**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

JOSÉ EDUARDO CERVELIN

**Redução de vibrações mecânicas em processos de
torneamento usando material piezelétrico**

São Carlos
2014

JOSÉ EDUARDO CERVELIN

**Redução de vibrações mecânicas em processos de
torneamento usando material piezelétrico**

Tese apresentada à Escola de
Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo para a
obtenção do título de Doutor em
Engenharia de Produção.

Área de concentração:
Processos e Gestão de Operações
ORIENTADOR:
Prof. Tit. Reginaldo Teixeira Coelho

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

C419r Cervelin, Jose Eduardo
 Redução de vibrações mecânicas em processos de
torneamento usando material piezelétrico / Jose Eduardo
Cervelin; orientador Reginaldo Teixeira Coelho. São
Carlos, 2014.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Produção e Área de Concentração em
Processos e Gestão de Operações -- Escola de Engenharia
de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2014.

1. Vibrações autoexcitadas. 2. Chatter. 3.
Piezelétrico. 4. Shunt. 5. Controle passivo. 6.
Torneamento. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **JOSÉ EDUARDO CERVELIN**.

Título da tese: "Redução de vibrações mecânicas em processos de torneamento usando material piezelétrico".

Data da defesa: 07/02/2014

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Titular **Reginaldo Teixeira Coelho**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Helio Aparecido Navarro**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

aprovado

Profa. Dra. **Maíra Martins da Silva**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Paulo Roberto de Aguiar**
(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/UNESP-Bauru)

Aprovado

Prof. Dr. **Luiz Eduardo de Ângelo Sanches**
(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/UNESP-Bauru)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção
Prof. Titular **Luiz Cesar Ribeiro Carpinetti**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

DEDICATÓRIA

Aos meus pais e irmãos pelos valores repassados e pelo amor recebido.
À minha amada Olívia, pelo apoio e incentivo.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Reginaldo Teixeira Coelho pela orientação, confiança e amizade.

Aos professores que colaboraram com o desenvolvimento deste trabalho, em especial à Professora Maíra e ao Professor Leopoldo, ambos do LABDIN da EESC.

Ao Diego, pela amizade e parceria no desenvolvimento do trabalho.

À CAPES, pela concessão da bolsa de pesquisa.

Ao técnico do laboratório LAPRAS, Adolfo, pelo apoio durante o trabalho experimental e pela amizade cultivada.

Aos funcionários e professores do Departamento de Engenharia de Produção.

Aos colegas do LAPRAS pelo companheirismo e ajuda.

A todos aqueles que de alguma forma ou de outra contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

CERVELIN, J.E. (2014). **Redução de vibrações mecânicas em processos de torneamento usando material piezelétrico**. Tese – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

Vibrações mecânicas oferecem grande limitação para a produtividade, qualidade ou mesmo viabilidade das operações de usinagem, especialmente quando se trata das autoexcitadas (*chatter*). Neste trabalho, foram desenvolvidas estratégias que tem como objetivo diminuir a intensidade de vibrações em processos de torneamento por meio do acoplamento de material piezelétrico ao suporte de ferramenta em conjunto com uso de *shunts* resistivo, indutivo e resistivo-indutivo em série ou em paralelo, criando assim estruturas eletromecânicas passivamente amortecidas. Para tanto, foram construídos modelos eletromecânicos de parâmetros distribuídos para mostrar a capacidade que tais estruturas eletromecânicas possuem em oferecer um maior amortecimento quando comparadas com estruturas mecânicas convencionais. Com os modelos construídos, foi possível verificar a influência causada pela espessura da camada de material piezelétrico bem como a influência dos *shunts* no comportamento da estrutura, sendo constatado que camadas mais espessas aumentam a capacidade de amortecimento da estrutura e que os *shunts* resistivo-indutivo, tanto em série quanto em paralelo, funcionam como um amortecedor dinâmico de vibrações amortecido e oferecem o melhor desempenho. A seguir, construiu-se o diagrama de lóbulos de estabilidade para comparar as estruturas com e sem *shunts* e observou-se que as estruturas com *shunts* resistivo-indutivo possuem um melhor desempenho. Também foram executados testes de impacto (*tap tests*) para a verificação experimental do comportamento da estrutura quando conectadas aos *shunts* e os resultados mostraram que há um maior amortecimento. Considerando os resultados obtidos, acredita-se que seja possível melhorar o desempenho de processos de torneamento usando material piezelétrico.

Palavras-chave: Vibrações autoexcitadas. *Chatter*. Piezelétrico. *Shunt*. Controle passivo. Torneamento

ABSTRACT

CERVELIN, J.E. (2013). **Reduction of mechanical vibrations in turning processes by using piezoelectric materials**. Thesis – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

Mechanical vibrations offer great limitation for the productivity, quality or even feasibility of the machining operations when chatter is present. In this work it was developed strategies aiming to diminish the intensity of the vibration in turning processes. By coupling a piezoelectric material with a turning tool and by using different associations of resistive and inductive shunt (series or parallel) it was created electromechanical structures passively damped. Electromechanical models of distributed parameters were developed in order to show the capacity that these structures has to offer a greater dumping when compared with conventional mechanical structures. By using these constructed models it was possible to verify the influence of the thickness of the piezoelectric material as well as the influence of shunts in the behavior of structure. It was observed that thicker layers increase the damping capacity of the structure that resistive-inductive shunt (series or parallel) works as a damped dynamic vibration absorber which offer better performance. Latter was developed a stability lobes diagram in order to compare the structures with and without shunts and it was observed that structures connected to resistive-inductive shunt has a better performance. Tap tests were performed for the purpose of study the experimental behavior of the structure connected to shunt and results showed that there is a better damping in this situation. Considering the results obtained, is fair to believe that is possible to improve turning process by using piezoelectric materials.

Keywords: Self-excited vibrations. Chatter. Piezoelectric. Shunt. Passive control. Turning.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Modelo de Ernst e Merchant para o corte ortogonal (Adaptado de Astakhov, 2006)	6
Figura 2.2 - Modelo de Ernst e Merchant simplificado para o corte ortogonal (Cervelin, 2009).....	6
Figura 2.3 - Geometria do corte oblíquo (Adaptado de Altintas, 2012).....	9
Figura 2.4 - Diagramas de força, velocidade e cisalhamento no corte oblíquo (Adaptado de Shamoto e Altintas, 1999).....	9
Figura 2.5 - Mecânica do processo de torneamento (Adaptado de Altintas, 2012) ..	15
Figura 2.6 - Geometria da ferramenta de corte de torneamento em perspectiva (Adaptado de Altintas, 2012).....	15
Figura 2.7 - Geometria da ferramenta de corte de torneamento (adaptado de Tschätsch, 2008).....	16
Figura 2.8 - Mecânica do torneamento com ferramenta de ponta arredondada.....	17
Figura 2.9 – Sistema massa, mola e amortecedor (Adaptado de He e Fu, 2001)	23
Figura 2.10 – Caso Sobreamortecido (Adaptado de Inman, 2006)	25
Figura 2.11 – Caso criticamente amortecido para várias condições iniciais de velocidade (Adaptado de Inman, 2006).....	26
Figura 2.12 – Caso Subamortecido (Altintas, 2012)	27
Figura 2.13 – FRF amplitude e fase (Adaptado de Schmitz e Smith, 2009).....	33
Figura 2.14 – FRF Real e imaginário (Adaptado de Schmitz e Smith, 2009)	33
Figura 2.15 – FRF real e imaginário (Schmitz e Smith, 2012).....	34
Figura 2.16 – Obtenção da razão de amortecimento usando a magnitude da FRF (Dahil <i>et al.</i> , 2013).....	35
Figura 2.17 - FRF de um GDL em coordenadas polares (Adaptado de Schmitz e Smith, 2009).....	35
Figura 2.18 - Sistema com dois graus de liberdade (Altintas, 2012)	36
Figura 2.19 - Modos de vibração de um sistema com dois GDL (Adaptado de Altintas, 2012)	40
Figura 2.20 - Viga sujeita a carregamento dinâmico: (a) Propriedades e coordenadas da viga; (b) Forças atuando em um elemento diferencial (Adaptado de Clough e Penzien, 2003).	45

Figura 2.21 - Viga com carregamento axial e transversal. (a) Viga defletida devido às cargas. (b) Forças resultantes atuando sobre um elemento diferencial (Adaptado de Clough e Penzien, 2003).....	48
Figura 2.22 - Viga com suportes sujeitos a deslocamentos (Clough e Penzien, 2003)	49
Figura 2.23 - Análise de vibrações livres em uma viga engastada: (a) Propriedades da viga; (b) primeiros três modos de vibração; (c) termos da equação de frequência (Adaptado de Clough e Penzien, 2003).	56
Figura 2.24 - Viga sujeita a um carregamento concentrado (Adaptado de Kelly, 2012).	61
Figura 2.25 - Viga composta e método da seção transformada: (a) seção original e (b) seção transformada (Adaptado de Erturk, A e Inman, D. J., 2008).63	
Figura 2.26 –Montagem do ensaio de chatter (Adaptado de Altintas (2012)).	67
Figura 2.27 – Modelo de chatter no corte ortogonal com um GDL (Adaptado de Schmitz e Smith, 2009).....	67
Figura 2.28 - a) Usinagem de uma peça com vibração deixada por um passe anterior; b) Usinagem com as ondas atual e anterior em fase; c) Usinagem com defasagem entre as ondas atual e anterior (Adaptado de Schmitz e Smith, 2009).....	68
Figura 2.29 – Espessura de corte dinâmica (Adaptado de Ganguli et al., 2006)	69
Figura 2.30 – Diagrama de blocos em malha fechada de Merrit (Adaptado de Merrit, 1965)	72
Figura 2.31 – Diagrama de lóbulos de estabilidade (Adaptado de Erturk, A. e Inman, D. J., 2008b)	76
Figura 2.32 - Gráfico de Nyquist (Adaptado de Altintas, 2012)	76
Figura 2.33 - Detalhe do gráfico dos lóbulos de estabilidade (Adaptado de Schmitz e Smith, 2009)	77
Figura 2.34 – Estabilidade em processo de torneamento (Adaptado de Altintas, 2012)	78
Figura 2.35 - Viga engastada representando o suporte de ferramenta com uma camada de material piezelétrico acoplado (Adaptado de ERTURK, A.; INMAN, D. J., 2008b).....	87
Figura 2.36 - Seção transversal da viga e da camada piezelétrica (Cervelin <i>et al.</i> , 2010)	87

Figura 2.37 - Impedâncias associadas à cerâmica piezelétrica do suporte de ferramenta. (a) <i>shunt</i> resistivo; (b) <i>shunt</i> capacitivo; (c) <i>shunt</i> indutivo; (d) <i>shunt</i> resistivo-indutivo em série; (a) <i>shunt</i> resistivo-indutivo em paralelo (Erturk, A. e Inman, D. J., 2008b).	92
Figura 2.38 - Modelo de uma placa piezelétrica (Adaptado de VIANA; STEFFEN, 2006).....	96
Figura 2.39 – Circuitos <i>shunt</i> (Adaptado de Moheimani e Fleming, 2006)	98
Figura 2.40 - Indutores sintéticos de (a) Riordan e de (b) Antoniou	99
Figura 2.41 - Indutor sintético flutuante de Riordan (Adaptado de Agnes, 1995)	99
Figura 2.42 - Indutor sintético flutuante de Antoniou (Airoldi e Ruzzene, 2011).....	100
Figura 3.1 – Configurações estudadas na ferramenta de torneamento externo (vista das seções da barra).....	103
Figura 3.2 - Ferramenta de torneamento externo adaptada.....	104
Figura 3.3 – Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento externo sem material piezelétrico.....	107
Figura 3.4 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento externo com <i>shunt</i> resistivo para placa piezelétrica de 2mm de espessura.....	109
Figura 3.5 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento externo com <i>shunt</i> resistivo para placa piezelétrica de 4mm de espessura.....	110
Figura 3.6 – Efeito causado pelo <i>shunt</i> resistivo com placa de 4 mm de espessura	111
Figura 3.7 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento externo com <i>shunt</i> indutivo e placa piezelétrica com espessura de 2 mm.	112
Figura 3.8 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento externo com <i>shunt</i> indutivo e placa piezelétrica com espessura de 4 mm.	113
Figura 3.9 - Efeito causado pelo <i>shunt</i> indutivo com placa de 4 mm de espessura	114
Figura 3.10 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento externo com <i>shunt</i> resistivo-indutivo em série e placa piezelétrica com espessura de 2 mm.....	115

Figura 3.11- Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento externo com <i>shunt</i> resistivo-indutivo em série e placa piezelétrica com espessura de 4 mm.	116
Figura 3.12 - Efeito causado pelo <i>shunt</i> resistivo-indutivo em série com placa de 2 mm de espessura	117
Figura 3.13 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento externo com shunt resistivo-indutivo em paralelo com placa piezelétrica de 2 mm de espessura.	118
Figura 3.14 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento externo com shunt resistivo-indutivo em paralelo com placa piezelétrica de 4 mm de espessura.	119
Figura 3.15 - Efeito causado pelo <i>shunt</i> resistivo-indutivo em paralelo com placa de 2 mm de espessura.	120
Figura 3.16 - Diagrama de lóbulos de estabilidade para o suporte de ferramenta de torneamento externo.....	122
Figura 3.17 – Esquemático da ferramenta Sandvik Coromant S32U PTFNL 16-W, indicando algumas de suas dimensões (Disponível em http://www.sandvik.coromant.com/pt-pt/products/pages/productdetails.aspx?c=S32U-PTFNL%2016-W) ..	123
Figura 3.18 - Montagem da cerâmica piezelétrica no suporte de ferramenta	124
Figura 3.19 – Fixação do suporte de ferramenta com piezelétrico no torno e sistema de aquisição de dados.....	126
Figura 3.20 – Equipamento de aquisição do teste de impacto.....	127
Figura 3.21 - FRF do suporte de ferramenta de 350 mm com circuito aberto.....	129
Figura 3.22 - FRF do suporte de ferramenta de 350 mm com curto-circuito.....	130
Figura 3.23 – Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 350 mm sem <i>shunt</i>	132
Figura 3.24 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 350 mm com <i>shunt</i> resistivo.	133
Figura 3.25 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 350 mm com shunt indutivo.	134
Figura 3.26 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 350mm com <i>shunt</i> resistivo-indutivo em série.	135

Figura 3.27 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 350mm com shunt resistivo-indutivo em paralelo.....	136
Figura 3.28 – Comparação da magnitude e fase dos <i>shunts</i> Resistivo (R), resistivo-indutivo em série (RL série) e resistivo-indutivo em paralelo (RL paralelo) para a ferramenta de 350 mm.....	138
Figura 3.29 - Circuito RL usado como <i>shunt</i>	139
Figura 3.30 – Teste de impacto para suporte de ferramenta de 350 mm, usando uma única cerâmica	140
Figura 3.31 – Diagramas de lóbulos de estabilidade para a ferramenta de toronar de 350 mm	141
Figura 3.32 - Peça após a usinagem.....	142
Figura 3.33 - Forma de onda da cerâmica piezelétrica	143
Figura 3.34 – Suporte de ferramenta Sandvik Coromant S32U PTFNL 16-W com comprimento reduzido.....	144
Figura 3.35 - FRF do suporte de ferramenta de 270 mm com circuito aberto	146
Figura 3.36 - FRF do suporte de ferramenta de 270 mm com circuito fechado.....	147
Figura 3.37 – Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 270 mm sem <i>shunt</i>	150
Figura 3.38 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 270 mm com <i>shunt</i> resistivo.....	151
Figura 3.39 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 270 mm com <i>shunt</i> indutivo.....	152
Figura 3.40 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 350mm com <i>shunt</i> resistivo-indutivo em série.....	153
Figura 3.41 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 350mm com shunt resistivo-indutivo em paralelo.....	154
Figura 3.42 – Comparação da magnitude e fase dos <i>shunts</i> Resistivo (R), resistivo-indutivo em série (RL série) e resistivo-indutivo em paralelo (RL paralelo) para a ferramenta de 270 mm.....	155
Figura 3.43 - Teste de impacto para suporte de ferramenta de 270 mm.....	156
Figura 3.44 - Diagramas de lóbulos de estabilidade para a ferramenta de toronar de 270 mm	158
Figura 5.1 - Tensões e correntes no indutor sintético aterrado de Antoniou	175
Figura 5.2 - Tensões e correntes no indutor sintético flutuante de Antoniou	177

Figura 5.3 - Simulação do indutor sintético no Multisim	178
Figura 5.4 - Resultado da comparação entre indutores sintéticos e convencionais	178

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1 - Circuitos básicos de <i>shunt</i> para amortecimento piezelétrico (Adaptado de Erturk, A. e Inman, D. J., 2008b).....	94
Quadro 3.1 - Circuitos elétricos investigados no estudo numérico.	106

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Propriedades do suporte de ferramenta de torneamento externo	105
Tabela 3.2 - Propriedades da cerâmica piezelétrica PZT-5A.....	105
Tabela 3.3 – Valores ótimos calculados e ajustados para o suporte de ferramenta de torneamento externo	108
Tabela 3.4 - Valores de k , c e m ajustados para a ferramenta de torneamento externo	121
Tabela 3.5 - Propriedades do suporte de ferramenta de torneamento interno – 350 mm	124
Tabela 3.6 - Propriedades da cerâmica piezelétrica PZT-5A.....	125
Tabela 3.7 – Valores ótimos calculados e ajustados para o suporte de ferramenta de torneamento interno de 350mm	131
Tabela 3.8 - Valores de k , c e m ajustados para a ferramenta de torneamento interno de 350 mm	141
Tabela 3.9 – Parâmetros de usinagem	142
Tabela 3.10 – Valores ótimos calculados e ajustados para o suporte de ferramenta de torneamento interno de 270mm	149
Tabela 3.11 - Valores de k , c e m ajustados para a ferramenta de torneamento interno de 270 mm	157
Tabela 5.1 - Correntes e tensões para o indutor sintético de Antoniou (em Volt e Ampere).....	179
Tabela 5.2 – Potências sobre os resistores do indutor sintético (em Watts).....	179

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADV - Absorvedor Dinâmico de Vibrações

APSP - Amortecimento passivo por shunt piezelétrico

EESC – Escola de Engenharia de São Carlos

FRF – Função ou funções de resposta em frequência

FT – Função Transferência

GDL – grau de liberdade

LAPRAS – Laboratório de Processos Avançados e Sustentabilidade

PZT - Titanato Zirconato de Chumbo)

USP – Universidade de São Paulo

LISTA DE SÍMBOLOS

a_{lim} – Profundidade de corte crítica

a – Profundidade radial, Profundidade de corte

b – Largura de corte , Largura do cavaco

C_p – Capacitância do material piezelétrico

c_c – Coeficiente de amortecimento crítico

$[C_q]$ – Matriz de amortecimento modal

c – distância percorrida pela ferramenta a cada revolução

$c_a(x)$ – Coeficiente de amortecimento viscoso

dF_{cl} , F_c – Força de corte

dF_{fl} , F_f , F_{fc} – Força de avanço

dF_{rl} , F_r , F_{rc} – Força radial

$[d]$ – matriz de constante piezelétrica

D – Vetor densidade de deslocamento elétrico

E – Vetor campo elétrico

F_γ – Força aparente de atrito

F_f – Força de avanço

F_{sh} – Força de cisalhamento

F_u – Força de usinagem

$F_{\gamma N}$ – Força normal

$f_0(x)$ – Função impulso

f, V_f – Direção de avanço

F_c, F_{tc} – Força tangencial

F_r – Força normal

F_{shN} - Força normal que atua sobre o plano de cisalhamento

$G(s)$ – Função de transferência

h – Espessura de corte

h' – Espessura do cavaco, Avanço da ferramenta

h – Profundidade de corte

i – Ângulo de inclinação

i – Ângulo equivalente oblíquo

I – Momento de inércia

k_{ij} – Coeficiente de acoplamento eletromecânico

$[k^2]$ – Coeficiente de acoplamento piezelétrico

K_{re} – Força de aresta

$[K_q]$ – Matriz de rigidez normal

K_{fc} – Pressão específica de corte de avanço

K_{rc} – Pressão específica de corte radial

K_{tc} – Pressão específica de corte tangencial

K – Pressão específica de corte

$\bar{m}$ – Massa homogênea

M_n – Massa modal do enésimo modo vibracional

$[M_q]$ – Matriz de massa modal

M – Momento fletor

$M(x,t)$ – Momento interno da estrutura

$p_{eff}(x,t)$ – Carga dinâmica efetiva

$P_n(t)$ – Carregamento generalizado

$[P]$ – Matriz modal completa

P_n – Plano normal

$q(t)$ – Carga elétrica

R_c – Grau de recalque

R_s – Amplitude das marcas deixadas na peça

r – Raio de ponta

$[s^E]$ – Matriz do inverso do módulo de Young

S – Vetor deformação mecânica

T – Vetor tensão mecânica

$u(x-a)$ – Função degrau

V_{sh} – Velocidade de cisalhamento

V_{cav} – Velocidade do cavaco

V – Vetor cisalhante

V_c – Velocidade de corte

V_c – Velocidade de corte

$w(x)$ – Deflexão na viga

$w(x,t)$ – Deflexão transversal

Y – Módulo de elasticidade

$YI(x)$ – Rigidez à flexão

$Z(t)$ – Impedância

$\alpha_2 I$ – Coeficiente de amortecimento equivalente

α_o – Ângulo de folga

α_f – Ângulo de folga lateral

α_p – Ângulo de folga dorsal

β_a – Ângulo de atrito

β_n – Ângulo de atrito oblíquo

β – Ângulo de atrito

β_o – Ângulo de cunha

γ – Ângulo de saída da ferramenta

γ_n – Ângulo de saída normal

γ_o – Ângulo de saída ortogonal

γ_n – Ângulo equivalente de saída normal

γ_o – Ângulo equivalente de saída ortogonal

γ_f – Ângulo de saída lateral

γ_p – Ângulo de saída dorsal

$\delta(x - L_b)$ – Função delta de Dirac

$[\varepsilon^T]$ – Matriz de constante de permissividade dielétrica

ε_r – Ângulo de ponta

ζ – Coeficiente de amortecimento

ζ_n – Razão de amortecimento modal

ζ_r – Fator de amortecimento modal

η – Ângulo do cavaco

θ_i – Ângulo de projeção

κ_r – Ângulo de posição

κ'_r – Ângulo de posição secundário

λ_s – Ângulo de inclinação

μ – Coeficiente de atrito médio sobre a superfície de saída

τ_{sh} – Tensão de cisalhamento

ϕ – Ângulo de cisalhamento

ϕ_n – Ângulo de cisalhamento normal

ϕ_i – Ângulo de cisalhamento oblíquo

ϕ_n – ângulo de cisalhamento oblíquo

$[\Phi_q]$ – Matriz modal de FRF

$(\Phi_{q,k})$ – Funções transferência modais

$\Phi(x)$ – Função característica

χ_r – Termo de acoplamento modal

ψ_r – Ângulo de posição complementar

$\psi_i(x)$ – Função de influência estática

ω, ω_n – Frequência natural de oscilação

ω_d – Frequência natural de ressonância

(ω_c) - Frequência de *chatter*

ω_r – Frequência natural do r-ésimo modo vibracional

SUMÁRIO

RESUMO	v
ABSTRACT	vii
LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE QUADROS	xv
LISTA DE TABELAS	xvii
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	xix
LISTA DE SÍMBOLOS	xxi
SUMÁRIO	xxvii
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	2
1.2 Estrutura do trabalho	3
2 Revisão bibliográfica	5
2.1 Mecânica da usinagem dos metais	5
2.1.1 Mecânica do corte ortogonal estático	5
2.1.2 Mecânica do corte oblíquo estático	8
2.1.3 Modelo mecanístico das forças de corte	13
2.2 Mecânica do processo de torneamento	14
2.2.1 Previsão das forças de usinagem em torneamento	16
2.3 O sistema máquina-ferramenta-peça	21
2.4 Vibrações mecânicas	22
2.4.1 Vibrações livres com um grau de liberdade	22
2.4.2 Vibrações forçadas com um grau de liberdade	27
2.4.3 Função Transferência	30
2.4.4 Função de Reposta em Frequência	31
2.4.5 Vibrações com múltiplos graus de liberdade	36
2.4.6 Análise modal	37

2.4.7	Vibrações em sistemas contínuos	44
2.4.7.1	Análise de vibrações em sistemas contínuos.....	52
2.5	Vibrações em usinagem	64
2.5.1	<i>Chatter</i>	64
2.5.1.1	<i>Chatter</i> regenerativo.....	65
2.5.2	Análise de estabilidade do <i>chatter</i>	70
2.5.3	Estabilidade do <i>chatter</i> em operações de torneamento.....	78
2.6	Supressão de <i>chatter</i>	81
2.7	Materiais piezelétricos	85
2.8	Modelo eletromecânico de parâmetros distribuídos para vigas com material piezelétrico.....	86
2.9	Amortecimento passivo com <i>shunts</i> piezelétricos	93
2.10	Indutores sintéticos	98
3	Estudos e discussões.....	103
3.1	Estudo 1 – Ferramenta de torneamento externo	103
3.1.1	Resultados do Estudo 1 – Ferramenta de torneamento externo	106
3.1.1.1	<i>Shunt</i> resistivo	108
3.1.1.2	<i>Shunt</i> indutivo.....	111
3.1.1.3	<i>Shunt</i> resistivo-indutivo em série.....	114
3.1.1.4	<i>Shunt</i> resistivo-indutivo em paralelo.....	117
3.1.2	Diagramas dos lóbulos de estabilidade	120
3.2	Estudo 2 – Ferramenta de torneamento interno com comprimento de 350 mm	123
3.2.1	Identificação experimental das frequências naturais - ferramenta de torneamento interno com comprimento de 350 mm.....	125
3.2.2	– Modelo eletromecânico de parâmetros distribuídos - ferramenta de torneamento interno com comprimento de 350 mm.....	131
3.2.2.1	<i>Shunt</i> resistivo	133

3.2.2.2	<i>Shunt</i> indutivo	134
3.2.2.3	<i>Shunt</i> resistivo-indutivo em série	135
3.2.2.4	<i>Shunt</i> resistivo-indutivo em paralelo	136
3.2.2.5	Comparação de desempenho em <i>shunts</i> resistivo e resistivo-indutivo	137
3.2.3	Teste de impacto com <i>shunts</i> passivos.....	139
3.2.4	Lóbulos de estabilidade.....	140
3.2.5	Testes de usinagem – ferramenta de torneamento interno com comprimento de 350 mm	142
3.3	Estudo 3 – ferramenta de torneamento interno com comprimento de 270 mm	144
3.3.1	Obtenção das frequências de ressonância dos suportes de ferramenta.	145
3.3.2	– Modelo eletromecânico de parâmetros distribuídos - ferramenta de torneamento interno com comprimento de 350 mm	149
3.3.2.1	<i>Shunt</i> resistivo	151
3.3.2.2	<i>Shunt</i> indutivo	152
3.3.2.3	<i>Shunt</i> resistivo-indutivo em série	153
3.3.2.4	<i>Shunt</i> resistivo-indutivo em paralelo	154
3.3.2.5	Comparação de desempenho em <i>shunts</i> resistivo e resistivo-indutivo	155
3.3.3	Teste de impacto com <i>shunts</i> passivos.....	156
3.3.4	Diagrama dos lóbulos de estabilidade.....	157
3.3.5	Testes de usinagem – ferramenta de torneamento interno com comprimento de 350 mm	158
4	Conclusões	159
4.1	Propostas de trabalhos futuros.....	160
5	Bibliografia	163

APÊNDICE A - Dimensionamento e implementação de indutores sintéticos	
.....	175

1 Introdução

A usinagem continua sendo o principal meio de obtenção de peças metálicas, respondendo por cerca de cinquenta por cento dos processos de manufatura, e espera-se que continue sendo durante as próximas décadas (Cheng, 2009).

Nesse contexto, os processos de usinagem podem representar um importante papel nos níveis de competitividade das empresas, desde aspectos técnicos, tais como precisão dimensional e qualidade superficial, até aspectos econômicos, como preço dos produtos.

Além destes fatores, o tempo de entrega dos pedidos é cada vez mais importante para o consumidor no momento de decidir qual será seu fornecedor. Dessa forma, as empresas precisam fazer mais peças em um tempo menor para sobreviver no mercado. Para tanto, a taxa de remoção de material durante a usinagem precisa ser cada vez maior.

Contudo, na busca por altas taxas de remoção de material durante a usinagem de peças, podem surgir vibrações autoexcitadas (*chatter*) devido a parâmetros de corte agressivos (Rao e Shin, 1999), tais como altas velocidades de corte e de avanço e também grandes profundidades de corte.

O *chatter*, por sua natureza vibratória, é extremamente prejudicial à qualidade da peça, podendo comprometer tanto as tolerâncias dimensionais quanto o acabamento superficial da mesma. Além disso, as ferramentas de corte e a própria máquina-ferramenta também podem ser danificadas quando sujeitas ao *chatter*. Outro problema, desta vez relacionado ao ambiente de trabalho, é o ruído desagradável e por vezes intenso causado pelo *chatter*. Em vista de tudo isso, torna-se evidente a necessidade de se evitar, ou ao menos diminuir a níveis aceitáveis, o *chatter* em processos de usinagem, de maneira que vários pesquisadores se dedicaram a esta tarefa ao longo dos anos (Altintas e Weck, 2004; Quintana e Ciurana, 2011), desde os trabalhos de Tobias e Fishwick (1958a), Tlustý e Poláček (1963) e Merrit (1965), nos quais foram apresentadas as primeiras teorias sobre o *chatter* e o uso dos diagramas de lóbulos de estabilidade.

O entendimento do *chatter* possibilitou a identificação de condições de usinagem as quais seriam mais suscetíveis ao aparecimento do mesmo. No entanto,

há dois problemas em se fazer isso: em primeiro lugar, a identificação freqüentemente se dá por tentativa e erro ou se baseia na experiência do operador de máquina (Andrén *et al.*, 2003); em segundo lugar, ao evitar tais condições de usinagem, a produtividade da máquina poderia ser limitada pelo uso de parâmetros de corte conservativos (Rao e Shin, 1999; Mahdavinejad, 2005), embora as novas máquinas ofereçam velocidades e potência cada vez maiores (Yue, 2006), ocasionando prejuízos econômicos.

O uso de um controle eficaz para suprimir ou diminuir significativamente o *chatter* passou então a ser objeto de estudo de cientistas interessados em possibilitar que as máquinas-ferramenta pudessem operar sem restrições impostas pelas vibrações de usinagem (Altintas e Weck, 2004; Quintana e Ciurana, 2011). No entanto, o uso de controle requer elementos no sistema que exerçam a função de atuador e de sensor, assim como ocorre em um material piezelétrico.

Devido à flexibilidade associada aos materiais piezelétricos, o seu uso como coletor de energia (*energy harvesting*) se torna muito atrativo (Anton e Sodano, 2007), uma vez que podem desempenhar ambas as funções de atuador e sensor. Além disso, os materiais atuadores piezelétricos (ou piezoatuadores) possuem a característica de terem um tempo de resposta reduzido quando sujeitos a uma tensão elétrica, atingindo acelerações maiores que dez gravidades (Pan e Su, 2001).

Em virtude disso, nos últimos anos, surgiram várias pesquisas com o objetivo de controlar o nível de vibração nas mais diversas estruturas usando materiais piezelétricos, os quais transformam a energia mecânica oriunda da vibração em energia elétrica (Sodano *et al.*, 2004; Anton e Sodano, 2007; Saadon e Sidek, 2011) e, especificamente, em processos de usinagem (Park *et al.*, 2007).

1.1 Objetivos

O trabalho proposto tem o objetivo de:

1. Oferecer um meio de alterar a dinâmica estrutural de suportes de ferramenta de torneamento usando material piezelétrico associado a *shunts* elétricos para atenuar passivamente vibrações em usinagem.

2. Criar um modelo eletromecânico de parâmetros distribuídos capaz de atenuar vibrações em processos de torneamento por meio do uso de *shunts* passivos.

1.2 Estrutura do trabalho

Este trabalho é composto por seis capítulos:

- O Capítulo 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA – apresenta a base teórica relevante para o bom entendimento deste documento.
- No Capítulo 3 – ESTUDOS E DISCUSSÕES – encontram-se, detalhados, os materiais, métodos, critérios e equipamentos empregados para a confecção deste trabalho, bem como os resultados e as discussões sobre os mesmos.
- O Capítulo 4 – CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS – expõe as conclusões sobre os trabalhos realizados e as sugestões de ações para completar o trabalho futuramente.
- No Capítulo 5 – REFERÊNCIAS – estão listadas as fontes consultadas e citadas para a confecção deste trabalho.

2 Revisão bibliográfica

2.1 Mecânica da usinagem dos metais

A usinagem dos metais com ferramentas de corte de geometria definida pode ser estudada por meio de dois modelos principais: o modelo de corte ortogonal e o modelo de corte oblíquo.

2.1.1 Mecânica do corte ortogonal estático

Embora a maioria das operações de usinagem formem cavacos por meio do corte oblíquo, o qual ocorre em três dimensões, muitos autores utilizam o caso particular do corte ortogonal para explicar o processo de formação de cavaco e também para realizar vários experimentos e obter resultados, adaptando-os ao corte oblíquo. No corte ortogonal, a aresta de corte é representada por uma reta e é normal à direção de corte e à direção de avanço, permitindo que a formação do cavaco possa ser estudada como um fenômeno bidimensional e que ocorre em um plano normal à aresta cortante (Boothroyd e Knight, 1989).

Um dos modelos pioneiros sobre o corte ortogonal foi desenvolvido por Ernst e Merchant (1941), citado por Armarego e Brown (1969) e Boothroyd e Knight (1989), o qual assume que a zona de cisalhamento primária seja tão fina quanto um plano e que as tensões de cisalhamento (τ_{sh}) e normal sejam constantes e, a partir dessas considerações, obtém relações entre ângulos, forças e velocidades. A Figura 2.1 e a Figura 2.2 mostram os diagramas de geometria, força e velocidade para o corte ortogonal, além dos diagramas de tensão por cisalhamento.

Figura 2.1 - Modelo de Ernst e Merchant para o corte ortogonal (Adaptado de Astakhov, 2006)

Figura 2.2 - Modelo de Ernst e Merchant simplificado para o corte ortogonal (Cervelin, 2009)

De acordo com o diagrama de forças, a força de usinagem (F_u) é formada pelas forças de avanço (F_f) e de corte (F_c):

$$F_u = \sqrt{F_c^2 + F_f^2} \quad (2.1)$$

Na zona de deformação secundária há a atuação das forças tangencial (força aparente de atrito) (F_γ) e normal $(F_{\gamma N})$ à superfície de saída da ferramenta, dadas por:

$$F_\gamma = F_c \sin(\gamma) + F_f \cos(\gamma) \quad (2.2)$$

$$F_{\gamma N} = F_c \cos(\gamma) - F_f \sin(\gamma), \quad (2.3)$$

nas quais γ é o ângulo de saída da ferramenta.

O coeficiente de atrito médio (μ) sobre a superfície de saída é definido por:

$$\mu = \tan(\beta) = \frac{F_\gamma}{F_{\gamma N}} \quad (2.4)$$

em que β é o ângulo de atrito.

De acordo com a Figura 2.2, pode-se escrever o ângulo de atrito (β) em termos das forças de corte (F_c) e de avanço (F_f) :

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{F_f}{F_c}\right) - \gamma \quad (2.5)$$

E as forças de corte (F_c) e de avanço (F_f) também podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} F_c &= F_u \cos(\beta - \gamma) \\ F_f &= F_u \sin(\beta - \gamma) \end{aligned} \quad (2.6)$$

O ângulo de cisalhamento (ϕ) é dado por:

$$\phi = \frac{\pi}{4} - \frac{(\beta - \gamma)}{2} \quad (2.7)$$

Admitindo que haja uma distribuição uniforme de tensões sobre o plano de cisalhamento, é possível descrever a tensão de cisalhamento (τ_{sh}) pela relação:

$$\tau_{sh} = \frac{F_{sh}}{bh} \quad (2.8)$$

na qual F_{sh} é a força de cisalhamento, b é a largura de corte e h é a espessura de corte.

A força de cisalhamento F_{sh} pode ser obtida das relações trigonométricas da Figura 2.2, resultando na seguinte relação:

$$F_{sh} = F_u \cos(\phi + \beta - \gamma) \quad (2.9)$$

2.1.2 Mecânica do corte oblíquo estático

Há vários modelos publicados sobre a mecânica do corte oblíquo, entre os quais Luk (1970), Grzesik (1990), Moufki (Moufki, 2000) e Kaymakci et al.(2012).

Porém, o modelo adotado e apresentado a seguir, proposto por Altintas (2012) possui a vantagem de considerar o corte oblíquo de forma similar ao ortogonal, exceto pelo ângulo de inclinação i da aresta de corte da ferramenta em relação à velocidade de avanço da mesma, conforme a Figura 2.3.

Esse ângulo provoca alterações nos ângulos do plano de cisalhamento, nas direções das forças e da saída do cavaco e do ângulo de atrito e essas mudanças fazem com que o corte oblíquo deva ser expresso em um sistema tridimensional ao invés de usar um único plano como no corte ortogonal.

Figura 2.3 - Geometria do corte oblíquo (Adaptado de Altintas, 2012)

O eixo y é alinhado com a aresta de corte e o eixo x perpendicular à mesma aresta, enquanto que o eixo z é normal ao plano xy .

A Figura 2.4 mostra de forma detalhada a posição de diversos ângulos usados no estudo do corte oblíquo, bem como forças, velocidades, eixos e os planos em que estão localizados.

Figura 2.4 - Diagramas de força, velocidade e cisalhamento no corte oblíquo (Adaptado de Shamoto e Altintas, 1999)

O plano normal (P_n), definido pelo plano normal à aresta de corte e com inclinação i em relação à velocidade de corte (V_c), ou simplesmente pelo plano xz , é importante, pois nele se encontram projetadas as forças e velocidades do corte oblíquo (Shamoto e Altintas, 1999).

O ângulo entre o plano de cisalhamento e a superfície usinada (plano xy) é chamado ângulo de cisalhamento normal (ϕ_n). A velocidade de cisalhamento (V_{sh}) está sobre o plano de cisalhamento, mas tem um ângulo de cisalhamento oblíquo (ϕ_i) em relação ao vetor normal à aresta de corte projetado no plano normal. O cavaco move-se com velocidade V_{cav} sobre a superfície de saída da ferramenta com um ângulo de escoamento do cavaco (η) medido de um vetor localizado sobre a superfície de saída, o plano normal e normal à aresta de corte. A força de atrito (F_γ) entre o cavaco e a superfície de saída é colinear com a direção do escoamento do cavaco. O ângulo entre o eixo z e o vetor normal sobre a superfície de saída é definido como ângulo de saída normal (γ_n). A força aparente de atrito (F_γ) sobre a superfície de saída e a força normal ($F_{\gamma N}$) à mesma superfície resultam na força de usinagem (F_u) com o ângulo de atrito β_a . A força de usinagem tem um ângulo de projeção de θ_i com o plano normal e essa projeção possui um ângulo de $\theta_n + \gamma_n$ com $F_{\gamma N}$ e um ângulo de θ_n com o eixo x .

Isto posto, pode-se chegar às seguintes relações:

$$F_\gamma = F_u \sin(\beta_a) = F_u \frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\eta)} \rightarrow \sin(\theta_i) = \sin(\beta_a) \sin(\eta) \quad (2.10)$$

$$F_\gamma = F_{\gamma N} \tan(\beta_a) = F_{\gamma N} \frac{\tan(\theta_n + \gamma_n)}{\cos(\eta)} \rightarrow \tan(\theta_n + \gamma_n) = \tan(\beta_a) \cos(\eta) \quad (2.11)$$

As velocidades do cavaco ($\vec{V}_{cav}$), cisalhamento ($\vec{V}_{sh}$) e de corte ($\vec{V}_c$) podem ser decompostas em coordenadas cartesianas, como segue:

$$\begin{aligned} \vec{V}_c &= (V_c \cos i, & V_c \sin i, & 0) \\ \vec{V}_{cav} &= (V_{cav} \cos \eta \sin \gamma_n, & V_{cav} \sin \eta, & V_{cav} \cos \eta \cos \gamma_n) \\ \vec{V}_{sh} &= (-V_{sh} \cos \theta_i \cos \theta_n, & -V_{sh} \sin \theta_i, & V_{sh} \cos \theta_i \sin \theta_n) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Resolvendo esse sistema chega-se em:

$$\tan \eta = \frac{\tan i \cos(\theta_n - \gamma_n) - \cos \gamma_n \tan \phi_i}{\sin \phi_n} \quad (2.13)$$

Essas relações definem a geometria do corte oblíquo, porém há três equações ((2.10), (2.11) e (2.13)) e cinco incógnitas ($\theta_n, \theta_i, \phi_n, \phi_i$ e η).

Visando resolver este problema, Armarego e Whitfield (1985) apresentaram um modelo empírico baseado em duas hipóteses: a velocidade de cisalhamento é colinear com a força de cisalhamento e a razão entre o comprimento do cavaco é a mesma do corte ortogonal. Da primeira hipótese, assumindo a condição de força de cisalhamento máximo proposto por Stabler (1964), chega-se na seguinte relação:

$$\tan(\phi_n + \beta_n) = \frac{\cos \gamma_n \tan i}{\tan \eta - \sin \gamma_n \tan i}, \quad (2.14)$$

na qual β_n é o ângulo de atrito oblíquo, definido por:

$$\tan(\beta_n) = \tan(\beta_a) \cos(\eta), \quad (2.15)$$

em que β_a é o ângulo de atrito.

As observações experimentais sobre a geometria de cavacos levaram os autores Armarego e Whitfield (1985) a escrever a seguinte expressão que define o ângulo de cisalhamento normal (ϕ_n):

$$\tan(\phi_n) = \frac{r_c (\cos \eta / \cos i) \cos(\gamma_n)}{1 - r_c (\cos \eta / \cos i) \sin(\gamma_n)}, \quad (2.16)$$

na qual r_c é a razão entre a profundidade de corte (h) e a espessura do cavaco (h'), ou seja:

$$r_c = \frac{h}{h'} \quad (2.17)$$

Aqui se define o grau de recalque (R_c) como o inverso de r_c , ou seja:

$$R_c = \frac{1}{r_c} = \frac{h'}{h} \quad (2.18)$$

Por meio de iterações numéricas, pode-se resolver as equações (2.14), (2.15) e (2.16) para a obtenção dos ângulos η , β_n e ϕ_n .

Para evitar o uso de iterações, Altintas (2012) recorre novamente a Stabler (1964) e passa a considerar o ângulo de escoamento do cavaco (η) igual ao ângulo de inclinação (i).

Com isso, o corte oblíquo passa a se comportar como o corte ortogonal, porém rotacionado com o ângulo de inclinação i e com uma força normal (F_r) à aresta de corte, e as forças atuantes no sistema oblíquo podem ser derivadas da força de usinagem (F_u) por meio de relações trigonométricas, em função do ângulo de inclinação (i), do ângulo de cisalhamento oblíquo (ϕ_n), do ângulo de escoamento do cavaco (η), do ângulo de saída normal (γ_n), do ângulo de atrito oblíquo (β_n), da tensão de cisalhamento (τ_{sh}), da espessura de corte (h) e da espessura do cavaco (h').

As componentes da força de usinagem (F_u) são projeções da própria força nas direções da velocidade de corte ou tangencial (F_{tc}), da velocidade de avanço (F_{tf}) e normal ou radial (F_{rc}) e são descritas na Equação (2.19).

$$\begin{aligned}
 F_{tc} &= F_u (\cos \theta_i \cos \theta_n \cos i + \sin \theta_i \sin i) \\
 &= \frac{\tau_{sh} b h (\cos \theta_n + \tan \theta_i \tan i)}{[\cos(\theta_n + \cos \phi_n) \cos \phi_i + \tan \theta_i \sin \theta_i] \sin \phi_n} \\
 F_{tc} &= F_u \cos \theta_i \sin \theta_n \\
 &= \frac{\tau_{sh} b h \sin \theta_n}{[\cos(\theta_n + \cos \phi_n) \cos \phi_i + \tan \theta_i \sin \theta_i] \cos i \sin \phi_n} \\
 F_{rc} &= F_u (\sin \theta_i \cos i - \cos \theta_i \cos \theta_n \sin i) \\
 &= \frac{\tau_{sh} b h (\tan \theta_i - \cos \theta_n \tan i)}{[\cos(\theta_n + \cos \phi_n) \cos \phi_i + \tan \theta_i \sin \theta_i] \sin \phi_n}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Além disso, o ângulo de atrito (β_a) para corte oblíquo pode ser definido da mesma maneira que no corte ortogonal, por meio da Equação (2.4), assim como a tensão de cisalhamento pode ser definida pela Equação (2.8), válida também para o corte ortogonal.

Aplicando essas hipóteses ao modelo de forças proposto por Armarego e Whitfield (1985), (Altintas 2012) apresenta as seguintes equações de força para o corte oblíquo:

$$\begin{aligned}
 F_{tc} &= bh \left[\frac{\tau_{sh}}{\sin \phi_n} \frac{\cos(\beta_n - \gamma_n) + \tan i \tan \eta \sin \beta_n}{\sqrt{\cos^2(\phi_n + \beta_n - \gamma_n) + \tan^2 \eta \sin^2 \beta_n}} \right] \\
 F_{fc} &= bh \left[\frac{\tau_{sh}}{\sin \phi_n \cos i} \frac{\sin(\beta_n - \gamma_n)}{\sqrt{\cos^2(\phi_n + \beta_n - \gamma_n) + \tan^2 \eta \sin^2 \beta_n}} \right] \\
 F_{rc} &= bh \left[\frac{\tau_{sh}}{\sin \phi_n} \frac{\cos(\beta_n - \gamma_n) \tan i - \tan \eta \sin \beta_n}{\sqrt{\cos^2(\phi_n + \beta_n - \gamma_n) + \tan^2 \eta \sin^2 \beta_n}} \right]
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

2.1.3 Modelo mecanístico das forças de corte

O modelo de Ernst e Merchant (1941), bem como outros modelos analíticos, fornece resultados satisfatórios apenas em situações experimentais muito específicas, fato que incentivou alguns autores a desenvolver diferentes modelos para descrever a força de corte.

Alguns desses modelos são classificados como mecanísticos, nos quais a força de corte é considerada como sendo proporcional à área da seção do cavaco e são válidos tanto para corte ortogonal quanto para oblíquo. A constante de proporcionalidade é chamada de *pressão específica de corte* e depende das condições de corte, da geometria da ferramenta e do material da peça, além de ser obtida experimentalmente.

A equação típica de um modelo mecanístico é:

$$F = Kbh \quad , \tag{2.21}$$

na qual F é a força [N], K é a pressão específica de corte [N/mm²], h é a e de corte [mm] e b a largura de corte [mm].

Sendo assim, a Equação (2.20) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 F_{tc} &= bhK_{tc} \\
 F_{fc} &= bhK_{fc} \quad , \\
 F_{tr} &= bhK_{rc}
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

em que as constantes são definidas por (Altintas, 2012):

$$\begin{aligned}
 K_{tc} &= \frac{\tau_{sh}}{\sin \phi_n} \frac{\cos(\beta_n - \gamma_n) + \tan i \tan \eta \sin \beta_n}{\sqrt{\cos^2(\phi_n + \beta_n - \gamma_n) + \tan^2 \eta \sin^2 \beta_n}} \\
 K_{fc} &= \frac{\tau_{sh}}{\sin \phi_n \cos i} \frac{\sin(\beta_n - \gamma_n)}{\sqrt{\cos^2(\phi_n + \beta_n - \gamma_n) + \tan^2 \eta \sin^2 \beta_n}} \\
 K_{rc} &= \frac{\tau_{sh}}{\sin \phi_n} \frac{\cos(\beta_n - \gamma_n) \tan i - \tan \eta \sin \beta_n}{\sqrt{\cos^2(\phi_n + \beta_n - \gamma_n) + \tan^2 \eta \sin^2 \beta_n}}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Todavia, em experimentos para medição das forças de corte, há uma parcela das mesmas causada por outros fatores que não o cisalhamento do material, mas sim por efeitos ocasionados pela aresta de corte, tais como atrito na superfície usinada e o efeito de recalçamento (*ploughing*) (Gonzalo *et al.*, 2010).

Portanto, a expressão para as forças de corte pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 F_c &= K_{tc}bh + K_{te}b \\
 F_f &= K_{fc}bh + K_{fe}b, \\
 F_r &= K_{rc}bh + K_{re}b
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

em que K_{te} , K_{fe} e K_{re} são constantes de força relacionadas à aresta de corte.

2.2 Mecânica do processo de torneamento

O processo de torneamento é usado principalmente para a confecção de peças cilíndricas de revolução. Em uma operação usual de torneamento, a peça é rotacionada pelo eixo-árvore e uma ferramenta de corte se move longitudinal e/ou transversalmente em relação à peça, criando o perfil desejado (Figura 2.5).

Figura 2.5 - Mecânica do processo de torneamento (Adaptado de Altintas, 2012)

As forças de corte envolvidas no processo de torneamento dependem dos ângulos da ferramenta de corte usada na usinagem. A definição dos ângulos da ferramenta de corte e os relativos ao processo seguem o estipulado pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) (2013), conforme a Figura 2.6 e a Figura 2.7.

Figura 2.6 - Geometria da ferramenta de corte de torneamento em perspectiva (Adaptado de Altintas, 2012)

Figura 2.7 - Geometria da ferramenta de corte de torneamento (adaptado de Tschätsch, 2008)

Pode-se, a partir das duas últimas figuras (Figura 2.6 e Figura 2.7), definir os seguintes ângulos (Altintas, 2012), mostrados na Equação (2.25):

$$\begin{aligned} \tan \gamma_o &= \tan \gamma_f \cos \psi_r + \tan \gamma_p \sin \psi_r \\ \tan i &= \tan \gamma_p \cos \psi_r + \tan \gamma_f \sin \psi_r \\ \tan \gamma_n &= \tan \gamma_o \cos i \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde i , γ_n e γ_o são, respectivamente, os ângulos equivalente oblíquo, de saída normal e de saída ortogonal. Os dois primeiros devem ser calculados antes de serem usados na Equação (2.20). O motivo do cálculo dessas variáveis é o fato da ferramenta apresentar os ângulos de saída lateral e dorsal. O ângulo de escoamento do cavaco, contudo, continua assumido como sendo igual ao ângulo oblíquo.

Outra forma de expressar o ângulo de posição complementar (ψ_r) é por meio da seguinte relação, de acordo com a ABNT (2013):

$$\psi_r = 90^\circ - \kappa_r \quad (2.26)$$

2.2.1 Previsão das forças de usinagem em torneamento

O conhecimento da força de usinagem que age sobre a cunha cortante e o estudo de seus componentes são importantes por possibilitarem a estimativa da

potência necessária para o corte, as forças atuantes sobre a ferramenta e a máquina e pela mesma ser relacionada com o desgaste das ferramentas de corte, influenciando a viabilidade econômica do processo (Machado *et al.*, 2011).

O modelo de força usado neste trabalho foi proposto por Altintas (2012) e também foi usado por Sortino *et al.* (2012). A Figura 2.8 mostra tal modelo.

Figura 2.8 - Mecânica do torneamento com ferramenta de ponta arredondada

O processo pode ser explicado tomando-se uma ferramenta raio de ponta r , ângulo de saída lateral γ_f e ângulo de saída dorsal γ_p . A peça tem um diâmetro inicial d e a profundidade de corte a é maior que o raio de ponta (r). A velocidade de

avanço (V_f) corresponde ao trajeto linear percorrido durante uma revolução do eixo-árvore (c).

O cavaco possui espessura uniforme na região I, onde a profundidade radial é menor que o raio (r), ou seja, $a < 2r$.

Por outro lado, na região II o cavaco possui uma espessura variante devido ao raio de ponta da ferramenta.

Usando a Equação (2.24) podemos calcular separadamente as forças de corte nas regiões I e II, como segue:

Região I: A espessura do cavaco é constante e equivale ao avanço da ferramenta ($h = c$) enquanto a largura do cavaco é definida pela profundidade de corte descontada do raio ($b = a - r$). As forças de corte nas direções x, y e z coincidem (são paralelas), respectivamente, às forças de corte F_c, F_r e F_f do modelo oblíquo, as quais podem então ser escritas como:

$$\begin{aligned} F_{x1} = F_{c1} &= K_{tc}c(a - r) + K_{te}(a - r) \\ F_{y1} = F_{r1} &= K_{rc}c(a - r) + K_{re}(a - r) , \\ F_{z1} = F_{f1} &= K_{fc}c(a - r) + K_{fe}(a - r) \end{aligned} \quad (2.27)$$

desde que o ângulo de posição complementar da ferramenta (ψ_r) seja igual a zero.

As forças de corte podem ser previstas ao se aplicar os dados da ferramenta na Equação (2.25) para obter os parâmetros de corte oblíquo e usar tais resultados na Equação (2.23) com a finalidade de se obter as constantes de pressão específica de corte.

O ângulo de atrito (β_n) também deve ser calculado com o novo valor do ângulo de inclinação (i) proveniente da equação (2.25), tal como segue:

$$\beta_n = \tan^{-1}(\tan \beta_a \cos i) \quad (2.28)$$

A força de aresta K_{re} pode ser considerada igual a zero pelo fato da mesma teoricamente não existir no modelo de corte ortogonal (Altintas, 2012).

Região II: Nessa região a espessura do cavaco diminui continuamente devido ao raio de ponta da ferramenta e as forças de corte oblíquo mudam de direção sobre o segmento curvado do cavaco. Para descrever tal efeito, dividiu-se os elementos do cavaco em elementos diferenciais com incremento angular $d\theta$. O centro de curvatura do cavaco do passe atual é O , enquanto que o do passe anterior é O'' . O comprimento de contato da ferramenta com a peça é definido pelo segmento de curva entre o ponto C e B , ou seja, o contato angular é da do por $\angle COB = \theta_0$.

Dessa forma, a área diferencial (dA) do cavaco pode ser aproximada por:

$$dA \approx \overline{AT} dS \quad (2.29)$$

em que $dS = r d\theta$, $\overline{AT} = \overline{AO} - \overline{TO}$, $\overline{OO''} = c$, $\overline{TO''} = r$ e

$$\overline{TO} = \sqrt{c^2 + r^2 - 2cr \cos \alpha} \quad (2.30)$$

Aplicando a lei dos senos:

$$\frac{\overline{OO''}}{\sin[\pi - (\pi - \theta + \alpha)]} = \frac{\overline{TO''}}{\sin(\pi - \theta)}, \quad (2.31)$$

a seguinte relação é encontrada:

$$\alpha = \theta - \sin^{-1} \left[\frac{c}{r} \sin(\pi - \theta) \right]. \quad (2.32)$$

A espessura instantânea do cavaco na posição definida pelo ângulo θ é dada por:

$$\overline{AT} = h(\theta) = r - \sqrt{c^2 + r^2 - 2cr \cos \alpha}, \quad (2.33)$$

e a área diferencial correspondente é:

$$dA_i = h(\theta) r d\theta. \quad (2.34)$$

Então as forças de corte (dF_{cII}), radial (dF_{rII}) e de avanço (dF_{fII}) agindo sobre cada elemento diferencial do cavaco são dadas por:

$$\begin{aligned}
(dF_{cII}) &= K_{cc}(\theta)dA + K_{tc}dS = [K_{tc}(\theta)h(\theta) + K_{ce}]rd\theta \\
(dF_{rII}) &= K_{rc}(\theta)dA + K_{re}dS = [K_{rc}(\theta)h(\theta) + K_{re}]rd\theta \quad . \\
(dF_{fII}) &= K_{fc}(\theta)dA + K_{fe}dS = [K_{fc}(\theta)h(\theta) + K_{fe}]rd\theta
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Devido ao fato da variação dos dados de entrada para a Equação (2.25) em função do ângulo θ , os coeficientes de força deverão ser calculados para cada elemento diferencial para a obtenção das forças de corte. Além disso, o valor do ângulo de posição complementar (ψ_r) assume o valor instantâneo de θ em cada um desses elementos quando se calcula i , γ_n e γ_o pela Equação (2.25). As forças na aresta de corte são consideradas como sendo iguais às obtidas em testes de ensaio ortogonais e, novamente, K_{re} é igual a zero.

As forças de corte instantâneas podem ser representadas nas direções x , y e z pela seguinte relação:

$$\begin{aligned}
dF_{xII} &= dF_{cII} \\
dF_{yII} &= -dF_{fII} \sin \theta + dF_{rII} \cos \theta \quad . \\
dF_{zII} &= dF_{fII} \cos \theta + dF_{rII} \sin \theta
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Integrando as forças de corte diferenciais ao longo da superfície curvada do cavaco tem-se o total das forças de corte na região II :

$$F_{qII} = \int_0^{\theta_0} dF_{qII} \quad , \quad q = x, y, z \quad , \tag{2.37}$$

na qual o limite do ângulo ψ_r é $\theta_0 = \pi - \cos^{-1}(c/2r)$

Nota-se que não é um cálculo trivial, por isso é mais prático adotar um coeficiente médio de pressão específica de corte assumindo um ângulo ψ_r igual a $\pi/2$ para ser usado nos cálculos anteriores ou por meio de cálculos computacionais. Se o cavaco for dividido em pequenas partes de K ($K = \theta_0 / \Delta\theta$), as forças presentes em cada uma dessas partes podem ser calculadas e somadas numericamente:

$$F_{qII} = \sum_{k=0}^K dF_{qII} \quad , \quad q = x, y, z \quad , \tag{2.38}$$

em que o ângulo ψ_r instantâneo é $\theta_k = k\Delta\theta$.

O total das forças de corte agindo sobre a ferramenta é igual à soma das regiões I e II:

$$F_q = F_{qI} + F_{qII}, \quad q = x, y, z \quad (2.39)$$

A partir das forças, pode-se calcular o torque (T [Nm]) e a potência (P [W]) envolvidos no processo de torneamento:

$$T = F_x \left(\frac{d-a}{2} \right), \quad P = F_x V_c \quad (2.40)$$

A amplitude das marcas deixadas na peça (R_s) (Figura 2.8) é função da velocidade de avanço e do raio de ponta da ferramenta, definida como:

$$R_s = r \left(1 - \cos \left(\sin^{-1} \left(\frac{V_f}{2r} \right) \right) \right) \quad (2.41)$$

Análises similares com outras ferramentas de corte podem ser feitas segundo este modelo apresentado.

As previsões de forças e coeficientes de corte e potência de usinagem são importantes para o dimensionamento de máquinas-ferramenta, seleção de ferramentas de corte, velocidade e profundidade de corte e, também, evitar quebras de ferramentas e vibrações autoexcitadas (*chatter*).

2.3 O sistema máquina-ferramenta-peça

Uma vez que este trabalho visa o estudo e controle de vibrações em torneamento, é importante haver uma definição sobre a constituição do sistema a ser considerado.

Segundo Altintas (2012), a estrutura de uma máquina-ferramenta é constituída por três grupos principais, sejam eles: a estrutura mecânica, os acionamentos (*drives*) e o sistema de controle. A estrutura mecânica é composta de partes estacionárias, tais como a base e coluna, e por partes móveis, como mesas, eixo-árvore, engrenagens e rolamentos. Os acionamentos englobam os motores que

movimentam as partes móveis da estrutura mecânica. O sistema de controle, formado por computadores, chaves e amplificadores, deve determinar quando e como devem funcionar os acionamentos da máquina-ferramenta.

Do ponto de vista da usinagem, a principal função de uma máquina-ferramenta é controlar com precisão o ponto de contato entre a ferramenta de corte e o material a ser removido da peça (Altintas, 2012). Portanto, o sistema de interesse para este estudo é constituído pela ferramenta de corte (fixada no suporte de ferramenta) e pela peça a ser usinada (Cheng, 2009; Schmitz e Smith, 2009).

O projeto das peças estruturais de uma máquina-ferramenta deve ser feito de modo que as mesmas apresentem alta rigidez, amortecimento e estabilidade térmica (Cheng, 2009), porém é a estrutura completa da máquina-ferramenta que determinará o desempenho dos processos de usinagem (Altintas, 2012).

A rigidez pode ser definida como a capacidade da estrutura de resistir à deformação ou de manter sua posição quando submetida a cargas (Schmitz e Smith, 2009) e o amortecimento é a capacidade da estrutura em atenuar ou eliminar uma perturbação sofrida.

O sistema máquina-ferramenta-peça pode ser representado por vários corpos conectados entre si que possuem massa, elasticidade e amortecimento. Neste caso, a vibração sobre esses corpos pode ser dividida em três categorias principais: vibrações livres, forçadas e autoexcitadas (Schmitz e Smith, 2009).

2.4 Vibrações mecânicas

2.4.1 Vibrações livres com um grau de liberdade

Uma estrutura simples com um grau de liberdade (GDL) pode ser modelada por meio de uma combinação de três elementos: massa (m) [kg], rigidez da mola (k) [N/m] e pela constante de proporcionalidade de amortecimento (c) [Ns/m], observada na Figura 2.9 e representada pela Equação (2.42).

Figura 2.9 – Sistema massa, mola e amortecedor (Adaptado de He e Fu, 2001)

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f_0(t) \quad . \quad (2.42)$$

Se o sistema da Figura 2.9 estiver em equilíbrio e então for retirado dessa condição estaticamente, o sistema experimentará vibrações livres (He e Fu, 2001) e a Equação (2.42) pode ser reescrita da seguinte maneira, considerando o amortecimento c e a força $f_0(t)$ iguais a zero:

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0, \quad (2.43)$$

e a solução da equação diferencial (2.43), quando supondo soluções do tipo $x(t) = Xe^{st}$ e $s = j\omega$, é:

$$x(t) = \sqrt{\frac{x_0^2 \omega_n^2 + \dot{x}_0^2}{\omega_n^2}} \cos\left(\omega_n t + \tan^{-1}\left(-\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n}\right)\right) \quad (2.44)$$

ou

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \text{sen}(\omega_n t), \quad (2.45)$$

nas quais ω_n [rad/s] é a chamada frequência natural de oscilação do sistema e é definida pela razão da rigidez pela massa, de acordo com a Equação (2.46), x_0 e $\dot{x}_0$ são, respectivamente, o deslocamento inicial e a velocidade inicial da massa m (Ewins, 2000; Giurgiutiu, 2008; Piersol e Paez, 2010).

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.46)$$

Em ambas as equações (2.44) e (2.45), é possível verificar a natureza oscilatória do sistema massa-mola.

Refazendo o mesmo procedimento anterior, mas considerando o elemento de amortecimento da estrutura, temos a seguinte relação:

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m} \dot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0 . \quad (2.47)$$

Buscando, novamente, por soluções do tipo $x_{(t)} = X e^{st}$ e $s = j\omega$, a Equação (2.47) pode ser reescrita como:

$$X e^{st} \left(s^2 + s \frac{c}{m} + \frac{k}{m} \right) = 0, \quad (2.48)$$

e as raízes da Equação (2.48), para solução não trivial, são dadas por (Inman, 2006):

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} . \quad (2.49)$$

Neste ponto, torna-se conveniente a definição de taxa ou coeficiente de amortecimento ζ , adimensional e sempre menor que o valor unitário em estruturas mecânicas, de acordo com a Equação (2.50):

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} . \quad (2.50)$$

A frequência natural amortecida ou de ressonância (ω_d) é dada por:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} . \quad (2.51)$$

Rescrevendo as Equações (2.47) e (2.49) em função de ζ e ω_n , tem-se, respectivamente:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0 \quad (2.52)$$

e

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.53)$$

A solução geral para a Equação (2.52) é:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(C_1 e^{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} t} + C_2 e^{-\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} t} \right), \quad (2.54)$$

em que C_1 e C_2 são constantes determinadas pelas condições iniciais do sistema.

Observa-se que, dependendo dos valores de m , c e k , o sistema poderá experimentar três tipos de vibrações: sobreamortecida, criticamente amortecida ou subamortecida (Schmitz e Smith, 2009).

No caso de vibração sobreamortecida, o valor do radical é positivo ($\zeta^2 > 1$), implicando em duas raízes reais negativas e distintas e uma resposta amortecida exponencialmente e não oscilatória (Inman, 2006).

Figura 2.10 – Caso Sobreamortecido (Adaptado de Inman, 2006)

Quando $\zeta^2 = 1$, tem-se o caso de vibração criticamente amortecida, representada por duas raízes reais e iguais, resultando em um amortecimento similar ao do caso sobreamortecido, porém com um amortecimento mais rápido (Figura 2.11). O amortecimento crítico representa um estado de transição entre o subamortecimento e o sobreamortecimento do sistema. O valor do coeficiente de amortecimento em que isso ocorre é chamado de coeficiente de amortecimento crítico (c_c) e é obtido quando o valor do radical da Equação (2.49) é igual a zero, ou seja:

$$c_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n \quad (2.55)$$

Figura 2.11 – Caso criticamente amortecido para várias condições iniciais de velocidade (Adaptado de Inman, 2006)

A solução do caso criticamente amortecido é:

$$x(t) = [x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_n x_0)t] e^{-\omega_n t} \quad (2.56)$$

Finalmente, há o caso subamortecido, no qual o radical é negativo ($\zeta^2 < 1$) e, portanto, as raízes do sistema são um complexo conjugado com parte real negativa. Esta situação leva o sistema a vibrações do tipo oscilatória e amortecida simultaneamente (Figura 2.12). Deve-se ressaltar que o fato do amortecimento ser geralmente baixo no suporte de ferramentas em tornos e fresadoras, esse tipo de amortecimento é o mais importante em análises de usinagem (Inman, 2006) e que, na maioria das estruturas metálicas, tem-se $\zeta < 0,05$ (Schmitz e Smith, 2009).

O período entre cada uma das ondas de vibração é dado por

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d}, \quad (2.57)$$

e é uma maneira de se avaliar a frequência natural amortecida de um sistema por meio de medições. Além disso, a constante de amortecimento pode ser obtida da relação entre a primeira e a n -ésima amplitude máxima das ondas:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi n} \ln \left(\frac{x_1}{x_n} \right) \quad (2.58)$$

Figura 2.12 – Caso Subamortecido (Altintas, 2012)

A solução não homogênea da Equação (2.52), para o caso subamortecido, é:

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left(x_0 \cos(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t) + \frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t) \right) \quad (2.59)$$

2.4.2 Vibrações forçadas com um grau de liberdade

Voltando para a Equação (2.42), havendo uma força externa $f_0(t)$ diferente de zero aplicada sobre a massa, o sistema experimentará vibrações forçadas. Geralmente, em estudos de vibração, escolhe-se a força $f_0(t)$ como uma função do tipo harmônica, impulso ou degrau.

Considerando-se que $f_{0(t)}$ seja uma função do tipo harmônica, tem-se:

$$f_0(t) = F_0 e^{j\omega t}, \quad (2.60)$$

em que F_0 representa o módulo da força de excitação e ω representa sua frequência de oscilação.

Ao se substituir a Equação (2.60) na Equação (2.42), chega-se em:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 e^{j\omega t}, \quad (2.61)$$

e as soluções desta equação são do tipo

$$x(t) = X e^{j\omega t}. \quad (2.62)$$

Substituindo a Equação (2.62) na Equação (2.61), tem-se:

$$X = \frac{F_0}{(k - \omega^2 m) + j\omega c}. \quad (2.63)$$

Reescrevendo a Equação (2.63) em termos de ζ e ω_n , tem-se:

$$X = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\omega_n\zeta} \quad (2.64)$$

ou

$$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{\underbrace{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}_{\text{Parte real}} + \underbrace{j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}_{\text{Parte imaginária}}}. \quad (2.65)$$

Torna-se conveniente escrever X em termos de módulo e fase, conforme as equações a seguir:

$$|X| = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (2.66)$$

e

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{-2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right). \quad (2.67)$$

Possibilitando definir X como sendo:

$$X = |X|e^{j\phi} . \quad (2.68)$$

O que leva a:

$$x(t) = |X|e^{j(\omega t + \phi)}, \quad (2.69)$$

na qual ϕ corresponde à diferença de fase entre excitação e resposta do sistema.

A solução geral da Equação (2.61) é dada pela soma da solução homogênea ($f_o(t) = 0$) mais a solução do caso particular de excitação:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(C_1 e^{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t} + C_2 e^{-\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t} \right) + \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}} e^{j(\omega t + \phi)} . \quad (2.70)$$

Para o caso subamortecido, a solução será:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(x_0 \cos(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t) + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} \text{sen}(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t) \right) + \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}} e^{j(\omega t + \phi)} . \quad (2.71)$$

Outra forma de definir X é separando as partes real e imaginária, resultando em:

$$\text{Re}(X) = \frac{F_0}{k} \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} ; \quad \text{Im}(X) = \frac{F_0}{k} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} , \quad (2.72)$$

tornando $X = \text{Re}(X) + j\text{Im}(X)$.

2.4.3 Função Transferência

Uma alternativa para se trabalhar com o sistema da Figura 2.9 é usando o domínio da frequência ao invés do domínio do tempo. Para tanto, a transformada de Laplace se revela uma útil ferramenta quando se trata de modelos lineares e invariantes, substituindo a solução de equações diferenciais por equações algébricas (Altintas, 2012).

Aplicando a transformada de Laplace na Equação (2.42) com condições iniciais nulas, tem-se:

$$X(s) = F_0(s) \frac{1}{s^2 m + sc + k} \quad (2.73)$$

Ao se fazer a relação entre a saída $X(s)$ e a entrada $F_0(s)$ obtém-se a chamada função transferência do sistema (FT) $\Phi(s)$:

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{F_0(s)} = \frac{1}{s^2 m + sc + k} \quad (2.74)$$

O denominador da Equação (2.74) é a equação característica do sistema e, considerando-se um sistema subamortecido, as raízes (ou pólos) de $\Phi(s)$ são as mesmas da Equação (2.53), ou seja:

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

O numerador de $\Phi(s)$ indica os zeros do sistema.

A FT de um sistema permite sua caracterização, independentemente do tipo de entrada (excitação) a que é submetido, e permite a análise de propriedades vibracionais da estrutura bem como oferece um meio de medir a resposta dinâmica da estrutura (Dorf e Bishop, 1998).

2.4.4 Função de Reposta em Freqüência

A variável de Laplace (s) pode ser substituída por ($j\omega$), ou seja, pode-se usar a transformada de Fourier quando o limite inferior de integração for igual a zero, levando a Equação (2.74) à chamada Função de Resposta em Freqüência (FRF):

$$\Phi(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{F_0(j\omega)} = \frac{1}{-\omega^2 m + j\omega c + k} \quad (2.75)$$

Isto permite a análise do sistema no domínio da freqüência a fim de observar as mudanças de fase e amplitude do sistema.

A FRF da Equação (2.75) também pode ser apresentada em módulo e fase, como mostra a Equação (2.76):

$$|\Phi(j\omega)| = \left| \frac{X(j\omega)}{F_0(j\omega)} \right| = \frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad \text{e} \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{-2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right), \quad (2.76)$$

e como parte real e imaginária:

$$G(j\omega) = \text{Re}(\Phi(j\omega)) = \frac{1}{k} \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}; \quad (2.77)$$

$$H(j\omega) = \text{Im}(\Phi(j\omega)) = \frac{1}{k} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}.$$

Aqui, pode-se definir a razão de freqüência adimensional (r):

$$r = \frac{\omega}{\omega_n}. \quad (2.78)$$

Substituindo a Equação (2.78) nas Equações (2.76) e (2.77), chega-se em:

$$\Phi(j\omega) = \frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{\left[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]}} \text{ e } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{-2\zeta r}{1-r^2}\right) \quad (2.79)$$

e

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \operatorname{Re}(\Phi(j\omega)) = \frac{1}{k} \frac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2} ; \\ H(j\omega) &= \operatorname{Im}(\Phi(j\omega)) = \frac{1}{k} \frac{-2\zeta r}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2} . \end{aligned} \quad (2.80)$$

Assim, a FRF pode ser definida por:

$$\Phi(j\omega) = G(j\omega) + H(j\omega) \quad (2.81)$$

Nota-se que quando $\omega = \omega_n$ implica em $r = 1$ e, observando a Equação (2.80), a parte real da FRF é igual a zero, a parte imaginária é igual a $-1/(2k\zeta)$ e a fase é igual a -90° . Esse caso é chamado frequência de ressonância e, pela Figura 2.13, percebe-se que a amplitude máxima da FRF ocorre justamente nessa condição.

Supondo um sistema com as seguintes características:

$$m = 1\text{kg}; k = 1 \cdot 10^6 \text{ N/m}; c = 200 \text{Ns/m} \text{ e } r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

Os gráficos de FRF desse sistema são mostrados a seguir na Figura 2.13 e também na Figura 2.14, onde se pode observar que a maior amplitude se dá quando a fase é igual a -90° . Caso a amplitude seja expressa em decibéis (dB), o gráfico é então chamado de diagrama de Bode.

Figura 2.13 – FRF amplitude e fase (Adaptado de Schmitz e Smith, 2009)

Figura 2.14 – FRF Real e imaginário (Adaptado de Schmitz e Smith, 2009)

Algumas propriedades de um sistema podem ser obtidas usando as informações contidas nos gráficos da parte real e imaginária. Considere a Figura 2.15:

Figura 2.15 – FRF real e imaginário (Schmitz e Smith, 2012)

Quando $r=0$, a FRF fornece o valor de $1/k$ na parte real e zero na imaginária. Por outro lado, na frequência de ressonância a parte real é nula e a parte imaginária é equivalente a $-\frac{1}{2k\zeta}$. O máximo da parte real é aproximadamente $\frac{1}{4k\zeta(1-\zeta)}$ e ocorre quando $r=1-\zeta$ ($\omega=\omega_n(1-\zeta)$). Por sua vez, valor mínimo é definido por $-\frac{1}{4k\zeta(1+\zeta)}$ quando $r=1+\zeta$ ($\omega=\omega_n(1+\zeta)$). Em geral, essas observações valem para estruturas metálicas, cujos materiais apresentam baixos valores de ζ (Schmitz e Smith, 2012).

Também é possível encontrar ζ por meio da seguinte relação:

$$\zeta = \frac{\omega_a - \omega_b}{2\omega_i} , \quad (2.82)$$

na qual ω_a e ω_b são as frequências em que o valor da magnitude equivale ao valor máximo do pico da magnitude na frequência de ressonância de interesse (ω_i) dividido por $\sqrt{2}$, ou seja, nos pontos em que $|H(\omega)_{a,b}| = \frac{|H(\omega)_{\max}|}{\sqrt{2}}$ (Figura 2.16).

Figura 2.16 – Obtenção da razão de amortecimento usando a magnitude da FRF (Dahil *et al.*, 2013)

Outro tipo de gráfico usado é o polar (Nyquist). Admitindo-se os mesmos parâmetros do exemplo anterior, tem-se a Figura 2.17.

Figura 2.17 - FRF de um GDL em coordenadas polares (Adaptado de Schmitz e Smith, 2009)

2.4.5 Vibrações com múltiplos graus de liberdade

Um sistema freqüentemente necessita de mais que um grau de liberdade para ser representado. Quando isso ocorre, é conveniente o uso de matrizes para descrevê-lo e também analisá-lo.

Partindo de um sistema de dois graus de liberdade, conforme a Figura 2.18, toma-se como x_1 e x_2 como referências para descrever os deslocamentos do sistema.

Figura 2.18 - Sistema com dois graus de liberdade (Altintas, 2012)

As equações de movimento da Figura 2.18 são:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= f_1 - c_1 \dot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= f_2 - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2 (x_2 - x_1) - k_3 x_2 - c_3 \dot{x}_2 \end{aligned} \quad (2.83)$$

as quais podem ser reescritas na forma matricial:

$$[M_x] \{\ddot{x}\} + [c_x] \{\dot{x}\} + [K_x] \{x\} = \{F\} \quad (2.84)$$

em que as matrizes de massa, rigidez e amortecimento são, respectivamente:

$$[M_x] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}; \quad [K_x] = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix}; \quad [c_x] = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

e os vetores deslocamento e força são dados por:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}; \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}, \quad (2.86)$$

respectivamente.

2.4.6 Análise modal

Uma das maneiras de se encontrar a solução da Equação (2.84) é obtida considerando os amortecimentos e as forças externas iguais a zero, como segue:

$$[M_x]\{\ddot{x}\} + [K_x]\{x\} = \{0\}. \quad (2.87)$$

A solução geral não trivial do sistema não amortecido é:

$$\{x(t)\} = \{X\} \sin(\omega t + \psi), \quad (2.88)$$

na qual $\{X\}$ e ψ são constantes e ω é a frequência natural do sistema.

Substituindo a Equação (2.88) na Equação (2.87), chega-se em:

$$([K_x] - \omega^2 [M_x])\{X\} = \{0\}, \quad (2.89)$$

ou

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.90)$$

De fato, a Equação (2.89) representa um problema de autovalor (ω^2) e autovetor ($\{X\}$), na qual o autovalor é o quadrado da frequência natural do sistema e o autovetor é o modo de vibração ou o autovetor modal (Fuller *et al.*, 1996).

Considerando $s = \omega^2$, procura-se a solução do sistema para quando o determinante for igual a zero (solução não trivial):

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - sm_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - sm_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.91)$$

ou

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad , \quad (2.92)$$

em que n é a quantidade de graus de liberdade do sistema.

Continuando com o caso da Figura 2.18, tem-se:

$$s^2 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} \right) s + \frac{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3}{m_1 m_2} = 0 \quad (2.93)$$

Esse polinômio possui dois valores reais como solução para s :

$$\begin{aligned} s_1 &= \omega_{n1}^2 \\ s_2 &= \omega_{n2}^2 \end{aligned} \quad , \quad (2.94)$$

nos quais ω_{n1} e ω_{n2} são as freqüências naturais do sistema e, por convenção, $\omega_{n1} < \omega_{n2}$ (Schmitz e Smith, 2012). Usando a teoria da superposição sobre a contribuição de cada solução (ou modo), chega-se em:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_1 \text{sen}(\omega_{n1}t + \psi_1) + \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_2 \text{sen}(\omega_{n2}t + \psi_2) \quad , \quad (2.95)$$

em que $\{P\}_{1,2} = \{X_1 \ X_2\}_{1,2}^T$ são os autovetores ou modos de vibração associados com a freqüência natural fundamental (ω_{n1}) e com a segunda freqüência natural (ω_{n2}), respectivamente. X_{ik} é o deslocamento do nó i no modo k e ψ_k é a contribuição da fase pelo modo k (Altintas, 2012).

A solução da Equação (2.89) fornece apenas a razão das amplitudes em cada nó, por isso é comum a normalização em relação a uma coordenada de referência

(por exemplo, X_2). Dessa forma, substituindo ω_{n1} e ω_{n2} na Equação (2.89) e rearranjando a mesma, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{X_1}{X_2} \right)_1 &= \lambda_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - \omega_{n1}^2 m_1} = \frac{k_2 + k_3 - \omega_{n1}^2 m_2}{k_2} , \\ \left(\frac{X_1}{X_2} \right)_2 &= \lambda_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - \omega_{n2}^2 m_1} = \frac{k_2 + k_3 - \omega_{n2}^2 m_2}{k_2} . \end{aligned} \quad (2.96)$$

Substituindo $\lambda_{1,2} = (X_1 / X_2)_{1,2}$ e definindo $X_{21} = Q_1$ e $X_{22} = Q_2$ na Equação (2.95), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \sin(\omega_{n1}t + \psi_1) \\ Q_2 \sin(\omega_{n2}t + \psi_2) \end{Bmatrix} \quad (2.97)$$

ou, na forma vetorial,

$$\{x(t)\} = [\{P\}_1 \quad \{P\}_2] \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = [P] \{q(t)\} , \quad (2.98)$$

na qual $\{P\}_1 = \{\lambda_1 \quad 1\}^T$ e q_1 são o primeiro modo de vibração e a contribuição ao deslocamento modal pelo primeiro modo, respectivamente.

A interpretação física de um modo de vibração pode ser explicada por meio da Figura 2.19, na qual os modos 1 e 2 causam um deslocamento unitário da massa m_2 e um deslocamento de λ_1 e λ_2 na massa m_1 (Altintas, 2012). Novamente, deve-se ressaltar que esses valores de deslocamento são relativos.

Figura 2.19 - Modos de vibração de um sistema com dois GDL (Adaptado de Altintas, 2012)

$[P]$ é chamada de matriz modal completa, de dimensão $n \times n$, na qual n é o número de graus de liberdade do sistema.

Todavia, a matriz modal não precisa ser necessariamente quadrada. O número de linhas é igual ao número de pontos de coordenadas no sistema e cada coluna representa um modo de vibração.

Além disso, uma vez que os modos são ortogonais uns aos outros, eles possuem a seguinte propriedade:

$$\{P\}_1^T [M_x] \{P\}_2 = 0 \quad , \quad (2.99)$$

ao passo que

$$\{P\}_1^T [M_x] \{P\}_1 = m_{q1} \quad , \quad (2.100)$$

na qual m_{q1} é a massa modal associada com o primeiro modo. Aplicando o princípio da ortogonalidade nos modos remanescentes, as matrizes de massa e rigidez são transformadas em coordenadas modais:

$$\begin{aligned} [M_q] &= [P]^T [M_x] [P] \\ [K_q] &= [P]^T [K_x] [P] \end{aligned} \quad (2.101)$$

As matrizes de massa modal $([M_q])$ e rigidez modal $([K_q])$ são diagonais, em que cada elemento representa a massa ou rigidez associada a um modo.

Até aqui, buscou-se uma solução no caso em que não existe amortecimento. No entanto, pode-se considerar que o sistema possui um amortecimento proporcional ou de Rayleigh (1945), como indicado a seguir:

$$[C_x] = \alpha_1 [M_x] + \alpha_2 [K_x] , \quad (2.102)$$

em que α_1 [1/s] e α_2 [s] são constantes empíricas (esse tipo de amortecimento não deve ser usado em qualquer sistema, mas fornece uma boa aproximação em sistemas com baixo amortecimento, como os mecânicos, por exemplo). Nesse caso, a solução dos autovalores e autovetores pode ser obtida da maneira já demonstrada. Além disso, a solução também independe da presença de forças externas (Schmitz e Smith, 2012).

A matriz de amortecimento proporcional também pode ser transformada em uma matriz de amortecimento modal, também diagonal (Altintas, 2012):

$$[C_q] = [P]^T [C_x] [P] . \quad (2.103)$$

Aplicando as transformações modais na Equação (2.84), obtém-se as equações de deslocamento em coordenadas modais:

$$\begin{bmatrix} m_{q1} & 0 \\ 0 & m_{q2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{q1} & 0 \\ 0 & c_{q2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{q1} & 0 \\ 0 & k_{q2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.104)$$

Na forma vetorial, a Equação (2.104) se torna:

$$[M_q] \{\ddot{q}\} + [C_q] \{\dot{q}\} + [K_q] \{q\} = \{0\} \quad (2.105)$$

Uma das vantagens de se usar coordenadas modais é que as equações se tornam desacopladas uma das outras e a resolução se dá como em sistemas de um grau de liberdade (Schmitz e Smith, 2012).

Considerando as vibrações do primeiro modo, por exemplo, tem-se:

$$m_{q1}\ddot{q}_1 + c_{q1}\dot{q}_1 + k_{q1}q_1 = 0 \quad , \quad (2.106)$$

e a solução é:

$$q_1(t) = Q_1 e^{-\zeta_1 \omega_{n1} t} \text{sen}(\omega_{n1} \sqrt{1 - \zeta_1^2} t + \Psi_1) \quad , \quad (2.107)$$

na qual a razão de amortecimento modal ζ_1 é $c_{q1} / (2\sqrt{k_{q1}m_{q1}})$, $\omega_{n1} = \sqrt{\frac{k_{q1}}{m_{q1}}}$ e Q_1 é obtido pelas condições iniciais.

Da relação $\zeta_n = \frac{c_{qn}}{2\omega_{nq}}$, e da Equação (2.102) pode-se dizer que

$$c_{qn} = \frac{\alpha_1}{2\omega_{nq}} + \frac{\alpha_2 \omega_{nq}}{2} \quad (\text{Clough e Penzien, 2003}).$$

Após encontrar a solução de deslocamento em coordenadas modais, as vibrações em coordenadas locais podem ser obtidas usando Equação (2.98):

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} \quad . \quad (2.108)$$

A forma geral da Equação que representa um sistema de n graus de liberdade é definida por (He e Fu, 2001):

Aplicando a transformação modal nas forças externas, o vetor $\{F\}$ torna-se:

$$\{R\} = [P]^T \{F\} \quad . \quad (2.109)$$

Então, a Equação de vibrações forçadas em coordenadas modais torna-se:

$$[M_q]\{\ddot{q}\} + [C_q]\{\dot{q}\} + [K_q]\{q\} = \{R\} \quad (2.110)$$

Voltando ao sistema de dois graus de liberdade, obtém-se:

$$\begin{aligned} m_{q1}\ddot{q}_1 + c_{q1}\dot{q}_1 + k_{q1}q_1 &= R_1 \\ m_{q2}\ddot{q}_2 + c_{q2}\dot{q}_2 + k_{q2}q_2 &= R_2 \end{aligned} \quad , \quad (2.111)$$

as quais são desacopladas.

A FRF em coordenadas modais é expressa como:

$$\left| \Phi_{q,k}(\omega) \right| = \left| \frac{q_k}{R_k} \right| = \frac{1}{k_{qk}} \frac{1}{\sqrt{(1-r_k^2)^2 + (2\zeta_k r_k)^2}}, \quad (2.112)$$

$$\phi_k = \tan^{-1} \left(\frac{-2\zeta_k r_k}{1-r_k^2} \right)$$

em que a razão de frequência é $r_k = \omega / \omega_{nk}$

Voltando ao exemplo de 2 GDL, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{q1} & 0 \\ 0 & \Phi_{q2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}, \quad (2.113)$$

a qual pode ser reescrita como:

$$\{q\} = [\Phi_q] \{R\}, \quad (2.114)$$

na qual Φ_q é a matriz modal de FRF, também diagonal.

Substituindo as Equações (2.109) e (2.98) na Equação (2.114), chega-se em uma expressão para se obter vibrações em coordenadas locais:

$$\{x\} = [P][\Phi_q][P]^T \{F\}, \quad (2.115)$$

a qual pode ser expressa como:

$$\{x\} = \left(\sum_{k=1}^n \{P\}_k \{P\}_k^T \Phi_{q,k} \right) \{F\}, \quad (2.116)$$

em que $\{P\}_k$ é o autovetor para o modo k e n é número de GDL.

Portanto, vibrações forçadas para cada coordenada podem ser calculadas por meio dos modos de vibração ($\{P\}_k$), funções transferência modais ($\Phi_{q,k}$) e vetor de

força externa $\{F\}$. Caso a força externa aplicada seja $\{F\} = \{F_1 \sin(\omega t) \ 0\}$, as vibrações em coordenadas locais do sistema com 2 GDL serão:

$$\begin{aligned} \frac{x_1(\omega)}{F_1(\omega)} &= \lambda_1^2 \Phi_{q1} + \lambda_2^2 \Phi_{q2} \\ \frac{x_2(\omega)}{F_1(\omega)} &= \lambda_1 \Phi_{q1} + \lambda_2 \Phi_{q2} \end{aligned} \quad (2.117)$$

e, além disso, o sistema com 2 graus de liberdade pode ser generalizado para um sistema com múltiplos graus de liberdade.

2.4.7 Vibrações em sistemas contínuos

Ate agora, os sistemas considerados eram modelados de forma discreta, nos quais uma quantidade de massa concentrada em único ponto era associada a outra por meio de molas.

No entanto, sistemas que possuem componentes flexíveis são melhor representados por modelos que consideram a distribuição da massa sobre uma estrutura de forma contínua, por meio de infinitas quantidades de pequenos elementos (Inman, 2008)

Quando tal estrutura vibra, cada um desses pequenos elementos possui um movimento relativo em relação aos outros de maneira contínua. Tais elementos são chamados de sistemas contínuos ou sistemas de parâmetros distribuídos.

Os sistemas de modelo discreto possuem finitos pontos de deslocamento estudados, limitando a aproximação das soluções obtidas. Para se obter soluções mais próximas da realidade, deve-se aumentar o número de pontos de estudo e, conseqüentemente, os graus de liberdade do modelo.

Em princípio, uma estrutura real necessitaria de infinitos graus de liberdade para ser descrita, porém isso é evidentemente inviável; então o procedimento matemático usado para conectar os infinitos elementos de uma estrutura é por meio de equações diferenciais nas quais as coordenadas de posição são variáveis independentes. Entretanto, o tempo também é uma variável independente em

problemas de vibração, o que faz com que as equações dos modelos de sistemas de parâmetros distribuídos sejam do tipo diferencial parcial (Clough e Penzien, 2003).

Considera-se a viga da Figura 2.20 (a) para a formulação das equações diferenciais parciais de deslocamento.

Figura 2.20 - Viga sujeita a carregamento dinâmico: (a) Propriedades e coordenadas da viga; (b) Forças atuando em um elemento diferencial (Adaptado de Clough e Penzien, 2003).

As propriedades físicas da viga são a rigidez à flexão ($YI(x)$), na qual Y é o módulo de elasticidade do material e I é o momento de inércia, e a massa por unidade de comprimento ($m(x)$), as quais podem variar ao longo do comprimento da viga, desde o início até o comprimento L . O carregamento $p(x,t)$ pode assumir um valor arbitrário em função da posição e do tempo, assim como os deslocamentos transversais $w(x,t)$. A fixação da viga por ora é considerada arbitrária e a indicação na figura é meramente ilustrativa.

A massa por unidade de comprimento pode também ser definida em função da densidade seccional do material (massa por unidade de área) e pela seção da viga em um determinado ponto: $m(x) = (\rho(x)A(x))$ (Inman, 2006).

Analisando um elemento diferencial da viga (Figura 2.20(b)) pode-se traçar o diagrama de forças atuantes sobre o mesmo e encontrar as equações de movimento visando o equilíbrio do mesmo. Somando as forças que atuam verticalmente sobre o elemento, tem-se:

$$w(x,t) + p(x,t)dx - \left[w(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right] - f_I(x,t)dx = 0 \quad , \quad (2.118)$$

na qual $V(x,t)$ é a força vertical agindo sobre o corte da seção e $f_I(x,t)dx$ é a força inercial equivalente à massa do elemento multiplicada por sua aceleração transversal, ou seja:

$$f_I(x,t)dx = m(x)dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.119)$$

Substituindo a Equação (2.119) na Equação (2.118) e simplificando o resultado, obtém-se:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = p(x,t) - m(x,t) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad . \quad (2.120)$$

A segunda relação de equilíbrio considera os momentos que atuam no elemento:

$$M(x,t) + V(x,t)dx - \left[M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx \right] = 0 \quad , \quad (2.121)$$

que simplificada se torna:

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = V(x,t) \quad . \quad (2.122)$$

Derivando a Equação (2.122) em relação a x , chega-se em:

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \quad (2.123)$$

Substituindo a Equação (2.123) na Equação (2.120), chega-se em:

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + m(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) \quad (2.124)$$

O momento fletor M é definido como:

$$M = YI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} , \quad (2.125)$$

o qual substituído na Equação (2.124) leva a:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[YI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) . \quad (2.126)$$

Esta é a equação diferencial parcial que descreve a posição de um elemento da viga flexionada.

Pode-se considerar que, além do carregamento transversal, haja um carregamento axial na viga (Figura 2.21(a)).

Observando a Figura 2.21 (b), nota-se que o carregamento axial não altera o equilíbrio das forças verticais estudado anteriormente. Contudo, a linha de ação da força axial muda conforme a viga é defletida, causando uma alteração no equilíbrio dos momentos, que agora é dado por (Clough e Penzien, 2003):

$$M(x,t) + V(x,t)dx + N(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} dx - \left[M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx \right] = 0 , \quad (2.127)$$

a qual pode ser simplificada e rearranjada:

$$V(x,t) = -N(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} . \quad (2.128)$$

Derivando em relação a x e substituindo a Equação (2.128) na Equação (2.120) obtém-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[YI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right] + m(x,t) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) . \quad (2.129)$$

O modelo da viga pode ser melhorado se o amortecimento for considerado. Para isso, Clough e Penzien (2003) introduziram dois tipos de amortecimento viscoso no modelo: o primeiro é um amortecimento causado por fatores externos, representado por $c(x)$; o segundo é uma resistência interna que se opõe à velocidade de deformação.

O primeiro tipo de amortecimento é definido como uma força:

$$f_d(x,t)dx = c(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} dx , \quad (2.130)$$

a qual deve ser adicionada ao elemento de corpo livre na Figura 2.21 (b).

Figura 2.21 - Viga com carregamento axial e transversal. (a) Viga defletida devido às cargas. (b) Forças resultantes atuando sobre um elemento diferencial (Adaptado de Clough e Penzien, 2003).

Por outro lado, o segundo tipo precisa ser incorporado à expressão do momento (Equação (2.125)):

$$M(x,t) = YI(x) \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right], \quad (2.131)$$

na qual α_2 é a constante de proporcionalidade de rigidez definida por Rayleigh (1945). Aplicando essas mudanças, a equação que descreve o sistema passa a ser:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[YI(x) \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[N \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right] + \\ + m(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + c(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} dx = p(x,t) . \end{aligned} \quad (2.132)$$

Assumindo que os suportes da viga possuam movimentos de rotação e translação (Figura 2.22) e que os mesmos estejam localizados nas extremidades da viga, define-se as variáveis associadas a tais deslocamentos:

$$\begin{aligned} w^t(0,t) = \delta_1(t) \quad \left[\frac{\partial w^t(x,t)}{\partial x} \right]_{x=0} = \delta_3(t) \\ w^t(L,t) = \delta_2(t) \quad \left[\frac{\partial w^t(x,t)}{\partial x} \right]_{x=L} = \delta_4(t) , \end{aligned} \quad (2.133)$$

na qual o sobrescrito t indica o deslocamento total da viga em relação à posição inicial de sua linha neutra.

Figura 2.22 - Viga com suportes sujeitos a deslocamentos (Clough e Penzien, 2003)

Usando a Equação (2.132) sem o termo $p(x,t)$ e substituindo $w(x,t)$ por $w^t(x,t)$ encontra-se a equação que rege os movimentos da viga nesse caso. Essa equação deve ser resolvida de maneira que respeite as condições de contorno da Equação (2.133). Ao se fazer isso, torna-se conveniente expressar o deslocamento total da viga ($w^t(x,t)$) como a soma dos deslocamentos induzidos pelo simples fato de se apoiar a viga sobre os suportes ($\delta_1(t), \delta_2(t), \delta_3(t), \delta_4(t)$), também chamados de deslocamentos *quasi*-estáticos ($w^s(x,t)$), e os deslocamentos devido à dinâmica inercial e efeitos de viscosidade ($w(x,t)$):

$$w^t(x,t) = w^s(x,t) + w(x,t) . \quad (2.134)$$

Substituindo a Equação (2.134) na Equação (2.132) e ignorando as tensões axiais, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[YI(x) \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right) \right] + m(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \\ + c(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} dx = p_{eff}(x,t) , \end{aligned} \quad (2.135)$$

em que

$$\begin{aligned} p_{eff}(x,t) = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[YI(x) \left(\frac{\partial^2 w^s(x,t)}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^3 w^s(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right) \right] - \\ - m(x) \frac{\partial^2 w^s(x,t)}{\partial t^2} - c(x) \frac{\partial w^s(x,t)}{\partial t} dx . \end{aligned} \quad (2.136)$$

O termo $p_{eff}(x,t)$ representa a carga dinâmica efetiva distribuída causada pela excitação dos suportes da viga. Além disso, como $w^s(x,t)$ é causado por deslocamentos estáticos, o primeiro termo de $p_{eff}(x,t)$ é igual a zero (Clough e Penzien, 2003), reduzindo a Equação (2.136) para:

$$p_{eff}(x,t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[YI(x) \alpha_2 \frac{\partial^3 w^s(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] - m(x) \frac{\partial^2 w^s(x,t)}{\partial t^2} - c(x) \frac{\partial w^s(x,t)}{\partial t} dx . \quad (2.137)$$

Como $w^s(x,t)$ foi causado pelos deslocamentos $\delta_1(t), \delta_2(t), \delta_3(t)$ e $\delta_4(t)$, pode-se escrever que:

$$w^s(x,t) = \sum_{i=1}^4 \psi_i(x) \delta_i(t) , \quad (2.138)$$

na qual cada função de influência estática $\psi_i(x)$ é a deflexão da viga causada por uma unidade de deslocamento estático na correspondente coordenada δ_i . Assumindo que a viga seja uniforme, pode-se substituir a Equação (2.138) na Equação (2.137), encontrando-se:

$$p_{eff}(x,t) = -\sum_{i=1}^4 \left\{ m(x) \psi_i(x) \ddot{\delta}_i(t) + c(x) \psi_i(x) \dot{\delta}_i(t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[YI(x) \alpha_2 \dot{\delta}_i(t) \frac{\partial^2 \psi_i(x)}{\partial x^2} \right] \right\} . \quad (2.139)$$

Em geral, o amortecimento devido a esses carregamentos efetivos é muito pequeno comparado às contribuições inercias, podendo então ser desprezado:

$$p_{eff}(x,t) = -\sum_{i=1}^4 \left\{ m(x) \psi_i(x) \ddot{\delta}_i(t) \right\} . \quad (2.140)$$

Substituindo a Equação (2.140) na Equação (2.135) pode-se encontrar $w(x,t)$, o qual pode ser somado a $w^s(x,t)$, o que leva ao deslocamento total $w^t(x,t)$.

Tomando como exemplo uma viga engastada, pode-se definir suas condições de contorno como:

$$w^t(0,t) = \delta_1(t) \quad \left[\frac{\partial w^t(x,t)}{\partial x} \right]_{x=0} = \delta_3(t) , \quad (2.141)$$

e

$$w^s(x,t) = 1\delta_1(t) + x\delta_3(t) . \quad (2.142)$$

Então o carregamento efetivo é dado por:

$$p_{eff}(x,t) = -m(x) \left[1\dot{\delta}_1(t) + x\ddot{\delta}_3(t) \right] . \quad (2.143)$$

Uma vez que a Equação (2.142) satisfaz as condições de contorno em $x=0$, deve-se impor as condições de engastamento $\left(w(0,t) = 0 \text{ e } \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right]_{x=0} = 0 \right)$ para a resolução da Equação (2.135). Além disso, o momento em $x=L$ deve ser zero.

Finalmente, considerando apenas o deslocamento transversal do suporte de viga, tem-se que:

$$\begin{aligned} w^t(0,t) &= \delta_1(t) & \left[\frac{\partial w^t(x,t)}{\partial x} \right]_{x=0} &= 0 \\ w^t(L,t) &= 0 & \left[\frac{\partial w^t(x,t)}{\partial x} \right]_{x=L} &= 0 \end{aligned} , \quad (2.144)$$

e, portanto:

$$w^s(x,t) = 1\delta_1(t) \quad (2.145)$$

e

$$p_{eff}(x,t) = -m(x) \left[1\dot{\delta}_1(t) \right] . \quad (2.146)$$

2.4.7.1 Análise de vibrações em sistemas contínuos

O primeiro passo para se analisar a resposta dinâmica de sistemas contínuos é encontrar seus os modos de vibração e suas frequências naturais para o caso livre não amortecido. Assim, considerando uma viga de seção constante (YI) e massa homogênea ($\bar{m}$), a Equação (2.132) torna-se:

$$\left[YI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} \right] + \bar{m} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 , \quad (2.147)$$

A qual pode ser reescrita como:

$$w^{iv}(x,t) + \frac{\bar{m}}{EI} \ddot{w}(x,t) = 0 \quad , \quad (2.148)$$

em que a notação prima indica derivação em relação a x e a de pontos em relação a t .

Desde que $\bar{m}/EI$ é uma constante, uma das soluções pode ser obtida usando superposição de variáveis:

$$w(x,t) = \Phi(x)q(t) \quad , \quad (2.149)$$

o que significa que o movimento vibratório possui um modo Φ_x com uma amplitude variante no tempo de $q(t)$. Substituindo a solução da Equação (2.149) na Equação (2.148) chega-se em:

$$\frac{\Phi^{iv}(x)}{\Phi(x)} = -\frac{\bar{m}}{EI} \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = a^4 \quad , \quad (2.150)$$

na qual o termo a^4 é definido por conveniência matemática e, também, é possível escrever duas equações diferenciais ordinárias a partir de tal equação:

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \quad (2.151)$$

e

$$\Phi^{iv}(x) - a^4 \Phi(x) = 0 \quad , \quad (2.152)$$

nas quais

$$\omega^2 = \frac{a^4 EI}{\bar{m}} \text{ e } a^4 = \frac{\omega^2 \bar{m}}{EI} \quad , \quad (2.153)$$

em que ω é chamado de frequência natural de vibração (Rao, 2011).

A primeira equação, como já visto, possui solução do tipo:

$$q(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad , \quad (2.154)$$

em que A e B são constantes dependentes das condições iniciais:

$$q(t) = q(0) \cos(\omega t) + \frac{\dot{q}(0)}{\omega} \sin(\omega t) \quad . \quad (2.155)$$

A segunda equação pode ser resolvida com uma solução do tipo:

$$\Phi(x) = Ge^{sx} \quad , \quad (2.156)$$

O que leva a:

$$(s^4 - a^4)Ge^{sx} = 0 \quad , \quad (2.157)$$

na qual $s_{1,2} = \pm ia$ $s_{3,4} = \pm a$.

Substituindo essas soluções na Equação (2.156), tem-se que:

$$\Phi(x) = G_1 e^{iax} + G_2 e^{-iax} + G_3 e^{ax} + G_4 e^{-ax} \quad , \quad (2.158)$$

em que as constantes G_n devem ser tratadas como do tipo complexas. Reescrevendo a equação acima, obtém-se:

$$\Phi(x) = A_1 \cos(ax) + A_2 \sin(ax) + A_3 \cosh(ax) + A_4 \sinh(ax) \quad , \quad (2.159)$$

na qual A_n são constantes reais expressas em função de G_n e devem ser calculadas satisfazendo as condições de contorno do final da viga (deslocamento, inclinação, momento ou cisalhamento). Levando isso em conta, pode-se escrever três dessas quatro constantes em função da quarta e uma expressão chamada “equação da frequência” pode ser obtida desde que o parâmetro a seja determinado. A quarta constante não pode ser calculada diretamente, pois ela representa uma amplitude arbitrária da função característica $(\Phi(x))$ (Clough e Penzien, 2003).

Considerando uma viga engastada (Figura 2.23 (a)), segue a análise de vibrações livres:

As condições de contorno para a viga são:

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= 0 & \Phi'(0) &= 0 \\ M(L) = YI\Phi''(L) &= 0 & V(L) = YI\Phi'''(L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.160)$$

em que V é o vetor cisalhante.

Substituindo na Equação (2.159), encontra-se:

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= A_1 \cos(0) + A_2 \sin(0) + A_3 \cosh(0) + A_4 \sinh(0) = 0 \\ \Phi'(0) &= a(-A_1 \sin(0) + A_2 \cos(0) + A_3 \sinh(0) + A_4 \cosh(0)) = 0 \\ \Phi''(L) &= a^2(-A_1 \cos(aL) - A_2 \sin(aL) + A_3 \cosh(aL) + A_4 \sinh(aL)) = 0, \\ \Phi'''(L) &= a^3(A_1 \sin(aL) - A_2 \cos(aL) + A_3 \sinh(aL) + A_4 \cosh(aL)) = 0 \end{aligned} \quad (2.161)$$

As duas primeiras igualdades levam a:

$$\begin{aligned} A_3 &= -A_1 \\ A_4 &= -A_2 \end{aligned} \quad (2.162)$$

que podem ser substituídos nas outras duas igualdades, resultando em:

$$\begin{bmatrix} (\cos aL + \cosh aL) & (\sin aL + \sinh aL) \\ (\sin aL - \cosh aL) & (\cos aL + \sinh aL) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.163)$$

Para uma solução não trivial, o determinante da matriz deve ser igual a zero:

$$\sinh^2(aL) - \sin^2(aL) - \cos^2(aL) - 2\cosh(aL)\cos(aL) - \cosh^2(aL) = 0. \quad (2.164)$$

Simplificando, tem-se que:

$$\cos(aL) = \frac{-1}{\cosh(aL)} \quad (2.165)$$

A solução dessa equação transcendental fornece os valores de aL que representam as frequências de vibração da viga engastada. A Figura 2.23 (c) mostra o gráfico das funções $\cos(aL)$ e $-[1/\cosh(aL)]$. Os pontos de intersecção fornecem os valores de aL que satisfazem a Equação (2.165). As raízes maiores que a terceira devem ter pelo menos uma precisão de quatro dígitos

e podem ser obtidas por meio de programas computacionais ou de forma aproximada usando a seguinte relação:

$$(aL)_n = \frac{\pi}{2}(2n-1) \quad n = 4, 5, 6, \dots \quad (2.166)$$

Figura 2.23 - Análise de vibrações livres em uma viga engastada: (a) Propriedades da viga; (b) primeiros três modos de vibração; (c) termos da equação de frequência (Adaptado de Clough e Penzien, 2003).

Introduzindo os valores de aL obtidos pelas Equações (2.165) e (2.166) na Equação (2.153) encontra-se as frequências circulares:

$$\omega_n = (aL)_n^2 \sqrt{\frac{YI}{mL^4}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.167)$$

Além disso, o sistema da Equação (2.163) pode ser resolvido em termos de A_1 :

$$A_2 = \frac{-(\cos aL + \cosh aL)}{(\sen aL + \sen h aL)} A_1 \quad (2.168)$$

A Equação (2.159) pode ser reescrita como:

$$\Phi_n(x) = A_{1n} \left[\begin{array}{l} \cos(ax)_n - \cosh(ax)_n - \frac{(\cos(aL)_n + \cosh(aL)_n)}{(\sen(aL)_n + \sen h(aL)_n)} \cdot \\ \cdot (\sen(ax)_n - \sen h(ax)_n) \end{array} \right] \quad (2.169)$$

ou

$$\Phi_n(x) = A_{1n} \left[\cos(ax)_n - \cosh(ax)_n - \sigma_n (\sen(ax)_n - \sen h(ax)_n) \right] \quad , \quad (2.170)$$

na qual

$$\sigma_n = \frac{(\cos(aL)_n + \cosh(aL)_n)}{(\sen(aL)_n + \sen h(aL)_n)} \quad (2.171)$$

Rao (2011) e Clough e Penzien (2003) mostram a ortogonalidade das funções normais em vibrações transversais de uma viga:

$$\int_0^L \Phi_m(x) \Phi_n(x) m(x) dx = 0 \quad \omega_m \neq \omega_n. \quad (2.172)$$

Substituindo os valores de $(aL)_n$ e $(ax)_n$ nessa equação, obtém-se as funções modais, mostradas na Figura 2.23 (b).

Os quatro primeiros termos de $(aL)_n$ são:

$$\begin{aligned}
(aL)_1 &= 1,875104 \\
(aL)_2 &= 4,694091 \\
(aL)_3 &= 7,854757 \\
(aL)_4 &= 10,995541 .
\end{aligned} \tag{2.173}$$

Os modos normais de vibração podem ser obtidos por meio da Equação (2.149):

$$w_n(x,t) = \Phi_n(x)q_n(t) , \tag{2.174}$$

$$\begin{aligned}
w_n(x) = A_n \left[\frac{\cos(ax)_n - \cosh(ax)_n - \frac{(\cos(aL)_n + \cosh(aL)_n)}{(\sin(aL)_n + \sinh(aL)_n)} \cdot \right. \\
\left. \cdot (\sin(ax)_n - \sinh(ax)_n) \right] \cdot (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t))
\end{aligned} \tag{2.175}$$

e

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x)Y_n(t) . \tag{2.176}$$

A Equação (2.174) indica que o deslocamento vertical da viga na posição x é a soma dos deslocamentos da viga na mesma posição causados por cada um dos modos de vibrar da mesma e a Equação (2.176) indica o princípio da superposição modal em sistemas distribuídos. Além disso, essa mesma equação sugere a necessidade de infinitos modos de vibração para descrever os deslocamentos da viga quando na verdade apenas alguns são necessários devido à significância de suas contribuições (Rao, 2011).

É possível ainda descobrir a contribuição de um modo n em uma dada deformação numa posição x , bastando para isso multiplicar ambos os lados da Equação (2.174) por $\Phi_n(x)m(x)$ e integrando-os depois:

$$\int_0^L \Phi_n(x)m(x)w(x,t)dx = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \int_0^L \Phi_i(x)\Phi_n(x)m(x)dx , \tag{2.177}$$

o qual, devido à condição de ortogonalidade, se resume a:

$$\int_0^L \Phi_n(x) m(x) w(x, t) dx = q_n(t) \int_0^L \Phi_n^2(x) m(x) dx \quad , \quad (2.178)$$

$$q_n(t) = \frac{\int_0^L \Phi_n(x) m(x) w(x, t) dx}{\int_0^L \Phi_n^2(x) m(x) dx} \quad . \quad (2.179)$$

Dada uma condição inicial de deslocamento $w(x, 0)$ e de velocidade $\dot{w}(x, 0)$ a amplitude $q_{n(0)}$ e velocidade $\dot{q}_{n(0)}$ modais iniciais podem ser obtidas por meio da Equação (2.155) para cada modo desejado.

Obtidas as respostas para vibrações livres, deve-se procurar as respostas das vibrações forçadas, como mostrado abaixo:

Substituindo a Equação (2.176) na Equação (2.126), encontra-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[YI(x) \frac{\partial^2 \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) q_i(t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) q_i(t)}{\partial t^2} = p(x, t) \quad , \quad (2.180)$$

que pode ser reescrita como:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[YI(x) \frac{\Phi_i(x)}{\partial x^2} q_i(t) \right] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} m(x) \Phi_i(x) q_i(t) = p(x, t) \quad . \quad (2.181)$$

Multiplicando cada termo por $\Phi_n(x)$ e integrando-os, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{q}_i(t) \int_0^L m(x) \Phi_n(x) \Phi_i(x) dx + \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \int_0^L \Phi_n(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[YI(x) \frac{d^2 \Phi_i(x)}{dx^2} \right] dx = \\ = \int_0^L \Phi_n(x) p(x, t) dx \end{aligned} \quad (2.182)$$

Usando a relação de ortogonalidade, tem-se que:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n(t) \int_0^L m(x) \Phi_n^2(x) dx + q_n(t) \int_0^L \Phi_n(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[YI(x) \frac{d^2 \Phi_n(x)}{dx^2} \right] dx = \\ = \int_0^L \Phi_n(x) p(x, t) dx \end{aligned} \quad (2.183)$$

Das Equações (2.174) e (2.154) pode-se escrever que:

$$w_n(x,t) = \Phi_n(x) \rho_n \sin(\omega_n t + \phi_n) , \quad (2.184)$$

na qual $\rho_n = \sqrt{(A_n^2 + B_n^2)}$ e ϕ_n é a fase.

Substituindo a Equação (2.184) na Equação (2.126) e considerando uma análise livre, chega-se em:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[YI(x) \frac{d^2 \Phi_n(x)}{dx^2} \right] = m(x) \omega_n^2 \Phi_n(x) , \quad (2.185)$$

a qual multiplicada por $\Phi_n(x)$ e depois integrada torna-se:

$$\int_0^L \Phi_n(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[YI(x) \frac{d^2 \Phi_n(x)}{dx^2} \right] dx = \omega_n^2 \int_0^L m(x) \Phi_n^2(x) dx . \quad (2.186)$$

Clough e Penzien (2003) fazem a seguinte definição:

$$M_n = \int_0^L m(x) \Phi_n^2(x) dx , \quad (2.187)$$

em que M_n é a massa modal do enésimo modo.

Substituindo as Equações (2.187) e (2.186) na Equação (2.183), encontra-se:

$$M_n \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 M_n q_n(t) = P_n(t) , \quad (2.188)$$

na qual

$$P_n(t) = \int_0^L \Phi_n(x) p(x,t) dx \quad (2.189)$$

é o carregamento generalizado associado com $\Phi_n(x)$ e é possível, portanto, avaliar $P_n(t)$ para qualquer modo de vibração.

Considerando o amortecimento também e usando a Equação (2.176) na Equação (2.132), sem carga axial, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} m(x) \Phi_i(x) \ddot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} c(x) \Phi_i(x) \dot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} \left[\alpha_2 YI(x) \frac{d^2 \Phi_i(x)}{dx^2} \right] \dot{q}_i(t) + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} \left[YI(x) \frac{d^2 \Phi_i(x)}{dx^2} \right] q_i(t) = p(x, t) , \end{aligned} \quad (2.190)$$

a qual multiplicada por $\Phi_i(x)$ e integrada, considerando a ortogonalidade entre os modos, leva a:

$$\begin{aligned} & M_n \ddot{q}_n(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) \int_0^L \Phi_n(x) \left\{ c(x) \Phi_i + \frac{d^2}{dx^2} \left[\alpha_2 YI(x) \frac{d^2 \Phi_i(x)}{dx^2} \right] \right\} dx + \\ & + \omega_n^2 M_n q_n(t) = P_n(t) . \end{aligned} \quad (2.191)$$

Devido à condição de ortogonalidade, todos os termos envolvendo α_2 serão nulos, exceto quando $i = n$, e se $c(x)$ for considerado um amortecimento proporcional, tem-se:

$$M_n \ddot{q}_n(t) + (\alpha_1 M_n + \alpha_2 \omega_n^2 M_n) \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 M_n q_n(t) = P_n(t) . \quad (2.192)$$

Introduzindo a razão de amortecimento modal $\left(\zeta_n = \frac{C_n}{2M_n \omega_n} = \frac{\alpha_1}{2\omega_n} + \frac{\alpha_2 \omega_n}{2} \right)$ na equação acima e dividindo-a pela massa modal, tem-se que:

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{P_n(t)}{M_n} , n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.193)$$

Além da carga distribuída, a estrutura pode sofrer ação de uma força concentrada (Figura 2.24). Nesse caso, a análise é feita considerando uma viga engastada de comprimento L na direção do eixo x e com uma carga concentrada f_0 na posição $x = a$.

Figura 2.24 - Viga sujeita a um carregamento concentrado (Adaptado de Kelly, 2012).

A deflexão da linha neutra da viga é dada por:

$$YI \frac{d^4 w}{dx^4} = f_0(x) , \quad (2.194)$$

em que $f_0(x)$ é uma função impulso, representada por $f_0 = f_0 \delta(x - a)$. Dessa forma, a Equação (2.194) pode ser reescrita:

$$YI \frac{d^4 w}{dx^4} = f_0 \delta(x - a) , \quad (2.195)$$

que integrada se torna:

$$YI \frac{d^3 w}{dx^3} = f_0 u(x - a) + C_1 , \quad (2.196)$$

em que $u(x - a)$ é a função degrau.

Integrando-se repetidamente a Equação (2.196) chega-se em:

$$YI \frac{d^2 w}{dx^2} = f_0 (x - a) \delta(x - a) + C_1 x + C_2 , \quad (2.197)$$

$$YI \frac{dw}{dx} = f_0 \frac{1}{2} (x - a)^2 \delta(x - a) + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 \quad (2.198)$$

e

$$YI w = f_0 \frac{1}{6} (x - a)^3 \delta(x - a) + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4 . \quad (2.199)$$

C_1, C_2, C_3 e C_4 são constantes de integração que devem ser calculadas pelas restrições da viga engastada, de acordo com a Equação (2.160), o que leva a (Kelly, 2012):

$$\begin{aligned} C_1 &= -1 & C_2 &= a \\ C_3 &= 0 & C_4 &= 0 \end{aligned} , \quad (2.200)$$

de forma que a deflexão na viga se torna:

$$w(x) = \frac{f_0}{YI} \left[\frac{1}{6}(x-a)^3 u(x-a) - \frac{x^3}{6} + \frac{ax^2}{2} \right]. \quad (2.201)$$

As estruturas também podem ser constituídas por dois ou mais materiais diferentes, conforme a Figura 2.25.

Figura 2.25 - Viga composta e método da seção transformada: (a) seção original e (b) seção transformada (Adaptado de Erturk, A e Inman, D. J., 2008).

Neste caso, em que há uma viga composta por dois materiais distintos, (Gere e Goodno, 2012) usam o método da seção transformada para transformar a seção transversal da viga composta em uma seção equivalente de um único material. Para tanto, as dimensões da viga de material B permanecem as mesmas, assim como a altura (h_a) da seção de material A. Por outro lado, a largura da seção A sofre alteração de escala n , em que n é a razão entre os módulos de elasticidade dos materiais da viga $\left(n = \frac{Y_a}{Y_b}\right)$ e é conhecido como razão modular (Ugural e Fenster, 2003). Dessa forma, a linha neutra da seção transformada permanecerá na mesma posição da seção original.

As dimensões da viga de seção transformada são mostradas na Figura 2.25b e as novas dimensões são calculadas por meio das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 h_{bl} &= \frac{h_b^2 + 2nh_a h_b + nh_a^2}{2(h_b + nh_a)} , \\
 h_{al} &= \frac{h_b^2 + 2h_a h_b + nh_a^2}{2(h_b + nh_a)} \quad \text{e} \\
 h_{bc} &= \frac{nh_a(h_a + h_b)}{2(h_b + nh_a)} .
 \end{aligned} \tag{2.202}$$

Os termos b , h_a e h_b representam, respectivamente, a largura das seções e as alturas das seções de material A e de material B. Por sua vez, h_{al} , h_{bl} , h_{bc} e nb são a distância entre a base da seção de material A e a linha neutra, a distância entre o topo da seção de material B e a linha neutra, a distância entre o centro da camada do material B e a linha neutra e a largura da seção transformada, nesta ordem.

Uma vez encontrada a seção transformada, deve-se encontrar o momento de inércia da mesma. Para tanto, basta somar os momentos de cada uma das seções, considerando a razão modular (Ugural e Fenster, 2003):

$$I = I_B + nI_A . \tag{2.203}$$

2.5 Vibrações em usinagem

Os processos de usinagem convencionais, entre eles o torneamento e o fresamento, invariavelmente apresentam vibração relativa entre a peça e a ferramenta de corte. Estas vibrações podem ocorrer devido a uma ou mais das seguintes causas: heterogeneidades no material da peça, alteração na área da seção transversal do cavaco, perturbações no acionamento da peça ou ferramenta, carga dinâmica causada pela aceleração ou desaceleração dos componentes móveis da máquina, vibrações induzidas por fontes externas e vibrações autoexcitadas geradas pelo processo de usinagem ou atrito: o *chatter* (Piersol e Paez, 2010).

2.5.1 Chatter

O *chatter* pode ser dividido em duas categorias, de acordo com a fonte de autoexcitação: não-regenerativo (primário e modo-acoplado) e regenerativo (secundário) (Olgac e Hosek, 1998; Mei, 2005; Moradi *et al.*, 2010; Quintana e

Ciurana, 2011; Turkes *et al.*, 2011). O *chatter* primário não-regenerativo ocorre devido ao atrito entre peça e ferramenta e por efeitos termomecânicos oriundos da formação de cavaco, de maneira que a vibração do sistema não tem relação com a superfície previamente usinada da peça (Mei, 2005), enquanto que o *chatter* modo-acoplado ocorre quando forças agindo em uma direção causam movimento em outra direção e vice-versa, resultando em vibrações simultâneas em duas direções acopladas (Cheng, 2009); o *chatter* regenerativo acontece quando uma superfície ondulada produzida por um passe de usinagem anterior é usinada novamente. Há ainda quem considere uma terceira categoria: o tipo Arnold, no qual há uma dependência da força com a velocidade de corte (Cheng, 2009).

O *chatter* regenerativo é o tipo de vibração mais prejudicial aos processos de usinagem (Harris e Piersol, 2002) e, portanto, a mais importante (Mei, 2005), razão pela qual será o foco deste trabalho.

2.5.1.1 Chatter regenerativo

Embora, como visto no item anterior, existam vários tipos de *chatter*, é comum o uso do termo *chatter* para se referir ao do tipo regenerativo (Quintana e Ciurana, 2011) e assim será também ao longo deste trabalho.

Voltando à Seção 2.1.1, onde há o modelo de Merchant para corte ortogonal, é válido ressaltar que as condições adotadas para posicionamento de peça e ferramenta eram estáticas, ou seja, o único movimento permitido era o avanço da peça em direção à ferramenta ou vice-versa. Além disso, as forças também não sofrem variação durante o processo de usinagem.

Ao se retirar a proposição de rigidez estática da ferramenta de corte, a mesma passará a sofrer reação da força de corte e tenderá a defletir, mas, se essa mesma ferramenta possui massa e também rigidez, é possível que ela vibre (Schmitz e Smith, 2009). Mesmo imperfeições no material da peça poderiam causar algum tipo de perturbação no sistema e levá-lo a vibrar. Portanto, o sistema agora é dinâmico. E a dinâmica da ferramenta de corte flexível e da peça afeta o processo de usinagem (Ganguli, 2005).

Quando se tem uma usinagem livre de *chatter*, a máquina pode ser considerada como um sistema dinâmico em movimento estacionário. Quando o processo de usinagem é perturbado, por exemplo, por meio de um ponto mais duro no material da superfície da peça, a ferramenta irá vibrar em relação à peça e essa vibração irá se sobrepor ao movimento de corte estacionário. Esta vibração relativa produzirá um incremento na força de avanço a qual forçará a ferramenta a oscilar em relação à superfície usinada da peça. Caso essa vibração relativa seja maior que aquela ocorrida em um passo anterior, o sistema será instável. A estabilidade de uma máquina-ferramenta depende da interação entre as características de sua estrutura e do processo de usinagem (Sweeney e Tobias, 1969).

O *chatter* resulta de um mecanismo de autoexcitação na geração da largura do cavaco durante a usinagem. As forças de corte nesse processo excitam um dos modos de vibração do sistema máquina-ferramenta-peça. A superfície ondulada produzida no passo de usinagem anterior é removida durante o próximo passo, o qual deixará uma superfície também ondulada. Dependendo da fase entre duas ondas sucessivas, a largura do cavaco pode crescer exponencialmente enquanto oscila na frequência do *chatter*, a qual é próxima, mas não igual, à frequência do modo dominante do sistema (Altintas, 2012).

Os primeiros modelos sobre *chatter* em corte ortogonal foram apresentados por Tlustý e Polacek¹ (1957 apud Siddhpura e Paurobally, 2012) e Tobias e Fishwick (1958b). Nesses trabalhos, foram realizados ensaios de corte ortogonal por mergulho nos quais a fixação da peça de largura a se dava por meio de um eixo flexível girando com velocidade n (Figura 2.26), conforme descrito a seguir. Vale destacar que o amortecimento do processo, devido ao contato do flanco da ferramenta e da mudança de velocidade durante o corte, será negligenciado (Altintas, 2012).

¹ TLUSTY, J., POLACEK, M., Beispiele der behandlung der selbsterregten Schwingung der Werkzeugmaschinen, **FoKoMa**, Hanser Verlag, Munchen, 1957.

Figura 2.26 –Montagem do ensaio de chatter (Adaptado de Altintas (2012)).

O avanço da ferramenta, própria para corte ortogonal e com a aresta de corte posicionada na linha de centro do eixo da peça, faz com que haja duas forças atuando sobre a mesma, uma na direção radial, chamada de força de avanço (F_f), e outra na direção tangencial, chamada força de corte (F_c). Considerando apenas um GDL, no sentido do avanço da ferramenta, e que a ferramenta e não a peça se movimentam no eixo y , o sistema dinâmico de corte ortogonal pode ser representado pela Figura 2.27.

Figura 2.27 – Modelo de chatter no corte ortogonal com um GDL (Adaptado de Schmitz e Smith, 2009)

As forças F_c e F_f podem ser definidas em função da largura de corte a [mm] e da profundidade de corte h_0 [mm]:

$$F_c = K_{tc} a h_0 \text{ e } F_f = K_{fc} a h_0, \quad (2.204)$$

em que K_{tc} e K_{fc} são, respectivamente, a pressão específica de corte tangencial e de avanço, de unidade $[N/mm^2]$.

É válido ressaltar que, antes do início dos ensaios de *chatter*, a superfície da peça não apresentava ondulações. Porém, conforme a ferramenta avança, uma superfície ondulada começa a surgir devido ao balanço do eixo na direção do avanço (eixo y). Quando a segunda revolução da peça se inicia, a superfície a ser usinada já apresenta ondulações resultantes do passe anterior (Figura 2.28-a). Caso não haja uma defasagem entre essas ondas, a superfície da peça permanecerá ondulada, mas o processo de usinagem não experimentará o fenômeno do *chatter* (Figura 2.28-b); caso contrário, o *chatter* ocorrerá (Figura 2.28-c) (Schmitz e Smith, 2009).

Figura 2.28 - a) Usinagem de uma peça com vibração deixada por um passe anterior; b) Usinagem com as ondas atual e anterior em fase; c) Usinagem com defasagem entre as ondas atual e anterior (Adaptado de Schmitz e Smith, 2009)

De qualquer forma, a peça apresentará em sua superfície duas ondas: uma causada pelo passe de usinagem atual e outra causada pelo passe anterior (Altintas, 2012). No caso em que a espessura do cavaco se torna variante no tempo, o modelo de usinagem passa a diferir daquele proposto por Ernst e Merchant (1941), no qual h_0 é uma constante, e passa-se de um modelo estático para um modelo dinâmico.

A espessura (ou profundidade de corte) é variável em função do tempo (

Figura 2.29) e definida pela seguinte equação:

$$h(t) = h_0 - y(t) + y(t-T) \quad , \quad (2.205)$$

na qual h_0 é a espessura do cavaco esperada [mm] (numericamente igual à velocidade de avanço), $y(t)$ é a amplitude de vibração atual (modulação interna) [mm], $y(t-T)$ é a amplitude da vibração do passe de usinagem anterior (modulação interna) [mm], ambas na direção da velocidade de avanço e T é o período de revolução da peça [s].

Figura 2.29 – Espessura de corte dinâmica (Adaptado de Ganguli et al., 2006)

Tomando a velocidade de rotação n em revoluções por minuto [rpm], o período T [s] pode ser definido como:

$$T = \frac{60}{n} \quad . \quad (2.206)$$

Agora, a Equação (2.204) pode ser escrita em função da profundidade de corte dinâmica, dada pela Equação (2.205):

$$F_c(t) = K_{tc} ah(t) \text{ e } F_f(t) = K_{fc} ah(t) \quad , \quad (2.207)$$

ou

$$F_c(t) = K_{tc}a(h_0 - y(t) + y(t-T)) \quad \text{e} \quad F_f(t) = K_{fc}a(h_0 - y(t) + y(t-T)) \quad (2.208)$$

Desta forma, tratando o sistema como sendo linear, a equação dinâmica para um GDL, na direção do avanço da ferramenta, pode ser escrita como:

$$m_y \ddot{y}(t) + c_y \dot{y}(t) + k_y y(t) = F_f(t) \quad (2.209)$$

e

$$m_y \ddot{y}(t) + c_y \dot{y}(t) + k_y y(t) = K_{tc}a(h_0 - y(t) + y(t-T)) \quad , \quad (2.210)$$

em que m_y , c_y e k_y são a massa, o amortecimento e a rigidez do conjunto da ferramenta de corte, respectivamente.

Devido ao fato da força ser dependente das soluções de vibração presente e passada, a expressão de vibração do *chatter* é uma equação diferencial com tempo de atraso. Considerando isso, caso a vibração seja muito grande ($y(t) - y(t-T) > h_0$), a ferramenta perde contato com a peça, a espessura do cavaco passa a ser zero e força se torna nula. Esses saltos da ferramenta podem complicar a obtenção da espessura do cavaco em passes posteriores, causando o chamado efeito regenerativo múltiplo (Altintas, 2012).

Abordando o processo de usinagem como um sistema dinâmico, deve-se observar os limites de estabilidade com bastante atenção para se evitar instabilidades.

2.5.2 Análise de estabilidade do *chatter*

Uma das técnicas de análise em estabilidade é por meio da transformada de Laplace, ou seja, uma análise no domínio da frequência.

Assim, aplicando A transformada na Equação (2.209), tem-se:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F_f(s)} = \frac{1}{s^2 m + s c + k} \quad (2.211)$$

A Equação (2.211) também pode ser reescrita como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{\omega_n^2}{k_y(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} . \quad (2.212)$$

Portanto, pode-se escrever:

$$Y(s) = F(s)G(s) . \quad (2.213)$$

A transformada da Equação (2.205) resulta na espessura dinâmica do cavaco no domínio de Laplace:

$$H(s) = H_0(s) + (e^{-sT} - 1)Y(s) , \quad (2.214)$$

na qual se pode notar o atraso causado pelo passe de usinagem anterior.

E a transformada da Equação (2.207) é dada por:

$$F_f(s) = K_{fc} a H(s) , \quad (2.215)$$

a qual representa a força de corte dinâmica.

Substituindo a Equação (2.213) na Equação (2.214), obtém-se:

$$H(s) = H_0(s) + (e^{-sT} - 1)F_f(s)G(s) . \quad (2.216)$$

Colocando a Equação (2.215) na Equação (2.216), chega-se a:

$$\frac{H(s)}{H_0(s)} = \frac{1}{1 + K_{fc} a G(s)(1 - e^{-sT})} . \quad (2.217)$$

A Equação (2.217) é uma função transferência de malha fechada entre a espessura dinâmica (ou real) e a espessura do cavaco desejada (ou profundidade de corte estabelecida) e pode ser representada por diagrama de blocos (Figura 2.30).

Figura 2.30 – Diagrama de blocos em malha fechada de Merrit (Adaptado de Merrit, 1965)

O denominador é a equação característica da FT e pode ser usada na determinação da máxima profundidade de corte permitida (a_{lim}) para que o sistema permaneça estável. Para tanto, iguala-se a equação característica (denominador) a zero:

$$1 + K_{fc} a G(s) (1 - e^{-sT}) = 0 \quad . \quad (2.218)$$

Se as raízes do sistema forem do tipo $s = \sigma + j\omega_c$ e o valor crítico de σ for positivo ($\sigma > 0$), a solução no domínio do tempo será do tipo $e^{+\sigma t}$ e o sistema experimentará vibrações de *chatter* com crescimento infinito e, conseqüentemente, se tornará instável. Por outro lado, se o valor de σ for negativo ($\sigma < 0$), a solução no domínio do tempo será do tipo $e^{-|\sigma|t}$, as vibrações serão amortecidas e o sistema será estável e livre de *chatter*. Quando a parte real é igual a zero ($\sigma = 0$ e $s = j\omega$), o sistema é criticamente estável e o sistema oscilará com uma amplitude constante na frequência de *chatter* (ω_c). A frequência de *chatter* não é a mesma da frequência natural do sistema, pois possui termos adicionais em relação à função transferência da estrutura. Apesar disso, a frequência do *chatter* é próxima do modo de vibração da estrutura (Altintas, 2012).

Substituindo s por $j\omega$ na Equação (2.218), encontra-se:

$$1 + K_{fc} a_{lim} G(j\omega) (1 - e^{-j\omega T}) = 0 \quad , \quad (2.219)$$

em que a_{lim} é a máxima profundidade de corte para uma usinagem livre de *chatter*.

Separando a Equação (2.219) em parte real e imaginária $(G(j\omega) = \text{Re}(G(j\omega)) + j\text{Im}(G(j\omega)) = G_{\text{Re}}(j\omega) + jG_{\text{Im}}(j\omega))$ e usando a identidade de Euler $(e^{-j\omega} = \cos(j\omega) - j\sin(j\omega))$, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} & \{1 + K_{tc} a_{\text{lim}} [G_{\text{Re}}(j\omega)(1 - \cos \omega_c T) - G_{\text{Im}}(j\omega)(\sin \omega_c T)]\} + \\ & + j \{K_{tc} a_{\text{lim}} [G_{\text{Re}}(j\omega) \sin \omega_c T + G_{\text{Im}}(j\omega)(1 - \cos \omega_c T)]\} = 0 \end{aligned} \quad (2.220)$$

e tanto a parte real quanto a imaginária devem ser iguais a zero. Tomando primeiro a parte imaginária, chega-se em:

$$G_{\text{Re}}(j\omega) \sin \omega_c T + G_{\text{Im}}(j\omega)(1 - \cos \omega_c T) = 0, \quad (2.221)$$

o que leva a:

$$\tan(\psi) = \frac{G_{\text{Im}}(j\omega)}{G_{\text{Re}}(j\omega)} = \frac{\sin \omega_c T}{\cos \omega_c T - 1}, \quad (2.222)$$

em que ψ é a mudança de fase causada pela função transferência da estrutura e, usando relações trigonométricas, pode ser reescrita como:

$$\tan(\psi) = \frac{\cos \frac{\omega_c T}{2}}{-\sin \frac{\omega_c T}{2}} = \tan \left[\left(\frac{\omega_c T}{2} \right) - \frac{3\pi}{2} \right] \quad (2.223)$$

e

$$\omega_c T = 3\pi + 2\psi \rightarrow \psi = \frac{(\omega_c T - 3\pi)}{2} \pm K\pi. \quad (2.224)$$

O cálculo correto de ψ depende dos valores de $G_{\text{Im}}(s)$ (Silva, 2007):

$$\begin{cases} G_{\text{Im}}(s) < 0 \rightarrow \psi = \frac{(\omega_c T - 3\pi)}{2} + K\pi \\ G_{\text{Im}}(s) > 0 \rightarrow \psi = \frac{(\omega_c T - 3\pi)}{2} - K\pi \end{cases}.$$

As funções $G_{\text{Re}}(j\omega)$ e $G_{\text{Im}}(j\omega)$ para 1GDL foram obtidas anteriormente e podem ser escritas como na Equação (2.80).

Pode-se reescrever a Equação (2.224), sabendo que $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$, como:

$$f_c T = \frac{(2\Psi + 3\pi)}{2\pi} \pm K . \quad (2.225)$$

A velocidade de rotação da peça e a frequência de vibração do chatter tem uma relação que afeta a espessura do cavaco dada pela seguinte equação (Altintas, 2012):

$$f_c T = \frac{f_c}{n} = K + \frac{\varepsilon}{2\pi} , \quad (2.226)$$

na qual, K é o número inteiro de ondas sobre a superfície da peça e ε é o ângulo da diferença de fase entre o passe anterior e o atual. Se ε é diferente de zero (ou 2π), a espessura do cavaco muda continuamente.

Das Equações (2.225) e (2.226), tem-se que:

$$\varepsilon = 3\pi + 2\psi \quad (2.227)$$

e que:

$$T = \frac{2K\pi + \varepsilon}{2\pi f_c} \rightarrow n = \frac{60}{T} , \quad (2.228)$$

na qual n [rpm] é velocidade de rotação da peça e T [s] é o período de uma revolução da mesma.

A profundidade de corte crítica a_{lim} é encontrada a partir da parte real da Equação (2.220) (Turkes *et al.*, 2011):

$$1 + K_{tc} a_{\text{lim}} [G_{\text{Re}}(s)(1 - \cos \omega_c T) - G_{\text{Im}}(s)(\sin \omega_c T)] = 0 \quad (2.229)$$

e é dada por:

$$a_{\text{lim}} = \frac{-1}{2K_{fc}G_{\text{Re}}(s)} = -\frac{k_y}{k_t} \frac{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}{2(1-r^2)}, \quad (2.230)$$

em que k_y é a rigidez do sistema na direção y e, lembrando, $r = \frac{\omega_c}{\omega_n}$.

Uma vez que a profundidade de corte é uma grandeza física, um valor negativo para a_{lim} não faz sentido e, portanto, a Equação (2.230) admite apenas valores negativos de $G_{\text{Re}}(s)$ e, nesse caso, o *chatter* pode ocorrer em qualquer frequência. Se a_{lim} for escolhido quando $G_{\text{Re}}(s)$ tiver seu valor mínimo, o *chatter* será evitado em qualquer velocidade de rotação do eixo-árvore. Além disso, pode-se notar que a profundidade de corte é inversamente proporcional à flexibilidade da estrutura e à pressão específica de corte do material, de forma que quanto mais duro o material, maior será sua pressão específica e, conseqüentemente, menor a profundidade de corte. De maneira análoga, quanto mais flexível a estrutura da máquina-ferramenta, menor será a profundidade de corte permitida (Altintas, 2012).

A função $\text{Re}(G(s))$ é mostrada na Equação (2.80) e assume valores positivos quando $r < 1$, ou seja, quando $\omega_c < \omega_n$. Isso significa que o sistema será válido para valores de ω_c maiores que a frequência natural do sistema da máquina-ferramenta e que as frequências de *chatter* também deverão ser maiores que a frequência natural do sistema de 1 GDL para torneamento.

Fazendo uso das expressões acima, Tlustý e Polacek (1963) e Merrit (1965) criaram um gráfico chamado diagrama de lóbulos de estabilidade (Figura 2.31), o qual indica regiões em que a usinagem será livre de *chatter* (região abaixo dos lóbulos) dada uma profundidade de corte e uma velocidade de rotação do eixo-árvore (Altintas e Weck, 2004).

Figura 2.31 – Diagrama de lóbulos de estabilidade (Adaptado de Erturk, A. e Inman, D. J., 2008b)

O gráfico de Nyquist da Figura 2.32, obtido a partir da Equação (2.230), foi usado por Gurney e Tobias (1961) e posteriormente por Minis *et al.* (1990a; b; c) para a análise gráfica da estabilidade dos sistema.

Figura 2.32 - Gráfico de Nyquist (Adaptado de Altintas, 2012)

É possível verificar que $G(j\omega)e^{-j\omega_c T}$ é determinado pelos vetores $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$, medido no sentido anti-horário, o ângulo de fase ε é definido por $2 \tan^{-1} \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \right)$. Além

disso, a diferença entre os vetores $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ equivale a duas vezes a parte real $(G_{RE}(j\omega_c))$ de $G(j\omega_c)$, o que corresponde a $\frac{1}{K_f a}$.

Analisando a Equação (2.230), vê-se que quando $G_{RE}(j\omega_c)$ tende a zero, o valor de a_{lim} tende ao infinito (isso ocorre quando $\omega_c \rightarrow \omega_n$). Porém, na Figura 2.33 é possível ver que o valor de a_{lim} acaba limitado pela intersecção do lóbulo adjacente. Da mesma forma, $G_{RE}(j\omega_c)$ também tende a zero quando $\omega_c \rightarrow \infty$ e o valor de a_{lim} tende ao infinito.

Figura 2.33 - Detalhe do gráfico dos lóbulos de estabilidade (Adaptado de Schmitz e Smith, 2009)

Pela Figura 2.32 também se pode fazer outras análises: a medida que a parte real diminui, o valor de ε aumenta, de maneira que quando $\varepsilon = 360^\circ$, tem-se o valor máximo de a_{lim} . Mas $\varepsilon = 360^\circ$ indica que as ondas superficiais da peça estão em fase e que $G_{RE}(j\omega_c) = 0$. Quando $\varepsilon = 180^\circ$, também se verifica que $G_{RE}(j\omega_c) = 0$. E o pior caso ocorre quando $\varepsilon = 270^\circ$, implicando em $\omega_c = \omega_n(1 + \zeta)$ e no ponto inferior

do lóbulo $\left(a_{lim,crit} = \frac{2k_y \zeta (1 + \zeta)}{K_{fc}} \right)$ (Yue, 2006; Schmitz e Smith, 2009).

2.5.3 Estabilidade do *chatter* em operações de torneamento

Na maioria dos processos de torneamento a ferramenta possui geometria e posição que geram forças em três direções, as quais são definidas a seguir de acordo com a Figura 2.34.

$$\begin{aligned} F_c &= K_{tc}bh \\ F_f &= K_{fc}bh , \\ F_r &= K_{rc}bh \end{aligned} \quad (2.231)$$

que é igual a Equação (2.24) quando se despreza as forças nas arestas.

Figura 2.34 – Estabilidade em processo de torneamento (Adaptado de Altintas, 2012)

Também se pode escrever que:

$$F_u = \sqrt{F_c^2 + F_f^2 + F_r^2} = bhK_{tc} \sqrt{1 + \left(\frac{K_{fc}}{K_{tc}}\right)^2 + \left(\frac{K_{rc}}{K_{tc}}\right)^2} = K_u bh . \quad (2.232)$$

As forças agindo sobre a aresta de corte são expressas por:

$$\begin{aligned}
 F_c &= F_u \cos \delta \\
 F_f &= F_u \cos \delta \tan \beta_a \\
 F_r &= F_u \cos \delta \tan \beta_r
 \end{aligned}
 \tag{2.233}$$

e

$$\begin{aligned}
 \cos \delta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{K_{fc}}{K_{tc}}\right)^2 + \left(\frac{K_{rc}}{K_{tc}}\right)^2}} \\
 \tan \beta_a &= \frac{K_{fc}}{K_{tc}} \\
 \tan \beta_r &= \frac{K_{rc}}{K_{tc}}
 \end{aligned}
 \tag{2.234}$$

Projetando essas forças no sistema de coordenadas da máquina-ferramenta, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \psi_r & -\cos \psi_r \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \psi_r & \sin \psi_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \delta \\ \cos \delta \tan \beta_a \\ \cos \delta \tan \beta_r \end{Bmatrix} F_u
 \tag{2.235}$$

Agora, assumindo que haja flexibilidade da máquina-ferramenta nas três direções e que sua dinâmica estrutural seja desacoplada nessas direções, pode-se escrever que:

$$\begin{Bmatrix} x(j\omega_c) \\ y(j\omega_c) \\ z(j\omega_c) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{xx}(j\omega_c) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{yy}(j\omega_c) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{zz}(j\omega_c) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x(j\omega_c) \\ F_y(j\omega_c) \\ F_z(j\omega_c) \end{Bmatrix}
 \tag{2.236}$$

ou

$$\{X(j\omega_c)\} = [\phi(j\omega_c)] \{F(j\omega_c)\}
 \tag{2.237}$$

Projetando esses valores na espessura do cavaco, na direção perpendicular à aresta de corte, encontra-se:

$$h_d(t) = \begin{Bmatrix} \text{sen } \psi_r & 0 & \text{cos } \psi_r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -[x(t) - x(t-T)] \\ -[y(t) - y(t-T)] \\ -[z(t) - z(t-T)] \end{Bmatrix}, \quad (2.238)$$

que no domínio da frequência resulta em:

$$h_d(j\omega_c) = -(1 - e^{-j\omega_c T}) \begin{Bmatrix} \text{sen } \psi_r & 0 & \text{cos } \psi_r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x(j\omega_c) \\ y(j\omega_c) \\ z(j\omega_c) \end{Bmatrix}. \quad (2.239)$$

Manipulando as equações dessa seção, encontra-se:

$$h_d(j\omega_c) = -(1 - e^{-j\omega_c T}) \Phi_0(j\omega_c) F_u(j\omega_c), \quad (2.240)$$

na qual

$$\Phi_0(j\omega_c) = \Sigma d_{pq} \Phi_{pq}(j\omega_c) \quad \forall (p,q) \in (x,y,z). \quad (2.241)$$

Define-se $\Phi_0(j\omega_c)$ como função orientada de transferência em frequência e d_{pq} como fatores direcionais (Altintas, 2012) e estes fatores são dados por:

$$\begin{aligned} d_{xx} &= -\cos \delta \left(\text{sen}^2 \psi_r \tan \beta_a + \frac{1}{2} \text{sen} 2\psi_r \tan \beta_r \right) \\ d_{xy} &= -\cos \delta \text{sen } \psi_r \\ d_{xz} &= \cos \delta \left(-\frac{1}{2} \text{sen} 2\psi_r \tan \beta_a + \text{sen}^2 \psi_r \tan \beta_r \right) \\ d_{yx} &= d_{yy} = d_{yz} = 0 \\ d_{zx} &= -\cos \delta \left(\frac{1}{2} \text{sen} 2\psi_r \tan \beta_a + \cos^2 \psi_r \tan \beta_r \right) \\ d_{zy} &= -\cos \delta \cos \psi_r \\ d_{zz} &= -\cos \delta \left(-\cos^2 \psi_r \tan \beta_a + \frac{1}{2} \text{sen} 2\psi_r \tan \beta_r \right) \end{aligned} \quad (2.242)$$

Substituindo F_u na Equação (2.216), a equação característica de estabilidade se torna:

$$1 + (1 - e^{-j\omega_c T}) K_u a_{\text{lim}} \Phi_0(j\omega_c) = 0. \quad (2.243)$$

Embora esta análise não tenha resultados sempre satisfatórios, principalmente em baixas velocidades de corte (Altintas, 2012), por razões como não linearidades do processo (Tlustý e Ismail, 1981; Pratt *et al.*, 1999; Deshpande e Fofana, 2001; Ahmadi e Ismail, 2010) e simplificações do modelo, o uso do diagrama dos lóbulos de estabilidade pode fornecer informações relevantes sobre o processo de usinagem, a máquina-ferramenta e os parâmetros envolvidos no processo, além de servir como ferramenta de comparação entre o desempenho de várias máquinas-ferramenta.

Como forma de melhorar o modelo, o trabalho de Eynian e Altintas (2009) passa a considerar o raio de ponta da ferramenta e o amortecimento envolvido no processo de torneamento. Tyler e Schmitz (2013) também apresentaram um modelo sobre o amortecimento do processo de usinagem.

Contudo, para os trabalhos aqui desenvolvidos, o modelo apresentado é suficiente.

2.6 Supressão de *chatter*

Com o objetivo de se evitar o *chatter*, algumas soluções foram propostas por diversos autores. Talvez a mais óbvia seja usar o diagrama dos lóbulos de estabilidade e utilizar parâmetros que permitam o trabalho sempre na região estável do mesmo. Neste tipo de abordagem, as características do sistema não sofrem alterações. Por outro lado, nem sempre isso se tornará a melhor opção em termos de produtividade.

Modelos baseados em métodos experimentais podem fornecer um diagrama de lóbulos de estabilidade bem próximo da realidade, mas com o inconveniente de ser específico para aquele sistema estudado (máquina-ferramenta, suporte de ferramenta, inserto, material da peça) (Quintana e Ciurana, 2011).

Características do processo também foram estudadas por Knight (1972) que, por meio de experimentos, observou que o limite de estabilidade aumentava quando a velocidade de corte e o ângulo de saída eram incrementados e por Liu e Liu (1985) e Xiao *et al.* (2002), os quais abordaram o efeito da geometria da ferramenta de

corte e como a mudança de alguns ângulos relativos entre peça e ferramenta durante o processo de usinagem poderia evitar o *chatter*.

Modelos baseados em elementos finitos (Baker e Rouch, 2002; Mahnama e Movahhedy, 2010) também já foram estudados e o uso de ferramentas constituídas de materiais com maior rigidez e amortecimento foi testado por Takeyama *et al.* (1984) para evitar o *chatter*.

Shiraishi *et al.* (1988) e Shiraishi *et al.* (1991) usaram um modelo de controle baseado em espaço de estados para acionar um motor acoplado ao suporte de ferramenta.

Em geral, em processos de torneamento interno (ou de mandrilamento) tais mecanismos são aplicados nos suportes de ferramentas, pois estes costumam ser os maiores limitadores do processo (RIVIN, E., 2000).

Choudhury e Sharath (1995) e Choudhury *et al.* (1997) mediram o deslocamento entre peça e ferramenta por meio de um sensor ótico e usaram o sinal dessa medição – com fase invertida – para acionar um atuador no suporte de ferramenta.

Outros autores, por sua vez, propuseram a variação da rotação do eixo-árvore para evitar o *chatter* quando o mesmo fosse detectado no processo (Smith e Tlustý, 1992; Tangjitsitcharoen, 2009; Hajikolaie *et al.*, 2010; Wu e Chen, 2010; Yoneoka *et al.*, 2012).

Mecanismos como amortecedores dinâmicos (Rivin *et al.*, 1989; Rivin e Kang, 1992; Tarng *et al.*, 2000), amortecedores passivos (Miguélez *et al.*, 2010), alteração da massa do sistema (Tewani *et al.*, 1995) e amortecedores de impacto (Ema e Marui, 2000) também foram propostos como solução para suprimir o *chatter*.

O uso de fluidos magneto-reológicos (fluidos que podem ter sua capacidade de escoamento alterada por campo magnético) associados a estratégias de controle em supressão de *chatter* foi estudado por G. Pan *et al.* (1996), Claesson e Hakansson (1998), Pratt e Nayfeh (2001) e Sajedipour *et al.* (2010).

Aliás, o uso de materiais inteligentes – entre os quais estão os magneto-reológicos, piezelétricos e as ligas com memória de forma – tem se tornado cada vez

mais objeto de estudo para diminuir ou mesmo eliminar vibrações em estruturas. Rao e Sunar (1994) e Hurlebaus e Gaul (2006) oferecem uma lista de trabalhos nessa direção.

Os materiais piezelétricos, em particular, possuem a característica de serem usados tanto como sensores quanto como atuadores, além de converter a energia mecânica das vibrações em energia elétrica e possibilitar sua reutilização (Sodano *et al.*, 2004; Anton e Sodano, 2007; Saadon e Sidek, 2011).

Aplicações em usinagem também estão se tornando objetos de estudos: Olgac e Hosek (1998) controlaram a diferença de fase do *chatter* com materiais piezelétricos. Aplicação de pastilhas piezelétricas sobre o suporte de ferramenta mostraram resultados promissores nos trabalhos de Hakansson *et al.* (1999), Pan e Su (2001), Andrén *et al.* (2003), Lagö (2002) e de Radecki *et al.* (2010)

Wang, Su e Tan (2003) foram outros que usaram material piezelétrico no suporte de ferramentas, mas usaram modelos de dois GDL e avaliaram resultados em torneamento e mandrilamento.

As pesquisas de Ganguli (2003) tratam do controle ativo de vibrações por meio de pastilhas piezelétricas em torneamento e fresamento, enquanto Stoppler e Douglas (2008) usaram piezelétricos controlados em paralelo para compensar a vibração na estrutura. Uma seleção de trabalhos abordando o uso de materiais inteligentes em processos de usinagem foi apresentado por Park *et al.* (2007).

Essas pesquisas mostram que o uso de materiais piezelétricos é capaz de alterar a dinâmica de estruturas mecânicas e, por isso, quando aplicados em máquinas-ferramenta e seus acessórios, podem ser um meio de evitar o *chatter*. Foi nessa direção que Ganguli *et al.* (2007) apresentaram um trabalho no qual modificavam o comportamento de uma estrutura por meio da alteração do coeficiente de amortecimento da mesma.

Para tanto, escreveram a Equação (2.210) no domínio da frequência, resultando em:

$$\left[-m_y \omega_c^2 + j\omega_c c_y + k_y\right] Y(j\omega_c) = K_{fc} a \left[h_0 - (1 - e^{-j\omega_c T}) Y(j\omega_c) \right] . \quad (2.244)$$

Em seguida, desprezaram o efeito de h_0 em uma análise linear, chegando em:

$$\left[-m_y \omega_c^2 + j\omega_c \left(c_y + K_{fc} a \frac{\sin \omega_c T}{\omega_c} \right) \right] Y(s) + \left[(k_y + K_{fc} a - K_{fc} a \cos \omega_c T) \right] Y(j\omega_c) = 0 . \quad (2.245)$$

Igualando as partes real e imaginária a zero, chega-se a:

$$a = -c_y \frac{\omega_c}{K_{fc} \sin \omega_c T} , \quad (2.246)$$

na qual se pode observar que a profundidade máxima de corte (e o limite de estabilidade) é proporcional ao coeficiente de amortecimento da estrutura.

Um dos meios de se aumentar tal coeficiente é por meio de materiais piezelétricos acoplados à estrutura (Hagood e Flotow, 1991; Lesieutre *et al.*, 2004; Park *et al.*, 2007; Erturk, A. e Inman, D. J., 2008a; Preumont *et al.*, 2008; Wilhelm e Rajamani, 2009).

Hagood e Flotow (1991) apresentaram um trabalho em que a energia mecânica de uma estrutura foi dissipada por meio de material piezelétrico acoplado à mesma e conectado a circuitos elétricos de componentes passivos. Essa conexão (*shunt*) foi feita de duas maneiras: a primeira, com apenas um resistor ligado nos terminais do material piezelétrico; a segunda, usando um resistor e um indutor em série. Além disso, construíram um modelo eletromecânico para determinar a transferência da energia mecânica para os componentes elétricos usando os coeficientes de acoplamento piezelétrico.

Erturk e Inman (2008b) estudaram numericamente o amortecimento passivo do suporte de ferramentas usando material piezelétrico, tanto em aplicações de torneamento quanto de mandrilamento.

Há uma série de pesquisas relacionadas a maneiras de se detectar e evitar o chatter e muitas podem ser encontradas nos trabalhos de Liang *et al.* (2004), Quintana e Ciurana (2011) e Siddhpura e Paurobally (2012).

2.7 Materiais piezelétricos

Alguns materiais, tal como o quartzo, possuem uma dependência entre força mecânica e carga elétrica. Quando os íons da estrutura cristalina passam a se deslocar devido a uma força externa, uma polarização elétrica pode ser detectada por meio de eletrodos conectados à superfície de tais materiais. Este efeito – chamado efeito piezelétrico direto – foi cientificamente explicado pela primeira vez por Jacques e Pierre Curie em 1880 (Drossel e Wittstock, 2008). O efeito é reversível – uma tensão aplicada sobre os eletrodos resultará em uma deformação mecânica – e é chamado efeito piezelétrico inverso (ou reverso). No primeiro caso, os materiais piezelétricos podem ser usados para desempenharem funções de sensores e no segundo, de atuadores.

As equações que regem o efeito piezelétrico linear são definidas por norma (Janocha, 2007) e relacionam vetor densidade de deslocamento elétrico (D) [Coulomb/m²], vetor deformação mecânica (S) [m], vetor tensão mecânica (T) [N/m²] e vetor campo elétrico (E) [V/m] e são dadas por:

$$\{D\} = [d]\{T\} + [\varepsilon^T]\{E\} \quad (2.247)$$

$$\{S\} = [s^E]\{T\} + [d]_t\{E\} \quad (2.248)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} D \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^T & d \\ d_t & s^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E \\ T \end{Bmatrix} \quad (2.249)$$

nos quais $[d]$ é a matriz de constante piezelétrica [m/V ou C/N], que indica a intensidade do efeito piezelétrico, $[\varepsilon^T]$ é a matriz de constante de permissividade dielétrica do piezelétrico quando $[T]$ também é constante [F/m], $[s^E]$ é a matriz do inverso do módulo de Young [m²/N] e o subíndice t indica a transposta de $[d]$.

Pode-se observar que a expressão $\{D\} = [d]\{T\}$ indica o comportamento capacitivo do piezelétrico.

Se a Equação (2.248) for rescrita para isolar o termo $\{T\}$, chega-se a:

$$\{T\} = [c^E]\{S\} - [e]_t\{E\} \quad (2.250)$$

e a Equação (2.247) se torna:

$$\{D\} = [e]\{S\} + [\varepsilon^T](1 - [k^2])\{E\}, \quad (2.251)$$

em que $[c^E] = [s^E]^{-1}$ é o módulo de Young submetido a campo elétrico constante $[N/m^2]$, $[e] = [d][s^E]^{-1}$ e $[k^2] = [d^2][s^E]^{-1}[\varepsilon^T]^{-1}$ é chamado de coeficiente de acoplamento piezelétrico do material.

O coeficiente de acoplamento representa a relação entre energia convertida e energia recebida pelo piezelétrico, portanto valores mais altos induzem a uma melhor eficiência do dispositivo (Preumont, 2006).

Um dos materiais piezelétricos mais usados atualmente é a cerâmica de PZT (titanato zirconato de chumbo).

2.8 Modelo eletromecânico de parâmetros distribuídos para vigas com material piezelétrico

Para tanto, usaram o modelo de viga de Euler-Bernoulli (Equação (2.132)) para representar o suporte de ferramenta, porém considerando o efeito de uma placa de material piezelétrico acoplada a tal viga, de acordo com a Figura 2.35, proposto por Erturk e Inman (2008):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} M(x,t) + \alpha_2 I \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} + c_a(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} dx + m(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \\ = F(t) \delta(x - L_b) . \end{aligned} \quad (2.252)$$

O termo $M(x,t)$ é o momento interno da estrutura, $w(x,t)$ é a deflexão transversal, $\alpha_2 I$ é o coeficiente de amortecimento equivalente com o momento de inércia da seção transformada, $c_a(x)$ é o amortecimento viscoso causado pelo ar,

$m(x)$ é a massa por unidade de comprimento, $F(t)$ é a força aplicada na estrutura, $\delta(x - L_b)$ é a função delta de Dirac e L_b é o comprimento da viga.

Figura 2.35 - Viga engastada representando o suporte de ferramenta com uma camada de material piezoeletrico acoplado (Adaptado de ERTURK, A.; INMAN, D. J., 2008b)

A seção transversal da estrutura da Figura 2.35 está representada na Figura 2.36, na qual os termos h_s, h_p, h_a, h_b, h_c e h_{pc} são, respectivamente, a altura da viga, a altura da cerâmica piezoeletrica, a distância entre a base da viga e a linha neutra, a distância entre o topo da cerâmica piezoeletrica e a linha neutra, a distância entre o centro da cerâmica piezoeletrica e a linha neutra.

Figura 2.36 - Seção transversal da viga e da camada piezoeletrica (Cervelin *et al.*, 2010)

Para uma dada estrutura, denotada pelo índice s , e uma camada de material piezoeletrico, este denotada pelo índice p , as relações entre a deformação $[T]$ e a tensão $[S]$ são dadas por:

$$T_1^S = Y_S S_1^S \quad (2.253)$$

$$T_1^P = Y_P (S_1^S - d_{31} E_3) \quad (2.254)$$

Onde Y_S e Y_P são o Módulo de Elasticidade do material da viga e do piezo, respectivamente, E_3 é o campo elétrico na direção y e d_{31} é a constante piezelétrica para uma tensão axial na direção x quando o material é polarizado na direção y . O momento de flexão $M(x,t)$ no ponto x pode ser obtido através da integração do primeiro momento da distribuição de tensões em uma seção transversal sobre a área (Erturk, A. e Inman, D. J., 2008a):

$$M(x,t) = -\int_{h_a}^{h_b} T_1^S b y dy - \int_{h_b}^{h_c} T_1^P b y dy, \quad (2.255)$$

no qual b é a largura da viga e da cerâmica piezelétrica, $h_a = -h_{al}$, $h_b = h_{bl} - h_p$, $h_{pc} = h_{bc}$, $h_c = h_{bl}$ e h_{al} , h_{bl} e h_{bc} são dados pela Equação (2.202).

Substituindo as Equações (2.253) e (2.254) na Equação (2.255), além de considerar $E_3 = \frac{-e(t)}{h_p}$, onde $e(t)$ é a tensão elétrica na camada de material piezelétrico, $M(x,t)$ pode ser descrito como (Rao, 2011):

$$M(x,t) = YI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \nu e(t), \quad (2.256)$$

na qual YI é a rigidez de flexão da estrutura de seção composta e ν é o termo de acoplamento. Esses termos são descritos pelas Equações (2.257) e (2.258), respectivamente:

$$YI = b \left[\frac{Y_S (h_b^3 - h_a^3) + Y_P (h_c^3 - h_b^3)}{3} \right] \quad (2.257)$$

e

$$\nu = -\frac{Y_P d_{31} b}{2h_p} (h_c^2 - h_b^2) [H(x - x_1) - H(x - x_2)] . \quad (2.258)$$

O termo $H(x)$ é a função de Heaviside (função degrau unitário) e é usado para computar o comprimento $(x_2 - x_1)$ e a posição da camada piezelétrica na superfície da viga (posição inicial em x_1 e final em x_2).

A equação governante do movimento pode ser encontrada substituindo a Equação (2.256) na Equação (2.252):

$$\begin{aligned} YI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \alpha_2 I \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} + c_a(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} dx + m(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \\ +ve(t) \left[\frac{d\delta(x)}{dx} - \frac{d\delta(x-L_p)}{dx} \right] = F(t) \delta(x-L_b) , \end{aligned} \quad (2.259)$$

em que o termo L_p é o comprimento da cerâmica piezelétrica e, neste caso, $L_p = L_b$.

A resposta da estrutura pode ser determinada usando superposição modal (Rao e Shin, 1999) e, como visto anteriormente, a operação fundamental da superposição modal é a transformação dos deslocamentos $w(x,t)$ em coordenadas modais η_r que estão associadas aos modos de vibrar do sistema ϕ_r . Desta forma, qualquer deslocamento físico pode ser calculado através da superposição adequada das amplitudes dos modos de vibração (Equação (2.176)):

$$w(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r(t) , \quad (2.260)$$

em que $\phi_r(x)$ e $\eta_r(t)$ são, respectivamente, as autofunções e as coordenadas modais do r -ésimo modo, ambas normalizadas pela massa.

Usando a transformação modal dada pela Equação (2.260) na Equação (2.259) pode-se encontrar a equação modal de movimento aplicando as condições de ortogonalidade (Erturk, A. e Inman, D. J., 2008b):

$$\frac{d\eta(t)}{dt^2} + 2\zeta_r \omega_r \frac{d\eta(t)}{dt} + \omega_r^2 \eta_r(t) + \chi_r e(t) = F(t) \phi_r(L_b) , \quad (2.261)$$

na qual

$$\chi_r = \nu \left. \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right|_{x=L_p} \quad (2.262)$$

é o termo de acoplamento modal.

Considerando condições de contorno fixo-livre (engaste em uma extremidade e livre na outra), os modos de vibração de uma viga podem ser calculados por meio da Equação (2.169) (Erturk, A. e Inman, D. J., 2008a):

$$\phi_r(x) = \sqrt{\frac{1}{\rho A}} \left[\cosh \frac{\lambda_r}{L_b} x - \cos \frac{\lambda_r}{L_b} - \sigma_r \left(\sinh \frac{\lambda_r}{L_b} x - \sin \frac{\lambda_r}{L_b} x \right) \right] \quad (2.263)$$

em que σ_r é dado pela Equação (2.171) e os números adimensionais λ_r são encontrados por meio da Equação (2.165).

Os modos de vibrar são normalizados pela massa ρA e, como visto, satisfazem as condições de ortogonalidade.

As frequências naturais são relacionadas aos números adimensionais vistos na Equação (2.167) e adaptados aqui:

$$\omega_r = \lambda_r \frac{YI}{\rho A L_b^4} \quad (2.264)$$

Considerando que a resposta modal e a tensão elétrica em estado estacionário são, respectivamente, $\eta_r(t) = H_r e^{j\omega t}$ e $e(t) = E e^{j\omega t}$ e que a força de excitação seja $F = F_0 e^{j\omega t}$, a equação modal de movimento para viga engastada submetida à força aplicada na extremidade livre é dada, no domínio de Laplace, por:

$$(s^2 + 2\zeta_r \omega_r s + \omega_r^2) H_r + \chi_r E = F_0(s) \phi_r(L_b) \quad (2.265)$$

em que ζ_r é o fator de amortecimento modal $\zeta_r = \frac{\alpha_2 I \omega_r}{2YI} + \frac{c_a}{2m\omega_r}$, escolhido arbitrariamente neste trabalho, e χ_r pode ser formulado como:

$$\chi_r = \nu \left. \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right|_{x=L_b} . \quad (2.266)$$

A fim de obter $G(s)$, as relações $\eta(s)/F(s)$ e $H_r/F(s)$ também devem ser conhecidas. A relação $H_r/F(s)$ pode ser obtida da Equação (2.265) se a relação $E/F(s)$ for conhecida. Essa relação pode ser obtida considerando a equação constitutiva piezelétrica do deslocamento elétrico D_3 (Erturk, A. e Inman, D. J., 2008a):

$$D_3 = -d_{31}Y_p h_{pc} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \epsilon_{33}^s \frac{e(t)}{h_p}, \quad (2.267)$$

na qual $\epsilon_{33}^s = \epsilon_{33}^T - d_{31}^2 Y_p$, ϵ_{33}^T é a permissividade com a tensão constante e h_{pc} é a distância do centro da camada de material piezelétrico para a linha neutra (ver Figura 2.36). A carga elétrica $q(t)$ desenvolvida pelo material piezelétrico pode ser calculada integrando o deslocamento elétrico (D) sobre a área do eletrodo:

$$q(t) = \int_A D \cdot n dA = - \int_{x_1}^{x_2} \left(d_{31} Y_p h_{pc} b \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \epsilon_{33}^s b \frac{e(t)}{h_p} \right) dx \quad (2.268)$$

$$\text{Como } i(t) = \frac{dq(t)}{dt},$$

$$i(t) = - \int_{x_1}^{x_2} d_{31} Y_p h_{pc} b \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} dx + \frac{\epsilon_{33}^s b}{h_p} \frac{e(t)}{dt} L \Big|_{x_1}^{x_2} \quad (2.269)$$

O termo $\frac{\epsilon_{33}^s b L}{h_p}$ define a capacitância da cerâmica piezelétrica, a qual é denominada por C_p e é inerente aos materiais piezelétricos (Erturk, A. e Inman, D. J., 2008a).

Caso os eletrodos estejam conectados a um circuito elétrico de impedância $Z(t)$ (Figura 2.37), a tensão e a carga elétrica estão relacionados por:

$$e(t) = Z(t) \frac{dq(t)}{dt} \quad (2.270)$$

Figura 2.37 - Impedâncias associadas à cerâmica piezelétrica do suporte de ferramenta. (a) *shunt* resistivo; (b) *shunt* capacitivo; (c) *shunt* indutivo; (d) *shunt* resistivo-indutivo em série; (e) *shunt* resistivo-indutivo em paralelo (Erturk, A. e Inman, D. J., 2008b).

Quando a frequência de excitação é a frequência natural do r -ésimo modo ($\omega = \omega_r$) e usando a Equação (2.260) na Equação (2.268), a tensão elétrica nos eletrodos da cerâmica piezelétrica é obtida pela soma ao longo dos modos de excitação da razão entre a carga elétrica $q(t)$ e a capacitância C_p :

$$e(t) = -\frac{\gamma_r^w d_{31} Y_p h_c b m F_0 e^{j(\omega_r t - \pi/2)}}{2\zeta_r C_p} \frac{d\phi_r(x)}{dx} \Big|_{x=x_1, x_2}, \quad (2.271)$$

na qual

$$\gamma_r^w = \int_{x=0}^{L_b} \phi_r(x) dx. \quad (2.272)$$

Neste tipo de excitação modal, geralmente, o modo de interesse é o primeiro, para o qual $r = 1$ (Erturk, A. e Inman, D. J., 2008a).

Calculando a carga elétrica $q(t)$, substituindo o seu valor na Equação (2.270) e usando a transformação modal (Equação (2.260)), a equação do circuito elétrico, no domínio de Laplace, pode ser descrito por (Silva *et al.*, 2010):

$$\left(sC_p + \frac{1}{Z(s)} \right) E + s \sum_{r=1}^{\infty} \chi_r H_r = 0 . \quad (2.273)$$

Denominando $G_H(s) = s^2 + 2\zeta_r \omega_r s + \omega_r^2$ e reorganizando os termos das equações acopladas (2.265) e (2.273), a relação $H_r / F(s)$ pode ser escrita como (Erturk, A. e Inman, D. J., 2008a):

$$\frac{H_r(s)}{F(s)} = \frac{\phi_r(L_b) - \chi_r \frac{s \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r(L_b) \chi_r}{G_H(s)}}{sC_p + \frac{1}{Z(s)} + s \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\chi_r^2}{G_H(s)}}}{G_H(s)} \quad (2.274)$$

É importante destacar que a Equação (2.274) e os deslocamentos $w(t)$ e $w(t-T)$ associados com as vibrações sucessivas do chatter regenerativo estão relacionados com a resposta da extremidade livre da viga, $w(L_b, t)$. Desta forma, a função de transferência $G(s)$ é dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F_c(s)} \Big|_{x=L_b} = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(L_b) \frac{H_r(s)}{F(s)} \quad (2.275)$$

2.9 Amortecimento passivo com *shunts* piezelétricos

De maneira geral, os materiais comumente usados em engenharia, tais como aço, alumínio e outros metais, possuem um baixo amortecimento, o que pode levar as estruturas a sofrerem de vibração excessiva ou indesejada, e a adição de materiais dissipadores de energia (ou visco-elásticos) ajuda a diminuir esse efeito (Leo, 2007).

Uma vez que os materiais piezelétricos podem ser vistos como um transformador de energia mecânica em elétrica e vice-versa, eles se mostram úteis

como amortecedores estruturais (Hagood e Flotow, 1991). Além disso, a dissipação da energia mecânica convertida será definida pelo tipo de circuito conectado aos terminais da placa piezelétrica.

O amortecimento passivo por *shunt* piezelétrico (APSP) é a técnica usada neste trabalho para alterar a dinâmica estrutural do suporte de ferramenta e, com isso, evitar o *chatter*. Uma característica do APSP é a não necessidade do uso de uma fonte de energia externa, uma vez que usa componentes elétricos passivos (resistores, indutores e capacitores) em *shunts* com o material piezelétrico, como no trabalho de Hagood e Flotow (1991), citado anteriormente. Lesieutre (1998) apresentou uma classificação dos circuitos *shunts* e enfatizou que o *shunt* Resistivo-indutivo (RL), em associação com a capacitância do piezelétrico, é análogo a um absorvedor dinâmico de vibrações (ADV). O Quadro 2.1 apresenta o efeito causado na estrutura pelo uso de componentes passivos como *shunt*.

Quadro 2.1 - Circuitos básicos de *shunt* para amortecimento piezelétrico (Adaptado de Erturk, A. e Inman, D. J., 2008b)

Circuito <i>shunt</i>	Efeito na estrutura	Impedância (Z)
Resistivo (R)	Modificação na rigidez e no amortecimento	R
Capacitivo (C)	Modificação na rigidez	$\frac{-j}{\omega C}$
Indutivo (L)	Absorvedor dinâmico de vibração não amortecido	$j\omega L$
Resistivo-indutivo (RL)	Absorvedor dinâmico de vibração amortecido	Série: $j\omega L + R$ Paralelo: $\frac{j\omega LR}{j\omega L + R}$

O *shunt* resistivo (Figura 2.37a) altera tanto a rigidez quanto o amortecimento da estrutura, dependendo do acoplamento piezelétrico e da resistência usada no *shunt*. Nesse caso, o pico (valor máximo) da frequência de ressonância sofre alterações em módulo no intervalo entre a frequência de ressonância de curto-circuito ($R = 0$) e de circuito aberto ($R = \infty$). O *shunt* capacitivo, por sua vez, causa uma alteração na rigidez da estrutura, de forma que o pico de ressonância “caminha”

sobre o eixo da frequência, mas não tem seu módulo afetado. Erturk e Inman (2008b) destacam três pontos sobre o uso desses dois tipos de *shunts*: o primeiro é que todos os modos de vibração são afetados; o segundo é que, como há um deslocamento da frequência de ressonância ao longo do eixo da frequência, existe a possibilidade do movimento ser atenuado na frequência de ressonância original e aumentado em outra; por fim, materiais com alto fator de acoplamento piezelétrico são essenciais para a mudança da frequência de ressonância.

O *shunt* indutivo produz o efeito de um ADV não amortecido e, como mostrado por Hagood e Flotow (1991), sua associação com uma resistência é mais efetiva. Aliás, esses mesmos autores também criaram uma metodologia para a obtenção dos valores ótimos dos componentes elétricos usados como *shunt* nos casos que estudaram, os quais são vistos a seguir.

Usando relações de tensão e corrente que descrevem o material piezelétrico, Hagood e Flotow (1991) chegaram a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^{EL}(s) & s\mathbf{Ad} \\ \mathbf{d}^t\mathbf{L}^{-1} & \mathbf{s}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix}; \quad (2.276)$$

$$\mathbf{Y}^{EL} = \mathbf{Y}^D + \mathbf{Y}^{SU},$$

na qual $\mathbf{I}$ é o vetor corrente elétrica, $\mathbf{S}$ é o vetor deformação mecânica, $\mathbf{e}$ é o vetor tensão elétrica, $\mathbf{T}$ é o vetor tensão mecânica, $\mathbf{L}$ é a matriz diagonal das dimensões da placa piezelétrica na i -ésima direção, $\mathbf{A}$ é a matriz diagonal das áreas das superfícies perpendiculares à i -ésima direção, $\mathbf{d}$ é a matriz de constantes piezelétricas, $\mathbf{s}$ é a matriz flexibilidade, $\mathbf{Y}^{EL} = \frac{1}{\mathbf{Z}^{EL}}$ é a matriz admitância equivalente do circuito elétrico, $\mathbf{Y}^D = \mathbf{s}\mathbf{C}_p^T$ é a matriz admitância da placa piezelétrica medida em circuito aberto, $\mathbf{Y}^{SU} = \frac{1}{\mathbf{Z}^{SU}}$ é a matriz admitância do *shunt*.

O coeficiente de acoplamento eletromecânico é definido aqui como:

$$k_{ij} = \frac{d_{ij}}{\sqrt{s_{jj}^E \varepsilon_i^T}}, \quad (2.277)$$

em que d_{ij} é a constante piezelétrica que relaciona a tensão elétrica na i -ésima direção com deformação mecânica na j -ésima direção.

A relação entre impedância mecânica ($\bar{Z}_{jj}^{ME}$) e elétrica ($\bar{Z}_{jj}^{EL}$), adimensional, é dada por:

$$\bar{Z}_{jj}^{ME}(s) = \frac{Z_{jj}^{SU}(s)}{Z_{jj}^D(s)} = \frac{1 - k_{ij}^2}{1 - k_{ij}^2 \bar{Z}_{jj}^{EL}(s)} \quad (2.278)$$

Figura 2.38 - Modelo de uma placa piezelétrica (Adaptado de VIANA; STEFFEN, 2006)

Para o caso de *shunt* resistivo com operação transversal (na qual a direção da força é perpendicular à direção do campo elétrico), o valor ótimo do resistor é (Hagood e Flotow, 1991):

$$R_R = \frac{\sqrt{1 - k_{13}^2}}{\omega C_p^s} \quad , \quad (2.279)$$

em que $C_p^s = C_p^T(1 - k_{31}^2)$ e C_p^T é a capacitância da placa piezelétrica.

Para o *shunt* resistivo-indutivo em série, os valores ótimos de resistência e indutância são (Hagood e Flotow, 1991):

$$R_{RLs} = \frac{r_{opt}}{C_p^s(\omega_n^E)} \quad (2.280)$$

$$L_{RLs} = \frac{1}{C_p^s(\omega_n^E \delta_{opt})^2} \quad ,$$

nos quais

$$\begin{aligned} r_{opt} &= \frac{\sqrt{2}K_{31}}{1 + K_{31}^2} \\ \delta_{opt} &= \sqrt{1 + K_{31}^2} \ , \\ K_{31} &= \sqrt{\frac{\omega_n^D - \omega_n^E}{\omega_n^E}} \end{aligned} \quad (2.281)$$

e ω_n^D e ω_n^E são as frequências naturais medidas em circuito aberto e curto-circuito, respectivamente.

Mais tarde, Wu (1996) sugeriu o uso de *shunt* resistivo-indutivo em paralelo com o material piezelétrico e também calculou os valores ótimos para esse caso:

$$\begin{aligned} R_{RLp} &= \frac{1}{\sqrt{2}K_{31}C_p^s\omega_n^E} \\ L_{RLp} &= \frac{1}{C_p^s(\alpha\omega_n^E)^2} \ , \end{aligned} \quad (2.282)$$

em que

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{K_{31}^2}{2}} \ . \quad (2.283)$$

Embora os circuitos *shunts* vistos acima sejam os usados nesse trabalho, há vários outros estudos sobre o assunto (como aqueles citados por Moheimani e Fleming (2006)), os quais vão desde o uso de outros circuitos *shunt* (Figura 2.39) - como o usado por Hollkamp (1994), que apresentou um trabalho sobre amortecimento multimodal pelo uso de circuitos em paralelo com o *shunt* original e aqueles usando capacitância negativa (Park e Park, 2003; Kodejška *et al.*, 2012) - até diferentes métodos de otimização (Park e Inman, 2003; Fleming e Moheimani, 2004; Yamada *et al.*, 2010).

Figura 2.39 – Circuitos *shunt* (Adaptado de Moheimani e Fleming, 2006)

2.10 Indutores sintéticos

Pesquisadores observaram que os valores de indutância necessários para a aplicação dos *shunts* eram frequentemente grandes, fato que os levou a adotar o uso de indutores sintéticos. Uma forma de se construir esses indutores é usando amplificadores operacionais (amp-op), de modo que dois dos circuitos mais usados são os de Riordan (1967) e de Antoniou (1969) (Figura 2.40), os quais possuem um terminal aterrado e podem ser encontrados em diversos trabalhos (Viana e Steffen, 2006; Airoidi e Ruzzene, 2011). Porém, outros tipos também são encontrados na literatura, tais como os usados por Dell'Isola *et al.* (2004), que usou um indutor

sintético derivado do modelo de Antoniou proposto por Senani (1996), e por Agnes (1995), que por sua vez empregou um indutor flutuante derivado do Riordan (Figura 2.41). um indutor flutuante derivado da junção de dois circuitos de Antoniou também foi usado (Airoldi e Ruzzene, 2011) (Figura 2.42). Viana e Steffen (2006) fizeram um estudo comparativo entre os indutores sintéticos de Riordan e de Antoniou, porém o resultado foi inconclusivo.

Figura 2.40 - Indutores sintéticos de (a) Riordan e de (b) Antoniou

Figura 2.41 - Indutor sintético flutuante de Riordan (Adaptado de Agnes, 1995)

Outros modelos de indutores sintéticos, bem como suas análises e algumas comparações, podem ser encontrados nos trabalhos de Sutherland (1976) e (Jayalalitha e Susan, 2013). Capacitância externa associada ao material piezelétrico também foi usado para diminuir a indutância requerida no sistema (Fleming *et al.*, 2003), porém com uma possível perda de desempenho (Fleming e Moheimani, 2002).

Figura 2.42 - Indutor sintético flutuante de Antoniou (Airoidi e Ruzzene, 2011)

Em ambos os circuitos, apesar da topologia diferente, as seguintes equações descrevem seu funcionamento:

$$Z_{IN} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4}, \quad (2.284)$$

em que Z_{IN} é a impedância “vista” pelo circuito, Z_1, Z_3, Z_4 e Z_5 são resistências e Z_2 é uma capacitância definida por $Z_2 = \frac{-j}{\omega C_2}$. Dessa forma, a Equação (2.284) pode ser reescrita como:

$$Z_{IN} = \frac{R_1 R_3 R_5 C_2}{R_4} = j\omega L_{eq}, \quad (2.285)$$

o qual é o mesmo que um indutor.

O indutor sintético flutuante de Riordan tem sua indutância calculada da seguinte forma:

$$L_{eq} = RR_T C \quad . \quad (2.286)$$

Por sua vez, o indutor sintético flutuante de Antoniou é calculado por:

$$L_{eq} = 2 \frac{R_1 R_3 R_5 C_2}{R_4} \quad (2.287)$$

3 Estudos e discussões

3.1 Estudo 1 – Ferramenta de torneamento externo

Nesse estudo o enfoque principal é a avaliação numérica do efeito causado pela inclusão de material piezelétrico em uma ferramenta de torneamento externo, a qual é modelada como uma viga engastada. Para tanto, foram observadas três situações: a viga sem material piezelétrico, a mesma viga com uma camada de 2 mm e, por fim, com uma camada de 4 mm de material piezelétrico (PZT-5A), como mostrado na Figura 3.1 e conforme os trabalhos de Silva *et al.* (2010) e Cervelin *et al.* (2010).

Figura 3.1 – Configurações estudadas na ferramenta de torneamento externo (vista das seções da barra)

Nos estudos numéricos, feitos em ambiente Matlab, procurou-se aumentar o amortecimento destas estruturas por meio do uso da associação de resistores e indutores como *shunt* conectado ao material piezelétrico, tal qual a Figura 2.37. Para a realização dos estudos, foram construídos modelos eletromecânicos de parâmetros distribuídos de acordo com o conteúdo da Seção 2.8. Sucintamente, procura-se a resposta da Equação (2.275) (reproduzida abaixo) para cada *shunt* associado à camada piezelétrica.

$$G(s) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(L_b) \frac{H_r(s)}{F(s)} = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(L_b) \frac{\phi_r(L_b) - \chi_r \frac{s \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r(L_b) \chi_r}{G_H(s)}}{s C_p + \frac{1}{Z(s)} + s \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\chi_r^2}{G_H(s)}}}{G_H(s)} \quad (3.1)$$

Observando-se a equação (3.1), percebe-se que a resposta do sistema depende do termo C_p que, por sua vez, depende das dimensões da placa de material piezelétrico.

Para a construção dos modelos são adotadas as seguintes hipóteses (Kayacik *et al.*, 2008):

- O material piezelétrico adere perfeitamente à viga.
- A rigidez do material ligante e eletrodos é desprezada.
- A tensão elétrica é uniformemente distribuída ao longo do material piezelétrico.
- A direção de polarização do material piezelétrico é a direção transversal da viga.
- Embora o material piezelétrico não cubra o suporte de ferramenta em nenhuma situação, esse trabalho irá considerar o comprimento das placas piezelétricas iguais aos da viga (exceto no cálculo da capacitância).

O suporte de ferramenta usado foi da marca Sandvik Coromant modelo T-MAX S com grampo CSKPR-L, adaptado para corte ortogonal em mergulho, conforme o esquemático da Figura 3.2, e que, para o modelo numérico, foi considerado como uma viga engastada de seção quadrada de 20 mm de lado e comprimento de 140 mm. As características da ferramenta são descritas na Tabela 3.1 e as do material piezelétrico (PZT-5A, fabricado pela Sinocera) na Tabela 3.2.

Figura 3.2 - Ferramenta de torneamento externo adaptada.

Tabela 3.1 - Propriedades do suporte de ferramenta de torneamento externo

Propriedade	Símbolo	Valor
Módulo de Elasticidade	Y_b	200 GPa
Coeficiente de Poisson		0,3
Densidade	ρ	7870 kg/m ³
Espessura	h_b	20 mm
Comprimento nominal	L_{bn}	140 mm
Largura	b	20 mm

(Disponível em: <http://www.matweb.com/search/DataSheet.aspx?MatGUID=2b2b98cba00041f284fd76b317bab43f&ckck=1>)

Tabela 3.2 - Propriedades da cerâmica piezelétrica PZT-5A

Propriedade	Símbolo	Valor
Módulo de Elasticidade	Y_p	7,4x10 ¹⁰ Pa
Acoplamento piezelétrico	d_{31}	-175x10 ⁻¹² C/N
Permissividade relativa	ε_{33}^T	1800 F/m
Densidade	ρ	7700 kg/m ³
Espessura	h_p	2 mm e 4 mm
Largura	b	25 mm

(Disponível em: http://www.sinocera.net/en/piezo_material.asp)

Como visto anteriormente, os efeitos causados na estrutura acoplada à camada piezelétrica também dependem da impedância Z do circuito *shunt*, segundo a Equação (3.1). Considerando esses efeitos, foram investigados os circuitos resistivos, indutivos e suas combinações em série e paralelo, conforme mostrado no Quadro 3.1, para cada espessura de material piezelétrico.

Quadro 3.1 - Circuitos elétricos investigados no estudo numérico.

Espessura da placa piezelétrica	Circuito <i>shunt</i>	Impedância (Z)
2 mm	Resistivo (R)	R
4 mm		
2 mm	Indutivo (L)	$j\omega L$
4 mm		
2 mm	Resistivo-indutivo em série	$j\omega L + R$
4 mm		
2 mm	Resistivo-indutivo em paralelo	$\frac{j\omega LR}{j\omega L + R}$
4 mm		

Os valores de resistores e indutores foram escolhidos convenientemente para ilustrar com mais facilidade os efeitos causados no sistema modelado.

3.1.1 Resultados do Estudo 1 – Ferramenta de torneamento externo

A seguir são apresentadas as curvas de resposta do suporte de ferramenta de torneamento externo com material piezelétrico acoplado. As curvas de magnitude estão em escala semilogarítmica.

A Figura 3.3 apresenta a magnitude e a fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento externo, sem material piezelétrico. A resposta obtida assemelha-se a um sistema massa-mola amortecido de 1 GDL.

Figura 3.3 – Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento externo sem material piezelétrico

3.1.1.1 *Shunt* resistivo

A seguir estão as curvas com as respostas do sistema para cada *shunt* estudado associado com as placas piezelétricas de 2 mm e 44 mm de espessura.

Tabela 3.3 – Valores ótimos calculados e ajustados para o suporte de ferramenta de torneamento externo

<i>Shunt</i>	R ótimo	R ajustado	L ótimo	L ajustado
Resistivo	5,73 k Ω	5,73 k Ω	-	-
Indutivo	-	-	-	0,83 H
Resistivo-indutivo em série	0,042 Ω	108 Ω	0,93H	0,83 H
Resistivo-indutivo em paralelo	126,99 k Ω	253,98 k Ω	0,93H	0,83 H

Na Figura 3.4 estão a magnitude e a fase do suporte de ferramenta com *shunt* resistivo para a placa com espessura de 2 mm e na Figura 3.5 para a placa de 4 mm. Nota-se que a influência desse *shunt* é muito pequena, imperceptível sem uma grande ampliação, para qualquer espessura de placa. Além disso, como pode ser observado na Figura 3.6, o efeito provocado pelo uso de *shunt* resistivo na estrutura é um aumento na frequência natural e também um amortecimento, apesar da necessidade de um grande zoom para sua percepção. A variação da resistência de zero até infinito mostra que há uma atenuação máxima que pode ser alcançada e, neste intervalo, existe um ponto ótimo.

Figura 3.4 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento externo com *shunt* resistivo para placa piezelétrica de 2mm de espessura.

Figura 3.5 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento externo com *shunt* resistivo para placa piezelétrica de 4mm de espessura.

Figura 3.6 – Efeito causado pelo *shunt* resistivo com placa de 4 mm de espessura

3.1.1.2 *Shunt* indutivo

As curvas dos *shunts* puramente indutivos vem a seguir, na Figura 3.7 quando a placa possui 2 mm de espessura e na Figura 3.8, no caso em que a espessura é igual a 4 mm.

A Figura 3.9 ilustra o efeito que um *shunt* indutivo causa em uma estrutura, neste caso com uma placa piezelétrica de 4 mm de espessura. Pode-se observar que o uso do indutor causa o aparecimento de um outro modo, verificado também pela fase do sistema, mas não causa atenuação. Dessa maneira, quando bem sintonizado, ele provoca o surgimento de um vale na frequência natural do sistema – a anti-ressonância – (com o inconveniente de criar duas outras frequências naturais próximas à frequência natural original), comportando-se como um absorvedor dinâmico de vibrações não amortecido. Além disso, variações relativamente baixas no valor da indutância provocam um deslocamento considerável na curva de resposta obtida. Mais ainda, o aumento da indutância tende a deslocar o vale para uma frequência natural cada vez menor.

Figura 3.7 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento externo com shunt indutivo e placa piezelétrica com espessura de 2 mm.

Figura 3.8 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento externo com shunt indutivo e placa piezelétrica com espessura de 4 mm.

Figura 3.9 - Efeito causado pelo *shunt* indutivo com placa de 4 mm de espessura

3.1.1.3 *Shunt* resistivo-indutivo em série

As próximas figuras mostram a resposta do sistema quando se usa *shunt* resistivo-indutivo em série. Na Figura 3.10 está a curva para a placa piezelétrica de 2 mm e na Figura 3.11 a curva para a de 4 mm. Nestes casos, o valor do indutor é mantido fixo, com o valor ótimo ajustado, enquanto a resistência sofre variações. O resultado é a tendência do surgimento da anti-ressonância conforme se diminui o valor da resistência (o efeito indutivo se torna mais acentuado), passando por um valor ótimo, até chegar num ponto em que há apenas os efeitos indutivos, quando a resistência se torna nula. Ao mesmo tempo, as frequências naturais também tendem a diminuir quando há a redução do valor da resistência. Agora o sistema passa a se comportar como um absorvedor dinâmico de vibrações amortecido.

De acordo com a Figura 3.12, quando se mantém a indutância fixa, o resistor tende a interferir na profundidade do vale, dentro da frequência definida pelo indutor, tendo grande relevância no amortecimento da estrutura.

Neste trabalho considerou-se ótima a resposta em que o resistor apresenta um valor capaz de amortecer ao máximo o sistema ao mesmo tempo em que evita o surgimento dos dois picos provocados pela anti-ressonância.

Figura 3.10 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento externo com *shunt* resistivo-indutivo em série e placa piezelétrica com espessura de 2 mm.

Figura 3.11- Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento externo com *shunt* resistivo-indutivo em série e placa piezelétrica com espessura de 4 mm.

Figura 3.12 - Efeito causado pelo *shunt* resistivo-indutivo em série com placa de 2 mm de espessura

3.1.1.4 *Shunt* resistivo-indutivo em paralelo

O *shunt* resistivo-indutivo em paralelo tem suas respostas na Figura 3.13, para a placa com espessura de 2 mm, e na Figura 3.14, para espessura de 4 mm. As características dessas respostas são similares às encontradas no caso de *shunt* resistivo-indutivo em série, como pode ser visto em tais figuras, o que mostra que o sistema continua respondendo como um absorvedor dinâmico de vibrações amortecido. Porém, neste caso, quando o valor de indutância é fixado e se varia a resistência do *shunt*, observa-se que o aumento da resistência tende a diminuir a frequência natural e simultaneamente propicia o surgimento da anti-ressonância (Figura 3.15).

Figura 3.13 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento externo com shunt resistivo-indutivo em paralelo com placa piezelétrica de 2 mm de espessura.

Figura 3.14 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento externo com shunt resistivo-indutivo em paralelo com placa piezelétrica de 4 mm de espessura.

Figura 3.15 - Efeito causado pelo *shunt* resistivo-indutivo em paralelo com placa de 2 mm de espessura.

3.1.2 Diagramas dos lóbulos de estabilidade

Os diagramas de lóbulos de estabilidade foram feitos considerando o melhor resultado obtido de cada *shunt* resistivo-indutivo e seguiram a teoria descrita na Seção 2.5.2. Assumindo que a função transferência da estrutura no ponto de contato da ferramenta com a peça é conhecida (ou medida experimentalmente por meio de análise modal²), os passos para a construção do diagrama de lóbulos de estabilidade são mostrados a seguir:

1. Escolher uma frequência de *chatter* ($\omega_c > \omega_n$);
2. Calcular o ângulo de fase (Ψ) da estrutura em ω_c usando a Equação

$$(2.222) \left(\tan(\psi) = \frac{\sin \omega_c T}{\cos \omega_c T - 1} \right);$$

3. Calcular a profundidade crítica de corte com a Equação (2.230)

$$\left(a_{\text{lim}} = \frac{-1}{2K_{fc} G_{\text{Re}}(s)} \right);$$

² Detalhes sobre a obtenção de função transferência e parâmetros estruturais por meio de experimentos, bem como sobre os equipamentos envolvidos, podem ser encontrados em trabalhos como, por exemplo: Ewins (2000), Inman (2006) e He e Fu (2001).

4. Calcular a rotação do eixo-árvore na Equação (2.228)

$$\left(T = \frac{2K\pi + \varepsilon}{2\pi f_c} \rightarrow n = \frac{60}{T} \right) \text{ para cada lóbulo de estabilidade } (K = 1, 2, \dots, K_n) -$$

os lóbulos são formados pelos pontos (n, a_{lim}) .

5. Repetir os passos anteriores em torno da frequência natural do sistema.

Nesse trabalho, usou-se a função transferência da estrutura, modelada como um sistema massa-mola amortecido de 1 GDL. Dessa forma, o termo $G_{Re}(s)$ pode ser encontrado a partir da Equação (2.76), reproduzida parcialmente abaixo:

$$|G(j\omega)| = \frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}.$$

O termo ω_n é a frequência natural do sistema encontrada para cada configuração de *shunt* abordada. Os termos ζ $\left(\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}\right)$ e k foram encontrados ajustando a curva gerada pela Equação (2.76) até que a mesma coincida com as curvas de resposta do sistema geradas na seção anterior. O ajuste foi feito manualmente e comparado por meio visual. Os valores ajustados são mostrados na Tabela 3.4. Para que tanto o efeito do *shunt* quanto da espessura da placa piezelétrica, foram construídos os diagramas de lóbulos de estabilidade com *shunt* resistivo-indutivo em paralelo, considerando a placa com 2 mm e 4 mm de espessura, e com a viga sem a placa.

Tabela 3.4- Valores de k , c e m ajustados para a ferramenta de torneamento externo

Placa piezelétrica	Shunt	k	c	M
Sem placa	---	3,1623e6	85	5,65
2 mm	RL paralelo	3,3884e6	100	5,58
4 mm	RL paralelo	3,8019e6	115	5,63

A Figura 3.16 mostra o diagrama dos lóbulos de estabilidade para o suporte de ferramenta de torneamento externo, na qual se pode observar que a profundidade máxima de corte sofre um acréscimo com a presença das cerâmicas piezelétricas associadas aos *shunts*. Além disso, pode-se notar também que quanto mais espessa a cerâmica, maior o limite de estabilidade.

Comparando todas as curvas, é possível afirmar que o uso de cerâmicas piezelétricas e *shunts* resistivo-indutivo podem aumentar o limite de estabilidade de uma ferramenta de torneamento.

Figura 3.16 - Diagrama de lóbulos de estabilidade para o suporte de ferramenta de torneamento externo

3.2 Estudo 2 – Ferramenta de torneamento interno com comprimento de 350 mm

Os resultados numéricos do Estudo 1 (Seção) permitem avaliar como factível o uso de cerâmicas piezelétricas associadas com *shunts* como meio de atenuar vibrações em processos de torneamento.

Assim sendo, foram adquiridos suportes de ferramenta de torneamento interno com comprimento de 350 mm e placas de cerâmicas piezelétricas para a realização de estudos empíricos, além dos numéricos. Esses suportes foram escolhidos devido ao comprimento relativamente longo que possuem, ocasionando condições de difícil usinagem e, com isso, propiciando o surgimento de *chatter*.

O suporte de ferramenta usado foi da marca Sandvik Coromant, modelo S32U PTFNL 16-W (Esquemático na Figura 3.17), constituído de aço AISI 1045. A cerâmica piezelétrica, do tipo PZT-5A, de marca Sinocera, foi fixada no suporte de ferramenta com o adesivo 3M™ *Scotch-Weld™ Epoxy Adhesive* 2216 B/A, em um total de quatro, sendo duas na parte superior e outras duas na parte inferior do suporte de ferramenta (Figura 3.18).

Figura 3.17 – Esquemático da ferramenta Sandvik Coromant S32U PTFNL 16-W, indicando algumas de suas dimensões (Disponível em <http://www.sandvik.coromant.com/pt-pt/products/pages/productdetails.aspx?c=S32U-PTFNL%2016-W>)

Figura 3.18 - Montagem da cerâmica piezelétrica no suporte de ferramenta

Para o encaixe das cerâmicas, foi necessário usinar os suportes de ferramenta até que a largura das áreas usinadas fosse da mesma dimensão que a largura da placa de material piezelétrico. As cerâmicas foram entregues com uma película eletricamente condutora sobre suas faces, permitindo que os eletrodos fossem facilmente conectados a elas por meio de fita de cobre adesiva.

A geometria do suporte de ferramenta, constituída de aço AISI 1045, também foi considerada como uma barra de seção retangular para os estudos numéricos e suas propriedades são indicadas na Tabela 3.5.

Tabela 3.5 - Propriedades do suporte de ferramenta de torneamento interno – 350 mm

Propriedade	Símbolo	Valor
Módulo de Elasticidade ^a	Y_b	200 GPa
Coeficiente de Poisson ^a		0,3
Densidade ^a	ρ	7870 kg/m ³
Espessura	h_b	20 mm
Comprimento nominal	L_{bn}	350 mm
Largura	b	25 mm

(^a Disponível em: <http://www.matweb.com/search/DataSheet.aspx?MatGUID=2b2b98cba00041f284fd76b317bab43f&ckck=1>)

A placa piezelétrica, por sua vez, foi confeccionada com cerâmica tipo PZT-5A, fabricado pela Sinocera, cujas características se encontram na Tabela 3.6.

Tabela 3.6 - Propriedades da cerâmica piezelétrica PZT-5A

Propriedade	Símbolo	Valor
Módulo de Elasticidade	Y_p	$7,4 \times 10^{10}$ Pa
Acoplamento piezelétrico	d_{31}	-175×10^{-12} C/N
Permissividade relativa	ϵ_{33}^T	1800 F/m
Densidade	ρ	7700 kg/m^3
Espessura	h_p	4 mm
Largura	b	25 mm

(Disponível em: http://www.sinocera.net/en/piezo_material.asp)

O procedimento a seguir foi usado nos estudos com o objetivo de se obter os valores ótimos de resistores e indutores dos *shunts*, levando em consideração as respostas experimentais do suporte de ferramenta.

1. Identificação experimental de ω_n^D e ω_n^E
2. Modelo eletromecânico de parâmetros distribuídos:
 - ajuste do comprimento da viga
 - Cálculo (e ajuste) dos valores ótimos de resistência e indutância
3. Lóbulos de estabilidade
4. Teste de impacto (*Tap test*) do sistema com os *shunts* conectados
5. Testes de usinagem

3.2.1 Identificação experimental das freqüências naturais - ferramenta de torneamento interno com comprimento de 350 mm

As freqüências naturais são importantes para construir os modelos numéricos com maior fidelidade em relação ao comportamento empírico das estruturas, bem como para encontrar os valores ótimos dos componentes do *shunt*.

Foram procuradas as freqüências naturais do suporte de ferramenta em duas situações: com os terminais das placas piezelétricas em curto-circuito (ω_n^E) e em

circuito aberto (ω_n^D). Há uma diferença entre essas frequências devido ao efeito capacitivo das placas piezelétricas associadas à estrutura, o qual causa um aumento da rigidez do sistema e um deslocamento da frequência natural. Obviamente, o efeito capacitivo é anulado quando os terminais das placas são colocados em curto-circuito.

Para se fazer tais medições, o suporte foi fixado no torno Index GU 600 CNC e suas FRF foram obtidas por meio de ensaios de impacto (*tap test*) (Figura 3.19 e Figura 3.20). Para tanto, foram usados um martelo de impacto PCB 086C03 e acelerômetro PCB 353B16 com base magnética PCB 080A30. Os dados foram obtidos usando o módulo MaITF do programa CUTPRO 9.3, desenvolvido por *Manufacturing Automation Laboratories Inc.*. A conexão entre o CUTPRO e o martelo e acelerômetro se deu pelo módulo de aquisição de sinais da *National Instruments* modelo NI 9233.

Figura 3.19 – Fixação do suporte de ferramenta com piezelétrico no torno e sistema de aquisição de dados

Figura 3.20 –Equipamento de aquisição do teste de impacto

A faixa de frequência foi de 60 a 500 Hz, com intervalo de 0,5 Hz, a menor resolução disponível no programa. Além disso, são necessárias 5 medições (marteladas) para que o programa faça uma média e disponibilize os resultados.

Para esse suporte foram encontradas as FRF para circuito aberto (Figura 3.21) e curto-circuito (Figura 3.22), das quais se obtém que $\omega_n^D = 142\text{Hz}$ e $\omega_n^E = 141,5\text{Hz}$

Figura 3.21 - FRF do suporte de ferramenta de 350 mm com circuito aberto

Figura 3.22 - FRF do suporte de ferramenta de 350 mm com curto-circuito

3.2.2 – Modelo eletromecânico de parâmetros distribuídos - ferramenta de torneamento interno com comprimento de 350 mm

O modelo eletromecânico de parâmetros distribuídos para esta ferramenta segue as mesmas hipóteses e condições daquelas usadas no Estudo 1, porém considerando apenas as características e geometria do conjunto usado nas medições experimentais da seção anterior.

É importante citar que o modelo, quando construído com o comprimento da viga idêntico ao da ferramenta (350 mm), apresentou uma frequência natural diferente daquela observada nas medições. A maneira escolhida neste trabalho para fazer a frequência natural do modelo “casar” com a frequência natural medida foi alterar o comprimento da viga no modelo, o qual passou a ser de 370 mm.

Uma vez corrigido o comprimento do modelo, buscou-se os valores ótimos de resistores e indutores de acordo com os trabalhos de (Hagood e Flotow, 1991) e (Wu, 1996).

Os valores ótimos dos *shunts* para esse suporte de ferramenta estão listados na Tabela 3.7. Quando o valor ótimo calculado não era a melhor resposta, pela análise visual das curvas, fez-se um ajuste manual até que o melhor valor fosse encontrado (definido também visualmente).

Tabela 3.7 – Valores ótimos calculados e ajustados para o suporte de ferramenta de torneamento interno de 350mm

<i>Shunt</i>	R ótimo	R ajustado	L ótimo	L ajustado
Resistivo	178,57 $k\Omega$	-	-	-
Indutivo	-	-	-	177,14 H
Resistivo-indutivo em série	21,02 $k\Omega$	-	198,05 H	176,26 H
Resistivo-indutivo em paralelo	1,49 $M\Omega$	-	200,15H	178,13 H

Embora haja quatro cerâmicas na ferramenta, para fins do cálculo da capacitância apenas uma foi considerada, ainda que o modelo adote a hipótese de que toda a superfície da ferramenta esteja recoberta de material piezelétrico.

Seguem abaixo as curvas de resposta do suporte de ferramenta de torneamento interno com comprimento de 350 mm com cerâmica piezelétrica acoplada. Para não soar repetitivo, uma vez que as considerações feitas anteriormente na Seção 3.1.1, se aplicam perfeitamente aqui, serão mostrados apenas os resultados com os diferentes tipos de *shunt*.

A Figura 3.23 apresenta a magnitude e a fase do modelo do suporte de ferramenta sem *shunt* conectado.

Figura 3.23 – Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 350 mm sem *shunt*.

3.2.2.1 *Shunt* resistivo

Na Figura 3.24 estão a magnitude e a fase do suporte de ferramenta com *shunt* resistivo.

Figura 3.24 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 350 mm com *shunt* resistivo.

3.2.2.2 *Shunt* indutivo

A Figura 3.25 apresenta as curvas para o *shunt* puramente indutivo.

Figura 3.25 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 350 mm com shunt indutivo.

3.2.2.3 *Shunt* resistivo-indutivo em série

Mantendo o valor do indutor fixado no ótimo ajustado, a resposta do *shunt* RL em série encontra-se na Figura 3.26.

Figura 3.26 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 350mm com *shunt* resistivo-indutivo em série.

3.2.2.4 *Shunt* resistivo-indutivo em paralelo

A Figura 3.27 apresenta as curvas do *shunt* resistivo-indutivo em paralelo

Figura 3.27 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 350mm com shunt resistivo-indutivo em paralelo.

3.2.2.5 Comparação de desempenho em *shunts* resistivo e resistivo-indutivo

A comparação entre os *shunts* resistivos, resistivo-indutivo série e resistivo indutivo paralelo – com as respectivas curvas geradas usando os valores ótimos ajustados – encontra-se na Figura 3.28.

Ao se comparar os *shunts* resistivo-indutivo com o *shunt* resistivo, note-se que os primeiros possuem um desempenho bem melhor que o segundo. Por outro lado, quando se compara os dois *shunts* resistivo-indutivo, os desempenhos se tornam mais parecidos.

Figura 3.28 – Comparação da magnitude e fase dos *shunts* Resistivo (R), resistivo-indutivo em série (RL série) e resistivo-indutivo em paralelo (RL paralelo) para a ferramenta de 350 mm.

3.2.3 Teste de impacto com *shunts* passivos

De posse dos valores ótimos de resistores e indutores dos *shunts*, pôde-se construí-los e conectá-los à cerâmica piezelétrica para verificar experimentalmente o comportamento da estrutura nessas condições. Como observado na seção anterior, apenas os *shunts* resistivo-indutivo causaram uma mudança considerável no modelo numérico, razão pela qual serão apenas tais condições testadas experimentalmente.

Os testes de impacto com *shunts* passivo foram executados com a mesma metodologia e equipamentos que os testes de descoberta das frequências naturais (Seção 3.2.1). Entretanto, foram feitas cinco aquisições com o CUTPRO e depois uma média desses resultados (lembrando que cada aquisição do CUTPRO também usa cinco marteladas).

A Figura 3.29 apresenta a montagem de um circuito RL usado como *shunt* em um dos testes. Pode-se verificar o uso de indutores convencionais na execução dos testes, os quais foram fornecidos pela empresa Tecnotrafo e associados convenientemente para produzir a indutância requerida em cada montagem.

Figura 3.29 - Circuito RL usado como *shunt*

A Figura 3.30 traz os resultados para o suporte de ferramenta de 350mm.

Figura 3.30 – Teste de impacto para suporte de ferramenta de 350 mm, usando uma única cerâmica

Os resultados indicam que o uso de *shunts* resistivo-indutivo atenuam a resposta de um sistema quando comparados com a ausência de *shunt* e que, comparando o desempenho entre os *shunts* em paralelo e em série, não há uma grande diferença quanto aos valores máximos, embora a conexão em série apresente uma atenuação um pouco maior.

3.2.4 Lóbulos de estabilidade

Seguindo o mesmo procedimento da Seção 3.1.2, pode-se encontrar os diagramas de lóbulos de estabilidade para a ferramenta de toronar de 350 mm de comprimento. Nesse caso, porém, serão comparados os lóbulos de outras três situações, sejam elas: Cerâmica sem *shunt*, com *shunt* resistivo-indutivo em paralelo e com *shunt* resistivo-indutivo em série, uma vez que a cerâmica piezelétrica está colada à ferramenta e tem uma largura definida.

Os valores de k , c e m foram obtidos também por meio de ajuste de curvas e os valores encontrados são mostrados na Tabela 3.8.

Tabela 3.8- Valores de k , c e m ajustados para a ferramenta de torneamento interno de 350 mm

Placa piezelétrica	Shunt	k	c	m
4 mm	Sem shunt	3,0200e5	40	14.9
4 mm	RL série	2,8840e5	97	14.5
4 mm	RL paralelo	2,8840e5	85	14.5

Os diagramas de lóbulos de estabilidade obtidos são mostrados na Figura 3.31, na qual se observa que não há uma grande diferença entre as curvas com *shunt* (embora haja uma ligeira vantagem do *shunt* em série), mas há um aumento evidente do limite de estabilidade quando comparados à ausência do *shunt*.

Figura 3.31 – Diagramas de lóbulos de estabilidade para a ferramenta de tornear de 350 mm

3.2.5 Testes de usinagem – ferramenta de torneamento interno com comprimento de 350 mm

Os testes de usinagem foram feitos preliminarmente para conhecer o comportamento da estrutura com a cerâmica piezelétrica acoplada, sem a presença de *shunts*, nas condições indicadas na Tabela 3.9. O inserto usado nos testes foi da marca Sandvik Coromant modelo TNMG 160408 - MF 1125. A peça usada era de aço AISI 1045, com diâmetro de 50 mm. Embora o suporte da ferramenta seja indicado para usinagem interna, os testes ocorreram em usinagem externa.

Tabela 3.9 – Parâmetros de usinagem

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Velocidade de rotação do eixo-árvore	n	1000	rpm
Avanço	f	0,1	mm / revolução
Profundidade de corte	h	0,5	mm

Durante o andamento dos ensaios um osciloscópio Minipa MO 2200 foi ligado aos terminais de uma cerâmica localizada na parte traseira do suporte por meio de um divisor de tensão resistivo de 100:1.

Os ensaios de usinagem foram feitos de maneira qualitativa para a verificação das condições de corte e tensões elétricas envolvidas no processo e a Figura 3.32 mostra a peça após a usinagem, em que é possível observar os efeitos do *chatter*.

Figura 3.32 - Peça após a usinagem

A forma de onda da cerâmica piezelétrica, capturada por meio do osciloscópio e de um circuito resistivo de 1:100, encontra-se na Figura 3.33 (na foto, a escala do osciloscópio é de 5V).

Figura 3.33 - Forma de onda da cerâmica piezelétrica

Quando se considera a escala do osciloscópio e o divisor de tensão, as tensões geradas pela cerâmica piezelétrica ficam próximas de 500 V de pico.

Devido a essa tensão relativamente alta e a intenção de usar indutores sintéticos, decidiu-se pelo uso de um outro suporte de ferramenta, idêntico ao usado nesse estudo, contudo com uma diminuição em seu comprimento.

Testes de usinagem com a presença de *shunts* não foram realizados por problemas de funcionamento do torno, o qual se encontrava inoperante após a chegada dos indutores e durante o término desse trabalho.

3.3 Estudo 3 – ferramenta de torneamento interno com comprimento de 270 mm

Esse estudo é idêntico ao da seção anterior, para o suporte de ferramenta de 350 mm. Entretanto, nessa montagem o suporte de ferramenta teve seu comprimento diminuído em 80 mm (foi usinado), resultando em um comprimento total de 270 mm (Figura 3.34). Além disso, apenas duas cerâmicas piezelétricas foram acopladas ao suporte, uma na parte superior e outra na inferior.

Figura 3.34 – Suporte de ferramenta Sandvik Coromant S32U PTFNL 16-W com comprimento reduzido

As propriedades da ferramenta relacionadas na Tabela 3.5 e as da cerâmica piezelétrica na Tabela 3.6 - ambas contidas no Estudo 2 - permanecem as mesmas, com exceção do comprimento da ferramenta, o qual passa a ser de 270 mm.

O procedimento usado no Estudo 2 é reproduzido a seguir:

1. Identificação experimental de ω_n^D e ω_n^E
2. Modelo eletromecânico de parâmetros distribuídos:
 - ajuste do comprimento da viga
 - Cálculo (e ajuste) dos valores ótimos de resistência e indutância
3. Teste de impacto (*Tap test*) do sistema com os *shunts* conectados
4. Lóbulos de estabilidade
5. Testes de usinagem

3.3.1 Obtenção das frequências de ressonância dos suportes de ferramenta.

Do mesmo modo que no Estudo 2, foram obtidas as frequências naturais com circuito aberto (ω_n^D) e em curto-circuito (ω_n^E), como indicado na Figura 3.35 e na Figura 3.36, respectivamente.

Neste caso, as frequências naturais obtidas foram iguais, talvez pela resolução do equipamento usado, o que levou a considerar o valor de ω_n^D ligeiramente superior ao de ω_n^E devido ao efeito capacitivo, de forma que se adotou $\omega_n^D = 269,5\text{Hz}$ e $\omega_n^E = 269\text{Hz}$.

Figura 3.35 - FRF do suporte de ferramenta de 270 mm com circuito aberto

Estudos e discussões

Figura 3.36 - FRF do suporte de ferramenta de 270 mm com circuito fechado

3.3.2 – Modelo eletromecânico de parâmetros distribuídos - ferramenta de torneamento interno com comprimento de 350 mm

O modelo eletromecânico de parâmetros distribuídos deste suporte de ferramenta foi construído de maneira similar ao do Estudo 2.

Nesse estudo, a frequência natural do modelo “casou” com a frequência natural medida quando o comprimento da viga no modelo passou a ser de 254 mm.

Corrigido o comprimento do modelo, procurou-se os valores ótimos de indutores e resistores e seus respectivos ajustes para serem usados nos *shunts*, mostrados na Tabela 3.10.

Tabela 3.10 – Valores ótimos calculados e ajustados para o suporte de ferramenta de torneamento interno de 270mm

<i>Shunt</i>	R ótimo	R ajustado	L ótimo	L ajustado
Resistivo	93,58 $k\Omega$	-	-	-
Indutivo	-	-	-	49,1 H
Resistivo-indutivo em série	8,05 $k\Omega$	-	55,16 H	49,1 H
Resistivo-indutivo em paralelo	1,08 $M\Omega$	-	55,47 H	49,37 H

As curvas de resposta do suporte de ferramenta de torneamento interno com comprimento de 270 mm e cerâmica piezelétrica acoplada com e sem *shunts* são mostradas a seguir e, novamente, serão mostrados apenas os resultados obtidos.

A Figura 3.37 apresenta a magnitude e a fase do modelo do suporte de ferramenta sem *shunt* conectado.

Figura 3.37 – Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 270 mm sem *shunt*.

3.3.2.1 *Shunt* resistivo

Na Figura 3.38 estão a magnitude e a fase do suporte de ferramenta com *shunt* resistivo.

Figura 3.38 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 270 mm com *shunt* resistivo.

3.3.2.2 *Shunt* indutivo

A Figura 3.39 apresenta as curvas para o *shunt* puramente indutivo.

Figura 3.39 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 270 mm com *shunt* indutivo.

3.3.2.3 *Shunt* resistivo-indutivo em série

Mantendo o valor ótimo do indutor, a resposta do *shunt* resistivo-indutivo em série encontra-se na Figura 3.40.

Figura 3.40 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 350mm com *shunt* resistivo-indutivo em série.

3.3.2.4 *Shunt* resistivo-indutivo em paralelo

A Figura 3.41 apresenta as curvas do *shunt* resistivo-indutivo em paralelo

Figura 3.41 - Magnitude e fase do modelo do suporte de ferramenta de torneamento interno de 350mm com shunt resistivo-indutivo em paralelo.

3.3.2.5 Comparação de desempenho em *shunts* resistivo e resistivo-indutivo

A comparação entre os *shunts* resistivos, resistivo-indutivo série e resistivo indutivo paralelo – calculados com os valores ótimos ajustados – encontra-se na Figura 3.42.

Figura 3.42 – Comparação da magnitude e fase dos *shunts* Resistivo (R), resistivo-indutivo em série (RL série) e resistivo-indutivo em paralelo (RL paralelo) para a ferramenta de 270 mm.

3.3.3 Teste de impacto com *shunts* passivos

A obtenção das respostas da estrutura ao teste de impacto seguiram, mais uma vez, a metodologia do Estudo 2.

Os resultados desses testes são mostrados na Figura 3.43, nos quais é possível identificar três frequências naturais bem próximas uma das outras. Algumas das razões disso acontecer podem ser atribuídas ao efeito modo-acoplado ou a não linearidades do sistema, embora seja necessária uma investigação mais profunda para afirmações categóricas. De qualquer forma, o uso de *shunts* resistivo-indutivo produziu uma atenuação na resposta do sistema em comparação com a ausência dos mesmos, ainda que não haja muita diferença entre os *shunts* resistivo-indutivo paralelo e em série. Novamente, a conexão em série apresenta um desempenho pouco melhor que o *shunt* em paralelo.

Figura 3.43 - Teste de impacto para suporte de ferramenta de 270 mm

3.3.4 Diagrama dos lóbulos de estabilidade

Também usando os gráficos de magnitude e fase anteriormente encontrados na Seção 3.3.2, criaram-se os diagramas dos lóbulos de estabilidade para os *shunts* resistivo-indutivo em paralelo, em série e sem *shunt*.

Os valores de k , c e m obtidos pelo ajuste de curvas são mostrados na Tabela 3.8.

Tabela 3.11- Valores de k , c e m ajustados para a ferramenta de torneamento interno de 270 mm

<i>Placa piezelétrica</i>	<i>Shunt</i>	<i>k</i>	<i>c</i>	<i>m</i>
4 mm	Sem shunt	7,9433e5	61	11
4 mm	RL série	7,7625e5	135	10,7
4 mm	RL paralelo	7,7625e5	130	10,7

Os diagramas de lóbulos de estabilidade obtidos são mostrados na Figura 3.44, na qual é possível notar que mais uma vez não há uma grande diferença entre as curvas com *shunt* (com vantagem do *shunt* em série), porém há um aumento do limite de estabilidade quando comparados à situação sem *shunt*.

Figura 3.44 - Diagramas de lóbulos de estabilidade para a ferramenta de torneamento de 270 mm

3.3.5 Testes de usinagem – ferramenta de torneamento interno com comprimento de 350 mm

Em virtude da indisponibilidade do torno e do prazo para conclusão do trabalho, esses ensaios não foram realizados.

4 Conclusões

A partir dos resultados delineados anteriormente, pode-se inferir que camadas mais espessas de material piezelétrico aumentam a capacidade de amortecimento das estruturas.

Também se pode concluir q o uso de *shunts* do tipo indutivo e do tipo resistivo não é indicado para a atenuação do modo vibracional principal em qualquer suporte. O principal motivo para tal afirmação é o fato de que na situação de *shunt* do tipo indutivo pode-se observar o surgimento de duas outras freqüências de ressonância próximas à freqüência de ressonância original, a qual acaba desaparecendo, funcionando como um absorvedor dinâmico não amortecido. No caso do *shunt* resistivo não há uma atenuação significativa em relação à magnitude do modo de vibração original.

Quanto aos *shunts* do tipo resistivo-indutivo, quando bem sintonizados, podem oferecer um aumento no amortecimento da estrutura, conforme apresentado nos resultados numéricos e nos testes de impacto. Além disso, a implementação desses *shunts* pode ser realizada de maneira simples. Entretanto, a sintonização não é tarefa fácil, pois os componentes freqüentemente apresentam desvios de valor em relação ao nominal e, além disso, as simulações se mostraram bem sensíveis à variação dos valores dos indutores, com uma robustez maior quanto à variação das resistências de *shunt*.

Os valores ótimos, em especial os dos indutores, apresentaram uma diferença de cerca de 10% em relação àqueles ajustados manualmente. Isso pode ser influência dos valores das freqüências de ressonância em aberto e curto-circuito obtidos experimentalmente. Apesar disso, esses valores foram uma boa estimativa de valor inicial para um futuro ajuste. Devido à sensibilidade da resposta à indutância, buscou-se o uso de indutores sintéticos construídos com amplificadores operacionais para permitir o ajuste das indutâncias de maneira prática, por meio de um potenciômetro. As simulações desses circuitos (contidas no Apêndice A), na faixa de freqüência de operação desse trabalho, mostram que o comportamento desse indutor é muito próximo ao de um indutor convencional. Porém, um dos entraves quanto ao seu uso são as tensões envolvidas durante o processo de

torneamento (no caso dos testes realizados nesse trabalho, próximas a $1000V_{pp}$), o que leva a procura por componentes capazes de que podem não ser de fácil disponibilidade. As altas tensões também dificultaram a medição direta dos sinais gerados pelas cerâmicas piezelétricas, razão pela qual se usou divisor de tensão resistivo.

Apesar da implementação do indutor sintético usando amplificadores operacionais, os quais haviam sido testados previamente como amplificadores inversores, tais indutores não funcionaram. Em virtude disso, passou-se a usar combinações de indutores para atingir aqueles valores ótimos obtidos nos estudos numéricos.

Quando esses indutores foram usados como *shunt* junto com os resistores, os resultados dos testes de impacto mostraram a capacidade de amortecimento que os materiais piezelétricos podem oferecer às estruturas mecânicas.

Os ensaios de martelo sugerem a viabilidade da atenuação das vibrações durante o processo. O correto dimensionamento do material piezelétrico levou a resultados experimentais (ensaios de impacto) condizentes com os resultados vindos da análise numérica: os *shunts* do tipo resistivo-indutivo causaram atenuação da magnitude em relação à FRF original. De fato, deve-se observar que a robustez do sistema é ainda limitada frente à necessidade de se sintonizar precisamente o modo vibracional de interesse.

Os diagramas de lóbulos de estabilidade também mostraram que o uso de materiais piezelétricos pode melhorar o desempenho das ferramentas em processos de torneamento, permitindo uma maior profundidade de corte.

4.1 Propostas de trabalhos futuros

- Realizar ensaios de torneamento em condições próximas a profundidade crítica de corte para a verificação do desempenho dos *shunts*.
- Usar estratégias de controle ativo sobre os materiais piezelétricos para a supressão do *chatter*.

- Usar indutores sintéticos para fazer uma sintonização da indutância em busca de valores ótimos nos experimentos.
- Usar *shunts* multimodais.
- Usar configurações do tipo *bimorph*.

5 Bibliografia

CHENG, 2009AGNES, C. G. S. ACTIVE/PASSIVE PIEZOELECTRIC VIBRATION SUPPRESSION Capt. Gregory S. Agnes. **Journal of Intelligent Materials, Systems, and Structures**, v. 6, p. 482-487, 1995.

AHMADI, K.; ISMAIL, F. Experimental investigation of process damping nonlinearity in machining chatter. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, v. 50, n. 11, p. 1006-1014, 2010.

AIROLDI, L.; RUZZENE, M. Wave Propagation Control in Beams Through Periodic Multi-Branch Shunts. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 22, n. 14, p. 1567-1579, 2011.

ALTINTAS, Y. **Manufacturing Automation: Metal Cutting Mechanics, Machine Tool Vibrations, and Cnc Design**. 2nd. Cambridge University Press, 2012.

ALTINTAS, Y.; WECK, M. Chatter Stability of Metal Cutting and Grinding. **CIRP Annals - Manufacturing Technology**, v. 53, n. 2, p. 619-642, 2004.

ANDRÉN, L.; HÅKANSSON, L.; CLAEISSON, I. Active control of machine tool vibrations in external turning operations. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture**, v. 217, n. 6, p. 869-872, 2003.

ANTON, S. R.; SODANO, H. A. A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003–2006). **Smart Materials and Structures**, v. 16, n. 3, p. R1-R21, 2007.

ANTONIOU, A. Realisation of gyrators using operational amplifiers, and their use in RC-active-network synthesis. **PROC. IEE**, v. 116, n. 11, p. 1838-1850, 1969.

ARMAREGO, E. J. A.; BROWN, R. H. **The machining of metals**. Prentice-Hall, 1969.

ARMAREGO, E. J. A.; WHITFIELD, R. C. Computer Based Modelling of Popular Machining Operations for force and power predictions. **Annals of the CIRP**, v. 34, p. 65-69, 1985.

ASSOCIAÇÃO_BRASILEIRA_DE_NORMAS_TÉCNICAS. **NBR ISO 3002-1: Grandezas básicas em usinagem e retificação Parte 1: Geometria da parte**

cortante das ferramentas de corte-Termos gerais, sistemas de referência, ângulos da ferramenta e de trabalho e quebra-cavacos. Rio de Janeiro 2013.

ASTAKHOV, V. P. **Tribology of metal cutting.** Great Britain: Elsevier, 2006.

BAKER, J. R.; ROUCH, K. E. Use of finite element structural models in analyzing machine tool chatter. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 38, p. 1029-1046, 2002.

BOOTHROYD, G.; KNIGHT, W. A. **Fundamentals of machining and machine tools.** 2nd. New York: Marcel Dekker, 1989.

CERVELIN, J. E. **Estudo teórico-experimental das forças de corte no processo de torneamento.** 2009. (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos - Departamento de Engenharia de Produção, Universidade de São Paulo

CERVELIN, J. E.; SILVA, M. M. D.; COELHO, R. T. AVALIAÇÃO NUMÉRICA DA REDUÇÃO DA VIBRAÇÃO EM PROCESSOS DE USINAGEM USANDO MATERIAL PIEZELÉTRICO E CONTROLE PASSIVO. **VI CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA - CONEM 2010**, 2010.

CHENG, K. **Machining Dynamics - Fundamentals, Applications and Practices.** Springer, 2009.

CHOUDHURY, S.; SHARATH, M. S. On-line control of machine tool vibration during turning operation. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 47, n. 3-4, p. 251-259, 1995.

CHOUDHURY, S. K.; GOUDIMENKO, N. N.; KUDINOV, V. A. On-Line Control Of Machine Tool Vibration In Turning. **Int. J. Mach. Tools Manuf**, v. 37, n. 6, p. 801-811, 1997.

CLAESSON, I.; HAKANSSON, L. ADAPTATIVE ACTIVE CONTROL OF MACHINE-TOOL VIBRATION IN A LATHE. **International Journal of Acoustics and Vibration**, v. 3, n. 4, p. 155-162, 1998.

CLOUGH, R.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures.** 3ed. Berkeley: Computers & Structures, Inc, 2003.

DAHIL, L.; KARABULUT, A.; BASPINAR, S. DAMPING PROPERTIES OF OPEN PORE ALUMINUM FOAMS PRODUCED BY VACUUM CASTING AND NaCl DISSOLUTION PROCESS. **METALURGIJA**, v. 52, n. 4, p. 489-492, 2013.

DELL ISOLA, F.; MAURINI, C.; PORFIRI, M. Passive damping of beam vibrations through distributed electric networks and piezoelectric transducers: prototype design and experimental validation. **Smart Materials and Structures**, v. 13, n. 2, p. 299-308, 2004.

DESHPANDE, N.; FOFANA, M. S. Nonlinear regenerative chatter in turning. **Robotics and Computer-Integrated Manufacturing**, v. 17, n. 1-2, p. 107-112, 2001.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos**. 8ªed. LTC Editora, 1998.

DROSSEL, W.; WITTSTOCK, V. Adaptive spindle support for improving machining operations. **CIRP Annals - Manufacturing Technology**, v. 57, n. 1, p. 395-398, 2008.

EMA, S.; MARUI, E. Suppression of chatter vibration of boring tools using impact dampers. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, v. 40, n. 8, p. 1141-1156, 2000.

ERNST, H.; MERCHANT, M. E. Chip formation, friction and high quality machined surfaces. **Surface treatment of metals. Am Soc Met**, v. 29, p. 299-378, 1941.

ERTURK, A.; INMAN, D. J. A Distributed Parameter Electromechanical Model for Cantilevered Piezoelectric Energy Harvesters. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 130, n. 4, p. 041002-041002, 2008.

ERTURK, A.; INMAN, D. J. On Mechanical Modeling of Cantilevered Piezoelectric Vibration Energy Harvesters. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 19, n. 11, p. 1311-1325, 2008a.

_____. Piezoelectric shunt damping for chatter suppression in machining processes. 2008b. p.193-208.

EWINS, D. J. **Modal Testing: Theory, Practice and Application**. 2nd. RESEARCH STUDIES PRESS LTD, 2000.

EYNIAN, M.; ALTINTAS, Y. Chatter Stability of General Turning Operations With Process Damping. **Journal of Manufacturing Science and Engineering**, v. 131, n. 4, p. 041005-041001-041005-041010, 2009.

FLEMING, A. J.; BEHRENS, S.; MOHEIMANI, S. O. R. Reducing the inductance requirements of piezoelectric shunt damping systems. **Smart Materials and Structures**, v. 12, n. 1, p. 57-64, 2003.

FLEMING, A. J.; MOHEIMANI, S. O. R. **THE EFFECT OF ARTIFICIALLY REDUCING THE SIZE OF INDUCTORS IN PIEZOELECTRIC SHUNT DAMPING CIRCUITS** 2002.

FLEMING, A. J.; MOHEIMANI, S. O. R. Synthesis of optimal piezoelectric shunt impedances for structural vibration control. **Proc. of SPIE**, v. 5386, p. 516-527, 2004.

FULLER, C. R.; ELLIOTT, S. J.; NELSON, P. A. **ACTIVE CONTROL OF VIBRATION**. Academic Press, 1996.

GANGULI, A. **Chatter reduction through active vibration damping**. 2005.

GANGULI, A.; DERAEMAERKER, A.; PREUMONT, A. Regenerative chatter reduction by active damping control. **Journal of Sound and Vibration**, v. 300, n. 3-5, p. 847-862, 2007.

GANGULI, A. et al. Simulation and Active Control of Chatter in Milling via a Mechatronic Simulator. **Journal of Vibration and Control**, v. 12, n. 8, p. 817-848, 2006.

GERE, J. M.; GOODNO, B. J. **Mechanics of Materials**. BRIEF EDIT. Cengage Learning, 2012.

GIURGIUTIU, V. **Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors**. Academic Press, 2008.

GONZALO, O. et al. A method for the identification of the specific force coefficients for mechanistic milling simulation. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, v. 50, n. 9, p. 765-774, 2010.

GRZESIK, W. I. T. THE MECHANICS OF CONTINUOUS CHIP FORMATION IN OBLIQUE CUTTING WITH SINGLE-EDGED TOOL - PART I. THEORY. **Int. J. Mach. Tools Manufact.**, v. 30, n. 3, p. 359-371, 1990.

GURNEY, J. P.; TOBIAS, S. A. A GRAPHICAL METHOD FOR THE DETERMINATION OF THE DYNAMIC STABILITY OF MACHINE TOOLS. **Int J. Mach. Tool Des. Res.**, v. I, p. 148-156, 1961.

HAGOOD, N. W.; FLOTOW, A. V. DAMPING OF STRUCTURAL VIBRATIONS WITH PIEZOELECTRIC MATERIALS AND PASSIVE ELECTRICAL NETWORKS. **Journal of Sound and Vibration**, v. 146, n. 2, p. 243-268, 1991.

HAJIKOLAEI, K. H. et al. Spindle speed variation and adaptive force regulation to suppress regenerative chatter in the turning process. **Journal of Manufacturing Processes**, v. 12, n. 2, p. 106-115, 2010.

HAKANSSON, L. et al. Active Control Machine Tool Chatter Piezo Ceramic Actuators in Tool Holder Shank. 1999. p.2675-2683.

HARRIS, C. M.; PIERSOL, A. G. **SHOCK AND VIBRATION HANDBOOK**. 5th. McGRAW-HILL, 2002.

HE, J.; FU, Z.-F. **Modal Analysis**. Butterworth-Heinemann, 2001.

HOLLKAMP, J. J. Multimodal Passive Vibration Suppression with Piezoelectric Materials and Resonant Shunts. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 5, n. 1, p. 49-57, 1994.

HURLEBAUS, S.; GAUL, L. Smart structure dynamics. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 20, p. 255-281, 2006.

INMAN, D. J. **Vibration with Control**. John Wiley & Sons, Ltd, 2006.

_____. **Engineering Vibration**. 3ed. Pearson Education, 2008.

JANOCHA, H. **Adaptronics and Smart Structures - Basics, Materials, Design and Applications**. Springer, 2007.

JAYALALITHA, D. S.; SUSAN, D. Grounded Simulated Inductor - A Review. **Middle-East J. Sci. Res.**, v. 15, n. 2, p. 278-286, 2013.

KAYACIK, Ö. et al. Integral equation approach for piezo patch vibration control of beams with various types of damping. **Computers & Structures**, v. 86, n. 3-5, p. 357-366, 2008.

KAYMAKCI, M.; KILIC, Z. M.; ALTINTAS, Y. Unified cutting force model for turning, boring, drilling and milling operations. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, v. 54-55, p. 34-45, 2012.

KELLY, S. G. **Mechanical Vibrations: Theory and Applications**. SI ed. Cengage Learning, 2012.

KNIGHT, W. A. CHATTER IN TURNING: SOME EFFECTS OF TOOL GEOMETRY AND CUTTING CONDITIONS. **Int. J. Mach. Tool Des. Res.**, v. 12, p. 201-220, 1972.

KODEJŠKA, M. et al. Adaptive Vibration Suppression System : An Iterative Control Law for a Piezoelectric Actuator Shunted by a Negative Capacitor. **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control**, v. 59, n. 12, p. 2785-2796, 2012.

LAGÖ, T. L. et al. DESIGN OF AN EFFICIENT CHATTER CONTROL SYSTEM FOR TURNING AND BORING APPLICATIONS. 2002. p.3-6.

LEO, D. J. **ENGINEERING ANALYSIS OF SMART MATERIAL SYSTEMS**. John Wiley & Sons, Ltd, 2007.

LESIEUTRE, G.; OTTMAN, G. K.; HOFMANN, H. F. Damping as a result of piezoelectric energy harvesting. **Journal of Sound and Vibration**, v. 269, n. 3-5, p. 991-1001, 2004.

LESIEUTRE, G. A. Vibration Damping and Control Using Shunted Piezoelectric Materials. **The Shock and vibration digest**, v. 30, n. 3, p. 187-195, 1998.

LIANG, S. Y.; HECKER, R. L.; LANDERS, R. G. Machining Process Monitoring and Control: The State-of-the-Art. **Journal of Manufacturing Science and Engineering**, v. 126, n. 2, p. 297-297, 2004.

LIU, C. R.; LIU, T. M. Automated Chatter Suppression by Tool Geometry Control. **Journal of Engineering for Industry**, v. 107, n. 2, p. 95-98, 1985.

LUK, W. K. Mechanics of the turning operation. **International Journal of Machine Tool Design and Research**, v. 10, n. 3, p. 351-360, 1970.

MACHADO, A. R. et al. **Teoria da Usinagem dos Materiais**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2011.

MAHDAVINEJAD, R. Finite element analysis of machine and workpiece instability in turning. **Int. J. Mach. Tools Manuf**, v. 45, p. 753-760, 2005.

MAHNAMA, M.; MOVAHHEDY, M. R. Prediction of machining chatter based on FEM simulation of chip formation under dynamic conditions. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, v. 50, n. 7, p. 611-620, 2010.

MEI, C. Active regenerative chatter suppression during boring manufacturing process. **Robotics and Computer-Integrated Manufacturing**, v. 21, p. 153-158, 2005.

MERRIT, H. E. Theory of self-excited machine-tool chatter-contribution to machine tool chatter research-1. **ASME Journal of Engineering for Industry**, v. 87, n. 4, p. 447-454, 1965.

MIGUÉLEZ, M. H. et al. Improvement of chatter stability in boring operations with passive vibration absorbers. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 52, n. 10, p. 1376-1384, 2010.

MINIS, I. E.; MAGRAB, E. B.; PANDELIDIS, I. O. Improved Methods for the Prediction of Chatter in Turning, Part 1: Determination of Structural Response Parameters. **Journal of Engineering for Industry**, v. 112, n. 1, p. 12-12, 1990a.

_____. Improved Methods for the Prediction of Chatter in Turning, Part 2: Determination of Cutting Process Parameters. **Journal of Engineering for Industry**, v. 112, n. 1, p. 21-21, 1990b.

_____. Improved Methods for the Prediction of Chatter in Turning, Part 3: A Generalized Linear Theory. **Journal of Engineering for Industry**, v. 112, n. 1, p. 28-28, 1990c.

MOHEIMANI, S. O. R.; FLEMING, A. J. **Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping**. Springer, 2006.

MORADI, H. et al. Nonlinear behaviour of the regenerative chatter in turning process with a worn tool: Forced oscillation and stability analysis. **Mechanism and Machine Theory**, v. 45, n. 8, p. 1050-1066, 2010.

MOUFKI, A. Thermoviscoplastic modelling of oblique cutting: forces and chip flow predictions. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 42, n. 6, p. 1205-1232, 2000.

OLGAC, N.; HOSEK, M. A new perspective and analysis for regenerative machine tool chatter. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, v. 38, n. 7, p. 783-798, 1998.

PAN, G. et al. Modeling and intelligent chatter control strategies for a lathe machine. **Control Engineering Practice**, v. 4, n. 12, p. 1647-1658, 1996.

PAN, J.; SU, C.-Y. Chatter suppression with adaptive control in turning metal via application of piezoactuator. **Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.01CH37228)**, n. December, p. 2436-2441, 2001.

PARK, C. H.; INMAN, D. J. Enhanced piezoelectric shunt design. **Shock and Vibration**, v. 10, p. 127-133, 2003.

PARK, C. H.; PARK, H. C. Multiple-Mode Structural Vibration Control Using Negative Capacitive Shunt Damping. **KSME International Journal**, v. 17, n. 11, p. 1650-1658, 2003.

PARK, G. et al. The use of active materials for machining processes: A review. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, v. 47, n. 15, p. 2189-2206, 2007.

PIERSOL, A. G.; PAEZ, T. L. **HARRIS' SHOCK AND VIBRATION HANDBOOK**. 6th. McGRAW-HILL, 2010.

PRATT, J. R. et al. Dynamic Interrogation of a Basic Cutting Process. **CIRP Annals - Manufacturing Technology**, v. 48, n. 1, p. 39-42, 1999.

PRATT, J. R.; NAYFEH, A. H. Chatter control and stability analysis of a cantilever boring bar under regenerative cutting conditions. **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 359, n. 1781, p. 759-792, 2001.

PREUMONT, A. **Mechatronics - Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems**. Springer, 2006.

PREUMONT, A. et al. The damping of a truss structure with a piezoelectric transducer. **Computers & Structures**, v. 86, n. 3-5, p. 227-239, 2008.

QUINTANA, G.; CIURANA, J. Chatter in machining processes: A review. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, v. 51, n. 5, p. 363-376, 2011.

RADECKI, P. P. et al. Vibration Suppression in Cutting Tools Using a Collocated Piezoelectric Sensor/Actuator With an Adaptive Control Algorithm. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 132, n. 5, p. 051002-051002, 2010.

RAO, B.; SHIN, Y. C. A comprehensive dynamic cutting force model for chatter prediction in turning. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, v. 39, n. 10, p. 1631-1654, 1999.

RAO, S.; SUNAR, M. Piezoelectricity and Its use In disturbance sensing and control of flexible structures : A survey. **Appl Mech Rev**, v. 47, n. 4, p. 113-123, 1994.

RAO, S. S. **Mechanical Vibrations**. 5ed. Prentice Hall, 2011.

RAYLEIGH, L. **Theory of Sound**. 2ed. 1945.

RIORDAN, R. H. S. SIMULATED INDUCTORS USING DIFFERENTIAL AMPLIFIERS. **ELECTRONICS LETTERS**, v. 3, n. 2, p. 50-51, 1967.

RIVIN, E. I.; KANG, H. ENHANCEMENT OF DYNAMIC STABILITY OF CANTILEVER TOOLING STRUCTURES. **Int. J. Mach. Tools Manufact.**, v. 32, n. 4, p. 539-561, 1992.

RIVIN, E. I.; KANG, H.; KOPS, L. Improving Dynamic Performance of Cantilever Boring Bars. **Annals of the CIRP**, v. 38, n. 1, p. 377-380, 1989.

SAADON, S.; SIDEK, O. A review of vibration-based MEMS piezoelectric energy harvesters. **Energy Conversion and Management**, v. 52, n. 1, p. 500-504, 2011.

SAJEDIPOUR, D.; BEHBAHANI, S.; TABATABAEI, S. M. K. Mechatronic Modeling and Control of a Lathe Machine Equipped with a MR Damper for Chatter Suppression. **IEEE International Conference on Control and Automation**, p. 802-807, 2010.

SCHMITZ, T. L.; SMITH, K. S. **Machining Dynamics - Frequency Response to Improved Productivity**. Springer, 2009.

SCHMITZ, T. L.; SMITH, K. S. **Mechanical Vibrations - Modeling and Measurement**. Springer, 2012.

SENANI, R. Alternative modification of the classical GIC structure. **ELECTRONICS LETTERS**, v. 32, n. 15, p. 1329-1329, 1996.

SHAMOTO, E.; ALTINTAS, Y. Prediction of Shear Angle in Oblique Cutting with Maximum Shear Stress and Minimum Energy Principles. **Journal of Manufacturing Science and Engineering**, v. 121, p. 399-407, 1999.

SHIRAISHI, M.; KUME, E.; HOSHI, T. Suppression of Machine-Tool Chatter by State Feedback Control. **CIRP Annals - Manufacturing Technology**, v. 37, n. 1, p. 369-372, 1988.

SHIRAISHI, M.; YAMANAKA, K.; FUJITA, H. OPTIMAL CONTROL OF CHATTER IN TURNING. **Int. J. Mach. Tools Manufact.**, v. 31, n. 1, p. 31-43, 1991.

SIDDHPURA, M.; PAUROBALLY, R. A review of chatter vibration research in turning. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, v. 61, p. 27-47, 2012.

SILVA, C. W. D. **Vibration Damping, Control, and Design**. CRC Press, 2007.

SILVA, M. M. D. et al. Regenerative chatter reduction through passive damping: numerical evaluation. **IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics**, p. 1174-1179, 2010.

SMITH, S.; TLUSTY, J. Stabilizing Chatter by Automatic Spindle Speed Regulation. **CIRP Annals - Manufacturing Technology**, v. 41, n. 1, p. 433-436, 1992.

SODANO, H. A.; INMAN, D. J.; PARK, G. A Review of Power Harvesting from Vibration Using Piezoelectric Materials. **The Shock and Vibration Digest**, v. 36, n. 3, p. 197-205, 2004.

SORTINO, M.; TOTIS, G.; PROSPERI, F. Development of a practical model for selection of stable tooling system configurations in internal turning. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, v. 61, p. 58-70, 2012.

STABLER, G. V. The Chip flow Law and Its Consequences. **Advances in Machine Tool Design and Research**, p. 243-251, 1964.

STOPPLER, G.; DOUGLAS, S. Adaptronic gantry machine tool with piezoelectric actuator for active error compensation of structural oscillations at the tool centre point. **Mechatronics**, v. 18, n. 8, p. 426-433, 2008.

SUTHERLAND, W. C. THE PRACTICAL OPERATIONAL-AMPLIFIER GYRATOR CIRCUIT FOR INDUCTORLESS FILTER SYNTHESIS. **NASA TECHNICAL MEMORANDUM - NASA TM X-64995**, v. 3190, n. March, 1976.

SWEENEY, G.; TOBIAS, S. A. SURVEY OF BASIC MACHINE TOOL CHATTER RESEARCH*. **Int. J. Mach. Tool Des. Res.**, v. 9, n. 1969, p. 217-238, 1969.

TAKEYAMA, H. et al. Improvement of Dynamic Rigidity of Tool Holder by Applying High-Damping Material. **Annals of the CIRP**, v. 33, n. 1, p. 249-252, 1984.

TANGJITSITCHAROEN, S. In-process monitoring and detection of chip formation and chatter for CNC turning. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 209, n. 10, p. 4682-4688, 2009.

TARNG, Y.; KAO, J. Y.; LEE, E. C. Chatter suppression in turning operations with a tuned vibration absorber. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 105, n. 1-2, p. 55-60, 2000.

TEWANI, S. G.; ROUCH, K. E.; WALCOTT, B. L. A STUDY OF CUTTING PROCESS STABILITY OF A BORING BAR WITH ACTIVE DYNAMIC ABSORBER. **Int. J. Mach. Tools Manufact.**, v. 35, n. 1, p. 91-108, 1995.

TLUSTY, J.; ISMAIL, F. Basic non-linearity in machining chatter. **Annals of the CIRP**, v. 30, n. 1, p. 299-304, 1981.

TLUSTY, J.; POLACEK, M. The stability of machine tools against self excited vibrations in machining. **Proceedings of the International Research in Production Engineering Conference ASME**, p. 465-474, 1963.

TOBIAS, S. A.; FISHWICK, W. The chatter of lathe tools under orthogonal cutting conditions. **Transactions of ASME**, v. 80, p. 1079-1088, 1958a.

_____. Theory of Regenerative Machine Tool Chatter*. **The Engineer**, p. 199-203, 1958b.

TSCHÄTSCH, H. **Applied Machining Technology**. Springer, 2008.

TURKES, E. et al. Linear analysis of chatter vibration and stability for orthogonal cutting in turning. **International Journal of Refractory Metals and Hard Materials**, v. 29, n. 2, p. 163-169, 2011.

TYLER, C. T.; SCHMITZ, T. L. Analytical process damping stability prediction. **Journal of Manufacturing Processes**, v. 15, n. 1, p. 69-76, 2013.

UGURAL, A. C.; FENSTER, S. K. **Advanced Strength and Applied Elasticity**. 4ed. New Jersey: Prentice Hall, 2003.

VIANA, F. A. C.; STEFFEN, V. Multimodal Vibration Damping through Piezoelectric Patches and Optimal Resonant Shunt Circuits. **J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.**, v. XXVIII, n. 3, p. 293-310, 2006.

WANG, J.; SU, C.-Y.; TAN, Y. Two degree-of-freedom modeling and robust control of chatter in metal cutting by using independent piezoactuator. **The Fourth International Conference on Control and Automation, 2003. ICCA. Final Program and Book of Abstracts.**, n. June, p. 79-79, 2003.

WILHELM, J.; RAJAMANI, R. Methods for Multimodal Vibration Suppression and Energy Harvesting Using Piezoelectric Actuators. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 131, n. 1, p. 011001-011001, 2009.

WU, D.; CHEN, K. Chatter suppression in fast tool servo-assisted turning by spindle speed variation. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, v. 50, n. 12, p. 1038-1047, 2010.

WU, S.-Y. Piezoelectric shunts with a parallel R-L circuit for structural damping and vibration control. **SPIE**, v. 2720, p. 259-269, 1996.

XIAO, M. et al. Analysis of chatter suppression in vibration cutting. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, v. 42, n. 15, p. 1677-1685, 2002.

YAMADA, K. et al. Optimum tuning of series and parallel LR circuits for passive vibration suppression using piezoelectric elements. **Journal of Sound and Vibration**, v. 329, n. 24, p. 5036-5057, 2010.

YONEOKA, T. et al. Disturbance Observer – Based In-process Detection and Suppression of Chatter Vibration. **Procedia CIRP** 1, v. 1, p. 44-49, 2012.

YUE, J. Creating a Stability Lobe Diagram. **Proceedings of the 2006 IJME - INTERTECH Conference**, v. 53, 2006.

APÊNDICE A - Dimensionamento e implementação de indutores sintéticos

A fim de dimensionar corretamente os componentes necessários à construção de indutores sintéticos, deve-se observar com atenção as tensões e correntes envolvidas nos circuitos de simulação de impedância, pois as correntes requeridas para seu correto funcionamento devem estar dentro dos limites suportados pelos amp-op e os resistores e capacitores devem suportar as correntes e tensões (e conseqüentemente a potência) aplicadas em seus terminais. Dessa forma, segue abaixo a solução de tensões e correntes para dois indutores sintéticos, um aterrado e um flutuante, baseados no indutor de Antoniou. A **Figura 5.1** e a Figura 5.2 indicam as tensões e correntes nos circuitos abordados.

Figura 5.1 - Tensões e correntes no indutor sintético aterrado de Antoniou

Para o circuito aterrado de Antoniou, os cálculos de tensões e correntes são descritos nas equações a seguir:

$$i = \frac{V_{in}}{R_5} \quad (C.2)$$

$$i_1 = \frac{V_{in} R_4}{j\omega C_2 R_1 R_3 R_5} \quad (C.3)$$

$$i_3 = \frac{V_{in}R_4}{R_3R_5} \quad (C.4)$$

$$i_{A1} = -\frac{V_{in}R_4(1 - j\omega C_2R_1)}{j\omega C_2R_1R_3R_5} \quad (C.5)$$

$$i_{A2} = -\frac{V_{in}(R_3 + R_4)}{(R_3 + R_5)} \quad (C.6)$$

$$V_A = V_{in}\left(1 + \frac{R_4}{R_5}\right) \quad (C.7)$$

$$V_B = V_{in}\left(1 - \left(\frac{R_4}{j\omega C_2R_3R_5}\right)\right) \quad (C.8)$$

Já para o indutor sintético flutuante de Antoniou, são as seguintes equações que descrevem as correntes e tensões no circuito:

$$i_1 = i_2 = \frac{R_4(V_{in} - V_o)}{2j\omega C_2R_1R_3R_5} \quad (C.9)$$

$$i_3 = \frac{V_{in}R_4}{R_3R_5} \quad (C.10)$$

$$V_A = (V_{in} - V_o)\frac{R_4}{2R_5} + V_{in} \quad (C.11)$$

$$V_B = \frac{V_{in}(2j\omega C_2R_3R_5 - R_4) + R_4V_o}{2j\omega C_2R_3R_5} \quad (C.12)$$

$$V_C = \frac{(V_o - V_{in})}{2R_5}R_4 + V_o \quad (C.13)$$

$$V_D = \frac{V_{in}R_4 + V_o(2j\omega C_2R_3R_5 - R_4)}{2j\omega C_2R_3R_5} \quad (C.14)$$

Figura 5.2 - Tensões e correntes no indutor sintético flutuante de Antoniou

Devido à influência dos indutores nos *shunts* e ao valor das indutâncias necessárias para o amortecimento passivo, procurou-se a implementação de indutores sintéticos durante o trabalho, uma vez que eles se portam como indutores variáveis.

Foram feitas algumas simulações no programa Multisim (Figura 5.3) para comparar a resposta de um indutor sintético aterrado de Antoniou com um indutor convencional que geraram os vetores da Figura 5.4, construída no Matlab.

Pode-se observar que as respostas dos indutores ideais (convencionais) é muito semelhante as dos indutores sintéticos.

Figura 5.3 - Simulação do indutor sintético no Multisim

Figura 5.4 - Resultado da comparação entre indutores sintéticos e convencionais

A implementação de bancada de diversas configurações de indutores sintéticos, entre os quais de Riordan, Antoniou, aterrados e flutuantes, não foram bem sucedidas. Tentou-se a implementação de tais indutores com amplificadores operacionais PA94, da Apex, os quais suportam tensão pico a pico de 900V (esses amp-op foram os mesmos usados nas simulações) e que foram escolhidos devido às tensões observadas nos testes de usinagem da Seção 3.2.5.

De qualquer forma, os valores calculados para a situação em que a tensão entre os terminais da cerâmica piezelétrica seja de 400V, a frequência natural da ferramenta seja 142Hz e se deseja implementar um indutor aterrado de Antoniou de 50H estão na :

Tabela 5.1 - Correntes e tensões para o indutor sintético de Antoniou (em Volt e Ampere)

i1	i3	i	iA1	iA2	VA	VB
0,0090	0,0083	0,0085	-0,0007	0,0374	800	-21,4244

Após obter as correntes e tensões, é possível calcular a potência cujos resistores deverão suportar:

Tabela 5.2 – Potências sobre os resistores do indutor sintético (em Watts)

P1	P3	P4	P5
3,7787	3,3088	3,4043	3,4043

De posse desses valores, devem-se escolher componentes capazes de atender as especificações necessárias para a construção do circuito e observar que algumas tensões podem ser bem altas, além do calor gerado pelos resistores.