0,973	241	43	0,8217
Comércio	CL	Sodimac S.A.	421	0,7775	0,6343	96	0,8191	0,7064	375	74	0,7614
Construção	BR	Azevedo	27	0,9797	0,9542	5	0,993	0,9837	15	3	0,9693
Construção	US	Beazer Homes USA	640	0,3949	0,326	23	0,4901	0,4522	641	24	0,3254
Construção	CL	Besalco	538	0,7126	0,5564	18	0,7647	0,6475	515	11	0,6903
Construção	BR	Brookfield	103	0,9215	0,906	12	0,9307	0,9184	421	10	0,7381
Construção	US	Calatlantic Group	647	0,2834	0,2896	28	0,3337	0,3732	646	27	0,2407
Construção	BR	Cyrela Realt	97	0,925	0,8891	11	0,944	0,9159	588	15	0,6111
Construção	BR	Direcional	67	0,9467	0,9288	8	0,9728	0,9658	419	9	0,7385
Construção	BR	Even	326	0,8186	0,7419	15	0,8649	0,8112	542	13	0,6703
Construção	BR	Eztec	211	0,8649	0,8574	13	0,8929	0,8863	630	19	0,4656
Construção	BR	Gafisa	269	0,8464	0,7361	16	0,8631	0,7654	564	14	0,6505
Construção	US	Granite Constr	51	0,9539	0,8838	7	0,977	0,9438	27	4	0,9502
Construção	BR	Helbor	53	0,9529	0,9629	10	0,968	0,9753	621	18	0,5162
Construção	US	Horton D R	644	0,3639	0,2601	26	0,4339	0,3835	640	23	0,3464
Construção	US	Hovnanian Entrp	635	0,4489	0,3386	22	0,5157	0,4394	634	20	0,4182

Construção	US	Kb Home	642	0,3747	0,3353	24	0,4493	0,4514	643	25	0,313
Construção	US	Lennar	643	0,3662	0,3263	27	0,4327	0,4275	644	26	0,3124
Construção	BR	Lix da Cunha	1	1	1	1	1	1	2	1	0,9953
Construção	US	MDC Hldg	641	0,3776	0,2926	25	0,437	0,3947	639	22	0,3556
Construção	BR	MRV	599	0,6305	0,5101	19	0,7139	0,6231	601	16	0,5804
Construção	US	NVR	523	0,7244	0,577	17	0,794	0,7134	517	12	0,6877
Construção	BR	PDG Realt	7	0,992	0,9794	1	1	1	200	6	0,8365
Construção	US	Pulte Homes	637	0,422	0,3264	21	0,519	0,4516	638	21	0,3733
Construção	US	Quanta Services	15	0,9887	0,9729	1	1	1	5	2	0,9869
Construção	BR	Rodobensimob	192	0,8732	0,7907	6	0,9801	0,9579	216	8	0,8303
Construção	CL	Salfacorp	194	0,8716	0,7653	9	0,969	0,9279	185	5	0,8397
Construção	CL	Socovesa	258	0,8486	0,7962	14	0,8919	0,859	620	17	0,5164
Construção	US	Toll Brothers	638	0,4155	0,4726	20	0,5553	0,6376	647	28	0,2361
Construção	BR	PDG Realt	7	0,992	0,9794	1	1	1	200	6	0,8365
Eletroeletrônicos	US	3d Systems	558	0,6921	0,5387	67	0,8003	0,673	538	88	0,6719
Eletroeletrônicos	US	Acuity Brands	375	0,7999	0,6567	57	0,832	0,7109	311	46	0,789
Eletroeletrônicos	US	Adtran	524	0,724	0,5726	83	0,7594	0,6276	498	83	0,702
Eletroeletrônicos	US	Advanced Micro Devices	327	0,8179	0,6918	38	0,8798	0,8012	315	47	0,788
Eletroeletrônicos	US	Ametek	470	0,7565	0,5968	71	0,7882	0,6486	408	65	0,7469
Eletroeletrônicos	US	Amkor Tech	170	0,8828	0,7729	24	0,9226	0,8494	128	21	0,8714

Eletroeletrônicos	US	Amphenol	532	0,7183	0,5495	84	0,7505	0,5993	481	81	0,7107
Eletroeletrônicos	US	Analog Devices	561	0,6884	0,5331	90	0,7214	0,5845	557	91	0,6568
Eletroeletrônicos	US	Apple	22	0,9837	0,9687	1	1	1	12	2	0,9776
Eletroeletrônicos	US	Applied Micro Circuits	236	0,8553	0,761	25	0,9208	0,8699	266	36	0,8112
Eletroeletrônicos	US	Avaya	172	0,8816	0,768	29	0,9057	0,8134	115	19	0,8757
Eletroeletrônicos	US	AVX	604	0,6131	0,4557	100	0,6679	0,5358	596	99	0,5949
Eletroeletrônicos	US	Bio Rad Laboratories	622	0,5579	0,4015	102	0,613	0,4805	614	104	0,544
Eletroeletrônicos	US	Black Box	95	0,9272	0,8531	18	0,9655	0,9305	75	14	0,9125
Eletroeletrônicos	US	Broadcom Ltd	417	0,7793	0,6283	64	0,8101	0,6791	388	59	0,7558
Eletroeletrônicos	US	Brocade Comm Systems	102	0,9216	0,8396	17	0,9677	0,9341	67	12	0,9172
Eletroeletrônicos	US	Bruker Corp	600	0,63	0,5077	89	0,7233	0,6338	583	97	0,6231
Eletroeletrônicos	US	Celestica	304	0,8297	0,6917	46	0,8594	0,7456	247	33	0,8206
Eletroeletrônicos	US	Ciena	386	0,7948	0,6584	53	0,8384	0,7306	327	50	0,7849
Eletroeletrônicos	US	Cisco Systems	136	0,8979	0,8	23	0,9249	0,853	98	17	0,8869
Eletroeletrônicos	US	Cognex	579	0,6687	0,5092	97	0,6993	0,5589	566	94	0,6471
Eletroeletrônicos	US	Corning	533	0,7163	0,5499	85	0,7498	0,6017	489	82	0,7071
Eletroeletrônicos	US	Cree	528	0,7213	0,562	76	0,7778	0,6507	478	80	0,7113
Eletroeletrônicos	US	Cypress Semic	346	0,8114	0,8007	45	0,8604	0,8992	367	55	0,7631
Eletroeletrônicos	US	Danaher	473	0,7544	0,6003	68	0,7969	0,6701	431	67	0,7346
Eletroeletrônicos	US	Diebold	336	0,8158	0,6914	36	0,8858	0,8101	351	53	0,7716

Eletroeletrônicos	US	Dolby Laboratories	68	0,9459	0,9152	13	0,985	0,9838	160	23	0,8507
Eletroeletrônicos	US	Echostar	59	0,9511	0,8926	5	0,9973	0,9943	35	6	0,9464
Eletroeletrônicos	US	EMC	315	0,8246	0,6844	43	0,8633	0,7532	259	35	0,8153
Eletroeletrônicos	US	Emerson Electric	282	0,8384	0,711	28	0,907	0,8324	250	34	0,8194
Eletroeletrônicos	US	Extreme Networks	367	0,8021	0,6994	51	0,841	0,7711	335	51	0,7806
Eletroeletrônicos	US	Fairchild Semic Int	509	0,7306	0,5708	79	0,7676	0,6318	474	79	0,7135
Eletroeletrônicos	US	First Solar	321	0,8208	0,6913	42	0,8637	0,7681	296	42	0,7974
Eletroeletrônicos	US	Flextronics	272	0,8423	0,7109	39	0,8798	0,7791	212	30	0,8318
Eletroeletrônicos	US	Flir Systems	609	0,6054	0,457	99	0,6681	0,5485	599	101	0,5827
Eletroeletrônicos	US	Fortinet	499	0,7355	0,6178	65	0,8095	0,7631	468	75	0,7167
Eletroeletrônicos	US	Fossil Group	597	0,6318	0,4796	56	0,8345	0,763	598	100	0,5883
Eletroeletrônicos	US	Garmin	590	0,6494	0,4833	98	0,6867	0,5376	574	95	0,6316
Eletroeletrônicos	US	Graftech Intl Ltd	361	0,8042	0,7167	54	0,8379	0,7654	360	54	0,7665
Eletroeletrônicos	US	Harman International Industries	385	0,7955	0,6558	59	0,8274	0,7128	336	52	0,7801
Eletroeletrônicos	US	Harris	403	0,7881	0,6532	55	0,8346	0,731	378	57	0,7611
Eletroeletrônicos	US	Hill-Rom Hldgs	372	0,8011	0,6718	58	0,8316	0,7281	303	44	0,7927
Eletroeletrônicos	US	Hologic	512	0,7281	0,5709	78	0,7685	0,6388	472	78	0,7139
Eletroeletrônicos	US	Hp	20	0,9866	0,971	1	1	1	52	10	0,9326
Eletroeletrônicos	US	Hubbell	465	0,7579	0,6006	70	0,789	0,6515	403	63	0,7494
Eletroeletrônicos	US	Illumina	603	0,6138	0,4562	101	0,6545	0,5196	591	98	0,6063

Eletroeletrônicos	US	Imation	11	0,9911	0,965	1	1	1	9	1	0,9836
Eletroeletrônicos	US	Integrated Dev	344	0,8115	0,6946	35	0,8867	0,822	319	48	0,787
Eletroeletrônicos	US	Intel	460	0,7599	0,6122	62	0,824	0,7219	409	66	0,7455
Eletroeletrônicos	US	International Business Machines	57	0,9514	0,892	6	0,9968	0,9926	31	4	0,9489
Eletroeletrônicos	US	Intersil	500	0,7354	0,5805	74	0,7811	0,6518	453	71	0,7248
Eletroeletrônicos	US	IPG Photonics	624	0,5374	0,3752	105	0,5672	0,418	618	105	0,5282
Eletroeletrônicos	US	Jabil Circuit	229	0,8583	0,7506	30	0,9042	0,8335	209	29	0,8324
Eletroeletrônicos	US	Kla-Tencor	615	0,5679	0,4098	103	0,6086	0,4676	613	103	0,545
Eletroeletrônicos	US	Lattice Semic	593	0,6426	0,4988	87	0,7263	0,6468	582	96	0,6237
Eletroeletrônicos	US	Lexmark International	226	0,8587	0,7353	31	0,9012	0,8149	151	22	0,8568
Eletroeletrônicos	US	Linear Technology	543	0,7088	0,5385	86	0,7347	0,5811	499	84	0,7015
Eletroeletrônicos	US	Maxim Integ Prod	413	0,7805	0,6555	61	0,8245	0,7246	406	64	0,7477
Eletroeletrônicos	US	Mettler Toledo Intl	462	0,7595	0,5989	72	0,7881	0,646	400	62	0,7501
Eletroeletrônicos	US	Microchip Tech	573	0,677	0,5102	92	0,7149	0,5708	559	92	0,656
Eletroeletrônicos	US	Micron Tech	495	0,7397	0,59	75	0,7782	0,6523	451	70	0,726
Eletroeletrônicos	US	MKS Instruments	577	0,671	0,5108	95	0,703	0,5607	554	90	0,6617
Eletroeletrônicos	US	Motorola Solutions	38	0,9657	0,9254	15	0,9751	0,9455	83	15	0,9021
Eletroeletrônicos	US	NCR	330	0,8175	0,6833	47	0,8576	0,7519	280	39	0,8036
Eletroeletrônicos	US	Netapp	66	0,9481	0,8922	12	0,9885	0,9759	51	9	0,9327
Eletroeletrônicos	US	Northrop Grumman	63	0,95	0,8914	11	0,9899	0,9788	38	8	0,9405

Eletroeletrônicos	US	Nvidia	427	0,7766	0,6192	66	0,8051	0,6676	376	56	0,7612
Eletroeletrônicos	US	On Semiconductor	580	0,6677	0,4968	96	0,7028	0,5506	550	89	0,6639
Eletroeletrônicos	US	Perkinelmer	510	0,7292	0,5648	80	0,7662	0,6246	469	76	0,7163
Eletroeletrônicos	US	Photronics	105	0,9203	0,8322	19	0,9607	0,9169	71	13	0,9135
Eletroeletrônicos	US	Pitney-Bowes	76	0,9385	0,8657	14	0,984	0,9607	54	11	0,9291
Eletroeletrônicos	US	Plantronics	278	0,8396	0,7152	34	0,8905	0,8079	229	32	0,8237
Eletroeletrônicos	US	Plexus	483	0,7486	0,597	73	0,7846	0,6579	431	67	0,7346
Eletroeletrônicos	US	Polycom	358	0,8061	0,668	44	0,8611	0,764	298	43	0,7961
Eletroeletrônicos	BR	Positivo Inf	221	0,8616	0,7661	8	0,9947	0,9877	168	25	0,8455
Eletroeletrônicos	US	Qlogic	225	0,8591	0,7686	32	0,9006	0,8473	199	28	0,8366
Eletroeletrônicos	US	Qualcomm	209	0,866	0,7607	9	0,9903	0,9914	187	27	0,8396
Eletroeletrônicos	US	Raytheon Co	40	0,9654	0,9206	4	0,9982	0,9964	20	3	0,9608
Eletroeletrônicos	US	Regal Beloit	549	0,6989	0,5332	88	0,7254	0,5743	514	85	0,6909
Eletroeletrônicos	US	Rockwell Collins	618	0,5672	0,3994	104	0,5916	0,4346	605	102	0,5581
Eletroeletrônicos	US	Rockwell Intl	338	0,8146	0,6782	40	0,8673	0,7695	288	40	0,7999
Eletroeletrônicos	US	Roper Industries	354	0,8086	0,6603	50	0,8428	0,7201	293	41	0,7981
Eletroeletrônicos	US	Sanmina	342	0,8123	0,6671	48	0,8468	0,7301	276	37	0,8058
Eletroeletrônicos	US	Seagate Technology	147	0,8919	0,7908	22	0,9274	0,86	117	20	0,8752
Eletroeletrônicos	US	Semtech	434	0,7715	0,6516	41	0,867	0,8042	456	73	0,7232
Eletroeletrônicos	US	Silicon Lab	419	0,7784	0,632	60	0,8257	0,712	381	58	0,7599
Eletroeletrônicos	US	Skyworks Solutions	445	0,7653	0,6214	63	0,8161	0,7281	398	61	0,7505

Eletroeletrônicos	US	Smith A O	352	0,81	0,664	52	0,8401	0,7155	279	38	0,8037
Eletroeletrônicos	US	Snap-On	566	0,6855	0,5131	94	0,7122	0,5533	532	86	0,6774
Eletroeletrônicos	BR	Springer	17	0,9881	0,9494	10	0,99	0,9583	32	5	0,9483
Eletroeletrônicos	US	Sunpower	268	0,8465	0,7288	27	0,9138	0,8481	222	31	0,8281
Eletroeletrônicos	US	Teradata	48	0,9562	0,905	7	0,9959	0,9917	36	7	0,9463
Eletroeletrônicos	US	Teradyne	349	0,811	0,6798	33	0,8908	0,8208	307	45	0,7909
Eletroeletrônicos	US	Texas Instruments	571	0,6809	0,5082	93	0,7127	0,5566	537	87	0,672
Eletroeletrônicos	US	Thermo Fisher	487	0,7445	0,5854	77	0,7762	0,6365	433	69	0,7341
Eletroeletrônicos	US	Trimble Navigation	516	0,7274	0,5649	82	0,7605	0,6185	471	77	0,7156
Eletroeletrônicos	US	Tyco International	99	0,9239	0,8221	21	0,9463	0,8746	103	18	0,8833
Eletroeletrônicos	US	Utstarcom	140	0,8963	0,8317	16	0,9716	0,9554	393	60	0,7535
Eletroeletrônicos	US	Verifone Holdings	235	0,8556	0,7381	26	0,9145	0,8471	175	26	0,8428
Eletroeletrônicos	US	Vishay Intertech	506	0,7326	0,5688	81	0,7642	0,6188	455	72	0,7247
Eletroeletrônicos	US	Waters	574	0,6733	0,5113	91	0,7177	0,5787	563	93	0,6517
Eletroeletrônicos	US	Western Digital	240	0,8534	0,736	37	0,8829	0,7931	164	24	0,8466
Eletroeletrônicos	US	Whirlpool	380	0,7986	0,6539	49	0,8458	0,7359	325	49	0,7852
Eletroeletrônicos	US	Xerox	122	0,9087	0,8129	20	0,9503	0,898	89	16	0,8994
Eletroeletrônicos	US	Xilinx	480	0,7496	0,61	69	0,7934	0,6786	460	74	0,7217
Máquinas Indust	US	Agco	411	0,7814	0,6494	1	1	1	372	20	0,7624
Máquinas Indust	US	Applied Materials	550	0,6988	0,5331	1	1	1	512	35	0,6945
Máquinas Indust	US	Baker Hughes	283	0,8381	0,7238	1	1	1	230	5	0,8233

Máquinas Indust	BR	Bardella	222	0,8598	0,7558	1	1	1	230	5	0,8233
Máquinas Indust	US	Briggs & Stratton	420	0,7779	0,6585	5	0,9999	0,9999	483	31	0,7095
Máquinas Indust	US	Brooks Automation	530	0,7197	0,5566	6	0,9979	0,9926	497	33	0,7022
Máquinas Indust	US	Brunswick	467	0,7574	0,6071	7	0,9967	0,9947	422	23	0,738
Máquinas Indust	US	Caterpillar	488	0,7444	0,6056	8	0,9949	0,9911	420	22	0,7382
Máquinas Indust	US	Colfax Corp	340	0,8138	0,6985	9	0,9949	0,9927	299	12	0,7959
Máquinas Indust	US	Cummins	433	0,7724	0,6167	10	0,9916	0,9853	371	19	0,7625
Máquinas Indust	US	Deere & Co	320	0,8226	0,6985	11	0,985	0,9799	292	11	0,7983
Máquinas Indust	US	Donaldson	357	0,8074	0,6674	12	0,983	0,9738	313	13	0,7889
Máquinas Indust	US	Dover	389	0,7937	0,6429	13	0,9827	0,9721	316	14	0,7876
Máquinas Indust	US	Dril Quip	631	0,4914	0,3646	14	0,9821	0,969	629	41	0,47
Máquinas Indust	US	Eaton	398	0,7905	0,636	15	0,9793	0,97	326	16	0,7851
Máquinas Indust	US	Flowserve	567	0,6824	0,5328	16	0,9759	0,9611	558	40	0,6566
Máquinas Indust	US	FMC Technologies	324	0,82	0,6837	17	0,9751	0,9601	268	9	0,8108
Máquinas Indust	US	Graco	576	0,6719	0,5053	18	0,975	0,9426	549	39	0,6657
Máquinas Indust	US	Idex	482	0,7488	0,5908	19	0,9749	0,9619	429	24	0,7355
Máquinas Indust	US	Illinois Tool Works	279	0,8386	0,7059	20	0,9748	0,9624	195	4	0,8373
Máquinas Indust	BR	Inds Romi	422	0,7774	0,6837	21	0,9748	0,9224	438	25	0,7318
Máquinas Indust	US	Ingersoll-Rand	266	0,8469	0,7284	22	0,9662	0,9334	258	8	0,8154
Máquinas Indust	US	ITT Industries	177	0,8795	0,711	23	0,9628	0,9228	175	3	0,8428
Máquinas Indust	US	Joy Global	461	0,7596	0,643	24	0,9612	0,9342	461	27	0,7214

Máquinas Indust	US	Kennametal	490	0,7439	0,6159	25	0,9565	0,9315	449	26	0,7263
Máquinas Indust	US	Lam Research	554	0,6959	0,5465	26	0,9358	0,9468	522	36	0,685
Máquinas Indust	US	Lennox Intl	376	0,7992	0,6617	27	0,9332	0,8939	331	18	0,7832
Máquinas Indust	US	Manitowo Co	227	0,8586	0,7697	28	0,9274	0,8946	291	10	0,7984
Máquinas Indust	BR	Metalfrio	239	0,8535	0,7639	29	0,9234	0,8833	240	7	0,8219
Máquinas Indust	US	Middleby	562	0,6872	0,5292	30	0,9166	0,8714	528	37	0,6799
Máquinas Indust	US	National Oilwell	493	0,7421	0,6123	31	0,9149	0,866	479	30	0,7111
Máquinas Indust	US	Nordson	570	0,6812	0,508	32	0,9128	0,8736	545	38	0,6681
Máquinas Indust	US	Oil States Intl	75	0,9402	0,8208	33	0,8888	0,8363	129	2	0,8711
Máquinas Indust	US	Pentair	536	0,7146	0,5705	34	0,881	0,8202	506	34	0,6971
Máquinas Indust	US	SPX Corp	10	0,9918	0,9723	35	0,8766	0,8166	53	1	0,9317
Máquinas Indust	US	Terex	508	0,7314	0,5852	36	0,8747	0,8281	488	32	0,7076
Máquinas Indust	US	Timken	309	0,8258	0,702	37	0,853	0,7882	329	17	0,7845
Máquinas Indust	US	Toro	455	0,7626	0,6175	38	0,8508	0,7969	404	21	0,7485
Máquinas Indust	US	Weatherford Intl	374	0,8006	0,6832	39	0,8432	0,7706	317	15	0,7875
Máquinas Indust	BR	Weg	519	0,7263	0,5865	40	0,8323	0,7619	462	28	0,7209
Máquinas Indust	US	Zebra Tech	511	0,729	0,5895	41	0,6545	0,5794	465	29	0,7187
Mineração	US	Arch Coal	114	0,9165	0,8296	8	0,9922	0,9819	76	7	0,9112
Mineração	US	Atwood Oceanics	438	0,7683	0,6275	9	0,9919	0,9934	424	26	0,7373
Mineração	US	Cliffs Natural Resources	197	0,8703	0,7505	7	0,9923	0,9827	150	13	0,8586

Mineração	US	Compass Minerals	85	0,9333	0,9087	1	1	1	271	24	0,8091
Mineração	US	Core Laboratories	117	0,9126	0,8221	17	0,9469	0,891	80	9	0,9085
Mineração	US	Freeport-Mcmoran Copper & Gold	171	0,882	0,8308	13	0,9726	0,9742	154	14	0,8559
Mineração	US	Halliburton	212	0,8647	0,7476	10	0,9869	0,9779	143	12	0,8608
Mineração	US	Helmerich & Payne	106	0,9201	0,8322	14	0,966	0,9316	68	6	0,9166
Mineração	US	Intrepid Potash	476	0,7531	0,6127	22	0,9161	0,9012	444	27	0,7299
Mineração	US	Key Energy Serv	35	0,9696	0,9191	6	0,9925	0,9738	19	3	0,9633
Mineração	BR	Magnesita SA	527	0,7232	0,6002	5	0,9938	0,9924	513	29	0,6927
Mineração	US	Martin Marietta Mtl	459	0,7605	0,5968	28	0,8077	0,6879	402	25	0,7495
Mineração	US	Nabors Ind	80	0,9353	0,8524	15	0,9635	0,9148	48	4	0,9338
Mineração	US	Newmont Mining	298	0,8317	0,7087	23	0,9119	0,8554	267	22	0,811
Mineração	US	Oceaneering Intl	310	0,8256	0,6858	25	0,9028	0,8247	249	21	0,8203
Mineração	US	Patterson UTI Energ	16	0,9882	0,9686	1	1	1	6	1	0,9865
Mineração	US	Peabody Energy	96	0,926	0,8463	16	0,959	0,9148	57	5	0,9245
Mineração	US	Potash / Saskatchew	264	0,8479	0,7307	26	0,8804	0,7895	219	19	0,8298
Mineração	CL	Pucobre	87	0,9317	0,8676	12	0,9795	0,9585	81	10	0,9076
Mineração	US	RPC	154	0,8882	0,7812	21	0,9177	0,8404	110	11	0,88
Mineração	US	Schlumberger Ltd	215	0,8633	0,7481	24	0,9115	0,8367	158	15	0,8543
Mineração	CL	Soprocal	231	0,8578	0,7558	18	0,9422	0,9142	225	20	0,8262
Mineração	US	Southern Copper	518	0,7265	0,5716	29	0,7914	0,6774	486	28	0,7091

Mineração	CL	Sqm	627	0,5302	0,3928	30	0,6516	0,5745	623	30	0,5078
Mineração	US	Superior Energy	111	0,9174	0,8263	11	0,9803	0,9583	78	8	0,9096
Mineração	US	Targa Resources	1	1	1	1	1	1	10	2	0,9832
Mineração	US	Tetra Technologies	198	0,8701	0,7732	4	0,9948	0,9924	211	18	0,832
Mineração	US	Transocean Sedco	262	0,8482	0,7168	20	0,9381	0,8829	210	17	0,8322
Mineração	BR	Vale	232	0,857	0,7578	19	0,9382	0,8971	170	16	0,8445
Mineração	US	Vulcan Materials	302	0,8307	0,6933	27	0,8517	0,7314	270	23	0,8104
Minerais não Met	US	Cabot Microelectronics	569	0,6813	0,5116	1	1	1	544	10	0,6684
Minerais não Met	CL	Cementos	233	0,8566	0,7476	4	0,9981	0,9965	159	1	0,8541
Minerais não Met	CL	Cristales	517	0,7273	0,6169	1	1	1	526	9	0,6815
Minerais não Met	US	Eagle Materials	529	0,7199	0,5575	1	1	1	476	8	0,712
Minerais não Met	BR	Eternit	179	0,8788	0,8031	9	0,9793	0,9666	334	4	0,7811
Minerais não Met	BR	Nadir Figuei	395	0,7918	0,678	10	0,9637	0,9375	435	6	0,7334
Minerais não Met	US	Owens Corning New	379	0,7989	0,6565	5	0,998	0,9972	301	3	0,7936
Minerais não Met	US	Owens-Illinois	425	0,7768	0,6269	8	0,9849	0,9793	352	5	0,7704
Minerais não Met	CL	Polpaico	313	0,8247	0,6955	6	0,9948	0,9909	247	2	0,8206
Minerais não Met	BR	Portobello	451	0,7636	0,6324	7	0,9916	0,9892	448	7	0,728
Papel e Celulose	US	Avery Dennison	237	0,854	0,7265	5	0,9991	0,9987	165	4	0,8465
Papel e Celulose	US	Bemis	334	0,8164	0,676	13	0,964	0,9373	264	7	0,8125
Papel e Celulose	BR	Celul Irani	189	0,8735	0,7667	4	0,9992	0,9987	140	2	0,862

Papel e Celulose	CL	Cmpc	553	0,6972	0,5284	16	0,8393	0,7568	523	16	0,6836
Papel e Celulose	US	Domtar Corporation	397	0,7913	0,6373	15	0,9524	0,9198	324	12	0,7853
Papel e Celulose	BR	Fibria	469	0,7567	0,6086	14	0,9602	0,929	442	14	0,7302
Papel e Celulose	US	Graphic Packaging	353	0,8092	0,6641	12	0,9662	0,9451	297	11	0,7962
Papel e Celulose	US	International Paper	288	0,8364	0,7021	1	1	1	215	5	0,8307
Papel e Celulose	US	Kimberly-Clark	296	0,8328	0,7043	8	0,9898	0,9813	273	8	0,808
Papel e Celulose	BR	Klabin S/A	155	0,8877	0,8131	10	0,9837	0,9776	252	6	0,8189
Papel e Celulose	US	Packaging	351	0,8101	0,6771	11	0,9783	0,9762	276	9	0,8058
Papel e Celulose	US	Resolute Forest Products	339	0,8145	0,67	9	0,9898	0,9851	288	10	0,7999
Papel e Celulose	BR	Santher Fab de Papel Sta Terezinha S/A	137	0,8975	0,8095	6	0,9974	0,9955	124	1	0,8736
Papel e Celulose	US	Sonoco Products	223	0,8595	0,7315	1	1	1	157	3	0,8548
Papel e Celulose	BR	Suzano Papel	408	0,7837	0,6497	7	0,9928	0,9907	376	13	0,7612
Papel e Celulose	CL	Celulosa Arauco Y Constitución S.A.	537	0,714	0,5473	1	1	1	495	15	0,7039
Petróleo e Gas	US	Cabot Oil & Gas	78	0,9371	0,8782	19	0,9629	0,9319	95	25	0,8905
Petróleo e Gas	US	Caseys General Stores	43	0,9631	0,9205	15	0,9739	0,9443	23	8	0,9555
Petróleo e Gas	BR	Ceg	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9991
Petróleo e Gas	US	Chevron	77	0,9376	0,8528	21	0,9483	0,8762	49	14	0,9328
Petróleo e Gas	BR	Comgas	33	0,9714	0,9316	12	0,9785	0,9491	16	5	0,9662
Petróleo e Gas	CL	Copec	134	0,8985	0,7921	28	0,9053	0,808	97	26	0,8874

Petróleo e Gas	US	CVR Energy	61	0,9505	0,8865	13	0,9775	0,9461	46	13	0,9355
Petróleo e Gas	US	EOG Resources	47	0,9599	0,9539	18	0,964	0,9584	65	20	0,9182
Petróleo e Gas	US	Exxon Mobil	118	0,9111	0,8006	27	0,9202	0,8202	82	24	0,9074
Petróleo e Gas	CL	Gasco	13	0,9901	0,9664	1	1	1	30	10	0,9492
Petróleo e Gas	US	Hess Corp	24	0,9819	0,9208	9	0,9956	0,9728	21	7	0,9597
Petróleo e Gas	US	Hollyfrontier Corp	83	0,9347	0,8573	24	0,9439	0,8787	62	18	0,9192
Petróleo e Gas	US	Kinder Morgan Inc	104	0,9208	0,8365	25	0,9278	0,8505	69	21	0,9155
Petróleo e Gas	US	Marathon Oil	46	0,9606	0,8891	11	0,9903	0,9685	37	11	0,946
Petróleo e Gas	US	Murphy Oil	32	0,9715	0,8725	1	1	1	17	6	0,9658
Petróleo e Gas	US	Occidental Petrol	72	0,9437	0,8882	17	0,9654	0,933	49	14	0,9328
Petróleo e Gas	BR	Pet Manguih	12	0,9905	0,9758	10	0,9919	0,9796	13	4	0,9748
Petróleo e Gas	BR	Petrobras	146	0,8923	0,7977	26	0,9214	0,8495	106	27	0,8824
Petróleo e Gas	BR	Petroleo Lub do Nordeste S/A	69	0,9457	0,88	14	0,9743	0,9301	44	12	0,937
Petróleo e Gas	US	Pioneer Natural	116	0,9145	0,8737	8	0,9985	0,998	188	28	0,8392
Petróleo e Gas	US	Range Resources	34	0,9702	0,9318	1	1	1	25	9	0,9517
Petróleo e Gas	US	Tesoro Corp	79	0,936	0,862	1	1	1	74	22	0,9127
Petróleo e Gas	US	Unit	4	0,9949	0,9865	6	0,9999	0,9995	3	2	0,9932
Petróleo e Gas	US	Valero Energy	91	0,9298	0,8414	20	0,9547	0,8941	63	19	0,9191
Petróleo e Gas	US	Western Refining	88	0,9316	0,8547	16	0,9662	0,9321	60	17	0,9233
Petróleo e Gas	US	Williams	86	0,9319	0,8316	22	0,9472	0,8625	58	16	0,9241

Petróleo e Gas	CL	Empresa Nacional Del Petróleo	84	0,9346	0,8555	23	0,9446	0,8769	79	23	0,909
Petróleo e Gas	CL	Metrogas	6	0,9922	0,9796	7	0,9986	0,9955	7	3	0,9849
Química	US	Abbott Labs	242	0,8531	0,7407	30	0,8805	0,7895	416	39	0,7401
Química	US	Air Products & Chemicals	186	0,8741	0,757	5	0,997	0,9944	134	8	0,8657
Química	US	Akorn	623	0,5498	0,3984	68	0,5993	0,4875	611	61	0,5475
Química	US	Albemarle	457	0,7609	0,6259	29	0,8849	0,8242	405	38	0,7484
Química	US	Alexion Pharmaceuticals	630	0,4937	0,4476	51	0,8156	0,9026	635	69	0,4117
Química	US	Amgen	612	0,5975	0,5047	40	0,8507	0,8406	622	65	0,5099
Química	US	Avon Products	288	0,8364	0,7354	18	0,961	0,9365	282	21	0,803
Química	US	Bio Techne	588	0,6508	0,5197	54	0,8068	0,7442	577	55	0,6271
Química	US	Biogen Idec	633	0,4632	0,3351	69	0,5227	0,4328	632	68	0,4562
Química	US	Biomarin Pharmaceutical	646	0,3379	0,2912	70	0,5148	0,5583	645	71	0,2969
Química	BR	Bombril	35	0,9696	0,9386	10	0,9915	0,9836	56	3	0,9246
Química	BR	Braskem	138	0,897	0,8064	21	0,9431	0,8923	148	10	0,8594
Química	US	Bristol Myers Squibb	515	0,7276	0,5932	57	0,7874	0,6844	505	46	0,6991
Química	US	Bunge	165	0,8844	0,7726	15	0,9798	0,9566	122	7	0,8741
Química	US	Cabot	301	0,8314	0,7045	26	0,9272	0,8724	232	17	0,8232
Química	US	Celanese Ag	337	0,8148	0,6675	34	0,8741	0,7751	272	19	0,809

Química	US	Celgene	639	0,4072	0,286	71	0,4653	0,372	636	70	0,4018
Química	US	CF Industries Holdings	41	0,9642	0,9346	7	0,9957	0,9937	86	4	0,9008
Química	US	Charles River Laboratories International	272	0,8423	0,7077	27	0,9078	0,8304	196	14	0,837
Química	US	Church & Dwight	341	0,8133	0,6693	36	0,8663	0,7652	278	20	0,805
Química	US	Clorox	247	0,8521	0,7337	12	0,9879	0,9784	225	16	0,8262
Química	US	Coach	423	0,7771	0,6804	8	0,9927	0,995	508	47	0,6967
Química	US	Colgate Palmolive	410	0,782	0,6319	39	0,8525	0,7519	342	26	0,7775
Química	BR	Cristal	468	0,7568	0,6589	23	0,9348	0,9008	540	53	0,6708
Química	US	Dow Chemical	388	0,7943	0,6459	32	0,875	0,7852	309	23	0,7892
Química	US	Dupont E I De Nemours & Co	491	0,7434	0,6013	49	0,8217	0,7248	483	44	0,7095
Química	US	Eastman Chemical	453	0,7632	0,6082	52	0,8114	0,6919	385	34	0,7576
Química	US	Ecolab	449	0,7643	0,6077	50	0,8165	0,6986	384	33	0,7577
Química	CL	Edelpa	376	0,7992	0,6768	33	0,8743	0,7981	394	35	0,7534
Química	BR	Elekeiroz	52	0,9531	0,9084	14	0,9846	0,969	149	11	0,8589
Química	CL	Enaex	366	0,8022	0,6694	20	0,9467	0,9261	350	27	0,7719
Química	US	Endo International	501	0,7344	0,5978	9	0,9927	0,9954	534	52	0,6762
Química	US	Estee Lauder Companies	614	0,5795	0,4249	64	0,6733	0,5526	606	60	0,5576
Química	BR	Fer Heringer	126	0,906	0,8342	4	0,9985	0,997	135	9	0,865

Química	US	FMC	525	0,7237	0,5795	38	0,8535	0,781	520	49	0,6857
Química	US	Gilead Sciences	610	0,6039	0,4698	59	0,7426	0,6559	616	64	0,5359
Química	US	Grace W R	109	0,9188	0,8514	1	1	1	185	13	0,8397
Química	US	Huntsman	428	0,7762	0,621	41	0,8499	0,7464	361	29	0,7659
Química	US	Idexx Laboratories	507	0,7321	0,5761	56	0,7934	0,6752	477	42	0,7118
Química	US	International Flavors & Fragrances	585	0,6548	0,4834	61	0,72	0,585	570	54	0,6457
Química	US	Jazz Pharmaceuticals	390	0,7936	0,7529	13	0,9858	0,9855	474	41	0,7135
Química	US	Johnson & Johnson	595	0,6336	0,4597	62	0,6941	0,5545	578	56	0,6258
Química	US	Kronos Worldwide	383	0,7971	0,6867	45	0,8405	0,7533	441	40	0,7312
Química	US	Lilly (Eli)	617	0,5673	0,4309	60	0,7328	0,6678	612	62	0,5473
Química	US	Lyondellbasell Inds	270	0,8439	0,7042	28	0,9067	0,8208	202	15	0,8355
Química	US	Merck & Co	546	0,7045	0,5632	55	0,795	0,6999	500	45	0,7009
Química	MX	Mexichem	399	0,7897	0,6466	42	0,8474	0,7441	338	24	0,7795
Química	CL	Molymet	394	0,7922	0,6622	11	0,9889	0,9778	359	28	0,7671
Química	US	Monsanto	587	0,6523	0,5269	37	0,8617	0,8151	595	58	0,5958
Química	US	Mosaic	424	0,777	0,6242	44	0,8432	0,7375	373	31	0,762
Química	US	Mylan NV	611	0,6002	0,4308	65	0,6688	0,5359	597	59	0,5931
Química	US	Nektar Therapeutics	407	0,7838	0,6982	17	0,9685	0,9645	586	57	0,6175
Química	US	Newmarket	414	0,7797	0,6306	35	0,8698	0,782	401	37	0,7498
Química	BR	Nutriplant	128	0,9019	0,8083	16	0,9754	0,9426	112	6	0,8797

Química	US	Opko Health	415	0,7795	0,7207	24	0,9335	0,919	519	48	0,6862
Química	US	Perrigo Co	547	0,7043	0,5497	53	0,8083	0,7154	526	50	0,6815
Química	US	Pfizer Inc	616	0,5675	0,4288	63	0,6753	0,5691	615	63	0,5387
Química	US	PPG Industries	471	0,7562	0,5947	48	0,8259	0,7121	399	36	0,7502
Química	US	Praxair	157	0,8875	0,7746	22	0,9412	0,884	104	5	0,8829
Química	US	Procter & Gamble	265	0,8478	0,7322	1	1	1	184	12	0,8404
Química	US	Qiagen NV	556	0,6928	0,532	58	0,7602	0,6407	530	51	0,679
Química	CL	Rebrisa	65	0,9487	0,89	6	0,9967	0,9931	45	2	0,9357
Química	US	RPM International	526	0,7233	0,5644	46	0,8286	0,7272	482	43	0,7096
Química	US	Scotts	188	0,8736	0,8207	19	0,9582	0,95	382	32	0,7588
Química	US	Sherwin-Williams	435	0,7709	0,6119	47	0,8273	0,7091	368	30	0,763
Química	US	Shire Pharm	625	0,5348	0,412	67	0,6039	0,5195	628	67	0,498
Química	BR	Ultrapar	39	0,9656	0,923	1	1	1	24	1	0,9546
Química	US	United Therapeutics	628	0,5163	0,3915	66	0,6083	0,5403	624	66	0,5074
Química	US	Valspar	381	0,7985	0,6466	31	0,8801	0,7894	305	22	0,7911
Química	US	Westlake Chemical	316	0,8244	0,6887	25	0,9299	0,8851	269	18	0,8105
Química	MX	Mexichem	399	0,7897	0,6466	42	0,8474	0,7441	338	24	0,7795
Siderur & Metalur	BR	Aco Altona	219	0,8621	0,7545	29	0,9286	0,8735	223	20	0,8274
Siderur & Metalur	US	Ak Steel Holding	248	0,8513	0,743	25	0,9532	0,9259	245	25	0,8207
Siderur & Metalur	US	Alcoa	363	0,8035	0,6555	30	0,9228	0,8678	302	28	0,7933
Siderur & Metalur	US	Allegheny Tech	437	0,7693	0,6534	45	0,8604	0,7918	440	41	0,7315

Siderur & Metalur	US	Ball	306	0,8286	0,6937	26	0,9507	0,9124	234	21	0,823
Siderur & Metalur	CL	Cap	371	0,8012	0,6801	37	0,902	0,8426	294	27	0,7978
Siderur & Metalur	US	Carpenter Technology	578	0,6695	0,5183	44	0,8645	0,8116	565	44	0,6473
Siderur & Metalur	US	Century Aluminum	275	0,8412	0,7109	9	0,9973	0,996	218	19	0,8299
Siderur & Metalur	CL	Cintac	432	0,7731	0,6634	6	0,9988	0,9983	458	42	0,7226
Siderur & Metalur	US	Commercial Metals	254	0,8498	0,7229	22	0,967	0,9361	214	17	0,8316
Siderur & Metalur	US	Crane	478	0,7512	0,5905	43	0,8718	0,793	427	40	0,7362
Siderur & Metalur	US	Crown Holdings	396	0,7916	0,6466	35	0,9065	0,8436	343	30	0,7769
Siderur & Metalur	CL	Elecmetal	568	0,6818	0,5382	46	0,7879	0,6976	539	43	0,6709
Siderur & Metalur	BR	Ferbasa	555	0,693	0,5592	36	0,9061	0,8662	571	45	0,6412
Siderur & Metalur	BR	Fibam	145	0,8927	0,805	27	0,9469	0,9012	162	10	0,8477
Siderur & Metalur	BR	Forja Taurus	332	0,8171	0,7248	41	0,8843	0,8185	391	35	0,7536
Siderur & Metalur	BR	Gerdau	311	0,8251	0,7114	33	0,9116	0,8547	234	21	0,823
Siderur & Metalur	BR	Gerdau Met	311	0,8251	0,7114	34	0,9116	0,8547	234	21	0,823
Siderur & Metalur	BR	Haga S/A	129	0,9018	0,82	18	0,9799	0,9612	179	11	0,8416
Siderur & Metalur	US	Harsco	156	0,8876	0,7707	19	0,9781	0,9508	116	6	0,8754
Siderur & Metalur	CL	Infodema	356	0,8075	0,697	38	0,8937	0,8414	362	34	0,7656
Siderur & Metalur	BR	Kepler Weber	259	0,8485	0,7429	10	0,9966	0,9938	203	15	0,835
Siderur & Metalur	BR	Lupatech	26	0,9801	0,9225	16	0,991	0,9648	41	1	0,94
Siderur & Metalur	BR	Mangels Indl	30	0,974	0,9324	12	0,9964	0,9895	64	3	0,9189

Siderur & Metalur	BR	Metal Iguacu	64	0,9499	0,9052	5	0,9999	0,9997	90	5	0,8991
Siderur & Metalur	BR	Metisa	402	0,7885	0,6629	39	0,8929	0,8297	344	31	0,7755
Siderur & Metalur	CL	Nibsa	608	0,6077	0,502	15	0,9917	0,9921	608	46	0,5568
Siderur & Metalur	US	Nucor	243	0,8529	0,7285	24	0,9624	0,932	181	12	0,841
Siderur & Metalur	US	Orbital ATK	23	0,9821	0,9617	7	0,9981	0,9965	59	2	0,9238
Siderur & Metalur	BR	Panatlantica	207	0,8667	0,7601	21	0,9703	0,9475	193	14	0,8376
Siderur & Metalur	BR	Paranapanema	139	0,8968	0,8331	1	1	1	264	26	0,8125
Siderur & Metalur	US	Parker-Hannifin	279	0,8386	0,7101	1	1	1	217	18	0,8301
Siderur & Metalur	US	Schnitzer Steel Ind	110	0,918	0,829	8	0,9974	0,9918	76	4	0,9112
Siderur & Metalur	BR	Sid Nacional	164	0,8846	0,8148	23	0,9654	0,9441	396	37	0,7529
Siderur & Metalur	US	Silgan Holdings	373	0,801	0,6753	28	0,9454	0,9209	354	33	0,7693
Siderur & Metalur	US	Stanley Black & Decker	466	0,7577	0,6095	32	0,9136	0,8637	417	38	0,7389
Siderur & Metalur	US	Steel Dynamics	343	0,8116	0,6748	31	0,9143	0,8534	304	29	0,7925
Siderur & Metalur	BR	Tekno	187	0,8738	0,7887	17	0,9874	0,9789	192	13	0,8378
Siderur & Metalur	AR	Tenaris S.A.	303	0,8305	0,7503	1	1	1	345	32	0,7741
Siderur & Metalur	US	United States Steel	148	0,891	0,7987	20	0,9741	0,952	142	9	0,8611
Siderur & Metalur	BR	Usiminas	168	0,8831	0,8006	13	0,9944	0,9864	138	7	0,8626
Siderur & Metalur	US	Valhi	378	0,799	0,6872	40	0,8905	0,8308	424	39	0,7373
Siderur & Metalur	US	Worthington Ind	277	0,8402	0,718	1	1	1	237	24	0,8229
Siderur & Metalur	BR	Forja Taurus	332	0,8171	0,7248	41	0,8843	0,8185	391	35	0,7536

Siderur & Metalur	BR	Kepler Weber	259	0,8485	0,7429	10	0,9966	0,9938	203	15	0,835
Siderur & Metalur	BR	Usiminas	168	0,8831	0,8006	13	0,9944	0,9864	138	7	0,8626
Textil	BR	Arezzo Co	297	0,8324	0,7095	8	0,9885	0,9807	227	6	0,8257
Textil	US	Bebe Stores	160	0,8858	0,7871	6	0,9976	0,9971	118	2	0,875
Textil	BR	Cedro	135	0,8981	0,8181	7	0,9943	0,9882	119	3	0,8748
Textil	BR	Cia Hering	387	0,7947	0,6832	20	0,9534	0,9287	369	12	0,7627
Textil	US	Cintas	193	0,8719	0,7559	1	1	1	133	4	0,8661
Textil	BR	Coteminas	442	0,766	0,6511	26	0,8598	0,7909	434	14	0,7337
Textil	US	Crocs Inc	521	0,7249	0,584	22	0,8978	0,849	503	18	0,6995
Textil	US	Deckers Outdoor	57	0,9514	0,9518	1	1	1	511	21	0,6952
Textil	BR	Dohler	328	0,8178	0,7324	21	0,9263	0,8921	436	15	0,7326
Textil	BR	Grendene	308	0,8277	0,7039	16	0,9724	0,9503	321	9	0,7858
Textil	BR	Guararapes	520	0,7251	0,6174	11	0,9815	0,979	510	20	0,6953
Textil	US	Guess	359	0,8058	0,6794	1	1	1	370	13	0,7626
Textil	US	Hanesbrands	619	0,5662	0,4164	29	0,7568	0,6821	609	29	0,5526
Textil	BR	Ind Cataguas	173	0,8811	0,8063	13	0,9797	0,9653	347	10	0,7728
Textil	BR	Karsten	266	0,8469	0,7371	12	0,9804	0,9539	228	7	0,8245
Textil	US	Kate Spade & Co	166	0,884	0,8154	19	0,9572	0,9389	536	24	0,6725
Textil	BR	Le Lis Blanc	565	0,6859	0,5952	10	0,982	0,9844	589	27	0,6092
Textil	US	Mohawk	560	0,6896	0,5218	25	0,8681	0,8035	531	23	0,6787
Textil	US	Nike Inc	541	0,7107	0,5454	28	0,8255	0,7288	494	17	0,7046

Textil	US	Polo Ralph Lauren	539	0,7125	0,5744	23	0,8822	0,8237	556	26	0,6596
Textil	US	PVH Corp	552	0,6986	0,5481	18	0,9582	0,9632	546	25	0,6671
Textil	BR	Santanense	196	0,8707	0,7863	14	0,9751	0,9587	348	11	0,7726
Textil	US	Skechers USA	429	0,7754	0,6649	1	1	1	521	22	0,6852
Textil	BR	Springs	484	0,7474	0,6282	24	0,8759	0,8114	442	16	0,7302
Textil	BR	Teka	44	0,9625	0,9048	5	0,9981	0,9942	38	1	0,9405
Textil	BR	Tex Renaux	151	0,8898	0,8098	9	0,9861	0,9712	241	8	0,8217
Textil	US	Under Armour	583	0,6599	0,5377	27	0,8533	0,8393	592	28	0,6057
Textil	US	VF	485	0,7473	0,607	17	0,9612	0,9457	509	19	0,696
Textil	BR	Vulcabras	203	0,8677	0,747	15	0,9738	0,9375	224	5	0,8265
Veiculos e peças	US	American Axle & Manufacturing Holdings	162	0,8854	0,7745	15	0,9761	0,9551	109	9	0,8813
Veiculos e peças	US	Autoliv	204	0,8674	0,7457	21	0,947	0,9013	137	12	0,8631
Veiculos e peças	US	BE Aerospace	121	0,9089	0,8726	19	0,9595	0,9464	575	40	0,6309
Veiculos e peças	BR	Bic Monark	263	0,8481	0,7529	1	1	1	524	36	0,6822
Veiculos e peças	US	Boeing	629	0,5125	0,3566	45	0,6179	0,5171	625	45	0,506
Veiculos e peças	US	Borg Warner	176	0,8798	0,7704	20	0,9573	0,9235	119	10	0,8748
Veiculos e peças	BR	Embraer	601	0,623	0,5075	10	0,9941	0,9951	610	44	0,5519
Veiculos e peças	US	Federal Mogul	454	0,763	0,6041	38	0,8367	0,7328	387	31	0,7563
Veiculos e peças	US	Ford Motor	118	0,9111	0,8188	13	0,9927	0,9871	85	7	0,901
Veiculos e peças	BR	Fras-Le	494	0,7413	0,5956	40	0,8282	0,7334	445	33	0,7298

Veiculos e peças	US	General Motors	214	0,8634	0,7417	23	0,9429	0,8935	161	17	0,849
Veiculos e peças	US	Gentex	382	0,7974	0,6675	31	0,9097	0,8683	341	28	0,778
Veiculos e peças	US	Harley-Davidson	149	0,8908	0,8165	18	0,9622	0,9459	169	21	0,8449
Veiculos e peças	US	Hexcel	502	0,7343	0,5708	41	0,8277	0,7269	447	34	0,7282
Veiculos e peças	US	Honeywell International	393	0,7923	0,6353	34	0,8707	0,7766	322	26	0,7855
Veiculos e peças	BR	Iochp-Maxion	249	0,8509	0,7282	26	0,9399	0,8969	166	19	0,8459
Veiculos e peças	US	Lear Corp	113	0,9168	0,8279	8	0,996	0,9933	72	5	0,9131
Veiculos e peças	US	LKQ Corp	596	0,6326	0,468	42	0,7169	0,6184	579	41	0,625
Veiculos e peças	BR	Marcopolo	185	0,8755	0,7588	11	0,994	0,9869	126	11	0,8732
Veiculos e peças	US	Meritor	205	0,8672	0,7482	14	0,9801	0,9608	147	16	0,8602
Veiculos e peças	BR	Metal Leve	253	0,8501	0,7374	30	0,9242	0,8666	196	22	0,837
Veiculos e peças	US	Navistar Intl	255	0,8488	0,7192	24	0,9422	0,8869	198	23	0,8367
Veiculos e peças	US	Oshkosh Truck	350	0,8105	0,6692	32	0,9	0,8289	322	26	0,7855
Veiculos e peças	US	Paccar	108	0,9192	0,8305	5	0,9984	0,9971	70	4	0,9138
Veiculos e peças	BR	Plascar Part	61	0,9505	0,8806	6	0,9983	0,993	33	3	0,9477
Veiculos e peças	US	Polaris Industries	431	0,7737	0,6234	33	0,8755	0,8223	380	30	0,7601
Veiculos e peças	BR	Randon Part	200	0,8696	0,7629	16	0,9656	0,9305	143	14	0,8608
Veiculos e peças	BR	Riosulense	71	0,9439	0,8933	9	0,9946	0,9861	83	6	0,9021
Veiculos e peças	BR	Schulz	300	0,8316	0,7211	29	0,926	0,8686	285	25	0,8018
Veiculos e peças	US	Spirit Aerosystems	534	0,715	0,5899	35	0,8592	0,7962	553	38	0,6619

Veiculos e peças	US	Tesla Motors	606	0,6105	0,4596	43	0,7004	0,6717	590	42	0,6069
Veiculos e peças	US	Textron Inc	586	0,6526	0,4915	37	0,844	0,7766	572	39	0,6386
Veiculos e peças	US	Thor Industries	115	0,9147	0,836	1	1	1	92	8	0,8964
Veiculos e peças	US	Transdigm Group	620	0,5657	0,4038	44	0,6701	0,5733	607	43	0,5572
Veiculos e peças	US	Trinity Industries	497	0,7389	0,5719	36	0,8568	0,7624	439	32	0,7316
Veiculos e peças	US	Triumph Group	209	0,866	0,798	1	1	1	547	37	0,6667
Veiculos e peças	BR	Tupy	202	0,8683	0,7564	12	0,9934	0,9878	140	13	0,862
Veiculos e peças	US	United Technologies	418	0,7787	0,6349	22	0,9461	0,9204	373	29	0,762
Veiculos e peças	US	Visteon	17	0,9881	0,965	7	0,998	0,9929	28	2	0,95
Veiculos e peças	US	Wabco Holdings	228	0,8584	0,7357	25	0,9418	0,8928	163	18	0,8469
Veiculos e peças	US	Wabtec	514	0,7277	0,5624	39	0,8311	0,734	466	35	0,7182
Veiculos e peças	BR	Wetzel S/A	31	0,9717	0,937	4	0,9996	0,9986	26	1	0,9504
Veiculos e peças	US	Winnebago Ind	323	0,8201	0,6918	28	0,9375	0,9055	281	24	0,8032
Veiculos e peças	BR	Iochp-Maxion	249	0,8509	0,7282	26	0,9399	0,8969	166	19	0,8459
Veiculos e peças	BR	Randon Part	200	0,8696	0,7629	16	0,9656	0,9305	143	14	0,8608

APÊNDICE C – EFICIENTES POR SETOR

Tabela 10 – *Ranking* geral e eficiências das DMUs eficientes de cada setor

Setor	País	DMU	<i>Ranking</i> geral	Eficiência geral	<i>Ranking</i> no setor	Eficiência no setor
Agro e Pesca	CL	Schwager	45	0,9618	1	1
Agro e Pesca	CL	Viconto	54	0,9519	1	1
Alimentos e Beb	US	Campbell Soup	286	0,8376	1	1
Alimentos e Beb	CL	Conchatoro	605	0,6114	1	1
Alimentos e Beb	BR	Josapar	92	0,9292	1	1
Alimentos e Beb	US	Lancaster Colony	112	0,917	1	1
Alimentos e Beb	BR	Tereos	175	0,8799	1	1
Comércio	US	Aeropostale	49	0,9555	1	1
Comércio	BR	BR Pharma	93	0,9289	1	1
Comércio	US	Copart	21	0,9851	1	1
Comércio	US	Gamestop	100	0,9231	1	1
Construção	BR	Lix da Cunha	1	1	1	1
Construção	BR	PDG Realt	7	0,992	1	1
Construção	US	Quanta Services	15	0,9887	1	1

Construção	BR	PDG Realt	7	0,992	1	1
Eletroeletrônicos	US	Apple	22	0,9837	1	1
Eletroeletrônicos	US	Hp	20	0,9866	1	1
Eletroeletrônicos	US	Imation	11	0,9911	1	1
Máquinas Indust	US	Agco	411	0,7814	1	1
Máquinas Indust	US	Applied Materials	550	0,6988	1	1
Máquinas Indust	US	Baker Hughes	283	0,8381	1	1
Máquinas Indust	BR	Bardella	222	0,8598	1	1
Mineração	US	Compass Minerals	85	0,9333	1	1
Mineração	US	Patterson UTI Energ	16	0,9882	1	1
Mineração	US	Targa Resources	1	1	1	1
Minerais não Met	US	Cabot Microelectronics	569	0,6813	1	1
Minerais não Met	CL	Cristales	517	0,7273	1	1
Minerais não Met	US	Eagle Materials	529	0,7199	1	1
Papel e Celulose	US	International Paper	288	0,8364	1	1
Papel e Celulose	US	Sonoco Products	223	0,8595	1	1
Papel e Celulose	CL	Celulosa Arauco Y Constitución S.A.	537	0,714	1	1
Petróleo e Gas	BR	Ceg	1	1	1	1

Petróleo e Gas	CL	Gasco	13	0,9901	1	1
Petróleo e Gas	US	Murphy Oil	32	0,9715	1	1
Petróleo e Gas	US	Range Resources	34	0,9702	1	1
Petróleo e Gas	US	Tesoro Corp	79	0,936	1	1
Química	US	Grace W R	109	0,9188	1	1
Química	US	Procter & Gamble	265	0,8478	1	1
Química	BR	Ultrapar	39	0,9656	1	1
Siderur & Metalur	BR	Paranapanema	139	0,8968	1	1
Siderur & Metalur	US	Parker-Hannifin	279	0,8386	1	1
Siderur & Metalur	AR	Tenaris S.A.	303	0,8305	1	1
Siderur & Metalur	US	Worthington Ind	277	0,8402	1	1
Textil	US	Cintas	193	0,8719	1	1
Textil	US	Deckers Outdoor	57	0,9514	1	1
Textil	US	Guess	359	0,8058	1	1
Textil	US	Skechers USA	429	0,7754	1	1
Veiculos e peças	BR	Bic Monark	263	0,8481	1	1
Veiculos e peças	US	Thor Industries	115	0,9147	1	1
Veiculos e peças	US	Triumph Group	209	0,866	1	1

APÊNDICE D - CLUSTERS

Tabela 11 – Número de DMUs de cada setor por cluster

Cluster	Petr. e Gas	Constr.	Miner.	Comérc.	Eletr.	Quím.	Máq. Ind.	Sid. & Metal.	Veic. e peças	Textil	Aliment. e Beb.	Agr. e Pesc.	Miner. não Met	Papel e Cel.
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	4	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	3	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
4	2	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	0	2	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	3	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	3	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
8	0	0	1	4	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	6	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	4	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0
11	3	0	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
12	0	0	0	4	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0
13	0	0	0	7	2	1	1	0	0	0	1	0	0	0
14	1	0	1	5	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0

15	1	0	0	4	2	1	0	2	0	0	2	0	0	0
16	1	0	1	2	4	0	0	0	0	1	2	1	0	0
17	0	1	1	2	1	1	2	0	0	1	0	0	0	0
18	1	1	0	2	1	1	0	2	0	0	0	0	0	0
19	1	0	1	1	2	0	0	1	1	0	0	0	0	0
20	1	0	0	2	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0
21	0	0	1	3	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
22	1	0	0	3	2	0	1	1	0	0	1	0	0	0
23	0	0	0	2	3	1	0	1	0	0	2	2	0	0
24	0	0	1	1	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	2	4	1	0	1	1	0	1	0	0	0
26	0	0	1	2	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0
27	0	0	1	2	3	1	0	0	0	0	1	0	0	0
28	0	0	0	1	1	2	0	1	3	0	0	0	0	0
29	0	0	1	0	3	0	1	1	1	0	2	0	0	0
30	1	1	1	1	1	0	0	4	1	0	0	0	1	0
31	0	0	1	1	2	2	0	0	0	0	3	0	0	0
32	0	0	0	2	0	1	0	0	2	1	2	1	0	0
33	0	0	0	0	4	0	1	0	0	0	0	0	0	0
34	2	0	1	0	1	0	1	0	2	1	0	0	0	0
35	0	0	0	1	3	1	0	0	1	1	0	0	0	1

36	0	0	1	0	2	1	0	1	0	1	1	0	0	0
37	0	0	0	1	3	1	0	0	2	1	1	0	0	0
38	1	0	1	1	3	1	0	0	0	0	3	0	0	1
39	1	0	1	3	1	0	2	1	0	0	0	0	0	0
40	0	0	2	1	1	1	0	2	1	0	0	0	0	0
41	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1
42	1	0	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0
43	0	0	0	0	1	3	0	0	2	0	0	0	0	0
44	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	2
45	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	2	1	0	3
46	1	0	1	1	2	0	0	0	1	0	1	0	0	0
47	0	0	0	3	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
48	0	0	1	1	1	1	0	2	2	0	1	0	0	0
49	1	0	0	0	1	2	2	0	0	0	1	0	1	0
50	1	0	1	1	0	0	0	1	2	1	1	0	0	0
51	0	0	0	0	1	0	2	0	2	0	1	0	0	0
52	0	0	0	3	0	3	2	0	0	0	0	0	1	0
53	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
54	0	0	1	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0	1
55	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	2
56	0	0	0	0	2	1	2	0	1	0	2	0	0	0

57	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
58	0	0	0	2	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1
59	0	0	0	2	2	0	1	0	1	0	2	0	1	0
60	0	0	0	2	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
61	0	2	0	1	2	1	1	0	0	1	0	0	0	0
62	0	0	0	3	3	0	1	1	1	0	0	0	0	0
63	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
64	0	0	0	0	2	2	0	0	2	0	0	0	0	0
65	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
66	0	0	0	0	2	1	0	1	0	0	0	0	0	0
67	0	0	0	0	1	2	1	0	1	1	0	0	0	0
68	0	0	0	1	1	3	0	0	2	1	0	0	0	0
69	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
70	0	0	1	1	0	2	2	1	0	0	0	0	0	0
71	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0
72	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
73	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
74	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
75	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
76	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0
77	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

[illegible]

99	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

APÊNDICE E – ESTATÍSTICA DESCRITIVA POR SETOR

Tabela 12 – Estatística descritiva dos dados para os modelos propostos (dados em milhares de dólares)

	Setor	Média	Desvio-padrão	Max	Min
CPV	Agr. and Fishing	157702,85	202252,68	1243746,00	714,00
	Foods and Beverages	1882181,61	4971153,28	38324052,03	5300,82
	Commerce	1507385,46	2888969,20	18289285,45	75,59
	Construction	489823,17	522935,76	2710093,83	88,51
	Mining	2911417,50	5890529,96	25445257,65	3504,51
	Nonmetallic minerals	140758,56	86716,74	440008,83	20579,11
	Paper and Cellulose	1111264,72	1034954,88	3948911,00	38519,77
	Oil and Gas	8344502,65	19373349,84	102995903,59	710,05
	Chemical	2310268,79	5080797,39	24368583,31	1430,77

	Steel and Metallurgical	1221072,80	2801753,72	16263323,71	1149,12
CEF	Agr. and Fishing	65413,97	70731,65	277243,00	82,82
	Foods and Beverages	426368,30	695489,63	3529439,00	1435,73
	Commerce	455225,25	651019,79	3166640,30	35,09
	Construction	534439,77	479079,67	2229064,90	85,83
	Mining	1201196,41	1847880,22	5613289,99	1530,37
	Nonmetallic minerals	69747,55	43431,77	220326,89	23431,87
	Paper and Cellulose	459882,90	374080,41	1111044,00	17214,45
	Oil and Gas	1821768,16	4272109,80	16984335,98	204,11
	Chemical	330323,05	571408,91	2452962,44	151,35
	Steel and Metallurgical	596219,28	1131265,18	4633466,58	1131,32
CEI	Agr. and Fishing	64440,62	70448,94	277243,00	82,82
	Foods and Beverages	427246,67	695298,40	3529439,00	1435,73

	Commerce	454515,63	651219,03	3166640,30	35,09
	Construction	547631,70	497264,48	2229064,90	85,83
	Mining	1205008,72	1860015,24	5613289,99	1530,37
	Nonmetallic minerals	70886,62	44120,38	220326,89	23802,94
	Paper and Cellulose	459035,94	371421,15	1111044,00	17214,45
	Oil and Gas	1843672,29	4309151,04	16984335,98	204,11
	Chemical	332502,20	574562,51	2452962,44	151,35
	Steel and Metallurgical	614870,11	1156605,80	4633466,58	1131,32
<i>CPP</i>	Agr. and Fishing	158676,20	199595,28	1235085,00	639,00
	Foods and Beverages	1881303,23	4956929,49	37909254,24	2886,06
	Commerce	1508095,07	2892310,62	18430587,06	77,59
	Construction	476631,24	504156,64	2672333,75	97,00
	Mining	2907605,19	5844013,43	25356996,11	3405,36

Nonmetallic minerals	139619,48	84026,14	434306,24	24574,29
Paper and Cellulose	1112111,68	1027517,14	3919921,00	36919,04
Oil and Gas	8322598,52	19236239,48	102598251,13	751,98
Chemical	2308089,64	5072284,12	24374236,67	1326,75
Steel and Metallurgical	1202421,96	2768952,08	16213962,45	1309,96

APÊNDICE F – COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO TAU DE KENDALL

Tabela 13 - Coeficiente de correlação Tau de Kendall

Modelo	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v
a	1	0,8	0,64	0,54	0,64	0,53	0,83	0,8	0,31	0,54	0,79	0,7	0,78	0,7	0,87	0,74	0,83	0,71	0,65	0,47	0,71	0,54
b	0,8	1	0,6	0,71	0,6	0,7	0,69	0,84	0,31	0,71	0,79	0,74	0,78	0,73	0,84	0,89	0,85	0,87	0,6	0,53	0,69	0,68
c	0,64	0,6	1	0,6	0,99	0,59	0,5	0,49	0,52	0,6	0,65	0,61	0,65	0,61	0,6	0,52	0,57	0,5	0,77	0,61	0,78	0,61
d	0,54	0,71	0,6	1	0,6	0,98	0,41	0,56	0,43	0,99	0,63	0,64	0,63	0,64	0,59	0,68	0,6	0,67	0,58	0,67	0,65	0,85
e	0,64	0,6	0,99	0,6	1	0,59	0,5	0,49	0,52	0,6	0,65	0,61	0,65	0,61	0,6	0,52	0,57	0,5	0,77	0,61	0,78	0,61
f	0,53	0,7	0,59	0,98	0,59	1	0,4	0,55	0,41	0,98	0,62	0,62	0,61	0,62	0,58	0,68	0,59	0,67	0,56	0,65	0,64	0,83
g	0,83	0,69	0,5	0,41	0,5	0,4	1	0,78	0,2	0,41	0,69	0,59	0,68	0,59	0,78	0,67	0,75	0,64	0,53	0,33	0,57	0,4
h	0,8	0,84	0,49	0,56	0,49	0,55	0,78	1	0,22	0,56	0,73	0,68	0,71	0,68	0,85	0,86	0,86	0,82	0,51	0,41	0,6	0,55
i	0,31	0,31	0,52	0,43	0,52	0,41	0,2	0,22	1	0,43	0,36	0,33	0,38	0,33	0,29	0,28	0,27	0,26	0,49	0,43	0,46	0,41
j	0,54	0,71	0,6	0,99	0,6	0,98	0,41	0,56	0,43	1	0,63	0,64	0,63	0,64	0,59	0,68	0,6	0,67	0,58	0,67	0,65	0,85
k	0,79	0,79	0,65	0,63	0,65	0,62	0,69	0,73	0,36	0,63	1	0,76	0,97	0,76	0,8	0,75	0,76	0,71	0,75	0,56	0,76	0,62
l	0,7	0,74	0,61	0,64	0,61	0,62	0,59	0,68	0,33	0,64	0,76	1	0,76	0,99	0,73	0,71	0,7	0,68	0,64	0,66	0,67	0,65
m	0,78	0,78	0,65	0,63	0,65	0,61	0,68	0,71	0,38	0,63	0,97	0,76	1	0,76	0,78	0,74	0,74	0,7	0,76	0,56	0,76	0,62

n	0,7	0,73	0,61	0,64	0,61	0,62	0,59	0,68	0,33	0,64	0,76	0,99	0,76	1	0,73	0,71	0,7	0,67	0,64	0,66	0,67	0,65
o	0,87	0,84	0,6	0,59	0,6	0,58	0,78	0,85	0,29	0,59	0,8	0,73	0,78	0,73	1	0,83	0,92	0,79	0,62	0,5	0,69	0,59
p	0,74	0,89	0,52	0,68	0,52	0,68	0,67	0,86	0,28	0,68	0,75	0,71	0,74	0,71	0,83	1	0,84	0,94	0,55	0,5	0,64	0,66
q	0,83	0,85	0,57	0,6	0,57	0,59	0,75	0,86	0,27	0,6	0,76	0,7	0,74	0,7	0,92	0,84	1	0,85	0,57	0,46	0,68	0,61
r	0,71	0,87	0,5	0,67	0,5	0,67	0,64	0,82	0,26	0,67	0,71	0,68	0,7	0,67	0,79	0,94	0,85	1	0,52	0,47	0,63	0,66
s	0,65	0,6	0,77	0,58	0,77	0,56	0,53	0,51	0,49	0,58	0,75	0,64	0,76	0,64	0,62	0,55	0,57	0,52	1	0,64	0,85	0,59
t	0,47	0,53	0,61	0,67	0,61	0,65	0,33	0,41	0,43	0,67	0,56	0,66	0,56	0,66	0,5	0,5	0,46	0,47	0,64	1	0,61	0,76
u	0,71	0,69	0,78	0,65	0,78	0,64	0,57	0,6	0,46	0,65	0,76	0,67	0,76	0,67	0,69	0,64	0,68	0,63	0,85	0,61	1	0,7
v	0,54	0,68	0,61	0,85	0,61	0,83	0,4	0,55	0,41	0,85	0,62	0,65	0,62	0,65	0,59	0,66	0,61	0,66	0,59	0,76	0,7	1

Legenda dos modelos:

a – DDEA (custo toal);

b - DDEA (custo unitário);

c – DEA-OCT (custo toal);

d - DEA-OCT (custo unitário);

e - DEA-OCT com restrição de projeção (custo toal);

f - DEA-OCT com restrição de projeção (custo unitário);

g - DEA-OCT sem restrição de valor inicial (custo toal);

h - DEA-OCT sem restrição de valor inicial (custo unitário);

- i - DEA-OCT VRS (custo toal);
- j - DEA-OCT VRS (custo unitário);
- k - DEA-OCT com penalização (custo toal);
- l - DEA-OCT com penalização (custo unitário);
- m - DEA-OCT VRS com penalização (custo toal);
- n - DEA-OCT VRS com penalização (custo unitário);
- o - OCT (custo toal);
- p - OCT (custo unitário);
- q – OCT com restrição de projeção (custo toal);
- r - OCT com restrição de projeção (custo unitário);
- s - OCT (custo toal);
- t - OCT (custo unitário);
- u – OCT com penalização e com restrição de projeção (custo toal);
- v - OCT com penalização e com restrição de projeção (custo unitário);

APÊNDICE G – RESULTADOS DAS DMUS EFICIENTES NO EXEMPLO SIMULADO

Tabela 14 - Resultados das DMUs eficientes no exemplo simulado

Modelo/DMU	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v
1	0,60	0,60	0,71	0,68	0,71	0,68	0,54	0,54	1,00	0,68	0,81	0,81	0,84	0,81	0,54	0,54	0,48	0,48	0,81	0,85	0,72	0,72
10	0,57	0,57	0,74	0,70	0,74	0,70	0,48	0,48	1,00	0,70	0,79	0,79	0,81	0,79	0,53	0,53	0,47	0,47	0,88	0,92	0,78	0,78
19	0,55	0,55	0,77	0,72	0,77	0,72	0,44	0,44	1,00	0,72	0,77	0,77	0,79	0,77	0,53	0,53	0,46	0,46	0,93	0,97	0,83	0,83
28	0,68	0,70	0,76	0,80	0,76	0,80	0,64	0,64	1,00	0,80	0,89	0,81	0,91	0,81	0,62	0,66	0,59	0,63	0,86	0,83	0,81	0,81
37	0,64	0,67	0,79	0,81	0,79	0,81	0,57	0,58	1,00	0,81	0,85	0,79	0,86	0,79	0,60	0,63	0,53	0,56	0,85	0,91	0,79	0,81
46	0,61	0,64	0,81	0,84	0,81	0,84	0,51	0,53	1,00	0,84	0,82	0,77	0,83	0,77	0,59	0,60	0,51	0,53	0,90	0,97	0,80	0,84
55	0,76	0,82	0,81	0,93	0,81	1,00	0,74	0,76	1,00	0,93	1,00	0,80	1,00	0,80	0,71	0,79	0,72	0,77	0,93	0,80	0,92	0,90
56	0,70	0,75	0,75	0,84	0,75	0,84	0,68	0,69	0,92	0,84	1,00	0,82	1,00	0,82	0,65	0,71	0,62	0,67	0,93	0,82	0,82	0,83
58	0,68	0,73	0,72	0,83	0,72	1,00	0,65	0,68	0,88	0,83	0,91	0,75	0,91	0,75	0,63	0,72	0,64	0,69	0,85	0,75	0,85	0,85
61	0,61	0,67	0,65	0,75	0,65	1,00	0,59	0,62	0,79	0,75	0,73	0,63	0,73	0,63	0,56	0,66	0,57	0,63	0,68	0,63	0,67	0,74
64	0,71	0,78	0,84	0,94	0,84	1,00	0,65	0,69	1,00	0,94	0,93	0,78	0,93	0,78	0,68	0,74	0,64	0,69	0,90	0,90	0,88	0,88
67	0,64	0,71	0,75	0,85	0,75	1,00	0,59	0,62	0,90	0,85	0,86	0,73	0,86	0,73	0,61	0,68	0,57	0,63	0,84	0,84	0,82	0,85
70	0,58	0,65	0,68	0,78	0,68	1,00	0,53	0,57	0,81	0,78	0,72	0,64	0,72	0,64	0,55	0,63	0,52	0,58	0,70	0,74	0,68	0,76
73	0,67	0,75	0,85	0,97	0,85	1,00	0,59	0,63	1,00	0,97	0,88	0,77	0,88	0,77	0,66	0,70	0,57	0,62	0,89	0,97	0,85	0,88

76	0,61	0,69	0,77	0,88	0,77	1,00	0,53	0,58	0,91	0,88	0,83	0,72	0,83	0,72	0,59	0,64	0,52	0,57	0,84	0,91	0,80	0,85
79	0,56	0,64	0,71	0,81	0,71	1,00	0,49	0,54	0,83	0,81	0,71	0,65	0,71	0,65	0,54	0,60	0,48	0,53	0,72	0,82	0,69	0,78
82	0,70	0,67	0,78	0,71	0,78	0,71	0,69	0,63	1,00	0,71	0,88	0,84	0,90	0,84	0,65	0,63	0,57	0,55	0,88	0,88	0,78	0,75
91	0,66	0,63	0,81	0,71	0,81	0,71	0,61	0,55	1,00	0,71	0,84	0,80	0,85	0,80	0,57	0,55	0,50	0,48	0,87	0,86	0,77	0,74
100	0,63	0,59	0,83	0,71	0,83	0,71	0,55	0,48	1,00	0,71	0,81	0,77	0,82	0,77	0,56	0,55	0,49	0,48	0,88	0,90	0,78	0,77
109	0,77	0,77	0,84	0,82	0,84	0,82	0,74	0,74	1,00	0,82	0,90	0,90	0,90	0,90	0,74	0,74	0,70	0,70	0,87	0,91	0,85	0,85
118	0,72	0,72	0,86	0,82	0,86	0,82	0,65	0,65	1,00	0,82	0,86	0,86	0,86	0,86	0,65	0,65	0,62	0,62	0,86	0,90	0,83	0,83
127	0,68	0,68	0,87	0,82	0,87	0,82	0,58	0,58	1,00	0,82	0,83	0,83	0,83	0,83	0,63	0,63	0,55	0,55	0,92	0,95	0,81	0,81
136	0,87	0,89	0,90	0,94	0,90	0,96	0,86	0,86	1,00	0,94	1,00	0,90	1,00	0,90	0,84	0,87	0,85	0,87	0,93	0,88	0,97	0,94
137	0,80	0,81	0,82	0,86	0,82	0,86	0,78	0,78	0,91	0,86	1,00	0,91	1,00	0,91	0,77	0,79	0,72	0,75	0,93	0,89	0,87	0,86
145	0,80	0,83	0,91	0,94	0,91	0,94	0,75	0,76	1,00	0,94	0,93	0,86	0,93	0,86	0,74	0,77	0,74	0,76	0,91	0,88	0,92	0,90
154	0,75	0,78	0,92	0,94	0,92	0,94	0,67	0,68	1,00	0,94	0,89	0,83	0,89	0,83	0,70	0,73	0,66	0,68	0,89	0,95	0,88	0,88
163	0,82	0,77	0,86	0,77	0,86	0,77	0,86	0,74	1,00	0,77	1,00	0,89	1,00	0,89	0,78	0,73	0,68	0,64	1,00	0,95	0,89	0,81
164	0,75	0,70	0,79	0,70	0,79	0,70	0,79	0,68	0,91	0,70	1,00	0,77	1,00	0,77	0,71	0,67	0,62	0,59	1,00	0,82	0,89	0,70
172	0,76	0,70	0,88	0,75	0,88	0,75	0,76	0,64	1,00	0,75	0,91	0,84	0,91	0,84	0,68	0,64	0,59	0,56	0,95	0,91	0,85	0,78
181	0,71	0,65	0,89	0,74	0,89	0,74	0,67	0,55	1,00	0,74	0,86	0,80	0,86	0,80	0,60	0,57	0,53	0,50	0,92	0,88	0,82	0,75
190	0,91	0,88	0,93	0,88	0,93	0,88	0,93	0,86	1,00	0,88	1,00	0,98	1,00	0,98	0,88	0,86	0,83	0,81	0,96	1,00	0,95	0,91
191	0,82	0,80	0,84	0,80	0,84	0,80	0,84	0,79	0,91	0,80	1,00	0,95	1,00	0,95	0,80	0,78	0,70	0,68	0,96	0,96	0,86	0,82

199	0,83	0,80	0,94	0,86	0,94	0,86	0,81	0,74	1,00	0,86	0,93	0,92	0,93	0,92	0,77	0,74	0,72	0,69	0,93	0,97	0,90	0,87
208	0,77	0,74	0,95	0,84	0,95	0,84	0,71	0,65	1,00	0,84	0,88	0,88	0,88	0,88	0,68	0,66	0,64	0,61	0,91	0,95	0,87	0,84
217	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,94	0,98	1,00	1,00
218	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	1,00	1,00	1,00	1,00	0,90	0,90	0,85	0,85	0,94	0,98	0,92	0,92
219	0,83	0,83	0,83	0,83	0,83	0,83	0,83	0,83	0,83	0,83	1,00	1,00	1,00	1,00	0,83	0,83	0,72	0,72	0,94	0,98	0,83	0,83
226	0,91	0,91	1,00	0,97	1,00	0,97	0,86	0,86	1,00	0,97	0,94	0,94	0,94	0,94	0,86	0,86	0,86	0,86	0,92	0,95	0,95	0,95
235	0,84	0,84	1,00	0,95	1,00	0,95	0,76	0,76	1,00	0,95	0,89	0,89	0,89	0,89	0,76	0,76	0,76	0,76	0,90	0,94	0,91	0,91

APÊNDICE H – PUBLICAÇÕES (ACEITAS E SUBMETIDAS) RELACIONADAS À PESQUISA

ALVES JUNIOR, P. N.; VALLE, W. F. Y. ; GUDE, J. P. ; MELO, I. C. ; REBELATTO, D. A. N. . Insider understanding of country development: a novel application of Optimal Control Theory and Data Envelopment Analysis for benchmarking performance of Chilean and Brazilian companies. *Central European Review of Economics and Management*, 2018.

ALVES JUNIOR, P. N.; MELO, I. C. ; CELESTINI, G. ; REBELATTO, D. A. N. . Allocative control Data Envelopment Analysis (DEA) model to evaluate inventory control systems when there is a relationship among variables. *GEPROS.Gestão da Produção, Operações e Sistemas*, v. 11, p. 143-160, 2018.

ALVES JR., Paulo Nocera; Cari, Elmer Pablo Tito . The Use of Optimal Control Theory as a Benchmarking Tool in Production-Inventory Systems. In: Ömer Faruk Yılmaz; Süleyman Tüfekçi. (Org.). *Advances in Logistics, Operations, and Management Science*. 1ed.: IGI Global, 2017, v. , p. 284-308.

ALVES JUNIOR, P. N.; MELO, I. C. ; CELESTINI, G. ; REBELATTO, D. A. N. . MODELO DE CONTROLE ALOCATIVO DE ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS (DEA) PARA AVALIAR SISTEMAS DE CONTROLE DE ESTOQUE QUANDO HÁ RELAÇÃO ENTRE VARIÁVEIS. In: XXIII Simpósio de Engenharia de Produção (SIMPEP), 2016, Bauru. *Anais do XXIII Simpósio de Engenharia de Produção*, 2016. (Artigo premiado para o Fast Track da GEPROS).