UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO–USP
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Pedro Paulo Justino da Silva Arantes

**Cálculo de Forças em Partículas
Dielétricas usando Feixes de Bessel
Truncados nos Regimes de Óptica
Geométrica e de Rayleigh**

Pedro Paulo Justino da Silva Arantes

**Cálculo de Forças em Partículas
Dielétricas usando Feixes de Bessel
Truncados nos Regimes de Óptica
Geométrica e de Rayleigh**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Telecomunicações

Orientador: Prof. Dr. Leonardo André Ambrosio

São Carlos

2017

Trata-se da versão corrigida da dissertação. A versão original se encontra disponível na EESC/USP que aloja o Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica .

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

A662c Arantes, Pedro Paulo Justino da Silva
Cálculo de Forças em Partículas Dielétricas usando
Feixes de Bessel Truncados nos Regimes de Óptica
Geométrica e de Rayleigh / Pedro Paulo Justino da Silva
Arantes; orientador Leonardo André Ambrosio. São
Carlos, 2017.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica e Área de Concentração em
Telecomunicações -- Escola de Engenharia de São Carlos
da Universidade de São Paulo, 2017.

1. Eletromagnetismo. 2. Feixes de Bessel. 3. Feixes
não difrativos. 4. Aprisionamento óptico. 5. Forças
ópticas. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **PEDRO PAULO JUSTINO DA SILVA ARANTES**.

Título da dissertação: "Cálculo de forças em partículas dielétricas usando feixes de Bessel truncados nos regimes de óptica geométrica e de Rayleigh".

Data da defesa: 31/08/2017.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. **Leonardo André Ambrósio**
(Orientador)
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Michel Zamboni Rached**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Prof. Dr. **Marcos Roberto da Rocha Gesualdi**
(Universidade Federal do ABC/UFABC)

Resultado:

APROVADO

Aprovado

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica:
Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**

*Este trabalho é para minha mãe, meu pai,
meus avôs, meus padrinhos e
o meu irmão.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ser O meu guia e me ensinar a observar com mais atenção as coisas incríveis que este mundo tem a nos oferecer.

À minha família: à minha mãe, Regiani, ao meu pai, Mário, à minha avó, Joaquina, aos meus tios/padrinhos, Janilson e Zenaide, e a todos os familiares que nunca mediram esforços para me apoiar nesta caminhada e me dar forças em todos os caminhos que decido seguir.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Leonardo André Ambrosio, pela sua dedicação como orientador, o principal motivo da realização deste trabalho. Gostaria de agradecê-lo, em especial, pelas horas de conversas e conselhos que me foram dados durante estes 18 meses de trabalho.

Ao pessoal do administrativo da pós graduação do departamento, Daniel e Marisa, pela sua paciência e atenção em todas as vezes que precisei. E também a todos os outros profissionais do Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação - SEL/EESC/USP - pelo excelente trabalho e dedicação.

Ao Augusto Martins, pela sua amizade e pela longa caminhada que percorremos desde os primeiros anos da graduação e que dura até hoje.

Ao Jonas Dourado, por ter me dado o primeiro incentivo para escolher Python como linguagem de programação deste trabalho. Também ao Guilherme A. Momesso, Guilherme Caixeta e Henrique B. B. Menezes pela incrível paciência e, literalmente, terem me ensinado programação.

À CAPES, pelo apoio financeiro que me foi dado durante o desenvolvimento deste projeto.

Finalmente, a todos que contribuíram para a realização desse trabalho.

“A ciência nunca resolve um problema sem criar pelo menos outros dez”.
(George Bernard Shaw)

Resumo

ARANTES, P. P. J. S. **Cálculo de Forças em Partículas Dielétricas usando Feixes de Bessel Truncados nos Regimes de Óptica Geométrica e de Rayleigh.** 102 p. Dissertação de mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2017.

Desde a sua origem nos laboratórios do Bell Labs, durante a década de 70, pinças ópticas vêm sendo investigadas, desenvolvidas e diversificadas por vários grupos nacionais e internacionais incluindo, nos últimos anos, o nosso departamento (Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação - SEL/EESC/USP) e, em particular, o Grupo de Telecomunicações a ele vinculado, com propostas de aplicações em óptica biomédica e medicina. Dada a importância deste assunto, o principal objetivo deste trabalho é estender a análise teórica de forças ópticas utilizando uma descrição simples, porém eficaz, e analítica de um feixe de Bessel truncado, isto é, gerado por abertura finita. Até onde sabemos, esta é a primeira tentativa de introduzir esta investigação dos feixes originais de Durnin na literatura, e, deste modo, temos a possibilidade de contribuir com uma análise inédita de um feixe de Bessel com características físicas reais. Com a modelagem matemática dos feixes de Bessel truncados em mãos, aplicamos o cálculo de forças nos regimes de óptica geométrica e de Rayleigh e analisamos o seu comportamento quando os feixes incidem em espalhadores dielétricos esféricos. Como resultado direto deste trabalho, publicamos dois artigos descrevendo as forças ópticas no regime de óptica geométrica e de Rayleigh que um feixe de Bessel truncado causa em uma partícula dielétrica esférica. Como resultados indiretos, publicamos dois artigos com os mesmos cálculos de forças, adotando classe de feixes chamada *Frozen-Waves*, que é uma superposição de feixes de Bessel de mesma frequência.

Palavras-chave: Eletromagnetismo. Feixes de Bessel. Feixes não difrativos. Aprisionamento óptico. Forças ópticas.

Abstract

ARANTES, P. P. J. S. **Optical Force Calculations over Dielectric Particles Using Truncated Bessel Beams on Ray Optics and Rayleigh Regime..** 102 p. Master Thesis – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, 2017.

Since its origins at Bell Labs laboratories, during the 1970s, optical tweezers have been researched, developed and diversified by several research groups, both nationally and internationally, including in our department (Department of Electrical and Computing Engineering - SEL/EESC/USP), in particular the Telecom Group associated to it, with several proposals with applications of optical tweezers in different fields from medicine to biomedical optics. Given the importance of this field, our main goal is to extend the theoretical analysis of optical forces using a simplest - but effective - analytical description of truncated Bessel beams (i.e. beams that are generated by finite apertures). As far we know, this is the first attempt to introduce such analysis of the originals Durnin beams in the literature, thus, we may have the chance to contribute to an unpublished study of a truncated Bessel beam with real characteristics. With such mathematical model at hands, we calculate the forces exerted by the truncated Bessel beam in ray optics and Rayleigh regime and analyze their behavior when hits dielectric spherical particles. As direct result of this work, we have published two papers describing the optical forces in ray optics and Rayleigh regime that a truncated Bessel beam causes in a spherical dielectric particle. As indirect results, we have published two papers with the same force considerations, adopting a beam class called Frozen-Waves, which is a superposition of same frequency Bessel beams.

Keywords: Electromagnetism. Bessel beams. Non diffractive waves. Optical trapping. Optical forces.

Lista de ilustrações

Fig. 2.1	Raios atravessando um áxicon.	32
Fig. 2.2	Figura que representa a relação entre a fonte de um feixe o ponto onde se deseja calcular a amplitude do campo.	33
Fig. 2.3	Intensidade do FB com as características da Tabela 2.1.	35
Fig. 3.1	Representação do sistema de coordenadas	40
Fig. 3.2	Diagrama da propagação de um raio que incide em uma partícula esférica.	41
Fig. 5.1	Força óptica total na direção $\hat{x}$ em função da posição do centro da abertura de um FG com o comprimento de onda no vácuo $\lambda_0 = 488$ nm imerso em água, $spot \Delta\rho = 0,4 \mu m$ e campo elétrico orientado em $\hat{y}$. A partícula em questão teve o seu raio $R_p = 6 \mu m$ e índice de refração $n_m = 1.6$. A posição z_0 , do centro da abertura, em cada gráfico é: (a) $z_0 = 4R_p$, (b) $z_0 = 1R_p$ e (c) $z_0 = -2R_p$. Linha sólida: $\alpha = 0,001 \mu m^{-1}$; linha com traços e pontos: $\alpha = 0,08 \mu m^{-1}$ e linha tracejada: $\alpha = 0,5 \mu m^{-1}$	53
Fig. 5.2	Força transversal exercida por um FG com $spot \Delta\rho_0 = 0,4 \mu m$, comprimento de onda no vácuo $\lambda_0 = 488$ nm, índice de refração do meio $n_m = 1,33$ e $E_y = \psi_{fg}$, $E_x = 0$ e $E_z \approx 0$, no qual ψ_{fg} é dado por (2.7), em uma partícula de raio $R_p = 6 \mu m$, índice de refração $n_p = 1,60$ e coeficiente de absorção $\alpha = 0,5 \mu m^{-1}$. O feixe está posicionado em $z_0 = +R_p$. Linha sólida: força total; linha com traço e ponto: força dos raios incidentes; linha pontilhada: força dos raios refletidos; linha tracejada: força dos raios transmitidos.	53
Fig. 5.3	(a) Perfil longitudinal da FW definida. (b) Força longitudinal que a FW causa em uma partícula esférica de raio $R_p = 20 \mu m$. A linha contínua foi a simulação feita com a teoria GLMT e os pontos, com o algoritmo de óptica geométrica deste trabalho.	54

Fig. 5.4	Superposição de FBG representando um FBT, com $k_p = 4,07 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$, $q = 0$, $R = 3,5 \text{ mm}$, $L = 3R^2$, $q_r = 6/L$ e $N = 23$. (a) Intensidade da abertura. (b) Perfil 3D.	55
Fig. 5.5	Superposição de FBG representando um FGT, com $k_p = 0$, $q = 144 \times 10^6 \text{ m}^{-2}$, $R = 59 \text{ }\mu\text{m}$, $L = 4R^2$, $q_r = 8/L$ e $N = 81$. (a) Intensidade da abertura. (b) Perfil 3D.	55
Fig. 5.6	Superposição de FBG representando um FBGT, com $k_p = 4,07 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$, $q = 144 \times 10^6 \text{ m}^{-2}$, $R = 1,0 \text{ mm}$, $L = 10R^2$, $q_r = q$ e $N = 30$. (a) Intensidade da abertura. (b) Perfil 3D.	56
Fig. 5.7	Perfil da FW com perfil semiconstante em (a) em função de z , (b) em função de z e ρ	57
Fig. 5.8	Força na direção $\hat{y}$ que o perfil semiconstante causa na partícula.	57
Fig. 5.9	(a) Representação tridimensional do FBT usado no trabalho. (b) Gráfico de gradiente $z \times \epsilon$ da força longitudinal com $a_0 = \lambda/40$. Para uma melhor visualização, as forças maiores que 0,25 estão contidas no grupo das forças de 0,25 (parte vermelha do gráfico), da mesma forma que as forças menores que -0,25 estão contidas no grupo das forças de -0,25.	59
Fig. 5.10	Perfil de intensidade do FBT. (a) Perfil em 2D. (b) Perfil em 3D.	60
Fig. 5.11	Força longitudinal exercida pelo FBT em uma partícula esférica dielétrica de raio $R_p = 18 \text{ }\mu\text{m}$ em função de z_0 , com $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Três diferentes valores de índice de refração relativo da partícula são mostrados. Linha contínua: $n_{rel} = 1,20$. Linha com traço e ponto: $n_{rel} = 1,01$. Linha pontilhada: $n_{rel} = 0,95$. Para uma melhor visualização, a curva $n_{rel} = 1,01$ foi multiplicada por 10.	60
Fig. 5.12	Decomposição da força longitudinal da Fig. 5.11. A força está decomposta em total (linha contínua), causada pelos raios incidentes (linha com traço e ponto), dos raios refletidos (pontilhada) e dos raios transmitidos (tracejada). (a) Para $n_{rel} = 1,20$. (b) Para $n_{rel} = 1,01$. (c) para $n_{rel} = 0,95$	61

Lista de tabelas

Tabela 2.1	Características do FB usado por Durnin.	35
Tabela 5.1	Características do FB mostrado na Seção 5.3 reproduzido a partir de superposições de FBG.	58

Lista de siglas

FB	feixe de Bessel
FBT	feixe de Bessel truncado
FBG	feixe de Bessel-Gauss
FBGT	feixe de Bessel-Gauss truncado
FG	feixe Gaussiano
FGT	feixe Gaussiano truncado
FW	<i>Frozen-Wave</i>
GLMT	Teorias Generalizadas de Lorenz-Mie, do inglês <i>Generalized Lorenz-Mie Theory</i>
OPT	onda plana truncada

Sumário

1	Introdução	23
1.1	Proposta da pesquisa e justificativa	24
1.2	Recursos computacionais	25
1.3	Objetivos	26
1.4	Estrutura do trabalho	27
2	Feixe de Bessel Truncado	29
2.1	Feixes Ideais	29
2.1.1	Transformadas Espaço-Temporais	29
2.1.2	Feixe Gaussiano Escalar	30
2.1.3	Feixe de Bessel Escalar	31
2.2	Feixes Reais	33
2.2.1	Integral de Difração	33
2.2.2	Superposição de Feixes de Bessel-Gauss	35
3	Regime de Óptica Geométrica - Teoria	39
3.1	Sistema de Coordenadas	39
3.2	Pressão de Radiação Exercida por um Único Raio	40
3.2.1	Quantidade de Movimento da Partícula	41
3.2.2	Raio Refletido	42
3.2.3	Raios Transmitidos	43
3.2.4	Diferencial de Força	44
3.2.5	Coeficientes de Fresnel	44
3.2.6	Vetor de Poynting	45
3.2.7	Direção do Raio Incidente	45
3.3	Força Exercida pelo Feixe	46

4	Regime de Rayleigh - Teoria	47
4.1	Força Exercida pelo Feixe	48
4.1.1	Polarizabilidade Elétrica	48
4.1.2	Dipolo Elétrico Induzido	48
4.1.3	Força Média Temporal	49
5	Resultados	51
5.1	Validação	51
5.1.1	Força Transversal Causada por um Feixe Gaussiano	52
5.1.2	Força Longitudinal Causada por uma <i>Frozen-Wave</i> Vetorial	54
5.1.3	Simulação dos Perfis: Feixe de Bessel Truncado, Feixe Gaussiano Truncado e Feixe de Bessel-Gauss Truncado	55
5.2	Artigo: ' <i>Método Simples em Óptica de Raios para Cálculo de Forças Ra- diais Exercidas por Superposições Discretas de Feixes de Bessel Escalares</i> '	56
5.3	Artigo: ' <i>Cálculo de Forças Ópticas no Regime de Rayleigh Usando Solu- ções Analíticas para Feixes de Bessel Escalares e Truncados</i> '	58
5.4	Artigo: ' <i>Longitudinal Forces on a Spherical Dielectric Particle Exerted by a Truncated Bessel Beam in the Ray Optics Regime</i> '	59
6	Conclusão e Diretivas Futuras	63
	Referências	65
	Apêndices	73
	APÊNDICE A <i>Frozen-Wave</i>	75
A.1	<i>Frozen-Wave</i> Escalar	75
A.2	<i>Frozen-Wave</i> Vetorial	76
	Anexos	79
	ANEXO A Artigos Publicados.	81

Introdução

Uma pinça óptica é um sistema no qual um feixe de laser incide em uma partícula, da dimensão de átomos [1, 2] a tamanhos microscópicos [3], e causa nela forças ópticas devido à troca de momento com a luz [4]. Os primeiros experimentos com pinças ópticas foram feitos por Arthur Ashkin e demais pesquisadores do Bell Labs, por volta de 1970, e continuaram nos anos seguintes [1–3, 5–11]. Este sistema é objeto de intensos estudos e aplicações, em especial em óptica biomédica, como a manipulação de vírus e bactérias [8], fusão induzida de células [12], observação de células em nível microscópico [9, 13], análise do movimento dos cromossomos [14] até a inserção de DNA em uma única célula [15], a qual pode contribuir na reprodução *in vitro* [16]. Além da biologia, existem aplicações no ramo da físico-química, como no auxílio nas medidas das interações macromoleculares em soluções coloidais [17, 18]. É interessante mencionar que tais medidas, com o auxílio de pinças ópticas, já levaram a demonstrações de violação da Segunda Lei da Termodinâmica para sistemas microscópicos em curtos intervalos de tempo [19].

Até 1986, os sistemas de pinças ópticas eram feitos de duas maneiras: usando a força exercida por um laser em conjunto com a força gravitacional, com uma cancelando a outra, deixando a partícula suspensa no meio [5, 6] ou com dois lasers alinhados em direções opostas (contra propagantes), com a finalidade de um cancelar a ação da força causada pelo outro [3]. A força óptica predominante nestes dois casos é classificada como força de espalhamento, que é causada pela variação de momento dos fótons quando batem no dispersor e são refletidos, proposta por Maxwell em 1873 [20] e comprovada experimentalmente por Lebedev [21] e Nichols e Hull [22]. Pela Terceira Lei de Newton, deve aparecer uma força de reação na esfera para causar a variação de momento dos fótons. Esta força está sempre no sentido do eixo de propagação do feixe.

Em 1986, foi mostrado que uma partícula poderia ser aprisionada com apenas um feixe (sem levar em conta a gravidade ou dois lasers), devido à força gradiente [7, 23, 24], gerada pelo gradiente de intensidade do feixe, que tende a atrair (repelir) a partícula, quando o seu índice de refração é maior (menor) que o do meio, para a região de maior intensidade. A armadilha óptica é criada pela combinação da força gradiente e da força

de espalhamento, que a empurra no sentido de propagação dos raios do feixe. Assim, o ponto de equilíbrio localiza-se na frente (no sentido do eixo de propagação do feixe) da região do foco da luz [25]. Para que as armadilhas sejam estáveis, a força gradiente deve ser a força predominante [26].

A teoria mais completa para descrever as forças ópticas exercidas sobre partículas esféricas é um conjunto das Teorias Generalizadas de Lorenz-Mie, do inglês *Generalized Lorenz-Mie Theory* (GLMT) [27]. A GLMT aborda o problema por meio de expansões dos campos eletromagnéticos incidentes, espalhados e internos da partícula em função de harmônicos esféricos vetoriais. Os campos incidentes são descritos pelos coeficientes complexos da expansão dos fatores de forma e os campos internos e espalhados dependem, adicionalmente, dos coeficientes de Mie [28–30]. Dada a complexidade da GLMT e da análise em regime óptico arbitrário e tendo em vista os objetivos do presente trabalho, tal teoria não será aqui tratada. Porém, se o tamanho da partícula for muito maior ou muito menor que o comprimento de onda do feixe, é possível fazer algumas aproximações e calcular as forças por meio de outras abordagens.

Quando o raio R_p da partícula tem dimensões muito maiores que o comprimento de onda λ ($R_p > 10\lambda$), o cálculo das forças pode ser feito no regime de óptica geométrica [31]. Esta aproximação considera o feixe incidente em termos de raios e trata o problema como múltiplas reflexões e refrações na interface atingida pelo raio [10, 32]. A força de um feixe é dada, portanto, pela integral dos infinitos raios que incidem na superfície do espalhador [33, 34]. Este regime é abordado no Capítulo 3

Quando as partículas são muito menores que o comprimento de onda ($R_p < \lambda/10$)¹, adota-se o Regime de Rayleigh [36–38]. O interesse pelas forças ópticas em nanoestruturas é evidente na literatura [39], dando como exemplo a manipulação de nanopartículas de metal [40–42], nanopartículas plasmônicas [43, 44], nanotubos de carbono [45, 46], nanodiamantes [47] e nanofibras de polímeros [48]. Neste regime, é justificável considerar as partículas como um simples dipolo elétrico combinado com um dipolo magnético (caso tenha característica magnética) em resposta ao campo elétrico e magnético do feixe, respectivamente [49]. Além disso, desprezam-se quaisquer efeitos indesejados como o movimento browniano. Este regime é abordado no Capítulo 4

1.1 Proposta da pesquisa e justificativa

Em 2003, o artigo *A revolution in optical manipulation*, publicado na revista *Nature* [26], mencionou que os sistemas de pinças ópticas poderiam virar produtos de consumo mais acessíveis à população. Atualmente, algumas empresas já comercializam tais sis-

¹A rigor, a condição que deve ser satisfeita para a aproximação de Rayleigh valer é $2kR_p(n_p/n_m - 1) \ll 1$ [35], nos quais k é o número de onda no meio, n_p o índice de refração da partícula e n_m , do meio. Todavia, não analisaremos partículas com um alto contraste com relação ao meio e o meio é sem perdas, o que faz valer a aproximação $R_p < \lambda/10$ adotada.

temas, como o *Tweez 250* [50], o *Thorlabs' Optical Tweezers Microscope Systems* [51] e o *NanoTracker 2* [52]. Visto que um dos objetivos deste projeto é acompanhar esta tecnologia, pondo o Brasil em destaque permanente no cenário internacional com os outros centros nesta área, a proposta deste projeto é contribuir para as pesquisas de forças ópticas em partículas esféricas dielétricas.

Na maioria dos trabalhos na literatura, o feixe que geralmente é empregado para se calcular forças ópticas é o feixe Gaussiano (FG). Outro, comumente usado em experimentos, é o feixe de Bessel (FB). Entretanto, até onde observamos, a maioria das análises teórico-numéricas consideram o apenas o caso ideal do FB. Alguns trabalhos usam descrições analíticas para representar um FB real, baseados em perfis de Laguerre-Gauss ao passar por áxicons [53, 54]. O diferencial deste trabalho está na escolha de um outro método de descrição analítica de um feixe de Bessel truncado (FBT), descrito com mais detalhes a seguir, em um sistema de pinça óptica, que, até onde sabemos, é inédita na literatura. Em posse desta representação matemática, a proposta foi estudar, teoricamente, o perfil das forças ópticas causadas por tal feixe em partículas com diâmetros e permissividade variados, tanto no regime de óptica geométrica quanto no regime de Rayleigh. Deste modo, contribuímos com uma análise inédita, até onde sabemos, de um feixe simulando um caso real. A teoria por trás de um FBT é apresentada no Capítulo 2.

Uma das maneiras de se equacionar a intensidade de um FBT é usando as integrais de difração encontradas na literatura [55]. Elas são dadas por uma integral dupla, na qual, em grande parte dos casos, não é possível determinar uma expressão analítica, inclusive para o FBT. Por isto, recorre-se a cálculos numéricos para realizar a operação, que pode ser muito ineficiente.

Neste trabalho, representamos um FBT, matematicamente, sem usar cálculos teóricos extensos e morosos ou usar métodos numéricos, mas como uma expressão analítica, obtida pela superposição discreta de $2N + 1$ feixes de Bessel-Gauss (FBG) de mesma frequência, desenvolvido em 2012 por Zamboni-Rached et al. [56]. Este método simples, porém eficaz, foi recentemente introduzido na literatura e é aplicável aos nossos propósitos. Com tal descrição em mãos, tornou-se possível atingir os objetivos deste projeto com tempos de simulações relativamente pequenos.

1.2 Recursos computacionais

No início deste trabalho, usávamos o *software Wolfram Mathematica 11* para realizar as nossas simulações. Porém, o conhecimento sobre ele até um certo momento não era suficiente para deixá-las rápidas, o que nos fez escolher usar Python para criar um *framework* de cálculo de forças ópticas nos regimes descritos acima. Decidimos fazer esta mudança pelos seguintes motivos:

- **Python é orientado a objetos:** por causa das características de abstração, encapsu-

sulamento, herança e polimorfismo que uma linguagem orientada a objeto apresenta, todas as funções necessárias para se calcular a força ou criar um feixe são ocultas do usuário e ele não precisa se preocupar com elas. Assim, a pessoa que porventura usar o *framework*, consegue fazer as simulações com poucas linhas de código e de uma maneira intuitiva.

- **Várias bibliotecas públicas:** esta talvez seja a maior vantagem. Existem muitas bibliotecas livres disponíveis na rede, por exemplo, a SciPy (pronunciada “Sigh Pie”) que é uma biblioteca de Python para matemática, ciências e engenharia [57] e a Matplotlib, uma biblioteca para criação de gráficos [58]
- **Mais eficiente que o *Wolfram Mathematica*:** no início deste trabalho, usávamos o *Wolfram Mathematica* para realizar as simulações. Porém, ele apresentava uma eficiência baixa, talvez pela nossa falta de conhecimento de técnicas de otimização, e, por conta disto, optamos por utilizar Python, que se mostrou mais eficiente.
- **Grátis:** ao contrário do *Wolfram Mathematica* ou *MATLAB*, Python não precisa de uma licença.

O código que fizemos, incluindo os exemplos, está disponível publicamente e pode ser encontrado no repositório online Github [59]. Futuramente, ele deverá ser incorporado em um aplicativo *mobile* ou interface *web* para pesquisadores da área fazerem simulações com mais facilidade e eficiência.

1.3 Objetivos

Os objetivos deste trabalho estão listados a seguir:

- Analisar feixes usualmente aplicados em sistemas de pinças ópticas, por exemplo, feixes Gaussianos e de Bessel. Em particular, avançar em métodos de descrição analítica de FBs com energia finita.
- Analisar a teoria de forças ópticas no regime de óptica geométrica e no regime de Rayleigh.
- Calcular as forças nos dois regimes que um FBT causa em um espalhador esférico.
- Criar um *framework* em Python para as simulações deste trabalho.

1.4 Estrutura do trabalho

O trabalho está dividido em seis capítulos. No capítulo presente, falamos um pouco sobre pinças ópticas e as suas aplicações nos ramos da física, química e biologia. Apresentamos o nosso principal objetivo - analisar forças ópticas que um FB real causa em partículas dielétricas esféricas - e porque ele justifica a elaboração deste trabalho. Comentamos, também, sobre a escolha da linguagem de programação utilizada nas simulações.

No Capítulo 2, estruturamos uma teoria matemática para buscar o equacionamento dos feixes Gaussianos, de Bessel e de Bessel-Gauss. Este último é empregado no método apresentado por Zamboni-Rached et al. para a representação de um FBT analiticamente. No Capítulo 3, apresentamos as considerações de cálculo de força em uma partícula dielétrica esférica no regime de óptica geométrica. No Capítulo 4, faremos o mesmo para o regime de Rayleigh. No Capítulo 5, expomos os resultados obtidos durante todo o projeto e, no Capítulo 6, apresentamos as nossas conclusões.

Feixe de Bessel Truncado

Neste capítulo, estruturaremos uma base da teoria eletromagnética a partir da equação de Helmholtz e de transformadas espaço-temporais para se chegar a soluções de feixes escalares ideais, que apresentam energia infinita, (Seção 2.1) e, a partir destas soluções, como representá-los fisicamente, ou seja, com energia finita (Seção 2.2). Em especial, descreveremos o método apresentado por Zamboni-Rached et al. [56] que modela feixes de Bessel truncados analiticamente.

2.1 Feixes Ideais

Nesta seção, falaremos sobre a solução escalar ideal para o FG e o FB e, brevemente, sobre as suas propriedades.

2.1.1 Transformadas Espaço-Temporais

A equação de onda de uma função escalar $\psi(x, y, z; t)$ em coordenadas cartesianas, é dada por:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x, y, z; t) = 0, \quad (2.1)$$

nos quais k é o número de onda do feixe no meio de propagação, ω a sua frequência angular e $\bar{c} = c/n_m$, com c igual a velocidade da luz no vácuo e n_m o índice de refração do meio, supondo não dispersivo.

Neste trabalho, como vamos trabalhar com aberturas circulares é conveniente usar coordenadas cilíndricas em vez de cartesianas. Portanto, (2.1), em coordenadas cilíndricas, é dado por:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(\rho, \phi, z; t) = 0. \quad (2.2)$$

Seja $\bar{\psi}_n(k_\rho, k_z, \omega)$ a transformada Fourier-Bessel de $\psi(\rho, \phi, z; t)$ [60, 61], na qual foram feitas duas transformadas de Fourier, uma na variável tempo t (relacionada com a frequência temporal ω) e outra no espaço z (relacionada com a frequência espacial k_z), e uma transformada de Fourier-Bessel na variável espacial ρ (relacionada com a frequência espacial k_ρ). Sabemos que a função $\psi(\rho, \phi, z; t)$, cuja dependência em ϕ é dada por $e^{-jn\phi}$, pode ser determinada pela transformada de Fourier-Bessel inversa, dada por:

$$\psi(\rho, \phi, z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{\psi}_n(k_\rho, k_z, \omega) J_n(k_\rho \rho) e^{jn\phi} e^{jk_z z} e^{-j\omega t} k_\rho dk_\rho dk_z d\omega, \quad (2.3)$$

no qual $J_n(\cdot)$ é uma função de Bessel de primeira espécie de ordem n . A ordem desta função está relacionada com o índice n da função $\bar{\psi}_n$.

Ao substituir (2.3) em (2.2), chega-se à seguinte igualdade [62, Cap 2]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (-k_\rho^2 - k_z^2 + k^2) e^{jn\phi} e^{jk_z z} e^{-j\omega t} \bar{\psi}_n(k_\rho, k_z, \omega) k_\rho dk_\rho d\omega dk_z = 0,$$

o que nos leva ao seguinte resultado:

$$k_\rho^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k^2. \quad (2.4)$$

De acordo com (2.4), as variáveis k_ρ e k_z são interdependentes. Em vista disso, reescrevemos (2.3) apenas em função de k_ρ e ω :

$$\psi(\rho, \phi, z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^k J_n(k_\rho \rho) e^{jn\phi} e^{+jz\sqrt{k^2 - k_\rho^2}} e^{-j\omega t} S_n(k_\rho, \omega) k_\rho dk_\rho d\omega, \quad (2.5)$$

em que $S_n(k_\rho, \omega)$ representa o espectro espaço-temporal em função de k_ρ e ω de $\psi(\rho, \phi, z; t)$. Consideramos o sinal positivo da raiz do termo $e^{+jz\sqrt{k^2 - k_\rho^2}}$. É através da escolha de S_n , abordada a seguir, que encontramos soluções como os feixes Gaussianos ou os feixes de Bessel.

2.1.2 Feixe Gaussiano Escalar

Um FG é uma onda eletromagnética monocromática cuja amplitude das componentes elétrica e magnética são proporcionais a uma função Gaussiana. Este padrão descreve o campo gerado pela maioria dos lasers [63]. Além da amplitude, o espectro espaço-temporal $S_n(k_\rho, \omega)$ do FG respeita, também, um padrão Gaussiano em k_ρ . Portanto, a escolha de $S_n(k_\rho, \omega)$ que resulta em um FG é dada por:

$$S_n(k_\rho, \omega) = 2a^2 e^{-a^2 k_\rho^2} \delta(\omega - \omega_0) \delta_{n,0}. \quad (2.6)$$

A constante a é definida como positiva. Por causa do delta de Dirac $\delta(\omega - \omega_0)$, a frequência angular do feixe é ω_0 . O delta de Kronecker $\delta_{n,0}$ implica que a ordem da função de Bessel é zero e o termo $e^{jn\phi}$ de (2.5) é anulado, levando a uma simetria azimutal do feixe.

Por causa da integral de (2.5) varrer k_ρ de 0 a $k = n_m \omega / c$, há a superposição de várias ondas planas, cujos números de onda longitudinal e transversal satisfazem (2.4). De acordo com (2.6), o módulo de $S_n(k_\rho, \omega)$ aumenta com a predominância do número de onda longitudinal k_z .

A solução do FG escalar, encontrada substituindo (2.6) em (2.5) e utilizando a aproximação paraxial¹, é dada por:

$$\psi_{fg}(\rho, z; t) = \frac{a^2}{a^2 + \frac{jz}{2k}} \exp \left[\frac{-\rho^2}{4 \left(a^2 + \frac{jz}{2k} \right)} \right] e^{-jk(z-ct)}. \quad (2.7)$$

O *spot* inicial da onda, definido como a largura cuja amplitude decai $1/e$ da amplitude máxima em $z = 0$, é dado por $\Delta\rho_0 = 2a$, com $\Delta\rho_0 \gg \lambda$. O *spot* $\Delta\rho(z)$, também conhecido por cintura do feixe (*beam waist*), varia em função da propagação ao longo de z , cujo valor é dado por:

$$\Delta\rho = \Delta\rho_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z\lambda}{\pi\Delta\rho_0^2} \right)^2}.$$

2.1.3 Feixe de Bessel Escalar

O espectro de frequências do FB é dado por:

$$S_n(k_\rho, \omega) = \frac{\delta(k_\rho - k \sin\beta)}{k_\rho} \delta(\omega - \omega_0) \delta_{n,0}. \quad (2.8)$$

Ao substituir (2.8) em (2.5), chegamos no seguinte resultado:

$$\psi_{fB}(\rho, z; t) = J_0(k_\rho \rho) e^{-jk_z z} e^{j\omega_0 t}, \quad (2.9)$$

¹Com a aproximação $1 \gg ka$, a raiz da exponencial em z de (2.5) pode ser aproximada por $e^{+jz\sqrt{k^2 - k_\rho^2}} \approx k - k_\rho^2/2k$ e os limites de integração em k_ρ de (2.5) passam a ser de 0 a ∞ para se obter um valor tabelado da integral.

com k_z e k_ρ dados por $k_z = k \cos \beta$ e $k_\rho = k \sin \beta$.

A solução acima é uma solução ideal e não apresenta decaimento de intensidade ao longo da propagação, o que implica em um feixe com energia infinita, e seria verdade se a abertura da fonte do feixe também tivesse tamanho infinito. O caso real, foco deste trabalho, em que a abertura é finita (truncamento), será estudado na próxima seção.

A geração de um FB, na prática, pode ser feita por elementos ópticos chamados áxicons, e foram propostos em 1954 por Jonh H. McLeod [64]. Eles são lentes em formato de cones que transmitem a onda incidente com a inclinação do número de onda $\vec{k} = k_z \hat{e}_z + k_\rho \hat{e}_\rho$, com relação ao eixo longitudinal, constante. A onda resultante tem o formato, na abertura, de uma função de Bessel (por isso o nome 'feixe de Bessel'). Neste caso ideal, é suposto que a abertura tenha um diâmetro infinito, ou seja, o feixe possui energia infinita e se propaga indefinidamente.

A Fig. 2.1 mostra o efeito de um áxicon sobre alguns raios incidentes. Após a onda passar pela lente, ela adquire uma inclinação β , chamado de ângulo de áxicon ou ângulo de meio cone, com relação ao eixo de propagação. O módulo das componentes k_z e k_ρ são dados por $k_z = k \cos \beta$ e $k_\rho = k \sin \beta$. Na figura, α é o ângulo físico do prisma e se relaciona com β por $n_a \sin(\alpha) = n_m \sin(\alpha + \beta)$, nos quais n_a e n_m são os índices de refração do áxicon e do meio, respectivamente; t_c e t_e são as espessuras central e lateral da lente, nesta ordem.

Fig. 2.1: Raios atravessando um áxicon.

O feixe, após passar pelo áxicon, consegue se propagar até uma distância Z_{max} , a partir da qual ele decai abruptamente. Z_{max} depende do raio de abertura e do ângulo de áxicon da lente, e é dado por:

$$Z_{max} = \frac{R}{\tan \beta}.$$

2.2 Feixes Reais

Nesta seção, que aborda feixes com energia finita, falaremos sobre a Integral de Difração de Rayleigh-Sommerfeld, a qual é uma forma de representar um feixe truncado no espaço dada uma distribuição de campo na abertura, e mostraremos que tal teoria não é aplicável aos propósitos deste trabalho. Posteriormente, descreveremos passo a passo o método analítico de descrição de feixes truncados [56], que é um dos objetivos desta pesquisa.

2.2.1 Integral de Difração

Seja a Fig. 2.2 representando um meio onde se propaga uma onda eletromagnética ψ [deste ponto em diante, ocultamos a dependência temporal $\exp(j\omega t)$ das expressões das ondas].

Fig. 2.2: Figura que representa a relação entre a fonte de um feixe e o ponto onde se deseja calcular a amplitude do campo. Figura extraída de [55, Cap 3].

Segundo o princípio de Huygens², cada ponto da superfície Σ neste meio onde a onda se propaga se comporta como uma fonte pontual de luz [66]. Dessa forma, a amplitude da onda em um determinado ponto P_0 é dado pelo somatório de todas as contribuições das fontes pontuais da abertura Σ . Matematicamente, podemos escrever:

$$\psi(P_0) = \iint_{\Sigma} \psi(P_1) h(P_0, P_1) ds, \quad (2.10)$$

²Posteriormente modificado por Fresnel, conhecido a partir daí como princípio de Huygens-Fresnel [65]. Este princípio explica o efeito da difração em bordas e aberturas.

em que P_1 representa os pontos da superfície Σ e $h(P_0, P_1)$ é a resposta impulsional de cada ponto de Σ , que se comportam como uma fonte pontual de luz. Segundo [55, Cap 3], quando Σ é uma superfície planar (ao longo do trabalho, assim como todas outras aberturas, vamos considerá-la perpendicular ao eixo z), $h(P_0, P_1)$ é dado por:

$$h(P_0, P_1) = \frac{1}{j\lambda} \frac{e^{-jkr_{01}}}{r_{01}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}),$$

em que r_{01} é a distância entre o ponto P_0 e P_1 e $\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01})$ é o ângulo entre o vetor normal à superfície Σ , $\vec{n} = \hat{e}_z$, e o vetor $\vec{r}_{01} = P_1 - P_0$.

Segundo a Fig. 2.2, vemos que $\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) = z/r_{01}$, o que leva (2.10) a ser reescrita por:

$$\psi(P_0) = \frac{z}{j\lambda} \iint_{\Sigma} \psi(P_1) \frac{e^{-jkr_{01}}}{r_{01}^2} ds, \quad (2.11)$$

que é conhecida como Integral de Rayleigh-Sommerfeld do tipo 1.

Se assumirmos simetria azimutal em ψ , passar (2.11) para coordenadas cilíndricas e considerar $z \gg R_{\Sigma}$, no qual R_{Σ} é o maior valor do raio da abertura, aproximamos (2.11) pela integral de difração de Fresnel [55], dada por:

$$\psi(\rho, z) = \frac{jk}{z} e^{-jk\left(z + \frac{\rho^2}{2z}\right)} \int_0^{\infty} \psi(\rho', 0) e^{jk\frac{\rho'^2}{2z}} J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \rho' d\rho'. \quad (2.12)$$

Neste ponto, foi feito um código para analisar o resultado que se obtém quando aplica-se a integral acima em uma abertura com um perfil de intensidade na abertura dado por uma função de Bessel (Eq. (2.9)). Na abertura, $z = 0$, o perfil ao longo de ρ se torna:

$$\psi_{fB}(\rho, z = 0) = J_0(k\rho\rho).$$

Para efeitos de comparação e validação do código, vamos reproduzir o resultado obtido por Durnin em 1987 [67, 68]. Ele comparou a propagação de um FG convencional e um FB real, classificado como uma onda não-difrativa, e mostrou que o último mantém a sua localização transversal por uma distância 28 vezes maior que o primeiro. Apesar do efeito da difração ocorrer normalmente, uma onda não difrativa preserva a sua configuração inicial por causa da sua auto-reconstrução - parte da energia lateral é constantemente fornecida para o eixo. Neste trabalho, Durnin usou os seguintes parâmetros para o FB:

Aplicando a integral de difração em um FB cujos parâmetros são mostrados na Tabela 2.1, chegamos ao resultado mostrado na Fig. 2.3. A Fig. 2.3a mostra o padrão de

Tabela 2.1: Características do FB usado por Durnin em [67].

λ	500 nm
k	$1,26 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$
$\tan \beta$	$1,90 \times 10^{-3}$
k_ρ	$2,39 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$
R	2,0 mm
Z_{max}	1,05 m

intensidade do feixe na abertura circular e a Fig. 2.3b mostra a intensidade ao longo do eixo z com $\rho = 0$. Este resultado é igual ao obtido por Durnin.

Fig. 2.3: Intensidade do FB com as características da Tabela 2.1 (a) na abertura, (b) no eixo z com $\rho = 0$.

Com este método, porém, não é possível encontrar uma solução analítica de (2.11). Em vista disto, abordaremos um segundo método para equacionar um FBT, por meio de superposição de feixes de Bessel-Gauss.

2.2.2 Superposição de Feixes de Bessel-Gauss

Um FBT, no caso escalar e no regime paraxial, pode ser obtido pela superposição de diferentes feixes de Bessel-Gauss (FBGs) [56]. O feixe de Bessel-Gauss (FBG) é definido, no plano $z = 0$, como um FB apodizado por uma função Gaussiana, cuja propagação é assumida em $+z$ [69] e é dado por:

$$\psi_{BG}(\rho, z = 0) = J_0(k_\rho \rho) e^{-q\rho^2}, \quad (2.13)$$

nos quais J_0 é a função de Bessel de ordem zero; k_ρ , o número de onda transversal da onda propagante; e q , o inverso do *spot* ao quadrado do FG. Esta variável q se relaciona com o *spot* para a amplitude $|\psi_{fG}|$ do feixe de (2.7) por $q = 1/\Delta\rho_0^2 = 1/4a^2$. Como foi suposto regime paraxial, a análise é apropriada para ângulos de áxicon pequenos [68].

Neste ponto, aplicamos (2.13) em (2.12) para obter a equação do feixe de Bessel-Gauss escalar no espaço, $\psi_{BG}(\rho, z)$, cujo resultado, que pode ser visto em [69], é:

$$\psi_{BG}(\rho, z) = \frac{jk}{2zQ} e^{-jk\left(z + \frac{\rho^2}{2z}\right)} J_0\left(\frac{jk k_\rho \rho}{2zQ}\right) e^{-\frac{1}{4Q}\left(k_\rho^2 + \frac{k^2 \rho^2}{z^2}\right)}, \quad (2.14)$$

em que $Q = q + jk/2z$ e k é o número de onda. A Eq. (2.14) ainda não representa um feixe truncado, porque o limite superior da integral de difração de Fresnel tende ao infinito. Caso fosse limitado superiormente pelo raio de abertura, R , a integral representaria um feixe truncado. Entretanto, neste caso, a integração se torna muito complexa e não existe solução analítica. No entanto, podemos encontrar uma solução aproximada.

A solução proposta para representar feixes truncados sem empregar cálculos teóricos extensos e morosos ou métodos numéricos foi recorrer à superposição discreta de $2N + 1$ FBGs de mesma frequência [56] em aberturas infinitas. Podemos escrever esta superposição por:

$$\Psi(\rho, z) = \frac{jk}{2z} e^{-jk\left(z + \frac{\rho^2}{2z}\right)} \sum_{n=-N}^N \frac{A_n}{Q_n} J_0\left(\frac{jk k_\rho \rho}{2zQ_n}\right) e^{-\frac{1}{4Q_n}\left(k_\rho^2 + \frac{k^2 \rho^2}{z^2}\right)}, \quad (2.15)$$

nos quais A_n são constantes e $Q_n = q_n + jk/2z$. A variável q_n , por sua vez, é definida pela expressão $q_n = q_r + j2\pi n/L$, em que $q_r > 0$ é a parte real de q_n e é a mesma para todos os valores de n , e L é uma constante com dimensão de comprimento ao quadrado. É importante notar que, quanto maior o valor de N , mais a função Ψ irá se aproximar do feixe truncado, exceto em descontinuidades, onde aparece o fenômeno de Gibbs [70].

Na abertura, a eq. (2.15) se torna:

$$\Psi(\rho, 0) = J_0(k_\rho \rho) e^{-q_r \rho^2} \sum_{n=-N}^N A_n e^{j \frac{2\pi n}{L} \rho^2}. \quad (2.16)$$

Como queremos um truncamento em $z = 0$, esperamos que $\Psi(\rho, 0)$ tenha os seguintes valores na abertura:

$$\Psi(\rho, 0) \approx \begin{cases} J_0(k_\rho \rho) e^{-q_r \rho^2}, & \text{se } 0 \leq \rho \leq R \\ 0, & \text{se } R < \rho < \infty. \end{cases} \quad (2.17)$$

Para satisfazer (2.17), a função (o somatório de (2.16) com $n \rightarrow \infty$):

$$G(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j \frac{2\pi n}{L} r}, \quad (2.18)$$

uma série de Fourier em r de intervalo $[-L/2, L/2]$ e que, quando ela assume o seguinte valor:

$$G(r) = \begin{cases} e^{q_r r} e^{-q \rho^2}, & \text{se } |r| \leq R \\ 0, & \text{se } R < |r| \leq \sqrt{L/2}, \end{cases} \quad (2.19)$$

no intervalo, a expressão (2.16) passa a ser:

$$\Psi(\rho, 0) = \begin{cases} J_0(k_\rho \rho) e^{-q \rho^2}, & \text{se } 0 \leq \rho^2 \leq R^2 \\ 0, & \text{se } R^2 < \rho^2 \leq L/2 \\ J_0(k_\rho \rho) e^{-q_r \rho^2} f(\rho), & \text{se } L/2 < \rho^2 < \infty, \end{cases} \quad (2.20)$$

onde $f(\rho)$ é dada por (2.19) e assume valor máximo $\exp[(q_r - q)R^2]$ se $q_r > q$ ou 1 se $q_r \leq q$. Assim, com escolhas adequadas de L e q_r , a terceira expressão de (2.20), $J_0(k_\rho \rho) \exp(-q_r \rho^2) f(\rho)$, pode adquirir valores próximos de zero, o que faz (2.17) ser verificada. Desta forma, alcançamos o nosso objetivo de representar um truncamento na abertura por meio de uma expressão analítica simples e efetiva. Mostra-se em [56] que um critério confiável para a escolha de L e q_r é exigir que $\exp(-q_r L/2) \text{Max}[f(\rho)] \ll 1$ para $0 \leq \rho \leq R$.

Portanto, para que (2.19) seja válida, os coeficientes A_n de (2.18) devem ser dados pelos coeficientes da série de Fourier de $G(\rho^2)$:

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-R}^R e^{q_r r} e^{-q r} \text{circ}\left(\frac{r}{R}\right) e^{-j \frac{2\pi n}{L} r} dr = \frac{2 \sinh\left[(q_R - q - j \frac{2\pi n}{L} R^2)\right]}{L(q_R - q) - j 2\pi n}, \quad (2.21)$$

onde $\text{circ}(a/b)$ é 1 se $a \leq b$ ou 0 caso contrário. Com esta análise, finalizamos a teoria por trás do método de representação de um truncamento com uma expressão analítica aproximada.

Vale ressaltar que é possível descrever os seguintes feixes ao escolher diferentes valores de q e k_ρ de (2.13):

- onda plana truncada (OPT): quando q e k_ρ são iguais a zero;
- FBT: quando $q = 0$ e k_ρ é o número de onda transversal do FB;

- feixe Gaussiano truncado (FGT): quando $k_\rho = 0$ e q é o inverso do *spot* ao quadrado do FG;
- feixe de Bessel-Gauss truncado (FBGT): quando k_ρ é o número de onda transversal do FB e q é o inverso do *spot* ao quadrado do FG e são diferentes de zero.

Com este equacionamento em mãos, passamos agora para a análise de forças que um feixe causa em partículas esféricas cujo raio é muito maior que o comprimento de onda do feixe, que será a análise de forças em regime de óptica geométrica, e quando o raio da partícula é muito menor que o comprimento de onda, regime de Rayleigh.

Regime de Óptica Geométrica - Teoria

Neste capítulo, faremos uma análise teórica da força exercida por um feixe em uma partícula dielétrica com formato de uma esfera no regime de óptica geométrica. Este regime é apropriado quando o raio da esfera é muito maior que o comprimento de onda do feixe.

Antes de calcular a força óptica no espalhador, primeiro determinaremos a pressão de radiação que um único feixe causa na superfície da partícula. Depois, a força total na esfera, que é a integral da pressão de radiação em toda a sua superfície.

Neste trabalho, também levaremos em consideração a influência do coeficiente de absorção da partícula no cálculo da força. Rubinsztein-Dunlop et al. discutiu a influência da absorção de uma partícula e mostrou que elas poderiam influenciar na criação de armadilhas ópticas [71].

3.1 Sistema de Coordenadas

O sistema físico é composto por uma partícula dielétrica em forma de esfera com raio R_p e uma abertura circular, a qual simula um laser, emitindo um feixe. O centro da esfera será sempre fixado no centro do sistema¹, $O = (0, 0, 0)$, o que nos leva a definir os pontos na superfície da partícula, em função do ângulo azimute ϕ , com $0 \leq \phi \leq 2\pi$, e do ângulo de colatitude θ , com $0 \leq \theta \leq \pi$, como:

$$P(\theta, \phi) = (R_p \sin\theta \cos\phi, R_p \sin\theta \sin\phi, R_p \cos\theta),$$

que é a transformação das coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas.

A abertura estará orientada de tal forma que ela pertença a um plano paralelo ao plano xy e a sua normal seja paralela ao eixo z , como mostra a Fig. 3.1.

¹Por conta disto, nas simulações de deslocamento, a posição do feixe será mudada e a esfera permanecerá no centro do sistemas de coordenadas.

Fig. 3.1: Representação do sistema de coordenadas.

Assim, a direção na qual o feixe se propagará é paralela ao eixo z também. O centro da abertura C_a , em coordenadas cilíndricas, é definido por:

$$C_a(\rho_0, \phi_0, z_0) = (\rho_0 \cos \phi_0, \rho_0 \sin \phi_0, z_0).$$

A função de onda $\psi(\rho, \phi, z)$ que descreve o feixe é bem definida em todos os pontos do espaço, considerando o centro da abertura como referência. Neste sistema, o valor de ψ nos pontos $P(\theta, \phi)$ na superfície do espalhador é dado por $\psi(\bar{P})$. $\bar{P}$, por sua vez, é dado pela subtração vetorial de P e C_a :

$$\bar{P}(\theta, \phi) = P - C_a = (R_p \sin \theta \cos \phi - \rho_0 \cos \phi_0, R_p \sin \theta \sin \phi - \rho_0 \sin \phi_0, R_p \cos \theta - z_0).$$

Com isto, finalizamos a descrição do sistema de coordenadas adotado.

3.2 Pressão de Radiação Exercida por um Único Raio

Esta análise já foi feita por alguns autores durante as últimas décadas [10, 32, 72]. Dentre os vários trabalhos disponíveis na literatura, usaremos o artigo de Zhang et al. [32] como referência por ter uma abordagem mais completa. Ao contrário dos outros autores, Zhang et al. considera que a direção do raio incidente pode variar, ao contrário das outras referências.

Para determinar a força na partícula causada por um único raio, usaremos o princípio da conservação de momento linear de um sistema e o princípio de que a luz transporta quantidade de movimento [73].

3.2.1 Quantidade de Movimento da Partícula

Seja um raio de momento linear $\vec{p}_i$, energia E_i e direção $\hat{k}_0$ incidindo no ponto A , com um ângulo de incidência θ_i , de uma partícula de índice de refração n_p imersa em um meio linear, homogêneo, isotrópico e sem perdas cujo índice de refração é n_m como mostra a Fig. 3.2. Como pode ser observado, uma parcela deste raio é refletida, cujo momento linear é $\vec{p}_r = \vec{p}_{o0}$ e energia E_{o0} , e outras são transmitidas ao longo da superfície da partícula por causa de múltiplas reflexões internas e transmissões, de momento linear $\vec{p}_{tn} = \vec{p}_{on}$ e energia E_{on} .

Fig. 3.2: Diagrama da propagação de um raio que incide em uma partícula esférica.

Pelo princípio da conservação de momento linear, é fácil ver que o momento linear da partícula, $\vec{p}_{part}$, após a incidência, é dado por:

$$\vec{p}_{part} = \vec{p}_i - \sum_{n=0}^{\infty} \vec{p}_{on}. \quad (3.1)$$

Agora, vamos mostrar que a quantidade de movimento de um raio é proporcional à sua energia. Faremos esta demonstração para relacionar o momento linear dos raios de saída em função do momento linear do raio incidente usando os coeficientes de transmissão e reflexão de Fresnel.

O módulo da quantidade de movimento $\vec{p}_f$ de um fóton é dado por:

$$|\vec{p}_f| = \frac{h}{\lambda} = \frac{n_m E_f}{c},$$

em que h é a constante de Plank, λ , o comprimento de onda do fóton, E_f , a sua energia e c , a velocidade da luz no vácuo. Como um raio é composto de vários fótons, o seu momento linear resultante é a contribuição do momento de todos os fótons que compõe o raio. Dessa forma, temos:

$$\vec{p} = \frac{n_m E}{c} \hat{p},$$

em que E é a energia de todos os fótons. Com este resultado, reescrevemos (3.1) em função da energia dos raios:

$$\vec{p}_{part} = \frac{n_m}{c} E_i \hat{k}_0 - \frac{n_m}{c} \sum_{n=0}^{\infty} E_{on} \hat{k}_{on}, \quad (3.2)$$

em que os versores $\hat{k}_{on}$ representam as direções dos raios de saída.

3.2.2 Raio Refletido

Dada a expressão (3.2), precisamos determinar E_{on} e $\hat{k}_{on}$ em função do raio incidente. Antes de começarmos a dedução, é interessante notar que todos os raios mostrados na Fig. 3.2 pertencem a um mesmo plano, no qual, para facilitar os cálculos, definiremos uma base ortonormal. O primeiro versor da base será o próprio $\hat{k}_0$ do raio incidente. O segundo, ortonormal ao primeiro, como:

$$\hat{d}_0 = \frac{\vec{n}_0 - (\vec{n}_0 \cdot \hat{k}_0) \hat{k}_0}{|\vec{n}_0 - (\vec{n}_0 \cdot \hat{k}_0) \hat{k}_0|},$$

no qual $\vec{n}_0$ é o vetor normal à superfície da esfera no ponto M . Vamos definir também, neste plano $\hat{k}_0 \times \hat{d}_0$, rotação com números complexos. Semelhante ao plano Argand-Gauss, $\hat{d}_0$ será equivalente ao vetor $\hat{k}_0$ multiplicado pelo número complexo j , ou seja, $\hat{d}_0 = j \hat{k}_0$. Esta consideração facilitará na rotação dos vetores neste plano. Vamos adotar o sentido POSITIVO da rotação aquele que, pela regra da mão direita, vai de $\hat{k}_0$ a $\hat{d}_0$.

Como pode ser visto na Fig. 3.2, a direção do raio refletido é igual à direção do vetor $-\hat{k}_0$ rotacionado $2\theta_i$ no sentido NEGATIVO do plano, ou seja, multiplicaremos $-\hat{k}_0$ por $\exp(-j2\theta_i)$. A energia deste raio é a energia do raio incidente vezes a reflectividade R no ponto A . Logo, podemos escrever:

$$\vec{p}_r = \vec{p}_{o0} = -\hat{k}_0 \frac{n_m}{c} R E_i e^{-j2\theta_i}, \quad (3.3)$$

com $\cos \theta_i = -\vec{n}_0 \cdot \hat{k}_0$.

3.2.3 Raios Transmitidos

Seja o primeiro raio p_{t1} transmitido no ponto B . É possível ver que, como p_{t1} e p_r possuem o mesmo ângulo com relação à sua respectiva normal (normal do ponto B da Fig. 3.2), o primeiro raio transmitido é igual ao raio refletido rotacionado no sentido NEGATIVO de $\pi - 2\theta_r$. O valor $\pi - 2\theta_r$ é o mesmo valor do arco $\widehat{AB}$, ou seja, é como se o raio p_r fosse do ponto A ao ponto B mantendo o mesmo ângulo θ_i com a respectiva normal. Da mesma forma, é fácil notar que os raios transmitidos subsequentes têm a mesma rotação de $-(\pi - 2\theta_r)$ com relação ao raio transmitido anterior, o que nos leva a escrever a direção do n -ésimo raio, com $n > 0$ transmitido como:

$$\hat{k}_{tn} = \hat{k}_{on} = -\hat{k}_0 e^{-j2\theta_i} e^{-jn(\pi-2\theta_r)}, \quad (3.4)$$

em que θ_r satisfaz a Lei de Snell: $n_m \sin\theta_i = n_p \sin\theta_r$.

As energias dos raios transmitidos são dadas pela combinação de reflexões internas, transmissões e perdas internas. Todos eles passaram por duas transmissões: quando entraram e saíram da esfera. Logo, a energia é proporcional a T^2 , em que T é a transmissividade. O primeiro raio transmitido não sofreu nenhuma reflexão interna; porém, ele teve uma perda de energia de $\exp(-\alpha l)$, no qual α é o coeficiente de absorção da partícula e l é a distância percorrida internamente, dado por $l = 2R_p \cos\theta_r$. O n -ésimo raio, com $n > 0$, percorreu n vezes um caminho de comprimento l e sofreu $n - 1$ reflexões internas. Com isto, podemos escrever a energia $E_{tn} = E_{on}$ do n -ésimo raio em função da energia do raio incidente E_i :

$$E_{tn} = E_{on} = T^2 e^{-\alpha l} (e^{-\alpha l} R)^{n-1} E_i. \quad (3.5)$$

Substituindo os resultados de (3.3), (3.4) e (3.5) em (3.2), obtemos momento linear da partícula apenas em função do raio incidente:

$$\vec{p}_{part} = \frac{n_m E_i}{c} \left[1 + R e^{-j2\theta_i} - T^2 \frac{e^{-j2(\theta_i-\theta_r)} e^{-\alpha l}}{1 + R e^{-\alpha l} e^{j2\theta_r}} \right] \hat{k}_0. \quad (3.6)$$

O primeiro termo entre colchetes na expressão acima é a contribuição do raio incidente, o segundo termo, do raio refletido e o terceiro e último, dos infinitos raios transmitidos. Para salientar a convenção deste capítulo, vale lembrar que $\vec{p}_{part}$ não tem a mesma direção do vetor $\hat{k}_0$ porque, segundo a nossa regra, porque assumimos $\hat{d}_0 = j\hat{k}_0$. Como (3.6) é do tipo $\vec{p}_{part} = (C_{Re} + jC_{Im})\hat{k}_0 = C_{Re}\hat{k}_0 + C_{Im}\hat{d}_0$, o momento linear da partícula é uma combinação linear dos versores $\hat{k}_0$ e $\hat{d}_0$, nos quais C_{Re} e C_{Im} são as partes reais e imaginárias de (3.6).

3.2.4 Diferencial de Força

A força é dada pela derivada temporal da quantidade de movimento. Derivando, portanto, (3.6) em função do tempo, obtemos a força que o raio incidente de energia E_i causa na partícula (único termo que mudará no lado direito de (3.6) é a energia E_i , cuja derivada temporal é a potência P_i):

$$\vec{F}_{ray} = \frac{d\vec{p}_{part}}{dt} = \frac{n_m P_i}{c} \left[1 + Re^{-j2\theta_i} - T^2 \frac{e^{-j2(\theta_i - \theta_r)} e^{-\alpha l}}{1 + Re^{-\alpha l} e^{j2\theta_r}} \right] \hat{k}_0. \quad (3.7)$$

Há um ponto importante a ser levantado agora. A força total na partícula é dada pela contribuição da força de cada raio que incide em toda superfície da partícula, ou seja, pela integral do diferencial de força com relação à superfície. Devemos, portanto, determinar $d\vec{F}$ a partir de (3.7). Derivando (3.7) em função do diferencial de superfície, temos:

$$d\vec{F} = \frac{n_m |\vec{S}|}{c} \left[1 + Re^{-j2\theta_i} - T^2 \frac{e^{-j2(\theta_i - \theta_r)} e^{-\alpha l}}{1 + Re^{-\alpha l} e^{j2\theta_r}} \right] \cos \theta_i \hat{k}_0 dA, \quad (3.8)$$

com:

$$dP_i = \vec{S} \cdot d\vec{A} = \vec{S} \cdot \vec{n}_0 dA = |\vec{S}| \cos \theta_i dA,$$

no qual $\vec{S}$ é o vetor de Poynting. Determinamos o diferencial de força do sistema. Note que ele tem unidade de N/m^2 , a mesma unidade de pressão. É por causa disto que chamamos dF de pressão de radiação. Para completar a dedução de (3.8), precisamos encontrar ainda os valores de R , T , $\vec{S}$ e $\hat{k}_0$, que serão abordados a seguir.

3.2.5 Coeficientes de Fresnel

Os coeficientes de reflexão R e transmissão T são dados por:

$$\begin{cases} R &= R_{\perp} \cos^2 \beta_c + R_{\parallel} \sin^2 \beta_c \\ T &= T_{\perp} \cos^2 \beta_c + T_{\parallel} \sin^2 \beta_c, \end{cases}$$

com:

$$\begin{cases} R_{\perp} &= \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_r)}{\sin^2(\theta_i + \theta_r)} \\ R_{\parallel} &= \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_r)}{\tan^2(\theta_i + \theta_r)} \\ T_{\perp} &= 1 - R_{\perp} \\ T_{\parallel} &= 1 - R_{\parallel}, \end{cases}$$

em que β_c é o ângulo que o campo elétrico faz com a normal do plano $\hat{k}_0 \times \hat{d}_0$ [74].

3.2.6 Vetor de Poynting

Sem perda de generalidade, vamos assumir que o módulo de vetor de Poynting é igual ao módulo ao quadrado da função de onda ψ (intensidade) do nosso feixe:

$$|\vec{S}(\theta, \phi)| = S(\theta, \phi) = |\psi(\theta, \phi)|^2.$$

Em princípio, a função de onda $\psi(\rho, \phi, z)$ não será normalizada em função da potência de abertura, portanto, a força não corresponderá ao seu valor físico real. Uma das tarefas futuras deste trabalho é normalizar os feixes em função de uma potência dada do laser na sua abertura.

3.2.7 Direção do Raio Incidente

Alguns trabalhos [10, 33, 34, 72, 75] assumem que a direção de propagação do feixe pode ser aproximada em $\hat{z}$. De fato, se considerarmos a nossa definição do FBT, quando supomos regime paraxial, a direção de propagação do feixe é muito próxima da direção do eixo de propagação quando calculamos $\psi(\rho, \phi, z)$ com ρ muito pequeno. Quando ρ assume valores grandes comparados com o *spot* do feixe, a direção de propagação - a direção do vetor de onda $\vec{k}$ - começa a ter componentes transversais, alguns valores dos quais não se pode mais desprezar. Portanto, como haverá deslocamento transversal da partícula neste trabalho, além do tamanho do seu raio comparado com o comprimento de onda, haverá pontos na sua superfície onde a direção do raio incidente não é paralela ao eixo $\hat{z}$.

A direção do vetor $\vec{k}$, que chamaremos de $\hat{k}_0$, é dada por:

$$\hat{k}_0 = \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|} = \frac{(\partial_x\Phi, \partial_y\Phi, \partial_z\Phi)}{|(\partial_x\Phi, \partial_y\Phi, \partial_z\Phi)|},$$

no qual Φ é a fase de $\psi(\rho, \phi, z)$ e o gradiente é tomado em coordenadas cartesianas. Devemos, pois, determinar a fase da função de onda. A função $\psi(\rho, \phi, z)$ é muito bem definida em todos os pontos no espaço, exceto, talvez, em $z = 0$, de tal forma que podemos escrevê-la em notação de módulo e fase:

$$\psi = |\psi|e^{+j\Phi}.$$

Aplicando o logaritmo na expressão acima e derivando ψ com relação a γ , em que γ pode ser x , y ou z , obtemos a derivada de Φ com relação γ , como segue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log \psi}{\partial \gamma} &= \frac{\partial \log |\psi|}{\partial \gamma} + j \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \\
\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\psi} &= \frac{\partial |\psi|}{|\psi|} + j \partial \Phi \\
\Rightarrow \partial \Phi &= \text{Im} \left\{ \frac{\partial \psi}{\psi} \right\}.
\end{aligned}$$

Portanto, a derivada de Φ com relação a γ é a parte imaginária da derivada de ψ com relação a γ sobre a própria função ψ .

Neste ponto, temos todos os termos da pressão de radiação $d\vec{F}$ bem definidos em função apenas de ψ e do ponto P escolhido. O próximo passo é integrar $d\vec{F}$ na superfície da esfera para se calcular a força total exercida pelo feixe.

3.3 Força Exercida pelo Feixe

A força total na partícula é dada pela integral da pressão de radiação na sua superfície:

$$\vec{F} = \iint_S d\vec{F}.$$

Antes de substituir o $d\vec{F}$ na expressão acima, temos uma última consideração a ser feita: nem todo ponto do espalhador é iluminado pelo feixe. É fácil ver, pela Fig. 3.1, que os pontos do hemisfério $0 \leq \theta \leq \pi/2$ podem não ser iluminados porque os pontos do hemisfério $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ bloqueiam a luz. Assim, uma condição para que um ponto $P(\theta, \phi)$ seja iluminado é tal que o ângulo de incidência do raio em P seja menor que 90° . Assim, podemos reescrever $d\vec{F}$ como:

$$d\vec{F} = \begin{cases} \frac{n_m |\psi|^2}{c} \left[1 + Re^{-j2\theta_i} - T^2 \frac{e^{-j2(\theta_i - \theta_r)} e^{-\alpha l}}{1 + Re^{-\alpha l} e^{j2\theta_r}} \right] \cos \theta_i \hat{k}_0 dA, & \text{se } \hat{k}_0 \cdot \hat{n}_0 < 0 \\ (0, 0, 0) dA, & \text{se } \hat{k}_0 \cdot \hat{n}_0 \geq 0, \end{cases}$$

e a força como:

$$\vec{F} = \hat{k}_0 \frac{n_m}{c} \iint_{\delta(\theta, \phi)} |\psi(\theta, \phi)|^2 \left[1 + Re^{-j2\theta_i} - T^2 \frac{e^{-j2(\theta_i - \theta_r)} e^{-\alpha l}}{1 + Re^{-\alpha l} e^{j2\theta_r}} \right] \cos \theta_i R_p^2 \sin \theta d\theta d\phi,$$

onde $\delta(\theta, \phi)$ é a região da partícula iluminada pelo feixe.

Com os resultados acima, terminamos a nossa análise teórica do cálculo de forças no regime de óptica geométrica para partículas dielétricas esféricas.

Regime de Rayleigh - Teoria

Neste capítulo, faremos uma análise teórica da força exercida por um feixe em uma partícula dielétrica com formato de uma esfera no regime de Rayleigh. Este regime é apropriado quando o raio da esfera é muito menor que o comprimento de onda do feixe.

Partiremos da premissa de que o espalhador, devido ao seu tamanho, pode ser visto como um dipolo elétrico induzido pelo campo elétrico incidente. Assim, aparecerão dois tipos de forças na partícula: a força gradiente, proveniente da interação do campo elétrico $\vec{E}$ com o dipolo $\vec{p}$, dada por:

$$\vec{F}_{grad} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}),$$

e a força de absorção e espalhamento, derivada da ação do campo magnético $\vec{B}$ com o dipolo [76]:

$$\vec{F}_{ae} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \times \vec{B}.$$

A soma destas duas forças é chamada de força de Lorentz [77] e é esta abordagem que usaremos neste trabalho. Outro tratamento para esta aproximação pode ser feito com o auxílio dos tensores de Maxwell e pode ser encontrado em [78]. Este último é mais completo do que o de aproximação de dipolo porque adiciona características magnéticas na partícula, ou seja, ela apresenta um dipolo elétrico (magnético) induzido pelo campo elétrico (magnético).

Neste capítulo, trabalharemos com funções na sua forma fasorial e temporal. Para distinguir entre os dois casos, usaremos o sub-índice 0 nas variáveis representadas por fasores. Por exemplo, $\vec{E}_0$ é o vetor campo elétrico representado no domínio da frequência e $\vec{E}$, no domínio do tempo.

O sistema de coordenadas adotado é o mesmo do Capítulo 3: a partícula está centrada na origem e o centro do feixe está localizado em $C_a(\rho_0, \phi_0, z_0) = (\rho_0 \cos \phi_0, \rho_0 \sin \phi_0, z_0)$ e pertence a um plano paralelo ao plano xy .

4.1 Força Exercida pelo Feixe

4.1.1 Polarizabilidade Elétrica

A polarizabilidade elétrica de um elemento é a sua capacidade de ter as suas cargas elétricas deslocadas sob ação de um campo elétrico externo. Ela é uma propriedade da matéria e o seu valor nos fornece uma noção da estrutura interna do elemento [79]. Para uma partícula esférica de raio a^1 , o seu valor, quando a partícula está estática, é dado pela equação de Clausius-Mossoti [80]:

$$\alpha_{0s}^e = a^3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2},$$

no qual ϵ é a permissividade relativa da esfera com relação ao meio. Entretanto, a expressão acima não leva em consideração a reação à radiação que a partícula tem sob si mesma quando ela está em movimento. A equação de polarizabilidade elétrica que inclui o termo de amortecimento é dada por [81]:

$$\alpha_0^e = \frac{\alpha_{0s}^e}{1 + j \frac{2}{3} j k^3 \alpha_{0s}^e},$$

em que k é o número de onda da onda incidente no meio.

4.1.2 Dipolo Elétrico Induzido

Dado que o espalhador tem dimensões muito menores que o comprimento de onda, o campo elétrico, praticamente, não varia espacialmente na região onde a partícula está posicionada, o que o faz ser constante igual a $\vec{E}_0$. Consequentemente, o vetor dipolo elétrico $\vec{p}_0$ é dado por:

$$\vec{p}_0 = \alpha_0^e \vec{E}_0.$$

¹Ao longo deste trabalho, usamos a nomenclatura R_p para representar o raio da partícula. Entretanto, os trabalhos encontrados na literatura deste regime usam a terminologia a para representar o raio e escolhemos acompanhar este padrão.

4.1.3 Força Média Temporal

A força de Lorentz, instantânea, é definida por:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) + \frac{n_m}{c} \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \times \vec{B}, \quad (4.1)$$

com $\vec{E} = \text{Re}[\vec{E}_0 \exp(-j\omega t)]$, $\vec{B} = \text{Re}[\vec{B}_0 \exp(-j\omega t)]$ e $\vec{p} = \text{Re}[\vec{p}_0 \exp(-j\omega t)]$. É interessante obter a força média temporal no período $T = 2\pi/\omega$ exercida na partícula. Ela é dada, a partir de (4.1) e usando notação fasorial, por:

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{1}{4T} \int_0^T \vec{\nabla}(\vec{p}_0 + \vec{p}_0^*) \cdot (\vec{E}_0 + \vec{E}_0^*) + \frac{n_m}{c} \frac{\partial(\vec{p}_0 + \vec{p}_0^*)}{\partial t} \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_0^*) dt,$$

no qual $*$ representa o conjugado complexo. Efetuando a integral, resulta que a i -ésima componente da força $\langle F^i \rangle$ é dada por, usando a notação de Einstein²:

$$\langle F^i \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[p_{0j} \partial^j (E_0^i)^* + \frac{n_m}{c} \epsilon^{ijk} \frac{\partial p_{0j}}{\partial t} (B_{0k})^* \right], \quad (4.2)$$

com $i = x, y, z$, em que ϵ^{ijk} é o tensor de Levi-Civita ou o símbolo de permutação. Aplicando as relações $\vec{B}_0 = \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 c / j\omega$, $\vec{p}_0 = \alpha_0^e \vec{E}_0$ e $\partial \vec{p}_0 / \partial t = -j\omega \vec{p}_0$ em (4.2), temos [77]:

$$\langle F^i \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\alpha_0^e E_{0j} \partial^i (E_0^j)^* \right]. \quad (4.3)$$

A equação acima é o principal resultado deste capítulo. Ao contrário do Capítulo 3, no qual reproduzimos uma figura da literatura para validação do código, não vimos a necessidade de fazer o mesmo neste caso por causa da simplicidade da expressão (4.3). A nossa validação do código foi verificar a derivada espacial do campo elétrico com duas implementações diferentes.

Para complementar o resultado deste capítulo, vamos desmembrar (4.3) em função das contribuições da força gradiente e da força de absorção e espalhamento. A média temporal apenas da força gradiente é dada por:

²A notação de Einstein é uma convenção usada para simplificar a notação de somas de termos ao longo de vetores, quando o índice ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, neste capítulo) usado na expressão não foi definido anteriormente no texto e aparece duas vezes em um único termo. Por exemplo, o produto escalar e vetorial, nesta notação, é: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u^j v_j$ e $\vec{u} \times \vec{v} = \epsilon_{ijk} u^j v^k \vec{e}_i$, em que os somatórios foram omitidos. No caso deste capítulo, os $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ -ésimos termos podem assumir os valores de 1, 2, e 3 representando as componentes $\hat{x}, \hat{y}$ e $\hat{z}$ da base ortonormal.

$$\langle \vec{F} \rangle_{grad} = \frac{1}{4T} \int_0^T \vec{\nabla} (\vec{p}_0 + \vec{p}_0^*) \cdot (\vec{E}_0 + \vec{E}_0^*) dt,$$

cujo resultado, em notação de Einstein, é:

$$\langle F^i \rangle_{grad} = \text{Re} \left[\alpha_0^e E_{0j} \partial^i (E_0^j)^* \right].$$

Tendo em mãos a expressão da força total e da força gradiente, a força de espalhamento e absorção é:

$$\langle F^i \rangle_{ae} = \langle F^i \rangle - \langle F^i \rangle_{grad} = -\frac{1}{2} \text{Re} \left[\alpha_0^e E_{0j} \partial^i (E_0^j)^* \right].$$

Com os resultados acima, terminamos a nossa análise teórica do cálculo de forças no regime de Rayleigh para partículas dielétricas esféricas.

Resultados

Este capítulo mostra os resultados obtidos durante o projeto. Ele será dividido em quatro seções. Na primeira, mostraremos as simulações e as comparações com outros trabalhos feitas para validar o código. Nas outras três seções, comentaremos sobre os três artigos publicados publicados como resultados desta pesquisa.

As simulações das seções 5.2 e 5.3 foram feitas no *software Wolfram Mathematica 10.3*. O restante, no algoritmo em Python desenvolvido, disponibilizado no repositório online [59].

Incluímos os artigos publicados que foram resultados diretos ou indiretos deste trabalho no Anexo A.

5.1 Validação

Para validar o código criado em Python, em especial o algoritmo que calcula as forças no regime de óptica geométrica, refizemos alguns resultados do trabalho de Zhang et al. [32], visto que ele foi a referência principal da base teórica do regime de óptica geométrica. Os pesquisadores analisaram a força transversal que um FG causa em uma partícula dielétrica, esférica e com perdas internas.

Após simular os resultados de Zhang et al., aplicamos o mesmo algoritmo para calcular a força que uma *Frozen-Wave* (FW)¹ [82–84] vetorial, uma superposição de feixes de Bessel vetoriais cujo perfil de intensidade longitudinal pode ser controlado dentro de um intervalo específico, exerce em uma partícula esférica. Para efeitos de comparação, simulamos a mesma FW com o mesmo espalhador, desta vez utilizando a teoria GLMT. Fizemos comparações com uma FW porque, no mesmo grupo de pesquisa, existem trabalhos em

¹Uma breve descrição sobre FWs escalar e vetorial foi feita no Apêndice A. Abordamos esta classe de feixes porque existe uma semelhança muito grande entre o método de descrição de feixes truncados e FW no que se refere à superposição discreta de feixes. No primeiro caso, trata-se de uma superposição de FBGs e, no segundo, de FBs cujos coeficientes de ambas devem ser determinados para gerar o perfil desejado

paralelos com este, mas utilizando FWs como sendo o feixe principal. Desta forma, foi possível empregar o mesmo algoritmo nas duas linhas de pesquisas.

Por fim, reproduzimos alguns resultados do trabalho de Zamboni-Rached et al. [56] para verificar se a parte do código responsável pela criação da superposição de FBG estava corretamente implementada.

5.1.1 Força Transversal Causada por um Feixe Gaussiano

A primeira bateria de testes do código foi tentar reproduzir a Fig. 4 do trabalho de Zhang et al. [32]. Eles investigaram a dependência da força transversal total F_x em função do coeficiente de absorção de um espalhador esférico. Os autores usaram um FG com o comprimento de onda no vácuo $\lambda_0 = 488$ nm, imerso em água, $spot \Delta_\rho = 0,4 \mu\text{m}$ e o campo elétrico orientado em $\hat{y}$. A partícula teve o seu raio $R_p = 6 \mu\text{m}$ e índice de refração $n_m = 1.6$. A Fig. 5.1 mostra os resultados obtidos em função da posição z_0 do feixe (z_0 de Fig. 5.1(a)-(c) são $4R_p$, $2R_p$, $-1R_p$ respectivamente) e do coeficiente de absorção, α , da partícula. A força está em unidades arbitrárias.

O resultado mostrado na Fig. 5.1, em partes, não foi igual ao resultado do artigo. Para se ter as curvas da Fig. 5.1 iguais às de Zhang et al., tivemos que alterar o valor de α da curva intermediária (curva com traço e pontos). No trabalho original, o valor utilizado pelos autores foi $\alpha = 0,02 \mu\text{m}^{-1}$ e, nas nossas simulações, usados $\alpha = 0,08 \mu\text{m}^{-1}$. Mesmo com este impasse, acreditamos que o código esteja validado para o FG.

Os autores mostraram que a força óptica transversal total é altamente influenciada pelo coeficiente de absorção da partícula. Para as três posições z_0 do feixe e para $\alpha < 0,08 \mu\text{m}^{-1}$, pontos de equilíbrio estável aconteceram somente quando $x_0 = 0$. Para $\alpha \geq 0,5 \mu\text{m}^{-1}$, a posição z_0 influenciou os resultados. Quando $z_0 = 4R_p$ (Fig. 5.1a), o ponto de equilíbrio estável ocorreu em $x_0 = 0$. Com $z_0 = 1R_p$ (Fig. 5.1b), o ponto de equilíbrio estável desapareceu de $x_0 = 0$ e surgiram dois, simétricos, quando $|x_0| \approx 1R_p$. Finalmente, quando $z_0 = -2R_p$ (Fig. 5.1c), os pontos de equilíbrio estáveis desapareceram. Conclui-se que a absorção da partícula atenua o ponto de equilíbrio estável em $x_0 = 0$.

Também reproduzimos os resultados da Figura 8 do trabalho do Zhang et al. Os autores consideraram o mesmo FG, posicionado em $z_0 = 1R_p$ (pelo nosso sistema, a partícula está atrás da cintura do feixe) e será deslocado nos eixo $\hat{x}$. A força na direção $\hat{x}$ exercida na partícula pode ser vista na Fig. 5.2. Neste gráfico, aparecem a contribuição da força dos raios incidentes, dos raios refletidos, dos raios que são transmitidos e a força total, que é a soma dos outros três.

Exceto a magnitude da força, por simples questões de normalização do campo elétrico², o perfil ficou próximo do obtido no trabalho referência.

²Neste trabalho todo, o campo elétrico foi normalizado para ter o seu valor máximo, em módulo, igual a 1. Zhang et al. normalizou o campo em função da potência do laser.

Fig. 5.1: Força óptica total na direção $\hat{x}$ em função da posição do centro da abertura de um FG com o comprimento de onda no vácuo $\lambda_0 = 488$ nm imerso em água, $\text{spot } \Delta_\rho = 0,4 \mu\text{m}$ e campo elétrico orientado em $\hat{y}$. A partícula em questão teve o seu raio $R_p = 6 \mu\text{m}$ e índice de refração $n_m = 1.6$. A posição z_0 , do centro da abertura, em cada gráfico é: (a) $z_0 = 4R_p$, (b) $z_0 = 1R_p$ e (c) $z_0 = -2R_p$. Linha sólida: $\alpha = 0,001 \mu\text{m}^{-1}$; linha com traços e pontos: $\alpha = 0,08 \mu\text{m}^{-1}$ e linha tracejada: $\alpha = 0,5 \mu\text{m}^{-1}$.

Fig. 5.2: Força transversal exercida por um FG com $\text{spot } \Delta_\rho = 0,4 \mu\text{m}$, comprimento de onda no vácuo $\lambda_0 = 488$ nm, índice de refração do meio $n_m = 1,33$ e $E_y = \psi_{fg}$, $E_x = 0$ e $E_z \approx 0$, no qual ψ_{fg} é dado por (2.7), em uma partícula de raio $R_p = 6 \mu\text{m}$, índice de refração $n_p = 1,60$ e coeficiente de absorção $\alpha = 0,5 \mu\text{m}^{-1}$. O feixe está posicionado em $z_0 = +R_p$. Linha sólida: força total; linha com traço e ponto: força dos raios incidentes; linha pontilhada: força dos raios refletidos; linha tracejada: força dos raios transmitidos.

Podemos ver que máximo da força de reflexão acontece em um ponto diferente do mínimo da força incidente e de transmissão, o que levou os pontos de equilíbrio estável ocorrerem onde $x_0 \neq 0$. Segundo Zhang et al., isto acontece porque causa das diferentes direções que os raios têm quando incidem na partícula.

5.1.2 Força Longitudinal Causada por uma *Frozen-Wave* Vetorial

A segunda bateria de teste foi feita com uma FW vetorial com as seguintes propriedades: comprimento de onda no vácuo $\lambda_0 = 1064$ nm, imerso em água; $L = 1$ mm; $N = 25$ ($2N + 1 = 51$); $Q = 0,9994k$, onde k é o número de onda do feixe. O maior ângulo de áxicon desta configuração foi $2,56^\circ$. O perfil de intensidade $F(z)$ escolhido foi: 1 para $|z| \leq 0,1L$. A FW resultante é mostrada na Fig. 5.3a. A linha contínua preta foi a simulação feita na teoria GLMT e os pontos, com o algoritmo de óptica geométrica deste código.

A força longitudinal que ela exerce em uma partícula esférica de raio $R_p = 20$ μm , em função da posição da abertura do feixe e do índice de refração relativo do espalhador, é mostrada na Fig. 5.3b. A linha contínua foi a simulação feita com a teoria GLMT e os pontos, com o algoritmo de óptica geométrica deste trabalho. É possível observar que as curvas ficaram muito próximas nos três índices de refração simulados.

Fig. 5.3: (a) Perfil longitudinal da FW definida. (b) Força longitudinal que a FW causa em uma partícula esférica de raio $R_p = 20$ μm . A linha contínua foi a simulação feita com a teoria GLMT e os pontos, com o algoritmo de óptica geométrica deste trabalho.

No resultado mostrado na Fig. 5.3b, percebemos que a força de espalhamento foi maior do que a força gradiente. Isso se deve por causa do ângulo de áxicon muito baixo da FW, o qual faz a força gradiente não ter um valor de intensidade elevado.

Com as duas baterias de testes finalizadas, validamos o algoritmo que calcula a força que um feixe exerce em uma partícula dielétrica esférica no regime de óptica geométrica.

5.1.3 Simulação dos Perfis: Feixe de Bessel Truncado, Feixe Gaussiano Truncado e Feixe de Bessel-Gauss Truncado

Os resultados reproduzidos aqui representam um FB, FG e FBG reais, ou seja, eles se propagam até uma distância máxima. Cada um deles foi feito alterando, apenas, os parâmetros k_ρ , q , R , L , q_r e N de (2.15) e (2.21), sendo que o comprimento de onda foi $\lambda = 632,8$ nm igual para os três casos. Para cada um dos feixes, mostramos a sua intensidade na abertura (com a intenção de exibir o truncamento) e o seu perfil 3D.

Para simular um FBT, os parâmetros escolhidos foram $k_\rho = 4,07 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$, $q = 0$, $R = 3,5 \text{ mm}$, $L = 3R^2$, $q_r = 6/L$ e $N = 23$. A Fig. 5.4 mostra o perfil resultante.

Fig. 5.4: Superposição de FBG representando um FBT, com $k_\rho = 4,07 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$, $q = 0$, $R = 3,5 \text{ mm}$, $L = 3R^2$, $q_r = 6/L$ e $N = 23$. (a) Intensidade da abertura. (b) Perfil 3D.

Para simular um FGT, os parâmetros escolhidos foram $k_\rho = 0$, $q = 144 \times 10^6 \text{ m}^{-2}$, $R = 59 \text{ } \mu\text{m}$, $L = 4R^2$, $q_r = 8/L$ e $N = 81$. A Fig. 5.5 mostra o perfil resultante.

Fig. 5.5: Superposição de FBG representando um FGT, com $k_\rho = 0$, $q = 144 \times 10^6 \text{ m}^{-2}$, $R = 59 \text{ } \mu\text{m}$, $L = 4R^2$, $q_r = 8/L$ e $N = 81$. (a) Intensidade da abertura. (b) Perfil 3D.

Por fim, para simular um FBGT, os parâmetros escolhidos foram $k_\rho = 4,07 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$,

$q = 144 \times 10^6 \text{ m}^{-2}$, $R = 1,0 \text{ mm}$, $L = 10R^2$, $q_r = q$ e $N = 30$. A Fig. 5.6 mostra o perfil resultante.

Fig. 5.6: Superposição de FBG representando um FBGT, com $k_\rho = 4,07 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$, $q = 144 \times 10^6 \text{ m}^{-2}$, $R = 1,0 \text{ mm}$, $L = 10R^2$, $q_r = q$ e $N = 30$. (a) Intensidade da abertura. (b) Perfil 3D.

Os resultados acima ficaram muito parecidos com os obtidos por Zamboni-Rached et al., o que valida o código de superposição de FBG.

5.2 Artigo: 'Método Simples em Óptica de Raios para Cálculo de Forças Radiais Exercidas por Superposições Discretas de Feixes de Bessel Escalares'

Publicamos um artigo, em paralelo aos objetivos deste trabalho, intitulado 'Método Simples em Óptica de Raios para Cálculo de Forças Radiais Exercidas por Superposições Discretas de Feixes de Bessel Escalares' que mostra a força óptica radial que uma FW escalar exerce em uma partícula esférica no congresso MOMAG-2016 [85]. O método do cálculo de forças usado neste artigo difere do método exposto no Capítulo 3 porque o primeiro considera a direção dos raios do feixe paralelos ao eixo de propagação. As simulações deste trabalho foram feitas no *software Wolfram Mathematica 10.3*.

Os parâmetros da FW escolhida, Fig. 5.7, são dados por: $L = 1 \text{ mm}$; $\lambda = 1064 \text{ nm}$, imerso em água; $N = 20$ ($2N + 1 = 41$); R (raio de abertura da fonte) = 1 mm . Nesta situação, o maior ângulo de áxicon dentre os 41 feixes foi de $14,56^\circ$, o que permitiu considerar a aproximação paraxial dentro de níveis toleráveis de erro. A função de referência $F(z)$ escolhida neste caso é dada por: 0 para $0 \leq z < 0,25L$, 1 para $0,25L \leq z < 0,50L$, 0 para $0,50L \leq z < 0,75L$, 2 para $0,75L \leq z < 0,90L$ e 0 para $0,90L \leq z < 1,00L$.

A força radial foi calculada sobre uma partícula de raio $R_p = 10\lambda$, com $\lambda = 1064$ nm, índice de refração relativo igual a 1,2 e coeficiente de absorção igual a zero. A Fig. 5.8 mostra a força na direção $\hat{y}$ em função da posição z_0 e ρ_0 do centro da abertura.

Fig. 5.7: Perfil da FW com perfil semiconstante em (a) em função de z , (b) em função de z e ρ . Figura extraída de [85]

Fig. 5.8: Força na direção $\hat{y}$ que o perfil semiconstante causa na partícula. Figura extraída de [85].

Os resultados obtidos indicam a possibilidade de obtenção de pontos ou regiões de forças radiais nulas em várias regiões do espaço, em função do perfil de intensidade desejado [85]. De fato, o diferencial de se usar uma FW para aprisionamento radial reside no seu padrão de fluxo de energia. Embora não seja trivial de se analisar, o padrão de fluxo de potência poderia ser utilizado para realizar aprisionamentos em todo espaço. Dessa forma, as FWs seriam projetadas (ou seja, teriam seus perfis longitudinais ao longo do eixo z , $F(z)$, determinados) a partir das armadilhas ópticas desejadas ou necessárias.

5.3 Artigo: ‘Cálculo de Forças Ópticas no Regime de Rayleigh Usando Soluções Analíticas para Feixes de Bessel Escalares e Truncados’

Publicamos um artigo intitulado ‘Cálculo de Forças Ópticas no Regime de Rayleigh Usando Soluções Analíticas para Feixes de Bessel Escalares e Truncados’ que mostra a força óptica, no regime de Rayleigh, exercida por um FBT em uma partícula esférica no congresso MOMAG-2016 [86]. O método usado neste artigo foi igual ao método exposto no Capítulo 4. As simulações deste trabalho foram feitas no *software Wolfram Mathematica 10.3*.

As características do FBT, criado a partir de superposições de FBG e representado na Fig. 5.9a, são mostradas na Tabela 5.1. Sem perda de generalidade, assume-se que o campo elétrico, com polarização linear, é dado por $\mathbf{E}(\rho, z) = E_x(\rho, z)\hat{\mathbf{x}} = \Psi(\rho, z)\hat{\mathbf{x}}$, onde $\Psi(\rho, z)$ é dado em (2.15). Mesmo com um ângulo de áxicon igual a 16° , o correspondente campo magnético foi aproximado por $\mathbf{H}(\rho, z) = H_y(\rho, z)\hat{\mathbf{y}} \simeq -i\partial_z\Psi(\rho, z)/\omega\mu_{ext}\hat{\mathbf{y}}$, onde ω é a frequência angular do feixe.

Tabela 5.1: Características do FB mostrado na Seção 5.3 reproduzido a partir de superposições de FBG.

λ	1064 nm
n_m	1,33 (água)
k	$7,85 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$
β	16°
k_ρ	$2,16 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$
R	1,0 mm
Z_{max}	3,5 mm
N	100
L	$3R^2$
q	0
q_r	$6/L$

A força foi calculada sobre uma partícula de raio $a_0 = \lambda/40$. A Fig. 5.9b mostra a força longitudinal em função da posição z_0 do centro da abertura ($\rho_0 = 0$ e $\phi_0 = 0$) e permissividade relativa da partícula.

Este método mostrou discrepâncias significativas entre perfis longitudinais de forças associados a FBs ideais e truncados. No primeiro caso, a força é sempre constante [86]. Já no segundo, a variação do padrão de força acompanha as oscilações naturais da intensidade de campo ao longo de $\hat{z}$, com variações mais acentuadas na região de decaimento a partir

Fig. 5.9: (a) Representação tridimensional do FBT usado no trabalho. (b) Gráfico de gradiente $z \times \epsilon$ da força longitudinal com $a_0 = \lambda/40$. Para uma melhor visualização, as forças maiores que 0,25 estão contidas no grupo das forças de 0,25 (parte vermelha do gráfico), da mesma forma que as forças menores que $-0,25$ estão contidas no grupo das forças de $-0,25$. Figuras extraídas de [86].

da qual os efeitos da difração são mais evidentes devido à ausência de recomposição através de energia lateral.

Alguns pontos de inversão da força foram observados ao longo do eixo óptico. Dado que a partícula é atraída para regiões de alta intensidade, ou seja, na direção do eixo óptico, é factível a possibilidade de captura tridimensional utilizando FBTs simples e práticos, desde que o espalhador esteja próximo à região de decaimento, onde os efeitos da difração destroem o perfil ideal.

Por outro lado, há uma ressalva quanto à validade dos resultados aqui obtidos, por causa do baixo valor do ângulo de áxicon. Primeiramente, estudos adicionais levando-se em conta possíveis efeitos brownianos devem ser realizados. Depois, é imperioso validar os resultados obtidos com aqueles esperados a partir de um modelo completo para regime óptico arbitrário (teoria GLMT).

5.4 Artigo: 'Longitudinal Forces on a Spherical Dielectric Particle Exerted by a Truncated Bessel Beam in the Ray Optics Regime'

Publicamos um artigo intitulado 'Longitudinal Forces on a Spherical Dielectric Particle Exerted by a Truncated Bessel Beam in the Ray Optics Regime' que mostra a força óptica, no regime de óptica geométrica, exercida por um FBT em uma partícula esférica no congresso IMOC-2017 [87]. Este artigo foi o resultado principal deste trabalho.

As características do FBT, criado a partir de superposições de FBGs, são: comprimento de onda $\lambda_0 = 1064$ nm, raio de abertura $R = 1$ mm, $L = 3R^2$, $q_r = 6/L$, ângulo

de áxicon $\beta = 6^\circ$, $q = 0$ e $N = 21$. Estas condições levou $Z_{max} = 9.51$. Assumimos que o campo elétrico do feixe é linearmente polarizado em $\hat{x}$, ou seja, $\vec{E}(\rho, z) = \Psi(\rho, z)\hat{x}$, com $\Psi(\rho, z)$ dado por (2.15).

Os perfis resultante do feixe em 2D e 3D são mostrados na Fig. 5.10.

Fig. 5.10: Perfil de intensidade do FBT. (a) Perfil em 2D. (b) Perfil em 3D. Figuras extraídas de [87].

A força longitudinal em função da posição do centro da abertura z_0 , com $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ calculada sobre um espalhador esférico de raio $R_p = 18 \mu\text{m}$ e índices de refração relativos iguais a 1, 20, 1, 01 e 0,95 é mostrada na Fig. 5.11. Como era esperado, a força foi sempre positiva para os três casos por causa do baixo ângulo de áxicon do feixe, 6° . Quando o ângulo é pequeno, a força de espalhamento é superior à força gradiente de tal maneira que não aparece regiões com força resultante nula ou no sentido negativo de $\hat{z}$.

Fig. 5.11: Força longitudinal exercida pelo FBT em uma partícula esférica dielétrica de raio $R_p = 18 \mu\text{m}$ em função de z_0 , com $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Três diferentes valores de índice de refração relativo da partícula são mostrados. Linha contínua: $n_{rel} = 1,20$. Linha com traço e ponto: $n_{rel} = 1,01$. Linha pontilhada: $n_{rel} = 0,95$. Para uma melhor visualização, a curva $n_{rel} = 1,01$ foi multiplicada por 10. Figura extraída de [85].

A Fig. 5.12 mostra a contribuição dos raios incidentes, refletidos e transmitidos, descritos no Capítulo 3, na força total. A força dos raios incidentes teve o mesmo valor para os as três partículas, visto que ela só depende da área iluminada pelo feixe. A força

causada pelos raios refletidos e transmitidos apresentou uma pequena variação, o que era esperado, porque elas dependem do índice de refração relativo da partícula.

Fig. 5.12: Decomposição da força longitudinal da Fig. 5.11. A força está decomposta em total (linha contínua), causada pelos raios incidentes (linha com traço e ponto), dos raios refletidos (pontilhada) e dos raios transmitidos (tracejada). (a) Para $n_{rel} = 1,20$. (b) Para $n_{rel} = 1,01$. (c) para $n_{rel} = 0,95$. Figura extraída de [85].

Como era esperado, pontos de equilíbrio estável não surgiram no perfil estudado. Isso acontece porque o ângulo de âxicon escolhido foi muito baixo, o que fez a força de espalhamento predominar sobre a força gradiente. Teria sido interessante simular um FBT com um ângulo de âxicon elevado, mas não é possível utilizando o método analítico estudado neste trabalho, que só permite simular perfis, com confiança, na região de campo distante por causa da integral de difração de Fresnel utilizada para se chegar na equação do FBG.

Conclusão e Diretivas Futuras

Este trabalho teve como principal objetivo estudar, de forma teórico-numérica, um método que descreve FBTs de forma analítica, abrindo mão da necessidade de se usar integrais de difração e, com o equacionamento do feixe em mãos, analisar a força que ele causa em partículas dielétricas esféricas. Os regimes de forças escolhidos foram o regime de óptica geométrica e o regime de Rayleigh, válidos quando o espalhador tem dimensão muito maior e muito menor, respectivamente, comparados com o comprimento de onda do feixe incidente. Esta proposta, até onde sabemos, foi inédita na literatura.

Para atingir os objetivos propostos, a primeira fase deste projeto foi entender o passo a passo do método de descrição do feixe escolhido. Ele se baseia na superposição de diferentes FBGs de tal forma que o feixe resultante se propague até uma distância limite simulando o caso real. Também foram tarefas desta primeira fase analisar e entender a física por trás das expressões que calculam as forças nos dois regimes.

A segunda fase do projeto foi criar um algoritmo para fazer as análises numéricas propostas. No início do projeto, usávamos o *software Wolfram Mathematica 11* mas o nosso conhecimento sobre ele não era o suficiente para deixar as simulações rápidas. Em vista deste problema, optamos por criar um *framework* em Python por ser uma linguagem com várias bibliotecas gratuitas, se mostrou mais eficiente que o primeiro e temos a ideia de incorporá-lo em um projeto maior, onde uma aplicativo *web* será desenvolvido para pesquisadores da área realizarem as suas simulações com mais facilidade e eficiência.

A próxima etapa foi a fase de validação do algoritmo. Esta parte do projeto não foi trivial porque não existiam análises numéricas de forças causadas por feixes truncados na literatura e, portanto, não tínhamos resultados para fazer comparações. A estratégia usada para validar o código foi comparar os resultados obtidos pelo nosso *framework* com os resultados da GLMT usando feixes como as FWs. Também comparamos os resultados com um trabalho que calculou a força no regime de óptica geométrica quando o feixe incidente era um FG real.

Por fim, uma vez com o código validado em mãos, simulamos a força que um FBT causa em uma partícula dielétrica e esférica nos dois regimes propostos. Como resultado

destas simulações, três artigos foram aceitos até o presente momento (Julho de 2017) em dois congressos nacionais: dois aceitos no MOMAG-2016 e um no IMOC-2017.

Esta pesquisa teve, portanto, duas grandes contribuições. A primeira foi realizar uma análise possivelmente inédita na literatura das forças que um FBT causa em partículas dielétricas esféricas nos regime de óptica geométrica e de Rayleigh. A segunda, foi criar um *framework*, disponível publicamente através de um repositório online [59], onde, até o presente momento (Julho de 2017), é possível fazer simulações, nos dois regimes, com os seguintes feixes:

- feixe Gaussiano real e escalar;
- feixe de Bessel real e escalar (de qualquer ordem);
- feixe de Bessel-Gauss real e escalar;
- superposição de feixes de Bessel-Gauss reais e escalares;
- superposição de feixes de Bessel reais e escalares (*Frozen-Waves* reais e escalares);
- feixe de Bessel real e vetorial (de qualquer ordem);
- superposição de feixes de Bessel reais e escalares (*Frozen-Waves* vetoriais e escalares).

Em vista disto, este trabalho pode auxiliar outros pesquisadores em diversas análises que ainda podem ser feitas. Por exemplo, investigar a força que feixes escalares como uma FW, um FGT ou um FBGT ou uma FW vetorial causam em espalhadores dielétricos esféricos nos regimes de óptica geométrica ou de Rayleigh.

Referências

- [1] A. Ashkin, “History of optical trapping and manipulation of small-neutral particle, atoms, and molecules,” *Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of*, vol. 6, no. 6, pp. 841–856, 2000.
- [2] ———, “Atomic-beam deflection by resonance-radiation pressure,” *Physical Review Letters*, vol. 25, no. 19, p. 1321, 1970.
- [3] ———, “Acceleration and trapping of particles by radiation pressure,” *Physical review letters*, vol. 24, no. 4, p. 156, 1970.
- [4] J. H. Poynting, “On the transfer of energy in the electromagnetic field,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 175, pp. 343–361, 1884.
- [5] A. Ashkin and J. Dziedzic, “Optical levitation by radiation pressure,” *Applied Physics Letters*, vol. 19, no. 8, pp. 283–285, 1971.
- [6] ———, “Optical levitation of liquid drops by radiation pressure,” *Science*, vol. 187, no. 4181, pp. 1073–1075, 1975.
- [7] A. Ashkin, J. Dziedzic, J. Bjorkholm, and S. Chu, “Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles,” *Optics letters*, vol. 11, no. 5, pp. 288–290, 1986.
- [8] A. Ashkin and J. Dziedzic, “Optical trapping and manipulation of viruses and bacteria,” *Science*, vol. 235, no. 4795, pp. 1517–1520, 1987.
- [9] A. Ashkin, J. Dziedzic, and T. Yamane, “Optical trapping and manipulation of single cells using infrared laser beams,” *Nature*, vol. 330, no. 6150, pp. 769–771, 1987.
- [10] A. Ashkin, “Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime,” *Biophysical journal*, vol. 61, no. 2, p. 569, 1992.

- [11] —, “Optical trapping and manipulation of neutral particles using lasers,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 94, no. 10, pp. 4853–4860, 1997.
- [12] R. W. Steubing, S. Cheng, W. H. Wright, Y. Numajiri, and M. W. Berns, “Laser induced cell fusion in combination with optical tweezers: the laser cell fusion trap,” *Cytometry*, vol. 12, no. 6, pp. 505–510, 1991.
- [13] V. Emiliani, D. Cojoc, E. Ferrari, V. Garbin, C. Durieux, M. Coppey-Moisan, and E. Di Fabrizio, “Wave front engineering for microscopy of living cells,” *Optics Express*, vol. 13, no. 5, pp. 1395–1405, 2005.
- [14] M. W. Berns, W. H. Wright, B. J. Tromberg, G. A. Profeta, J. J. Andrews, and R. J. Walter, “Use of a laser-induced optical force trap to study chromosome movement on the mitotic spindle,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 86, no. 12, pp. 4539–4543, 1989.
- [15] M. Waleed, S.-U. Hwang, J.-D. Kim, I. Shabbir, S.-M. Shin, and Y.-G. Lee, “Single-cell optoporation and transfection using femtosecond laser and optical tweezers,” *Biomedical optics express*, vol. 4, no. 9, pp. 1533–1547, 2013.
- [16] G. Wright, M. J. Tucker, P. C. Morton, C. L. Sweitzer-Yoder, and S. E. Smith, “Micromanipulation in assisted reproduction: A review of current technology,” *Current Opinion in Obstetrics and Gynecology*, vol. 10, no. 3, pp. 221–226, 1998.
- [17] J. C. Crocker and D. G. Grier, “Microscopic measurement of the pair interaction potential of charge-stabilized colloid,” *Physical review letters*, vol. 73, no. 2, p. 352, 1994.
- [18] D. G. Grier, “Optical tweezers in colloid and interface science,” *Current opinion in colloid & interface science*, vol. 2, no. 3, pp. 264–270, 1997.
- [19] G. Wang, E. M. Sevick, E. Mittag, D. J. Searles, and D. J. Evans, “Experimental demonstration of violations of the second law of thermodynamics for small systems and short time scales,” *Physical Review Letters*, vol. 89, no. 5, p. 050601, 2002.
- [20] J. C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*. Clarendon press, 1881, vol. 1.
- [21] P. Lebedev, “Experimental examination of light pressure,” *Nuovo Cimento*, vol. 15, no. 195, p. 195, 1883.
- [22] E. F. Nichols and G. Hull, “A preliminary communication on the pressure of heat and light radiation,” *Physical Review (Series I)*, vol. 13, no. 5, p. 307, 1901.
- [23] L. Novotny and B. Hecht, *Principles of nano-optics*. Cambridge university press, 2012.

- [24] K. C. Neuman and S. M. Block, “Optical trapping,” *Review of scientific instruments*, vol. 75, no. 9, pp. 2787–2809, 2004.
- [25] J. E. Molloy and M. J. Padgett, “Lights, action: optical tweezers,” *Contemporary Physics*, vol. 43, no. 4, pp. 241–258, 2002.
- [26] D. G. Grier, “A revolution in optical manipulation,” *Nature*, vol. 424, no. 6950, pp. 810–816, 2003.
- [27] B. Maheu, G. Gouesbet, and G. Gréhan, “A concise presentation of the generalized lorenz-mie theory for arbitrary location of the scatterer in an arbitrary incident profile,” *Journal of optics*, vol. 19, no. 2, p. 59, 1988.
- [28] J. A. Lock and G. Gouesbet, “Generalized lorenz–mie theory and applications,” *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 110, no. 11, pp. 800–807, 2009.
- [29] G. Gouesbet, “Generalized lorenz-mie theory and applications,” *Particle & particle systems characterization*, vol. 11, no. 1, pp. 22–34, 1994.
- [30] G. Gouesbet and G. Gréhan, *Generalized Lorenz-Mie Theories*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [31] A. Schuster, *An introduction to the theory of optics*. E. Arnold, 1904.
- [32] Y. Zhang, Y. Li, J. Qi, G. Cui, H. Liu, J. Chen, L. Zhao, J. Xu, and Q. Sun, “Influence of absorption on optical trapping force of spherical particles in a focused gaussian beam,” *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, vol. 10, no. 8, p. 085001, 2008.
- [33] L. A. Ambrosio and H. E. Hernández-Figueroa, “Trapping double negative particles in the ray optics regime using optical tweezers with focused beams,” *Optics express*, vol. 17, no. 24, pp. 21 918–21 924, 2009.
- [34] —, “Gradient forces on double-negative particles in optical tweezers using bessel beams in the ray optics regime,” *Optics express*, vol. 18, no. 23, pp. 24 287–24 292, 2010.
- [35] M. Rocha, “Optical tweezers for undergraduates: theoretical analysis and experiments,” *American Journal of Physics*, vol. 77, no. 8, pp. 704–712, 2009.
- [36] J. W. S. B. Rayleigh, *On the scattering of light by small particles*, 1871.
- [37] L. Rayleigh, “X. on the electromagnetic theory of light,” *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 12, no. 73, pp. 81–101, 1881.

- [38] A. T. Young, “Rayleigh scattering.” *Physics Today*, vol. 35, no. 1, pp. 42–48, 1982.
- [39] O. M. Maragò, P. H. Jones, P. G. Gucciardi, G. Volpe, and A. C. Ferrari, “Optical trapping and manipulation of nanostructures,” *Nature nanotechnology*, vol. 8, no. 11, pp. 807–819, 2013.
- [40] K. Svoboda and S. M. Block, “Optical trapping of metallic rayleigh particles,” *Optics letters*, vol. 19, no. 13, pp. 930–932, 1994.
- [41] P. M. Hansen, V. K. Bhatia, N. Harrit, and L. Oddershede, “Expanding the optical trapping range of gold nanoparticles,” *Nano letters*, vol. 5, no. 10, pp. 1937–1942, 2005.
- [42] L. Bosanac, T. Aabo, P. M. Bendix, and L. B. Oddershede, “Efficient optical trapping and visualization of silver nanoparticles,” *Nano letters*, vol. 8, no. 5, pp. 1486–1491, 2008.
- [43] M. Pelton, M. Liu, H. Y. Kim, G. Smith, P. Guyot-Sionnest, and N. F. Scherer, “Optical trapping and alignment of single gold nanorods by using plasmon resonances,” *Optics letters*, vol. 31, no. 13, pp. 2075–2077, 2006.
- [44] L. Tong, V. D. Miljkovic, and M. Kall, “Alignment, rotation, and spinning of single plasmonic nanoparticles and nanowires using polarization dependent optical forces,” *Nano letters*, vol. 10, no. 1, pp. 268–273, 2009.
- [45] S. Tan, H. A. Lopez, C. W. Cai, and Y. Zhang, “Optical trapping of single-walled carbon nanotubes,” *Nano Letters*, vol. 4, no. 8, pp. 1415–1419, 2004.
- [46] O. Marago, P. Gucciardi, F. Bonaccorso, G. Calogero, V. Scardaci, A. Rozhin, A. Ferrari, P. Jones, R. Saija, F. Borghese *et al.*, “Optical trapping of carbon nanotubes,” *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, vol. 40, no. 7, pp. 2347–2351, 2008.
- [47] M. Geiselmann, M. L. Juan, J. Renger, J. M. Say, L. J. Brown, F. J. G. De Abajo, F. Koppens, and R. Quidant, “Three-dimensional optical manipulation of a single electron spin,” *Nature nanotechnology*, vol. 8, no. 3, pp. 175–179, 2013.
- [48] A. A. R. Neves, A. Camposeo, S. Pagliara, R. Saija, F. Borghese, P. Denti, M. A. Iatì, R. Cingolani, O. M. Maragò, and D. Pisignano, “Rotational dynamics of optically trapped nanofibers,” *Optics express*, vol. 18, no. 2, pp. 822–830, 2010.
- [49] M. Nieto-Vesperinas, J. Sáenz, R. Gómez-Medina, and L. Chantada, “Optical forces on small magnetodielectric particles,” *Optics express*, vol. 18, no. 11, pp. 11 428–11 443, 2010.

- [50] I. Quantum Design, “Tweez 250 - a complete turn-key laser tweezers system,” http://www.qdusa.com/sitedocs/productBrochures/Tweez_250.pdf, online, Acesso em: 31 de Maio de 2016.
- [51] Thorlabs, “Thorlabs’ optical tweezers microscope systems,” http://www.thorlabs.com/newgrouppage9.cfm?objectgroup_id=6913, online, Acesso em: 31 de Maio de 2016.
- [52] J. Instruments, “Nanotracker 2,” <http://www.jpk.com/nanotracker-2-overview.388.en.html>, online, Acesso em: 31 de Maio de 2016.
- [53] J. Arlt and K. Dholakia, “Generation of high-order bessel beams by use of an axicon,” *Optics Communications*, vol. 177, no. 1, pp. 297–301, 2000.
- [54] N. E. Andreev, S. S. Bychkov, V. V. Kotlyar, L. Y. Margolin, L. N. Pyatnitskii, and P. Serafimovich, “Formation of high-power hollow bessel light beams,” *Quantum Electronics*, vol. 26, no. 2, p. 126, 1996.
- [55] J. Goodman, “Introduction to fourier optics,” 2008.
- [56] M. Zamboni-Rached, E. Recami, and M. Balma, “Simple and effective method for the analytic description of important optical beams when truncated by finite apertures,” *Applied optics*, vol. 51, no. 16, pp. 3370–3379, 2012.
- [57] E. Jones, T. Oliphant, P. Peterson *et al.*, “SciPy: Open source scientific tools for Python,” 2001–, [Online; accessed <today>]. [Online]. Available: <http://www.scipy.org/>
- [58] J. D. Hunter, “Matplotlib: A 2d graphics environment,” *Computing In Science & Engineering*, vol. 9, no. 3, pp. 90–95, 2007.
- [59] P. P. J. S. Arantes, “opticalforces,” <https://github.com/arantespp/opticalforces>, online, Acesso em: 27 de Julho de 2017.
- [60] R. Bracewell, “The fourier transform and its applications,” *New York*, vol. 5, 1965.
- [61] B. Osgood, “The fourier transform and its applications,” *Lecture Notes for EE*, vol. 261, p. 20, 2009.
- [62] L. A. Ambrosio *et al.*, “Feixes localizados em pinças ópticas com partículas convencionais e metamateriais,” 2009.
- [63] A. E. Siegman, “Lasers university science books,” *Mill Valley, CA*, vol. 37, p. 208, 1986.

-
- [64] J. H. McLeod, “The axicon: a new type of optical element,” *JOSA*, vol. 44, no. 8, pp. 592–597, 1954.
- [65] M. Born and E. Wolf, *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. CUP Archive, 2000.
- [66] C. Huygens, “Traité de la lumiere, 1690,” *Lipsiae, Gressner e Schramm ed*, pp. 125–132, 2005.
- [67] J. Durnin, “Exact solutions for nondiffracting beams. i. the scalar theory,” *JOSA A*, vol. 4, no. 4, pp. 651–654, 1987.
- [68] J. Durnin, J. Miceli Jr, and J. Eberly, “Diffraction-free beams,” *Physical Review Letters*, vol. 58, no. 15, p. 1499, 1987.
- [69] F. Gori, G. Guattari, and C. Padovani, “Bessel-gauss beams,” *Optics communications*, vol. 64, no. 6, pp. 491–495, 1987.
- [70] E. Hewitt and R. E. Hewitt, “The gibbs-wilbraham phenomenon: an episode in fourier analysis,” *Archive for history of Exact Sciences*, vol. 21, no. 2, pp. 129–160, 1979.
- [71] H. Rubinsztein-Dunlop, T. Nieminen, M. Friese, and N. Heckenberg, “Optical trapping of absorbing particles,” *Advances in quantum chemistry*, vol. 30, pp. 469–492, 1998.
- [72] G. Roosen, B. Delaunay, and C. Imbert, “Etude de la pression de radiation exercée par un faisceau lumineux sur une sphère réfringente,” *J. Opt.(Paris)*, vol. 8, pp. 181–187, 1977.
- [73] A. Drigo, “Fundamental university physics.—vol. iii: Quantum and statistical physics,” *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, vol. 67, no. 3, pp. 574–575, 1970.
- [74] E. Hecht, “Optics, 4th,” *International edition, Addison-Wesley, San Francisco*, vol. 3, 2002.
- [75] L. A. Ambrosio and H. E. Hernández-Figueroa, “Double negative particles in optical tweezers,” in *Lasers and Electro-Optics (CLEO) and Quantum Electronics and Laser Science Conference (QELS), 2010 Conference on*. IEEE, 2010, pp. 1–2.
- [76] J. P. Gordon, “Radiation forces and momenta in dielectric media,” *Physical Review A*, vol. 8, no. 1, p. 14, 1973.
- [77] P. Chaumet and M. Nieto-Vesperinas, “Time-averaged total force on a dipolar sphere in an electromagnetic field,” *Optics letters*, vol. 25, no. 15, pp. 1065–1067, 2000.

-
- [78] P. C. Chaumet and A. Rahmani, “Electromagnetic force and torque on magnetic and negative-index scatterers,” *Optics express*, vol. 17, no. 4, pp. 2224–2234, 2009.
- [79] F. X. Lee, L. Zhou, W. Wilcox, and J. Christensen, “Magnetic polarizability of hadrons from lattice qcd in the background field method,” *Physical Review D*, vol. 73, no. 3, p. 034503, 2006.
- [80] J. D. Jackson, *Electrodynamics*. Wiley Online Library, 1975.
- [81] B. T. Draine and P. J. Flatau, “Discrete-dipole approximation for scattering calculations,” *JOSA A*, vol. 11, no. 4, pp. 1491–1499, 1994.
- [82] M. Zamboni-Rached, “Stationary optical wave fields with arbitrary longitudinal shape by superposing equal frequency bessel beams: Frozen waves,” *Optics Express*, vol. 12, no. 17, pp. 4001–4006, 2004.
- [83] M. Zamboni-Rached, E. Recami, and H. E. Hernández-Figueroa, “Theory of “frozen waves”: modeling the shape of stationary wave fields,” *JOSA A*, vol. 22, no. 11, pp. 2465–2475, 2005.
- [84] M. Zamboni-Rached, “Diffraction-attenuation resistant beams in absorbing media,” *Optics Express*, vol. 14, no. 5, pp. 1804–1809, 2006.
- [85] P. P. J. S. Arantes, V. S. Angelis, A. M. S. Santos, and L. A. Ambrosio, “Método simples em Óptica de raios para cálculo de forças radiais exercidas por superposições discretas de feixes de bessel escalares,” *MOMAG*, 2016.
- [86] P. P. J. S. Arantes and L. A. Ambrosio, “Cálculo de forças Ópticas no regime de rayleigh usando soluções analíticas para feixes de bessel escalares e truncados,” *MO-MAG*, 2016.
- [87] —, “Longitudinal forces on a spherical dielectric particle exerted by a truncated bessel beam in the ray optics regime,” *IMOC*, 2017.
- [88] J. J. Wang, T. Wriedt, J. A. Lock, and L. Mädler, “General description of circularly symmetric bessel beams of arbitrary order,” *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 184, pp. 218–232, 2016.

Apêndices

APÊNDICE **A**

Frozen-Wave

Como não é o foco deste trabalho, apresentaremos brevemente a teoria das FWs [82–84], que é uma superposição de FBs de mesma frequência e diferentes ângulos de áxicon e é capaz de modelar o seu perfil longitudinal de intensidade de campo de acordo uma função de referência.

A.1 *Frozen-Wave* Escalar

A função de onda de uma FW é dada pelo somatório de $2N + 1$ FBs de ordem ν com diferentes constante de amplitude (A_n), números de onda $k_{\rho n}$ e k_{zn} . A equação desta FW é dada por:

$$\Psi_{FW}(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-N}^N A_n J_\nu(k_{\rho n} \rho) e^{j\nu\phi} e^{-jk_{zn}z}.$$

Para garantir o comportamento físico e feixes propagantes na direção positiva de $\hat{z}$, as seguintes condições são impostas:

$$\omega_0/k_{zn} > 0, \quad k_{\rho n}^2 \geq 0,$$

no qual k é o número de onda dos feixes.

Segundo [82], os números de onda longitudinais são definidor por:

$$k_{zn} = Q + \frac{2\pi}{L}n,$$

no qual L é o intervalo onde a *FW* está definida e Q , um valor a ser escolhido de acordo com o projeto e o grau de localização transversal de campo desejado. Quanto maior (menor) o valor de Q , menor (maior) será o ângulo de áxicon dos feixes. Entretanto, Q deve ser escolhido de tal maneira que as condições impostas em (A.1), sejam satisfeitas, ou seja:

$$0 \leq Q \pm \frac{2\pi}{L}N \leq k. \tag{A.1}$$

A inequação (A.1) é usada para determinar o valor máximo de n , chamado de N_{max} , visto que as variáveis Q, L e ω_0 já foram escolhidas.

Os valores de A_n são dados por:

$$A_n = \frac{1}{L} \int_0^L F(z) e^{j(2\pi/L)nz} dz, \quad (A.2)$$

no qual $F(z)$ é a função referência da FW, em outras palavras, o perfil de intensidade da FW em $\rho = 0$ é igual (ou próximo, dependendo do valor de N_{max}) a $F(z)$.

Por fim, os números de ondas transversais são dados por:

$$k_{\rho n} = \sqrt{k^2 - \left(Q + \frac{2\pi}{L}n\right)^2}.$$

A.2 *Frozen-Wave* Vetorial

Ao contrário da FW escalar, cuja função de onda Ψ_{FW} foi determinada pelo somatório das funções de onda Ψ_{FB} dos $2N + 1$ FBs, uma FW vetorial é descrita pelas suas componentes de campo $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$. Cada uma destas seis componentes são dadas pelo somatório das respectivas componentes de campo de $2N + 1$ FB vetoriais. As componentes de campo elétrico e magnético do n -ésimo FB vetorial [88], circularmente simétrica e com polarização convencionada como $(1, 0)$, representando uma forma equivalente à polarização linear em x , são dadas por:

$$E_{xn}^{(1,0)} = \bar{A}_n g(\alpha_n) (-j)^\nu e^{-jk_{zn}z} \times \left\{ (1 + \cos \alpha_n) J_\nu(k_{\rho n} \rho) + \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha_n) \left[e^{j2\phi} J_{\nu+2}(k_{\rho n} \rho) + e^{-j2\phi} J_{\nu-2}(k_{\rho n} \rho) \right] \right\},$$

$$E_{yn}^{(1,0)} = \bar{A}_n g(\alpha_n) (-j)^\nu e^{-jk_{zn}z} \frac{1}{2j} (1 - \cos \alpha_n) \left[e^{j2\phi} J_{\nu+2}(k_{\rho n} \rho) - e^{-j2\phi} J_{\nu-2}(k_{\rho n} \rho) \right],$$

$$E_{zn}^{(1,0)} = \bar{A}_n g(\alpha_n) (-j)^\nu e^{-jk_{zn}z} j \sin \alpha_n \left[e^{j\phi} J_{\nu+1}(k_{\rho n} \rho) - e^{-j\phi} J_{\nu-1}(k_{\rho n} \rho) \right],$$

$$B_{xn}^{(1,0)} = \bar{A}_n \left(\frac{k}{\omega} \right) g(\alpha_n) (-j)^\nu e^{-jk_{zn}z} \frac{1}{2j} (1 - \cos \alpha_n) \left[e^{j2\phi} J_{\nu+2}(k_{\rho n} \rho) - e^{-j2\phi} J_{\nu-2}(k_{\rho n} \rho) \right],$$

$$B_{yn}^{(1,0)} = \bar{A}_n \left(\frac{k}{\omega} \right) g(\alpha_n) (-j)^\nu e^{-jk_{zn}z} \times \left\{ (1 + \cos \alpha_n) J_\nu(k_{\rho n} \rho) - \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha_n) \left[e^{j2\phi} J_{\nu+2}(k_{\rho n} \rho) + e^{-j2\phi} J_{\nu-2}(k_{\rho n} \rho) \right] \right\},$$

$$B_{zn}^{(1,0)} = \bar{A}_n \left(\frac{k}{\omega} \right) g(\alpha_n) (-j)^\nu e^{-jk_{zn}z} \sin \alpha_n \left[e^{j\phi} J_{\nu+1}(k_{\rho n} \rho) + e^{-j\phi} J_{\nu-1}(k_{\rho n} \rho) \right],$$

com $g(\alpha_n) = (1 + \cos \alpha_n)/4$, no qual α_n é o ângulo de meio cone do n -ésimo FB, e $\bar{A}_n = A_n/[g(\alpha_n)(1 + \cos \alpha_n)]$, com A_n dado por (A.2). As considerações sobre $k_{\rho n}$ e k_{zn} são as mesmas daquelas feitas para uma FW escalar.

Anexos

ANEXO **A**

Artigos Publicados.

Incluimos os artigos publicados que foram resultados diretos ou indiretos deste trabalho.

Método Simples em Óptica de Raios para Cálculo de Forças Radiais Exercidas por Superposições Discretas de Feixes de Bessel Escalares

Pedro Paulo Justino da Silva Arantes, Vinicius Soares de Angelis, Amélia Moreira Santos, Leonardo André Ambrosio

Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação (SEL)

Escola de Engenharia de São Carlos (EESC), Universidade de São Paulo (USP).

São Carlos, SP, Brasil. 13566-590.

pedro.arantes@usp.br, vinicius.angelis@usp.br e ameliams@usp.br, leo@sc.usp.br

Resumo—A análise de forças ópticas exercidas por superposições discretas de feixes de Bessel escalares é recente. Tais feixes são interessantes do ponto de vista prático, pois possibilitam projetar padrões longitudinais de intensidade arbitrários e, portanto, fornecem um mecanismo simples para múltiplas armadilhas tridimensionais. Aqui, propomos o uso de um método simples para a análise aproximada, no regime de óptica geométrica, de forças radiais exercidas por tais feixes sobre partículas esféricas dielétricas, já aplicadas a feixes simples de Bessel escalares. Tal método consiste em observar que, no regime paraxial, todos os raios associados aos feixes se encontram quase paralelos entre si, tomando assim como aproximação uma superposição de raios paralelos que incidem completamente sobre um hemisfério do espalhador. O perfil de intensidade do feixe é determinado, então, pelo perfil radial de potência associado a cada feixe, e as forças radiais posteriormente determinadas através de métodos numéricos.

Palavras-chaves—Aprisionamento óptico; óptica geométrica; feixes de Bessel; forças ópticas.

I. INTRODUÇÃO

O uso de um único feixe de Bessel (FB) em sistemas de aprisionamento óptico permite a criação de armadilhas bidimensionais para captura simultânea de várias partículas em múltiplos planos, todos perpendiculares ao eixo óptico [1-3]. Tal característica se deve, em parte, por conta dos anéis radiais de intensidade e, além disso, devido ao foco estendido (características não difrativas) e às propriedades de autorreconstrução [4-7].

Recentemente [8-10], um dos autores deste trabalho propôs a adoção, como feixes de captura, das chamadas *Frozen Waves* (FWs), que nada mais são do que superposições discretas de FB escalares, estes últimos com eixo óptico comum e possuindo a mesma frequência de operação e, portanto, o mesmo número de onda, embora cada um carregue um número de onda longitudinal (ou radial) distinto. Tais campos de onda, além das características não difrativas e de autorreconstrução típicas de seus constituintes, permitem modelar, arbitrariamente, o perfil longitudinal de intensidade. Isso é possível graças a uma escolha adequada dos coeficientes complexos da superposição, que servem como

pesos a cada FB que compõe a FW desejada [11-16].

Embora inicialmente geradas em escalas mais largas (ordem de metros), a introdução de FWs em sistemas de pinças ópticas permitiria a criação de armadilhas efetivamente tridimensionais a partir de FB escalares (regime paraxial), o que vem sendo demonstrado recentemente com trabalhos envolvendo o cálculo das forças ópticas sobre partículas esféricas dielétricas nos regimes de Rayleigh e de Mie [8-10].

No regime de Rayleigh, os espalhadores dielétricos são modelados como simples dipolos elétricos, sendo o cálculo das forças ópticas simples e direto [10,17-19]. Para partículas com dimensões da ordem do comprimento de onda, entretanto, tanto a aproximação de dipolo quanto a aproximação por óptica de raios se tornam inadequadas, e então adotam-se as chamadas teorias generalizadas de Lorenz-Mie (GLMT - *Generalize Lorenz-Mie Theory*). A GLMT trata o problema de espalhamento através de expansões dos campos eletromagnéticos (EM) incidentes, espalhados e internos às partículas em funções de harmônicos esféricos vetoriais, sendo que um feixe de perfil de intensidade arbitrário é descrito a partir do conhecimento dos coeficientes complexos da expansão dos campos EM incidentes, conhecidos como fatores de forma (BSC - *Beam Shape Coefficients*). No caso dos campos internos e espalhados, temos também os coeficientes de Mie [20-22].

Em óptica geométrica, para o qual o raio da partícula é muito maior que o comprimento de onda, o cálculo das forças ópticas envolve a descrição do feixe incidente em termos de raios e a consideração do problema de espalhamento como um de múltiplas reflexões/refrações em uma interface (a superfície da partícula) [23-24]. Nesse caso, métodos de integração são geralmente necessários para a consideração dos infinitos raios que incidem sobre parte da superfície do espalhador.

Um método simples, porém eficaz, para o cálculo das forças *radiais* ou *transversais* foi demonstrado por L. A. Ambrosio em 2010 especificamente para FB escalares de ordem arbitrária ν [25]. Nesse método, a partícula é suposta centrada em um sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) e o feixe assume deslocamento arbitrário $(x_0, y_0) = (r_0, \phi_0)$ sobre o plano xy , mantendo seu eixo óptico sempre paralelo ao eixo

Este trabalho foi desenvolvido a partir de recursos da FAPESP, projetos no. 2014/04867-1 (Auxílio Pesquisa - Regular de L. A. Ambrosio) e 2015/21105-0 (Bolsa IC de V. S. de Angelis).

A CAPES apoiou este trabalho através de bolsas de mestrado de P. P. J. S. Arantes e de A. M. Santos.

z (r_0 e ϕ_0 estão associados às componentes radiais e azimutais em sistema cilíndrico equivalente). Os raios são considerados todos paralelos entre si, sendo que cada um carrega uma potência específica que depende da distância radial em relação ao eixo óptico. O perfil de potência reflete o perfil de Bessel, isto é, $P \propto |J_\nu[k_\rho((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^{1/2}]|^2$, onde $J_\nu(\cdot)$ são FB e k_ρ é o número de onda radial.

Neste trabalho, propomo-nos a estender a análise realizada em [25] para o cálculo das forças ópticas *radiais*, em óptica geométrica, exercidas por FWs sobre partículas esféricas dielétricas. Naturalmente, embora as forças radiais possam ser analisadas com certa precisão, os paralelismos dos raios incidentes impedem qualquer tentativa de análise de forças longitudinais, através do método aqui proposto, com maior precisão. Isso, por um lado, não nos permite inferir possíveis pontos (ou regiões) de equilíbrio (estável) objetivando a determinação de armadilhas tridimensionais com FWs, como já realizado em outros regimes ópticos. Todavia, ainda assim serve de guia para um estudo da dinâmica radial de espalhadores esféricos sob a ação de tais campos de onda.

Assim, a seção seguinte apresenta uma rápida revisão de FWs e de como as forças ópticas radiais e longitudinais (axiais) podem ser determinadas no regime de óptica geométrica para um feixe de distribuição espacial de intensidade arbitrária. A seguir, as forças radiais são numericamente determinadas para dois casos particulares de FWs, isto é, para dois padrões longitudinais de intensidade: semiconstante e exponencial crescente, comparando os resultados com aqueles esperados para um único FB. Finalmente, nossas conclusões são apresentadas.

II. ANÁLISE TEÓRICA

A. Frozen Waves (FWs)

As FWs são ondas formadas pela superposição de $2N + 1$ FB escalares de mesma frequência, cuja característica é reproduzir o padrão de intensidade axial de uma função $F(z)$ em um intervalo pré-definido $0 \leq z \leq L$. O n -ésimo FB possui amplitude A_n , em geral complexa, e números de onda transversal e longitudinal, $k_{\rho n}$ e k_{zn} respectivamente [11]. A equação (com a dependência temporal $e^{-j\omega_0 t}$ omitida e supondo propagação em $+z$) que descreve tal superposição e representa a solução da equação de onda escalar é dada, em coordenadas cilíndricas, por

$$\psi(\rho, z) = \sum_{n=-N}^N A_n J_0(k_{\rho n} \rho) e^{jk_{zn} z}. \quad (1)$$

onde $J_0(\cdot)$ é a função de Bessel ordinária. As amplitudes A_n são definidas a partir da função de referência $F(z)$, e são dadas por:

$$A_n = \frac{1}{L} \int_0^L F(z) e^{-j(2\pi/L)nz} dz. \quad (2)$$

Os números de onda longitudinais k_{zn} , por sua vez, são definidos por:

$$k_{zn} = Q + \frac{2\pi}{L} n \leq n_1 \frac{\omega_0}{c}, \quad (3)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo, n_1 o índice de refração do meio propagante e $Q > 0$ é um parâmetro relacionado ao grau de localização de campo transversal, tendendo a ser muito próximo de ω_0/c por conta do regime paraxial e, em consequência, dos reduzidos ângulos de áxicon. O máximo valor de n , N , deve respeitar o limite superior imposto em (3). Fisicamente, tal restrição necessariamente implica em considerarmos apenas feixes propagantes (e não evanescentes).

Por fim, o número de onda transversal $k_{\rho n}$ do n -ésimo FB relaciona-se necessariamente com (3):

$$k_{\rho n} = \sqrt{n_m^2 \frac{\omega_0^2}{c^2} - \left(Q + \frac{2\pi}{L} n\right)^2}. \quad (4)$$

B. Potência de uma Frozen Wave

Para o cálculo das forças ópticas, é necessário saber de antemão a distribuição de potência do feixe incidente. Como a potência é proporcional à intensidade do feixe, vamos definir a potência normalizada de uma FW como $P(\rho, z) = |\psi(\rho, z)|^2$, onde $\psi(\rho, z)$ é dada em (1).

Como estamos interessados na distribuição de campo na superfície do espalhador, o cálculo de forças se torna mais fácil se adotarmos o sistema de coordenadas esféricas onde o centro da partícula está na origem, ou seja, a potência será determinada nos pontos $P_E = (R_p, \theta, \phi)$ (em coordenadas esféricas), onde R_p é o raio da esfera. A abertura circular utilizada como fonte, por sua vez, situa-se em $z_0 \leq 0$ sobre o eixo z , com relação à origem, com centro deslocado por ρ_0 na direção ϕ_0 sobre o plano xy . Ou seja, o centro da fonte está situado no ponto $P_0 = (\rho_0, \phi_0, z_0)$ (em coordenadas cilíndricas), e o eixo do feixe coincide com eixo z' paralelo ao eixo z . A Fig. 1 ilustra como a fonte e a partícula estão situadas no espaço (as escalas não representam, necessariamente, uma situação real).

Fig. 1. Representação do sistema de coordenadas utilizado. A partícula, representada pela esfera, está na origem do sistema, enquanto que o centro da fonte [representada pela curva tridimensional de $J_0(\cdot)$] se encontra no ponto $P_0(\rho_0, \phi_0, z_0)$ (em coordenadas cilíndricas), onde $z_0 \leq 0$.

Assim, a distância longitudinal entre os pontos P_E e P_0 é dada por $\bar{z} = R_p \cos \theta + z_0$ e a transversal (devido à simetria radial da FW e usando simples relações trigonométricas), por $\bar{\rho} = [(R_p \sin \theta)^2 + \rho_0^2 - 2R_p \sin \theta \rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{1/2}$ (neste trabalho, adotou-se $\phi_0 = 270^\circ$). Portanto, a potência da FW em função do ponto P_E , com P_0 fixo, vale

$$P(P_E) = P(R_p, \theta, \phi) = |\psi(\bar{\rho}, \bar{z})|^2. \quad (5)$$

C. Forças Ópticas

Como o objetivo deste trabalho é estudar a força gradiente (força que atua para mover a partícula para regiões de maior intensidade) causada por uma FW em uma determinada partícula, vamos defini-la, primeiramente, para um único raio.

Segundo [25], a direção da força gradiente é igual ao sentido da normal do ponto onde o raio toca a superfície, sendo seu módulo dado por [23,25]:

$$f_g = \frac{n_1 P}{c} \left[R \sin 2\theta_i - T^2 \frac{\sin(2\theta_i - 2\theta_t) + R \sin 2\theta_i}{1 + R^2 + 2R \cos 2\theta_t} \right], \quad (6)$$

onde P é a potência do raio incidente na partícula, R e T são os coeficientes de Fresnel de reflexão e transmissão, respectivamente, e θ_i o ângulo de incidência do raio e θ_t , o transmitido, com relação à normal à superfície da partícula.

No caso de uma FW, para calcular a força total, devemos somar as contribuições de cada raio incidente na partícula. Para tanto, consideramos que os raios do feixe chegam à superfície do hemisfério inferior ($90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) da partícula praticamente paralelos ao eixo z . Assim, o ângulo de incidência de um raio que toca nos pontos da superfície de coordenada azimutal θ vale $180^\circ - \theta$.

Como o interesse está na força radial, devemos determinar a contribuição radial de f_g . De acordo com [25] e por conta de o deslocamento da fonte se dar apenas ao longo do eixo y (a simetria do problema nos permite considerar qualquer eixo de referência para deslocamento sobre o plano xy), a componente radial da força gradiente está no sentido de y e é dada por:

$$f_y = f_g \sin \theta \sin \phi. \quad (7)$$

Dessa forma, a força radial total, F_y , é determinada integrando (7) na superfície do hemisfério inferior da partícula, dividido pela área do hemisfério. Matematicamente:

$$F_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi f_g \sin \phi (\sin \theta)^2 d\phi d\theta. \quad (8)$$

III. RESULTADOS

Neste trabalho, consideraremos duas FWs com perfis distintos. Em ambos os casos, assumem-se os seguintes

valores para as respectivas variáveis: $L = 1$ mm; $\lambda = 1064$ nm; $n_1 = 1,33$ (água); $N = 20$ ($2N + 1 = 41$); $n_1 \omega_0 / c = n_1 2\pi / \lambda = 7,85 \times 10^6$ rad/m; $Q = 0,984 n_1 \omega_0 / c = 7,73 \times 10^6$ rad/m; $\Delta\rho$ (spot do maior feixe da superposição) = $20 \mu\text{m}$ e R_a (raio de abertura da fonte) = 1 mm. Nesta situação, o maior ângulo de áxicon dentre os 41 feixes foi de $14,56^\circ$, o que permitiu considerar a aproximação paraxial dentro de níveis toleráveis de erro.

A. Caso 1- Perfil Semiconstante

A função de referência $F(z)$ escolhida neste caso de perfil semiconstante é dada por: 0 para $0 \leq z < 0,25L$, 1 para $0,25L \leq z < 0,50L$, 0 para $0,50L \leq z < 0,75L$, 2 para $0,75L \leq z < 0,90L$ e 0 para $0,90L \leq z < 1,00L$. A partir de (1) e (2), o perfil longitudinal de intensidade resultante, em $\rho = 0$, foi calculado numericamente e é mostrado na Fig. 2, em curva tracejada. O quadrado da função de referência também pode ser visto na figura (curva contínua, vermelha).

Fig. 2. Perfil longitudinal constante para perfil semiconstante. Em vermelho e contínuo (azul tracejado), $|F(z)|^2$ (a intensidade da FW em $\rho = 0$).

A Fig. 3(a) mostra a intensidade da FW em $\rho \times z$, enquanto que a Fig. 3(b) representa a curva de nível da força $F_y(\rho, z)$ para uma partícula de raio $R_p = 10\lambda$ e índice de refração relativo $n_r = 0,8$. É notória, fora do eixo longitudinal ($\rho = 0$), a grande quantidade de pontos, ou regiões, nos quais a força é nula. Fisicamente, tal característica é explicada pelo fluxo lateral de energia, observado na Fig. 3(a), que existe nas regiões mais afastadas do eixo z causando variações na intensidade do feixe e, por conseguinte, do padrão de força.

A Fig. 4 salienta a influência da intensidade do feixe na força radial para dois planos distintos em $0,4L$ [Fig. 4(a)] e $0,8L$ [Fig. 4(b)], levando-se em conta dois índices de refração relativos para partículas de raio $R_p = 10\lambda$. Picos de força próximos a pontos de alta intensidade são observados, sendo que a força é atrativa quando o índice de refração relativo é maior que um e repulsiva, caso contrário (leva-se em consideração a posição da fonte). Tais comportamentos são naturalmente esperados para partículas dielétricas sem perdas. Na Fig. 4(a) observa-se outra região de alta intensidade após $\rho = 60 \mu\text{m}$, correspondente à intensidade do feixe nesta região. Próximo ao eixo z , a força da Fig. 4(b) é, aproximadamente, quatro vezes maior, a mesma proporção entre as intensidades.

Fig. 3. (a) $I(\rho, z)$ para a FW da Fig. 2 (todos os pontos de intensidade maior que 0,5 estão representados por 0,5). (b) $F_y(\rho, z)$. Aqui, $R_p = 10\lambda$ e $n_r = 1,2$. Para melhor visualização, forças maiores que 10 pN (menores que -10 pN) estão no conjunto das forças de 10 pN, em vermelho (-10 pN, em azul).

Os perfis de força radial para diferentes raios R_p da partícula e para $z = 0,4L$ são ilustrados na Fig. 5. Observa-se que, quanto maior o raio da partícula, maior é a sua inércia, ou seja, menor é a intensidade da força de pico. Além disso, o valor máximo da força ocorre para ρ próximo do raio da partícula, assim como previsto por [23].

Nota-se, tanto na Fig. 4 quanto na Fig. 5, que independentemente do índice de refração partícula, a força radial F_y apresenta zeros nos mesmos pontos, para R_p e z constantes. Por exemplo, na Fig. 5. (a), F_y para $\epsilon_r = 0,80$ apresenta um zero em $\rho = 42,04 \mu\text{m}$. Já F_y para $\epsilon_r = 1,20$ possui um zero muito próximo, em $\rho = 41,96 \mu\text{m}$.

Fig. 4. Força transversal em função de ρ para partículas com raio igual a 10λ para dois valores distintos de índice de refração relativo, $n_r = 1,50$ (curvas em preto) e $n_r = 0,75$ (curvas em vermelho), e diferentes posições longitudinais. (a) $z = 0,4L$. (b) $z = 0,8L$.

Fig. 5. Força transversal, em $z = 0.4L$, em função de ρ para dois valores distintos de índice de refração relativo, $n_r = 1.20$ (curvas em preto) e $n_r = 0.80$ (curvas em vermelho), e diferentes valores de raio. (a) $R_p = 10\lambda$. (b) $R_p = 20\lambda$. (c) $R_p = 30\lambda$. (d) $R_p = 50\lambda$.

B. Caso 2 – Perfil Exponencial Crescente

Neste segundo exemplo utilizamos um perfil exponencial crescente descrito matematicamente por $F(z) = e^{-1000z} - 1$.

Fig. 6. Perfil longitudinal exponencial crescente. Em vermelho e contínuo, $|F(z)|^2$; em azul e tracejado, a intensidade da FW a partir de (1).

A Fig. 7(a) mostra a intensidade da FW em $\rho \times z$, enquanto que a Fig. 7(b) representa a curva de nível da força $F_y(\rho, z)$ para uma partícula com $R_p = 10\lambda$ e $n_r = 0.8$. Como no caso anterior, é notável que o padrão das forças assemelha-se muito com o padrão de intensidade da FW.

Fig. 7. (a) $I(\rho, z)$ para a FW exponencial crescente da Fig. 6 (todos os pontos de intensidade maior que 1 estão representados por 1). $F_y(\rho, z)$. Aqui, $R_p = 10\lambda$ e $n_r = 0.8$. Para melhor visualização, forças maiores que 5 pN (menores que -5 pN) estão no conjunto das forças de 5 pN, em vermelho (-5 pN, em azul).

IV. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um métodos simples, em óptica geométrica, para análise de forças ópticas radiais sobre partículas dielétricas esféricas, estendendo estudos anteriores com feixes escalares de Bessel, incorporando as chamadas *Frozen Waves*. Aqui, dois perfis longitudinais foram escolhidos a título de exemplo de aplicação, o primeiro com duas regiões de intensidade idealmente constante, o segundo exponencial crescente.

Os resultados aqui obtidos indicam a possibilidade de obtenção de pontos ou regiões de forças radiais nulas, os quais variam bastante em função do perfil de intensidade desejado. De fato, o diferencial de se usar uma *Frozen Wave* para

aprisionamento radial reside na característica de fluxo de energia que a onda possui. Embora não seja trivial de se analisar, o padrão de fluxo de potência poderia ser utilizado para realizar aprisionamentos em todo espaço. Dessa forma, tais feixes não difrativos seriam projetados [ou seja, teriam seus perfis longitudinais ao longo do eixo z , $F(z)$, determinados] a partir das armadilhas ópticas desejadas ou necessárias.

Com base nos resultados obtidos, o índice de refração relativo e o raio da partícula afetam a amplitude da força radial, como é esperado para quaisquer feixes reais. A amplitude aumenta se o contraste entre o índice de refração do meio e o da partícula aumenta ou se o raio da esfera diminui.

O método aqui empregado é baseado em raios paralelos impossibilita conclusões precisas acerca das forças longitudinais. Adicionalmente, pode-se perceber que tal distribuição espacial de raios não condiz com o fato de que cada feixe de Bessel, presente na superposição de composição de determinada *Frozen Wave*, apresenta ângulo de áxicon próprio e distinto dos demais. Ainda assim, dado que os resultados são mais do que satisfatórios para análise dos perfis de forças radiais, pelo menos para feixes escalares e individuais de Bessel, os resultados aqui obtidos para tais componentes de força óptica devem apresentar grande coerência com situações reais.

Uma extensão natural deste trabalho poderia ser a análise da componente longitudinal de força óptica, adotando-se, para tanto, métodos mais robustos que levem em conta tanto a contribuição da pressão de radiação quanto da componente longitudinal da força gradiente. Além disso, um comparativo se faz ainda necessário entre os resultados em óptica geométrica e aqueles advindos de extensões da teoria de Lorenz-Mie para feixes de perfis espaciais arbitrários. Tais estudos encontram-se, atualmente, em andamento.

REFERÊNCIAS

- [1] J. Arlt, V. Garcés-Chaves, W. Sibbett, K. Dholakia, "Optical micromanipulation using a Bessel light beam," *Opt. Comm.*, vol. 197, pp. 239-245, October 2001.
- [2] V. Garcés-Chaves, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett e K. Dholakia, "Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam," *Nature*, vol. 419, pp. 145-147, September 2002.
- [3] V. Garcés-Chavez, D. Roskey, M. D. Summers, H. Melville, D. McGloin, E. M. Wright, and K. Dholakia, "Optical levitation in a Bessel light beam," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 85, pp. 4001-4003, November 2004.
- [4] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*. New York: Mc Grow-Hill, 1941.
- [5] J. Durnin, "Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 4, pp. 651-654, April 1987.
- [6] J. Durnin, and J. J. Miceli Jr., "Diffraction-Free Beams," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, pp. 1499-1501, April 1987.
- [7] R. M. Herman e T. A. Wiggins, "Production and uses of diffractionless beams," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 8, pp. 932-942, June 1991.
- [8] L. A. Ambrosio, and M. Zamboni-Rached, "Analytical approach of ordinary frozen waves for optical trapping and micromanipulation," *Appl. Opt.*, vol. 54, pp. 2584-2593, April 2015.
- [9] L. A. Ambrosio, and M. Zamboni-Rached, "Optical forces experienced by arbitrary-sized spherical scatterers from superpositions of equal-frequency Bessel beams," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 32, pp. 37-46, May 2015.
- [10] L. A. Ambrosio, and M. de M. Ferreira, "Time-average forces over Rayleigh particles by superposition of equal-frequency arbitrary-order Bessel beams," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 32, pp. 67-74, May 2015.
- [11] M. Zamboni-Rached, "Stationary optical wave fields with arbitrary longitudinal shape, by superposing equal frequency Bessel beams: frozen waves," *Opt. Express*, vol. 12, pp. 4001-4006, August 2004.
- [12] M. Zamboni-Rached, E. Recami, and H. E. Hernández-Figueroa, "Theory of 'frozen waves': modeling the shape of stationary wave fields," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 22, pp. 2465-2475, November 2005.
- [13] M. Zamboni-Rached, "Diffraction-attenuation resistant beams in absorbing media," *Opt. Express*, vol. 14, pp. 1804-1809, March 2006.
- [14] M. Zamboni-Rached, L. A. Ambrosio, and H. E. Hernández-Figueroa, "Diffraction-attenuation resistant beams: their higher-order versions and finite-aperture generations," *Appl. Opt.*, vol. 49, pp. 5861-5869, October 2010.
- [15] T. A. Vieira, M. R. R. Gesualdi, and M. Zamboni-Rached, "Frozen waves: experimental generation," *Opt. Lett.*, vol. 37, pp. 2034-2036, June 2012.
- [16] T. A. Vieira, M. Zamboni-Rached, and M. R. R. Gesualdi, "Modeling the spatial shape of nondiffracting beams: experimental generation of frozen waves via holographic method," *Opt. Commun.*, vol. 315, pp. 374-380, March 2014.
- [17] Y. Harada, and T. Asakura, "Radiation forces on a dielectric sphere in the Rayleigh scattering regime," *Opt. Commun.*, vol. 124, pp. 529-541, March 1996.
- [18] P. C. Chaumet, and M. Nieto-Vesperinas, "Time averaged total force, on a dipolar sphere in an electromagnetic field," *Opt. Lett.*, vol. 25, pp. 1065-1067, August 2000.
- [19] A. N. Rubinov, A. A. Afanas'ev, I. E. Ermolaev, Y. A. Kurochkin, and S. Y. Mikhnevich, "Localization of spherical particles under the action of gradient forces in the field of a zero-order Bessel beam," *J. Appl. Spectrosc.*, vol. 70, pp. 565-572, July-August 2003.
- [20] J. A. Lock, and G. Gouesbet, "Generalized Lorenz-Mie theory and applications," *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 110, pp. 800-807, July 2009.
- [21] G. Gouesbet, "Generalized Lorenz-Mie theories, the third decade: a perspective," *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 110, pp. 1223-1238, September-November 2009.
- [22] G. Gouesbet, and G. Gréhan. *Generalized Lorenz-Mie Theories*. Berlin-Heidelberg: Springer, 2011.
- [23] A. Ashkin, "Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime," *Biophys. J.*, vol. 61, pp. 569-582, February 1992.
- [24] Y. Zhang, Y. Li, J. Qi, G. Cui, H. Liu, J. Chen, L. Zhao, J. Xu, and Q. Sun, "Influence of absorption on a trapping force of spherical particles in a focused Gaussian beam," *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, vol. 10, p. 085001, June 2008.
- [25] L. A. Ambrosio, and H. E. Hernández-Figueroa, "Gradient forces on double-negative particles in optical tweezers using Bessel beams in the ray optics regime," *Opt. Express*, vol. 18, pp. 24287-24292, November 2010.

Cálculo de Forças Ópticas no Regime de Rayleigh Usando Soluções Analíticas para Feixes de Bessel Escalares e Truncados

Pedro Paulo Justino da Silva Arantes, Leonardo André Ambrosio
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação (SEL)
Escola de Engenharia de São Carlos (EESC), Universidade de São Paulo (USP)
São Carlos, Brasil
leo@sc.usp.br

Resumo—Neste trabalho, analisamos em caráter teórico/numérico, pela primeira vez na literatura, as forças ópticas exercidas sobre partículas dielétricas, no regime de Rayleigh, considerando soluções analíticas recentemente desenvolvidas para feixes de Bessel escalares e truncados que eliminam a necessidade de se recorrer a integrações duplas de Rayleigh-Sommerfeld. Tais feixes seriam gerados a partir de aberturas finitas e, em contraste com o caso ideal, ou seja, de energia infinita geralmente introduzido em análise de cálculo de forças, permitiriam a existência teórica de pontos de aprisionamento longitudinais exatamente na região limite a partir do qual as características não difrativas do feixe se perdem. Através de exemplos numéricos, mostramos que tais pontos podem existir na prática, em situações reais de aprisionamento de partículas muito menores que o comprimento de onda, sendo que uma captura tridimensional efetiva se tornaria, então, viável.

Palavras Chaves— Aprisionamento óptico; regime de Rayleigh; feixes de Bessel; forças ópticas.

I. INTRODUÇÃO

Feixes de Bessel (FB) escalares, de energia infinita, são matematicamente observados como soluções da equação de onda escalar em coordenadas cilíndricas [1]–[4]. De fato, tais soluções apresentam características não difrativas por distâncias infinitas, dada a abundância de energia lateral constantemente fornecida em direção ao centro (eixo) do feixe. Na prática, entretanto, as aberturas (geradores) são necessariamente truncadas, isto é, possuem raios finitos, e uma distância máxima Z_{max} é observada além da qual o feixe perde suas propriedades não difrativas e de autorreconstrução [2], [3].

Quando lidamos com aberturas truncadas e desejamos conhecer o perfil de campo a uma dada distância da mesma, muitas vezes não dispomos de soluções analíticas que nos permitam um cálculo rápido dos campos eletromagnéticos em todos os pontos no espaço. É comum, por exemplo, recorrermos às integrais de Rayleigh-Sommerfeld (ver, para o caso de FB escalares e suas superposições discretas, [5]).

Este trabalho foi desenvolvido a partir de recursos da FAPESP (projeto no. 2014/04867-1) e contou com apoio da CAPES (bolsa de mestrado de Pedro Paulo Justino da Silva Arantes).

Independentemente do modelo teórico-matemático aplicado, é fato que, na prática, são os FB truncados (FBT) os efetivamente gerados, ainda que muitas vezes os experimentos nos permitam, sem grandes preocupações, restringirmo-nos às regiões do espaço ao longo das quais tais campos de onda possuem, aproximadamente, o comportamento ideal esperado (por exemplo, se fixamos nossa análise apenas a uma região $\Delta z = d_{max} - d_{min}$, tal que $0 \leq (d_{min}, d_{max}) \leq Z_{max}$. Muitas vezes, esse é o caso prático observado em aprisionamento óptico [6]–[8].

Para tais sistemas de manipulação de partículas micro e milimétricas, FB escalares ou vetoriais vêm sendo empregados tendo em vista a possibilidade de captura bidimensional de várias partículas, simultaneamente e em diversos planos perpendiculares ao eixo óptico [6], [7]. No caso de um único FB propagante (contrapondo-se aos chamados contra-propagantes, com sentido $-z$), contanto que a partícula se encontre em uma posição axial $z \ll Z_{max}$, as forças de espalhamento são sempre repulsivas, sendo então impossível uma captura efetivamente tridimensional (a captura bidimensional é possível por conta do gradiente de intensidade de campo, que gera forças radiais com pontos de equilíbrio estável. No caso de um FB de ordem zero, tais pontos tendem a se localizarem em regiões de alta intensidade relativa, como por exemplo ao longo do eixo óptico [7]).

É possível, todavia, como mostramos neste trabalho de forma numérica (e, até onde podemos constatar, de forma inédita na literatura), realizarmos armadilhas tridimensionais usando um único FB escalar truncado, e assim o fazemos supondo que as partículas dielétricas espalhadoras podem ser modeladas, de forma simplificada em razão de suas dimensões reduzidas em relação ao comprimento de onda, como dipolos elétricos (é o chamado regime de Rayleigh). Para tanto, desprezamos quaisquer efeitos indesejados por conta do regime óptico considerado (por exemplo, movimento browniano), entendendo que tais efeitos ou são desprezíveis, ou possam ser, de certa forma, minimizados. A captura tridimensional é obtida exatamente no limite espacial em que o modelo ideal deixa de ter sua validade assegurada, ou seja, em regiões fronteiriças próximas a Z_{max} .

Inicialmente, revisamos como os FBTs podem ser descritos através de expressões analíticas sem a necessidade de serem introduzidas as integrais de Rayleigh-Sommerfeld [9]. Em seguida, calculamos as componentes retangulares de força óptica, sobre partículas dielétricas, para um FB escalar truncado. No regime de Rayleigh, expressões analíticas são muitas vezes fáceis de serem obtidas para tais componentes de força [10]–[13], como é o caso deste trabalho. Por fim, alguns exemplos numéricos são apresentados.

II. ANÁLISE TEÓRICA

A. Feixe de Bessel Truncado

Um FBT, no caso escalar (regime paraxial), pode ser obtido pela superposição de diferentes feixes de Bessel-Gauss (FBG) [9]. O FBG é definido, no plano $z = 0$, como um feixe de Bessel apodizado por uma função Gaussiana, cuja propagação é assumida em $+z$:

$$\psi_{BG}(\rho, z = 0) = AJ_0(k_\rho \rho) e^{-q\rho^2}, \quad (1)$$

onde A é a amplitude da onda; J_0 , a função de Bessel de ordem zero; k_ρ , o número de onda transversal da onda propagante; e q , a largura da função Gaussiana. Como foi suposto regime paraxial, a análise é apropriada para ângulos de áxicon pequenos [3].

Para representar o FBG no eixo longitudinal, e não somente no transversal, aplica-se a função $\psi_{BG}(\rho, z = 0)$ na integral de difração de Fresnel em coordenadas cilíndricas [14], cujo resultado final é [15]:

$$\psi_{BG}(\rho, z) = -\frac{ikA}{2zQ} e^{ik(z + \frac{\rho^2}{2z})} J_0\left(\frac{ikk_\rho \rho}{2zQ}\right) \times e^{-\frac{1}{4Q}\left(k_\rho^2 + \frac{k^2 \rho^2}{z^2}\right)}, \quad (2)$$

em que $Q = q - ik/2z$ e k é o número de onda. (2) ainda não representa um feixe truncado, porque o limite superior da integral de difração de Fresnel tende ao infinito. Caso fosse limitado superiormente pelo raio de abertura, R , a integral representaria um feixe truncado. Neste caso, a integração se tornaria muito complexa e inviável analiticamente.

A solução proposta para representar feixes truncados sem empregar cálculos teóricos extensos e morosos ou recorrer a métodos numéricos foi recorrer à superposição discreta de $2N + 1$ FBG de mesma frequência. Assim, tem-se:

$$\Psi(\rho, z) = -\frac{ikA}{2z} e^{ik(z + \frac{\rho^2}{2z})} \sum_{n=-N}^N \frac{A_n}{Q_n} J_0\left(\frac{ikk_\rho \rho}{2zQ_n}\right) \times e^{-\frac{1}{4Q_n}\left(k_\rho^2 + \frac{k^2 \rho^2}{z^2}\right)}, \quad (3)$$

onde A_n são constantes e $Q_n = q_n - ik/2z$. A variável q_n , por sua vez, é definida pela expressão $q_n = q_r - i\frac{2\pi}{L}n$, onde

$q_r > 0$ é a parte real de q_n e é constante para todos os valores de n e L é uma constante com dimensão de comprimento ao quadrado. Os valores de A_n são dados de acordo com

$$A_n = \frac{2 \sinh\left[(q_r - q - i\frac{2\pi}{L}n)R^2\right]}{L(q_r - q) - i2\pi n}. \quad (4)$$

As variáveis a serem determinadas, neste ponto, são as constantes L e q_r . Uma vez definido o valor da largura da Gaussiana, q , de (1) e definido os valores de A_n por (4), as constantes L e q_r devem satisfazer as condições

$$e^{-q_r \rho^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i2\pi n \rho^2 / L} \approx \begin{cases} e^{-q\rho^2}, & \text{se } 0 \leq \rho \leq R \\ 0, & \text{se } R < \rho < \infty. \end{cases} \quad (5)$$

Vale ressaltar que, além do FBG descrito acima, é possível descrever os seguintes feixes ao escolher diferentes valores de q e k_ρ de (1):

- Onda plana truncada (OPT): quando q e k_ρ são iguais a zero;
- FBT: quando $q = 0$ e k_ρ é o número de onda longitudinal do feixe;
- Feixe Gaussiano truncado (FGT): quando $k_\rho = 0$ e q é a largura da Gaussiana desejada.

No caso deste artigo, foram utilizados apenas FB ($q = 0$).

B. Forças Ópticas no Regime de Rayleigh

Para determinar as forças sobre uma partícula de raio a no regime de Rayleigh, usa-se a expressão da i -ésima componente Cartesiana de força média-temporal, derivada dos tensores de Maxwell [16]:

$$F^i = \frac{1}{2} \Re \left\{ \alpha^e E_{0j} \partial^i E_0^{j*} + \alpha^m \eta^2 H_{0j} \partial^i H_0^{j*} - \frac{2k^4}{3} \epsilon^{ijk} \eta \alpha^e E_{0j} (\alpha^m H_{0k})^* \right\}, \quad (6)$$

onde E_{0i}/E_0^i é a i -ésima componente do campo elétrico e, H_{0i}/H_0^i , do campo magnético (tal equação considera polarizações magnéticas, visto que não trata-se somente meios dielétricos); ϵ^{ijk} é o símbolo de Levi-Civita; $\eta = \sqrt{\mu_{ext}/\epsilon_{ext}}$ a impedância intrínseca do meio (sem perdas); e α^e e α^m as polarizabilidades elétrica e magnética dadas por:

$$\alpha^e = a^3 \frac{\epsilon - 1}{(\epsilon + 2) - \frac{2}{3}ik^3 a^3 (\epsilon - 1)} \quad (7)$$

$$\alpha^m = a^3 \frac{\mu - 1}{(\mu + 2) - \frac{2}{3}ik^3 a^3 (\mu - 1)}, \quad (8)$$

sendo ϵ e μ a permissividade e a permeabilidade da partícula em relação ao meio, respectivamente. Observa-se, de (6)–(8), a possibilidade de análise de partículas magnéticas

através de polarizabilidades não nulas. Neste trabalho, todavia, restringimo-nos a partículas dielétricas apenas ($\mu = 1$). Assim, sendo $\alpha^m = 0$, tem-se, de (6),

$$F^i = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \alpha^e E_{0j} \partial^i E_0^{j*} \right\}. \quad (9)$$

Uma vez definida a equação das forças, falta determinar os valores dos campos elétricos e magnéticos. Sem perda de generalidade, assume-se que o campo elétrico, com polarização linear, é dado por $\mathbf{E}(\rho, z) = E_x(\rho, z)\hat{\mathbf{x}} = \Psi(\rho, z)\hat{\mathbf{x}}$, onde $\Psi(\rho, z)$ é dado em (3) e representa um FBG. O correspondente campo magnético pode ser aproximado por $\mathbf{H}(\rho, z) = H_y(\rho, z)\hat{\mathbf{y}} \simeq -i\partial_z\Psi(\rho, z)/\omega\mu_{ext}\hat{\mathbf{y}}$, onde ω é a frequência angular do feixe. Vale ressaltar que as expressões para $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ são válidas apenas no regime paraxial.

Como o foco deste trabalho é sobre forças ópticas longitudinais, a força longitudinal, $F_z(\rho, z)$, é dada, segundo (9), por:

$$F_z(\rho, z) = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \alpha^e E_{0x} \frac{\partial E_{0x}^*}{\partial z} \right\}. \quad (10)$$

III. ANÁLISE NUMÉRICA

A. Definições de Parâmetros

As simulações foram feitas no *software Wolfram Mathematica 10.3*. As características do FBT são mostradas na Tabela I, onde λ representa o comprimento de onda; n_m , o índice de refração do meio; θ , o ângulo de áxicon e $Z_{max} = R/\tan(\theta)$. As variáveis relativas às equações do FBT também são mostradas na Tabela I, e elas foram escolhidas a fim de satisfazerem a condição expressa em (5).

Tabela I: Características do Feixe de Bessel

λ	1064 nm
n_m	1,33 (água)
k	$7,85 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$
θ	16°
k_ρ	$2,16 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$
R	1,0 mm
Z_{max}	3,5 mm
N	100
L	$3R^2$
q	0
q_r	$6/L$

B. Simulações

A Fig. 1 mostra a intensidade normalizada do FBT (definida como o módulo ao quadrado do valor do campo elétrico), em função da distância radial (ρ) e transversal (z), considerando os valores estipulados na Tabela 1. Com o intuito de melhor observar as ondulações do perfil, a distância transversal máxima

escolhida foi de $4 \times \Delta\rho$ ($\approx 5\mu\text{m}$). Observa-se claramente o truncamento do feixe após Z_{max} , por causa da ausência de energia lateral para recomposição de perfil.

Fig. 1: Representação tridimensional do feixe de Bessel Truncado.

A Fig. 2 mostra a intensidade do FBT na abertura (na fonte), que deveria ser uma função de Bessel de ordem zero, e compara com $|J_0(k_\rho\rho)|^2$. Nota-se grande semelhança entre as duas curvas, apesar de a intensidade do FBT ser aproximadamente 3% maior ao redor de $\rho = 0$, devido ao método analítico conter um número finito de FBG em (3) ($2N + 1 = 201$ feixes, de acordo com o valor de N especificado na Tabela I).

Fig. 2: Comparação entre o módulo ao quadrado (intensidade) do campo elétrico do FBT na abertura com uma função de Bessel de ordem zero.

A Fig. 3 mostra a intensidade em toda a abertura. É possível perceber o truncamento do campo elétrico através da inserção em *zoom* no canto superior direito, validando assim a teoria.

Uma vez validado o método, as forças ópticas longitudinais F_z foram calculadas de acordo com (10) (em todos os casos deste trabalho, a força F_z foi calculada no eixo z , ou seja, em $\rho = 0$). Para tanto, o raio da partícula dielétrica foi inicialmente fixado em $a_0 = \lambda/40 \approx 30 \text{ nm}$. O perfil de força é ilustrado na Fig. 4(a) para diferentes índices de refração relativos. As Figs. 4(b) e (c) representam os mesmos perfis para diferentes raios. Em todos os casos, a força $F_z(z)$ é proporcional ao raio da partícula, ou seja, quanto maior o raio, maior é a força sentida. Tal característica é esperada. Entretanto, observamos um grande desvio em relação ao perfil

Fig. 3: Intensidade do FBT na abertura em todo o raio da fonte com e sem zoom. Nota-se que de fato o existiu um truncamento na distância do raio $R = 1$ mm (melhor visto no zoom), como previsto matematicamente.

ideal principalmente conforme a distância z se aproxima de Z_{max} . As oscilações são decorrentes do próprio perfil de intensidade de campo (Fig. 1), refletindo com mais precisão o que deveria ser esperado na prática.

A aproximação de Rayleigh prevê, adicionalmente, comportamentos correspondendo a forças longitudinais negativas, como se vê na Fig. 4. Em especial, na Fig. 4(a), a força se tornou nula em alguns pontos próximos de Z_{max} . Tais pontos são interessantes para aplicações em pinças ópticas, pois representam possíveis pontos axiais de equilíbrio.

Para mostrar a influência do índice de refração relativo na determinação das forças, fez-se um gráfico de gradiente $\epsilon_r \times z$ da força longitudinal com $a_0 = \lambda/40$. O resultado é mostrado na Fig. 5(a). Como era esperado, a força tem módulo nulo quando ϵ_r está próximo da unidade. No entanto, a força se torna mais intensa conforme o índice fica maior ou menor que um. O padrão visto na Fig. 5(a) pode ser comparado com aquele esperado na situação ideal na qual as oscilações em z desaparecem, conforme visto na Fig. 5(b).

Vale ressaltar que a força F_z se torna desprezível depois que a intensidade do FBT se anula também. Mas este caso não é relevante, pois é válido para quaisquer feixes cuja intensidade diminui com a distância.

IV. CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou, pela primeira vez na literatura, o comportamento de forças ópticas longitudinais associadas a feixes de Bessel truncados e escalares em caráter numérico e teórico. Descritos através de expressões analíticas, eles se aproximam de feixes práticos que são, necessariamente, gerados através de aberturas finitas e, portanto, incapazes de manterem seus perfis não difrativos indefinidamente.

O método de Rayleigh permitiu evidenciar discrepâncias significativas entre perfis longitudinais de forças associados a feixes de Bessel ideais e truncados. No segundo caso, as oscilações naturais na intensidade de campo observadas ao longo do eixo óptico se refletem em padrões de força também

Fig. 4: Força transversal em função de diferentes ϵ_r da partícula ($\epsilon_r = 0,8$ - curva em vermelho. $\epsilon_r = 1,5$ - curva em verde). A curva tracejada mostra a intensidade do FBT (foi multiplicado por um certo valor indicado no gráfico para não sobrepor as curvas das forças). (a) Gráfico da força longitudinal para $a=1,0a_0$. (b) Gráfico da força longitudinal para $a=1,5a_0$. (c) Gráfico da força longitudinal para $a=2,0a_0$.

Fig. 5: Gráfico de gradiente $\epsilon_r \times z$ da força longitudinal com $a_0 = \lambda/40$. (a) Para o FBT. As forças maiores que 0,25 estão contidas no grupo das forças de 0,25 (parte vermelha do gráfico). (b) Para um feixe de Bessel ideal com o mesmo comprimento de onda (λ) e número de onda transversal (k_ρ) do FBT.

oscilatórios, com variações mais significativas principalmente na região limite a partir do qual os efeitos da difração se fazem evidentes devido à ausência de recomposição através de energia lateral.

Alguns possíveis pontos de inversão de forças longitudinais foram notadamente observados ao longo do eixo óptico para partículas de dimensões e características eletromagnéticas específicas. Dado que a força radial é atrativa para regiões

de alta intensidade, ou seja, na direção do eixo óptico, tal fato sugere a possibilidade de captura tridimensional utilizando feixes de Bessel simples e práticos, desde que os espalhadores se encontrem próximo à região limite ou de transição do feixe, onde a atenuação por conta dos efeitos da difração destroem o perfil ideal.

Por outro lado, há uma ressalva quanto à validade dos resultados aqui obtidos no que se refere a possíveis pontos de força nula, haja visto o baixo ângulo de áxicon. Primeiramente, estudos adicionais levando-se em conta possíveis efeitos brownianos devem ser realizados. Finalmente, embora interessantes, é imperioso validar os resultados aqui obtidos com aqueles que seriam esperados a partir de um modelo completo para regime óptico arbitrário (teoria generalizada de Lorenz-Mie). Tal análise se encontra atualmente em andamento.

REFERÊNCIAS

- [1] J. A. Stratton, *Electromagnetic theory*. John Wiley & Sons, 2007.
- [2] J. Durnin, "Exact solutions for nondiffracting beams. i. the scalar theory," *JOSA A*, vol. 4, no. 4, pp. 651–654, 1987.
- [3] J. Durnin, J. Miceli Jr, and J. Eberly, "Diffraction-free beams," *Physical Review Letters*, vol. 58, no. 15, p. 1499, 1987.
- [4] R. Herman and T. Wiggins, "Production and uses of diffractionless beams," *JOSA A*, vol. 8, no. 6, pp. 932–942, 1991.
- [5] M. Zamboni-Rached, L. A. Ambrósio, and H. E. Hernández-Figueroa, "Diffraction–attenuation resistant beams: their higher-order versions and finite-aperture generations," *Applied optics*, vol. 49, no. 30, pp. 5861–5869, 2010.
- [6] J. Arlt, V. Garcés-Chavez, W. Sibbett, and K. Dholakia, "Optical micromanipulation using a bessel light beam," *Optics Communications*, vol. 197, no. 4, pp. 239–245, 2001.
- [7] V. Garcés-Chavez, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett, and K. Dholakia, "Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam," *Nature*, vol. 419, no. 6903, pp. 145–147, 2002.
- [8] V. Garcés-Chávez, D. Roskey, M. Summers, H. Melville, D. McGloin, E. Wright, and K. Dholakia, "Optical levitation in a bessel light beam," *Applied physics letters*, vol. 85, no. 18, pp. 4001–4003, 2004.
- [9] M. Zamboni-Rached, E. Recami, and M. Balma, "Simple and effective method for the analytic description of important optical beams when truncated by finite apertures," *Applied optics*, vol. 51, no. 16, pp. 3370–3379, 2012.
- [10] Y. Harada and T. Asakura, "Radiation forces on a dielectric sphere in the rayleigh scattering regime," *Optics communications*, vol. 124, no. 5, pp. 529–541, 1996.
- [11] P. Chaumet and M. Nieto-Vesperinas, "Time-averaged total force on a dipolar sphere in an electromagnetic field," *Optics letters*, vol. 25, no. 15, pp. 1065–1067, 2000.
- [12] A. Rubinov, A. Afanas'ev, I. Ermolaev, Y. A. Kurochkin, and S. Y. Mikhnevich, "Localization of spherical particles under the action of gradient forces in the field of a zero-order bessel beam. rayleigh-gans approximation," *Journal of Applied Spectroscopy*, vol. 70, no. 4, pp. 565–572, 2003.
- [13] L. A. Ambrosio and M. de Matos Ferreira, "Time-average forces over rayleigh particles by superposition of equal-frequency arbitrary-order bessel beams," *JOSA B*, vol. 32, no. 5, pp. B67–B74, 2015.
- [14] J. Goodman, "Introduction to fourier optics," 2008.
- [15] F. Gori, G. Guattari, and C. Padovani, "Bessel-gauss beams," *Optics communications*, vol. 64, no. 6, pp. 491–495, 1987.
- [16] P. C. Chaumet and A. Rahmani, "Electromagnetic force and torque on magnetic and negative-index scatterers," *Optics express*, vol. 17, no. 4, pp. 2224–2234, 2009.

Longitudinal Forces on a Spherical Dielectric Particle Exerted by a Truncated Bessel Beam in the Ray Optics Regime

Pedro Paulo Justino da Silva Arantes, Leonardo André Ambrosio
Department of Electrical and Computer Engineering (SEL)
São Carlos School of Engineering (EESC), University of São Paulo (USP),
400 Trabalhador São-carlense Ave., 13566-590 São Carlos, Brazil.
pedro.arantes@usp.br

Abstract—A first theoretical and numerical treatment of longitudinal forces in an extended geometrical optics model exerted by a truncated Bessel beam (TBB) on a spherical dielectric particle is presented in this work. To describe the TBB, we use a method for spatial beam shaping to describe truncated beams with simplicity and total analyticity in the paraxial approximation, which utilizes a discrete superposition of scalar Bessel Gauss beams. We present numerical examples of longitudinal forces that a TBB exerts on a scatterer and argue about the limitations of this method. We also briefly discuss about further possible analysis that can be done with TBB and other truncated beams.

Keywords— Lasers. Optical beams. Optical diffraction. Electromagnetic forces. Geometrical optics.

I. INTRODUCTION

Since the first experiments performed by A. Ashkin and others involving the use of lasers for trapping biological particles [1], [2], optical tweezers have been the subject of intensive studies and applications [3]–[10]. Due to its non-invasive features, it has been used in non-contact and non-damage applications, in particular at biomedical optics field, such as manipulation of bacterias and viruses [7], induced cell fusion [11], microscopic observation of living cells [8], [12], chromosome movement [13], DNA insertion in a single cell among others [14], [15]. Besides biology, there are applications in physics and chemistry's branches, like support on macromolecular interactions analysis in colloidal solutions [16], [17] or studies on the vibration dynamics and fluctuations of microtubules field [18]. More recently, optical tweezers served as a valuable tool in evidencing violations to the Second Law of Thermodynamics over extremely short time intervals [19].

Most published reports about optical tweezers found on the literature use a Gaussian beam (GB) for its analysis. Other that is commonly found is a Bessel Beam (BB) [20]–[22] because of its self-reconstructing and non diffractive properties [23], [24]. However, as far as we know, these works consider the BBs as ideal ones, that is, they differ from a real beam

in respect to its opening aperture radius. The former has an infinite radius, which means that it receives an infinite amount of energy from its source and, therefore, propagates indefinitely; the latter has a finite opening radius, finite energy and propagates up to a maximum distance Z_{max} . Real BB is also called truncated Bessel beam (TBB).

Studies with real beams, until now, fall back on the resolution of diffraction's integrals, like Rayleigh-Sommerfeld formula [25, Chap 4], in order to represent a finite-aperture beam. Nevertheless, there are cases in which these integrals do not provide an analytical expression and a BB is one of them. To overcome this problem, we use a method for spatial beam shaping developed by Zamboni-Rached et al. [26], which describes truncated beams with simplicity and total analyticity in the paraxial approximation, utilizing a discrete superposition of scalar Bessel Gauss beams.

Due to the relevance of optical trapping systems and its applications aiming to bringing theoretical descriptions into closer contact with actual laser beams found in the laboratory, the purpose of the present work is to perform theoretical and numerical analysis of optical forces exerted on dielectric particles by real, finite energy scalar BBs, whose fields can be described analytically [26]. To the best of the authors' knowledge, this is the first attempt towards the incorporation of truncated beams in optical force calculations in the ray optics regime. The authors had already done some work with optical force calculation for TBB in the Rayleigh approximation [27].

Firstly, in this work, we revised how TBBs can be described using the method commented above, eliminating the diffraction's integrals' need. Afterward, we study how to calculate optical forces in dielectric spherical particles using TBBs in the paraxial approximation. We also assume the particle radius to be much greater than the wavelength of the incident wave, thus focusing on the geometrical optics regime. Subsequently, numerical results and examples are presented, followed by our conclusions.

This work was developed from FAPESP resources (project no. 2014/04867-1) and was supported by CAPES (masters scholarship of Pedro Paulo Justino da Silva Arantes).

II. THEORY

A. Truncated Bessel Beam

A scalar TBB in the paraxial regime can be represented by a superposition of distinct Bessel-Gauss beams (BGBs) [26]. A BGB is defined, at the $z = 0$ plane, as a BB apodized by a Gaussian function, whose propagation is taken along $+z$ [28]:

$$\psi_{BG}(\rho, z = 0) = AJ_0(k_\rho \rho) e^{-q\rho^2}, \quad (1)$$

where A is the intensity of the incident field; J_0 zeroth-order Bessel function of the first kind; k_ρ transverse wave number of the propagating wave and q a Gaussian function parameter. The temporal factor $\exp(-i\omega t)$ is omitted for simplicity. As much as the paraxial regime is sub-intended, our analysis is therefore limited to small axicon angles [23].

To represent a BGB over all coordinates, we apply $\psi_{BG}(\rho, z = 0)$ on Fresnel diffraction integral [25], whose final results is [26]:

$$\begin{aligned} \psi_{BG}(\rho, z) = & -\frac{ikA}{2zQ} e^{ik(z + \frac{\rho^2}{2z})} J_0\left(\frac{ikk_\rho \rho}{2zQ}\right) \\ & \times e^{-\frac{1}{4Q}(k^2 + \frac{k^2 \rho^2}{z^2})}, \end{aligned} \quad (2)$$

where $Q = q - ik/2z$ and k is the wave number.

The proposed solution to represent truncated beams analytically uses a discrete superposition of $2N + 1$ equal-frequency BGBs. Thus, we have:

$$\begin{aligned} \Psi(\rho, z) = & -\frac{ik}{2z} e^{ik(z + \frac{\rho^2}{2z})} \sum_{n=-N}^N \frac{A_n}{Q_n} J_0\left(\frac{ikk_\rho \rho}{2zQ_n}\right) \\ & \times e^{-\frac{1}{4Q_n}(k^2 + \frac{k^2 \rho^2}{z^2})}, \end{aligned} \quad (3)$$

in which A_n are a complex constant and $Q_n = q_n - ik/2z$. q_n is defined by $q_n = q_r - i2\pi n/L$, in which $q_r > 0$ is the real part of q_n and L is a constant with dimensions of length squared. A_n is given by [26]

$$A_n = \frac{2 \sinh[(q_R - q - i\frac{2\pi}{L}n)R^2]}{L(q_R - q) - i2\pi n}. \quad (4)$$

Heretofore, the variables that must be determined are L and q_r . Once we have defined q from (1) and A_n from (4), L and q_r must satisfy the following condition:

$$\begin{aligned} e^{-q_r \rho^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i2\pi n \rho^2 / L} & \approx \\ \approx \begin{cases} e^{-q_r \rho^2}, & \text{if } 0 \leq \rho \leq R \\ 0, & \text{if } R < \rho < \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

It is possible to represent other truncated beams by requiring q and k_ρ to obey the following conditions [see Eq. (1)]:

- Truncated plane wave (TPW): when q and k_ρ are zero;
- TBB: when $q = 0$ and k_ρ is its transverse wave number;
- truncated Gaussian beam (TGB): when $k_\rho = 0$ and $q = 1/\omega_0^2$, in which ω_0 is the desired TGB beam waist;
- truncated Bessel-Gaussian beam (TBGB): when k_ρ is the BGB transverse wave number and $q = 1/\omega_0^2$, in which ω_0 is the desired BGB beam waist.

B. Ray Optics Forces on Spherical Particles

Consider a laser beam, whose aperture is parallel to the xy plane and with center at $C_a = (x_0, y_0, z_0)$. It illuminates a spherical dielectric particle fixed at the origin of the coordinate system $O = (0, 0, 0)$ with radius R_p and refractive index n_p . The host medium is water, whose refractive index is 1.33.

It is well-known that light carries momentum [29] which can be transferred to objects. When a light ray hits a bead, there is linear momentum transfer between them, with the consequence that the former will exert an optical force on the latter. To illustrate this, Fig. 1 shows a single ray p_i , whose direction is $\hat{k}_0$, with power density dP_i impacting on a spherical particle surface at point A whose normal is $\hat{n}_0$. The multiple rays reflected and refracted at the surface of the scatterer are labeled according to its power density. We denote by T and R the transmissivity and reflectivity Fresnel coefficients, respectively, at medium-particle interface, and by θ_i and θ_r the angles of incidence and refraction.

Fig. 1: Schematic diagram of the propagation of a light ray in a dielectric spherical particle.

It can be shown that the radiation pressure $d\vec{F}$ exerted by p_i , firstly calculated by Roosen [30] and Ashkin [9], is given by [31]:

$$d\vec{F} = \frac{n_m}{c} [\text{Re}(Q_t) \hat{k}_0 + \text{Im}(Q_t) \hat{d}_0] dP_i, \quad (6)$$

where $\hat{k}_0$ is given by the phase gradient of Ψ and $\hat{d}_0$ is the orthonormal vector with respect to $\hat{k}_0$, given by:

$$\hat{d}_0 = \frac{\hat{n}_0 - (\hat{n}_0 \cdot \hat{k}_0) \hat{k}_0}{|\hat{n}_0 - (\hat{n}_0 \cdot \hat{k}_0) \hat{k}_0|}, \quad (7)$$

and Q_t by [32]:

$$Q_t = 1 + Re^{-i2\theta_i} - T^2 \frac{e^{-i2(\theta_i - \theta_r)}}{1 + Re^{i2\theta_r}}. \quad (8)$$

The transmissivity and reflectivity can be written as [33, Chap 1]:

$$R(\theta_i, \theta_r) = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_r)}{\sin^2(\theta_i + \theta_r)} \sin^2 \beta + \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_r)}{\tan^2(\theta_i + \theta_r)} \cos^2 \beta, \quad (9)$$

in which β is the crossing angle between the electric field direction and the normal to the plane of incidence (plane in which $\hat{k}_0$, $\hat{d}_0$ and $\hat{n}_0$ are contained [33, Chap 1]) and

$$T(\theta_i, \theta_r) = 1 - R(\theta_i, \theta_r). \quad (10)$$

The resultant optical force exerted by the laser is obtained by integrating (6) over all the surface of particle which is effectively illuminated by the beam (the region in which $\hat{k}_0 \cdot (-\hat{n}^0) \geq 0$). To do so, we need to know the power density carried by each ray. In this work, we suppose that the electric field is given by $\vec{E}(\rho, z) \propto \Psi(\rho, z) \hat{x}$, in which $\Psi(\rho, z)$ is given by (3). Therefore, the power density P_i is:

$$dP_i = \vec{S} \cdot d\vec{A} = |\vec{S}| \cos \theta_i dA \propto |\vec{E}|^2 \cos \theta_i \sin \theta d\theta d\phi, \quad (11)$$

in which $\vec{S}$ is the Poynting vector and θ and ϕ are azimuthal and polar angles of the spherical coordinates. From now on, we shall consider only normalized fields, which means that the intensity of a corresponding ideal BB is taken as being unitary.

III. RESULTS

To perform the numerical analysis of optical forces exerted on dielectric particles, we define a TBB with vacuum wavelength $\lambda_0 = 1064$ nm, aperture radius $R = 1$ mm, $L = 3R^2$, $q_r = 6/L$, axicon angle $\theta_a = 6^\circ$, $q = 0$ and $N = 21$ (thus, we have $2N + 1 = 43$ different BGBs). These conditions lead to $Z_{max} = 9.51$ mm. We also supposed that the electric field of our TBB is linearly polarized in $\hat{x}$, that is, $\vec{E}(\rho, z) = \Psi(\rho, z) \hat{x}$, in which $\Psi(\rho, z)$ is given by (3). The intensity of our corresponding TBB can be seen in Fig. 2.

In our first analysis, we suppose that the TBB impinges on a spherical dielectric particle with radius $R_p = 18$ μm . The longitudinal force exerted on this scatterer is sketched in Fig. 3 for three relative (to water) refractive indices ($n_{rel} = 0.95$, 1.01, and 1.20). Fig. 3 shows that the slopes resemble with the TBB slope in $\rho = 0$, whose typical oscillations along $+z$ are closer of those observed experimentally, in contrast with the ideal case, in which the force magnitude does not change over the propagation. This result was expected for a

Fig. 2: TBB with vacuum wavelength $\lambda_0 = 1064$ nm, medium refractive index $n_m = 1.33$, aperture radius $R = 1$ mm, $L = 3R^2$, $q_r = 6/L$, axicon angle $\theta_a = 6^\circ$, constant $q = 0$ and $N = 21$.

real BB because of the scatter force's predominance as long as the axicon angle is small, which implies in a TBB with an extended focus.

Fig. 3: Longitudinal force for the TBB over a dielectric spherical particle with radius $R_p = 18$ μm in function of z_0 with $x_0 = 0$ and $y_0 = 0$. Three different n_{rel} are shown. For visualization purposes, slope $n_{rel} = 1.01$ is scaled by factor of 10.

To deepen in our longitudinal force analysis, Fig. 4 shows the contribution of each term of (8) for the same three particles defined before. We call the terms 1, $R \exp(-i2\theta_i)$ and $T^2 \exp[-i2(\theta_i - \theta_r)]/[1 + R \exp(i2\theta_r)]$ of (8) as incident, reflection and transmission contribution respectively. We

observe, as expected, the incident contribution has the same value for the three beads; the reflection contribution has its magnitude much smaller compared with the other two and transmission has a small variation for each particle. Finally, we can infer that the three terms are proportional to $|\Psi|^2$, which leads to the longitudinal force F_z being proportional to the intensity and, therefore, never cross $F_z = 0$.

(a) $n_{rel} = 0.95$

(b) $n_{rel} = 1.01$

(c) $n_{rel} = 1.2$

Fig. 4: Decomposition of the longitudinal force for the TBB over a dielectric spherical particle with radius $R_p = 18 \mu\text{m}$ in function of z_0 with $x_0 = 0$ and $y_0 = 0$. Three different n_{rel} are shown: (a) for $n_{rel} = 0.95$, (b) for $n_{rel} = 1.01$ and (c) for $n_{rel} = 1.2$. For visualization purposes, reflection slope is scaled by factor of 10.

The longitudinal force when the beam aperture is fixed at $z_0 = -Z_{max}$ and moved along x axis is shown in Fig. 5, for

the particle defined before. As we can see, there is not a point of stable equilibrium when the aperture is moving transversely. It is worth to point that longitudinal forces reaches a maximum value when $x_0 = \pm R_p$.

Fig. 5: Longitudinal force for the TBB over a dielectric spherical particle with radius $R_p = 18 \mu\text{m}$ in function of x_0 with $y_0 = 0$ and $z_0 = 0$. Three different n_{rel} are shown. For visualization purposes, slope $n_{rel} = 1.01$ is scaled by factor of 10.

IV. CONCLUSION

For the small axicon angles adopted in our analysis, points of stable equilibrium along $+z$ did not occur, as expected. To observe such points, it is imperative to increase the axicon angle, thus forcing us to abandon the paraxial regime altogether. But doing that involves dealing with full vector beams. Since the original method deals exclusively with scalar beams, such a situation turns out to be out of the scope of the present work. It can and must, however, be considered elsewhere.

From this first attempt towards the incorporation of TBBs in optical force calculations under the ray optics regime, we can see clearly that it is possible to extend this analysis to others truncated beams like TGBs and TBGBs. Furthermore, one must also consider the behavior of the transverse forces, and the consequences of introducing losses. This is currently in progress.

REFERENCES

- [1] A. Ashkin, "Atomic-beam deflection by resonance-radiation pressure," *Physical Review Letters*, vol. 25, no. 19, p. 1321, 1970.
- [2] —, "Acceleration and trapping of particles by radiation pressure," *Physical review letters*, vol. 24, no. 4, p. 156, 1970.
- [3] —, "History of optical trapping and manipulation of small-neutral particle, atoms, and molecules," *Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of*, vol. 6, no. 6, pp. 841–856, 2000.
- [4] A. Ashkin and J. Dziedzic, "Optical levitation by radiation pressure," *Applied Physics Letters*, vol. 19, no. 8, pp. 283–285, 1971.
- [5] —, "Optical levitation of liquid drops by radiation pressure," *Science*, vol. 187, no. 4181, pp. 1073–1075, 1975.
- [6] A. Ashkin, J. Dziedzic, J. Bjorkholm, and S. Chu, "Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles," *Optics letters*, vol. 11, no. 5, pp. 288–290, 1986.
- [7] A. Ashkin and J. Dziedzic, "Optical trapping and manipulation of viruses and bacteria," *Science*, vol. 235, no. 4795, pp. 1517–1520, 1987.
- [8] A. Ashkin, J. Dziedzic, and T. Yamane, "Optical trapping and manipulation of single cells using infrared laser beams," *Nature*, vol. 330, no. 6150, pp. 769–771, 1987.

- [9] A. Ashkin, "Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime," *Biophysical journal*, vol. 61, no. 2, p. 569, 1992.
- [10] —, "Optical trapping and manipulation of neutral particles using lasers," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 94, no. 10, pp. 4853–4860, 1997.
- [11] R. W. Steubing, S. Cheng, W. H. Wright, Y. Numajiri, and M. W. Berns, "Laser induced cell fusion in combination with optical tweezers: the laser cell fusion trap," *Cytometry*, vol. 12, no. 6, pp. 505–510, 1991.
- [12] V. Emiliani, D. Cojoc, E. Ferrari, V. Garbin, C. Durieux, M. Coppey-Moisan, and E. Di Fabrizio, "Wave front engineering for microscopy of living cells," *Optics Express*, vol. 13, no. 5, pp. 1395–1405, 2005.
- [13] M. W. Berns, W. H. Wright, B. J. Tromberg, G. A. Profeta, J. J. Andrews, and R. J. Walter, "Use of a laser-induced optical force trap to study chromosome movement on the mitotic spindle," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 86, no. 12, pp. 4539–4543, 1989.
- [14] M. Waleed, S.-U. Hwang, J.-D. Kim, I. Shabbir, S.-M. Shin, and Y.-G. Lee, "Single-cell optoporation and transfection using femtosecond laser and optical tweezers," *Biomedical optics express*, vol. 4, no. 9, pp. 1533–1547, 2013.
- [15] G. Wright, M. J. Tucker, P. C. Morton, C. L. Sweitzer-Yoder, and S. E. Smith, "Micromanipulation in assisted reproduction: A review of current technology," *Current Opinion in Obstetrics and Gynecology*, vol. 10, no. 3, pp. 221–226, 1998.
- [16] J. C. Crocker and D. G. Grier, "Microscopic measurement of the pair interaction potential of charge-stabilized colloid," *Physical review letters*, vol. 73, no. 2, p. 352, 1994.
- [17] D. G. Grier, "Optical tweezers in colloid and interface science," *Current opinion in colloid & interface science*, vol. 2, no. 3, pp. 264–270, 1997.
- [18] O. Kučera, D. Havelka, and M. Cifra, "Vibrations of microtubules: Physics that has not met biology yet," *Wave Motion*, 2016.
- [19] G. Wang, E. M. Sevick, E. Mittag, D. J. Searles, and D. J. Evans, "Experimental demonstration of violations of the second law of thermodynamics for small systems and short time scales," *Physical Review Letters*, vol. 89, no. 5, p. 050601, 2002.
- [20] L. A. Ambrosio and H. E. Hernández-Figueroa, "Integral localized approximation description of ordinary bessel beams and application to optical trapping forces," *Biomedical optics express*, vol. 2, no. 7, pp. 1893–1906, 2011.
- [21] —, "Gradient forces on double-negative particles in optical tweezers using bessel beams in the ray optics regime," *Optics express*, vol. 18, no. 23, pp. 24 287–24 292, 2010.
- [22] —, "Radiation pressure cross sections and optical forces over negative refractive index spherical particles by ordinary bessel beams," *Applied optics*, vol. 50, no. 22, pp. 4489–4498, 2011.
- [23] J. Durnin, J. Miceli Jr, and J. Eberly, "Diffraction-free beams," *Physical Review Letters*, vol. 58, no. 15, p. 1499, 1987.
- [24] J. Durnin, "Exact solutions for nondiffracting beams. i. the scalar theory," *JOSA A*, vol. 4, no. 4, pp. 651–654, 1987.
- [25] J. Goodman, "Introduction to fourier optics," 2008.
- [26] M. Zamboni-Rached, E. Recami, and M. Balma, "Simple and effective method for the analytic description of important optical beams when truncated by finite apertures," *Applied optics*, vol. 51, no. 16, pp. 3370–3379, 2012.
- [27] P. P. J. S. Arantes and L. A. Ambrosio, "Cálculo de forças ópticas no regime de rayleigh usando soluções analíticas para feixes de bessel escalares e truncados," *MOMAG*, 2016.
- [28] F. Gori, G. Guattari, and C. Padovani, "Bessel-gauss beams," *Optics communications*, vol. 64, no. 6, pp. 491–495, 1987.
- [29] J. H. Poynting, "On the transfer of energy in the electromagnetic field," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 175, pp. 343–361, 1884.
- [30] G. Roosen, "La levitation optique de spheres," *Canadian Journal of Physics*, vol. 57, no. 9, pp. 1260–1279, 1979.
- [31] M. Rocha, "Optical tweezers for undergraduates: theoretical analysis and experiments," *American Journal of Physics*, vol. 77, no. 8, pp. 704–712, 2009.
- [32] Y. Zhang, Y. Li, J. Qi, G. Cui, H. Liu, J. Chen, L. Zhao, J. Xu, and Q. Sun, "Influence of absorption on optical trapping force of spherical particles in a focused gaussian beam," *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, vol. 10, no. 8, p. 085001, 2008.
- [33] M. Born and E. Wolf, *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. CUP Archive, 2000.

On Circularly Symmetric Frozen Waves and their Optical Forces in Optical Tweezers Using a Ray Optics Approach

Amélia Moreira Santos, Pedro Paulo Justino da Silva Arantes and Leonardo André Ambrosio

Department of Electrical and Computer Engineering (SEL)

São Carlos School of Engineering, University of São Paulo (EESC/USP)

São Carlos, Brazil

ameliams@usp.br, arantespp@gmail.com and leo@sc.usp.br

Abstract—In this work we analyze, in the ray optics regime, the optical forces exerted on micro-sized dielectric spheres due to optical beams created as suitable discrete superpositions of scalar and vector Bessel beams - also known as frozen waves, thus envisioning applications in optical tweezers. Scalar frozen waves have been recently and theoretically introduced as auxiliary optical fields in the trapping and manipulation of neutral particles paper in both the Rayleigh (dipole) and the Mie regimes, the latter demanding a full electromagnetic treatment. Here, the extension of previous studies is twofold in the sense that we perform investigations both in the ray optics regime, which has only been previously considered in terms of simplistic models, and in terms of a vector approach which allows us to go beyond the paraxial approximation.

Index Terms—Mie theory, optical trapping and micromanipulation, scattering theory.

I. INTRODUCTION

The first experimental evidences that a Bessel beam (BB) could optically manipulate a micro-sized dielectric particle was provided by Arlt et al. in 2001 [1]. Originally developed as a technique for confining particles at the focus of a laser (Gaussian) beam, optical tweezers have greatly benefited from the advantages presented by BBs [1]–[4]. Indeed, their extended focus, multi-ringed and self-healing properties have been used, among others, for the purpose of providing simultaneous traps at multiple transverse planes [2], [5], [6]. But at the same time, it has been observed that longitudinal gradient forces are incapable of compensating for the scattering forces, thus revealing the impossibility of creating effective three-dimensional traps with single BBs (a single BB is a non-focused beam with constant laser power. For instance, changing the power and/or using an optical levitation trap together with a low numerical aperture microscope objective may indeed provide a three-dimensional trap - see Ref. [7] and references therein).

The possibility of having an optical field possessing, in addition to all non-diffracting properties attributable to BBs, a degree of freedom in the design of its longitudinal intensity pattern was theoretically considered perhaps for the first time

by Zamboni-Rached in 2004 [8]. Taking the ideal scalar BB as a starting point, he demonstrated that virtually any desired longitudinal intensity pattern could be created by taking suitable discrete superpositions of such beams. The resulting field, widely known as a frozen wave (FW), involved $2N + 1$ BBs with the same order and frequency, but with distinct longitudinal (or radial) wave numbers [8]–[11]. Experimental generations of finite-energy FWs with arbitrary or mixed order have been realized with distinct and interesting longitudinal patterns for optical communications, optical trapping and atom guiding in both lossless or absorbent media [12]–[16].

Recently, Ambrosio et al. introduced arbitrary-order scalar FWs in optical trapping by evaluating their optical forces exerted over micro-sized dielectric spherical particles, using either a dipole approximation (Rayleigh regime) or by taking the full electromagnetic theory into account (which, for spheres, is represented by generalized Lorenz-Mie theories, GLMT [17]) [18]–[20]. The idea is to have a new and alternative laser beam for optical trapping biological particles which possess all the advantageous non-diffracting properties established for BBs and, at the same time, provides the necessary longitudinal gradient forces so as to balance scattering forces by means of specific longitudinal field intensity patterns [18].

In the ray optics regime, a first investigation of FWs and optical forces over dielectric spheres was recently put forward by us using a simple method based on parallel rays of distinct power [21]. In this case it is immediate to conclude, however, that only radial forces can be inferred from such an approach, and that highly paraxial beams are implicitly mandatory. The most notable feature of FWs, viz. the ability to provide longitudinal intensity patterns of arbitrary shape, cannot be incorporated and analyzed.

Regardless of the optical regime (Rayleigh, Mie or ray optics), so far all attempts towards the theoretical introduction of FWs in optical tweezers systems have been restricted to the paraxial regime. The scalar FWs are taken as the transverse electric field component of the incident beam, the longitudinal component being simply neglected (approximately evaluated

L. A. Ambrosio thanks FAPESP (project no. 2016/11174-8). P. P. J. S. Arantes and A. M. Santos thank CAPES (masters scholarship).

in the framework of the GLMT). This poses serious restrictions on the possibility of getting highly efficient three-dimensional traps. At the same time, there is still the need for a more reliable treatment of the optical forces in the ray optics regime, since even when paraxiality conditions are satisfied, non-parallel rays must be enforced so as to correctly account for the physical properties of interest.

In view of that, this paper addresses the two issues aforementioned. First, we extend our previous analysis of paraxial FWs by considering a rigorous ray optics model in order to calculate the optical forces exerted over dielectric spheres whose radius are much larger than the wavelength. Then, for the first time in the literature, we go beyond the paraxial regime and consider vector FWs with zero-order BBs of arbitrary half-cone angles, thus clearly showing the ability of FWs to effectively trap particles in 3D-fashion.

The next Section shows some mathematical aspects of scalar and vector FWs, together with a brief review on how optical forces emerge from the linear momentum transfer between light and matter, based on a simple multiple reflection/transmission diagram. All beams are assumed ideal in the sense that they carry an infinite amount of energy. Section III then presents some examples of particular FWs and their corresponding radial and longitudinal optical forces as functions of the relative refractive index and the relative distance of the particle. Finally, we present our conclusions.

II. MATHEMATICAL ASPECTS OF FWs AND OPTICAL FORCES IN THE RAY OPTICS REGIME

A. Frozen Waves

A vector FW can be constructed from a discrete sum of $2N + 1$ vector BBs. Since a particular polarization must be chosen, we have to define which vector BBs may be of interest for (i) theoretical analysis of light scattering in the ray optics approach, (ii) a full electromagnetic approach based on the GLMT with an exact and possibly analytical description of the incident field, and (iii) practical use. Gathering all the aforementioned conditions, one is induced to consider optical beams with circularly symmetric polarization. Circularly symmetric BBs are vector beams whose electric and magnetic field components have been symmetrized [22], [23]. They are important solutions to the Maxwell's equations possessing azimuthally symmetric Poynting vector power densities, being easily incorporated in our theoretical and numerical study of light scattering by large particles.

Let us superpose $2N + 1$ circularly symmetric zero-order (vector) BBs. Relying on expressions available in the literature for their field components [23], we derived the following expressions for the field components of a circularly symmetric zero-order FW with polarization (1,0) (which is a reminiscent of linear polarization):

$$E_x^{(1,0)} = \sum_{q=-N}^N \bar{A}_q g(\alpha_q) e^{-jk_{zq}z} \{ (1 + \cos \alpha_q) J_0(\sigma_q) + \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha_q) [e^{j2\phi} J_2(\sigma_q) + e^{-j2\phi} J_{-2}(\sigma_q)] \}, \quad (1)$$

$$E_y^{(1,0)} = \sum_{q=-N}^N \bar{A}_q g(\alpha_q) e^{-jk_{zq}z} \frac{1}{2j} (1 - \cos \alpha_q) \times [e^{j2\phi} J_2(\sigma_q) - e^{-j2\phi} J_{-2}(\sigma_q)], \quad (2)$$

$$E_z^{(1,0)} = j \sum_{q=-N}^N \bar{A}_q g(\alpha_q) e^{-jk_{zq}z} \sin \alpha_q \times [e^{j\phi} J_1(\sigma_q) - e^{-j\phi} J_{-1}(\sigma_q)], \quad (3)$$

$$B_x^{(1,0)} = \frac{k}{\omega} \sum_{q=-N}^N \bar{A}_q g(\alpha_q) e^{-jk_{zq}z} \frac{1}{2j} (1 - \cos \alpha_q) \times [e^{j2\phi} J_2(\sigma_q) - e^{-j2\phi} J_{-2}(\sigma_q)], \quad (4)$$

$$B_y^{(1,0)} = \frac{k}{\omega} \sum_{q=-N}^N \bar{A}_q g(\alpha_q) e^{-jk_{zq}z} (1 + \cos \alpha_q) J_0(\sigma_q) - \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha_q) [e^{j2\phi} J_2(\sigma_q) + e^{-j2\phi} J_{-2}(\sigma_q)], \quad (5)$$

$$B_z^{(1,0)} = \frac{k}{\omega} \sum_{q=-N}^N \bar{A}_q g(\alpha_q) e^{-jk_{zq}z} \sin \alpha_q \times [e^{j\phi} J_1(\sigma_q) - e^{-j\phi} J_{-1}(\sigma_q)], \quad (6)$$

In (1)-(6), $\bar{A}_q = A_q / [g(\alpha_q)(1 + \cos \alpha_q)]$, $\alpha_q = k_{\rho q} \rho$ and $g(\alpha_q) = (1 + \cos \alpha_q)/4$, A_q being the complex coefficient of the q -th scalar BB of a corresponding scalar FW [8]. A scalar zero-order $\psi(\rho, z) = E_x^{(1,0)}$ can be recovered if the paraxial conditions $\cos \alpha_q \rightarrow 1$ and $\sin \alpha_q \rightarrow 0$ are imposed in (1)-(6), thus reducing the set (1)-(6) to a single solution of the scalar wave equation. This is the FW which has been, so far, considered.

A vector FW with circularly symmetric polarization is new in the literature. Although not carrying any topological charge - therefore being incapable of transferring orbital angular momentum - they shall be the first truly vector FW to be incorporated into theoretical and numerical investigations of the optical forces exerted by FWs on spherical dielectric particles. For very large particles in comparison with the wavelength, once the electric and magnetic field components are known, a ray optics model may be constructed to calculate the radial and longitudinal optical forces exerted by the vector FW described by (1)-(6).

B. Forces on Spherical Particles in the Ray Optics Regime

When a light ray hits an interface between two media with different optical impedances, it has a deviation in its direction. As a consequence, it suffers a variation of linear momentum such that, according to Newton's equations of motion, a force arises on an interface in opposition to the variation of the momentum of the light ray itself [2], [18], [24]. The total force that a light beam applies to an object depends on the characteristics of the two media, the geometry of the scatterer and the angle of incidence. Therefore, in the case of spherical scatterers, a multiple reflection/refraction diagram showing the directions of all subsequent rays may be constructed from which a mathematical description may be given of the optical forces caused by light on very large spheres [25].

Fig. 1: Schematic diagram of the propagation of a light ray in a dielectric spherical particle.

Let us write $\vec{p}_i$ for the momentum associated with a particular incident ray, $\vec{p}_r$ being the momentum of the first reflected ray, as shown in Fig. 1 at point A. The ray transmitted into the sphere is again reflected at point B, giving rise to an exiting ray called the first transmitted ray across the sphere, carrying a momentum $\vec{p}_{t1}$. The n -th exiting ray has a momentum $\vec{p}_{tn}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. The incidence and refraction angles at point A are designated as θ_i and θ_r , respectively.

It is seen from Fig. 1 that the direction of power flow associated with p_i is $\hat{k}_0$. Let $\hat{d}_0$ represent a direction perpendicular to $\hat{k}_0$ and $\hat{n}_0$ the unit vector normal to the surface of the particle at the impinging point A. Since $\hat{k}_0$, $\hat{d}_0$ and $\hat{n}_0$ are coplanar, one may immediately determine $\hat{d}_0$ after subtracting from $\hat{n}_0$ the contribution of $\hat{k}_0$ along $\hat{n}_0$, after proper normalization, i.e., $\hat{d}_0 = [\hat{n}_0 - (\hat{n}_0 \cdot \hat{k}_0)\hat{k}_0] / |\hat{n}_0 - (\hat{n}_0 \cdot \hat{k}_0)\hat{k}_0|$ [26].

We can now explicitly determine the direction of the reflected ray in terms of $\hat{k}_0$. In fact, it is easy to see from Fig. 1 that $\vec{p}_r$ is found after performing on $-\hat{k}_0$ a clockwise rotation of $2\theta_i$. Being $\vec{p}_i = (n_m/c)E_i\hat{k}_0$, where n_m is the refractive index of the host medium, c the speed of light in vacuum and E_i the energy of the incident ray, $\vec{p}_r$ is written as

$$\vec{p}_r = \vec{p}_{o0} = -\frac{n_m R E_i}{c} e^{-j2\theta_i} \hat{k}_0. \quad (7)$$

In (7), R is the reflection Fresnel coefficient (reflectivity). In the same token, $\hat{k}_{tn}$ is found to be given by

$$\hat{k}_{tn} = \hat{k}_{on} = -\hat{k}_0 e^{-j2\theta_i} e^{-jn(\pi-2\theta_r)}, \quad (8)$$

from which $\vec{p}_{tn}$ may be explicitly written in terms of $\hat{k}_0$ once the transmission Fresnel coefficient T is introduced. Let us here suppose both perpendicular ($\perp$) or parallel ($\parallel$) polarizations, that is [26], [27], $R = R_\perp \cos^2 \beta + R_\parallel \sin^2 \beta$ and $T = T_\perp \cos^2 \beta + T_\parallel \sin^2 \beta$, where $R_\perp$ and $R_\parallel$ ($T_\perp$ and $T_\parallel$) are the reflection (transmission) Fresnel coefficients for perpendicular and parallel polarizations, respectively (obviously, with respect to the $\hat{k}_0 \times \hat{d}_0$ plane). The crossing angle between the polarization direction of the incident ray and the abovementioned plane is β . One is now at position to calculate the force $\vec{F}_{ray} = d\vec{p}_{part}/dt$, where $\vec{p}_{part}$ is the change of momentum of the particle. Collecting all transmitted rays and making use of (7) and (8), [26],

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ray} &= \frac{d}{dt} \vec{p}_{part} = \frac{d}{dt} \left(\frac{n_m}{c} E_i \hat{k}_0 - \frac{n_m}{c} \sum_{n=0}^{\infty} E_{on} \hat{k}_{on} \right) \\ &= \frac{n_m P_i}{c} \left[1 + R e^{-j2\theta_i} - T^2 \frac{e^{-j2(\theta_i-\theta_r)} e^{-\alpha l}}{1 + R e^{-\alpha l} e^{j2\theta_r}} \right] \hat{k}_0. \end{aligned} \quad (9)$$

In (9), the energy of each exiting ray is compactly represented as E_{on} (so that E_{o0} is the energy of the ray reflected at A, E_{o1} the energy of the ray transmitted at B, and so on). The time rate of change of E_i is the incident power P_i .

Once the force of a single ray has been found, the total force exerted by the beam may be calculated by supposing (9) to be the differential force contribution at A, a specific point on the surface of the sphere. An integration over the surface of the sphere under illumination, with the aid of a spherical coordinate system (r, θ, ϕ) with origin at the center of the particle, then gives us [28]

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \hat{k}_0 \frac{n_m}{c} \iint_{\delta(\theta, \phi)} |\psi(\theta, \phi)|^2 \left[1 + R e^{-j2\theta_i} \right. \\ &\quad \left. - T^2 \frac{e^{-j2(\theta_i-\theta_r)} e^{-\alpha l}}{1 + R e^{-\alpha l} e^{j2\theta_r}} \right] \cos \theta_i R_p^2 \sin \theta d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (10)$$

where $\delta(\theta, \phi)$ is the surface of the scatterer under illumination and is determined by the physical observation that the region $-\hat{k}_0 \cdot \hat{n}_0 < 0$ is not hit by the beam [26].

III. NUMERICAL RESULTS AND ANALYSIS

In this section we present two examples of circularly symmetric zero-order FWs and their associated optical forces, the first having a constant and the second a sinusoidal longitudinal intensity pattern $F(z)$. In all simulations, the wavelength $\lambda = 1064$ nm, $n_m = 1.33$ (water) and the radius of the particle is fixed at $R_a = 20$ μm .

The coefficients $\bar{A}_q$ in (1)-(6) are easily determined from procedures available in previous works [8]. For the constant profile, we take $F(z) = 1$, $|z| \leq 0.1L$, $L = 50$ mm, $N = 25$. The maximum α_q is 2.56° for $q = -25$. The resulting electric field intensity $I(\rho, z)$ is shown in Fig. 2. The oscillations are a consequence of a finite N (the higher the N , the closer to a true constant pattern for $|z| \leq 0.1L$). In Fig. 3 we show the longitudinal optical forces exerted in our lossless particle as the beam is shifted along z by z_0 , for three distinct relative refractive indices. Solid black lines represent the exact values as calculated using a full electromagnetic approach (GLMT), whereas dotted colored lines have been calculated with the aid of (10). The agreement is excellent. One should notice that, in this case where axicon angles are small, the paraxial regime holds and axial gradient forces are incapable of overcoming the scattering forces. Therefore, no zero force points are observed, and the particle cannot be trapped in 3D fashion.

Fig. 2: Constant longitudinal intensity profile. The inset shows a 2D view along z . The profile as derived by (1)-(6) is seen in blue.

Fig. 3: Resulting force for the FW of Fig. 2.

As a more interesting example for practical purposes, let us look at our second example, whose electric field intensity is shown in Fig. 4. Here we impose both a constant and

a sinusoidal profile [mathematically described as $F(z) = \sin[\pi(z + 0.025L)/(0.15L - 0.025L)]$ for $z < 0.15L$, with $L = 500$ μm and $N = 15$. The largest α_q is of 18.01° for $q = -15$. The FW is, therefore, non-paraxial. The longitudinal total force, as shown in Fig. 5, clearly reverses sign for $n_{rel} = 1.01$, a point of stable equilibrium being observed at $z_0 \approx -19$ μm . For $n_{rel} = 0.95$, on the other hand, the point $z_0 \approx -5$ μm corresponds to an unstable position. In both Figs. 3 and 5, multiplicative factors are introduced for visualization purposes.

One interesting feature of Figs. 3 and 5 is the large axial action of the forces in comparison with the non-zero part of $F(z)$. In fact, even though $0.15L = 75$ μm for the sinusoidal-constant pattern, pronounced forces are noticed for z_0 as high as ± 170 μm . This comes from the presence of lateral energy flowing into the optical axis and from the size of the scatterer, which feels the presence of this lateral gradient of intensity for $z_0 > 2R_a + 0.1L = 115$ μm or $z_0 < -(2R_a + 0.1L)$.

When adopting a ray model description of the light scattering by large particles, one may break the analysis in terms of the incident, reflected and transmitted contributions for the total force of (10). Fig. 6 shows this for the sinusoidal-constant $F(z)$ and for $n_{rel} = 0.95$ and 1.01 . Only when $n_{rel} = 1.01$ can the third term of (10) balance the scattering force due to the incident field. Notice, however, that the low refractive index contrast in this case leads to a total forces with a low magnitude, which in contrast may not be strong enough to ensure the necessary restoring force. In a sense, a $F(z)$ defined over a few micrometers could increase the axial gradient force and provide us with more intense restoring forces. We intend to comment on that during the conference.

Fig. 4: Same as Fig. 2, now for the sinusoidal-constant FW.

IV. CONCLUSION

In this paper we introduce a ray optics approach to evaluate the optical forces exerted by circularly symmetric frozen waves over spherical scatterers. The advantage of using this particular polarization relies in the availability of exact and analytic descriptions in the framework of generalized Lorenz-Mie theories. The trapping of very large particles may be