UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO–USP
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Amélia Moreira Santos

**Análise de Forças Ópticas no
Aprisionamento de Partículas Esféricas
Utilizando Superposições Discretas de
Feixes de Bessel em Óptica Geométrica**

Amélia Moreira Santos

**Análise de Forças Ópticas no
Aprisionamento de Partículas Esféricas
Utilizando Superposições Discretas de
Feixes de Bessel em Óptica Geométrica**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Telecomunicações

Orientador: Prof. Dr. Leonardo André Ambrosio

São Carlos

2017

Trata-se da versão corrigida da dissertação. A versão original se encontra disponível na EESC/USP que aloja o Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica .

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

S231a Santos, Amélia Moreira
Análise de Forças Ópticas no Aprisionamento de
Partículas Esféricas Utilizando Superposições Discretas
de Feixes de Bessel em Óptica Geométrica / Amélia
Moreira Santos; orientador Leonardo André Ambrosio. São
Carlos, 2017.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica e Área de Concentração em
Telecomunicações -- Escola de Engenharia de São Carlos
da Universidade de São Paulo, 2017.

1. Aprisionamento óptico. 2. Óptica geométrica. 3.
Feixes de Bessel. 4. Frozen waves. 5. Pinças ópticas.
I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Engenheira **AMÉLIA MOREIRA SANTOS**.

Título da dissertação: "Análise de forças ópticas no aprisionamento de partículas esféricas utilizando superposições discretas de feixes de Bessel em óptica geométrica".

Data da defesa: 31/08/2017.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. **Leonardo André Ambrósio**
(Orientador)
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Michel Zamboni Rached**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Prof. Dr. **Carlos Henrique da Silva Santos**
(Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo/IFSP)

Resultado:

APROVADO

Aprovado

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica:
Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**

A Deus, por ser extremamente paciente e piedoso comigo...
Aos meus filhos, razão de minha existência, aos quais dedico todo meu amor e carinho,
Arthur e Antônio Moreira Antunes.

Agradecimentos

A Deus, sem Ele eu nada conseguiria. Por mais uma vez demonstrar sua grandiosidade presenteando-me com tão gloriosa oportunidade.

A minha família que sempre foi e é meu maior alicerce, dando-me força e razões para continuar a seguir em frente. Nunca deixaram de acreditar em mim e isso, com certeza, foi o que mais me incentivou.

A Lesley Antunes, pessoa maravilhosa que Deus colocou em minha vida.

Ao meu orientador-amigo e amigo-orientador, Prof. Dr. Leonardo André Ambrosio, pelas palavras sábias quando surgem as muitas dúvidas e pelas conversas sobre a vida.

Aos meus amigos de "pesquisa", Nereida Valdívia, Jhonnas Sarro, Vinícius de Angelis e principalmente ao Pedro Arantes, por toda ajuda durante a nossa caminhada. Quando achamos amigos de verdade, achamos um tesouro!

Ao Prof. Dr. Thiago de Castro Martins do Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo pela ajuda e atenção nos momentos difíceis. O mundo acadêmico precisa de pessoas como o senhor.

À Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, instituição respeitada na qual tenho convivido importantes anos de minha vida. Aos Professores da instituição, pesquisadores de valor inestimável, cujas competências dispensam comentários. À Marisa, Daniel e José da secretaria de pós-graduação, obrigada por tudo.

À CAPES pelo apoio financeiro.

E por fim, a todos que contribuíram para a existência desta dissertação.

"Um homem precisa viajar. Precisa viajar por si, com seus olhos e pés, para entender o que é seu... Um homem precisa viajar para lugares que não conhece para quebrar essa arrogância que nos faz ver o mundo como o imaginamos, e não simplesmente como é ou pode ser; que nos faz professores, mestres e doutores do que não vimos, quando deveríamos ser alunos, e simplesmente ir ver."
(Amir Klink - Mar sem fim (Adaptado))

"Tenho posto o Senhor continuamente diante de mim, por isso, nunca vacilarei."
(Salmos, 16:8)

"Não te mandei eu? Esforce-te e seja corajoso; não temas, nem te espantes; porque, Jeová o teu Deus, estará contigo, por onde quer que andares."
(Josué 1:9)

Resumo

Santos, Amélia **Análise de Forças Ópticas no Aprisionamento de Partículas Esféricas Utilizando Superposições Discretas de Feixes de Bessel em Óptica Geométrica.** 96 p. Dissertação de mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2017.

Este trabalho é uma contribuição às análises de forças de aprisionamento óptico exercidas sobre partículas esféricas por superposições discretas de feixes de Bessel. Um estudo teórico-numérico foi realizado no regime de óptica geométrica, completando as pesquisas já realizadas com tais feixes e no caso escalar, tanto no regime de Rayleigh quanto através de um formalismo eletromagnético completo. Investigam-se padrões longitudinais de intensidade de possível interesse prático, com potenciais de fornecer múltiplas armadilhas ópticas simultâneas utilizando dois métodos de análise. O primeiro parte da observação de que no regime paraxial todos os raios associados aos feixes se encontram quase paralelos entre si quando se toma como aproximação uma superposição de raios paralelos que incidem completamente sobre um hemisfério do espalhador. Tal método, entretanto, é naturalmente restrito pelas forças transversais. O segundo, que torna mais confiáveis e precisas as predições acerca da componente longitudinal de força, adota procedimentos mais robustos que levam em consideração tanto a contribuição da pressão de radiação (força de espalhamento) quanto a força gradiente devido a gradientes locais de intensidade associados a raios não-paralelos. Assim, acredita-se que este trabalho traz como contribuição um reforço a esta classe específica e promissora de feixes não difrativos como feixes de luz interessantes para aplicações em aprisionamento e micromanipulação óptica.

Palavras-chave: Aprisionamento Óptico; Óptica Geométrica; Feixes de Bessel; Frozen Waves; Pinças Ópticas.

Abstract

Santos, Amélia **Analysis of Optical Forces in the Trapping of Spherical Particles Using Discrete Superposition of Bessel Beams in Optical Rays**. 96 p. Master Thesis – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, 2017.

This work is a contribution to the analyses of optical trapping forces exerted on spherical particles by discrete superpositions of Bessel beams. A theoretical-numerical study has been carried out in the ray optics regime, completing the pre-existing research performed with such beams, in the scalar case, both in the Rayleigh regime and through a complete electromagnetic formalism. We investigate longitudinal intensity patterns of possible practical interest with potential to provide multiple simultaneous optical traps, by using two methods of analysis. The first assumes that, in the paraxial regime, all rays associated to the beams are almost parallel to each other, taking a superposition of parallel rays that are completely incident on a hemisphere of the scatterer as a suitable approximation. Such a method, however, is naturally constrained by the transverse forces. The second one, which makes the predictions about the longitudinal force component more reliable and accurate, adopts more robust procedures that take into consideration the contribution of the radiation pressure (scattering force) as well as the gradient force due to local intensity gradients associated to non-parallel rays. Thus it is hoped that this work will contribute to reinforce this specific and promising class of non-diffractive beams as interesting light beams for applications in optical trapping and micromanipulation.

Keywords: Optical trapping; Ray Optics; Bessel Beams; Frozen Waves; Optical Tweezers.

Lista de ilustrações

Fig. 2.1	Superposição de ondas planas cujos vetores de onda se localizam na superfície de meio cone com vértice igual a θ_a (ou <i>ângulo de áxicon</i>). Figura desenhada pelo autor.	35
Fig. 2.2	Função de Bessel de primeira espécie de ordens 0 a 5. Figura extraída de [55].	36
Fig. 2.3	Geração de um <i>FB</i> por um <i>áxicon</i> . Figura desenhada pelo autor.	37
Fig. 2.4	Perfis (a) 2D e (b) 3D da <i>FW</i> das Fig.1 (a) e (b) geradas com o método de [25]. Figuras geradas pelo autor utilizando <i>Python</i>	42
Fig. 2.5	Perfis 3D com (a) $Q = 0.99996 \omega_0/c$ e (b) $Q = 0.99980 \omega_0/c$ das <i>FW</i> das Fig.2 (a) e (b) geradas com o método de [25]. Figuras geradas pelo autor utilizando <i>Python</i>	42
Fig. 2.6	Perfis de intensidade da componente (a) x , (b) y e (c) z do campo elétrico e intensidade da componente (a) x , (b) y e (c) z do campo magnético para <i>FB</i> circularmente simétrico com polarização (1,0) com feixes paraxiais de ordem $n = 2$ com <i>ângulos de áxicon</i> iguais a 10° . Figuras geradas pelo autor utilizando o <i>software Mathematica</i>	45
Fig. 2.7	Perfis de intensidade da componente (a) x , (b) y e (c) z do campo elétrico e intensidade da componente (a) x , (b) y e (c) z do campo magnético para <i>FB</i> circularmente simétrico com polarização (1,0) com feixes não-paraxiais de ordem $n = 2$ com <i>ângulos de áxicon</i> iguais a 80° . Figuras geradas pelo autor utilizando o <i>software Mathematica</i>	46
Fig. 3.1	Campo da força de espalhamento (setas pretas) gerado por um feixe gaussiano colimado ao longo do eixo de propagação, escolhido como o eixo z (seta vermelha). O campo de força gradiente é indicado por setas cinzas. Figura extraída de [9].	50

Fig. 3.2	(a) Distribuição de intensidade de um feixe Gaussiano (fundo vermelho) e a força gradiente correspondente (setas) sobre uma partícula dielétrica cujo índice de refração é superior do que a do meio circundante. (b) Gráfico de comparação do potencial óptico. Figura adaptada de [9].	51
Fig. 3.3	Esquema da propagação de raios para partícula esférica. Figura adaptada de [37].	52
Fig. 3.4	Perfis (a) 2D e (b) 3D das FW da Fig.2 gerada com o método de [17]. Figuras geradas pelo autor utilizando <i>Python</i>	57
Fig. 3.5	Perfil de força longitudinal da FW gerada com o método de [17]. Figura gerada pelo autor utilizando <i>Python</i>	57
Fig. 3.6	(a) Feixe acelerando uma partícula dielétrica usando a pressão de radiação, (b) este mesmo princípio pode ser explorado na captura de partículas usando dois lasers alinhados, (c) força de radiação de uma onda plana de polarização linear em uma partícula de raio a e (d) o parâmetro de tamanho da partícula $k_m a$. Figuras adaptadas de [37] e [9].	58
Fig. 3.7	(a) A força resultante é para o centro do feixe movendo a partícula para regiões de maior intensidade. (b) Uma força para baixo é criada e tende a deslocar a partícula para o foco. Figura desenhada pelo autor.	59
Fig. 3.8	Regimes de aprisionamento óptico. Figura adaptada de [9].	60
Fig. 4.1	Representação do sistema de coordenadas utilizado. A partícula, representada pela esfera, está na origem do sistema, enquanto que o centro da fonte [representada pela curva tridimensional de $J_0(.)$ se encontra no ponto $P_0(0, \phi_0, z_0)$ (em coordenadas cilíndricas), onde $z_0 \leq 0$	63
Fig. 4.2	Perfil longitudinal constante para perfil semiconstante da FW em $\rho = 0$ em azul tracejado e em vermelho contínuo a $ F(z) ^2$	64
Fig. 4.3	(a) $I(\rho, z)$ para a FW da Fig. 4.2 (todos os pontos de intensidade maior que 0,5 estão representadas por 0,5).(b) $F_y(\rho, z)$. Aqui, $R_p = 10 \lambda$ e $n_r = 1, 2$	65
Fig. 4.4	Força transversal em função de ρ para partículas com raio igual a 10λ para dois valores distintos de índice de refração relativo, $n_r = 1, 50$ (curvas em preto) e $n_r = 0, 75$ (curvas em vermelho), e diferentes posições longitudinais. (a) $z = 0,4 L$. (b) $z = 0,8 L$	65
Fig. 4.5	Força transversal, em $z = 0,4 L$, em função de ρ para dois valores distintos de índice de refração relativo, $n_r = 1, 20$ (curvas em preto) e $n_r = 0, 80$ (curvas em vermelho), e diferentes valores de raio. (a) $R_p = 10 \lambda$. (b) $R_p = 20 \lambda$. (c) $R_p = 30 \lambda$. (d) $R_p = 50 \lambda$	66
Fig. 4.6	Perfil longitudinal exponencial crescente da FW em $\rho = 0$ em azul tracejado e em vermelho contínuo a $ F(z) ^2$	67

Fig. 4.7	(a) $I(\rho, z)$ para a FW exponencial crescente da Fig. 4.6 (todos os pontos de intensidade maior que 1 estão representadas por 1). (b) $F_y(\rho, z)$. Aqui, $R_p = 10 \lambda$ e $n_r = 0,8$	67
Fig. 4.8	Perfil longitudinal constante da FW (a) 2D e (b) 3D.	69
Fig. 4.9	Força longitudinal constante da FW	69
Fig. 4.10	Perfil longitudinal senoidal da FW em (a) 2D e (b) 3D.	70
Fig. 4.11	Força longitudinal senoidal da FW	70
Fig. 4.12	Contribuição dos raios incidente (linha tracejada em laranja), refletido (linha tracejada em verde) e transmitido (linha tracejada em vermelho) para (a) $n_{rel} = 1,20$, (b) $n_{rel} = 1,01$ e (c) $n_{rel} = 0,95$	71

Lista de tabelas

Tabela 3.1	Características da FW usada para simulações.	57
Tabela 4.1	Valores adotados para as simulações computacionais.	62
Tabela 4.2	Critérios para a função de referência do perfil semiconstante.	64
Tabela 4.3	Valores adotados para as simulações computacionais.	68

Lista de abreviaturas

FB Feixes de Bessel.

MOMAG Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica / Congresso Brasileiro de Magnetismo.

IMOC International Microwave and Optoelectronics Conference.

FW Frozen-Wave.

GLMT Teorias Generalizadas de Lorenz-Mie, do inglês *Generalized Lorenz-Mie Theory*.

PO Pinças Ópticas.

FBD Feixes de Bessel Davis.

Lista de símbolos

δ	Delta de Dirac.
β	Ângulo que o campo elétrico faz com a normal do plano $\hat{k}^0 \times \hat{d}^0$.
$\delta(\theta, \phi)$	Região da partícula sob iluminação do feixe.
$\Delta\rho$	Raio do <i>spot</i> .
$\hat{k}^0$ e $\hat{d}^0$	Vetores unitários.
$\hat{n}^0$	Versor normal.
λ	Comprimento de onda.
μ_0	Permeabilidade magnética no vácuo.
ω	Frequencia angular.
Φ	Fase de $\psi(\rho, \phi, z)$.
θ_a	Ângulo de áxicon.
θ_i	Ângulo de incidência.
θ_r	Ângulo de refração.
ε_0	Permissividade elétrica no vácuo.
$\vec{\nabla}$	Operador rotacional ($\times$) ou divergente($\cdot$).
$\vec{B}$	Indução magnética.
$\vec{E}$	Campo elétrico.
$\vec{F}$	Força total.
$\vec{p}_i$	Momento linear do raio incidente.

$\vec{p}_r$	Momento do raio refletido.
$\vec{p}_t$	Momento do raio refratado.
$\vec{p}_f$	Momento de um fóton.
$\vec{p}_{part}$	Variação do momento da partícula.
$\vec{S}$	Vetor de Poynting.
A_n	Coeficientes da FW de ordem zero em (2.24).
A_q	Coeficiente complexo.
B_m	Coeficientes da série de Fourier em (2.27).
c	Velocidade da luz no vácuo.
$d\vec{F}$	Pressão de radiação.
E_f	Energia de um fóton.
E_i	Energia do raio incidente.
$J_n(.)$	Função de Bessel de primeira espécie e ordem n .
k_ρ	Número de onda transversal.
k_z	Número de onda longitudinal.
L	Distancia máxima de propagação.
n	Índice de refração.
P	Pontência do raio incidente.
Q e N	Variáveis a serem escolhidas de acordo com o experimento e o grau de localização transversal de campo desejado.
R e T	Coeficientes de reflexão e transmissão de Fresnel.
R_{min}	Raio mínimo de abertura.
S	Superfície sob iluminação da esfera.
S_n	Espectro espaço-temporal.
v	Velocidade de propagação do meio.
Z_{max}	Profundidade de campo.
R	Raio da circunferência do áxicon.

Sumário

1	Introdução	27
2	Feixe de Bessel e <i>Frozen Waves</i>	31
2.1	Feixes Ideais	31
2.1.1	As Equações de Maxwell	31
2.1.2	A Equação de Onda e suas Transformadas Espaço-Temporais . . .	32
2.2	Feixes de Bessel	35
2.2.1	Feixe de Bessel Escalar	35
2.2.2	Frozen Waves Escalares	38
2.2.3	Feixes de Bessel Circularmente Simétricos	42
2.2.4	Frozen Waves Vetoriais	46
3	Forças Ópticas em Pinças Ópticas, no Regime de Óptica Geométrica - Teoria.	49
3.1	Pressão de Radiação e Momento linear	49
3.2	Relações de Energia	53
3.2.1	Coefficientes de Fresnel e Vetor de Poynting	53
3.2.2	Energias do Raios Incidente, Refletido e Trasmítidos	53
3.2.3	Cálculo de Força	55
3.3	Pinças Ópticas	58
4	Metodologia, Resultados e Discussões	61
4.1	Método I -Cálculo de Forças Radiais Exercidas por Superposições Discretas de Feixes de Bessel Escalares em Óptica Geométrica	62
4.2	Resultados e Discussões do Método I	63
4.2.1	Perfil Semiconstante	63
4.2.2	Perfil Exponencial Crescente	66

4.3	Método II - Cálculo de Forças Ópticas Exercidas FW Vetoriais em Óptica Geométrica	68
4.4	Resultados e Discussões do Método II	68
4.4.1	Perfil Constante	68
4.4.2	Perfil Senoidal	69
5	Conclusões e Perspectivas Futuras	73
	Referências	75
	Anexos	81
	ANEXO A	83
	ANEXO B	91

Introdução

A premissa de que a luz exerce forças fascina os cientistas há muito tempo [1]. No século XVII Johannes Kepler observou o comportamento das caudas de cometas que sofrem repulsão ao se aproximarem do sol e propôs a existência de forças exercidas pela radiação solar [2, 3]. Porém, foi James Maxwell quem formalizou a ideia de pressão de radiação elucidando a dependência da potência da luz incidente e sua velocidade de propagação no meio de incidência [4–6].

Em meados de 1900 Pyotr Lebedev na Rússia e independentemente Ernest Nichols e Gordon Hull nos Estados Unidos publicaram artigos com descrições acerca das primeiras observações reais da pressão de radiação sobre um corpo sólido macroscópico e gases absorventes, sendo a primeira confirmação quantitativa das Equações de Maxwell [7–9]. Em 1970, nos laboratórios da Bell Labs, Arthur Ashkin, valendo-se da interpretação quântica da luz como um conjunto de fótons, demonstrou que a luz pode exercer força sobre uma partícula dielétrica ao transferir momento linear a ela. Ele reportou, a partir daí, a primeira observação de suspensão de partículas em líquidos com laser contínuo, também reanalisou os experimentos realizados por Lebedev, Nichols e Hull, constatando e corrigindo alguns erros de unidades e fatores de conversão [10] [11].

Na década de 80, Ashkin introduziu outro avanço quando ao usar um único feixe focalizado numa lente de grande abertura numérica notou que ao incidir o laser as partículas eram puxadas para o centro do feixe e/ou aceleradas na direção do mesmo, desprezando a gravidade ou a utilização de dois lasers devido a força gradiente, sendo esta instituída pelo gradiente de intensidade do feixe que manipula o espalhador que se move na direção da região de maior intensidade da luz [12] [13] [9]. Assim, pela primeira vez, foi realizado o experimento de pinçamento óptico com um único laser, que a esse sistema prático, chamou-se de Pinça Óptica (PO)[14, 15].

Desde sua descoberta e como tendência nos últimos anos, as Pinças Ópticas tornaram-se uma ferramenta útil em diversas áreas de pesquisa como Biologia (manipulação de vírus e bactérias) [16], Biomedicina (manipulação de DNA e cromossomos) [17], Bioquímica e na Física (interações de macromoléculas e guiamento atômico) [18]. O feixe Gaussiano, a

princípio, era o mais utilizado, o mesmo possui propagação de ondas eletromagnéticas no espaço livre com a amplitude complexa de campo elétrico dada por uma função gaussiana [13]. Com a evolução da Ciência, outros tipos de feixes foram posteriormente incorporados. Assim, surgiram feixes gaussianos, Laguerre-gaussianos, Hermite-gaussianos, e, finalmente, os feixes de Bessel (*FB*) como descritos nesse trabalho [12] [19] [20].

O uso de *FB* no aprisionamento óptico se dá devido ao foco estendido, às suas propriedades não difrativas e às propriedades de autorreconstrução que consentem na criação de armadilhas bidimensionais para captura simultânea de diversas partículas em diferentes planos, todos perpendiculares ao eixo óptico [21–23]. Mesmo com essas vantagens ainda não é possível utilizar os *FB* individuais para obter aprisionamento tridimensional efetivo, pois não há força gradiente longitudinal capaz de vencer a força de espalhamento [24] [14].

Em 2004 Zamboni-Rached [25] propôs uma solução da equação de onda escalar em coordenadas cilíndricas que denominou de *Frozen Waves (FW)*. As *FW* são superposições específicas e discretas de *FB* escalares com eixo óptico comum, possuindo a mesma ordem e a mesma frequência de operação (portanto, o mesmo número de onda), embora cada feixe carregue um número de onda longitudinal (ou radial) e amplitude complexa distintos. Dessa forma, tais campos de onda, além das características não-difrativas e de autorreconstrução típicas de seus constituintes, permitem modelar quase que arbitrariamente o perfil longitudinal de intensidade [25–27]. Assim, o uso das *FW* agregou um grau de liberdade na escolha do perfil longitudinal que pode ser vantajosamente incorporada em sistemas de Pinças Ópticas.

Embora inicialmente geradas em escalas maiores (da ordem de centímetros), o uso das *FW* no aprisionamento óptico vem sendo demonstrado através de previsões teóricas e numéricas com pesquisas envolvendo o cálculo das forças ópticas sobre partículas esféricas dielétricas tanto através de aproximações de dipolo (regime de Rayleigh) quanto através de formalismos eletromagnéticos completos, provendo armadilhas efetivamente tridimensionais partindo de *FB* escalares no regime paraxial [17] [28].

No regime de Rayleigh os espalhadores dielétricos são modelados como simples dipolos elétricos, sendo o cálculo das forças ópticas simples e direto, com expressões muitas das vezes analíticas e de fácil implementação computacional [29,30]. Para partículas com dimensões da ordem do comprimento de onda, tanto a aproximação de dipolo quanto a aproximação por óptica geométrica se tornam inadequadas [31]. Quando isso ocorre, devemos usar um formalismo teórico que vai além do escopo deste trabalho, baseado em extensões da teoria de Lorenz-Mie para feixes de luz com distribuições espaciais arbitrárias de campo [32]. Os campos incidentes, espalhados e internos à partícula são, via de regra, expandidos em termos de funções esféricas especiais, sendo o grande desafio de tal abordagem a descrição fiel de tais campos a partir de cálculos precisos dos coeficientes complexos associados as suas expansões [17] [24].

Para partículas cujas dimensões são muito maiores do que o comprimento de onda, uma

abordagem baseada em raios se torna viável [33]. Nesse caso, o feixe incidente é composto por infinitos raios com orientações baseadas no fluxo de potência. Múltiplas reflexões e transmissões ocorrem quando há interação do feixe com a partícula, a correspondente transferência de momento linear resultando em forças sobre a partícula e a desloca [34]. Na pressão de radiação são encontradas as chamadas forças de espalhamento, enquanto o perfil espacial de campo da onda incidente é determinante para a existência da chamada força de gradiente [35]. Esta última quando é intensa o suficiente, pode fornecer uma componente longitudinal capaz de se sobrepor à força de espalhamento, anulando-a e criando possíveis pontos de equilíbrio axial estável. Em função do índice de refração relativo e em conjunto com a componente radial de força de gradiente, tais pontos podem ser fisicamente interpretados como pontos efetivos (tridimensionais) de captura óptica [36] [23, 27, 37].

A presente pesquisa de mestrado preenche uma lacuna atualmente existente na análise de forças ópticas exercidas por FW sobre espalhadores esféricos e micrométricos, já que uma visão baseada em óptica de raios ainda carecia de abordagem. No aspecto físico, diagramas de múltiplas reflexões/transmissões facilitam a interpretação do problema quando são comparados com a deficiência dos coeficientes de Mie em fornecer pistas teóricas acerca de informações físicas de interesse. No aspecto numérico ou computacional, a análise exata envolvendo uma teoria eletromagnética completa se torna cada vez mais exigente do ponto de vista de tempo e recursos computacionais, tornando-a muitas vezes proibitiva conforme o raio da esfera aumenta [32]. Justifica-se, assim, um desenvolvimento do tema baseado em raios.

Interpreta-se este presente estudo como um primeiro passo de uma pesquisa necessária e importante no regime de óptica de geométrica, o qual pode ser estendido para além do regime paraxial, considerando não apenas versões vetoriais das FW aqui utilizadas, mas também aquelas baseadas em superposições contínuas [38] [39].

A dissertação está dividida da seguinte forma:

Capítulo II – Apresenta uma revisão das FW escalares e vetoriais que serão utilizadas como feixes incidentes;

Capítulo III – Introduz conceitos de forças ópticas em sistemas de Pinças Ópticas, focando-se exclusivamente no regime de óptica geométrica;

Capítulo IV- Apresenta os dois métodos utilizados (e aqui já mencionados). O Método I, mais simples e com cálculo de forças radiais baseado em raios paralelos, teve seus resultados publicados no MOMAG – 2016 (Anexo A), que reúne o Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônica e o Congresso Brasileiro de Magnetismo, com o título “Método Simples em Óptica de Raios Para Cálculo de Forças Radiais Exercidas por Superposições Discretas de Feixes de Bessel Escalares” [40]. O Método II, mais completo e que leva em conta o perfil espacial de campo e as variações de fase dos feixes, teve seus resultados publicados no International Microwave and Optoelectronics Conference –

IMOC (Anexo B), com o título "On Circularly Symmetric *Frozen Waves* and their Optical Forces in Optical Tweezers Using a Ray Optics Approach"[41]. O capítulo ainda mostra os resultados obtidos nos Métodos I e II para algumas *FW* específicas; e

Capítulo V – Finaliza o presente trabalho com conclusões e perspectivas futuras.

Feixe de Bessel e *Frozen Waves*

No presente capítulo está organizado a fundamentação teórica acerca da teoria eletromagnética partindo das Equações de Maxwell e das Transformadas espaço-temporais para as soluções de feixes ideais e escalares. Em especial, descreve-se o método apresentado por Zamboni-Rached [25], que demonstra matematicamente a superposição de feixes de Bessel na geração de *Frozen Waves* escalares e finalizamos com a revisão de *Frozen Waves* vetoriais [38] [42] [43].

2.1 Feixes Ideais

2.1.1 As Equações de Maxwell

Em 1864 Maxwell apresentou a formulação matemática da teoria eletromagnética que permitiu descrever tanto os fenômenos elétricos quanto os magnéticos. O conjunto das equações de Maxwell é dado pela Lei de Gauss elétrica (2.1), Lei de Gauss magnética (2.2), Lei de Faraday (2.3) e Lei de Àmpere (2.4). Considerou-se aqui que o campo eletromagnético está no vácuo [4, 5, 44, 45].

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0. \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

onde, $\vec{\nabla}$ é o operador rotacional ($\times$) ou divergente ($\cdot$), $\vec{E}$ é o campo elétrico, também chamado de intensidade de campo elétrico, $\vec{B}$ é a indução magnética, também chamada

de densidade de fluxo magnético, ε_0 é a permissividade elétrica no vácuo e μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo.

2.1.2 A Equação de Onda e suas Transformadas Espaço-Temporais

A equação de onda é um resultado importante derivado das equações de Maxwell. Sua dedução parte de (2.3), onde impõe-se o operador rotacional de ambos os lados e a identidade vetorial dada em (2.5) [4, 5, 44, 45]:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{C}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - \nabla^2 \vec{C}, \quad (2.5)$$

onde $\vec{C} \equiv \vec{C}(x, y, z)$ é um campo vetorial tal que $\vec{C} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Ao usar a (2.4) elimina-se a dependência do campo magnético obtendo (2.6) e, considerando o rotacional de (2.4), obtêm-se o mesmo resultado relacionado ao vetor de indução magnética $\vec{B}$ dado em (2.7) [4, 5, 44, 45]:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.6)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.7)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo e para um meio simples o índice de refração n é dado por (2.8):

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{\mu}{\mu_0}}, \quad (2.8)$$

onde $v = \sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}}$ é a velocidade de propagação no meio. Logo, nota-se que os campos dinâmicos se comportam como ondas eletromagnéticas. Assim, para cada componente de $\vec{E}$ ou $\vec{B}$ tem-se o equivalente a uma equação de onda escalar $\psi(x, y, z; t)$, em coordenadas cartesianas para um meio com índice de refração n dado por (2.9) [5, 45, 46]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x, y, z; t) = 0. \quad (2.9)$$

Entretanto, nota-se que em (2.9) é usada a velocidade de propagação como sendo a velocidade da luz no vácuo (c), mas para meios não dispersivos é conveniente a utilização da velocidade de propagação como dada em v . A solução em (2.9), via de regra, inicia-se

pelo método de separação de variáveis, onde funções auxiliares de apenas uma variável (x, y ou z) são introduzidas e as soluções completamente determinadas uma vez conhecidas as condições de contorno. A solução mais simples que ainda satisfaz as equações de Maxwell que é amplamente conhecida, associa as componentes eletromagnéticas a uma onda plana uniforme [34]. Essa solução, entretanto, não sendo quadraticamente integrável, carrega energia infinita. A essa classe de soluções cuja potência no gerador deve ser infinita, denomina-se *ondas ideais* [47, 48].

Pela simetria do problema que este trabalho abordará, passa a ser adequado o uso de coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) . Isso se justifica pelo fato de que os feixes utilizados possuem simetria cilíndrica. Assim, nesse novo sistema de coordenadas, reescrevendo (2.9) como (2.10), tem-se [5, 39, 46]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(\rho, \phi, z; t) = 0, \quad (2.10)$$

Seja $\bar{\psi}_n(k_\rho, k_z, \omega)$ a transformada de Fourier-Bessel de $\psi(\rho, \phi, z; t)$, expressa através de transformadas de Fourier na variável tempo t e nas variáveis espaciais ρ e z , a primeira relacionada com a frequência angular ω e a segunda relacionada com a frequência espacial ou número de onda, através de suas componentes transversal e longitudinal, k_ρ e k_z , respectivamente. A função $\psi(\rho, \phi, z; t)$ é determinada pela transformada inversa de $\bar{\psi}_n(k_\rho, k_z, \omega)$, como descrita em (2.11) [44, 48–50]:

$$\psi(\rho, \phi, z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_\rho J_n(k_\rho \rho) e^{jn\phi} e^{jk_z z} e^{-j\omega t} \bar{\psi}_n(k_\rho, k_z, \omega) dk_\rho dk_z d\omega, \quad (2.11)$$

onde $J_n(\cdot)$ é a função de Bessel de primeira espécie e ordem n , ordem essa que também aparece como subíndice da função $\bar{\psi}_n$ [36] [48]. A partir da substituição de (2.11) em (2.10), determina-se a relação de dispersão a ser obedecida a partir das derivadas parciais de cada variável em $\psi(\rho, \phi, z; t)$ [36, 46, 48]:

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \psi(\rho, \phi, z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} [J_n(k_\rho \rho)] e^{jn\phi} e^{jk_z z} e^{-j\omega t} \bar{\psi}_n(k_\rho, k_z, \omega) dk_\rho dk_z d\omega \quad (2.12)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_\rho \left(-k_\rho^2 J_n(k_\rho \rho) + \frac{n^2}{\rho^2} J_n(k_\rho \rho) - \frac{k_\rho}{2\rho} (J_{n-1}(k_\rho \rho) - J_{n+1}(k_\rho \rho)) \right) \times$$

$$e^{jn\phi} e^{jk_z z} e^{-j\omega t} \bar{\psi}_n(k_\rho, k_z, \omega) dk_\rho dk_z d\omega.$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho, \phi, z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [J_n(k_{\rho} \rho)] e^{jn\phi} e^{jk_z z} e^{-j\omega t} \bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) dk_{\rho} dk_z d\omega \quad (2.13)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} \left(\frac{k_{\rho}}{2\rho} (J_{n+1}(k_{\rho} \rho) - J_{n-1}(k_{\rho} \rho)) \right) \times e^{jn\phi} e^{jk_z z} e^{-j\omega t} \bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) dk_{\rho} dk_z d\omega.$$

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \psi(\rho, \phi, z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} J_n(k_{\rho} \rho) \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} [e^{jn\phi}] e^{jk_z z} e^{-j\omega t} \times \quad (2.14)$$

$$\bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) dk_{\rho} dk_z d\omega \\ = -\frac{n^2}{\rho^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} J_n(k_{\rho} \rho) e^{jn\phi} e^{jk_z z} e^{-j\omega t} \bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) dk_{\rho} dk_z d\omega.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(\rho, \phi, z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} J_n(k_{\rho} \rho) e^{jn\phi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [e^{jk_z z}] e^{-j\omega t} \bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) dk_{\rho} dk_z d\omega \quad (2.15)$$

$$= -k_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} J_n(k_{\rho} \rho) e^{jn\phi} e^{jk_z z} e^{-j\omega t} \bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) dk_{\rho} dk_z d\omega.$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\rho, \phi, z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} J_n(k_{\rho} \rho) e^{jn\phi} e^{jk_z z} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [e^{-j\omega t}] \times \quad (2.16)$$

$$\bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) dk_{\rho} dk_z d\omega \\ = -\frac{\omega^2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} J_n(k_{\rho} \rho) e^{jn\phi} e^{jk_z z} e^{-j\omega t} \bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) dk_{\rho} dk_z d\omega.$$

Substituindo de (2.12)-(2.16) em (2.11), tem-se (2.17):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} \left(-k_{\rho}^2 - k_z^2 + n_m^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right) e^{jn\phi} e^{jk_z z} e^{-j\omega t} \bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) dk_{\rho} d\omega dk_z = 0, \quad (2.17)$$

e, para que a integral seja sempre zero, deve-se necessariamente garantir que o fator entre parênteses em (2.17) seja nulo, resultando em (2.18) [24, 25, 46]:

$$k_\rho^2 + k_z^2 = n_m^2 \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (2.18)$$

A partir de (2.18), reescrevemos (2.11) unicamente em função de k_ρ e ω , obtendo (2.19) [48, 50]:

$$\psi(\rho, \phi, z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{n_m \omega / c} k_\rho J_n(k_\rho \rho) e^{jn\phi} e^{jz \sqrt{n_m^2 \omega^2 / c^2 - k_\rho^2}} e^{-j\omega t} S_n(k_\rho, \omega) dk_\rho d\omega, \quad (2.19)$$

onde agora $S_n(k_\rho, \omega)$ é o novo espectro espaço-temporal em função apenas de k_ρ e ω de $\psi(\rho, \phi, z; t)$. Na seção seguinte, uma escolha adequada entre a frequência angular e k_z (ou k_ρ) através de relação linear permite encontrar soluções ideais, ou seja, com energia infinita, monocromáticas e conhecidas como *FB* ideais e escalares [36, 51].

2.2 Feixes de Bessel

2.2.1 Feixe de Bessel Escalar

Em 1954 Jonh H. McLeod propôs uma nova classe de feixes gerados através de elementos ópticos denominados áxicons. Na prática são lentes em formato de cones que transmitem a onda incidente com a direção do número de onda $\vec{k} = k_z \hat{e}_z + k_\rho \hat{e}_\rho$ constante em relação ao eixo longitudinal, isto é, com k_z e k_ρ relacionados através do ângulo de meio cone ou *ângulo de áxicon* (θ_a) destes elementos, como mostra a Fig. 2.1 [46, 52].

Fig. 2.1: Superposição de ondas planas cujos vetores de onda se localizam na superfície de meio cone com vértice igual a θ_a (ou *ângulo de áxicon*). Figura desenhada pelo autor.

Essa constância de direção da onda de saída com vetor de onda posicionado sobre a superfície de um cone gera como padrão de interferência resultante um perfil conhecido

como não difrativo (ou pseudo não difrativo) tipo Bessel [53]. Assim, em aplicações onde, por vezes, deseja-se uma maior profundidade de campo e uma localização transversal, os *FB* apresentam-se como uma importante alternativa [26, 36, 37]. Em sistemas ópticos de micromanipulação, suas propriedades não difrativas e de autorreconstrução após passarem por um obstáculo permitem tanto a captura simultânea de diversas partículas ao longo do eixo de propagação quanto a captura múltipla de partículas de tamanhos diferentes devido às suas estruturas anulares radiais de intensidade [22, 37].

Matematicamente aos formatos transversais observados nos *FB*, associam-se funções de Bessel de ordens inteiros [54]. Observe que as funções de Bessel da Fig. 2.2 tem características oscilatórias amortecidas e que a amplitude relativa ao primeiro máximo decresce com a ordem [45].

Fig. 2.2: Função de Bessel de primeira espécie de ordens 0 a 5. Figura extraída de [55].

O *FB* ideal necessita de energia infinita na sua reprodução [56]. Durnin [19, 20], em 1987 publicou uma metodologia em que possibilitava experimentalmente um *FB* de ordem zero truncado por uma abertura finita. Assim, esse truncamento limitou o número de anéis secundários responsáveis por manter a intensidade e tamanho do *spot*, onde o *FB* se propagava por uma distância finita (profundidade de campo) [45]. No caso prático, essa profundidade de campo é dada por Z_{max} até a qual o feixe consegue manter a sua localização ou, em outras palavras, suas características não difrativas [56]. Z_{max} depende da geometria do elemento óptico; de fato, sendo o raio da lente dado por R e o ângulo de *áxicon* do feixe, dado por θ_a , é fácil mostrar que (2.20) [25, 26, 57]:

$$Z_{max} = \frac{R}{\tan \theta_a}. \quad (2.20)$$

Lembrando que a (2.20) é válida desde que obedeça a relação dada em (2.21):

$$R \gg \frac{2.4}{\frac{\omega}{c} \sin \theta_a}. \quad (2.21)$$

Em (2.19) ao se assumir uma geração monocromática com frequência angular $\omega = \omega_0$. Há uma relação linear $k_\rho = k \sin \theta_a$ ou, em função de (2.18), $k_z = k \cos \theta_a$. Para $n = 0$, a função peso ou espectro de frequência S_n que fornece a amplitude e fase de cada onda plana em (2.19), e que resulta em $\psi(\rho, z; t)$ associado a um *FB* escalar de ordem zero é dada por (2.22) [25, 26, 57]:

$$S_n(k_\rho, \omega) = \frac{\delta(k_\rho - k \sin \theta_a)}{k_\rho} \delta(\omega - \omega_0) \delta_{n,0}. \quad (2.22)$$

A solução integral usada para se obter qualquer tipo de feixe genuinamente propagante usando o conceito de espectro angular dado por (2.22), cujos vetores de onda plana localizam-se sobre a superfície de um cone que possui um semiângulo de vértice igual a θ_a (Fig. 2.3) é dado por (2.23). Claramente, o *ângulo de áxicon* determina exclusivamente a direção e sentido das ondas planas transmitidas [37].

Fig. 2.3: Geração de um *FB* por um *áxicon*. Figura desenhada pelo autor.

$$\psi_{FB}(\rho, z; t) = J_0(k_\rho \rho) e^{jk_z z} e^{-j\omega_0 t}. \quad (2.23)$$

O *FB* tem comportamento transversal que não depende da coordenada axial z , ou seja, não sofre deformações no seu formato transversal e mantém sua intensidade inalterada ao longo da propagação [58]. A solução de ordem zero dada em (2.23) é uma solução ideal e não apresenta decaimento devido à propagação no eixo longitudinal, o que implica num feixe com energia infinita se a abertura da fonte do feixe também tivesse tamanho infinito. Além disso, esse mesmo procedimento possibilitaria a obtenção de *FB* de ordens superiores ($n \neq 0$), mas com a dependência explícita da variável angular ϕ na forma $\exp(jn\phi)$ [26, 39, 42].

2.2.2 Frozen Waves Escalares

Como observado na seção anterior os *FB* ideais e escalares possuem propriedades que os tornam muito interessantes do ponto de vista de aprisionamento óptico, pelo menos no que se refere a armadilhas bidimensionais. Contudo, na impossibilidade de se obter armadilhas tridimensionais é que reside, provavelmente, sua maior desvantagem. Isto significa dizer que, de certa forma, é na presença de um foco estendido sem a liberdade de manipulação que se deve dar mais atenção ao reformular o perfil longitudinal de intensidade do feixe incidente, ainda que tenha que abrir mão de *FB* individuais para avançar no aprisionamento tridimensional. O fato de haver necessidade de se lidar com superposições discretas de *FB* aparece de forma natural, considerando-se que uma mesma fonte poderia ser capaz de realizar através de um sistema óptico adequado o perfil longitudinal resultante.

De fato, essa foi a ideia seminal de superposições discretas de *FB* escalares que Zamboni-Rached considerou em suas pesquisas há cerca de uma década atrás. Surgiu, então, uma proposta para a obtenção de classes de feixes não difrativos com escolhas arbitrárias e pré-determinadas do padrão longitudinal de campo construídas à partir de *FB* de mesma frequência e ordem, mas com números de onda longitudinais (ou radiais) e amplitude complexa diferentes [25, 26].

A escolha por uma frequência única não é arbitrária, mas uma imposição necessária pela simplicidade da proposta. Afinal, espera-se que a superposição possa ser gerada a partir de uma única fonte de laser para qualquer método (holografia computacional, aberturas anulares, etc.) de geração óptica do perfil longitudinal desejado. Conforme originalmente observado, tal superposição linear permite obter envelopes de amplitudes estacionárias, isto é, com velocidade igual 0. Daí, o nome pelo qual ficaram conhecidas: *Frozen Waves* (*FW*), ou ondas congeladas, pois somente a onda portadora se propaga. Seu padrão de intensidade longitudinal pode ser prévia e arbitrariamente escolhido dentro de certo limite [17, 25, 26].

Além do número de onda longitudinal (ou radial), outra característica que difere cada *FB* na superposição é o seu peso, ou seja, seu fator de amplitude que no domínio da frequência pode ser complexo. Dizer que os números de onda longitudinais são distintos equivale a indicar que cada *FB* possui seu próprio *ângulo de áxicon*. Matematicamente, portanto, pode-se genericamente escrever uma *FW* de ordem zero por (2.23) construída a partir de $2N + 1$ *FB* de ordem zero também, na forma de (2.24) [26, 57, 59]:

$$\psi_{FW}(\rho, z; t) = e^{-j\omega_0 t} \sum_{n=-N}^N A_n J_0(k_{\rho n} \rho) e^{jk_{zn} z}, \quad (2.24)$$

onde n são números inteiros. Como o interesse são apenas em ondas propagantes ao longo do eixo $+z$ e portanto, sem componentes contra-propagantes não físicas ou ondas

evanescentes, impõe-se para (2.24) as condições de (2.25) e (2.26) [17, 25, 26]:

$$\frac{\omega_0}{k_z} > 0, \quad (2.25)$$

$$k_\rho^2 \geq 0. \quad (2.26)$$

Em (2.25) encontra-se a condição de propagação exclusiva em $+z$, enquanto que a condição em (2.26) exclui a análises de quaisquer ondas evanescentes.

Contudo, supor que deseja-se um certo perfil longitudinal de intensidade $|\psi_{FW}(\rho = 0, z; t)|^2 = |F(z)|^2$ dentro de um intervalo $0 \leq z \leq L$ (ou, alternativamente, $-L/2 \leq z \leq +L/2$). A escolha por $\rho = 0$ é justificável pois a amplitude máxima de cada FB de ordem zero é sobre o eixo z . Então, é possível relacionar os coeficientes A_n em (2.24) com $F(z)$. Para tanto, considera-se uma expansão em série de Fourier para $F(z)$ dada em (2.27) [25, 26, 41]:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{-j\frac{2\pi}{L}nz}. \quad (2.27)$$

onde os coeficientes da série, B_n , são dados por:

$$B_n = \frac{1}{L} \int_0^L F(z) e^{-j\frac{2\pi}{L}nz} dz. \quad (2.28)$$

Aqui, devemos fazer algumas observações importantes. Primeiro, qualquer que seja $F(z)$, a solução $\psi_{FW}(\rho, z; t)$ correspondente é escalar por construção. Isso significa dizer que no máximo poderia representar apenas uma componente de campo eletromagnético. Assim, como deseja-se que tal solução seja o mais aproximada possível ou equivalente à intensidade de campo elétrico de um feixe vetorial, a aproximação paraxial deve ser preservada. Em outras palavras, os *ângulos de áxicon* devem ser pequenos em relação aos números de onda longitudinais k_{zn} e que em (2.24) os mesmos tem que pouco diferir do próprio número de onda k . Matematicamente, pode-se por (2.29) impor que [25, 26, 57]:

$$k_{zn} = Q + \frac{2\pi}{L}n. \quad (2.29)$$

onde $Q > 0$ é um valor a ser escolhido de acordo com o experimento e o grau de localização transversal de campo desejado, devendo-se assegurar, em função do exposto acima, $Q + (2\pi n/L) \approx n_m \omega_0/c$ para todo n , tal que, em vista de (2.25) e (2.26), tenha-se a (2.30) [25, 26, 41, 57]:

$$0 \leq Q \pm \frac{2\pi}{L}N \leq \frac{\omega_0}{c}. \quad (2.30)$$

O valor de N em (2.30) pode ser encontrado uma vez que Q e L estejam definidos ou, alternativamente, poder-se-ia, por exemplo, determinar Q a partir de N e L . Uma vez que N é finito, automaticamente infere-se que a superposição de FB em (2.24), em $\rho = 0$, não corresponderá mais exatamente a $F(z)$. De fato, de (2.24) com (2.29) chega-se a (2.31):

$$\psi_{FW}(\rho = 0, z; t) = e^{-j\omega_0 t} e^{jQz} \sum_{n=-N}^N A_n e^{j\frac{2\pi}{L}nz}. \quad (2.31)$$

A partir de (2.31), com $|\psi_{FW}(0, z; t)|^2$ e comparando o resultado com (2.28) tem-se para valores de $|n| \leq N$ o coeficiente A_n dado por (2.32):

$$A_n = \frac{1}{L} \int_0^L F(z) e^{-j\frac{2\pi}{L}nz} dz. \quad (2.32)$$

Portanto, a superposição de FB pode ser finalmente escrita como a (2.33) [25, 26, 57]:

$$\psi_{sup}(\rho, z; t) = e^{-j\omega_0 t} e^{jQz} \sum_{n=-N}^N A_n J_0(k_{\rho n} \rho) e^{j\frac{2\pi}{L}nz}, \quad (2.33)$$

Em função da relação constitutiva (2.18) e de (2.29), tem-se (2.34):

$$k_{\rho n}^2 = n_m^2 \frac{\omega^2}{c^2} - \left(Q + \frac{2\pi n}{L} \right)^2. \quad (2.34)$$

Duas observações devem ser feitas. A primeira é que para a escolha de FB de ordem zero, a FW resultante não possui dependência em ϕ , o que seria contornável com a escolha de FB de ordem $n > 0$. A segunda é que, ao assumir $n > 0$, em razão do próprio comportamento das funções de Bessel, cujos máximos globais se deslocam para n crescente, a partir de argumento nulo, o perfil original $F(z)$ será deslocado em ρ , formando um padrão anular [41, 42].

Anteriormente, abordou-se a influência do raio de abertura da fonte na propagação de um FB . Além do mais, provou-se qual o valor da distância máxima que o feixe atinge, considerando o *ângulo de áxicon* e o raio de abertura da fonte quando o feixe origina-se por uma abertura circular maior que o *spot* do mesmo, sendo capaz de se propagar por longas distâncias mantendo o padrão transversal praticamente inalterado. [41, 45].

No caso das superposições a distância máxima de propagação (L) e o ângulo de áxicon dos $2N+1$ feixes podem já terem sido definidos *a priori*. Faz-se necessário, portanto, determinar qual o valor mínimo do raio de abertura para que a superposição atinja o resultado esperado [25, 26, 57]. Através de manipulações da (2.20), o raio mínimo de abertura para que o formato desejado da FW ocorra, é dado por (2.35):

$$R_{min} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{c^2 k_{zn=N}^2} - 1}. \quad (2.35)$$

onde N é igual a N_{max} . A superposição ainda fornece feixes com alta concentração de campo em $\rho = 0$, assim pode-se calcular o tamanho do raio do *spot* resultante como sendo (2.36). Salientando que (2.36) é uma condição suficiente, mas nem sempre necessária [25, 26, 41, 57].

$$\Delta\rho \approx \frac{2.4}{k_{\rho n=0}} = \frac{2.4}{\sqrt{(n\omega_0/c)^2 - Q^2}}. \quad (2.36)$$

Obviamente, a não existência do controle 3D efetivo total se dá devido ao fato de que o campo deve obedecer a equação de onda. No entanto, há duas maneiras de obter algum controle sobre o comportamento transversal. A primeira maneira é através do parâmetro Q , pois há liberdade na escolha deste parâmetro e as FW que representam o mesmo padrão de intensidade longitudinal podem possuir diferentes valores de Q .

Outro ponto importante é que na superposição o uso de um valor de Q menor faz os FB possuírem uma concentração transversal maior, ou seja, ao diminuir o valor de Q aumenta-se o valor dos números transversais dos FB , e isso irá refletir no campo resultante, o que irá apresentar um ponto transversal mais estreito e a segunda maneira de controlar o padrão de intensidade transversal é o uso de FB de ordem superior [25, 26, 41, 42].

Durante essa pesquisa de mestrado realizou-se diversas simulações a partir de artigos já existentes na literatura sobre os FB vetoriais, bem como as FW escalares e vetoriais. Para demonstrar as características dos FW escalares foram reproduzidas algumas figuras a partir do artigo "*Stationary optical wavefields with arbitrary longitudinal shape, by superposing equal frequency Bessel beams: Frozen Waves*" [25]. A Fig. 2.4 adota os seguintes parâmetros: $\lambda_0 = 0.632 \mu\text{m}$, com $\omega_0 = 2.98 \times 10^{15} \text{ Hz}$, $L = 0.5 \text{ m}$, $Q = 0.9998 \omega_0/c$, $N = 20$ e $F(z)$ determinada por (2.37):

$$F(z) = \begin{cases} -4 \frac{(z-l_1)(z-l_2)}{(l_2-l_1)^2}, & \text{se } l_1 \leq z \leq l_2 \\ 1, & \text{se } l_3 \leq z \leq l_4 \\ -4 \frac{(z-l_5)(z-l_6)}{(l_6-l_5)^2}, & \text{se } l_5 \leq z \leq l_6 \\ 0, & \text{se caso contrário.} \end{cases} \quad (2.37)$$

com $l_1 = L/10$, $l_2 = 3L/10$, $l_3 = 4L/10$, $l_4 = 6L/10$, $l_5 = 7L/10$ e $l_6 = 9L/10$.

Fig. 2.4: Perfis (a) 2D e (b) 3D da *FW* das Fig.1 (a) e (b) geradas com o método de [25]. Figuras geradas pelo autor utilizando *Python*.

Para a Fig. 2.5 foram necessários os seguintes parâmetros: $\lambda_0 = 0.632 \mu\text{m}$, com $\omega_0 = 2.98 \times 10^{15} \text{ Hz}$, $L = 0.5 \text{ m}$, $N = 30$, com $Q = 0.99996 \omega_0/c$ para a Fig. 2.5(a) e $Q = 0.99980 \omega_0/c$ para a Fig. 2.5(b) com $F(z)$ determinada por (2.38):

$$F(z) = \begin{cases} -4 \frac{(z-l_1)(z-l_2)}{(l_2-l_1)^2}, & \text{se } l_1 \leq z \leq l_2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.38)$$

com $\Delta L = L/50$, $l_1 = L/2 - \Delta L$ e $l_2 = L/2 + \Delta L$.

Fig. 2.5: Perfis 3D com (a) $Q = 0.99996 \omega_0/c$ e (b) $Q = 0.99980 \omega_0/c$ das *FW* das Fig.2 (a) e (b) geradas com o método de [25]. Figuras geradas pelo autor utilizando *Python*.

2.2.3 Feixes de Bessel Circularmente Simétricos

No segundo método apresentado nessa dissertação, descartou-se a ideia de raios paralelos que foi muito satisfatória na análise de forças radiais no caso de feixes altamente

paraxiais. As ondas planas que compõem o feixe incidente passam agora a ter direções específicas de fluxo de potência. No caso de um *FB*, por exemplo, que orienta-se sobre a superfície de um cone cujo ângulo é o próprio *ângulo de áxicon* com valor relativamente alto, pode-se dizer que esse *FB* possui uma natureza vetorial intrínseca e que sua solução para a equação de onda escalar é reescrita como componentes de um campo vetorial ou potencial. Assim, desprezou-se a ideia de raios paralelos e da teoria escalar, pois a mesma não é mais satisfatória para o estudo da propagação de *FB* vetoriais e/ou não-paraxiais que agora devem ser expressos em forma vetorial ou se tratando de campos escalares, incorporados cuidadosamente na *Teoria Generalizada de Lorenz-Mie (GLMT)* [38,39,42].

Para os *FB* vetoriais, obtidos como soluções monocromáticas das equações de Maxwell, inicialmente, deve-se obter expressões para cada componente do campo eletromagnético do *FB* polarizado de forma arbitrária. A não paraxialidade pode ser considerada com precisão e facilidade, já que as componentes longitudinais agora existem e podem assumir amplitudes próximas ou superiores àsquelas de suas correspondentes transversais [38, 39, 42, 60]. Assim, a escolha da polarização dos *FB* utilizados na superposição levou-se em consideração algumas condições como [41,42]:

- A descrição do feixe deve ser incorporada diretamente no limite da óptica geométrica, mas também em quaisquer outros regimes ópticos;
- Para espalhadores de raio arbitrário, uma abordagem eletromagnética completa, baseada na *Teoria Generalizada de Lorenz-Mie (GLMT)*, deveria, se possível, fornecer descrições exatas e analíticas do campo incidente; e
- Seu potencial prático para as finalidades desejadas.

No intuito de reunir todas as condições citadas, considerou-se feixes ópticos com polarização circularmente simétrica, conhecidos na literatura como Feixes de Bessel Davis (FBD). Os *FB* circularmente simétricos são feixes vetoriais cujas componentes de campo elétrico e magnético foram simetrizadas. Salienta-se que os mesmos são soluções importantes para as equações de Maxwell com densidade de potência do vetor de Poynting em simetria azimutal [42, 60].

A simetria do *FB* circularmente simétrico é construída a partir do cálculo da média dos campos de Davis polarizado linearmente em x ou em y e os campos duplos [60].

Nessa pesquisa de mestrado considerou-se apenas a polarização em x , ou seja, em $(1,0)$. A notação aqui utilizada segue o padrão de trabalhos anteriores e é remanescente de polarização linear em x . Polarização linear em y é nomeada $(0,1)$ e a polarização circular é construída pelas superposições de duas polarizações lineares ortogonais de mesma intensidade e fase em $(1,i)$ e $(1,-i)$, dependendo se é à esquerda ou à direita, respectivamente [41, 42, 60].

Logo, as expressões de campos elétrico e magnético para o *FB* circularmente simétrico com polarização em (1,0) são dadas por (2.39) a (2.44):

$$E_x^{(1,0)} = \frac{1}{2}E_0 \left[\frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{\rho^4} (n^2 - n) J_n(k_\rho \rho) + \frac{k^2 y^2 + k_z^2 x^2}{\rho^2} J_n(k_\rho \rho) + k \cdot k_z J_n(k_\rho \rho) + \frac{x^2 - y^2 + 2inxy}{\rho^3} k_\rho J_{n+1}(k_\rho \rho) \right] (-i)^n e^{in\phi} e^{-ik_z z} . \quad (2.39)$$

$$E_y^{(1,0)} = \frac{1}{2}E_0 \left[\frac{ix^2 - iy^2 + 2xy}{\rho^4} (n^2 - n) J_n(k_\rho \rho) + \frac{xy k_\rho^2}{\rho^2} J_n(k_\rho \rho) + \frac{iny^2 - inx^2 + 2xy}{\rho^3} k_\rho J_{n+1}(k_\rho \rho) \right] (-i)^n e^{in\phi} e^{-ik_z z} . \quad (2.40)$$

$$E_z^{(1,0)} = \frac{1}{2}(k + k_z)E_0 \left[\frac{ix}{\rho} k_\rho J_{n+1}(k_\rho \rho) - \frac{ix + y}{\rho^2} n J_n(k_\rho \rho) \right] (-i)^n e^{in\phi} e^{-ik_z z} . \quad (2.41)$$

$$B_x^{(1,0)} = \frac{1}{2}B_0 \left[\frac{ix^2 - iy^2 + 2xy}{\rho^4} (n^2 - n) J_n(k_\rho \rho) + \frac{iny^2 - inx^2 + 2xy}{\rho^3} k_\rho J_{n+1}(k_\rho \rho) - \frac{xy}{\rho^2} k_\rho^2 J_n(k_\rho \rho) \right] (-i)^n e^{in\phi} e^{-ik_z z} . \quad (2.42)$$

$$B_y^{(1,0)} = \frac{1}{2}B_0 \left[\frac{y^2 - x^2 + 2ixy}{\rho^4} (n^2 - n) J_n(k_\rho \rho) + \frac{k^2 x^2 + k_z^2 y^2}{\rho^2} J_n(k_\rho \rho) + k \cdot k_z J_n(k_\rho \rho) + \frac{y^2 - x^2 - 2inxy}{\rho^3} k_\rho J_{n+1}(k_\rho \rho) \right] (-i)^n e^{in\phi} e^{-ik_z z} . \quad (2.43)$$

$$B_z^{(1,0)} = \frac{1}{2}(k + k_z)B_0 \left[\frac{iy}{\rho} k_\rho J_{n+1}(k_\rho \rho) - \frac{iy - x}{\rho^2} n J_n(k_\rho \rho) \right] (-i)^n e^{in\phi} e^{-ik_z z} . \quad (2.44)$$

Para demonstrar as caracatrísticas dos *FB* circularmente simétricos foram reproduzidas algumas figuras a partir do artigo "*General description of circularly symmetric Bessel*

beams of arbitrary order" [60]. As figuras simuladas (Fig. 2.6 e Fig. 2.7) demonstram o comportamento dos *FB* circularmente simétricos dados pelas Eqs. (2.39) a (2.40) e adotam os seguintes parâmetros: $n = 2$, $\lambda = 500$ nm, $c = 299792458$ m/s, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ $C^2 N^{-1} m^{-2}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, $\omega_0 = 3.76 \times 10^{15}$ Hz, $k = 2 \times \frac{\pi}{\lambda}$, $k_z = k \times \cos(\theta_a)$ e $k_\rho = k \times \sin(\theta_a)$, com θ_a sendo o ângulo de áxicon que para a Fig. 2.6 é igual a 10° (caso paraxial) e para a Fig. 2.7 é igual a 80° (caso não-paraxial).

Fig. 2.6: Perfis de intensidade da componente (a) x , (b) y e (c) z do campo elétrico e intensidade da componente (a) x , (b) y e (c) z do campo magnético para *FB* circularmente simétrico com polarização (1,0) com feixes paraxiais de ordem $n = 2$ com ângulos de áxicon iguais a 10° . Figuras geradas pelo autor utilizando o *software Mathematica*.

Para a Fig. 2.6 tem-se o caso paraxial e nota-se que as componentes E_x e B_y são circularmente simétricas, pois ambas tem aproximadamente as mesmas intensidades de distribuição de campo. Salienta-se que E_y e B_x tem o mesmo padrão de distribuição derivados das equações constituintes e em relação a E_z e B_z , nota-se que os mesmos tem distribuição de intensidade semelhantes, mas com um descolamento de 90° .

Fig. 2.7: Perfis de intensidade da componente (a) x , (b) y e (c) z do campo elétrico e intensidade da componente (a) x , (b) y e (c) z do campo magnético para FB circularmente simétrico com polarização (1,0) com feixes não-paraxiais de ordem $n = 2$ com ângulos de âricon iguais a 80° . Figuras geradas pelo autor utilizando o software *Mathematica*.

Para a Fig. 2.7 tem-se o caso não-paraxial e nota-se que as componentes E_x e B_y , E_z e B_z tem o mesmo padrão de distribuição, mas com um descolamento de 90° e E_y e B_x tem quase a mesma intensidade de distribuição. Em comparação a Fig. 2.6 (a) e (e), correspondente a E_x e B_y , nota-se que as componentes das Fig. 2.7 (a) e (e) não são mais circularmente simétricas.

2.2.4 Frozen Waves Vetoriais

Para construção de FW vetoriais, pode-se inicialmente considerar uma FW escalar como componente transversal de campo (elétrico ou magnético), ou ainda, como componente de um potencial vetor auxiliar. As equações de Maxwell forneceriam, posteriormente as demais componentes necessárias. Por outro lado, a possibilidade surge de também criar FW vetoriais a partir da superposição direta de FB vetoriais.

Nota-se que as componentes de campo das FW vetoriais circularmente simétricas de ordem arbitrária e com polarização (1,0) podem ser geradas a partir da superposição discreta de FB vetoriais de mesma ordem e polarização. Pela linearidade das equações de Maxwell, tem-se igualmente um feixe físico. Neste trabalho, supõe-se FW vetoriais construídas diretamente a partir de superposições discretas de $2N + 1$ FB vetoriais [41, 42, 60].

Assim, para a superposição dos $2N + 1$ FB de ordem zero vetoriais e circularmente simétricos, baseou-se em expressões já existentes na literatura, que derivaram as seguintes

equações para as componentes de campo da FW com polarização (1,0), como mostrou-se nos FB circurlamente simétricos.

$$E_x^{(1,0)} = \sum_{q=-N}^N \bar{A}_q g(\alpha_q) e^{-ik_{zq}z} \{ (1 + \cos \alpha_q) J_0(\sigma_q) + \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha_q) [e^{i2\phi} J_2(\sigma_q) + e^{-i2\phi} J_{-2}(\sigma_q)] \}, \quad (2.45)$$

$$E_y^{(1,0)} = \sum_{q=-N}^N \bar{A}_q g(\alpha_q) e^{-ik_{zq}z} \frac{1}{2i} (1 - \cos \alpha_q) [e^{i2\phi} J_2(\sigma_q) - e^{-i2\phi} J_{-2}(\sigma_q)], \quad (2.46)$$

$$E_z^{(1,0)} = i \sum_{q=-N}^N \bar{A}_q g(\alpha_q) e^{-ik_{zq}z} \sin \alpha_q [e^{i\phi} J_1(\sigma_q) - e^{-i\phi} J_{-1}(\sigma_q)], \quad (2.47)$$

$$B_x^{(1,0)} = \frac{k}{\omega} \sum_{q=-N}^N \bar{A}_q g(\alpha_q) e^{-ik_{zq}z} \frac{1}{2i} (1 - \cos \alpha_q) [e^{i2\phi} J_2(\sigma_q) - e^{-i2\phi} J_{-2}(\sigma_q)], \quad (2.48)$$

$$B_y^{(1,0)} = \frac{k}{\omega} \sum_{q=-N}^N \bar{A}_q g(\alpha_q) e^{-ik_{zq}z} \{ (1 + \cos \alpha_q) J_0(\sigma_q) - \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha_q) [e^{i2\phi} J_2(\sigma_q) + e^{-i2\phi} J_{-2}(\sigma_q)] \}, \quad (2.49)$$

$$B_z^{(1,0)} = \frac{k}{\omega} \sum_{q=-N}^N \bar{A}_q g(\alpha_q) e^{-ik_{zq}z} \sin \alpha_q [e^{i\phi} J_1(\sigma_q) - e^{-i\phi} J_{-1}(\sigma_q)], \quad (2.50)$$

Nas equações (2.45) a (2.50), $\bar{A}_q = A_q/[g(\alpha_q)(1 + \cos \alpha_q)]$, $\alpha_q = k_{\rho q}\rho$ e $g(\alpha_q) = (1 + \cos \alpha_q)/4$, onde A_q é o coeficiente complexo do q -ésimo FB escalar correspondente a FW . A FW de ordem zero escalar $\psi(\rho, z) = E_x^{(1,0)}$ pode ser restabelecida, se as condições paraxiais, $\cos \alpha_q \rightarrow 1$ e $\sin \alpha_q \rightarrow 0$, forem impostas nas equações acima, reduzindo-as, portanto, numa única solução da equação de onda escalar [41, 42, 60].

Talvez a grande vantagem do uso destes feixes não esteja diretamente relacionada com o estudo de forças em óptica de raios, mas com o fato de que, até o momento, FW vetoriais circularmente simétricas são as únicas FW vetoriais que possuem descrição analítica e exata de seu perfil espacial de campo na GLMT [41, 42, 60].

Forças Ópticas em Pinças Ópticas, no Regime de Óptica Geométrica

No presente capítulo é apresentada uma breve revisão de como as forças ópticas surgem da interação da luz com partículas dielétricas e esféricas quando esta última é muito maior que o comprimento de onda, ou seja, no regime da óptica geométrica. É apresentado também o conceito de força de espalhamento e gradiente para um único raio, a partir da transferência de momento linear e de diagrama de múltipla reflexão/transmissão. Então, são utilizados conceitos de polarização da luz incidente para compor a força total exercida por um feixe de luz com perfil de potência arbitrário, a partir de integrações numéricas. Ressaltam-se que esse capítulo se baseia na análise feita em Arantes [46], bem como as informações suplementares e o equacionamento matemático.

3.1 Pressão de Radiação e Momento linear

Compreende-se que existem dois tipos de forças de radiação relacionados às Pinças Ópticas. A primeira advém do gradiente de intensidade, enquanto que a segunda é a força de espalhamento causada pela transferência de impulso dos fótons, tendendo a empurrar as partículas ao longo do eixo óptico e eventualmente, desestabilizando o aprisionamento óptico [61] [62]. Esta força de espalhamento é não-conservativa, como mostra a Fig. 3.1. Assim, o trabalho total realizado pela força de espalhamento depende do caminho de integração e é diferente no caso dos caminhos l_1 e l_2 [9, 63].

Outros efeitos que não o simples movimento mecânico da partícula naturalmente acabam por estar presentes. As cargas elementares do espalhador, uma vez excitadas pela luz incidente, podem transformar parte dessa energia incidente em outras formas de energia como por exemplo em energia térmica, processo esse chamado de absorção. Formalismos matemáticos que envolvem todos os efeitos possíveis da transferência de energia entre ondas eletromagnéticas de perfil de campo arbitrário e partículas esféricas de raio e índice

Fig. 3.1: Campo da força de espalhamento (setas pretas) gerado por um feixe gaussiano colimado ao longo do eixo de propagação, escolhido como o eixo z (seta vermelha). O campo de força gradiente é indicado por setas cinzas. Figura extraída de [9].

de refração arbitrários são envolventes e fogem ao escopo do presente trabalho.

Fixou-se as atenções, em particular, nas situações em que o raio do espalhador é muito maior do que o comprimento de onda da luz incidente, permitindo, todavia, que a absorção possa ocorrer. Nessa situação o índice de refração tornar-se-á complexo [40, 64].

A matéria é necessariamente composta por partículas, por exemplo, elétrons com cargas elétricas quantizadas. Exemplificando para o caso em estudo, pode ser considerada como um obstáculo que, quando irradiada por uma onda eletromagnética, realiza um movimento de oscilação devido ao campo elétrico da onda incidente. Essas cargas elétricas aceleradas irradiam energia eletromagnética em todas as direções e é precisamente essa radiação secundária que denomina-se espalhamento [43, 65, 66]

O gradiente de intensidade é responsável pelo confinamento, tanto transversal quanto longitudinal de partículas em sistemas de Pinças Ópticas, favorecendo a captura tridimensional em pontos específicos do espaço (no meio dentro do qual elas se encontram imersas) [67, 68]. Partículas com índice de refração relativo maior que 1 tendem a ser capturadas em regiões próximas ao foco, assim o gradiente de intensidade surge a partir da energia potencial do campo elétrico sendo uma uma força conservativa e o trabalho realizado pelo campo incidente é associado a este gradiente sobre a partícula e entre dois pontos independentemente do caminho percorrido pela mesma [24, 69].

Portanto, as partículas com coeficiente de polarização positivo, cujo índice de refração é maior do que o índice de refração do meio circundante são atraídas para regiões de maior intensidade do campo óptico e partículas com coeficiente de polarização negativo com índice de refração menor do que o índice de refração do meio circundante são repelidas da região de maior intensidade do campo óptico [37].

Para realizar o cálculo de tais forças associa-se a um raio incidente um momento linear particular em função da lei de Snell na interface entre o meio externo e a partícula.

Logo, na superfície desta última, surgirão raios refletidos e refratados, onde cada raio secundário refratado passará pelo mesmo processo: ele incidirá, a partir da partícula, na superfície da mesma e o subsequente raio refletido retornará para dentro da esfera [37]. Em síntese, surgirá um problema de múltiplas reflexões e transmissões a ser caracterizado mais adiante.

Fig. 3.2: (a) Distribuição de intensidade de um feixe Gaussiano (fundo vermelho) e a força gradiente correspondente (setas) sobre uma partícula dielétrica cujo índice de refração é superior do que a do meio circundante. (b) Gráfico de comparação do potencial óptico. Figura adaptada de [9].

Para melhor quantificar o exposto acima, conforme ilustrado na Fig. 3.3, considere-se um raio incidente, onde o feixe por construção, carrega infinitos raios propagando-se através de um meio linear, homogêneo e isotrópico com momento linear $\vec{p}_i$ e a energia de todos os raios como E_i . Sua direção de propagação é representada formalmente pelo vetor unitário $\hat{k}^0$. Supondo que o mesmo raio incida em um ponto particular $M(\theta, \phi)$ na superfície de uma partícula esférica e dielétrica de índice de refração n_p , onde aqui utiliza-se coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) ou cartesianas (x, y, z) quando mais conveniente. O índice de refração do meio externo é n_m e, obviamente, a partícula tem índice relativo $n_{rel} = n_p/n_m$.

Ao ponto $M(\theta, \phi)$ associa-se um versor normal $\hat{n}^0$ à superfície apontando para fora, sendo que o ângulo de incidência θ_i é tal que $\cos \theta_i = -\hat{k}^0 \cdot \hat{n}^0$. Às múltiplas reflexões associam-se novos raios refletidos com momentos $\vec{p}_{r0}, \vec{p}_{r1}, \vec{p}_{r2}$, etc., e novos raios refratados $\vec{p}_{t0}, \vec{p}_{t1}, \vec{p}_{t2}$, etc. Sendo a potência do raio incidente P , cada feixe refratado tem uma potência menor, e a força em cada direção cartesiana (paralela ou perpendicular à $\hat{k}^0$) está associada, em função da conservação de momento, à variação de momento da partícula em termos de $\vec{p}_i, \vec{p}_{r0}, \vec{p}_{t1}, \vec{p}_{t2}, \vec{p}_{t3}$, etc. Sendo a variação de momento da luz a diferença entre seu momento final e inicial, a variação de momento $\vec{p}_{part}$ sofrida pela partícula será o negativo desta quantidade como mostra (3.1) [37, 46]:

$$\vec{p}_{part} = \vec{p}_i - \sum_{n=0}^{\infty} \vec{p}_{on} = \vec{p}_i - \vec{p}_{r0} - \sum_{n=1}^{\infty} \vec{p}_{tn}. \quad (3.1)$$

Fig. 3.3: Esquema da propagação de raios para partícula esférica. Figura adaptada de [37].

Da mecânica quântica, sabe-se que o momento de um raio se relaciona com o momento de um fóton ($\vec{p}_f$). Naturalmente, essa relação depende da potência do raio em questão. De fato, como um raio é formado por vários fótons, o momento linear resultante é a soma dos momentos de todos os fótons que o compõem. Sendo E_f a energia de um fóton, λ seu comprimento de onda e h a constante de Planck, tem-se (3.2) [37, 46]:

$$|\vec{p}_f| = \frac{h}{\lambda} = \frac{n_m E_f}{c}, \quad (3.2)$$

e, portanto, chega-se (3.3):

$$\vec{p}_i = \sum_{k=1}^{\infty} \vec{p}_{f,k} = \frac{n_m E}{c} \hat{k}^0, \quad (3.3)$$

aqui E_i é a energia de todos os fótons (raio incidente). Substituindo as expressões acima em (3.1) e em função da energia dos raios secundários, tem-se finalmente (3.4):

$$\vec{p}_{part} = \frac{n_m E_i}{c} \hat{k}^0 - \frac{n_m}{c} \sum_{n=0}^{\infty} E_{on} \hat{k}_{on}, \quad (3.4)$$

sendo que em (3.4) as direções dos raios de saída ($\vec{p}_{r0}$, $\vec{p}_{t1}$, $\vec{p}_{t2}$, etc.) são representadas pelos versores $\hat{k}_{on}$ [46].

3.2 Relações de Energia

3.2.1 Coeficientes de Fresnel e Vetor de Poynting

Em 1821 Fresnel demonstrou que os fenômenos da polarização poderiam ser explicados se a luz fosse tratada como uma onda puramente transversal e sem componente longitudinal. Supondo que o raio incidente tem polarização perpendicular ($\perp$) ou paralela ($\parallel$) ao plano $\hat{k}^0 \times \hat{d}^0$ da Fig. 3.3, é possível mostrar que a refletividade R e a transmissividade T podem ser escritos respectivamente como (3.5) e (3.6) [46, 70]:

$$R = R_{\perp} \cos^2 \beta + R_{\parallel} \sin^2 \beta. \quad (3.5)$$

$$T = T_{\perp} \cos^2 \beta + T_{\parallel} \sin^2 \beta, \quad (3.6)$$

Portanto, pode-se descrever também $(R_{\perp})$, $(R_{\parallel})$, $(T_{\perp})$ e $(T_{\parallel})$ como em (3.7) e (3.8):

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_r)}{\sin^2(\theta_i + \theta_r)}. \\ R_{\parallel} &= \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_r)}{\tan^2(\theta_i + \theta_r)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} T_{\perp} &= 1 - R_{\perp}. \\ T_{\parallel} &= 1 - R_{\parallel}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

sendo β em (3.5) e (3.6) o ângulo que o campo elétrico faz com a normal ao plano $\hat{k}^0 \times \hat{d}^0$ e θ_r é o respectivo ângulo de refração [46, 70].

O vetor de Poynting retrata a densidade direcional do fluxo de carga, ou seja, a quantidade de energia transferida por unidade de área, em Watts por metro quadrado ($W \cdot m^2$) de um campo eletromagnético [46, 70, 71]. Para associá-lo a $|\psi(\theta, \phi)|^2$ tem-se:

$$|\vec{S}(\theta, \phi)| = S(\theta, \phi) = |\psi(\theta, \phi)|^2. \quad (3.9)$$

3.2.2 Energias do Raios Incidente, Refletido e Trasmitidos

Partindo-se de (3.4), é necessário determinar E_{on} e $\hat{k}_{on}$ em função do raio incidente. Para tanto, é necessário inicialmente determinar a direção de $\hat{d}^0$ (ver Fig. 3.3). Sendo $\hat{n}^0$, $\hat{d}^0$ e $\hat{k}^0$ coplanares, $\hat{d}^0$ e $\hat{k}^0$ perpendiculares entre si, podemos imediatamente determinar

$\hat{d}^0$ subtraindo-se de $\hat{n}^0$ sua contribuição em $\hat{k}^0$ com a devida normalização. Assim, tem-se [41, 46]:

$$\hat{d}^0 = \frac{\hat{n}^0 - (\hat{n}^0 \cdot \hat{k}^0) \hat{k}^0}{|\hat{n}^0 - (\hat{n}^0 \cdot \hat{k}^0) \hat{k}^0|}, \quad (3.10)$$

ou, em referência a um plano complexo, $\hat{d}^0$ é equivalente ao vetor $\hat{k}^0$ multiplicado pelo número imaginário puro j ($\hat{d}^0 = j\hat{k}^0$) [46].

Observando novamente a Fig. 3.3, pode-se determinar explicitamente a direção do raio refletido rotacionando por $2\theta_i$ em sentido anti-horário o versor $-\hat{k}^0$. O vetor momento linear para o primeiro raio refletido é dado por (3.11):

$$\vec{p}_r = \vec{p}_{o0} = -\frac{n_m R E_i}{c} e^{-j2\theta_i} \hat{k}^0, \quad (3.11)$$

onde $\cos \theta_i = -\vec{n}_0 \cdot \hat{k}_0$, conforme já mencionado anteriormente. Observa-se em (3.11) que a energia do primeiro feixe refletido se dá pelo produto da refletividade R pela energia E_i do raio incidente no ponto $M(\theta, \phi)$ de incidência [37, 46].

Para reescrever completamente (3.4) é preciso calcular os versores $\hat{k}_{tn}$ associados aos raios transmitidos de saída. Para $\hat{k}_{t1}$ observa-se que ao primeiro raio transmitido no ponto N_1 , $\vec{p}_{t1}$ e $\vec{p}_{r0}$ possuem o mesmo ângulo θ_i com relação à normal. Assim, a menos de fatores associados a perdas de potência, o primeiro raio transmitido é igual ao raio refletido rotacionado também no sentido anti-horário de $\pi - 2\theta_r$. Consequentemente, cada raio transmitido subsequente terá direção também rotacionada de $-(\pi - 2\theta_r)$ com relação ao raio transmitido anterior.

Logo, para o n -ésimo raio transmitido de saída, encontra-se a seguinte orientação vetorial de (3.12) [46]:

$$\hat{k}_{tn} = \hat{k}_{on} = -\hat{k}^0 e^{-j2\theta_i} e^{-jn(\pi - 2\theta_r)}, \quad (3.12)$$

Em termos de energias, percebe-se que o primeiro raio transmitido sofreu duas passagens pela superfície da partícula, de modo que sua energia será menor que E_i por um fator de T^2 . A seguir, o segundo raio transmitido de saída é aquele que foi primeiramente transmitido em $M(\theta, \phi)$, posteriormente refletido em N_1 e, finalmente, refratado em N_2 .

Portanto, o decréscimo de potência carrega um fator de $T^2 R$, e assim por diante. Dessa forma para o n -ésimo raio transmitido há um fator de redução de potência de $T^2 R^{n-1}$. Assim, a energia $E_{tn} = E_{on}$ associada ao n -ésimo raio transmitido de saída, em função da energia E_i do raio incidente é expressa na forma de (3.13) [37][46]

$$E_{tn} = E_{0n} = T^2 e^{-\alpha l} (e^{-\alpha l} R)^{n-1} E_i. \quad (3.13)$$

Substituindo (3.11), (3.12) e (3.13) em (3.4) e eliminando a somatória, obtém-se finalmente a variação de momento linear ($\vec{p}_{part}$) sofrida pela partícula em função da energia E_i e da direção $\hat{k}^0$ do raio incidente, dos coeficientes de Fresnel R e T e do ângulo de incidência θ_i de n_m [37]:

$$\vec{p}_{part} = \frac{n_m E_i}{c} \left[1 + R e^{-j2\theta_i} - T^2 \frac{e^{-j2(\theta_i - \theta_r)} e^{-\alpha l}}{1 + R e^{-\alpha l} e^{j2\theta_r}} \right] \hat{k}^0. \quad (3.14)$$

A interpretação de (3.14) é bem simples, onde o primeiro termo corresponde exclusivamente ao raio incidente, enquanto que o segundo termos está relacionado ao momento do primeiro raio refletido e o terceiro termo, envolvendo T^2 é a contribuição para o momento da partícula dada pelo conjunto de raios transmitidos. Para cada termo da soma, $\hat{k}^0$ sofrerá a correspondente rotação em função das exponenciais complexas. Em geral, assume-se $\hat{k}^0 = \hat{z}$. Sendo Φ a fase de $\psi(\rho, \phi, z)$, é possível mostrar que $\hat{k}^0$ está associado ao divergente de fase em (3.15) [46]:

$$\hat{k}_0 = \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} = \frac{(\partial_x \Phi, \partial_y \Phi, \partial_z \Phi)}{|(\partial_x \Phi, \partial_y \Phi, \partial_z \Phi)|}, \quad (3.15)$$

onde o operador nabla (∇) foi expresso em coordenadas cartesianas.

3.2.3 Cálculo de Força

A metodologia habitual para calcular a força exercida pelo feixe de luz sobre a partícula esférica, com um único raio ao longo do feixe adotam os passos a seguir:

No primeiro passo calcula-se a força exercida por um único raio do feixe sobre a partícula esférica, considerando as múltiplas reflexões e refrações em sua superfície (levando-se em consideração os limites da óptica geométrica). A densidade de fluxo de energia, devido a uma onda eletromagnética, é dada pelo vetor de Poynting [71]. Pode-se descrever a forma que essa energia é transportada, associando uma série de raios a uma onda eletromagnética que aponta na direção do fluxo de energia eletromagnética. A força exercida sobre a partícula, então, é calculada através da derivada temporal do momento linear da partícula, dado em (3.14). Sendo a potência P_i do feixe dada pela derivada temporal de variação de E_i , tem-se que [37, 46]

$$\vec{F}_{raio} = \frac{d\vec{p}_{part}}{dt} = \frac{n_m P_i}{c} \left[1 + R e^{-j2\theta_i} - T^2 \frac{e^{-j2(\theta_i - \theta_r)} e^{-\alpha l}}{1 + R e^{-\alpha l} e^{j2\theta_r}} \right] \hat{k}^0. \quad (3.16)$$

Calculada a força para um único raio, deve-se associá-la a uma contribuição diferencial em ponto específico da superfície da esfera. O segundo passo é realizar uma integral deste diferencial de força sobre toda a superfície da partícula sob iluminação. O feixe, como anteriormente mencionado, possui infinitos raios. Porém, cada raio pode possuir orientação específica. Derivando (3.16) em função do diferencial de superfície, chega-se a (3.17) [46]:

$$d\vec{F} = \frac{n_m |\vec{S}|}{c} \left[1 + Re^{-j2\theta_i} - T^2 \frac{e^{-j2(\theta_i - \theta_r)} e^{-\alpha l}}{1 + Re^{-\alpha l} e^{j2\theta_r}} \right] \cos \theta_i \hat{k}^0 dA, \quad (3.17)$$

com

$$dP_i = \vec{S} \cdot d\vec{A} = \vec{S} \cdot \vec{n}^0 dA = |\vec{S}| \cos \theta_i dA,$$

onde $d\vec{F}$ é a pressão de radiação. A força total na partícula é calculada através da integral da pressão de radiação na sua superfície (S representa a superfície sob iluminação, que pode ou não ser um hemisfério completo da esfera), como indicado em (3.18) [46]:

$$\vec{F} = \iint_S d\vec{F}. \quad (3.18)$$

Em (3.18), a condição para determinar os limites de integração é o produto $\hat{k}^0 \cdot \hat{n}^0$ ser positivo ou não. De fato, $\hat{k}^0 \cdot \hat{n}^0 \geq 0$ implica em contribuição nula para a força (a região associada não é iluminada) [72]. Dessa forma, (3.18) é reescrita como [46]:

$$d\vec{F} = \begin{cases} \frac{n_m |\psi|^2}{c} \left[1 + Re^{-j2\theta_i} - T^2 \frac{e^{-j2(\theta_i - \theta_r)} e^{-\alpha l}}{1 + Re^{-\alpha l} e^{j2\theta_r}} \right] \cos \theta_i \hat{k}^0 dA, & \text{se } \hat{k}_0 \cdot \hat{n}_0 < 0 \\ 0, & \text{se } \hat{k}_0 \cdot \hat{n}_0 \geq 0, \end{cases}$$

e a força total como (3.19):

$$\vec{F} = \hat{k}_0 \frac{n_m}{c} \iint_{\delta(\theta, \phi)} |\psi(\theta, \phi)|^2 \left[1 + Re^{-j2\theta_i} - T^2 \frac{e^{-j2(\theta_i - \theta_r)} e^{-\alpha l}}{1 + Re^{-\alpha l} e^{j2\theta_r}} \right] \cos \theta_i R_p^2 \sin \theta d\theta d\phi, \quad (3.19)$$

onde $\delta(\theta, \phi)$ é a região da partícula sob iluminação do feixe [46].

A título de comparação, reproduziu-se o caso do perfil constante mostrado na Fig. 3.4, associado ao artigo "*Analytical Approach of Ordinary Frozen Waves for Optical Trapping and Micromanipulation*" [17], onde $(-Z_{max} \leq z \leq Z_{max})$ com os seguintes parâmetros da Tabela 3.1:

Tabela 3.1: Características da *FW* usada para simulações.

Variáveis	Valores
λ	1064 nm
L	10^{-3}
N_{max}	15 ($2N+1=31$)
n_{rel}	1,33
Q	$0,95 \, n_{rel} \omega / c$
R	$17.5 \, \mu\text{m}$
n	400

Fig. 3.4: Perfis (a) 2D e (b) 3D das *FW* da Fig.2 gerada com o método de [17]. Figuras geradas pelo autor utilizando *Python*.

Como esperado, a simulação validou o código quando comparado a referência utilizada. A Fig. 3.5 é o perfil longitudinal para $n_{rel} = 1,20$ e $n_{rel} = 0,95$. Nota-se ainda que, a *FW* pode ter pontos de equilíbrio estáveis.

Fig. 3.5: Perfil de força longitudinal da *FW* gerada com o método de [17]. Figura gerada pelo autor utilizando *Python*.

3.3 Pinças Ópticas

Os primeiros experimentos de Ashkin consistiam em estudar o movimento de microesferas sob a ação da pressão de radiação, contrabalanceada pela gravidade ou a partir de dois feixes de luz antiparalelos entre si como mostram as Fig. 3.6(a) e (b) [11, 47]. A Pinça Óptica surgiu quando foram introduzidos lasers fortemente focalizados com uma lente objetiva, criando um alto gradiente de campo [65, 73].

Nessa situação, foi observado que as microesferas ficavam presas na região próxima ao foco da lente. Em função da variação de momento causado sobre a partícula e em função da distribuição de potência dos raios incidentes e suas direções, quando os espalhadores possuem índices de refração maiores que o meio externo e se movimentam surgindo forças restauradoras de forma a reestabelecer o equilíbrio estável, deslocando-a novamente para a região do foco, Fig. 3.6 [15, 65, 74]. Assim, o efeito da refração é deslocar o centro da esfera para o foco da lente. Essa força é a conhecida força de gradiente, já mencionada anteriormente.

Fig. 3.6: (a) Feixe acelerando uma partícula dielétrica usando a pressão de radiação, (b) este mesmo princípio pode ser explorado na captura de partículas usando dois lasers alinhados, (c) força de radiação de uma onda plana de polarização linear em uma partícula de raio a e (d) o parâmetro de tamanho da partícula $k_m a$. Figuras adaptadas de [37] e [9].

Assim, uma Pinça Óptica consiste, em sua versão original, basicamente em um feixe de laser bem focalizado por meio de uma objetiva. Sob certas condições, esse feixe é capaz de aprisionar objetos da ordem de micrômetros valendo-se da força gradiente que atua como um dipolo induzido puxando a partícula para o centro do foco para contrabalancear os efeitos da força de espalhamento. Essa última, atua como a pressão de radiação que

empurra a partícula para fora do foco, como mostra a Fig. 3.7 [18, 75].

Fig. 3.7: (a) A força resultante é para o centro do feixe movendo a partícula para regiões de maior intensidade. (b) Uma força para baixo é criada e tende a deslocar a partícula para o foco. Figura desenhada pelo autor.

A formulação matemática do problema do aprisionamento óptico de uma partícula esférica de raio arbitrário é muito interessante, mas foge aos objetivos do presente trabalho. São disponíveis inúmeros trabalhos com teorias limites (regimes ópticos específicos), válidos para partículas esféricas muito maiores ou menores em relação ao comprimento de onda da luz do laser utilizado [76]. Na óptica geométrica o movimento esperado da partícula pode, via de regra, ser estabelecido qualitativamente a partir de um diagrama de múltiplas reflexões/transmissões utilizando-se de alguns poucos raios incidentes.

A Fig. 3.8 mostra diversos objetos e seus respectivos regimes para aprisionamento. Nota-se a necessidade de avaliar o problema da força óptica exercida sobre partículas biológicas em diversos regimes ópticos [77]. Alguns desses espalhadores em nada se assemelham as esferas e o que exige, muitas vezes, cálculos numéricos que requerem elevado tempo e recursos para seu processamento [11].

O *FB* escalar ideal, visto como solução aproximada das equações de Maxwell no regime paraxial, é visivelmente incapaz de fornecer pontos de equilíbrio estáveis efetivamente tridimensionais, já que não há variação longitudinal de seu perfil de intensidade [20]. Dessa forma, apenas um aprisionamento bidimensional, em geral nos seus diversos anéis de intensidade e simultaneamente em planos transversais, é possível.

Para pinças ópticas, portanto, *FW* surgem como alternativas interessantes aos feixes atualmente utilizados em laboratório, carregando não somente todas as características não difrativas que tornam os *FB* atrativos, mas um grau de liberdade adicional que, em princípio, abriria caminho para armadilhas tridimensionais: o perfil longitudinal de intensidade [25, 26].

Fig. 3.8: Regimes de aprisionamento óptico. Figura adaptada de [9].

Na literatura, há alguns trabalhos recentes acerca de FW escalares em pinças ópticas [17, 24, 28]. Porém, até então, uma análise no regime de óptica geométrica não havia sido apresentada. Além disso, no último trimestre dessa pesquisa de mestrado avançou-se nos estudos de FW vetoriais, restritas a uma única polarização e chamadas de circularmente simétricas, o que permitiu ir além do regime paraxial [42].

Metodologia, Resultados e Discussões

No presente capítulo são apresentadas a metodologia, os resultados e as discussões referentes aos dois métodos de análise de forças ópticas utilizadas nessa pesquisa de mestrado. O Método I, mais simples, assume raios completamente paralelos onde cada um carrega uma potência cuja distribuição radial assemelha-se a uma função de Bessel. O mesmo foi publicado na forma de artigo completo (Anexo A) com o título “Método Simples em Óptica de Raios Para Cálculo de Forças Radiais Exercidas por Superposições Discretas de Feixes de Bessel Escalares” [40] no MOMAG – 2016 que reúne o Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica e o Congresso Brasileiro de Magnetismo.

O Método II, mais completo e elaborado levou em consideração o perfil espacial de campo e as variações de fase dos feixes para analisar forças ópticas transversais e longitudinais de FW vetoriais (circularmente simétricas) e escalares, teve seus resultados publicados na forma de artigo completo (Anexo B) com o título "On Circularly Symmetric *Frozen Waves* and their Optical Forces in Optical Tweezers Using a Ray Optics Approach"[41] no International Microwave and Optoelectronics Conference, IMOC-2017.

Os recursos computacionais para os métodos numéricos foram de suma importância para prever o comportamento do aprisionamento óptico, onde o Método I foi executado no *software Mathematica 11* ® por ser mais simples e exigir tempo e processamentos computacionais menores.

O Método II por ser mais complexo e exigir um grande processamento computacional foi executado e otimizado em *Python* (disponibilizado gratuitamente) que é uma linguagem de programação de alto nível orientada a objeto com características de abstração, encapsulamento, herança e polimorfismo mais simplificadas para o usuário.

O código base do Método II foi escrito por Arantes, onde nessa pesquisa de mestrado foram inseridas as FW e ambos os códigos estão em domínio público, podendo ser consultado em [78].

Assim, o capítulo ainda mostra os resultados obtidos nos Métodos I e II para algumas

FW específicas com os cálculos e as figuras geradas nos respectivos *softwares* e linguagens de programação.

4.1 Método I -Cálculo de Forças Radiais Exercidas por Superposições Discretas de Feixes de Bessel Escalares em Óptica Geométrica

Primeiramente foram consideradas duas FW com perfis distintos. Em ambos os casos, assumem-se os seguintes valores para as respectivas variáveis dadas na Tabela (4.1):

Tabela 4.1: Valores adotados para as simulações computacionais.

<i>Variáveis</i>	<i>Valores</i>
L	1 mm
λ	1064 nm
n_1	1,33 (água)
N	20 ($2N+1=41$)
$n_1\omega_0/c = n_12\pi/\lambda$	$7,85 \times 10^6 \text{rad/m}$
Q	$0,984 \ n_1\omega_0/c = 7,73 \times 10^6 \text{rad/m}$
Δ_ρ (spot do maior feixe da superposição)	$20 \ \mu\text{m}$
R_a (raio de abertura da fonte)	1 mm

Nessa situação o maior *ângulo de áxicon* entre os 41 feixes foi de $14,56^\circ$, que corresponde ao feixe $n = -N_{max}$, ou seja, $n = -20$, o que permitiu considerar a aproximação paraxial dentro de níveis toleráveis de erro. Para o cálculo das forças ópticas, foi necessário saber de antemão a distribuição de potência do feixe incidente. Como a potência é proporcional à intensidade do feixe, define-se a potência normalizada de uma FW como $P(\rho, z) = |\psi(\rho, z)|^2$. Como o interesse principal é a distribuição de campo na superfície do espalhador, o cálculo de forças se tornou mais fácil na adoção de um sistema de coordenadas esféricas, onde o centro da partícula está na origem, ou seja, a potência foi determinada nos pontos $P_E = (R_p, \theta, \phi)$, sendo R_p o raio da partícula. A Fig. 4.1 ilustra como a fonte e a partícula estão situadas no espaço.

A abertura circular utilizada como fonte, por sua vez, situou-se em $z_0 \leq 0$ sobre o eixo z , com relação à origem, com centro deslocado por ρ_0 na direção ϕ_0 sobre o plano (x, y) . Ou seja, o centro da fonte estava situado no ponto $P_0 = (\rho_0, \phi_0, z_0)$ em coordenadas cilíndricas, e o eixo do feixe coincidiu com eixo z' paralelo ao eixo z .

Assim, a distância longitudinal entre os pontos P_E e P_0 é dada por $\bar{z} = R_p \cos \theta + z_0$ e a transversal devido à simetria radial da FW e usando simples relações trigonométricas,

Fig. 4.1: Representação do sistema de coordenadas utilizado. A partícula, representada pela esfera, está na origem do sistema, enquanto que o centro da fonte [representada pela curva tridimensional de $J_0(\cdot)$] se encontra no ponto $P_0(0, \phi_0, z_0)$ (em coordenadas cilíndricas), onde $z_0 \leq 0$.

por $\bar{\rho} = [(R_p \sin \theta)^2 = \rho_0^2 - 2R_p \sin \theta \rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{1/2}$, nesse trabalho, adotou-se $\phi_0 = 270^\circ$. Portanto, a potência da FW em função do ponto P_E , com P_0 fixo, vale:

$$P(P_E) = P(R_p, \theta, \phi) = |\psi(\bar{\rho}, \bar{z})|^2. \quad (4.1)$$

Para nossa análise, substituímos em (4.1) a FW escalar dada em (2.33):

$$|\psi(\bar{\rho}, \bar{z})|^2 = e^{-j\omega_0 t} e^{jQz} \sum_{n=-N}^N A_n J_0(k_{\rho n} \rho) e^{j\frac{2\pi}{L} n z}. \quad (4.2)$$

Para tanto, considerou-se que os raios do feixe chegam à superfície do hemisfério inferior ($90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) da partícula praticamente paralelos ao eixo z . Assim, o ângulo de incidência de um raio que toca nos pontos da superfície de coordenada azimutal θ equivale $180^\circ - \theta$.

4.2 Resultados e Discussões do Método I

4.2.1 Perfil Semiconstante

A função de referência $F(z)$ escolhida neste caso de perfil semiconstante é dada pela Tabela (4.2).

Tabela 4.2: Critérios para a função de referência do perfil semiconstante.

$F(z)$	Parâmetros
0	$0 \leq z < 0,25L$
1	$0,25L \leq z < 0,50L$
0	$0,50L \leq z < 0,75L$
2	$0,75L \leq z < 0,90L$
0	$0,90L \leq z < 1,00L$

O perfil longitudinal de intensidade resultante, em $\rho = 0$ foi calculado numericamente e é mostrado na Fig. 4.2 em curva tracejada. O quadrado da função de referência também pode ser visto na curva vermelha.

Fig. 4.2: Perfil longitudinal constante para perfil semiconstante da FW em $\rho = 0$ em azul tracejado e em vermelho contínuo a $|F(z)|^2$.

A Fig. 4.3(a) mostra a intensidade da FW em ρ , x e z , enquanto que a Fig. 4.3(b) representa a curva de nível da força $F_y(\rho, z)$ para uma partícula de raio $R_p = 10 \lambda$ e índice de refração relativo $n_r = 0,8$. É notória, fora do eixo longitudinal ($\rho = 0$), a grande quantidade de pontos, ou regiões em que a força é nula. Fisicamente, tal característica é explicada pelo fluxo lateral de energia, observado na Fig. 4.3(a) que existe nas regiões mais afastadas do eixo z causando variações da intensidade do feixe e, por conseguinte, do padrão de força.

A Fig. 4.4 destaca a influência da intensidade do feixe na força radial para dois planos distintos, o primeiro em $0,4 L$ e o segundo em $0,8 L$, levando-se em conta dois índices de refração relativos para partículas de raio $R_p = 10 \lambda$. Picos de força próximos a pontos de alta intensidade são observados, sendo que a força é atrativa quando o índice de refração relativo é maior que um e repulsiva, caso contrário (leva-se em consideração a posição da fonte). Tais comportamentos são naturalmente esperados para partículas dielétricas sem

Fig. 4.3: (a) $I(\rho, z)$ para a FW da Fig. 4.2 (todos os pontos de intensidade maior que 0,5 estão representadas por 0,5). (b) $F_y(\rho, z)$. Aqui, $R_p = 10 \lambda$ e $n_r = 1, 2$.

perdas. Na Fig. 4.4(a) observa-se outra região de alta intensidade após $\rho = 60 \mu\text{m}$ sendo correspondente à intensidade do feixe nesta região. Próximo ao eixo z , a força da Fig. 4.4(b) é, aproximadamente, quatro vezes maior, a mesma proporção entre as intensidades.

Fig. 4.4: Força transversal em função de ρ para partículas com raio igual a 10λ para dois valores distintos de índice de refração relativo, $n_r = 1, 50$ (curvas em preto) e $n_r = 0, 75$ (curvas em vermelho), e diferentes posições longitudinais. (a) $z = 0,4 L$. (b) $z = 0,8 L$.

Os perfis de força radial para diferentes raios da partícula (R_p) e para $z = 0,4 L$ são ilustrados na Fig. 4.5. Observa-se que quanto maior o raio da partícula, maior é a sua inércia, ou seja, menor é a intensidade da força de pico. Além disso, o valor máximo da força ocorre para ρ próximo do raio da partícula.

Nota-se, tanto na Fig. 4.4 quanto na Fig. 4.5, que independentemente do índice de refração partícula, a força radial F_y apresenta zeros nos mesmos pontos, para R_p e z

Fig. 4.5: Força transversal, em $z = 0,4 L$, em função de ρ para dois valores distintos de índice de refração relativo, $n_r = 1, 20$ (curvas em preto) e $n_r = 0,80$ (curvas em vermelho), e diferentes valores de raio. (a) $R_p = 10 \lambda$. (b) $R_p = 20 \lambda$. (c) $R_p = 30 \lambda$. (d) $R_p = 50 \lambda$.

constantes. Por exemplo, na Fig. 4.5(a), F_y para $\epsilon_r = 0,80$ apresenta um zero em $\rho = 42,04 \mu\text{m}$. Já F_y para $\epsilon_r = 1,20$ possui um zero muito próximo em $\rho = 41,96 \mu\text{m}$.

4.2.2 Perfil Exponencial Crescente

Neste segundo exemplo utilizamos um perfil exponencial crescente (Fig. 4.6) descrito matematicamente por $F(z) = e^{(-1000z)} - 1$

A Fig. 4.7(a) mostra a intensidade da FW em ρ , x e z , enquanto que a Fig. 4.7(b) representa a curva de nível da força $F_y(\rho, z)$ para uma partícula com $R_p = 10 \lambda$ e $n_r = 0,8$. Como no caso anterior, é notável que o padrão das forças assemelha-se muito com o padrão de intensidade da FW .

Fig. 4.6: Perfil longitudinal exponencial crescente da FW em $\rho = 0$ em azul tracejado e em vermelho contínuo a $|F(z)|^2$.

Fig. 4.7: (a) $I(\rho, z)$ para a FW exponencial crescente da Fig. 4.6 (todos os pontos de intensidade maior que 1 estão representadas por 1). (b) $F_y(\rho, z)$. Aqui, $R_p = 10 \lambda$ e $n_r = 0,8$.

4.3 Método II - Cálculo de Forças Ópticas Exercidas FW Vetoriais em Óptica Geométrica

Para as simulações dos perfis (constante e senoidal) foi considerado apenas uma FW vetorial de ordem zero. Assumem-se os seguintes valores para os respectivos perfis:

Tabela 4.3: Valores adotados para as simulações computacionais.

<i>Variáveis</i>	<i>Perfil Constante</i>	<i>Perfil Senoidal</i>
L	50 mm	500 μm
λ	1064 nm	1064 nm
n_1	1,33 (água)	1,33 (água)
N	25 ($2N+1=51$)	15 ($2N+1=31$)
$n_1\omega_0/c = n_12\pi/\lambda$	$7,85 \times 10^6 \text{rad/m}$	$7,85 \times 10^6 \text{rad/m}$
Q	$0,999 n_1\omega_0/c = 7,85 \times 10^6 \text{rad/m}$	$0,975 n_1\omega_0/c = 7,65 \times 10^6 \text{rad/m}$
Δ_ρ	6,85 μm	1 μm
R_a	20 μm	20 μm

O maior *ângulo de áxicon* entre os 51 feixes do perfil constante foi de 2.56° e para os 31 feixes do perfil senoidal de 18.01° , que correspondem aos feixes $n = -N_{max}$, ou seja, $n = -25$ e $n = -15$, respectivamente. Deve-se salientar que nessa etapa foram necessarias algumas escolhas para garantir simulações precisas. Inclusive cuidados para que o *spot* dos FB da superposição não fossem menor que $1\mu\text{m}$. Os valores de L e Q também foram os menores possíveis, garantindo k_ρ e k_z reais, mas ainda forçando que os FB das FW estivessem fora do limite paraxial. Por fim, o perfil longitudinal $F(z)$ foi escolhido de forma a permitir forças longitudinais negativas e pontos de equilíbrio estaveis.

4.4 Resultados e Discussões do Método II

4.4.1 Perfil Constante

A função de referência $F(z) = 1$ se $|z| \leq 0,1L$. A Fig. 4.8 mostra o perfil longitudinal constante, simulado com a teoria GLMT em curva contínua azul, e em curva tracejada laranja com o código em óptica geométrica.

Na Fig. 4.9, tem-se a força longitudinal que a FW exerce na partícula esférica em função da posição da abertura do feixe e dos índices de refração relativo em $n_{rel} = 1, 20$, $n_{rel} = 1,01$ e $n_{rel} = 0,95$.

Verifica-se, ainda na Fig. 4.9, que as curvas estão próximas para os tres índices de refração relativo e que oscilações em $\pm z$ são uma consequência de um N finito (quanto maior o N , mais próximo de um padrão de constante por $|z| \leq 0.1L$). Deve notar-se que,

Fig. 4.8: Perfil longitudinal constante da *FW* (a) 2D e (b) 3D.

Fig. 4.9: Força longitudinal constante da *FW*.

neste caso, onde os ângulos do axicon são pequenos, o regime paraxial se mantém e as forças do gradiente axial são incapazes de superar as forças de espalhamento. Portanto, não são observados pontos de força nula e a partícula não pode ser aprisionada em 3D.

4.4.2 Perfil Senoidal

Neste segundo exemplo utilizamos um perfil senoidal da Fig. 4.10, descrito matematicamente como $F(z) = \text{sen}(\pi[(z + 0,025L)/(0,15L - 0,025L)])$.

onde, em curva contínua azul é a simulação realizada com a teoria GLMT e em curva tracejada laranja com o código em óptica geométrica.

Como não estamos utilizando feixes paraxiais a intensidade de campo resultante permanece semelhante, com pequenas diferenças ocasionadas pelos termos adicionais da Eq. (2.45).

A força longitudinal quando a abertura do feixe é fixada em $z_0 = -z_{max}$ e movida ao longo do eixo z é mostrada na Fig. 4.11, para os três índices de refração relativos definidos anteriormente.

Para uma análise mais ampla, a Fig. 4.12 mostra a contribuição dos raios incidente (linha tracejada em laranja), refletido (linha tracejada em verde) e transmitido (linha

Fig. 4.10: Perfil longitudinal senoidal da *FW* em (a) 2D e (b) 3D.

Fig. 4.11: Força longitudinal senoidal da *FW*.

tracejada em vermelho) para os mesmos três índices de refração relativos do espalhador da Fig. 4.11.

Assim, como esperado, a contribuição do raio incidente é o mesmo para qualquer índice de refração relativo, a contribuição dos raios refletidos tem uma pequena variação em $n_{rel} = 1,20$ e $n_{rel} = 0,95$ e a contribuição dos raios transmitidos são praticamente iguais para os três índices de refração relativos.

A força longitudinal total, como mostrado na Fig. 4.11, inverte claramente o sinal para $n_{rel} = 1,01$, observando-se um ponto de equilíbrio estável em $z_0 = -19 \mu\text{m}$ (aproximadamente) e em $n_{rel} = 0,95$, por outro lado, o ponto $z_0 = -5 \mu\text{m}$ corresponde a uma posição instável. Outra característica interessante é a grande ação axial das forças em comparação com a parte não-nula de $F(z)$. Na verdade, apesar do padrão senoidal ter $0.15L = 75 \mu\text{m}$ as forças são denotadas por z_0 maior quanto $\pm 170 \mu\text{m}$ e isso se deve a presença de energia lateral que flui no eixo óptico devido a presença de gradientes de intensidade lateral para $z_0 > 2R_a + 0.1L = 115 \mu\text{m}$ ou $z_0 < -(2R_a + 0.1L)$.

Observe, no entanto, que o contraste do baixo índice de refração neste caso leva a forças totais de baixa magnitude, o que, ao contrário, pode não ser suficientemente forte para garantir a força de restauração necessária. Em certo sentido, uma $F(z)$ definida

Fig. 4.12: Contribuição dos raios incidente (linha tracejada em laranja), refletido (linha tracejada em verde) e transmitido (linha tracejada em vermelho) para (a) $n_{rel} = 1, 20$, (b) $n_{rel} = 1, 01$ e (c) $n_{rel} = 0, 95$.

em alguns micrometros poderia aumentar a força de gradiente axial e fornecer forças de reconstrução mais intensas.

Conclusões e Perspectivas Futuras

Esta dissertação apresentou a pesquisa de mestrado relacionada a área de cálculo de forças ópticas que aqui, baseou-se unicamente no regime da óptica geométrica. A mesma foi dividida em duas etapas, aos quais denominou-se Método I e Método II.

O primeiro método baseou-se em cálculos mais simples com baixo tempo de processamento computacional realizado no *software Mathematica 11* para a análise de forças ópticas radiais sobre partículas dielétricas esféricas, estendendo estudos anteriores com feixes escalares de Bessel, incorporando as chamadas *Frozen Waves*.

Aqui, foi desenvolvido um código de programação e simulação para dois perfis longitudinais a título de exemplo de aplicação, o primeiro com duas regiões de intensidade idealmente constante, o segundo exponencial crescente.

Assim, este primeiro passo propôs as análises teórico-numéricas acerca das propriedades de forças ópticas exercidas por *FW*, sobre partículas esféricas e dielétricas, no regime de óptica geométrica, para o qual o raio da partícula é muito maior que o comprimento de onda que ainda não tinham sido realizadas na literatura.

Para tanto, tais feixes escalares são assumidos dentro do regime paraxial, onde a solução da equação de onda escalar pode, por exemplo e em primeira aproximação, ser tomada como representando uma componente transversal de campo elétrico, sendo desprezível sua componente longitudinal. Podendo ser construído a partir de um fornecimento contínuo de energia lateral que é um comportamento típico de feixes não-difrativos.

O segundo método, mais complexo e completo, necessitou de um uso de linguagem de programação de alto nível para a otimização do tempo de processamento computacional das simulações. Assim, optou-se pela utilização da linguagem de programação orientada a objeto e com disponibilização gratuita, *Python*.

A segunda etapa levou em conta tanto a contribuição da pressão de radiação quanto da componente longitudinal da força gradiente, estendendo-se a análise prévia, considerado *FW* vetoriais circularmente simétricas com *FB* de ordem zero e com ângulos de áxicon arbitrários para dois perfis distintos, um constante e outro senoidal.

De acordo com os resultados obtidos no Método I, percebeu-se que o índice de refração

relativo e o raio da partícula afetam a amplitude da força radial, como é esperado para quaisquer feixes reais.

Contudo, a amplitude também aumenta se o contraste entre o índice de refração do meio e o da partícula aumenta ou se o raio da esfera diminui. O método aqui empregado e baseado em raios paralelos impossibilita conclusões precisas acerca das forças longitudinais.

Adicionalmente, pode-se perceber que tal distribuição espacial de raios não condiz com o fato de que cada FB , presente na superposição de composição de determinada FW , apresenta *ângulo de áxicon* próprio e distinto dos demais.

Os resultados obtidos no Método II indicaram a possibilidade de obtenção de pontos ou regiões de forças radiais nulas, os quais variam bastante em função do perfil de intensidade desejado. De fato, o diferencial de se usar uma FW para aprisionamento radial reside na característica de fluxo de energia que a onda possui.

Embora não seja trivial de se analisar, o padrão de fluxo de potência poderia ser utilizado para realizar aprisionamentos em todo espaço. Dessa forma, tais feixes não-difrativos seriam projetados (ou seja, teriam seus perfis longitudinais ao longo do eixo z , $F(z)$, determinados) a partir das armadilhas ópticas desejadas ou necessárias.

O diferencial do segundo método em relação ao primeiro com o uso das FW é que encontrou-se aprisionamento tridimensionais estáveis. Além disso, conseguiu-se modelar FW para fornecer praticamente qualquer padrão pré-selecionado, preservando simultaneamente o caráter não dispersivo de seus componentes e permitindo um grau de liberdade adicional devido ao controle axial sobre a intensidade.

Ainda assim, dado que os resultados sejam mais do que satisfatórios para análise dos perfis analisados nos dois métodos, pelo menos para feixes escalares e individuais de Bessel, os resultados aqui obtidos para tais componentes de força óptica apresentou grande coerência com situações reais.

A utilização das FW vetoriais com polarização circular simétrica é recente na literatura, sendo este, um dos primeiros casos em estudos teórico-numéricos das forças ópticas exercidas por tais feixes em partículas esféricas dielétrica no regime da óptica geométrica [42].

Foi, portanto, o primeiro passo de uma pesquisa ampla no regime de óptica geométrica, estendida para além do regime paraxial (onde forças gradientes muito mais significativas são esperadas, já que o perfil longitudinal desejado pode ser confinado em regiões da ordem de alguns microns).

Para os trabalhos futuros, consideraremos FW vetoriais por excelência não só na análise de forças ópticas mas como de torques ópticos ou outras quantidades físicas de interesse.

Referências

- [1] C. Huygens, “Traité de la lumiere - 1690,” *Gressner e Schramm*, 2005.
- [2] J. Kepler, “Sobre cometas, livro três,” *Augustae Vindelicorum*, 1916.
- [3] T. Heidarzadeh, “A history of physical theories of comets, from aristotle to whipple,” *Springer Netherlands*, 2008.
- [4] J. C. Maxwell, “A treatise on electricity and magnetism,” *Clarendon press*, vol. 1, 1881.
- [5] J. A. Stratton, “Electromagnetic theory,” *John Wiley & Sons*, 2007.
- [6] E. Recami, “On localized x-shaped superluminal solutions to maxwell equations,” *Physical A*, vol. 252, 1998.
- [7] P. N. Lebede, “Experimental examination of light pressure,” *Nuovo Cimento*, vol. 15, 1883.
- [8] E. Nichols and G. F. Hull, “A preliminary communication on the pressure of heat and light radiation,” *Physical Review (Series I)*, vol. 13, 1901.
- [9] O. M. Maragò, G. Volpe, and H. J. P, “Optical tweezers – principle and applications,” *United Kingdom: Cambridge University Press*, 2015.
- [10] A. R. Neves, A. Camposeo, S. Pagliara, S. Saija, F. Borghese, P. Denti, M. Iatì, R. Cingolani, O. Maragò, and D. Pisignano, “Rotational dynamics of optically trapped nanofibers,” *Optical Society of America*, vol. 18, 2010.
- [11] A. Ashkin, “Acceleration and trapping of particles by radiation pressure,” *Physical review letters*, vol. 24, 1970.
- [12] L. A. Ambrosio and H. E. Figueroa, “Double negative particles in optical tweezers,” in *Lasers and Electro-Optics (CLEO) and Quantum Electronics and Laser Science Conference (QELS), 2010 Conference on*, 2010, pp. 1–2.

- [13] P. Maia and H. M. Nussenzveig, “Theory of optical tweezers,” *Europhys Letter*, vol. 50.
- [14] L. A. Ambrosio and H. E. Figueroa, “Gradient forces on double-negative particles in optical tweezers using bessel beams in the ray optics regime,” *Optical Society of America*, vol. 18, 2010.
- [15] A. Ashkin, “History of optical trapping and manipulation of small-neutral particle, atoms, and molecules,” *Selected Topics in Quantum Electronics - Journal of IEEE*, vol. 12, 2000.
- [16] A. Ashkin and J. Dziedzic, “Optical trapping and manipulation of viruses and bacteria,” *Science - American Association for the Advancement of Science*, vol. 235, 1987.
- [17] L. A. Ambrosio and M. Zamboni-Rached, “Analytical approach of ordinary “frozen waves” for optical trapping and micromanipulation,” *Appl. Optical*, vol. 54, 2015.
- [18] A. R. Neves, “Força óptica em pinças ópticas: estudo teórico e experimental,” *Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física “Gleb Wataghin”*. Campinas, SP, 2006.
- [19] J. Durnin, “Exact solutions for nondiffracting beams in the scalar theory,” *Optical Society of America*, vol. 4, 1987.
- [20] J. Durnin, J. Miceli, and J. Eberly, “Diffraction-free beams,” *Optical Society of America*, vol. 58, 1987.
- [21] C. Dartora, M. Zamboni-Rached, K. Nobrega, E. Recami, and H. Figueroa, “General formulation for the analysis of scalar diffraction-free beams using angular modulation: Mathieu and bessel beams,” *Optics Communications*, vol. 222, 2003.
- [22] A. E. Siegman, “Lasers university science books,” *Mill Valley, CA*, vol. 37, 1986.
- [23] . E. Recami, M. Zamboni-Rached, and H. E. H.-F. L. A. Ambrosio, “Non-diffracting waves: An introduction,” *Wiley-VCH Verlag GmbH Co*, 2014.
- [24] L. A. Ambrosio and M. Zamboni-Rached, “Optical forces experienced by arbitrary-sized spherical scatterers from superpositions of equal-frequency bessel beams,” *Optical Society of America*, vol. 32, 2015.
- [25] M. Zamboni-Rached, “Stationary optical wave fields with arbitrary longitudinal shape by superposing equal frequency bessel beams: Frozen waves,” *Optical Society of America*, vol. 12, 2004.

- [26] A. Vieira, M. R. R. Gesualdi, and M. Zamboni-Rached, "frozen waves": experimental generation," *Optical Letter*, vol. 37, 2012.
- [27] M. Zamboni-Rached, "Diffraction-attenuation resistant beams in absorbing media," *Optics Express*, vol. 14, 2006.
- [28] L. A. Ambrosio and M. M. Ferreira, "Time-average forces over rayleigh particles by superposition of equal-frequency arbitrary-order bessel beams," *Optical Society of America*, vol. 32, 2015.
- [29] R. Quidant, D. Petrov, and G. Badenes, "Radiation forces on a rayleigh dielectric sphere in a patterned optical near field," *Optical Letter*, vol. 30, 2005.
- [30] Y. Harada and T. Asakura, "Radiation forces on a dielectric sphere in the rayleigh scattering regime," *Optics communications*, vol. 124, 1996.
- [31] P. C. Chaumet and M. Nieto-Vesperinas, "Time averaged total force, on a dipolar sphere in an electromagnetic field," *Optics Letter*, vol. 25, 2000.
- [32] G. Gouesbet, "Generalized lorenz-mie theory and applications," *Particle systems characterization - Wiley Online Library*, vol. 11, 1994.
- [33] C. Bohren and D. Huffman, "Absorption and scattering of light by small particles," *John Wiley Sons*, 1983.
- [34] V. Garces-Chavez, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett, and K. Dholakia, "Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam," *Nature- Nature Publishing Group*, vol. 419, 2002.
- [35] J. Gordon, "Radiation forces and momenta in dielectric media," *Physical Review A*, vol. 8, 1973.
- [36] M. Zamboni-Rached, H. E. Figueroa, and E. Recami, "Localized waves," *John Wiley & Sons*, vol. 194, 2007.
- [37] L. A. Ambrosio, "Feixes localizados em pinças ópticas com partículas convencionas e metamateriais," *Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas - Campinas, SP*, 2009.
- [38] M. Zamboni-Rached, L. A. Ambrosio, A. H. Dorrah, and M. Mojahedi, "Structuring light under different polarization states within micrometer domains: exact analysis from the maxwell equations," *Optics Express*, vol. 25, 2017.
- [39] M. Zamboni-Rached and E. Recami, "Subluminal wave bullets: Exact localized subluminal solutions to the wave equations," *Physical Review A*, vol. 77, 2008.

- [40] P. P. Arantes, V. S. Angelis, A. M. Santos, and L. A. Ambrosio, “Método simples em Óptica de raios para cálculo de forças radiais exercidas por superposições discretas de feixes de Bessel escalares,” *MOMAG*, 2016.
- [41] A. M. Santos, P. Arantes, and L.A.Ambrosio, “On frozen waves and their optical forces in optical tweezers using a ray optics approach,” *International Microwave and Optoelectronics Conference – IMOC*, 2017.
- [42] L. A. Ambrosio, “Circularly symmetric frozen waves: vector approach for light scattering calculations,” *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 13, 2017.
- [43] A. Ashkin, “Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime,” *The Biophysical Society*, vol. 61, 1992.
- [44] C. A. Balanis, “Advanced engineering electromagnetics,” *John Wiley Sons*, vol. 37, 1986.
- [45] G. A. Lourenço, “Estudo da propagação de feixes não difrativos tipo frozen waves através de meios dielétricos estratificados,” *Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas. Campinas-SP*, 2016.
- [46] P. P. J. Arantes, “Cálculo de forças em partículas dielétricas usando feixes de Bessel truncados no regime de óptica geométrica e de Rayleigh,” *Qualificação (Mestrado) - Universidade São Paulo. São Carlos-SP*, 2017.
- [47] A. Ashkin, “Atomic-beam deflection by resonance-radiation pressure,” *Physical Review Letters*, vol. 25, 1970.
- [48] J. Goodman, “Introduction to Fourier optics,” *McGraw-hill*, 2008.
- [49] R. Bracewell, “The Fourier transform and applications,” *John Wiley Sons*, vol. 5, 1965.
- [50] B. Osgood, “The Fourier transform and its applications,” vol. 261, 2009.
- [51] M. Zamboni-Rached, “Analytical expressions for the longitudinal evolution of nondiffracting pulses truncated by finite apertures,” *ArXiv:physics/0512148*, vol. 5, 2006.
- [52] J. H. McLeod, “The axicon: a new type of optical element,” *Optical Society of America*, vol. 44, 1954.
- [53] C. Dartora, K. Nobrega, E. Recami, and H. E. Figueroa, “Superposition of monochromatic Bessel beams in (k_q, k_z)-plane to obtain wave focusing: Spatial localized waves,” *Optics Communications*, vol. 249, 2005.

- [54] K. Milne, D. Dholakia, K. McGloin, and P. Volke-Sepulveda, “Transverse particle dynamics in a bessel beam,” *Optical Express*, vol. 15, 2007.
- [55] “<http://www.pbx-brasil.com/fisquan/notas/area01/semana073/quadrado.html>,” Acessado em Agosto 2017.
- [56] J. Arlt, V. Garcés-Chaves, W. Sibbett, and K. Dholakia, “Optical micromanipulation using a bessel light beam,” *Optics Communications*, vol. 97, 2001.
- [57] M. Zamboni-Rached, E. Recami, and H. E. Hernandez-Figueroa, “Theory of “frozen waves”: modeling the shape of stationary wave fields,” *Optical Society of America*, vol. 22, 2005.
- [58] V. Garces-Chavez, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett, D. Roskey, M. D. Summers, E. M. Wright, and K. Dholakia, “Optical levitation in a bessel light beam,” *Applied physics letters*, vol. 85, 2004.
- [59] A. Vieira, M. Zamboni-Rached, and M. R. R. Gesualdi, “Modeling the spatial shape of nondiffracting beams: experimental generation of “frozen waves” via holographic method,” *Optical Society of America*, vol. 315, 2014.
- [60] J. J. Wang, T. Wriedt, J. A. Lock, and L. Mädler, “General description of circularly symmetric bessel beams of arbitrary order,” *Journal of Quantitative Spectroscopy Radiative Transfer*, vol. 184, 2016.
- [61] J. Molloy and M. J. Padgett, “Lights, action: optical tweezers,” *Contemporary Physics - Taylor & Francis*, vol. 43, 2002.
- [62] K. C. Neuman and S. M. Block, “Optical trapping,” *Review of scientific instruments - AIP Publishing*, vol. 75, 2004.
- [63] O. M. Maragò, G. Volpe, H. J. P, P. G. Gucciardi, and A. C. Ferrari, “Optical trapping and manipulation of nanostructures,” *Nature nanotechnology - Nature Publishing Group*, vol. 8, 2013.
- [64] L. A. Ambrosio and H. E. Figueroa, “Trapping double negative particles in the ray optics regime using optical tweezers with focused beams,” *Optical Society of America*, vol. 17, 2009.
- [65] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm, and C. Steven, “Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles,” *Optical Society of America*, vol. 11, 1986.
- [66] A. Rubinov, A. A. Afanas, I. E. Ermolaev, Y. A. Kurochkin, and S. Y. Mikhnevich, “Localization of spherical particals under the action of gradient forces in the field of a zero-order bessel beam,” *Journal Applied Spectroscopy*, vol. 70, 2003.

- [67] S. Rocha, “Optical tweezers for undergraduates: Theoretical analysis and experiments,” *American Association of Physics Teachers*, vol. 8, 2009.
- [68] C. T. A. Agate, W. Brown, and K. D. Sibbett, “Femtosecond optical tweezers for in-situ control of two-photon fluorescence,” *Optical Express*, vol. 10, 2004.
- [69] Y. Zhang and K. Liu, “Absorption and scattering of light by small particles,” *Journal The Royal Society*, vol. 5, 2008.
- [70] E. Hecht, “Optics,” vol. 3, 2002.
- [71] J. H. Poynting, “On the transfer of energy in the electromagnetic field,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London - JSTOR*, vol. 175, 1884.
- [72] Y. Zhang, Y. Li, J. Qi, G. Cui, H. Liu, J. Chen, L. Zhao, J. Xu, and Q. Sun, “Influence of absorption on optical trapping force of spherical particles in a focused gaussian beam,” *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics - IOP Publishing*, vol. 10, no. 8, 2008.
- [73] A. Ashkin and J. Dziedzic, “Optical levitation of liquid drops by radiation pressure,” *Science - American Association for the Advancement of Science*, vol. 187, 1975.
- [74] A. Ashkin, “Optical trapping and manipulation of neutral particles using lasers,” *Proceedings of the National Academy of Science - National Acad Sciences*, vol. 94, 1997.
- [75] L. Yu and Y. Sheng, “Mechanical analysis of the optical tweezers in time-sharing regime,” *Optical Express*, vol. 22, 2014.
- [76] C. Dartora, K. Nobrega, E. Recami, and H. E.Figueroa, “Properties of localized pulses through the analysis of temporal modulation effects in bessel beams and the convolution theorem beams,” *Optics Communications*, vol. 229, 2003.
- [77] A. T. Young, “Rayleigh scattering.” *Physics Today - ERIC*, vol. 35, 1982.
- [78] P. P. J. Arantes, “Opticalforces,” <https://github.com/arantespp/opticalforces>, 2017.

Anexos

ANEXO **A**

Artigo: Método Simples em Óptica de Raios Para Cálculo de Forças Radiais Exercidas por Superposições Discretas de Feixes de Bessel Escalares, MO-MAG – 2016 (Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônica e o Congresso Brasileiro de Magnetismo).

Método Simples em Óptica de Raios para Cálculo de Forças Radiais Exercidas por Superposições Discretas de Feixes de Bessel Escalares

Pedro Paulo Justino da Silva Arantes, Vinicius Soares de Angelis, Amélia Moreira Santos, Leonardo André Ambrosio

Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação (SEL)

Escola de Engenharia de São Carlos (EESC), Universidade de São Paulo (USP).

São Carlos, SP, Brasil. 13566-590.

pedro.arantes@usp.br, vinicius.angelis@usp.br e ameliams@usp.br, leo@sc.usp.br

Resumo—A análise de forças ópticas exercidas por superposições discretas de feixes de Bessel escalares é recente. Tais feixes são interessantes do ponto de vista prático, pois possibilitam projetar padrões longitudinais de intensidade arbitrários e, portanto, fornecem um mecanismo simples para múltiplas armadilhas tridimensionais. Aqui, propomos o uso de um método simples para a análise aproximada, no regime de óptica geométrica, de forças radiais exercidas por tais feixes sobre partículas esféricas dielétricas, já aplicadas a feixes simples de Bessel escalares. Tal método consiste em observar que, no regime paraxial, todos os raios associados aos feixes se encontram quase paralelos entre si, tomando assim como aproximação uma superposição de raios paralelos que incidem completamente sobre um hemisfério do espalhador. O perfil de intensidade do feixe é determinado, então, pelo perfil radial de potência associado a cada feixe, e as forças radiais posteriormente determinadas através de métodos numéricos.

Palavras-chaves—Aprisionamento óptico; óptica geométrica; feixes de Bessel; forças ópticas.

I. INTRODUÇÃO

O uso de um único feixe de Bessel (FB) em sistemas de aprisionamento óptico permite a criação de armadilhas bidimensionais para captura simultânea de várias partículas em múltiplos planos, todos perpendiculares ao eixo óptico [1-3]. Tal característica se deve, em parte, por conta dos anéis radiais de intensidade e, além disso, devido ao foco estendido (características não difrativas) e às propriedades de autorreconstrução [4-7].

Recentemente [8-10], um dos autores deste trabalho propôs a adoção, como feixes de captura, das chamadas *Frozen Waves* (FWs), que nada mais são do que superposições discretas de FB escalares, estes últimos com eixo óptico comum e possuindo a mesma frequência de operação e, portanto, o mesmo número de onda, embora cada um carregue um número de onda longitudinal (ou radial) distinto. Tais campos de onda, além das características não difrativas e de autorreconstrução típicas de seus constituintes, permitem modelar, arbitrariamente, o perfil longitudinal de intensidade. Isso é possível graças a uma escolha adequada dos coeficientes complexos da superposição, que servem como

pesos a cada FB que compõe a FW desejada [11-16].

Embora inicialmente geradas em escalas mais largas (ordem de metros), a introdução de FWs em sistemas de pinças ópticas permitiria a criação de armadilhas efetivamente tridimensionais a partir de FB escalares (regime paraxial), o que vem sendo demonstrado recentemente com trabalhos envolvendo o cálculo das forças ópticas sobre partículas esféricas dielétricas nos regimes de Rayleigh e de Mie [8-10].

No regime de Rayleigh, os espalhadores dielétricos são modelados como simples dipolos elétricos, sendo o cálculo das forças ópticas simples e direto [10,17-19]. Para partículas com dimensões da ordem do comprimento de onda, entretanto, tanto a aproximação de dipolo quanto a aproximação por óptica de raios se tornam inadequadas, e então adotam-se as chamadas teorias generalizadas de Lorenz-Mie (GLMT - *Generalize Lorenz-Mie Theory*). A GLMT trata o problema de espalhamento através de expansões dos campos eletromagnéticos (EM) incidentes, espalhados e internos às partículas em funções de harmônicos esféricos vetoriais, sendo que um feixe de perfil de intensidade arbitrário é descrito a partir do conhecimento dos coeficientes complexos da expansão dos campos EM incidentes, conhecidos como fatores de forma (BSC - *Beam Shape Coefficients*). No caso dos campos internos e espalhados, temos também os coeficientes de Mie [20-22].

Em óptica geométrica, para o qual o raio da partícula é muito maior que o comprimento de onda, o cálculo das forças ópticas envolve a descrição do feixe incidente em termos de raios e a consideração do problema de espalhamento como um de múltiplas reflexões/refrações em uma interface (a superfície da partícula) [23-24]. Nesse caso, métodos de integração são geralmente necessários para a consideração dos infinitos raios que incidem sobre parte da superfície do espalhador.

Um método simples, porém eficaz, para o cálculo das forças *radiais* ou *transversais* foi demonstrado por L. A. Ambrosio em 2010 especificamente para FB escalares de ordem arbitrária ν [25]. Nesse método, a partícula é suposta centrada em um sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) e o feixe assume deslocamento arbitrário $(x_0, y_0) = (r_0, \phi_0)$ sobre o plano xy , mantendo seu eixo óptico sempre paralelo ao eixo

Este trabalho foi desenvolvido a partir de recursos da FAPESP, projetos no. 2014/04867-1 (Auxílio Pesquisa - Regular de L. A. Ambrosio) e 2015/21105-0 (Bolsa IC de V. S. de Angelis).

A CAPES apoiou este trabalho através de bolsas de mestrado de P. P. J. S. Arantes e de A. M. Santos.

z (r_0 e ϕ_0 estão associados às componentes radiais e azimutais em sistema cilíndrico equivalente). Os raios são considerados todos paralelos entre si, sendo que cada um carrega uma potência específica que depende da distância radial em relação ao eixo óptico. O perfil de potência reflete o perfil de Bessel, isto é, $P \propto |J_\nu[k_\rho((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^{1/2}]|^2$, onde $J_\nu(\cdot)$ são FB e k_ρ é o número de onda radial.

Neste trabalho, propomo-nos a estender a análise realizada em [25] para o cálculo das forças ópticas *radiais*, em óptica geométrica, exercidas por FWs sobre partículas esféricas dielétricas. Naturalmente, embora as forças radiais possam ser analisadas com certa precisão, os paralelismos dos raios incidentes impedem qualquer tentativa de análise de forças longitudinais, através do método aqui proposto, com maior precisão. Isso, por um lado, não nos permite inferir possíveis pontos (ou regiões) de equilíbrio (estável) objetivando a determinação de armadilhas tridimensionais com FWs, como já realizado em outros regimes ópticos. Todavia, ainda assim serve de guia para um estudo da dinâmica radial de espalhadores esféricos sob a ação de tais campos de onda.

Assim, a seção seguinte apresenta uma rápida revisão de FWs e de como as forças ópticas radiais e longitudinais (axiais) podem ser determinadas no regime de óptica geométrica para um feixe de distribuição espacial de intensidade arbitrária. A seguir, as forças radiais são numericamente determinadas para dois casos particulares de FWs, isto é, para dois padrões longitudinais de intensidade: semiconstante e exponencial crescente, comparando os resultados com aqueles esperados para um único FB. Finalmente, nossas conclusões são apresentadas.

II. ANÁLISE TEÓRICA

A. Frozen Waves (FWs)

As FWs são ondas formadas pela superposição de $2N + 1$ FB escalares de mesma frequência, cuja característica é reproduzir o padrão de intensidade axial de uma função $F(z)$ em um intervalo pré-definido $0 \leq z \leq L$. O n -ésimo FB possui amplitude A_n , em geral complexa, e números de onda transversal e longitudinal, $k_{\rho n}$ e k_{zn} respectivamente [11]. A equação (com a dependência temporal $e^{-j\omega_0 t}$ omitida e supondo propagação em $+z$) que descreve tal superposição e representa a solução da equação de onda escalar é dada, em coordenadas cilíndricas, por

$$\psi(\rho, z) = \sum_{n=-N}^N A_n J_0(k_{\rho n} \rho) e^{jk_{zn} z}. \quad (1)$$

onde $J_0(\cdot)$ é a função de Bessel ordinária. As amplitudes A_n são definidas a partir da função de referência $F(z)$, e são dadas por:

$$A_n = \frac{1}{L} \int_0^L F(z) e^{-j(2\pi/L)nz} dz. \quad (2)$$

Os números de onda longitudinais k_{zn} , por sua vez, são definidos por:

$$k_{zn} = Q + \frac{2\pi}{L} n \leq n_1 \frac{\omega_0}{c}, \quad (3)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo, n_1 o índice de refração do meio propagante e $Q > 0$ é um parâmetro relacionado ao grau de localização de campo transversal, tendendo a ser muito próximo de ω_0/c por conta do regime paraxial e, em consequência, dos reduzidos ângulos de áxicon. O máximo valor de n , N , deve respeitar o limite superior imposto em (3). Fisicamente, tal restrição necessariamente implica em considerarmos apenas feixes propagantes (e não evanescentes).

Por fim, o número de onda transversal $k_{\rho n}$ do n -ésimo FB relaciona-se necessariamente com (3):

$$k_{\rho n} = \sqrt{n_m^2 \frac{\omega_0^2}{c^2} - \left(Q + \frac{2\pi}{L} n\right)^2}. \quad (4)$$

B. Potência de uma Frozen Wave

Para o cálculo das forças ópticas, é necessário saber de antemão a distribuição de potência do feixe incidente. Como a potência é proporcional à intensidade do feixe, vamos definir a potência normalizada de uma FW como $P(\rho, z) = |\psi(\rho, z)|^2$, onde $\psi(\rho, z)$ é dada em (1).

Como estamos interessados na distribuição de campo na superfície do espalhador, o cálculo de forças se torna mais fácil se adotarmos o sistema de coordenadas esféricas onde o centro da partícula está na origem, ou seja, a potência será determinada nos pontos $P_E = (R_p, \theta, \phi)$ (em coordenadas esféricas), onde R_p é o raio da esfera. A abertura circular utilizada como fonte, por sua vez, situa-se em $z_0 \leq 0$ sobre o eixo z , com relação à origem, com centro deslocado por ρ_0 na direção ϕ_0 sobre o plano xy . Ou seja, o centro da fonte está situado no ponto $P_0 = (\rho_0, \phi_0, z_0)$ (em coordenadas cilíndricas), e o eixo do feixe coincide com eixo z' paralelo ao eixo z . A Fig. 1 ilustra como a fonte e a partícula estão situadas no espaço (as escalas não representam, necessariamente, uma situação real).

Fig. 1. Representação do sistema de coordenadas utilizado. A partícula, representada pela esfera, está na origem do sistema, enquanto que o centro da fonte [representada pela curva tridimensional de $J_0(\cdot)$] se encontra no ponto $P_0(\rho_0, \phi_0, z_0)$ (em coordenadas cilíndricas), onde $z_0 \leq 0$.

Assim, a distância longitudinal entre os pontos P_E e P_0 é dada por $\bar{z} = R_p \cos \theta + z_0$ e a transversal (devido à simetria radial da FW e usando simples relações trigonométricas), por $\bar{\rho} = [(R_p \sin \theta)^2 + \rho_0^2 - 2R_p \sin \theta \rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{1/2}$ (neste trabalho, adotou-se $\phi_0 = 270^\circ$). Portanto, a potência da FW em função do ponto P_E , com P_0 fixo, vale

$$P(P_E) = P(R_p, \theta, \phi) = |\psi(\bar{\rho}, \bar{z})|^2. \quad (5)$$

C. Forças Ópticas

Como o objetivo deste trabalho é estudar a força gradiente (força que atua para mover a partícula para regiões de maior intensidade) causada por uma FW em uma determinada partícula, vamos defini-la, primeiramente, para um único raio.

Segundo [25], a direção da força gradiente é igual ao sentido da normal do ponto onde o raio toca a superfície, sendo seu módulo dado por [23,25]:

$$f_g = \frac{n_1 P}{c} \left[R \sin 2\theta_i - T^2 \frac{\sin(2\theta_i - 2\theta_t) + R \sin 2\theta_i}{1 + R^2 + 2R \cos 2\theta_t} \right], \quad (6)$$

onde P é a potência do raio incidente na partícula, R e T são os coeficientes de Fresnel de reflexão e transmissão, respectivamente, e θ_i o ângulo de incidência do raio e θ_t , o transmitido, com relação à normal à superfície da partícula.

No caso de uma FW, para calcular a força total, devemos somar as contribuições de cada raio incidente na partícula. Para tanto, consideramos que os raios do feixe chegam à superfície do hemisfério inferior ($90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) da partícula praticamente paralelos ao eixo z . Assim, o ângulo de incidência de um raio que toca nos pontos da superfície de coordenada azimutal θ vale $180^\circ - \theta$.

Como o interesse está na força radial, devemos determinar a contribuição radial de f_g . De acordo com [25] e por conta de o deslocamento da fonte se dar apenas ao longo do eixo y (a simetria do problema nos permite considerar qualquer eixo de referência para deslocamento sobre o plano xy), a componente radial da força gradiente está no sentido de y e é dada por:

$$f_y = f_g \sin \theta \sin \phi. \quad (7)$$

Dessa forma, a força radial total, F_y , é determinada integrando (7) na superfície do hemisfério inferior da partícula, dividido pela área do hemisfério. Matematicamente:

$$F_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_{\pi/2}^\pi f_g \sin \phi (\sin \theta)^2 d\phi d\theta. \quad (8)$$

III. RESULTADOS

Neste trabalho, consideraremos duas FWs com perfis distintos. Em ambos os casos, assumem-se os seguintes

valores para as respectivas variáveis: $L = 1$ mm; $\lambda = 1064$ nm; $n_1 = 1,33$ (água); $N = 20$ ($2N + 1 = 41$); $n_1 \omega_0 / c = n_1 2\pi / \lambda = 7,85 \times 10^6$ rad/m; $Q = 0,984 n_1 \omega_0 / c = 7,73 \times 10^6$ rad/m; $\Delta\rho$ (spot do maior feixe da superposição) = $20 \mu\text{m}$ e R_a (raio de abertura da fonte) = 1 mm. Nesta situação, o maior ângulo de áxicon dentre os 41 feixes foi de $14,56^\circ$, o que permitiu considerar a aproximação paraxial dentro de níveis toleráveis de erro.

A. Caso 1- Perfil Semiconstante

A função de referência $F(z)$ escolhida neste caso de perfil semiconstante é dada por: 0 para $0 \leq z < 0,25L$, 1 para $0,25L \leq z < 0,50L$, 0 para $0,50L \leq z < 0,75L$, 2 para $0,75L \leq z < 0,90L$ e 0 para $0,90L \leq z < 1,00L$. A partir de (1) e (2), o perfil longitudinal de intensidade resultante, em $\rho = 0$, foi calculado numericamente e é mostrado na Fig. 2, em curva tracejada. O quadrado da função de referência também pode ser visto na figura (curva contínua, vermelha).

Fig. 2. Perfil longitudinal constante para perfil semiconstante. Em vermelho e contínuo (azul tracejado), $|F(z)|^2$ (a intensidade da FW em $\rho = 0$).

A Fig. 3(a) mostra a intensidade da FW em $\rho \times z$, enquanto que a Fig. 3(b) representa a curva de nível da força $F_y(\rho, z)$ para uma partícula de raio $R_p = 10\lambda$ e índice de refração relativo $n_r = 0,8$. É notória, fora do eixo longitudinal ($\rho = 0$), a grande quantidade de pontos, ou regiões, nos quais a força é nula. Fisicamente, tal característica é explicada pelo fluxo lateral de energia, observado na Fig. 3(a), que existe nas regiões mais afastadas do eixo z causando variações na intensidade do feixe e, por conseguinte, do padrão de força.

A Fig. 4 salienta a influência da intensidade do feixe na força radial para dois planos distintos em $0,4L$ [Fig. 4(a)] e $0,8L$ [Fig. 4(b)], levando-se em conta dois índices de refração relativos para partículas de raio $R_p = 10\lambda$. Picos de força próximos a pontos de alta intensidade são observados, sendo que a força é atrativa quando o índice de refração relativo é maior que um e repulsiva, caso contrário (leva-se em consideração a posição da fonte). Tais comportamentos são naturalmente esperados para partículas dielétricas sem perdas. Na Fig. 4(a) observa-se outra região de alta intensidade após $\rho = 60 \mu\text{m}$, correspondente à intensidade do feixe nesta região. Próximo ao eixo z , a força da Fig. 4(b) é, aproximadamente, quatro vezes maior, a mesma proporção entre as intensidades.

Fig. 3. (a) $I(\rho, z)$ para a FW da Fig. 2 (todos os pontos de intensidade maior que 0,5 estão representados por 0,5). (b) $F_y(\rho, z)$. Aqui, $R_p = 10\lambda$ e $n_r = 1,2$. Para melhor visualização, forças maiores que 10 pN (menores que -10 pN) estão no conjunto das forças de 10 pN, em vermelho (-10 pN, em azul).

Os perfis de força radial para diferentes raios R_p da partícula e para $z = 0,4L$ são ilustrados na Fig. 5. Observa-se que, quanto maior o raio da partícula, maior é a sua inércia, ou seja, menor é a intensidade da força de pico. Além disso, o valor máximo da força ocorre para ρ próximo do raio da partícula, assim como previsto por [23].

Nota-se, tanto na Fig. 4 quanto na Fig. 5, que independentemente do índice de refração partícula, a força radial F_y apresenta zeros nos mesmos pontos, para R_p e z constantes. Por exemplo, na Fig. 5. (a), F_y para $\epsilon_r = 0,80$ apresenta um zero em $\rho = 42,04 \mu\text{m}$. Já F_y para $\epsilon_r = 1,20$ possui um zero muito próximo, em $\rho = 41,96 \mu\text{m}$.

Fig. 4. Força transversal em função de ρ para partículas com raio igual a 10λ para dois valores distintos de índice de refração relativo, $n_r = 1,50$ (curvas em preto) e $n_r = 0,75$ (curvas em vermelho), e diferentes posições longitudinais. (a) $z = 0,4L$. (b) $z = 0,8L$.

Fig. 5. Força transversal, em $z = 0.4L$, em função de ρ para dois valores distintos de índice de refração relativo, $n_r = 1.20$ (curvas em preto) e $n_r = 0.80$ (curvas em vermelho), e diferentes valores de raio. (a) $R_p = 10\lambda$. (b) $R_p = 20\lambda$. (c) $R_p = 30\lambda$. (d) $R_p = 50\lambda$.

B. Caso 2 – Perfil Exponencial Crescente

Neste segundo exemplo utilizamos um perfil exponencial crescente descrito matematicamente por $F(z) = e^{-1000z} - 1$.

Fig. 6. Perfil longitudinal exponencial crescente. Em vermelho e contínuo, $|F(z)|^2$; em azul e tracejado, a intensidade da FW a partir de (1).

A Fig. 7(a) mostra a intensidade da FW em $\rho \times z$, enquanto que a Fig. 7(b) representa a curva de nível da força $F_y(\rho, z)$ para uma partícula com $R_p = 10\lambda$ e $n_r = 0.8$. Como no caso anterior, é notável que o padrão das forças assemelha-se muito com o padrão de intensidade da FW.

Fig. 7. (a) $I(\rho, z)$ para a FW exponencial crescente da Fig. 6 (todos os pontos de intensidade maior que 1 estão representados por 1). $F_y(\rho, z)$. Aqui, $R_p = 10\lambda$ e $n_r = 0.8$. Para melhor visualização, forças maiores que 5 pN (menores que -5 pN) estão no conjunto das forças de 5 pN, em vermelho (-5 pN, em azul).

IV. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um métodos simples, em óptica geométrica, para análise de forças ópticas radiais sobre partículas dielétricas esféricas, estendendo estudos anteriores com feixes escalares de Bessel, incorporando as chamadas *Frozen Waves*. Aqui, dois perfis longitudinais foram escolhidos a título de exemplo de aplicação, o primeiro com duas regiões de intensidade idealmente constante, o segundo exponencial crescente.

Os resultados aqui obtidos indicam a possibilidade de obtenção de pontos ou regiões de forças radiais nulas, os quais variam bastante em função do perfil de intensidade desejado. De fato, o diferencial de se usar uma *Frozen Wave* para

aprisionamento radial reside na característica de fluxo de energia que a onda possui. Embora não seja trivial de se analisar, o padrão de fluxo de potência poderia ser utilizado para realizar aprisionamentos em todo espaço. Dessa forma, tais feixes não difrativos seriam projetados [ou seja, teriam seus perfis longitudinais ao longo do eixo z , $F(z)$, determinados] a partir das armadilhas ópticas desejadas ou necessárias.

Com base nos resultados obtidos, o índice de refração relativo e o raio da partícula afetam a amplitude da força radial, como é esperado para quaisquer feixes reais. A amplitude aumenta se o contraste entre o índice de refração do meio e o da partícula aumenta ou se o raio da esfera diminui.

O método aqui empregado é baseado em raios paralelos impossibilita conclusões precisas acerca das forças longitudinais. Adicionalmente, pode-se perceber que tal distribuição espacial de raios não condiz com o fato de que cada feixe de Bessel, presente na superposição de composição de determinada *Frozen Wave*, apresenta ângulo de âxicon próprio e distinto dos demais. Ainda assim, dado que os resultados são mais do que satisfatórios para análise dos perfis de forças radiais, pelo menos para feixes escalares e individuais de Bessel, os resultados aqui obtidos para tais componentes de força óptica devem apresentar grande coerência com situações reais.

Uma extensão natural deste trabalho poderia ser a análise da componente longitudinal de força óptica, adotando-se, para tanto, métodos mais robustos que levem em conta tanto a contribuição da pressão de radiação quanto da componente longitudinal da força gradiente. Além disso, um comparativo se faz ainda necessário entre os resultados em óptica geométrica e aqueles advindos de extensões da teoria de Lorenz-Mie para feixes de perfis espaciais arbitrários. Tais estudos encontram-se, atualmente, em andamento.

REFERÊNCIAS

- [1] J. Arlt, V. Garcés-Chaves, W. Sibbett, K. Dholakia, "Optical micromanipulation using a Bessel light beam," *Opt. Comm.*, vol. 197, pp. 239-245, October 2001.
- [2] V. Garcés-Chaves, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett e K. Dholakia, "Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam," *Nature*, vol. 419, pp. 145-147, September 2002.
- [3] V. Garcés-Chavez, D. Roskey, M. D. Summers, H. Melville, D. McGloin, E. M. Wright, and K. Dholakia, "Optical levitation in a Bessel light beam," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 85, pp. 4001-4003, November 2004.
- [4] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*. New York: Mc Grow-Hill, 1941.
- [5] J. Durnin, "Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 4, pp. 651-654, April 1987.
- [6] J. Durnin, and J. J. Miceli Jr., "Diffraction-Free Beams," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, pp. 1499-1501, April 1987.
- [7] R. M. Herman e T. A. Wiggins, "Production and uses of diffractionless beams," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 8, pp. 932-942, June 1991.
- [8] L. A. Ambrosio, and M. Zamboni-Rached, "Analytical approach of ordinary frozen waves for optical trapping and micromanipulation," *Appl. Opt.*, vol. 54, pp. 2584-2593, April 2015.
- [9] L. A. Ambrosio, and M. Zamboni-Rached, "Optical forces experienced by arbitrary-sized spherical scatterers from superpositions of equal-frequency Bessel beams," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 32, pp. 37-46, May 2015.
- [10] L. A. Ambrosio, and M. de M. Ferreira, "Time-average forces over Rayleigh particles by superposition of equal-frequency arbitrary-order Bessel beams," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 32, pp. 67-74, May 2015.
- [11] M. Zamboni-Rached, "Stationary optical wave fields with arbitrary longitudinal shape, by superposing equal frequency Bessel beams: frozen waves," *Opt. Express*, vol. 12, pp. 4001-4006, August 2004.
- [12] M. Zamboni-Rached, E. Recami, and H. E. Hernández-Figueroa, "Theory of 'frozen waves': modeling the shape of stationary wave fields," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 22, pp. 2465-2475, November 2005.
- [13] M. Zamboni-Rached, "Diffraction-attenuation resistant beams in absorbing media," *Opt. Express*, vol. 14, pp. 1804-1809, March 2006.
- [14] M. Zamboni-Rached, L. A. Ambrosio, and H. E. Hernández-Figueroa, "Diffraction-attenuation resistant beams: their higher-order versions and finite-aperture generations," *Appl. Opt.*, vol. 49, pp. 5861-5869, October 2010.
- [15] T. A. Vieira, M. R. R. Gesualdi, and M. Zamboni-Rached, "Frozen waves: experimental generation," *Opt. Lett.*, vol. 37, pp. 2034-2036, June 2012.
- [16] T. A. Vieira, M. Zamboni-Rached, and M. R. R. Gesualdi, "Modeling the spatial shape of nondiffracting beams: experimental generation of frozen waves via holographic method," *Opt. Commun.*, vol. 315, pp. 374-380, March 2014.
- [17] Y. Harada, and T. Asakura, "Radiation forces on a dielectric sphere in the Rayleigh scattering regime," *Opt. Commun.*, vol. 124, pp. 529-541, March 1996.
- [18] P. C. Chaumet, and M. Nieto-Vesperinas, "Time averaged total force, on a dipolar sphere in an electromagnetic field," *Opt. Lett.*, vol. 25, pp. 1065-1067, August 2000.
- [19] A. N. Rubinov, A. A. Afanas'ev, I. E. Ermolaev, Y. A. Kurochkin, and S. Y. Mikhnevich, "Localization of spherical particles under the action of gradient forces in the field of a zero-order Bessel beam," *J. Appl. Spectrosc.*, vol. 70, pp. 565-572, July-August 2003.
- [20] J. A. Lock, and G. Gouesbet, "Generalized Lorenz-Mie theory and applications," *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 110, pp. 800-807, July 2009.
- [21] G. Gouesbet, "Generalized Lorenz-Mie theories, the third decade: a perspective," *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 110, pp. 1223-1238, September-November 2009.
- [22] G. Gouesbet, and G. Gréhan. *Generalized Lorenz-Mie Theories*. Berlin-Heidelberg: Springer, 2011.
- [23] A. Ashkin, "Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime," *Biophys. J.*, vol. 61, pp. 569-582, February 1992.
- [24] Y. Zhang, Y. Li, J. Qi, G. Cui, H. Liu, J. Chen, L. Zhao, J. Xu, and Q. Sun, "Influence of absorption on a trapping force of spherical particles in a focused Gaussian beam," *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, vol. 10, p. 085001, June 2008.
- [25] L. A. Ambrosio, and H. E. Hernández-Figueroa, "Gradient forces on double-negative particles in optical tweezers using Bessel beams in the ray optics regime," *Opt. Express*, vol. 18, pp. 24287-24292, November 2010.

Artigo: On Circularly Symmetric Frozen Waves and their Optical Forces in Optical Tweezers Using a Ray Optics Approach, IMOC-2017 (International Microwave and Optoelectronics Conference).

On Circularly Symmetric Frozen Waves and their Optical Forces in Optical Tweezers Using a Ray Optics Approach

Amélia Moreira Santos, Pedro Paulo Justino da Silva Arantes and Leonardo André Ambrosio

Department of Electrical and Computer Engineering (SEL)

São Carlos School of Engineering, University of São Paulo (EESC/USP)

São Carlos, Brazil

ameliams@usp.br, arantespp@gmail.com and leo@sc.usp.br

Abstract—In this work we analyze, in the ray optics regime, the optical forces exerted on micro-sized dielectric spheres due to optical beams created as suitable discrete superpositions of scalar and vector Bessel beams - also known as frozen waves, thus envisioning applications in optical tweezers. Scalar frozen waves have been recently and theoretically introduced as auxiliary optical fields in the trapping and manipulation of neutral particles paper in both the Rayleigh (dipole) and the Mie regimes, the latter demanding a full electromagnetic treatment. Here, the extension of previous studies is twofold in the sense that we perform investigations both in the ray optics regime, which has only been previously considered in terms of simplistic models, and in terms of a vector approach which allows us to go beyond the paraxial approximation.

Index Terms—Mie theory, optical trapping and micromanipulation, scattering theory.

I. INTRODUCTION

The first experimental evidences that a Bessel beam (BB) could optically manipulate a micro-sized dielectric particle was provided by Arlt et al. in 2001 [1]. Originally developed as a technique for confining particles at the focus of a laser (Gaussian) beam, optical tweezers have greatly benefited from the advantages presented by BBs [1]–[4]. Indeed, their extended focus, multi-ringed and self-healing properties have been used, among others, for the purpose of providing simultaneous traps at multiple transverse planes [2], [5], [6]. But at the same time, it has been observed that longitudinal gradient forces are incapable of compensating for the scattering forces, thus revealing the impossibility of creating effective three-dimensional traps with single BBs (a single BB is a non-focused beam with constant laser power. For instance, changing the power and/or using an optical levitation trap together with a low numerical aperture microscope objective may indeed provide a three-dimensional trap - see Ref. [7] and references therein).

The possibility of having an optical field possessing, in addition to all non-diffracting properties attributable to BBs, a degree of freedom in the design of its longitudinal intensity pattern was theoretically considered perhaps for the first time

by Zamboni-Rached in 2004 [8]. Taking the ideal scalar BB as a starting point, he demonstrated that virtually any desired longitudinal intensity pattern could be created by taking suitable discrete superpositions of such beams. The resulting field, widely known as a frozen wave (FW), involved $2N + 1$ BBs with the same order and frequency, but with distinct longitudinal (or radial) wave numbers [8]–[11]. Experimental generations of finite-energy FWs with arbitrary or mixed order have been realized with distinct and interesting longitudinal patterns for optical communications, optical trapping and atom guiding in both lossless or absorbent media [12]–[16].

Recently, Ambrosio et al. introduced arbitrary-order scalar FWs in optical trapping by evaluating their optical forces exerted over micro-sized dielectric spherical particles, using either a dipole approximation (Rayleigh regime) or by taking the full electromagnetic theory into account (which, for spheres, is represented by generalized Lorenz-Mie theories, GLMT [17]) [18]–[20]. The idea is to have a new and alternative laser beam for optical trapping biological particles which possess all the advantageous non-diffracting properties established for BBs and, at the same time, provides the necessary longitudinal gradient forces so as to balance scattering forces by means of specific longitudinal field intensity patterns [18].

In the ray optics regime, a first investigation of FWs and optical forces over dielectric spheres was recently put forward by us using a simple method based on parallel rays of distinct power [21]. In this case it is immediate to conclude, however, that only radial forces can be inferred from such an approach, and that highly paraxial beams are implicitly mandatory. The most notable feature of FWs, viz. the ability to provide longitudinal intensity patterns of arbitrary shape, cannot be incorporated and analyzed.

Regardless of the optical regime (Rayleigh, Mie or ray optics), so far all attempts towards the theoretical introduction of FWs in optical tweezers systems have been restricted to the paraxial regime. The scalar FWs are taken as the transverse electric field component of the incident beam, the longitudinal component being simply neglected (approximately evaluated

L. A. Ambrosio thanks FAPESP (project no. 2016/11174-8). P. P. J. S. Arantes and A. M. Santos thank CAPES (master's scholarship).

in the framework of the GLMT). This poses serious restrictions on the possibility of getting highly efficient three-dimensional traps. At the same time, there is still the need for a more reliable treatment of the optical forces in the ray optics regime, since even when paraxiality conditions are satisfied, non-parallel rays must be enforced so as to correctly account for the physical properties of interest.

In view of that, this paper addresses the two issues aforementioned. First, we extend our previous analysis of paraxial FWs by considering a rigorous ray optics model in order to calculate the optical forces exerted over dielectric spheres whose radius are much larger than the wavelength. Then, for the first time in the literature, we go beyond the paraxial regime and consider vector FWs with zero-order BBs of arbitrary half-cone angles, thus clearly showing the ability of FWs to effectively trap particles in 3D-fashion.

The next Section shows some mathematical aspects of scalar and vector FWs, together with a brief review on how optical forces emerge from the linear momentum transfer between light and matter, based on a simple multiple reflection/transmission diagram. All beams are assumed ideal in the sense that they carry an infinite amount of energy. Section III then presents some examples of particular FWs and their corresponding radial and longitudinal optical forces as functions of the relative refractive index and the relative distance of the particle. Finally, we present our conclusions.

II. MATHEMATICAL ASPECTS OF FWs AND OPTICAL FORCES IN THE RAY OPTICS REGIME

A. Frozen Waves

A vector FW can be constructed from a discrete sum of $2N + 1$ vector BBs. Since a particular polarization must be chosen, we have to define which vector BBs may be of interest for (i) theoretical analysis of light scattering in the ray optics approach, (ii) a full electromagnetic approach based on the GLMT with an exact and possibly analytical description of the incident field, and (iii) practical use. Gathering all the aforementioned conditions, one is induced to consider optical beams with circularly symmetric polarization. Circularly symmetric BBs are vector beams whose electric and magnetic field components have been symmetrized [22], [23]. They are important solutions to the Maxwell's equations possessing azimuthally symmetric Poynting vector power densities, being easily incorporated in our theoretical and numerical study of light scattering by large particles.

Let us superpose $2N + 1$ circularly symmetric zero-order (vector) BBs. Relying on expressions available in the literature for their field components [23], we derived the following expressions for the field components of a circularly symmetric zero-order FW with polarization (1,0) (which is a reminiscent of linear polarization):

$$E_x^{(1,0)} = \sum_{q=-N}^N \bar{A}_q g(\alpha_q) e^{-jk_{zq}z} \{ (1 + \cos \alpha_q) J_0(\sigma_q) + \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha_q) [e^{j2\phi} J_2(\sigma_q) + e^{-j2\phi} J_{-2}(\sigma_q)] \}, \quad (1)$$

$$E_y^{(1,0)} = \sum_{q=-N}^N \bar{A}_q g(\alpha_q) e^{-jk_{zq}z} \frac{1}{2j} (1 - \cos \alpha_q) \times [e^{j2\phi} J_2(\sigma_q) - e^{-j2\phi} J_{-2}(\sigma_q)], \quad (2)$$

$$E_z^{(1,0)} = j \sum_{q=-N}^N \bar{A}_q g(\alpha_q) e^{-jk_{zq}z} \sin \alpha_q \times [e^{j\phi} J_1(\sigma_q) - e^{-j\phi} J_{-1}(\sigma_q)], \quad (3)$$

$$B_x^{(1,0)} = \frac{k}{\omega} \sum_{q=-N}^N \bar{A}_q g(\alpha_q) e^{-jk_{zq}z} \frac{1}{2j} (1 - \cos \alpha_q) \times [e^{j2\phi} J_2(\sigma_q) - e^{-j2\phi} J_{-2}(\sigma_q)], \quad (4)$$

$$B_y^{(1,0)} = \frac{k}{\omega} \sum_{q=-N}^N \bar{A}_q g(\alpha_q) e^{-jk_{zq}z} (1 + \cos \alpha_q) J_0(\sigma_q) - \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha_q) [e^{j2\phi} J_2(\sigma_q) + e^{-j2\phi} J_{-2}(\sigma_q)], \quad (5)$$

$$B_z^{(1,0)} = \frac{k}{\omega} \sum_{q=-N}^N \bar{A}_q g(\alpha_q) e^{-jk_{zq}z} \sin \alpha_q \times [e^{j\phi} J_1(\sigma_q) - e^{-j\phi} J_{-1}(\sigma_q)], \quad (6)$$

In (1)-(6), $\bar{A}_q = A_q / [g(\alpha_q)(1 + \cos \alpha_q)]$, $\alpha_q = k_{\rho q} \rho$ and $g(\alpha_q) = (1 + \cos \alpha_q)/4$, A_q being the complex coefficient of the q -th scalar BB of a corresponding scalar FW [8]. A scalar zero-order $\psi(\rho, z) = E_x^{(1,0)}$ can be recovered if the paraxial conditions $\cos \alpha_q \rightarrow 1$ and $\sin \alpha_q \rightarrow 0$ are imposed in (1)-(6), thus reducing the set (1)-(6) to a single solution of the scalar wave equation. This is the FW which has been, so far, considered.

A vector FW with circularly symmetric polarization is new in the literature. Although not carrying any topological charge - therefore being incapable of transferring orbital angular momentum - they shall be the first truly vector FW to be incorporated into theoretical and numerical investigations of the optical forces exerted by FWs on spherical dielectric particles. For very large particles in comparison with the wavelength, once the electric and magnetic field components are known, a ray optics model may be constructed to calculate the radial and longitudinal optical forces exerted by the vector FW described by (1)-(6).

B. Forces on Spherical Particles in the Ray Optics Regime

When a light ray hits an interface between two media with different optical impedances, it has a deviation in its direction. As a consequence, it suffers a variation of linear momentum such that, according to Newton's equations of motion, a force arises on an interface in opposition to the variation of the momentum of the light ray itself [2], [18], [24]. The total force that a light beam applies to an object depends on the characteristics of the two media, the geometry of the scatterer and the angle of incidence. Therefore, in the case of spherical scatterers, a multiple reflection/refraction diagram showing the directions of all subsequent rays may be constructed from which a mathematical description may be given of the optical forces caused by light on very large spheres [25].

Fig. 1: Schematic diagram of the propagation of a light ray in a dielectric spherical particle.

Let us write $\vec{p}_i$ for the momentum associated with a particular incident ray, $\vec{p}_r$ being the momentum of the first reflected ray, as shown in Fig. 1 at point A. The ray transmitted into the sphere is again reflected at point B, giving rise to an exiting ray called the first transmitted ray across the sphere, carrying a momentum $\vec{p}_{t1}$. The n -th exiting ray has a momentum $\vec{p}_{tn}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. The incidence and refraction angles at point A are designated as θ_i and θ_r , respectively.

It is seen from Fig. 1 that the direction of power flow associated with p_i is $\hat{k}_0$. Let $\hat{d}_0$ represent a direction perpendicular to $\hat{k}_0$ and $\hat{n}_0$ the unit vector normal to the surface of the particle at the impinging point A. Since $\hat{k}_0$, $\hat{d}_0$ and $\hat{n}_0$ are coplanar, one may immediately determine $\hat{d}_0$ after subtracting from $\hat{n}_0$ the contribution of $\hat{k}_0$ along $\hat{n}_0$, after proper normalization, i.e., $\hat{d}_0 = [\hat{n}_0 - (\hat{n}_0 \cdot \hat{k}_0)\hat{k}_0] / |\hat{n}_0 - (\hat{n}_0 \cdot \hat{k}_0)\hat{k}_0|$ [26].

We can now explicitly determine the direction of the reflected ray in terms of $\hat{k}_0$. In fact, it is easy to see from Fig. 1 that $\vec{p}_r$ is found after performing on $-\hat{k}_0$ a clockwise rotation of $2\theta_i$. Being $\vec{p}_i = (n_m/c)E_i\hat{k}_0$, where n_m is the refractive index of the host medium, c the speed of light in vacuum and E_i the energy of the incident ray, $\vec{p}_r$ is written as

$$\vec{p}_r = \vec{p}_{o0} = -\frac{n_m R E_i}{c} e^{-j2\theta_i} \hat{k}_0. \quad (7)$$

In (7), R is the reflection Fresnel coefficient (reflectivity). In the same token, $\hat{k}_{tn}$ is found to be given by

$$\hat{k}_{tn} = \hat{k}_{on} = -\hat{k}_0 e^{-j2\theta_i} e^{-jn(\pi-2\theta_r)}, \quad (8)$$

from which $\vec{p}_{tn}$ may be explicitly written in terms of $\hat{k}_0$ once the transmission Fresnel coefficient T is introduced. Let us here suppose both perpendicular ($\perp$) or parallel ($\parallel$) polarizations, that is [26], [27], $R = R_\perp \cos^2 \beta + R_\parallel \sin^2 \beta$ and $T = T_\perp \cos^2 \beta + T_\parallel \sin^2 \beta$, where $R_\perp$ and $R_\parallel$ ($T_\perp$ and $T_\parallel$) are the reflection (transmission) Fresnel coefficients for perpendicular and parallel polarizations, respectively (obviously, with respect to the $\hat{k}_0 \times \hat{d}_0$ plane). The crossing angle between the polarization direction of the incident ray and the abovementioned plane is β . One is now at position to calculate the force $\vec{F}_{ray} = d\vec{p}_{part}/dt$, where $\vec{p}_{part}$ is the change of momentum of the particle. Collecting all transmitted rays and making use of (7) and (8), [26],

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ray} &= \frac{d}{dt} \vec{p}_{part} = \frac{d}{dt} \left(\frac{n_m}{c} E_i \hat{k}_0 - \frac{n_m}{c} \sum_{n=0}^{\infty} E_{on} \hat{k}_{on} \right) \\ &= \frac{n_m P_i}{c} \left[1 + R e^{-j2\theta_i} - T^2 \frac{e^{-j2(\theta_i-\theta_r)} e^{-\alpha l}}{1 + R e^{-\alpha l} e^{j2\theta_r}} \right] \hat{k}_0. \end{aligned} \quad (9)$$

In (9), the energy of each exiting ray is compactly represented as E_{on} (so that E_{o0} is the energy of the ray reflected at A, E_{o1} the energy of the ray transmitted at B, and so on). The time rate of change of E_i is the incident power P_i .

Once the force of a single ray has been found, the total force exerted by the beam may be calculated by supposing (9) to be the differential force contribution at A, a specific point on the surface of the sphere. An integration over the surface of the sphere under illumination, with the aid of a spherical coordinate system (r, θ, ϕ) with origin at the center of the particle, then gives us [28]

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \hat{k}_0 \frac{n_m}{c} \iint_{\delta(\theta, \phi)} |\psi(\theta, \phi)|^2 \left[1 + R e^{-j2\theta_i} \right. \\ &\quad \left. - T^2 \frac{e^{-j2(\theta_i-\theta_r)} e^{-\alpha l}}{1 + R e^{-\alpha l} e^{j2\theta_r}} \right] \cos \theta_i R_p^2 \sin \theta d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (10)$$

where $\delta(\theta, \phi)$ is the surface of the scatterer under illumination and is determined by the physical observation that the region $-\hat{k}_0 \cdot \hat{n}_0 < 0$ is not hit by the beam [26].

III. NUMERICAL RESULTS AND ANALYSIS

In this section we present two examples of circularly symmetric zero-order FWs and their associated optical forces, the first having a constant and the second a sinusoidal longitudinal intensity pattern $F(z)$. In all simulations, the wavelength $\lambda = 1064$ nm, $n_m = 1.33$ (water) and the radius of the particle is fixed at $R_a = 20$ μm .

The coefficients $\bar{A}_q$ in (1)-(6) are easily determined from procedures available in previous works [8]. For the constant profile, we take $F(z) = 1$, $|z| \leq 0.1L$, $L = 50$ mm, $N = 25$. The maximum α_q is 2.56° for $q = -25$. The resulting electric field intensity $I(\rho, z)$ is shown in Fig. 2. The oscillations are a consequence of a finite N (the higher the N , the closer to a true constant pattern for $|z| \leq 0.1L$). In Fig. 3 we show the longitudinal optical forces exerted in our lossless particle as the beam is shifted along z by z_0 , for three distinct relative refractive indices. Solid black lines represent the exact values as calculated using a full electromagnetic approach (GLMT), whereas dotted colored lines have been calculated with the aid of (10). The agreement is excellent. One should notice that, in this case where axicon angles are small, the paraxial regime holds and axial gradient forces are incapable of overcoming the scattering forces. Therefore, no zero force points are observed, and the particle cannot be trapped in 3D fashion.

Fig. 2: Constant longitudinal intensity profile. The inset shows a 2D view along z . The profile as derived by (1)-(6) is seen in blue.

Fig. 3: Resulting force for the FW of Fig. 2.

As a more interesting example for practical purposes, let us look at our second example, whose electric field intensity is shown in Fig. 4. Here we impose both a constant and

a sinusoidal profile [mathematically described as $F(z) = \sin[\pi(z + 0.025L)/(0.15L - 0.025L)]$ for $z < 0.15L$, with $L = 500$ μm and $N = 15$. The largest α_q is of 18.01° for $q = -15$. The FW is, therefore, non-paraxial. The longitudinal total force, as shown in Fig. 5, clearly reverses sign for $n_{rel} = 1.01$, a point of stable equilibrium being observed at $z_0 \approx -19$ μm . For $n_{rel} = 0.95$, on the other hand, the point $z_0 \approx -5$ μm corresponds to an unstable position. In both Figs. 3 and 5, multiplicative factors have been introduced for visualization purposes.

One interesting feature of Figs. 3 and 5 is the large axial action of the forces in comparison with the non-zero part of $F(z)$. In fact, even though $0.15L = 75$ μm for the sinusoidal-constant pattern, pronounced forces are noticed for z_0 as high as ± 170 μm . This comes from the presence of lateral energy flowing into the optical axis and from the size of the scatterer, which feels the presence of this lateral gradient of intensity for $z_0 > 2R_a + 0.1L = 115$ μm or $z_0 < -(2R_a + 0.1L)$.

When adopting a ray model description of the light scattering by large particles, one may break the analysis in terms of the incident, reflected and transmitted contributions for the total force of (10). Fig. 6 shows this for the sinusoidal-constant $F(z)$ and for $n_{rel} = 0.95$ and 1.01 . Only when $n_{rel} = 1.01$ can the third term of (10) balance the scattering force due to the incident field. Notice, however, that the low refractive index contrast in this case leads to a total forces with a low magnitude, which in contrast may not be strong enough to ensure the necessary restoring force. In a sense, a $F(z)$ defined over a few micrometers could increase the axial gradient force and provide us with more intense restoring forces. We intend to comment on that during the conference.

Fig. 4: Same as Fig. 2, now for the sinusoidal-constant FW.

IV. CONCLUSION

In this paper we introduce a ray optics approach to evaluate the optical forces exerted by circularly symmetric frozen waves over spherical scatterers. The advantage of using this particular polarization relies in the availability of exact and analytic descriptions in the framework of generalized Lorenz-Mie theories. The trapping of very large particles may be

Fig. 5: Same as in Fig. 3, now for the sinusoidal-constant FW.

Fig. 6: Contribution to the total force of incident, reflected and transmitted rays. (a) $n_{rel} = 1.01$. (b) $n_{rel} = 0.95$. For $n_{rel} = 1.20$ the total force is always repulsive (from the laser source).

challenging, since one cannot constrain the longitudinal intensity pattern of interest to within a few micrometers without including non-physical or undesirable behaviors. In any case, restoring forces may be found that, at least in theory, are capable of providing effective three-dimensional traps. The problem, however, relies on the fact that these forces might not be strong enough. Further investigation is required on that. Frozen waves with significant (negative) axial gradient forces may still be possible either by considering highly non-paraxial beams or by using other types of frozen waves, such as those constructed from continuous superpositions of Bessel beams. This is currently in progress.

REFERENCES

- [1] J. Arlt, V. Garcés-Chavez, W. Sibbett, and K. Dholakia, "Optical micromanipulation using a Bessel light beam," *Opt. Commun.*, vol. 197, pp. 239–245, 2001.
- [2] V. Garcés-Chavez, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett, and K. Dholakia, "Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam," *Nature*, vol. 419, pp. 145–147, 2002.
- [3] V. Garcés-Chavez, D. Roskey, M. D. Summers, H. Melville, D. McGloin, E. M. Wright, and K. Dholakia, "Optical levitation in a Bessel light beam," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 85, pp. 4001–4003, 2004.
- [4] Z. Bouchal, "Nondiffracting optical beams: physical properties, experiments, and applications," *Czech. J. Phys.*, vol. 53, pp. 537–578, 2003.
- [5] J. Durnin, "Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 4, pp. 651–654, 1987.
- [6] J. Durnin, and J. J. Miceli Jr., "Diffraction-Free Beams," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, pp. 1499–1501, 1987.
- [7] Y. A. Ayala, A. V. Arzola, and K. Volke-Sepúlveda, "Comparative study of optical levitation traps: focused Bessel beam versus Gaussian beams," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 33, pp. 1060–1067, 2016.
- [8] M. Zamboni-Rached, "Stationary optical wavefields with arbitrary longitudinal shape, by superposing equal frequency Bessel beams: Frozen Waves," *Opt. Express*, vol. 12, pp. 4001–4006, 2004.
- [9] M. Zamboni-Rached, E. Recami, and H. E. Hernández-Figueroa, "Theory of "frozen waves": modeling the shape of stationary wave fields," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 22, pp. 2465–2475, 2005.
- [10] M. Zamboni-Rached, "Diffraction-attenuation resistant beams in absorbing media," *Opt. Express*, vol. 14, pp. 1804–1809, 2006.
- [11] M. Zamboni-Rached, L. A. Ambrosio, and H. E. Hernández-Figueroa, "Diffraction-attenuation resistant beams: their higher order versions and finite-aperture generations," *Appl. Opt.*, vol. 49, pp. 5861–5869, 2010.
- [12] T. A. Vieira, M. R. R. Gesualdi, and M. Zamboni-Rached, "Frozen waves: experimental generation," *Opt. Lett.*, vol. 37, pp. 2034–2036, 2012.
- [13] T. A. Vieira, M. Zamboni-Rached, and M. R. R. Gesualdi, "Modeling the spatial shape of nondiffracting beams: Experimental generation of Frozen Waves via holographic method," *Opt. Commun.*, vol. 315, pp. 374–380, 2014.
- [14] A. H. Dorrah, M. Zamboni-Rached, and M. Mojahedi, "Generating attenuation-resistant frozen waves in absorbing fluid," *Opt. Lett.*, vol. 41, pp. 3702–3705, 2016.
- [15] A. H. Dorrah, M. Zamboni-Rached, and M. Mojahedi, "Controlling the topological charge of twisted light beams with propagation," *Phys. Rev. A*, vol. 93, p. 063864, 2016.
- [16] E. G. P. Pachon, M. Zamboni-Rached, A. H. Dorrah, M. Mojahedi, M. R. R. Gesualdi, and G. G. Cabrera, "Architecting new diffraction-resistant light structures and their possible applications in atom guidance," *Opt. Express*, vol. 24, pp. 25403–25408, 2016.
- [17] G. Gouesbet, and G. Gréhan. Generalized Lorenz-Mie Theories. Berlin-Heidelberg: Springer, 2011.
- [18] L. A. Ambrosio, and M. Zamboni-Rached, "Analytical approach of ordinary frozen waves for optical trapping and micromanipulation," *Appl. Opt.*, vol. 54, pp. 2584–2593, 2015.
- [19] L. A. Ambrosio, and M. Zamboni-Rached, "Optical forces experienced by arbitrary-sized spherical scatterers from superpositions of equal-frequency Bessel beams," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 32, pp. 37–46, 2015.
- [20] L. A. Ambrosio, and M. M. Ferreira, "Time-average forces over Rayleigh particles by superposition of equal-frequency arbitrary-order Bessel beams," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 32, pp. 67–74, 2015.
- [21] P. P. Arantes and V. S. Angelis and A. M. Santos and L. A. Ambrosio, "Método Simples em Óptica de Raios para Cálculo de Forças Radiais Exercidas por Superposições Discretas de Feixes de Bessel Escalares," in *Proceedings of MOMAG*, Porto Alegre, Brazil, Jul. 2016.
- [22] J. A. Lock, "Angular spectrum and localized model of Davis-type beam," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 30, pp. 489–500, 2013.
- [23] J. J. Wang, T. Wriedt, J. A. Lock, and L. Mädler, "General description of circularly symmetric Bessel beams of arbitrary order," *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 184, pp. 218–232, 2016.
- [24] C. T. A. Agate and W. Brown and K. D. Sibbett, "Femtosecond optical tweezers for in-situ control of two-photon fluorescence," *Opt. Express*, vol. 10, pp. 3011–3017, 2004.
- [25] A. Ashkin, "Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime," *Bioph. Soc.*, vol. 61, pp. 569–582, 1992.
- [26] P. P. J. Arantes. Cálculo de Forças em Partículas Dielétricas usando Feixes de Bessel Truncados no Regime de Óptica Geométrica e de Rayleigh. Master's thesis. USP, São Carlos, Brazil, 2017.
- [27] E. Hecht. Optics. San Francisco, CA, USA: Addison-Wesley, 2002.
- [28] Y. Zhang and Y. Li and J. Qi and G. Cui and H. Liu and J. Chen and L. Zhao and J. Xu and Q. Sun, "Influence of absorption on optical trapping force of spherical particles in a focused Gaussian beam," *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, vol. 10, pp. 1–7, 2008.