UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

KAREN CAINO DE OLIVEIRA SALIM

**Metodologia de Avaliação de Margem de
Estabilidade Devido a Bifurcações em
Sistemas Elétricos de Potência**

São Carlos
2011

KAREN CAINO DE OLIVEIRA SALIM

**Metodologia de Avaliação de Margem de
Estabilidade Devido a Bifurcações em
Sistemas Elétricos de Potência**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Sistemas Elétricos de Potência

ORIENTADOR: Prof. Dr. Newton Geraldo Bretas

São Carlos
2011

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

S165m	<p>Salim, Karen Caino de Oliveira</p> <p>Metodologia de avaliação de margem de estabilidade devido a bifurcações em sistemas elétricos de potência / Karen Caino de Oliveira Salim ; orientador Newton Geraldo Bretas. -- São Carlos, 2012.</p> <p>Tese (Doutorado-Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas Elétricos de Potência) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2012.</p> <p>1. Sistemas elétricos de potência - avaliação de segurança. 2. Bifurcações. 3. Margem de estabilidade. I. Título.</p>
-------	--

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Engenheira **KAREN CAINO DE OLIVEIRA SALIM**.

Título da tese: "Metodologia de avaliação de margem de estabilidade devido a bifurcações em sistemas elétricos de potência".

Data da defesa: 19/03/2012

Comissão Julgadora:

Prof. Titular **Newton Geraldo Bretas (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Carlos Alberto de Castro Junior**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Prof. Dr. **Glauco Nery Taranto**
(Universidade Federal do Rio de Janeiro/UFRJ)

Dr. **Marcelos Groetaers dos Santos**
(Operador Nacional do Sistema Elétrico/ONS)

Resultado:

Aprovado

Aprovado

Aprovada

APROVADO

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica:
Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Paulo Cesar Lima Segantine**

*"Das Unmögliche existiert an ihm zu zweifeln und wenn jemand das
Gegenteil beweist."*

Albert Einstein

*Ao Rodrigo, por ser maravilhoso-
samente indescritível*

Agradecimentos

A Deus, pela vida.

Ao Rodrigo, meu marido, pelos momentos de amizade e companheirismo não só durante esta tese mas ao longo de todos esses anos juntos. Agradeço também pela paciência, terapias, aulas, discussões, revisões, programações e colaborações pessoais e profissionais ao longo de todo este trabalho.

Aos meus pais, Caino e Ana, pelo carinho, suporte, torcida dado ao longo desta fase. Agradeço também pelo apoio nas mudanças ocorridas nos últimos anos.

Ao meu irmão Felipe, pela amizade.

A toda minha família, avó Maria, tios, primos pelo carinho.

À grande amiga Vanessa Barreiro pelo cuidado, pelos cafés, almoços, conversas, pela amizade, pela torcida, tornando a fase inicial de mudança para o RJ menos difícil, muito obrigada.

Às minhas grandes amigas Paula Ramos e Mariana Resener, pela força e amizade ao longo desta jornada, sempre presentes, insistentes e participativas apesar da distância.

Às primas Juliana Ferreira e Mariana Vicili pela ajuda e amizade.

À Neusa e à Elsa por terem proporcionado um ambiente acolhedor à nossa casa em São Carlos e no Rio de Janeiro.

Aos sogros, Paulo e Rosana, pela amizade ao longo dos anos.

À avó Tetê pelo carinho e dedicação sempre presentes.

Ao orientador Newton Bretas pela oportunidade de desenvolvimento pessoal e profissional, pelas colaborações e disponibilidades sempre que fosse necessário.

Ao co-orientador, Luis Fernando Alberto, pelas idéias, discussões profissionais, críticas construtivas e pela dedicação a este trabalho.

Ao chefe Marcelos Groetaers, pelo incentivo, pelas discussões, pela oportunidade de crescimento pessoal e profissional, e por fazer no dia a dia um ótimo

ambiente de trabalho.

Aos colegas de trabalho, Carlos Neto, Maurício Passaro, Flávio Farina, Pedro Santos, Alex Castro, José Antônio e Henildo pela ajuda no desenvolvimento deste trabalho, pela convivência alegre, e pela família aqui criada no ambiente de trabalho.

Ao pessoal da GMC pelo aprendizado e à amiga Suelaine pela sua amizade e alegria todos os dias.

Aos colegas de laboratório, pelos bons momentos proporcionados ainda em São Carlos e a Madaleine pela ajuda na impressão, encadernamento e entrega da tese.

Ao ONS (Operador Nacional do Sistema Elétrico) pela oportunidade de desenvolvimento profissional.

À USP (Universidade de São Paulo), pela possibilidade de realização de um doutoramento de alto nível, e de reconhecimento internacional, dentro do nosso país.

Aos funcionários do departamento de engenharia elétrica pelo apoio dado à distância.

Resumo

A complexidade da avaliação de segurança em sistemas de potência vem se tornando elevada, principalmente devido ao aumento por demanda de energia elétrica. Diariamente são inseridas cargas de forma sucessiva nos sistemas elétricos, podendo este fato conduzir o sistema ao colapso, caso não haja um planejamento adequado que evite tal ocorrência. Visando evitar um cenário de instabilidade, metodologias de estudo relativas à determinação de máximo carregamento para sistemas elétricos de potência vem sendo estudadas e desenvolvidas. Apesar de apresentarem avanços, estes trabalhos possuem limitações que os impedem de serem utilizados em estudos de pré-operação e até em tempo real nos centros de operação. Considerando estas limitações, este trabalho apresenta o desenvolvimento de uma metodologia direta e combinada para determinar o ponto de perda de estabilidade do sistema (a máxima transferência de potência, ou o aparecimento de bifurcações de Hopf), a partir de um sistema de equações diferenciais-algébricas. Esta metodologia engloba características fundamentais para os estudos supracitados como velocidade e robustez. Desta forma, um aplicativo computacional para a avaliação de segurança de um sistema de potência baseado na metodologia proposta foi desenvolvido contemplando a determinação da margem de estabilidade devido a bifurcações no sistema de forma eficiente e robusta. Para tanto, esta tese apresenta uma contextualização da necessidade desta ferramenta, realiza modificações na metodologia direta de determinação da margem de estabilidade devido a oscilações no sistema com a finalidade de elevar sua faixa de convergência e desenvolve uma metodologia direta para determinação de bifurcações Sela-Nó. Por fim, o aplicativo final foi validado, utilizando a ferramenta Organon, em diversos sistemas incluindo o sistema interligado nacional modificado, juntamente com a avaliação de uma lista de contingências para o mesmo.

Palavras-chave: Avaliação de segurança, bifurcações, margem de estabilidade.

Abstract

Security assessment complexity in power systems is becoming higher primarily due to increased demand for electricity. Daily, loads are successively connected to the power grids, which can actually lead the system to the collapse, if there is no adequate planning to avoid it. To avoid an instability scenario, methodologies for the determination of maximum loading for a power system have been studied and developed. In spite of their progress, these works have limitations that prevent them from being used in pre-operation studies and even in real time in operation centers. Considering these limitations, this work presents the development of a direct and combined methodology to determine the operating point where the system stability is lost (the maximum power transfer or the oscillations appearance due to Hopf bifurcation), through differential-algebraic equations. This methodology includes fundamental characteristics for the aforementioned studies such as speed and robustness. Thus, a computer application for power system security assessment based on the proposed methodology was developed with the objective of determining efficiently the stability margin due to bifurcations in the system. Therefore, this thesis presents an overview of the need for this tool, as well as changes to the direct method of determining the system's stability margin due to oscillations, with the purpose of increasing its convergence range and develops a methodology for direct determination of saddle-node bifurcations points. Finally, the final developed application is validated, using the Organon tool, in several systems including the national interconnected system modified in which a list of contingencies are evaluated for this system.

Keywords: Security assessment, bifurcations, stability margin.

Lista de Ilustrações

1.1	Homotopia entre dois caminhos.	27
2.1	Comportamento de um sistema próximo a um ponto de equilíbrio sela-nó.	34
2.2	Exemplo de bifurcação sela-nó.	35
2.3	Curva $P - V$ de um sistema de potência.	36
2.4	Sistema de barramento infinito contendo uma carga.	36
2.5	Tensão como função das potências ativa e reativa.	37
2.6	Curvas $P - V$ do sistema da Figura 2.4.	37
2.7	Ocorrência de uma BIL antes do ponto de máximo carregamento. . . .	41
2.8	Dois pares de subespaços ortogonais.	53
2.9	Ação da matriz A : espaço linha para espaço coluna, espaço nulo para zero.	54
2.10	Visualização gráfica do espaço nulo da matriz A no plano das variá- veis, para o Exemplo 1.	56
2.11	Projeção do vetor x no espaço nulo da matriz A do Exemplo 1.	57
2.12	Projeção do vetor x no espaço nulo da matriz A do Exemplo 2.	58
2.13	Solução via Homotopia.	60
2.14	Homotopia $\times$ Continuação.	61
3.1	Algoritmo completo para a determinação da margem de estabilidade de um sistema de potência.	67
3.2	Deslocamento do autovalor no sistema Kundur. Ponto de bifurcação em $\mu_0 = 1.181$	69
3.3	Comportamento oscilatório do sistema de Duas Áreas na vizinhança do ponto de bifurcação de Hopf.	69
3.4	Margem de estabilidade do sistema de duas áreas devido às bifurca- ções Sela-Nó e Hopf.	71

3.5	Margem de estabilidade do sistema New England devido a bifurcações de Hopf e de Selá-Nó.	71
3.6	Curva de carga da região Sul/Centro-Oeste no dia 29/01/2011.	79
3.7	Curva de carga da região Sul/Centro-Oeste no dia 26/04/2011.	79
3.8	Homotopia para o sistema de duas áreas.	83
4.1	Algoritmo para determinação da margem de carregamento devido a bifurcação Sela-Nó.	98
4.2	Curva $V - \lambda$ do sistema de duas áreas obtida no Organon.	100
4.3	Curva $V - \lambda$ do sistema New England obtida no Organon.	102
4.4	Curva $V - \lambda$ do sistema equivalente 65 barras obtida no Organon.	103
5.1	Dispersão dos elementos da matriz Jacobiana (5.11) para o sistema de duas áreas na primeira iteração.	111
5.2	Dispersão dos elementos da matriz Jacobiana (5.11) para o sistema IEEE 14 barras na primeira iteração.	112
5.3	Dispersão dos elementos da matriz Jacobiana (5.11) para o sistema New England na primeira iteração.	112
5.4	Algoritmo completo para a determinação da margem de estabilidade de um sistema de potência.	113
5.5	Processo iterativo para a solução da metodologia proposta.	115
5.6	Aplicativo Computacional - Inserção de Dados.	117
5.7	Aplicativo Computacional - Diagrama dos Sistemas.	118
5.8	Aplicativo Computacional - Análise da Margem de Estabilidade.	119
6.1	Diagrama Unifilar do SIN.	127
6.2	Localização das contingências na área de Minas Gerais.	129
B.1	Circuito dinâmico para o modelo de máquina síncrona.	158
B.2	Modelo AVR IEEE-TIPO I.	158
B.3	Modelo geral com m -máquinas e n -barras.	159
B.1	Diagrama unifilar do sistema Kundur de duas áreas.	169
B.2	Diagrama unifilar do sistema IEEE 14 barras.	171
B.3	Diagrama unifilar do sistema New England 39 barras.	176
B.4	Diagrama unifilar do sistema equivalente Sul/Sudeste com 65 barras.	177

Lista de Tabelas

3.1	Casos numéricos analisados.	68
3.2	Comparação das metodologias para o sistema de duas áreas.	70
3.3	Comparação das metodologias para o sistema New England.	70
3.4	Casos numéricos analisados.	82
3.5	Processamento das metodologias para o sistema de duas áreas.	83
3.6	Comparação das metodologias para o sistema New England.	84
3.7	Comparação das metodologias para o sistema Sul/Sudeste.	84
3.8	Autovalores do sistema Sul/Sudeste para o caso base $\mu = 1$	86
3.9	Autovalores do sistema Sul/Sudeste no caso de bifurcação $\mu = 1.106$	87
4.1	Avaliação das metodologias para o sistema de duas áreas.	99
4.2	Avaliação das metodologias para o sistema New England.	101
4.3	Avaliação das metodologias para o sistema 65 Barras.	102
6.1	Comparação das metodologias para o sistema de duas áreas.	122
6.2	Comparação das metodologias para o sistema IEEE 14 barras.	123
6.3	Comparação das metodologias para o sistema New England.	125
6.4	Comparação das metodologias para o sistema equivalente Sul/Sudeste.	126
6.5	Comparação das metodologias para o SIN modificado.	128
6.6	Lista de Contingências.	128
6.7	Comparação das metodologias para a lista de contingências.	130
6.8	Ordenamento da lista de contingências por severidade.	131
B.1	Dados das barras do sistema Kundur de duas áreas.	170
B.2	Dados das linhas do sistema Kundur de duas áreas.	170
B.3	Dados dos geradores do sistema Kundur de duas áreas.	171
B.4	Dados dos AVR's do sistema Kundur de duas áreas	171
B.5	Dados das barras do sistema IEEE 14 barras.	172
B.6	Dados das linhas do sistema IEEE 14 barras.	172

B.7	Dados dos geradores do sistema IEEE 14 barras.	173
B.8	Dados dos AVR's do sistema IEEE 14 barras.	173
B.9	Dados das barras do sistema New England.	174
B.10	Dados das linhas do sistema New England.	175
B.11	Dados dos geradores do sistema New England.	176
B.12	Dados dos AVR's do sistema New England.	177
B.13	Dados das barras do sistema 65 barras.	178
B.13	Dados das barras do sistema 65 barras.	179
B.14	Dados das linhas do sistema equivalente Sul/Sudeste 65 barras. . . .	180
B.14	Dados das linhas do sistema equivalente Sul/Sudeste 65 barras. . . .	181
B.14	Dados das linhas do sistema equivalente Sul/Sudeste 65 barras. . . .	182
B.15	Dados dos geradores do sistema equivalente Sul/Sudeste 65 barras. . .	182
B.16	Dados dos AVR's do sistema equivalente Sul/Sudeste 65 barras. . . .	183

Sumário

1	Introdução	23
1.1	Objetivos	27
1.2	Estrutura do Trabalho	28
2	Revisão Teórica	31
2.1	Bifurcações em Sistemas Elétricos de Potência	31
2.1.1	Bifurcação Sela-Nó	33
2.1.2	Bifurcação Induzida por Limites	40
2.1.3	Bifurcação de Hopf	43
2.2	Fixação de Variáveis em Sistemas Lineares	51
2.2.1	Análise Teórica	52
2.2.2	Formalização Matemática	55
2.2.3	Exemplificação da Teoria	55
2.3	Homotopia	58
2.3.1	Homotopia $\times$ Continuação	59
2.3.2	Exemplo Numérico de Homotopia	60
3	Metodologia Direta para Detecção e Predição de Bifurcações de Hopf	63
3.1	Método de Salim <i>et al</i> (2010)	63
3.1.1	Modelo de um Sistema Algébrico-Diferencial	64
3.1.2	Conjunto de Equações Propostas	64
3.1.3	Algoritmo Proposto	66
3.1.4	Resultados Numéricos	68
3.2	Análise de Variáveis para Metodologias Diretas de Determinação do Ponto de Bifurcação de Hopf	70
3.3	Importância da Convergência de Metodologias Diretas	77
3.3.1	Tratamento das Condições Iniciais	80

3.3.2	Resultados Numéricos com Tratamento das Condições Iniciais	81
3.3.3	Considerações	85
4	Metodologia Direta para Detecção e Predição de Bifurcações Sela-Nó	89
4.1	Formulação da Metodologia	90
4.1.1	Equações Representando o Equilíbrio do Sistema	90
4.1.2	Equações Representando as condições Necessárias para Ocorrência de uma Bifurcação Sela-Nó	91
4.1.3	Equações Complementares	91
4.1.4	Formulação do Sistema Aumentado	92
4.1.5	Linearização do Modelo	93
4.2	Algoritmo da Metodologia	97
4.3	Resultados	98
4.3.1	Sistema de Duas Áreas	99
4.3.2	Sistema New England 39 Barras	100
4.3.3	Sistema Equivalente Sul/Sudeste 65 barras	101
4.4	Considerações Finais	103
5	Metodologia para Determinação da Margem de Estabilidade devido a Bifurcações	105
5.1	Equacionamento	106
5.2	Avaliação Estrutural das Matrizes Jacobianas	109
5.3	Algoritmo Proposto	111
5.4	Programa Desenvolvido	115
6	Resultados Numéricos	121
6.1	Sistema de Duas Áreas	122
6.2	Sistema IEEE 14 Barras	123
6.3	Sistema New England	124
6.4	Sistema Equivalente Sul/Sudeste	124
6.5	Sistema Interligado Nacional Modificado	125
6.5.1	Avaliação da Margem de Carregamento	126
6.5.2	Análise de Contingências	127
7	Considerações Finais	133
7.1	Trabalhos Futuros	136
	Referências	137
	Apêndices	143

A	Derivadas da Jacobiana do Sistema Diferencial-Algébrico	145
A.1	Derivadas da matriz A	145
A.2	Derivadas da matriz B	146
A.3	Derivadas da matriz C	147
A.4	Derivadas da matriz D	149
A.4.1	Derivadas da matriz B_2	149
A.4.2	Derivadas da matriz B_3	149
A.4.3	Derivadas da matriz C_2	150
A.4.4	Derivadas da matriz C_3	150
A.4.5	Derivadas da matriz C_4	152
A.4.6	Derivadas da matriz D_1	153
A.4.7	Derivadas da matriz D_2	155
B	Modelagem de Sistemas de Potência com Dependência de Parâmetros	157
	Anexos	163
A	Cartão Exemplo	165
B	Estudo de Caso	169
B.1	Sistema de Duas Áreas	169
B.1.1	Dados Estáticos	170
B.1.2	Dados Dinâmicos	170
B.2	Sistem IEEE 14 barras	171
B.2.1	Dados Estáticos	172
B.2.2	Dados Dinâmicos	172
B.3	Sistema New England 39 Barras	173
B.3.1	Dados Estáticos	173
B.3.2	Dados Dinâmicos	173
B.4	Sistema Equivalente Sul-Sudeste Brasileiro 65 Barras	177
B.4.1	Dados Estáticos	178
B.4.2	Dados Dinâmicos	182
C	Definições	185
C.1	Topologia do Espaço Euclidiano	185
C.1.1	Norma	185
C.2	Equações Diferenciais Ordinárias	186
C.2.1	Teoria Geral	187
C.2.2	Comportamento Assintótico	188
C.2.3	Equilíbrios e Estabilidade Local	189

Introdução

Com o aumento continuado da demanda por energia elétrica das últimas décadas no Brasil, de aproximadamente 4.5 % ao ano (ELETROBRAS, 2011), a avaliação de segurança foi se tornando cada vez mais complexa no sistema interligado nacional. Somado ao cenário de crescimento de carga, verifica-se que os sistemas elétricos de potência (SEP) também estão continuamente expostos a situações adversas (mudanças climáticas, vandalismo, condições ambientais desconformes, entre outras). Neste contexto, tanto o acréscimo de carga como estas condições adversas podem conduzir o sistema à violação dos limites técnicos exigidos para sua operação. Estes limites são listados e divulgados no documento de procedimento de rede, módulo nº 23.3, expedido pelo Operador Nacional do Sistema Elétrico(ONS), e, entre eles, estão: a violação de tensão, limite do valor pico a pico da tensão, capacidade de equipamentos, entre outros. (ONS, 2011a). Ainda, em termos estatísticos, um dos fatores que mais influencia a estabilidade de um sistema de potência é o carregamento do mesmo (ELETROBRAS, 2011). E o que seria influenciar a estabilidade do sistema?

Primeiramente, deve-se considerar as diversas definições de estabilidade. Uma força tarefa recentemente propôs diversas definições relacionadas a SEP (KUNDUR et al., 2004). A definição mais geral foi descrita como:

“Estabilidade em sistemas de potência é a habilidade que um sistema elétrico de potência possui, para uma dada condição inicial de operação, de reaver seu estado de equilíbrio após ter sido sujeito a uma perturbação física, com a maioria das variáveis do sistema limitadas, de forma que praticamente o sistema inteiro permaneça intacto.” (KUNDUR et al., 2004)

Esta definição apresenta o estudo de estabilidade essencialmente como um problema único. Entretanto, para melhor compreensão dos diversos cenários de instabilidade ao qual o sistema pode estar sujeito, o estudo de estabilidade é dividido em duas categorias principais: estabilidade angular e estabilidade de

tensão. A primeira refere-se à habilidade das máquinas síncronas, de um SEP interconectado, de permanecerem em sincronismo em relação à posição angular do rotor destas máquinas, após serem submetidas a uma perturbação. Já a estabilidade de tensão refere-se à habilidade de um sistema de potência em manter o valor das tensões em suas barras, dentro de uma determinada faixa, no valor de regime após este ser submetido a uma perturbação, dado um ponto de operação inicial (KUNDUR et al., 2004).

Durante décadas, o estudo da estabilidade angular foi priorizado e, devido ao desenvolvimento tecnológico dos equipamentos, este fenômeno raramente tem sido uma restrição para a transferência de potência no sistema. Por outro lado, a maioria dos blecautes ocorridos nos últimos 20 anos, considerando SEPs ao redor de todo o mundo, vêm acontecendo devido a colapsos de tensão (CUTSEM; VOURNAS, 2003). Apresenta-se então a necessidade do estudo do colapso (estabilidade de tensão) sem abdicar e/ou em conjunto com o estudo da estabilidade angular.

Em (KWATNY; FISCHL; NWANKPA, 1995) foi demonstrado que um SEP poderia ser levado à instabilidade devido a incrementos de carga lentos e sucessivos, o que remete à resposta da pergunta realizada anteriormente: com a variação das cargas, as variáveis do sistema de potência podem não permanecer limitadas e, desta forma, afetando a estabilidade do sistema. Para caracterizar este fenômeno de instabilidade em SEP, é normalmente utilizada a teoria de bifurcações, que estuda mudanças qualitativas do comportamento do sistema em estudo devido à variação de um parâmetro do mesmo. No caso de SEP, a variação da carga é considerada como um parâmetro do sistema que, quando elevado gradativamente, conduz o sistema genericamente a uma bifurcação Sela-Nó (BSN), uma bifurcação de Hopf (BH), ou uma bifurcação induzida por limites (BIL).

Por muito tempo, o conceito de margem de carregamento foi associado somente ao aparecimento de bifurcações do tipo Sela-Nó, caracterizada pelo desaparecimento súbito do ponto de equilíbrio estável do sistema. Entretanto, em estudos relativos ao incremento de carga no sistema, foi demonstrado que, em SEP, também é possível o aparecimento de bifurcações do tipo Hopf, a partir da variação deste parâmetro (KWATNY; FISCHL; NWANKPA, 1995), caracterizada pela perda da estabilidade do equilíbrio pelo aparecimento de órbitas periódicas provocando oscilações em SEP antes que a máxima transferência de potência do sistema seja atingida, considerando o aumento sucessivo da carga do sistema.

Instabilidade é definida como a falta de estabilidade (KWATNY; FISCHL; NWANKPA, 1995)

Definida como a distância, em termos de MW e/ou MVar, do ponto atual de operação até o ponto de limite da rede do sistema parametrizado.

Estas bifurcações também podem ser causadas, por exemplo, pela variação do amortecimento do sistema, por contingências, pela dependência de frequência do torque eletromecânico e pela atuação rápida do regulador de tensão (ABED; VARAIYA, 1984).

Assim, visto que os incrementos de carga são uma característica típica dos SEP, uma vez que ocorrem constantemente, é possível que estas oscilações sustentadas sejam observadas na prática. Neste caso, estas devem ser evitadas de forma a se manter uma operação estável e segura do sistema, pois podem danificar equipamentos, interferir nos sistemas de controle do SEP, ou ainda, levar rapidamente o sistema para o colapso de tensão (VENKATASUBRAMANIAN; LI, 2004).

Estudos de segurança em SEP são baseados em condições de operação, caracterizadas, por exemplo, pela quantidade de carga e pela topologia do sistema, que devem ser detalhadas de forma suficientemente precisa para promover um estudo representativo do funcionamento do SEP analisado, incluindo a verificação dos limites de operação, supracitados (ONS, 2011a). Um dos procedimentos utilizados atualmente para estes estudos de segurança, que também é abordado neste trabalho, consiste na estimativa da margem de carregamento do sistema através da avaliação de sua respectiva curva $P - V$. Ela possibilita um estudo simplificado do comportamento do sistema no problema de estabilidade estática de tensão em função do crescimento da carga do sistema (KUNDUR, 1994).

Entretanto, em estudos de margem de carregamento, é incomum a consideração de instabilidades oscilatórias devido a bifurcações do tipo Hopf, pois estes estudos são usualmente realizados com modelos simplificados, que não exibem este tipo de bifurcação, devendo estes estudos, para tanto, considerar as equações dinâmicas do sistema. Ainda, além destas equações, é necessário o cálculo de autovalores do sistema para encontrar o ponto de bifurcação de Hopf, o que exige um elevado esforço computacional para a determinação dos mesmos. Assim, estes estudos de margem de carregamento, apesar de serem adequados para uma parcela de problemas que podem existir em um SEP, não são definitivamente completos, deixando de considerar uma parcela de fenômenos que podem ocorrer no sistema. Uma forma de mitigar este problema é prover ao estudo da pré-operação uma ferramenta complementar para a verificação da margem de estabilidade do sistema, garantindo assim que esta seja estável e livre de oscilações devido à Hopf.

Nesse contexto, estudos para prever a margem de estabilidade devido a BH tornaram-se fundamentais no estudo da pré-operação do sistema elétrico de potência, permitindo que ações preventivas possam ser executadas assim que o problema seja identificado. Metodologias de estudo relativas à determinação de máximo carregamento para um sistema de potência vêm sendo desenvolvidas nos últimos anos, vide (CHIANG; WANG; FLUECK, 1997), (GOMES; MARTINS; PORTELA, 2002), (MITHULANANTHAN; CAÑIZARES; REEVE, 2000), (SANTOS, 2008), entre outras referências no assunto, entretanto, a mais utilizada, refere-se à utilização de um fluxo de potência continuado combinado ao cálculo

de autovalores do SEP.

Levando em consideração algumas limitações apresentadas por estas metodologias, como, por exemplo, a falta de fundamentação matemática, a não detecção de bifurcações de Hopf e/ou a baixa eficiência computacional, uma nova metodologia direta foi proposta em (SALIM; ALBERTO; BRETAS, 2010) para determinar a margem de carregamento devido a Hopf. Nesta tese, a metodologia direta supracitada foi analisada sob um olhar crítico, evidenciando limitações e necessidades complementares para que esta possa ser considerada uma ferramenta de avaliação de segurança para estudos de operação nos SEP. Entre as necessidades complementares observadas, incluem-se principalmente, a contextualização da importância da verificação da ocorrência das bifurcações do tipo Hopf no sistema, o aumento da faixa de convergência da metodologia direta supracitada, em relação à estimativa inicial da solução do problema, e a proposição de uma metodologia que possa atuar de forma a determinar a margem de carregamento do sistema tanto pela ocorrência de Hopf quanto pela ocorrência da bifurcação Sela-Nó, sendo esta a principal contribuição desta tese. Ressalta-se que a busca de uma metodologia capaz de identificar concomitantemente instabilidades devido a BSN e a BH é, hoje, essencial para uma operação eficiente e segura de SEP, com base nos argumentos apresentados no início deste capítulo.

Baseado neste cenário, neste trabalho, que teve como base a proposta apresentada em (SALIM; ALBERTO; BRETAS, 2010), inicialmente apresenta-se a formalização da teoria envolvida na representação das variáveis para o processo de determinação de forma direta da margem de carregamento do SEP devido a bifurcações. Este fato torna-se pertinente na medida em que fica caracterizada a contribuição da inclusão da característica do aparecimento de uma BH na gama de variáveis do sistema, a saber, a frequência do autovalor no ponto de bifurcação. Demonstra-se matematicamente, a impossibilidade da fixação da mesma na gama de variáveis dos sistemas, consideração comumente realizada pelas metodologias atualmente existentes.

A partir desta contextualização, foram realizadas melhorias na metodologia descrita em (SALIM; ALBERTO; BRETAS, 2010) como objetivo de estender sua faixa de convergência. Esta necessidade apresentou-se uma vez que sistemas cujo ponto de bifurcação encontrava-se afastado do caso base produzia um mal condicionamento no sistema de equações, não permitindo sua convergência mesmo com a existência de um ponto de bifurcação de Hopf. Para tornar esta faixa de convergência maior, utilizou-se a ferramenta matemática da homotopia. Esta possui uma descrição geral de uma função contínua que aplica uma deformação de uma aplicação entre dois caminhos, conforme será apresentada no Capítulo 2. A Figura 1.1 ilustra graficamente a definição da mesma.

Figura 1.1: Homotopia entre dois caminhos.

Apesar da metodologia de homotopia ser predecessora dos métodos contínuos, esta se apresenta como uma boa alternativa quando apenas deseja-se determinar condições iniciais ótimas e não a solução do sistema como um todo (AJJARAPU, 1992). Ainda no contexto de métodos diretos, nesta tese, uma metodologia direta é proposta tanto para determinar o ponto de bifurcação devido a Sela-Nó, como para analisar a mesma no sentido em que é discutido na literatura, ou seja, sobre a clara dificuldade de convergência apresentada para este tipo específico de metodologia, mesmo após o tratamento das condições iniciais, caracterizando mais uma contribuição deste trabalho.

A partir da necessidade existente em se determinar a máxima transferência de potência, no contexto apresentado de metodologias diretas, e ainda da não existência do tratamento da bifurcação de Hopf como limite de segurança para operação do sistema, esta tese finaliza sua contribuição com a apresentação de um aplicativo computacional, que utiliza uma metodologia combinada proposta nesta tese, para determinar o ponto de perda de estabilidade do sistema (margem de estabilidade) fornecendo a possibilidade da criação de uma ferramenta mais completa para a avaliação de segurança de um sistema elétrico de potência.

1.1 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia rápida para a determinação de margem de carregamento devido a bifurcações no sistema, incluindo a BSN e a BH. Deve-se observar que não há metodologias com a mesma finalidade e características similares na literatura, tornando difícil a comparação com algo já existente.

Deve-se considerar, para o desenvolvimento e objetivo deste trabalho, as limitações nas metodologias existentes, como, por exemplo, o alto tempo computacional.

Métodos diretos são métodos que permitem calcular pontos de bifurcação para sistemas não lineares de equações diferenciais ordinárias sem a necessidade do cálculo prévio de autovalores ou ainda a resolução destas equações diferenciais.

onal, a necessidade do cálculo de autovalores, a obtenção do valor de frequência do autovalor no ponto de bifurcação de Hopf e a não convergência para bifurcações Sela-Nó. Considerando as informações citadas, este trabalho tem como objetivo principal, em particular:

- Desenvolver uma ferramenta que utilize métodos diretos para a determinação rápida da estimativa da margem de estabilidade devido a bifurcações no sistema, incluindo a BSN e a BH.

Para atingir este objetivo, os seguintes objetivos secundários serão abordados:

- O desenvolvimento dos fundamentos teóricos da metodologia desenvolvida em (SALIM; ALBERTO; BRETAS, 2010) para determinação de BH;
- Aprimoramento da metodologia supracitada de forma a obter-se um resultado mais robusto às condições iniciais, elevando sua faixa de convergência;
- Desenvolvimento de um método direto para a determinação de bifurcações do tipo Sela-Nó a partir de um equacionamento diferencial-algébrico, que seja robusto às condições iniciais.

Ressalta-se que o objetivo principal ora apresentado, refere-se ao objetivo final da tese de doutoramento da aluna, e que os objetivos secundários são abordados de forma a identificar o processo de desenvolvimento de progressão desta tese.

1.2 Estrutura do Trabalho

Nesta tese o trabalho realizado estrutura-se conforme:

- O Capítulo 2 apresenta uma revisão teórica, incluindo a teoria de bifurcações, dando atenção especial às bifurcações mais encontradas em sistemas de potência, a análise de sistemas lineares incluindo uma discussão sobre a inserção de ω_0 (frequência do autovalor no ponto de bifurcação) na gama de variáveis do sistema de equações analisado, e a teoria de homotopia, conceitos estes que serão utilizados ao longo do desenvolvimento desta tese. Ainda, este apresenta algumas das principais metodologias descritas na literatura para detecção e predição de bifurcações em sistemas elétricos de potência.
- No Capítulo 3 é apresentado um resumo da metodologia descrita em (OLIVEIRA SALIM, 2009), visto que os desenvolvimentos realizados neste trabalho utilizam esta metodologia como ponto de partida. Este também fornece uma análise das variáveis envolvidas no processo de determinação

do ponto de BH em metodologias diretas. Este capítulo inclui também o aperfeiçoamento do algoritmo da metodologia apresentada em (SALIM; ALBERTO; BRETAS, 2010), com a finalidade de aumentar a robustez do algoritmo frente a condições iniciais. Os resultados referentes a estes desenvolvimentos propostos também estão incluídos ao final do capítulo.

- No Capítulo 4 é apresentado o método direto proposto para encontrar o ponto de bifurcação devido a Sela-Nó. O equacionamento geral para o método direto é descrito, assim como o embasamento teórico de suas equações e a sua aplicação para a sua utilização em SEP. Os resultados comparativos referentes a esta metodologia proposta também estão incluídos ao final do capítulo.
- No Capítulo 5 é apresentado o método direto combinado, proposta final da tese, a qual refere-se a uma metodologia de determinação da margem de carregamento devido a oscilações no sistema. Os resultados e o programa computacional desenvolvido, para utilização da metodologia, também são apresentados.
- O Capítulo 6 apresenta os resultados numéricos obtidos com a aplicação da metodologia apresentada no Capítulo 5 na análise de determinação da margem de estabilidade do SEP, assim como a comparação destes resultados com os obtidos em ferramentas encontradas na literatura e utilizadas para determinação de margem de carregamento de um SEP.
- O Capítulo 7 apresenta as considerações finais sobre a metodologia proposta nesta tese, seu funcionamento e resultados, e ainda apresenta sugestão de trabalhos futuros para aperfeiçoar o funcionamento e desempenho do aplicativo proposto.

Revisão Teórica

Sistemas elétricos de potência são exemplos de sistemas não-lineares fisicamente criados pelo homem, possuindo alta complexidade, e não raro, atingindo dimensões continentais. Estes sistemas estão expostos frequentemente a perturbações que afetam o seu comportamento em regime permanente e a sua resposta dinâmica. A natureza das perturbações em SEP é bastante variada tornando complexa a tarefa de avaliação das mesmas.

Neste trabalho estaremos interessados na análise de SEP sob a influência de variações lentas de parâmetros como a perturbação da carga. Desta forma, para o desenvolvimento e contextualização desta tese, serão apresentadas revisões teóricas sobre bifurcações em SEP que estudam as modificações qualitativas do comportamento de um sistema dinâmico sujeito à variação de parâmetros, sobre variáveis em sistemas lineares e ainda sobre o conceito de homotopia. Todos estes tópicos, apresentados nesta ordem neste capítulo, serão utilizados como base para o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Bifurcações em Sistemas Elétricos de Potência

As perturbações, classificadas como grandes ou pequenas, podem ser ocasionadas por uma mudança na configuração do sistema, como, por exemplo, a ocorrência de contingências ou a perda de unidades geradoras, linhas de transmissão e/ou transformadores. Entretanto, outras perturbações mantêm a configuração do sistema inalterada, como, por exemplo, no caso de alterações de carga. Variações lentas de carga e de geração são usualmente modeladas como variações lentas de parâmetros, e estão diretamente relacionadas com o aparecimento de bifurcações em SEP.

Quando ocorre uma variação de carga, o ponto de equilíbrio do sistema é

alterado. Supondo que a nova condição de operação também seja estável, o novo ponto de equilíbrio continua sendo estável, e também pode-se afirmar que o ponto de equilíbrio anterior fica localizado dentro da região de estabilidade do novo ponto de equilíbrio do sistema. Consequentemente, as dinâmicas do sistema que iniciam-se no antigo ponto de equilíbrio irão convergir para o novo ponto de equilíbrio (CHEN; HILL; YU, 2003). Como os SEP estão continuamente sujeitos a incrementos sucessivos na carga (perturbações), esta convergência acontece continuamente, quando o sistema é adequadamente planejado e projetado.

Este cenário de um SEP sujeito a variações lentas de carga pode ser modelado por um conjunto de equações algébrico-diferenciais não lineares, dependentes de um parâmetro. A variação de um parâmetro do sistema, neste caso, a variação da carga, pode resultar em uma mudança qualitativa no comportamento dinâmico do mesmo, sendo este estudo associado à teoria de bifurcações. Existem dois tipos principais de bifurcações (SAVI, 2007): bifurcações locais e bifurcações globais. Estas bifurcações são definidas como:

- *Bifurcações Locais*: são mudanças qualitativas de um sistema dinâmico nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio, como consequência da variação dos parâmetros do sistema. Normalmente seu estudo é realizado através do cálculo de autovalores;
- *Bifurcações Globais*: são mudanças qualitativas nos aspectos globais do fluxo de um sistema dinâmico. Ou seja, a partir da variação de um parâmetro do sistema pode ocorrer uma variação na estrutura das órbitas como consequência da variação dos parâmetros do sistema. Essa variação de estrutura não pode ser detectada puramente pela análise de estabilidade dos pontos de equilíbrios.

Neste trabalho, estaremos interessados nas bifurcações locais, uma vez que são as bifurcações mais recorrentes em SEP (CUTSEM; VOURNAS, 2003). Assim, esta seção apresenta uma revisão teórica e qualitativa apenas destas bifurcações, a saber, as bifurcações dos tipos Sela-Nó, Induzida por Limites e Hopf. Estas três bifurcações englobam as bifurcações de maior interesse em sistemas elétricos de potência, visto que estas são genericamente encontradas em famílias de equações diferenciais com parâmetro único (KWATNY; FISCHL; NWANKPA, 1995), que são os principais tipos de bifurcações que podem aparecer em SEP.

Apesar disso, bifurcações globais em SEP também foram reportadas na literatura (LEE; AJ-JARAPU, 1993), porém não serão aqui retratadas devido à sua natureza complexa e seu reduzido aparecimento em SEP.

Ainda, as seções seguintes apresentam, para cada respectiva bifurcação em SEP, uma breve revisão bibliográfica sobre metodologias de detecção e/ou predição das mesmas. A partir da análise detalhada destas metodologias, foram identificadas certas limitações envolvidas na determinação de pontos de bifurcação em SEP. Desta forma, visando contribuir para este cálculo, esta revisão bibliográfica justifica e motiva o trabalho desenvolvido nesta tese.

2.1.1 Bifurcação Sela-Nó

Em uma bifurcação sela-nó (BSN), à medida que o parâmetro varia, dois pontos de equilíbrio coalescem e desaparecem (CHEN; HILL; YU, 2003). Esta bifurcação também é caracterizada pela propriedade de que o espectro da Jacobiana sobre o ponto fixo estável, possui um autovalor real que se aproxima de zero através de valores negativos (BONILLA; TEITSWORTH, 2010). Este fenômeno, em SEP, está relacionado com o desaparecimento do ponto de equilíbrio estável de operação do sistema. Usualmente, ocorre quando o SEP se encontra fortemente carregado, e atinge o limite máximo de transferência de potência (P_{max}) (TAN et al., 1993). A consequência da ocorrência desta bifurcação é o colapso de tensão.

Para definir e caracterizar esta bifurcação, considere a equação diferencial de primeira ordem com apenas um parâmetro de variação:

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Supõe-se que existe um equilíbrio $x_{e,0}$, para $\lambda = \lambda_0$, para o qual os seguintes pressupostos devem ser satisfeitos:

$$\frac{\partial f(x_{e,0}, \lambda_0)}{\partial x} = 0 \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial^2 f(x_{e,0}, \lambda_0)}{\partial x^2} \neq 0 \quad (2.2b)$$

$$\frac{\partial f(x_{e,0}, \lambda_0)}{\partial \lambda} \neq 0 \quad (2.2c)$$

Segundo o teorema do comportamento do sistema próximo a este tipo de equilíbrio (SOTOMAYOR, 1973), dependendo do sinal apresentado por (2.2b) e (2.2c), no seu comportamento em SEP, existe:

- Nenhum ponto de equilíbrio próximo a $(x_{e,0}, \lambda_0)$, quando $\lambda < \lambda_0$ ($\lambda > \lambda_0$);

Espectro de uma matriz A é representado por $\Sigma(A)$ que é o conjunto de todos os valores próprios ($x \in A \mid Ax = \lambda x$) de A .

- Dois equilíbrios próximos a $(x_{e,0}, \lambda_0)$ para cada valor de parâmetro $\lambda > \lambda_0$ ($\lambda < \lambda_0$). Estes pontos de equilíbrio são hiperbólicos, um deles é estável e o outro instável.

Para um maior entendimento das afirmativas anteriores, considere a Figura 2.1, que ilustra o comportamento do equilíbrio de 2.1, quando λ varia passando por λ_0 .

Figura 2.1: Comportamento de um sistema próximo a um ponto de equilíbrio sela-nó.

Nas hipóteses do teorema acima, o parâmetro λ_0 é um valor de bifurcação local, já que para λ variando suficiente próximo de λ_0 existe uma mudança no número de pontos de equilíbrios do sistema. A este valor de bifurcação, dadas as condições (2.2) atendidas, dá-se o nome de valor de bifurcação sela-nó, ou simplesmente diz-se que $(x_{e,0}, \lambda_0)$ é um ponto de bifurcação sela-nó do sistema (2.1). Para fins de exemplificação, considere um sistema dinâmico do tipo:

$$\dot{x} = \lambda - x^2 \quad (2.3)$$

Os pontos de equilíbrio deste sistema são dados por:

$$f(\bar{x}, \lambda) = \lambda - \bar{x}^2 = 0 \Rightarrow \bar{x}^2 = \lambda \quad (2.4)$$

Linearizando o sistema, obtém-se $Df(\bar{x}) = -2\bar{x}$, de onde pode-se concluir que:

Se $\bar{x} < 0 \Rightarrow Df > 0 \Rightarrow$ Ponto de Equilíbrio Instável

Se $\bar{x} > 0 \Rightarrow Df < 0 \Rightarrow$ Ponto de Equilíbrio Estável

De acordo com (2.4), o sistema (2.3) pode apresentar características distintas, dependendo do valor do parâmetro λ , ou seja:

Um ponto de equilíbrio é hiperbólico se todos os autovalores da matriz Jacobiana do sistema linearizado associado possuem parte real não nula.

Figura 2.2: Exemplo de bifurcação sela-nó.

Se $\lambda < 0$, o sistema não apresenta pontos de equilíbrio

Se $\lambda = 0$, o sistema apresenta um ponto de equilíbrio

Se $\lambda > 0$, o sistema apresenta dois pontos de equilíbrio

A Figura 2.2 ilustra o diagrama de bifurcação referente a este exemplo. Linhas pontilhadas representam pontos de equilíbrio instáveis, enquanto que linhas cheias indicam pontos de equilíbrio estáveis.

No caso de SEP, o espaço de parâmetros inclui as potências injetadas pelos geradores e as potências consumidas pelas cargas em cada barra da rede, bem como outros controles disponíveis ao operador do sistema. Estes parâmetros possuem incertezas, principalmente a potência consumida pelas cargas. Desta forma, é necessária a operação do sistema com uma margem de segurança, de forma a evitar o colapso de tensão, ou seja, suficientemente longe do ponto de BSN no espaço de parâmetros (CHEN; HILL; YU, 2003).

Estudos de estabilidade de tensão são comumente baseados na análise das curvas $P - V$ e $Q - V$ (CUTSEM; VOURNAS, 2003). Uma característica física, apresentada pelo sistema nestas curvas, é normalmente referida na literatura como o "nariz" da curva $P - V$, sendo P e V respectivamente a potência ativa total no sistema e a tensão em alguma barra do mesmo. O nariz da curva $P - V$ só coincide com o ponto de bifurcação para o caso em que as cargas são modeladas no sistema como PQ constantes. A Figura 2.3 ilustra a curva $P - V$ de um sistema elétrico, bem como o respectivo ponto de bifurcação na condição de máxima transferência de potência. Nesta figura, V_0 representa a tensão inicial na barra em estudo, e a potência inicial é considerada a condição base de carregamento do sistema. V_{crit} é a tensão crítica antes da instabilidade do sistema, P_{max} é o máximo carregamento do sistema.

Figura 2.3: Curva $P - V$ de um sistema de potência.

Para visualizarmos a BSN em um SEP, podemos analisar um sistema contendo apenas um barramento infinito e uma carga PQ , conforme ilustrado na Figura 2.4 (CUTSEM; VOURNAS, 2003). Desconsiderando a resistência da linha de transmissão, e admitindo-se a referência fasorial $\bar{E} = E\angle 0$, e denotando-se a tensão e ângulo da carga como V e θ , obtém-se a potência complexa absorvida por esta carga:

$$S = \frac{j}{X}(EV\cos\theta + jEV\sin\theta - V^2) \quad (2.5)$$

que pode ser decomposto em:

$$P = -\frac{EV}{X}\sin\theta \quad (2.6)$$

$$Q = -\frac{V^2}{X} + \frac{EV}{X}\cos\theta \quad (2.7)$$

Figura 2.4: Sistema de barramento infinito contendo uma carga.

Eliminando θ de (2.6) e (2.7), obtém-se:

$$(V^2)^2 + (2QX - E^2)V^2 + X^2(P^2 + Q^2) = 0 \quad (2.8)$$

No espaço (P, Q, V) , a equação (2.8) define uma superfície bidimensional, conforme ilustra a Figura 2.5. Nesta figura, pode-se observar a curva $P - V$ através da projeção desta superfície no plano $\frac{V}{E} \times \frac{PX}{E^2}$, conforme a Figura 2.6 (CUTSEM; VOURNAS, 2003).

Figura 2.5: Tensão como função das potências ativa e reativa.

Figura 2.6: Curvas $P - V$ do sistema da Figura 2.4.

Metodologias de Detecção e Predição de Bifurcações Sela-Nó em Sistemas Elétricos de Potência

Método de Makarov *et al.* (1994)

Este método tem como objetivo encontrar o ponto de BSN mais próximo ao ponto em que o SEP está operando (MAKAROV; HISKENS, 1994). Este método consiste na solução de um problema de otimização, que levam à descrição dos pontos críticos do sistema. Um algoritmo de duas etapas foi proposto para a solução do problema. A primeira etapa é simplesmente a de encontrar um ponto na superfície singular do sistema, ou seja, a superfície de pontos da BSN que se localiza em uma direção específica. A segunda parte utiliza um método continuado para conduzir a solução do ponto inicial de operação até o ponto crítico. O trabalho apresenta duas maneiras de formular o problema de continuação e uma sugestão de técnica numérica para sua solução é delineada. Este algoritmo foi testado em um sistema de 8 barras e apresentou uma convergência razoável para os pontos críticos desejados em condições normais, sendo sensível a condições iniciais. Entretanto, se uma estimativa ruim da direção do ponto crítico for utilizada, pode ocorrer uma singularidade da matriz Jacobiana das equações de pontos críticos, proporcionando a não convergência da metodologia.

Método de Chiang *et al.* (1997)

Esta metodologia, também chamada de *look-ahead* e detalhada em (CHIANG; WANG; FLUECK, 1997), mede a margem de estabilidade de tensão, levando em consideração a direção de crescimento de carga e geração, e não requer o cálculo de fluxos de carga sucessivos, como é comum em métodos continuados. Utilizando apenas dois fluxos de carga, obtém-se uma previsão do ponto de máximo carregamento da rede. Esta é baseada na forma normal das equações algébricas no ponto de bifurcação sela-nó e portanto, leva em consideração a característica não-linear do problema.

Os testes numéricos desta metodologia foram realizados no sistema New England de 39 barras e demonstraram que o erro percentual entre a estimativa da margem de carregamento do sistema e da margem exata varia de 0.36% até 4.6%, demonstrando que a proposta possui resultados bastante precisos. Uma deficiência da metodologia *look-ahead* é a não observância das bifurcações de Hopf e induzida por limites, o que limita sua aplicação na prática.

Método de Feng *et al.* (2000)

Esta metodologia resolve simultaneamente as equações diferenciais e algébricas (em regime) obtendo-se, desta forma, os pontos de equilíbrio do sistema (FENG;

AJJARAPU; LONG, 2000). Combinada com a técnica de continuação parametrizada, esta metodologia identifica o ponto de máximo carregamento durante o traçado direto do equilíbrio, sem a atualização da matriz Jacobiana do sistema dinâmico, verificando sua singularidade. Os autores salientam que esta metodologia produz uma informação fiel à estabilidade do sistema e implementa precisamente os seus limites, uma vez que considera as equações diferenciais do sistema.

O testes numéricos, realizados no sistema de 39 barras New England, mostram que esta metodologia possui a capacidade de realisticamente simular a regulação de tensão e frequência através da atuação dos reguladores de tensão dos geradores e de dispositivos FACTS. O aspecto computacional foi avaliado, apresentando diversas simulações, comparação com fluxo continuado e tempo de processamento. O tempo computacional envolvido para esta metodologia é superior à metodologia continuada que o autor explica como aceitável para a estimativa do ponto de colapso. A exatidão do ponto de bifurcação encontrado é, no caso desta metodologia, superior ao caso continuado, uma vez a dinâmica dos dispositivos de controle é corretamente representada e que nenhuma suposição é aplicada para o sistema, diferentemente do fluxo continuado, onde é assumido um ganho infinito do AVR dos geradores modelados como barras *PV*, ou uma capacitância infinita para o gerador modelado como barra *slack*.

Método de Ghasemi *et al.* (2004)

O trabalho apresentado em (GHASEMI; CAÑIZARES; REEVE, 2004) tem como objetivo a obtenção de um índice para a identificação de modos críticos de um sistema de potência. Este índice não necessita da modelagem do sistema e é baseado em medidas reais de campo. Baseado na afirmativa anterior, os autores justificam a necessidade de utilização deste índice devido ao alto custo computacional existente nos modelos atuais de detecção de margem de estabilidade, possibilitando sua utilização no monitoramento *online* da estabilidade do sistema.

A metodologia apresentada por este trabalho é baseada na técnica de identificação de Prony, utilizado para o cálculo deste índice e que pode ser rapidamente calculado a partir de medições no sistema para determinar a distância entre o ponto de operação atual e um ponto de instabilidade. Estas medidas reais podem ser velocidade do rotor do gerador, ângulo ou potência através das linhas, entre outras. Resultados foram apresentados para os sistemas IEEE de 3 e de 14 barras. Os autores testaram a validade e a performance deste índice através de estudos realizados com modelos detalhados do EMTP para a reprodução de sinais reais que seriam utilizados para obter o índice desejado. O problema desta metodologia está vinculado à obtenção de medidas confiáveis em sistema de potência,

visto que nem sempre estas estão disponíveis.

2.1.2 Bifurcação Induzida por Limites

Matematicamente, o nariz da curva $P - V$ (ou ponto de máximo carregamento) de um SEP parametrizado, com respeito ao vetor carga-geração, pode ocorrer também devido a uma bifurcação induzida por limites (BIL), e não somente devido a um BSN. Fisicamente, no contexto de avaliação de capacidade de transferência de potência, a BSN está relacionada, de forma muito próxima, ao limite de capacidade de transmissão em um SEP. Por outro lado, a BIL está relacionada ao limite de geração de potência reativa de um ou mais geradores (CHOW; WU; MOMOH, 2003).

Antes da ocorrência de uma bifurcação, de forma geral, o sistema é operado nas redondezas do ponto de equilíbrio estável $x_e(\lambda)$. No ponto de BIL, o ponto de equilíbrio estável e um ponto de equilíbrio instável do tipo um $x_i(\lambda)$, conforme o parâmetro varia, coalescem e formam um único ponto de equilíbrio CHEN; HILL; YU (2003). A matriz Jacobiana, que é formulada diferentemente da Jacobiana tradicional do fluxo de carga, avaliada neste ponto de equilíbrio, possui um único autovalor nulo simples e as partes reais de todos os outros autovalores são negativas. O ponto de operação torna-se imediatamente instável quando o limite é atingido.

Dada uma variação unidirecional para carga/geração, o efeito do alcance de um limite de reativos em um gerador é de imediatamente modificar a equação do sistema, ou seja, em uma análise estática, o gerador cujo limite de reativo é alcançado pode ser modelado alterando o equacionamento que descreve uma barra PV pelo equacionamento de uma barra PQ . A Figura 2.7 ilustra um gráfico $P - V$ de um SEP o qual possui ocorrência de um BIL antes de uma BSN.

Metodologias de Detecção e Predição de Bifurcações Induzidas por Limites em Sistemas Elétricos de Potência

As metodologias existentes na literatura para a estimativa da margem de estabilidade normalmente não levam em consideração as bifurcações induzidas por limites. Esta seção apresenta alguns dos poucos trabalhos que se direcionam a este tipo de problema.

Método de Zhao *et al.* (2003)

Esta metodologia, apresentada em (ZHAO; CHIANG; LI, 2003), afirma que algumas margens de carregamento são otimistas para certos tipos de contingências, visto que não levam em consideração a presença de bifurcações induzidas por

Figura 2.7: Ocorrência de uma BIL antes do ponto de máximo carregamento.

limites. Assim, o autor apresenta uma metodologia que não somente encontra o ponto de bifurcação devido à BSN mas também devido à BIL, sendo este trabalho um aprimoramento da metodologia desenvolvida em (CHIANG; WANG; FLUECK, 1997). No estudo realizado pelos autores, eles consideram as informações do ponto atual de operação, da demanda de carga de curto-prazo em cada barra, do conjunto de transferência de potência proposta, e de uma lista de possíveis contingências do sistema.

Neste trabalho, os autores propõem um método melhorado para a estimativa da margem de carregamento *look-ahead*, devido à BSN ou à BIL. Segundo os mesmos, a margem estimada pelo método melhorado pode resolver a dificuldade associada ao problema de falta de alarme. Duas novas estratégias foram desenvolvidas: o esquema de seleção por tamanho de passo baseado na sensibilidade e o esquema de re-seleção para selecionar dois fluxos de potência para o ajuste da curva quadrática. Estas foram incorporadas em um método que pode manipular os seguintes tipos de contingências:

- Contingências múltiplas de ramo;
- Contingências múltiplas de geradores;
- Uma combinação das anteriores.

Os estudos de caso são apresentados para um sistema de potência prático de 600 barras com a finalidade de ilustrar a eficiência da metodologia. Os autores propõem um algoritmo que envolve diversas metodologias como, por exemplo, a utilização sucessiva do CPFLOW (programa de cálculo de BSN) e uma análise

de sensibilidade. A utilização de diversas metodologias aumenta a instabilidade numérica, entretanto reduz o tempo de processamento da metodologia.

Método de Wang *et al.* (2006)

O trabalho desenvolvido por WANG; LIU (2006) buscou aprimorar a eficiência computacional de métodos de fluxo de potência continuado, incluindo também a identificação de BIL além de BSN. Para tanto, os autores dividem a curva $\lambda - V$ em três partes: a primeira diz respeito à parte superior da curva onde o ponto de operação se encontra afastado do ponto crítico e a carga é leve; o segundo estágio refere-se a um ponto de operação próximo ao ponto crítico quando há um carregamento acentuado; e o terceiro estágio é referenciado como a parte inferior da curva, sendo que novamente o ponto de operação encontra-se afastado do ponto crítico e a carga também é leve. Ainda, um índice de segurança é definido para a identificação dos três estágios. Com base nesta separação, o método de fluxo continuado é aplicado no estágio dois. Já para os estágios um e três os autores utilizam um método de cálculo simplificado, escolhendo-se λ como o parâmetro de continuação. Um conjunto de restrições é adequadamente definido para determinar a ocorrência de BSN ou BIL. A partir disto, o seguinte algoritmo foi desenvolvido para a previsão da ocorrência destas bifurcações:

1. Solucionar o fluxo de potência inicial (caso base);
2. Executar a metodologia desenvolvida para predição, correção e identificação de BSN ou BIL;
3. Testar se o ponto de operação encontra-se no estágio dois, se sim, continuar, se não voltar ao passo 2;
4. Selecionar o parâmetro de continuação, o parâmetro local do fluxo continuado e identificar a BSN ou BIL;
5. Testar se o ponto de operação encontra-se no estágio três, se sim continuar, se não, retornar ao passo 4;
6. Executar a metodologia desenvolvida para predição, correção e identificação de BSN ou BIL;
7. Armazenar o resultado.

Este algoritmo foi testado nos sistemas IEEE 14 barras e IEEE 118 barras, apresentando resultados satisfatórios em termos de convergência, apesar da definição de estágios para avaliação da curva $\lambda - V$. Nenhum tempo computacional foi mencionado neste trabalho.

2.1.3 Bifurcação de Hopf

A bifurcação de Hopf (BH), diferentemente das bifurcações sela-nó e induzida por limites, não está associada ao desaparecimento de equilíbrios. Ela, na verdade, produz ciclos limite, levando o sistema a problemas oscilatórios e possíveis instabilidades, reduzindo consideravelmente a margem de carregamento do sistema.

Estes problemas oscilatórios, característicos de grandes sistemas interconectados, são tratados com a análise e o controle das oscilações de baixa frequência (ROGERS, 1999). A BH é uma bifurcação local que leva o sistema ao surgimento de oscilações, podendo estas inclusive serem crescentes e levarem o sistema à instabilidade. As BHs podem ser causadas, por exemplo, por contingências, pelo crescimento da carga, e por problemas no AVR, podendo causar danos irreversíveis, caso o sistema de proteção não atue devidamente. Por este motivo, é necessário um estudo detalhado específico para este tipo de bifurcação, de forma que possa ser realizado um monitoramento, e possivelmente um controle preventivo do sistema em tempo real, evitando assim a ocorrência de possíveis blecautes.

O teorema que descreve o ponto de BH possui diferentes demonstrações, realizadas através do uso de diferentes técnicas matemáticas (MARSDEN; MCCracken, 1976; MEES; CHUA, 1979; HSU; KAZARINOFF, 1976; ALLWRIGHT, 1977). O teorema clássico, formulado no domínio do tempo, o qual vem sendo aplicado em, por exemplo, campos de dinâmicas não lineares, EDOs e sistemas de controle, será introduzido nesta seção. Este teorema relata o aparecimento de soluções periódicas em uma dada EDO quando um parâmetro real da equação varia. Para a introdução deste resultado, considere o sistema $\dot{x} = f(x, \lambda)$. Admite-se que este sistema satisfaça às condições suficientes para garantir a existência de uma solução única para cada valor de condição inicial dado, $x(t_0) = x_0$, e para cada valor de λ , e ainda que x^* seja um ponto de equilíbrio, ou seja, $f(x^*, \lambda) = 0$. Linearizando o sistema em torno do ponto de equilíbrio, x^* , a seguinte equação é obtida:

$$\Delta \dot{x} = J \cdot (x - x^*) \quad (2.9)$$

onde J é a matriz Jacobiana do sistema definido anteriormente.

Esta matriz J possui um único par de autovalores puramente imaginários quando o sistema encontra um ponto de BH, ou seja, no valor crítico quando $\lambda = \lambda_0$. Quando estes autovalores do sistema, $\Lambda(\lambda)$, cruzam o eixo imaginário com a variação de λ até o valor crítico, fenômenos dinâmicos podem ser obser-

Para um equação diferencial, um ciclo limite é uma trajetória fechada no plano de fase, para a qual nenhuma trajetória próxima é também fechada. E, dependendo se o ciclo é estável ou instável, as trajetórias próximas se afastam ou convergem para o ciclo limite.

vados, como por exemplo o surgimento de um ciclo limite na vizinhança de uma solução do sistema. Em outras palavras, a partir do valor crítico λ_0 , um ramo de soluções periódicas com amplitudes crescentes pode ser encontrado. Quando o parâmetro λ é variado perto do valor crítico, ciclos limite surgem para valores de λ menores ou maiores que λ_0 , respectivamente caracterizando uma bifurcação subcrítica e supercrítica (HASSARD; KAZARINOFF; WAN, 1981).

Na BH subcrítica, as trajetórias após a bifurcação não são limitadas, e possuem oscilações crescentes. Este fato é definido na literatura como *perda brusca de estabilidade* (CUTSEM; VOURNAS, 2003). Já para a bifurcação supercrítica, antes do seu ponto crítico não existe ciclo limite, este é gerado apenas no ponto de bifurcação, e é estável. Neste caso, ao contrário da subcrítica, após o ponto de bifurcação as oscilações possuem amplitude limitada.

A principal contribuição do teorema fundamental da bifurcação de Hopf, segundo Moiola *et al.* (1996), se apresenta de forma que é possível, para certos valores de λ , que o sistema tenha apenas uma única solução, enquanto que para outros valores de λ esta solução e a solução periódica coexistam. Em alguns sistemas não-lineares, geralmente surge a necessidade de se determinar para quais valores de λ o ramo de soluções periódicas existe, através do pressuposto de que todos os outros autovalores da Jacobiana estejam localizados no semi-plano esquerdo.

O teorema simplificado da teoria de BH será apresentado para um sistema de EDOs genérico de n dimensões.

Considere o sistema de EDOs não linear na forma:

$$\dot{x} = f(x, \lambda) \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.10)$$

Supõe-se que todas as condições necessárias do campo vetorial f são satisfeitas, de forma a garantir que para qualquer condição inicial x_0 pertencente a uma região do $\mathbb{R}^n$, o sistema (2.10) possua solução única para cada valor do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$. O teorema da BH sobre estabilidade de ciclos limite para um sistema dinâmico não linear (2.10) é formulado a seguir (ARROWSMITH; PLACE, 1990).

Suponha que o sistema $\dot{x} = f_\lambda(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ possua um equilíbrio (x_0, λ_0) , no qual as seguintes propriedades sejam satisfeitas:

1. $D_x f_{\lambda_0}$ possui um par simples de autovalores puramente imaginários e nenhum outro autovalor com parte real zero. Os autovalores $\Lambda(\lambda)$, $\Lambda^*(\lambda)$ de $D_x f_{\lambda_0}$ que são imaginários em $\lambda = \lambda_0$ variam suavemente com λ . Se, além disso,

Todas dependentes da função não linear f .

2. $\left. \frac{d}{d\lambda}(\text{Re}\Lambda(\lambda)) \right|_{\lambda=\lambda_0} = d \neq 0$, então existe uma variedade central tridimensional única passando por (x_0, λ_0) em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e um sistema de coordenadas (preservando os planos com λ constante) para o qual a expansão de Taylor de grau 3 no centro coletor é dada por: $\dot{x} = (d\lambda + a(x^2 + y^2))x - (\omega + c\lambda + b(x^2 + y^2))y$, $\dot{y} = (\omega + c\lambda + b(x^2 + y^2))x - (d\lambda + a(x^2 + y^2))y$, que é expressa em coordenadas polares como: $\dot{r} = (d\lambda + ar^2)r$, $\dot{\theta} = (\omega + c\mu + br^2)$.

O item 1 implica que existe uma curva de equilíbrio $(x(\lambda), \lambda)$ com $x(\lambda_0) = \lambda_0$. Ainda, se $a \neq 0$, existe uma superfície de soluções periódicas na variedade central que tem uma tangência quadrática com o espaço de autovalores de $\Lambda(\lambda_0)$, $\Lambda^*(\lambda_0)$ concordando em segunda ordem com o parabolóide $\lambda = -(a/d)(x^2 + y^2)$. Se $a < 0$ então essas soluções periódicas são ciclos limites estáveis, enquanto que se $a > 0$, as soluções periódicas são repulsivas.

Metodologias de Detecção e Predição de Bifurcações de Hopf em Sistemas Elétricos de Potência

Para facilitar a apresentação das metodologias de detecção e previsão de BH, serão utilizadas as mesmas notações para os parâmetros de interesse dos SEP. Ainda, algumas metodologias são baseadas nas formulações de equações definidas em (MOORE; SPENCE, 1993) e (HOLODNIOK; KUBICEK, 1984).

A dinâmica de SEP pode ser modelada por equações diferenciais algébricas que possuem a dependência de um parâmetro conforme (2.11):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \lambda) \\ 0 = g(x, y, \lambda) \end{cases} \quad \begin{matrix} f : \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ g : \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m \end{matrix} \quad (2.11)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, e

x vetor de variáveis de estado dinâmicas;

y vetor de variáveis estáticas;

λ carregamento do sistema.

As variáveis do vetor x descrevem elementos com comportamento dinâmico em SEP, como por exemplo a posição angular e a velocidade angular do rotor de geradores. As variáveis do vetor y são geralmente relacionadas às variáveis da rede, tipicamente incluindo variáveis do fluxo de potência. Linearizando o sistema (2.11), obtém-se:

$$\Delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \Delta \lambda \quad (2.12)$$

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial g}{\partial \lambda} \Delta \lambda \quad (2.13)$$

Denota-se:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial f}{\partial x} & B &= \frac{\partial f}{\partial y} \\ C &= \frac{\partial g}{\partial x} & D &= \frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned}$$

Para $\Delta\lambda = 0$, resolvido (2.13) e substituindo o resultado em (2.12), é possível calcular a matriz reduzida do sistema, conforme (2.14):

$$A_{red} = (A - B \cdot D^{-1} \cdot C) \quad (2.14)$$

Segundo Huang *et al.* (2002), esta matriz é normalmente utilizada para a análise da estabilidade do sistema. Definidas as matrizes anteriores, serão apresentadas a seguir as metodologias para detecção e predição de BH.

Metodologia Clássica

Esta metodologia busca encontrar o ponto de bifurcação do sistema, utilizando diretamente (2.11). Para tanto, varia-se o parâmetro λ e, para cada valor de λ , calculam-se os autovalores da matriz reduzida do sistema definida por (2.14). Este nome é atribuído a esta metodologia, na literatura, devido ao fato desta ser a primeira metodologia utilizada, não existindo um algoritmo específico de detecção/predição definido, mas sim um algoritmo de força bruta. Normalmente esta metodologia está associada ao cálculo da curva $P - V$, onde a cada iteração (incremento do parâmetro de carregamento do sistema) a matriz A_{red} é calculada e seus autovalores são encontrados. A desvantagem associada a esta metodologia reside no alto esforço computacional necessário, visto que há a necessidade de sucessivos cálculos de autovalores, prejudicando a sua eficiência principalmente em se tratando de sistemas de grande porte, onde esse cálculo sucessivo se torna inviável em estudos de tempo real.

Método de Gupta et al. (1998)

O método de Gupta *et al.* (1998) é um método direto que visa encontrar o ponto de bifurcação de Hopf mais próximo de um dado ponto de operação do sistema. Esse ponto de bifurcação é calculado no espaço de parâmetros da carga, utilizando um modelo baseado em otimização.

A metodologia apresentada faz uso do conjunto de equações apresentado em (HOLODNIOK; KUBICEK, 1984). Utilizando as equações de norma euclidiana, definidas no Anexo C, como equações complementares deste sistema, tanto para a parte real do autovetor associado à bifurcação como também para a sua parte imaginária, ou seja, $\|v^r\| \neq 0$ e $\|v^i\| \neq 0$, calcula-se o ponto de bifurcação de

Hopf. Em (GUPTA; VARMA; SRIVASTAVA, 1998) afirma-se que o ponto de bifurcação mais próximo do ponto de operação atual pode ser estimado minimizando a norma Euclidiana da distância entre λ e λ_0 (carregamento atual e base, respectivamente), em uma superfície formada no espaço do parâmetro de carga do sistema, conforme (2.15):

$$\text{Minimizar } f = ||\lambda - \lambda_0||^2 \quad (2.15)$$

Entretanto, antes de proceder à resolução destas equações, Gupta et. al (1998) apresentam uma forma de determinar as condições iniciais do sistema. Este tratamento foi ressaltado em (GUPTA; VARMA; SRIVASTAVA, 1998) a fim de destacar uma das possíveis formas para que o método direto possua convergência. Este procedimento inclui:

1. Resolução do fluxo de carga, determinando valores iniciais para as variáveis do fluxo, ou seja, y em (2.11);
2. Obtenção da solução de $\dot{x} = 0$ em (2.11), para a obtenção dos valores iniciais de x ;
3. Obtenção de A_{red} , conforme (2.14), utilizando os valores de x e y obtidos nos passos I e II;
4. Cálculo dos autovalores de A_{red} , definindo $s = \text{Imag}\{\lambda\}$, onde *imag* denota a parte imaginária de um número complexo e λ é o autovalor selecionado como possuindo a menor parte real da matriz A_{red} ;
5. Cálculo de v^r e v^i representando a parte real e a parte imaginária do autovetor associado ao autovalor λ ;
6. Divisão de cada autovetor pelo seu primeiro elemento, de forma a garantir que a norma dos autovetores associados à bifurcação seja diferente de zero;

Após o cálculo das condições iniciais, estas são então utilizadas em um programa sequencial quadrático para minimizar (2.15) e satisfazer as equações do sistema aumentado.

O método de Gupta *et al.* (1998) visava apenas apresentar uma metodologia para o cálculo de BH, que foi testada em um sistema de 3 barras. Nestes testes, não foi levado em consideração o tempo necessário para a execução da metodologia em tempo real, e sequer foi comentado pelos autores indícios acerca de sua eficiência ou possibilidade de utilização em sistemas de grande porte. Esta metodologia possui como principal desvantagem o cálculo de A_{red} e dos seus autovalores para a determinação de condições iniciais, bem como o esforço utilizado para minimizar a função objetivo juntamente com a necessidade de solução das equações do sistema.

Método de Mithlananthan et al. (2000)

O método de Mithlananthan *et al.* (2000) apresenta índices para detectar e prever problemas de estabilidade. O sistema de equações utilizado é o (2.11), a partir do qual os autores calculam a matriz reduzida A_{red} , considerando (2.14). Utilizando a matriz

$$A_m = \begin{bmatrix} A_{red} & \beta I_n \\ -\beta I_n & A_{red} \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

é definido um índice de bifurcação chamado de HB_1 , como sendo o menor valor singular da matriz A_m , ou seja, $HB_1 = \sigma_{min}(A_m)$. O objetivo da utilização da matriz aumentada é encontrar índices lineares para encontrar o ponto da bifurcação. Os autores ainda propõem um segundo índice baseado no modelo preservado da rede, evitando assim o cálculo de A_{red} . Para tanto é definida a matriz

$$J_m = \begin{bmatrix} A & B & \beta I & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ -\beta I & 0 & A & B \\ 0 & 0 & C & D \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

e o segundo índice é definido como $HB_2 = \sigma_{min}(J_m)$.

Estes índices foram testados em 3 sistemas pelo autor: um sistema de 2 barras, o sistema IEEE 14 barras e o sistema encontrado em (KUNDUR, 1994, pág. 813). A grande desvantagem deste método é que o mesmo se utiliza de uma metodologia muito similar à do método clássico, calculando autovalores sucessivamente para cada valor de carregamento, com a finalidade de montar a matriz do sistema e calcular os índices propostos, HB_1 e HB_2 . Os índices facilitam a visualização da bifurcação, porém aumentam o esforço computacional exigido para o cálculo do valor crítico μ_0 , em relação ao método clássico, caracterizando-o como inadequado para utilização em sistemas de grande porte quando se necessita um tempo de resposta reduzido.

Método de Marakov et al. (2000)

O método de Marakov *et al.* (2000) é dedicado a resolver os problemas do fluxo de carga, da BSN e de cálculo de fronteiras de bifurcação de Hopf no espaço dos parâmetros do SEP. Como o enfoque desta tese está nas BH e BSN, será resumida aqui apenas a metodologia desenvolvida para estas bifurcações.

Primeiramente considera-se o sistema apresentado em (2.11). Segundo o autor, as condições de operação do sistema devem ser mantidas dentro dos domínios de viabilidade e estabilidade do mesmo, as quais são definidas por superfícies que satisfaçam a seguinte condição geral: $\det[J(x, y) \pm j\omega I] = 0$, onde ω denota a parte imaginária do autovalor no ponto de bifurcação (Hopf ou Sela-Nó),

J a matriz Jacobiana do sistema e I denota uma matriz identidade. Entretanto, a condição anterior corresponde a uma superfície muito complicada e a visualização da geometria apresentada pela mesma é um problema difícil. Esta visualização é geralmente realizada em planos definidos por um par de parâmetros escolhidos x ou y , sendo que alguns recursos importantes referentes à superfície de bifurcação e múltiplos pontos de equilíbrios não podem ser observados nestes planos.

O método de Marakov *et al.* (2000), chamado de Δ -Plano, introduz um plano que permite a visualização da superfície de bifurcação enquanto esta se intercepta ao mesmo. Este Δ -plano é definido por três vetores linearmente independentes, x_1 , x_2 e x_3 , que, para o caso de sistemas de potência, são escolhidos como três pontos de operação distintos do sistema. Esta metodologia visa a obtenção da intersecção da fronteira do domínio de viabilidade do fluxo de potência com um plano no espaço de variáveis dependentes x . Sabe-se também que esta fronteira é constituída por pontos onde o determinante da Jacobiana do sistema é nulo, ou seja $\det J(x) = 0$.

Esta metodologia possui dois passos principais: a obtenção das curvas de bifurcação no Δ -Plano em $\mathbb{R}_x^n$ e a visualização do Δ -Plano em $\mathbb{R}_x^n$. A descrição destes passos pode ser encontrada de forma detalhada em (MAKAROV; HILL; DONG, 2000). É de principal interesse ressaltar que, nesta metodologia, no passo da obtenção das curvas de bifurcação no Δ -Plano, o autor utiliza-se do cálculo sucessivo de autovalores da matriz $J^{-1}(x_1) \cdot J(x)$ para a determinação dos pontos referentes à curva de bifurcação, o que eleva o seu esforço computacional.

Esta metodologia apresentou resultados obtidos utilizando o sistema New-England de 39 barras. Entretanto, o tempo/esforço computacional necessário para a aplicação deste método não é mencionado no respectivo trabalho, e desta forma, admite que este seja elevado, uma vez que a metodologia apresenta o cálculo sucessivo de matrizes inversas da Jacobiana do sistema. Assim, sua utilização é comprometida em estudos para tempo real.

Método de Gomes et al. (2002)

O método de Gomes *et al.* (2002) tem por objetivo determinar o valor de um parâmetro do sistema para o qual ocorre o cruzamento de um par de autovalores complexos conjugados para o semi-plano direito do plano complexo. Da mesma forma como nas metodologias previamente descritas, em (GOMES; MARTINS; PORTELA, 2002) o sistema e sua linearização são definidos por, (2.11), (2.12) e (2.13) respectivamente. Em (GOMES; MARTINS; PORTELA, 2002) ainda é afirmado que a utilização de uma equação de normalização do autovetor, como proposto pelos autores na sua metodologia, é mais indicada para o uso com BH

do que as de norma euclidiana, utilizadas em trabalhos anteriores à este. Neste mesmo trabalho, um lugar geométrico no plano complexo é utilizado para definir o amortecimento mínimo dos autovalores do sistema (fronteira de segurança), B . Gomes *et al.* (2002) utilizam o seguinte sistema, propondo a resolução do mesmo através do método de Newton:

$$\begin{cases} f(x, y, \mu) & = 0 \\ (\lambda \cdot T - J) \cdot v & = 0 \\ c \cdot v & = 1 \\ B(\sigma, \omega) & = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

onde T é o multiplicador de $\dot{x}$ no sistema de equações diferenciais, e c é um vetor escolhido arbitrariamente.

Gomes *et al.* (2002) ainda apresentam um algoritmo baseado no conceito de função de transferência para BH, no domínio da frequência. Ambos os algoritmos apresentados demonstraram um desempenho muito próximo quando comparados entre si. Gomes *et al.* (2002) não mencionam a questão das condições iniciais, porém relatam o tempo computacional exigido pelo programa desenvolvido sendo este relativamente reduzido para o cálculo de um autovalor que cruza uma fronteira de segurança pré-estabelecida diferente do cruzamento pelo eixo imaginário. O sistema utilizado para apresentar os resultados foi o Norte-Sul brasileiro equivalente.

Este trabalho apresenta uma metodologia para o cálculo de BH com a finalidade de encontrar o autovalor que cruza uma fronteira de segurança, ou seja, encontrar um autovalor com potencial para causar uma BH. A desvantagem apresentada por este fato recai no cálculo de possíveis autovalores de ocorrência da BH, e não apenas do ponto de ocorrência da mesma, aumentando o esforço computacional exigido pelo algoritmo, uma vez que este calcula vários possíveis autovalores. Isto compromete sua utilização em tempo real para a determinação de uma margem precisa de carregamento do sistema devido à estas bifurcações.

Método de An et al. (2008)

O método de An *et al.* (2008) busca encontrar o ponto de BH através da adição de uma equação auxiliar às equações propostas em (MOORE; SPENCE, 1993), e citadas anteriormente. Para tanto, o sistema (2.11) é utilizado, sendo que o

sistema aumentado utilizado é dado por (2.19).

$$\begin{cases} f(x, y, \mu) &= 0 \\ g(x, y, \mu) &= 0 \\ v_n^T - v_m^T y - \alpha &= 0 \\ J - \omega_j \begin{bmatrix} v_n \\ 0 \end{bmatrix} &= 0 \\ v^T v - 1 &= 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

onde $v = \begin{bmatrix} v_n \\ v_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ e sendo:

- J é a Jacobiana do sistema diferencial-algébrico;
- ω_j é a parte imaginária do autovalor de bifurcação e seu conjugado;
- α uma constante arbitrária especificada pelo autor.

O sistema aumentado é desacoplado e calculado em partes, resultando assim em um algoritmo de Newton mais eficiente, o que diminui o tempo computacional para aplicações em tempo real. Entretanto, nesta metodologia são calculados os parâmetros x , y , μ e v , supondo ω conhecido, o que é uma grande desvantagem desta metodologia, dado que na prática não há garantias de que ω tenha uma variação pouco significativa do caso base até o ponto de ocorrência da bifurcação. Além disso, conforme será posteriormente apresentado, a fixação desta variável pode resultar na falta de soluções do sistema através de métodos diretos.

Em (AN et al., 2008) não é mencionado o tratamento das condições iniciais nem o tempo computacional exigido pelo programa proposto. Entretanto, um modelo de sistema de 3 barras foi utilizado para a apresentação de resultados. A grande desvantagem desta metodologia é realmente a determinação do valor inicial de ω , ou seja, da parte imaginária do autovalor no ponto da bifurcação, pois esta, se não especificada próxima à condição de bifurcação, proporciona a não convergência do algoritmo. Ainda, o cálculo prévio desta parte imaginária para uso como condição inicial exige um grande esforço computacional.

2.2 Fixação de Variáveis em Sistemas Lineares

Esta seção tem como objetivo apresentar o teorema fundamental da álgebra linear, com a teoria de subespaços fundamentais. Este embasamento teórico será utilizado para o estudo realizado na Seção 3.2, visando a análise da fixação de variáveis no sistema de equações descrito em (SALIM; ALBERTO; BRETAS, 2010).

O sistema de equações supracitado é formulado para solucionar o problema de determinação direta de bifurcações em sistemas lineares sub-determinados,

ou seja, onde o número de variáveis é menor do que o número de incógnitas e, como consequência, este tipo de problema surge na formulação de um sistema de equações para o cálculo de bifurcações do tipo Hopf. Ainda, para maior fixação destes conceitos, serão apresentados exemplos de dimensão planar que também proporciona um melhor entendimento desta teoria e análise.

2.2.1 Análise Teórica

Seja o sistema de equações lineares:

$$Ax = b \quad (2.20)$$

Esta seção tem como objetivo apresentar a ação de uma matriz $A_{n \times m}$ nos quatro subespaços fundamentais desta matriz: $N(A)$ - espaço nulo (2.21), $L(A)$ - espaço linha (2.22), $C(A)$ - espaço coluna ou espaço imagem (2.23), e $N^{esq}(A)$ - espaço nulo à esquerda de A (2.24):

$$N(A) \equiv \{x : Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (2.21)$$

$$L(A) \equiv \{bA : b \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (2.22)$$

$$C(A) \equiv \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m \quad (2.23)$$

$$N^{esq}(A) \equiv \{b : bA = 0\} \subseteq \mathbb{R}^m \quad (2.24)$$

O vetor Ax pode ser interpretado como sendo uma combinação das colunas de A . A equação (2.25) representa todas as combinações das colunas que produzem b , podendo-se visualizar esta multiplicação do ponto de vista de subespaços, $C(A)$, onde c_i representa vetores deste subespaço:

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \cdot c_1 + \dots + x_n \cdot c_n = b \quad (2.25)$$

Segundo STRANG (1993), todos os algoritmos e todas as aplicações da álgebra linear podem ser explicadas através da análise de subespaços. Como principal exemplo, pode-se citar o algoritmo de eliminação de Gauss (eliminação de pivôs) para triangularização de uma matriz. Neste caso, os múltiplos das linhas são somados ou subtraídos de outras linhas, e estas são alteradas. Estas operações não alteram o espaço linha de A , pois este contém todas as combinações lineares

Figura 2.8: Dois pares de subespaços ortogonais.

de suas linhas. Ainda, outro subespaço que permanece inalterado com o processo de eliminação é o espaço nulo. E não poderia ser diferente, uma vez que este contém todas as soluções para $Ax = 0$, que é o objetivo final da eliminação.

O teorema fundamental da álgebra linear é essencial para o entendimento da discussão que envolve esta seção. É a partir deste que será demonstrado o tratamento sobre fixação de variáveis em sistemas lineares sub-determinados, que por sua vez, guiou as premissas deste trabalho.

Para dar início à demonstração, observa-se que as dimensões dos quatro subespaços supracitados obedecem uma das mais importantes leis da álgebra linear:

$$\dim C(A) = \dim L(A) \quad \text{e} \quad \dim C(A) + \dim N(A) = n \quad (2.26)$$

Quando o espaço linha possui dimensão r , o espaço nulo possui dimensão $n - r$. A eliminação identifica r variáveis pivôs e $n - r$ variáveis livres. A ortogonalidade destes subespaços também é essencial para esta análise. Cada x no subespaço é perpendicular a cada linha da matriz, pois $Ax = 0$. Desta forma, conclui-se que x é perpendicular a todas as combinações das linhas, ou seja, o espaço nulo de A , $N(A)$, é ortogonal ao espaço linha, $L(A)$ (STRANG, 1993). A Figura 2.8 ilustra os quatro subespaços fundamentais, suas relações de ortogonalidade, e as suas dimensões.

A Figura 2.9, por sua vez, demonstra como a matriz A leva $x \in \mathbb{R}^n$ para o espaço coluna. É importante ressaltar que cada x pode ser dividido em uma

Figura 2.9: Ação da matriz A : espaço linha para espaço coluna, espaço nulo para zero.

componente referente ao espaço linha, x_l , e uma componente relativa ao espaço nulo de A , x_n . Ou seja, $x = x_l + x_n$. Assim, quando A multiplica x , a componente do espaço nulo vai para o zero, $Ax_n = 0$, e a componente no espaço linha vai para o espaço coluna, $Ax_l = Ax$. Desta forma, também pode-se dizer que cada vetor no espaço coluna vem de um e apenas um vetor no espaço linha (STRANG, 2003). Com b no espaço coluna, $Ax = b$ pode ser solucionado no espaço linha. Conforme mencionado anteriormente, existe uma solução particular x_l no espaço linha.

Sabe-se que, como os subespaços linha e nulo de A são ortogonais, as componentes x_l e x_n do vetor x também são ortogonais. Algebricamente, pode-se ainda dizer que:

$$Ax = Ax_l + Ax_n \quad (2.27)$$

Explorando a componente do espaço nulo, conforme apresentado na Figura 2.9, verifica-se que esta é a projeção da variável em análise no espaço nulo da matriz A . Uma vez que esta componente seja determinada, a outra componente pode ser obtida com a relação descrita em (2.27). Ou seja, esta outra componente deve estar localizada no espaço linha de A . A projeção no espaço nulo de A pode ser encontrada através da seguinte relação:

$$x_n = \mathbf{N}(\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{N}^T(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{A}))^{-1} \cdot \mathbf{N}(\mathbf{A})^T \cdot x \quad (2.28)$$

onde $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ denota uma base do espaço nulo da matriz A .

Desta forma, quando possuímos uma variável com projeção perpendicular a uma base do espaço nulo, isto implica que $x_n = 0$, e que $x = x_l$, ou seja, que a variável analisada encontra-se no espaço linha de A . A partir das deduções anteriores, afirma-se então que, quando a variável encontra-se no espaço linha, cada vetor do espaço coluna, b , advém de um e apenas um vetor no espaço linha.

Consequentemente, no vetor de variáveis $x = [x_1, x_2, \dots]$, a variável x_i que for perpendicular ao espaço nulo possui apenas um valor possível que leva o sistema a uma solução. Assim, na resolução de um sistema de equações lineares, esta variável não pode ser fixada em qualquer valor diferente do valor que esta deveria ter. A seguir, serão apresentados dois exemplos simples que evidenciam essa afirmação.

2.2.2 Formalização Matemática

Teorema 2.2.1 *Seja P uma projeção ortogonal no espaço nulo $\mathcal{N}(A)$ da matriz A do sistema (2.20). Se a projeção Pe_k do vetor $e_k = [0, 0, \dots, 1, \dots, 0]$, com o valor 1 apenas na k -ésima entrada do vetor, no espaço nulo de $\mathcal{N}(A)$ é zero, então a coluna c_k da matriz A não pode ser escrita como uma combinação linear das colunas restantes e, portanto, a variável x_k não pode ser arbitrariamente fixada para o propósito de se encontrar uma solução particular para o sistema (2.20).*

Prova: Pode-se escrever $c_k = Ae_k$. Supõe-se que c_k possa ser escrito como uma combinação linear das outras colunas de A . Então, existe um vetor v , com a k -ésima entrada igual a zero, de forma que $c_k = Ae_k = Av$. Pode-se então decompor v como $v = v_n + v_l$, com $v_n \in \mathcal{N}(A)$ e $v_l \in \mathcal{L}(A)$. Então, $Ae_k = Av_l$ ou equivalentemente, $A(e_k - v_l) = 0$. Isto implica que $(e_k - v_l) \in \mathcal{N}(A)$. Além disso, tem-se:

$$(e_k - v_l) = P(e_k - v_l) = Pe_k - Pv_l = Pe_k \neq 0$$

como resultado, se $Pe_k = 0$, então c_k não pode ser escrito como uma combinação linear das colunas restantes de A .

2.2.3 Exemplificação da Teoria

Seja $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, sendo $x \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Considere ainda (2.21), que refere-se à definição do espaço nulo de A . Ainda, seja $Ax = b$.

Exemplo 1

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2 \quad (2.29)$$

Este sistema de equações possui duas variáveis e uma equação, e, assim, possui infinitas soluções. Para encontrar uma delas, pode-se fixar uma das variáveis. Verifica-se esta possibilidade.

A partir da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ encontra-se seu espaço nulo através de (2.21):

$$\begin{aligned} A \cdot x &= 0 \\ N(A) &= \{(x_1, x_2) : x_1 = -x_2\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

que é um subespaço vetorial de dimensão 1. Portanto, tem-se um grau de liberdade para escolher a solução. Verifica-se então graficamente a posição do espaço nulo em relação a suas variáveis, através da Figura 2.10.

Figura 2.10: Visualização gráfica do espaço nulo da matriz A no plano das variáveis, para o Exemplo 1.

Assim, calcula-se a projeção das variáveis x_1 e x_2 em $N(A)$, através de (2.28), conforme (2.31):

$$\begin{aligned} x_n &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot ([1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix})^{-1} \cdot [1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2} \\ \frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.31)$$

A visualização desta projeção é ilustrada na Figura 2.11:

Figura 2.11: Projeção do vetor x no espaço nulo da matriz A do Exemplo 1.

Pode-se verificar que o vetor projeção das variáveis, no espaço nulo de A , não é zero, chegando-se à conclusão, conforme a teoria apresentada, que ambas as variáveis podem ser fixadas, porém não simultaneamente, sem comprometer a solução do sistema linear $A \cdot x = 2$.

Exemplo 2

Agora, considere:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1 \quad (2.32)$$

Sendo $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, através de (2.21) obtém-se:

$$\begin{aligned} A \cdot x &= 0 \\ N(A) &= \{(x_1, 0) : x \in \mathbb{R}^*\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} x_n &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot ([1 \ 0]) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ x_n &= \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Da mesma forma como calculado para o Exemplo 1, obtém-se a projeção das variáveis x_1 e x_2 em $N(A)$, através da equação (2.28), conforme (2.34). A visualização desta projeção é ilustrada na Figura 2.12.

Figura 2.12: Projeção do vetor x no espaço nulo da matriz A do Exemplo 2.

Verifica-se que a projeção de x_1 no espaço nulo de A é ele mesmo, e que a projeção da variável x_2 é nula em $N(A)$, diferentemente do exemplo 1. Assim, conforme a análise teórica, apenas a variável x_1 pode ser fixada, pois esta possui informação em $N(A)$. A fixação da variável x_2 , para qualquer valor distinto de 1, leva à não solução do sistema linear $A \cdot x = 1$.

2.3 Homotopia

O método de homotopia, também chamado de método embutido, inclui a solução de um problema através de um conjunto de problemas (BURDEN; FAIRES, 2001). Mais especificamente, este método encontra a solução de um problema conhecido e simples para então definir um caminho entre esta solução conhecida e o problema a ser resolvido. Assim, a solução simples é gradualmente transformada na solução do problema analisado AJJARAPU (2006). A teoria aqui descrita também será relacionada a sistemas de potência para um melhor entendimento.

Matematicamente, a metodologia de homotopia consiste na definição de um mapa homotópico, M , baseado em um sistema original de equações $f(x)$ (relacionadas aqui com as equações do SEP), conforme (MILANO, 2010) :

$$M(x, \lambda) = f_\lambda(x) \quad (2.35)$$

onde a principal diferença entre f e M é que o parâmetro λ , em M , é variável do sistema. Assim, $f : \mathbb{R}^{n_x} \mapsto \mathbb{R}^{n_x}$ e $M : \mathbb{R}^{n_x+1} \mapsto \mathbb{R}^{n_x}$. Em métodos homotópicos, λ é chamado de parâmetro de continuação.

A equação (2.35) indica que M coincide com f . Este fato acontece pois (2.35) é uma homotopia forçada ou de parâmetro natural, ou seja, λ também é parâmetro de f . Segundo (AJJARAPU, 2006), tipicamente, é escolhida a homotopia convexa,

ou de parâmetro artificial (por exemplo t), que possui a seguinte forma (2.36):

$$M(x, t) = (1 - t)k(x) + tf(x) \quad (2.36)$$

onde $t \in [0, 1]$ e $k(x)$ é uma função suave arbitrária como, por exemplo, $k(x) = f(x) - f(x(0))$. Assim, quando $t = 0$, $M(x, 0) = k(x)$ e quando $t = 1$, $M(x, 1) = f(x)$.

Desta forma, o problema consiste em solucionar $M(x, t) = 0$ para valores de t entre 0 e 1. Ou seja, obter um procedimento onde, a partir de uma solução conhecida $x(0)$ de $M(x, 0)$, encontre-se $x(1) = x^*$ de $M(x, 1)$, de forma a solucionar $f(x) = 0$. A partir de manipulações algébricas, descritas em BURDEN; FAIRES (2001), o sistema de equações diferenciais que encontra a solução x^* é determinado como:

$$\dot{x}(t) = -(M_x(t, x(t)))^{-1} \cdot f(x(0)) \quad (2.37)$$

onde M_x é a matriz Jacobiana de $M(x, t)$ em relação a x . Para exemplificar a atuação da homotopia, considere a Figura 2.13, que corresponde à ilustração da solução do método homotópico (AJJARAPU, 2006), onde o sistema parte de uma condição inicial $k(x) = 0$ em $t = 0$ e, através do mapa homotópico M , encontra a solução $f(x) = 0$ em $t = 1$. De forma geral, a homotopia pode ser qualquer conexão contínua entre $f(x)$ e $k(x)$.

Para solucionar x de (2.37), obtendo assim a estimativa x^* para ser condição inicial de um conjunto de equações não lineares, pode-se utilizar qualquer método de continuação, como por exemplo os métodos encontrados em (BURDEN; FAIRES, 2001), (AJJARAPU, 2006), (ALLGOWER; K.GEORG, 1990), entre outras referências no assunto.

2.3.1 Homotopia $\times$ Continuação

É importante ressaltar a diferença entre um método homotópico e um método continuado. Basicamente, métodos continuados advêm de uma metodologia homotópica forçada, conforme descrito em (MILANO, 2010), onde adiciona-se ao método homotópico estágios de predição e correção.

O interesse desta diferenciação une-se à necessidade de realizar um tratamento para alcançar condições iniciais que permitam a convergência de uma metodologia direta para a qual esta atinja uma solução adequada no problema em particular estudado. A homotopia, pode então ser utilizada para se obter um ponto inicial para o sistema de equações estudado, uma vez que esta pode fornecer um caminho entre um ponto inicial qualquer e uma condição inicial adequada para o respectivo sistema. Assim, os métodos continuados podem utilizar

Figura 2.13: Solução via Homotopia.

esta solução do método homotópico para então traçar a sistema em estudo (AJJARAPU, 2006). Conforme apresentado em (MILANO, 2010), os métodos continuados utilizam um parâmetro de continuação geralmente com significado físico ou natural para realizar a continuação, diferentemente da homotopia, que utiliza um parâmetro artificial (como, por exemplo, t , em (2.36) e (2.37)).

A Figura 2.14 ilustra claramente a discussão desta seção entre as metodologias de homotopia e de continuação, onde a homotopia aproxima uma condição inicial para o sistema através de um mapa homotópico. Esta ainda reflete a questão da condição inicial e do seu objetivo quando associado a metodologias de determinação de pontos de bifurcação, como será utilizado, neste trabalho, para o problema em questão.

2.3.2 Exemplo Numérico de Homotopia

Para um melhor entendimento e verificação de como a metodologia de homotopia funciona, esta seção apresenta um exemplo numérico de um sistema planar não-linear. Este exemplo foi apresentado em (AJJARAPU, 2006). Seja o sistema:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - 3x_2^2 + 3 \\ x_1x_2 + 6 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$[X]^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Figura 2.14: Homotopia $\times$ Continuação.

Define-se a função homotópica $M(x, t)$, através de (2.36), como:

$$\begin{aligned}
 M(x, t) &= (1 - t)k(x) + tf(x) \\
 &= (1 - t)[f(x) - f(x_0)] + tf(x) \\
 &= f(x) + (t - 1)f(x_0)
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Aplica-se então a equação (2.37), para obter-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = -\frac{1}{2x_1^2 + 6x_2^2} \begin{bmatrix} x_1 & 6x_2 \\ -x_2 & 2x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

onde foi utilizado $x_0 = (1, 1)$.

Após aplicar um método continuado (BURDEN; FAIRES, 2001), ou um método de integração para encontrar x para o parâmetro $t \in [0, 1]$, obtém-se uma curva implícita, e encontra-se que, quando $t = 1$, $x^* = (-2.961, 1.978)$, devido à inserção de erros numéricos ao longo da metodologia, como por exemplo, arredondamento de valores. A solução do sistema não linear encontrado em (2.38) é $x = (-3, 2)$. Aplicando o método de Newton com a condição inicial calculada através da homotopia, obtém-se apenas em 1 iteração com resultado de $x = (-3.0003, 2.0003)$. Entretanto, se fosse aplicado a condição inicial $x_0 = (1, 1)$ direto no cálculo através do método de Newton, o sistema teria convergência com 5 iterações para chegar à mesma solução. Nota-se que o esforço computacional necessário para a busca da solução foi drasticamente reduzido, uma vez

que é reduzido o número de iterações para o cálculo da solução^a. Observa-se ainda que, para sistemas de maior dimensão, este ganho poderia ser ainda maior, uma vez que, neste caso, o método de Newton poderia não encontrar convergência, exigindo um tratamento das condições iniciais, conforme apresentado neste exemplo.

Metodologia Direta para Detecção e Predição de Bifurcações de Hopf

Este Capítulo apresenta, inicialmente e de forma resumida, a metodologia de detecção/predição de bifurcações de Hopf em SEP proposta em SALIM; ALBERTO; BRETAS (2010). Esta metodologia foi utilizada como base para o desenvolvimento desta tese. Em seguida, é apresentada a primeira contribuição desta tese, que corresponde à análise da gama de variáveis que estão envolvidas na solução desta metodologia direta. A formalização deste estudo é necessário, na medida em que diversas metodologias diretas propostas na literatura apresentam uma falha na escolha da fixação de certas variáveis para a solução do seu respectivo conjunto de equações para a determinação do ponto de BH.

Desta forma, é realizado um desenvolvimento matemático explicando esta falha presente na literatura, e ainda confirmando a justificativa da formulação do problema realizado por SALIM; ALBERTO; BRETAS (2010). Para tanto, é empregada a teoria fundamental da álgebra sobre fixação de variáveis em sistemas lineares sub-determinados, apresentada no Capítulo 2. Ainda, neste capítulo, desenvolve-se uma alteração na metodologia descrita em (SALIM; ALBERTO; BRETAS, 2010), para a possível inclusão do tratamento das condições iniciais no mesmo. Esta alteração tem como finalidade aumentar a faixa de convergência apresentada pela metodologia. A necessidade desta demanda também é contextualizada neste capítulo.

3.1 Método de Salim *et al* (2010)

Esta metodologia apresenta um equacionamento baseado nas equações do sistema aumentado de MOORE; SPENCE (1993) e HOLODNIOK; KUBICEK (1984), porém utilizando equações complementares ao sistema, de forma que estas sejam

linearmente independentes das equações de equilíbrio e de bifurcação. Buscou-se, através deste conceito, a não fixação de parâmetros de interesse, a saber, o valor de ω_0 no ponto de bifurcação, com valores pré-definidos, mas sim a adição deste ao espaço de variáveis de estado do sistema. A utilização de tal conjunto de equações é adequada para a análise proposta, dado que além de não fixar valores a alguma variável, a análise do sistema é realizada considerando-se condições que adicionam às equações de solução de autovetores do sistema uma possibilidade prévia de solução, melhorando a convergência do método.

Esta seção apresenta sua formulação de forma resumida, seu algoritmo e seus resultados. O método utilizado para solução do conjunto de equações supracitado foi o método de Newton (OLIVEIRA SALIM, 2009), que possui a característica de ser preciso e robusto (BARROSO, 1987). O modelo utilizado para utilização das ferramenta matemáticas de (MOORE; SPENCE, 1993) e (HOLODNIOK; KUBICEK, 1984) foi modificado com a finalidade de adaptar as equações diferenciais ordinárias para um sistema diferencial-algébrico conforme será apresentado na seção a seguir.

3.1.1 Modelo de um Sistema Algébrico-Diferencial

Seja o sistema algébrico-diferencial genérico :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \mu) \\ 0 = g(x, y, \mu) \end{cases} \quad \begin{matrix} f : \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ g : \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m \end{matrix} \quad (3.1)$$

que possui a seguinte matriz Jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ e $\mu \in \mathbb{R}$, e

x vetor de variáveis de estado dinâmicas;

y vetor de variáveis estáticas;

μ carregamento do sistema.

3.1.2 Conjunto de Equações Propostas

Considerando o equacionamento em (SALIM; ALBERTO; BRETAS, 2010), o conjunto proposto de equações a ser estudado, seguindo a formulação da respectiva metodologia, possui um modelo que pode ser resolvido pelo algoritmo de Newton. Este conjunto de equações é apresentado em (3.3) e inclui a condição

necessária para a ocorrência de uma bifurcação de Hopf, ou seja, no ponto de bifurcação o sistema possui um único par de autovalores puramente imaginário:

$$f(x, y, \mu) = 0 \quad (3.3a)$$

$$g(x, y, \mu) = 0 \quad (3.3b)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.3c)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} - \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.3d)$$

$$\begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_I^T & \omega_I^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} = 1 \quad (3.3e)$$

$$\begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} = 0 \quad (3.3f)$$

onde o autovalor no ponto de bifurcação é $\lambda = j\omega_0$, e $u = \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix}$ é o autovetor associado a este autovalor e T denota a transposição de um vetor.

As equações (3.3a) e (3.3b) referem-se às equações de equilíbrio do sistema (3.1), sendo estas equações necessárias para a formulação da respectiva metodologia. As condições necessárias para a ocorrência da BH são definidas em (3.3c) e (3.3d), e são obtidas através da seguinte formulação:

$$J \cdot u = \lambda \cdot u \quad (3.4)$$

onde u denota um autovetor à esquerda. Considera-se $\lambda = r + js$, e, portanto, seu autovetor também é complexo, $u = v + j\omega$, onde v e ω são vetores reais. Para o caso da BH, onde a parte real do autovalor no ponto de bifurcação é nula. Ou seja, ($r = 0$), (3.4) pode ser reescrita conforme:

$$\begin{aligned} Jv + s\omega &= 0 \\ J\omega - sv &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Observa-se que as equações para o sistema diferencial-algébrico apresentadas em (3.3), possuem a necessidade da pré-determinação de duas variáveis, pois obtém-se $3n + 3m$ equações e $3n + 3m + 2$ variáveis. Desta forma, utiliza-se o equacionamento complementar proposto em (MOORE; SPENCE, 1993), para a eliminação de mais uma destas variáveis. Este equacionamento utiliza uma normalização do autovetor referente ao autovalor de interesse. Conforme estudos anteriores, este trabalho utilizou uma norma euclidiana, com a restrição definida, $z = 1$, representada em (3.3e) (AN et al., 2008; GUPTA; VARMA; SRIVASTAVA,

Norma que mede a distância entre a origem e o ponto de interesse, $z = \sqrt{x^T x}$.

1998). Desta forma, para que haja solução de (3.3), sem a necessidade da fixação de variáveis de interesse, foi utilizada uma equação que relaciona as propriedades dos autovetores associados ao ponto de bifurcação (parte real e imaginária destes ortogonais entre si), e que é representada por (3.3f).

3.1.3 Algoritmo Proposto

O processo realizado para a determinação da margem de estabilidade em SALIM; ALBERTO; BRETAS (2010) é apresentado no fluxograma da Figura 3.1.

Conforme pode ser observado no fluxograma, após a modelagem do sistema, segue o cálculo do fluxo de potência para a obtenção de valores utilizados no cálculo das condições iniciais do sistema. Segue então a formulação do método de Newton e a montagem de sua matriz Jacobiana, apresentada em (3.6). Nesta equação, A_x denota a derivada da matriz A com relação à variável x , e assim respectivamente para as diversas matrizes.

$$\begin{bmatrix} A & B & F_\mu & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ C & D & G_\mu & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \begin{pmatrix} A_x \cdot v_R \\ +B_x \cdot \omega_R \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_y \cdot v_R \\ +B_y \cdot \omega_R \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_\mu \cdot v_R \\ +B_\mu \cdot \omega_R \end{pmatrix} & A & \omega_0 \cdot I & B & \emptyset & v_I \\ \begin{pmatrix} C_x \cdot v_R \\ +D_x \cdot \omega_R \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_y \cdot v_R \\ +D_y \cdot \omega_R \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_\mu \cdot v_R \\ +D_\mu \cdot \omega_R \end{pmatrix} & C & \emptyset & D & \emptyset & \emptyset \\ \begin{pmatrix} A_x \cdot v_I \\ +B_x \cdot \omega_I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_y \cdot v_I \\ +B_y \cdot \omega_I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_\mu \cdot v_I \\ +B_\mu \cdot \omega_I \end{pmatrix} & -\omega_0 \cdot I & A & \emptyset & B & -v_R \\ \begin{pmatrix} C_x \cdot v_I \\ +D_x \cdot \omega_I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_y \cdot v_I \\ +D_y \cdot \omega_I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_\mu \cdot v_I \\ +D_\mu \cdot \omega_I \end{pmatrix} & \emptyset & C & \emptyset & D & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 2v_R^T & 2v_I^T & 2\omega_R^T & 2\omega_I^T & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & v_I^T & v_R^T & \omega_I^T & \omega_R^T & \emptyset \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta \mu \\ \Delta v_R \\ \Delta v_I \\ \Delta \omega_R \\ \Delta \omega_I \\ \Delta \omega_0 \end{bmatrix} =$$

$$- \begin{bmatrix} f(x, y, \mu) \\ g(x, y, \mu) \\ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} - \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_I^T & \omega_I^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} - 1 \\ \begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

O método de Newton possui um critério de parada com erro absoluto igual a 0,001. Caso o algoritmo apresente divergência, o programa recalcula as condições iniciais do

Figura 3.1: Algoritmo completo para a determinação da margem de estabilidade de um sistema de potência.

sistema resolvendo apenas as condições de equilíbrio, de forma a obter uma estimativa inicial mais próxima do resultado desejado. Se mesmo assim o programa não apresentar convergência, isto implica que não foram encontradas bifurcações de Hopf no sistema.

Ainda, se, após o cálculo tradicional de autovalores, forem encontrados autovalores no semi-plano direito, o programa recalcula os autovetores das condições iniciais para o autovalor encontrado no semiplano direito, e utiliza os mesmos como condição inicial, de forma a garantir a convergência da metodologia para o ponto de BH correto. Caso não haja autovalores no semi-plano direito, isto significa que o ponto de BH encontrado é o primeiro ponto de bifurcação a ocorrer com incremento de carga.

3.1.4 Resultados Numéricos

A metodologia descrita nesta seção foi aplicada aos sistemas descritos nos Anexos B.1 e B.3, o sistema de duas áreas e o sistema IEEE 39 barras, respectivamente. A fim de aumentar a velocidade dos cálculos realizados (SALIM; ALBERTO; BRETAS, 2010), uma técnica chamada RR(C)U (*Row-wise Representation Complete and Unordered*) PISSANETZKY (2006), que refere-se à forma compacta de armazenamento de matrizes, e suas respectivas operações foram implementadas para explorar a esparsidade dos modelos de SEP.

Os testes foram conduzidos considerando quatro diferentes casos, conforme apresentado na Tabela 3.1. Estes casos incluem ou não o uso do RR(C)U, e o pré-condicionamento ou não das condições iniciais. Em ambos os sistemas, o método clássico e a metodologia apresentada nesta seção apresentaram valores de margem de estabilidade muito próximos. Os resultados numéricos para os casos citados estão apresentados a seguir.

Tabela 3.1: Casos numéricos analisados.

	Pré-Condicionamento das Cond. Iniciais	Técnica RR(C)U
Caso I	✓	✓
Caso II	✓	-
Caso III	-	✓
Caso IV	-	-

A metodologia avaliada é o **Caso I**

Sistema de Duas Áreas

Conforme apresentado na Tabela 3.2, para o caso do sistema de duas áreas, a metodologia de Salim *et. al* (2010) mostra-se mais rápida que a metodologia clássica. Para o caso II, onde há o pré-condicionamento das condições iniciais e a esparsidade do sistema não é explorada, o tempo de cálculo foi reduzido em até 11 vezes em comparação à metodologia clássica de cálculo de autovalores. As Figuras 3.2 e 3.3 ilustram respectivamente o autovalor associado com a BH no plano complexo e o ciclo limite na vizinhança do ponto de BH. A Figura 3.4 ilustra as margens de estabilidade referentes a este sistema.

Figura 3.2: Deslocamento do autovalor no sistema Kundur. Ponto de bifurcação em $\mu_0 = 1.181$.

Figura 3.3: Comportamento oscilatório do sistema de Duas Áreas na vizinhança do ponto de bifurcação de Hopf.

Tabela 3.2: Comparação das metodologias para o sistema de duas áreas.

Método	Tempo total[s]
Clássico	8.16
Clássico com RR(C)U	3.6
Caso I	0.31
Caso II	0.77
Caso III	0.43
Caso IV	2.11

Sistema New England

Testes também foram apresentados para o sistema IEEE 39 barras por Salim *et. al* (2010). Sua topologia e seus dados podem ser encontrados no Anexo B.3. A Tabela 3.3 apresenta a comparação entre a metodologia clássica e a metodologia proposta para o sistema New England. O caso I apresentado reduziu o tempo de cálculo do ponto da bifurcação em aproximadamente 30 vezes quando comparado ao caso da metodologia clássica. O grau de esparsidade do sistema New England é maior que o do sistema de duas áreas. Como consequência, a implementação da técnica de RR(C)U reduziu o tempo de cálculo em aproximadamente 3 vezes. A Figura 3.5 ilustra as margens de estabilidade associadas a este sistema.

Tabela 3.3: Comparação das metodologias para o sistema New England.

Método	Tempo total[s]
Clássico	36.48
Clássico com RR(C)U	12.54
Caso I	1.15
Caso II	4.14
Caso III	2.75
Caso IV	9.5

3.2 Análise de Variáveis para Metodologias Diretas de Determinação do Ponto de Bifurcação de Hopf

Conforme apresentado na literatura, metodologias de determinação do ponto de BH via métodos diretos, desconsideram a variação de ω_0 (frequência do autovalor relacionado ao ponto de bifurcação) ao longo do processo iterativo, através da fixação da mesma. A questão é que, ao longo do processo iterativo que compreende estes métodos diretos, diversas condições são analisadas, mesmo que indiretamente, através da atualização das

Figura 3.4: Margem de estabilidade do sistema de duas áreas devido às bifurcações Sela-Nó e Hopf.

Figura 3.5: Margem de estabilidade do sistema New England devido a bifurcações de Hopf e de Sela-Nó.

variáveis do problema. Assim, quando se fixa ω_0 no início do processo iterativo, ou seja, para a frequência do autovalor no caso base, se está definindo antecipadamente qual é o autovalor que cruzará o eixo imaginário, caracterizando uma BH. Este argumento, por si, já pode ser considerado suficiente para embasar uma falha na formulação de tais metodologias. Entretanto, é possível realizar uma demonstração matemática sobre o erro cometido nestas formulações, bem como suas consequências. Tal demonstração pode ser realizada através de uma avaliação da gama de variáveis envolvidas no problema em questão.

A avaliação das variáveis envolvidas nas metodologias de determinação do ponto de BH, é realizada nesta tese através de um sistema algébrico diferencial simplificado, contendo as características necessárias para tal, ou seja, um sistema algébrico-diferencial simples que contém uma bifurcação de Hopf. Seja o sistema (3.7):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - \mu x_1 - y \\ \dot{x}_2 = -\mu x_2 + x_2 + y \\ 0 = -x_2 - x_1 - y \end{cases} \quad (3.7)$$

Este sistema possui um ponto de equilíbrio situado na origem do sistema, para qualquer μ , e, para $\mu = 0$, uma BH com $\omega_0 = 1$, ou seja, a parte imaginária do autovalor no ponto de bifurcação é igual a 1. Seja então o conjunto de equações que estabelece uma condição necessária para a ocorrência de bifurcações de Hopf, dada por (3.8), segundo (MOORE; SPENCE, 1993):

$$f(x, y, \mu) = 0 \quad (3.8a)$$

$$g(x, y, \mu) = 0 \quad (3.8b)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.8c)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} - \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.8d)$$

$$\begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_I^T & \omega_I^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} = 1, \quad (3.8e)$$

sendo que $A = F_x$, $B = F_y$, $C = G_x$ e $D = G_y$, as derivadas de f e g em relação as suas respectivas variáveis. A partir deste conjunto de equações, substituem-se as respectivas informações contidas em (3.7), com a finalidade de se obter o sistema linearizado, e avaliar a fixação das variáveis envolvidas. Assim, sendo:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 - \mu & 0 \\ 0 & -\mu + 1 \end{bmatrix}; & B &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ C &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}; & D &= [-1] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 - \mu x_1 - y = 0 \\ -\mu x_2 + x_2 + y = 0 \\ -x_2 - x_1 - y = 0 \\ \begin{bmatrix} -1-\mu & 0 & -1 \\ 0 & -\mu+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{R1} \\ v_{R2} \\ \omega_R \end{bmatrix} + \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} v_{I1} \\ v_{I2} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} -1-\mu & 0 & -1 \\ 0 & -\mu+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{I1} \\ v_{I2} \\ \omega_I \end{bmatrix} - \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} v_{R1} \\ v_{R2} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} v_{R1} & v_{R2} & \omega_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{R1} \\ v_{R2} \\ \omega_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{I1} & v_{I2} & \omega_I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{I1} \\ v_{I2} \\ \omega_I \end{bmatrix} = 1 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Obtém-se então a Jacobiana de (3.10) para a formulação do método de Newton, J_N :

$$J_N = \begin{bmatrix} -1-\mu & 0 & -1 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu+1 & 1 & -x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v_{R1} & -1-\mu & 0 & \omega_0 & 0 & -1 & 0 & v_{I1} \\ 0 & 0 & 0 & -v_{R2} & 0 & -\mu+1 & 0 & \omega_0 & 1 & 0 & v_{I2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v_{I1} & -\omega_0 & 0 & -1-\mu & 0 & 0 & -1 & -v_{R1} \\ 0 & 0 & 0 & -v_{I2} & 0 & -\omega_0 & 0 & -\mu+1 & 0 & 1 & -v_{R2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2v_{R1} & 2v_{R2} & 2v_{I1} & 2v_{I2} & 2\omega_R & 2\omega_I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

É a partir desta matriz, J_N , que serão realizados estudos sobre a fixação das variáveis envolvidas na solução deste sistema linearizado. Este sistema de equações linearizadas, representados em (3.11), possui menos equações do que variáveis, ou seja, possui 11 variáveis e 10 equações, sendo então seu posto igual a 10. Para este caso em específico, avalia-se o comportamento da variável ω_0 . Desta forma, a matriz a ser analisada nos próximos passos passa a ser chamada de matriz A e possui a seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} -1-x_4 & 0 & -1-x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x_4 & 1-x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_5 & -1-x_4 & 0 & x_1 & 1 & 0 & -1 & 0 & x_7 \\ 0 & 0 & 0 & -x_6 & 0 & 1-x_4 & 0 & x_{11} & 1 & 0 & 0 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_7 & -x_{11} & 0 & -1-x_4 & 0 & 0 & -1 & -x_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_8 & 0 & -x_1 & 1 & 0 & 1-x_4 & 0 & 1 & -x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_5 & 2x_6 & 2x_7 & 2x_8 & 2x_9 & 2x_{10} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & y & \alpha & v_{R1} & v_{R2} & v_{I1} & v_{I2} & \omega_R & \omega_I & \omega_0 \end{bmatrix}^T$$

A partir da matriz A , calcula-se uma base para o espaço nulo da mesma, $\mathbf{N}(\mathbf{A})$, literal, com a finalidade de encontrar as projeções das variáveis neste espaço. Assim, a partir de (2.21) e (3.12), obtém-se (3.13) (apresentada na página seguinte). Através do espaço nulo de A , pode-se calcular a matriz projeção, $\mathbf{P}$, para definir a projeção perpendicular das variáveis do sistema em $\mathbf{N}(\mathbf{A})$, conforme (2.28). Como resultado, obtém-se a projeção perpendicular das variáveis do sistema linearizado, x_{perp} , no espaço nulo de A .

O vetor correspondente às variáveis perpendiculares é apresentado em (3.14) (apresentada na página seguinte). Pode-se observar que estes vetores possuem em sua apresentação uma grande parte de sua equação não representada por razões de limitação de espaço entretanto, para fins de análise, este fato não altera o resultado final da análise em questão. Para apresentar ao leitor uma noção de grandeza, grandes parcelas foram substituídas pela notação $\langle\langle \dots \rangle\rangle$. Pode-se observar, a partir deste vetor, o tamanho das respectivas projeções no espaço nulo de A , conforme mencionado anteriormente.

Através de (3.14), é possível avaliar as variáveis do sistema linearizado proposto para determinação do ponto de bifurcação de Hopf em sistema algébrico-diferenciais, com relação à teoria fundamental da álgebra, apresentada na seção 2.2, ou seja, é possível determinar, a partir da projeção perpendicular das variáveis, quais das variáveis do problema teriam possibilidade de fixação sem que houvesse comprometimento da convergência para a solução.

Ressalta-se que a matriz expressa em (3.13) é representativa, visto que devido à sua extensão, esta não pôde ser inserida neste texto devido à limitação do tamanho da página.

$$N(A) =$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(x_2+x_1x_4)(x_{10}((x_{11}^2(1+x_4)+\dots-(1+x_4^2)(2x_6x_7-2x_5x_8))+(-1+x_4)x_7+x_8+x_4x_8x_9))}{(1+x_4^2)(-x_4^3(x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2)+\dots+(-1+x_{11}^2)(x_5-x_6+x_{11}(x_7+x_8))x_9+x_{11}(x_7+x_8))x_9} \\
 & - \frac{(x_1-x_2x_4)(x_{10}((x_{11}^2(1+x_4)+(-1+x_4)(1+x_4^2))x_5+\dots-(1+x_4^2)(2x_6x_7-2x_5x_8+((-1+x_4)x_7+x_8+x_4x_8x_9))))}{(1+x_4^2)(-x_4^3(x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2)+\dots+(-1+x_{11}^2)(x_5-x_6+x_{11}(x_7+x_8))x_9+x_{11}(x_7+x_8))x_9} \\
 & - \frac{(-x_1+x_2+(x_1+x_2)x_4)(x_{10}((x_{11}^2(1+x_4)+(-1+x_4)(1+x_4^2))x_5+\dots-(1+x_4^2)(2x_6x_7-2x_5x_8+((-1+x_4)x_7+x_8+x_4x_8x_9))))}{(1+x_4^2)(-x_4^3(x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2)+\dots+(-1+x_{11}^2)(x_5-x_6+x_{11}(x_7+x_8))x_9+x_{11}(x_7+x_8))x_9} \\
 & x_{10}(- (x_{11}^2(1+x_4)+(-1+x_4)(1+x_4^2))x_5-(x_{11}^2(-1+x_4)+(1+x_4)(1+x_4^2))x_6-\dots+(1+x_4^2)(2x_6x_7-2x_5x_8+((-1+x_4)x_7+x_8+x_4x_8x_9))) \\
 & \quad -x_4^3(x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2)+\dots+(-1+x_{11}^2)(x_5-x_6+x_{11}(x_7+x_8))x_9+x_{11}(x_7+x_8))x_9 \\
 & \frac{x_4^2x_5^2x_7+2x_4x_5x_6x_7+2x_6^2x_7+x_4^2x_7^2-x_4x_5^2x_8-2x_5x_6x_8+\dots+x_{11}^2(x_5^2x_7+x_5x_8x_9+x_7(x_6^2+x_7^2+x_8^2-x_6x_9))}{x_{10}(x_{11}(-1+(-2+x_4)x_4)x_5+x_{11}(-1+x_4(2+x_4))x_6+\dots+2x_{11}(x_7-x_8)x_9-x_6(4x_{11}x_7+x_9+x_{11}^2x_9))-x_5(-4x_{11}x_8+x_9+x_{11}^2x_9))} \\
 & \frac{-x_4x_5^2x_7-2x_5x_6x_7+x_4x_6^2x_7-x_4x_7^2+2x_5^2x_8+x_4^2x_5^2x_8-\dots-x_{11}(x_5^3+x_5x_6^2+x_5x_7^2-2x_6x_7x_8+3x_5x_8^2-(x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2)x_9)}{x_{10}(x_{11}(-1+(-2+x_4)x_4)x_5+x_{11}(-1+x_4(2+x_4))x_6+x_{11}^3(x_5+x_6)-x_{11}^2((1+x_4)x_7+\dots-x_5(-4x_{11}x_8+x_9+x_{11}^2x_9))))} \\
 & - \frac{((x_4^2x_5^2+x_4x_5^2x_6+x_4^2x_5x_6^2+x_4x_6^3+x_4^2x_5x_7^2-x_4x_6x_7^2+\dots+x_4^2(x_5(x_5+x_6)+x_7(x_7+x_8)))x_9+\dots+2x_6x_7x_9-2x_5(x_6x_7+x_8x_9))}{x_{10}(x_{11}(-1+(-2+x_4)x_4)x_5+x_{11}(-1+x_4(2+x_4))x_6+x_{11}^3(x_5+x_6)-x_{11}^2((1+x_4)x_7+(-1+x_4)x_8)-\dots-x_5(-4x_{11}x_8+x_9+x_{11}^2x_9))} \\
 & \frac{-x_{11}^2x_5^2x_6-x_{11}^2x_5^2x_7+3x_{11}x_6^2x_7-2x_6x_7^2-\dots+x_4(x_5^3+2x_6x_7x_8-x_5^2x_9+(x_6^2-x_7^2-2x_7x_8+x_8^2)x_9+x_5(x_6^2+x_7^2-x_8^2-2x_6x_9))}{x_{10}(x_{11}(-1+(-2+x_4)x_4)x_5+\dots+(1+x_{11}^2)(x_7^2+x_8^2)+2x_{11}(x_7-x_8)x_9-x_6(4x_{11}x_7+x_9+x_{11}^2x_9))-x_5(-4x_{11}x_8+x_9+x_{11}^2x_9))} \\
 & - \frac{((-1+x_4)x_4x_5^2+2(-1+x_4)x_5x_6+(2+x_4-x_4^2)x_6^2x_7+(\dots-x_{11}(-x_5^3+x_5^2x_6+x_6(x_6^2+3x_7^2+2x_7x_8+3x_8^2))))}{x_{10}(x_{11}(-1+(-2+x_4)x_4)x_5+x_{11}(-1+x_4(2+x_4))x_6+\dots+2x_{11}(x_7-x_8)x_9-x_6(4x_{11}x_7+x_9+x_{11}^2x_9))-x_5(-4x_{11}x_8+x_9+x_{11}^2x_9))} \\
 & \frac{2(x_7-x_8)(x_6x_7-x_5x_8)-\dots-x_{11}(-x_5^2(x_7-3x_8)+x_6^2(-3x_7+x_8)-(x_7-x_8)(x_7^2+x_8^2)+4x_6x_7x_9-2x_5(x_6(x_7-x_8)+2x_8x_9))}{x_{10}(x_{11}(-1+(-2+x_4)x_4)x_5+x_{11}(-1+x_4(2+x_4))x_6+x_{11}^3(x_5+x_6)-\dots+2x_{11}(x_7-x_8)x_9-x_6(4x_{11}x_7+x_9+x_{11}^2x_9))-x_5(-4x_{11}x_8+x_9+x_{11}^2x_9))}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle + \frac{\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle \langle \langle \langle 6 \rangle \rangle \rangle + x_{11} \left(-x_2^2(x_7-3x_8) + x_6^2(-3x_7+x_8) - \dots + 2x_8x_9 \right)^2}{\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle^2} + \dots + \frac{x_{10}(x_2+x_1x_4)\langle \langle \langle 1 \rangle \rangle \rangle \langle \langle \langle \dots \rangle + x_{11}(-x_2^2(x_7-3x_8) + \langle \langle \dots \rangle \rangle) \rangle}{(1+x_4^2)\langle \langle \dots \rangle \rangle} \right. \\
 & \left(\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle - \frac{x_1(x_2+x_1x_4)(x_1-x_2x_4)\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle^2}{(1+x_4^2)^2\langle \langle \dots \rangle \rangle \left(1 + \frac{\langle \langle 1 \rangle \rangle}{\langle \langle \dots \rangle \rangle} + \langle \langle 8 \rangle \rangle + \frac{\langle \langle \dots \rangle \rangle^2}{\langle \langle \dots \rangle \rangle^2} \right)} + \frac{\langle \langle \dots \rangle \rangle}{(1+x_4^2)^2\langle \langle \dots \rangle \rangle} - \frac{\langle \langle \dots \rangle \rangle}{(1+x_4^2)^2\langle \langle \dots \rangle \rangle} + \frac{\langle \langle \dots \rangle \rangle}{(1+x_4^2)^2\langle \langle \dots \rangle \rangle} \right. \\
 & \left(\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle - \frac{(x_4^2x_5^3 + \langle \langle 17 \rangle \rangle) + x_{11}(3x_5^2x_8 + x_8(x_6^2x_7 + x_8x_9))^2 - 2x_5(x_6x_7 + x_8x_9))^2}{(x_{10}x_{11}(-1+(-2+x_4)x_4)x_5 + \dots + \langle \langle 4 \rangle \rangle) + x_4((1+x_4^2)x_5^2 + \langle \langle 7 \rangle \rangle))^2} + \frac{\langle \langle \langle 6 \rangle \rangle + x_{11}(-x_2^2(x_7-3x_8) + x_6^2(-3x_7+x_8) - \dots (x_6(x_7-x_8) + 2x_8x_9))^2}{\langle \langle \langle 1 \rangle \rangle \rangle^2} \right. \\
 & \left(\langle \langle \dots \rangle \rangle + \frac{\langle \langle \langle 6 \rangle \rangle + x_{11}\langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle^2}{(x_{10}\langle \langle \dots \rangle \rangle + \langle \langle \dots \rangle \rangle + x_4\langle \langle \dots \rangle \rangle))^2} + \frac{x_{10}(x_{10}\langle \langle \dots \rangle \rangle + \langle \langle \dots \rangle \rangle) + (1+x_4^2)(2x_6x_7 - 2x_5x_8 + \langle \langle \langle 1 \rangle \rangle \rangle x_9)\langle \langle \langle \dots \rangle + x_{11}(-x_2^2(x_7-3x_8) + \langle \langle \dots \rangle \rangle)}{(-x_4^3(x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2) + \langle \langle \dots \rangle \rangle + x_4^2(-x_5+x_6+x_{11}(x_7+x_8)x_9)\langle \langle \dots \rangle \rangle \langle \langle \dots \rangle \rangle (1+\langle \langle 1 \rangle \rangle) + \langle \langle \dots \rangle \rangle + \langle \langle \dots \rangle \rangle + \langle \langle \dots \rangle \rangle^2)} \right. \\
 & \left(\frac{(x_2+x_1x_4)^2\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle^2}{(1+x_4^2)^2(-x_4^3(x_5^2+\langle \langle \dots \rangle \rangle)^2 + \langle \langle 1 \rangle \rangle + x_8^2) + \langle \langle \dots \rangle \rangle^2} + \frac{(x_4^2x_5^3 + \langle \langle 17 \rangle \rangle) + x_{11}\langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle^2}{(x_{10}(x_{11}(-1+(-2+x_4)x_4)x_5 + \langle \langle \dots \rangle \rangle) + \langle \langle \dots \rangle \rangle + x_4\langle \langle \dots \rangle \rangle))^2} \right. \\
 & \left(\frac{(x_2+x_1x_4)^2\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle^2}{(1+x_4^2)^2(-x_4^3(x_5^2+\langle \langle \dots \rangle \rangle)^2 + \langle \langle \dots \rangle \rangle + x_8^2) + \langle \langle \dots \rangle \rangle^2} + \frac{(x_4^2x_5^3 + \langle \langle \dots \rangle \rangle) + x_{11}(-x_2^2(x_7-3\langle \langle \dots \rangle \rangle) + \langle \langle \dots \rangle \rangle))^2}{(x_{10}(x_{11}(-1+(-2+x_4)x_4)x_5 + \langle \langle \dots \rangle \rangle) + \langle \langle \dots \rangle \rangle + x_4\langle \langle \dots \rangle \rangle))^2} \right. \\
 & \left(\frac{(x_2+x_1x_4)^2\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle^2}{(1+x_4^2)^2(-x_4^3(x_5^2+\langle \langle \dots \rangle \rangle)^2 + \langle \langle \dots \rangle \rangle + x_8^2) + \langle \langle \dots \rangle \rangle^2} + \frac{(x_4^2x_5^3 + \langle \langle \dots \rangle \rangle) + x_{11}(-x_2^2(x_7-3\langle \langle 2 \rangle \rangle) + \langle \langle \dots \rangle \rangle))^2}{(x_{10}(x_{11}(-1+(-2+x_4)x_4)x_5 + \langle \langle \dots \rangle \rangle) + \langle \langle \dots \rangle \rangle + x_4\langle \langle \dots \rangle \rangle))^2} \right. \\
 & \left(\langle \langle \dots \rangle \rangle + \langle \langle \dots \rangle \rangle - \frac{x_{10}(x_4^2x_5^3 + \langle \langle \dots \rangle \rangle) + x_{11}\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle \langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle}{(x_{10}(x_{11}(-1+(-2+x_4)x_4)x_5 + \langle \langle \dots \rangle \rangle) + \langle \langle 4 \rangle \rangle) + x_4\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle^2} \left(1 + \frac{(x_2+\langle \langle 1 \rangle \rangle)^2\langle \langle \dots \rangle \rangle^2}{(1+\langle \langle \dots \rangle \rangle)^2\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle^2} + \langle \langle 7 \rangle \rangle + \frac{\langle \langle \dots \rangle \rangle^2}{\langle \langle \dots \rangle \rangle^2} \right) \right. \\
 & \left(\frac{(x_2+x_1x_4)^2\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle^2}{(1+x_4^2)^2(-x_4^3(x_5^2+\langle \langle \dots \rangle \rangle)^2 + \langle \langle 1 \rangle \rangle + x_8^2) + \langle \langle \dots \rangle \rangle^2} + \frac{(x_4^2x_5^3 + \langle \langle \dots \rangle \rangle) + x_{11}\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle^2}{(x_{10}(x_{11}(-1+(-2+x_4)x_4)x_5 + \langle \langle \dots \rangle \rangle) + \langle \langle \dots \rangle \rangle + x_4\langle \langle \dots \rangle \rangle))^2} \right. \\
 & \left(\langle \langle \dots \rangle \rangle + \frac{\langle \langle \dots \rangle \rangle}{\langle \langle \dots \rangle \rangle} - \frac{x_{10}(\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle x_7 + \langle \langle \dots \rangle \rangle) \langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle \langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle + x_{11}(-x_2^2(x_7-3x_8) + x_6^2(-3x_7+x_8) - \dots (x_6(x_7-x_8) + 2x_8x_9))}{(x_{10}(x_{11}(-1+(-2+x_4)x_4)x_5 + \langle \langle \dots \rangle \rangle) + \langle \langle \dots \rangle \rangle + x_4\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle^2} \left(1 + \frac{(x_2+\langle \langle \dots \rangle \rangle)^2\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle^2}{(1+\langle \langle \dots \rangle \rangle)^2\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle^2} + \langle \langle \dots \rangle \rangle + \frac{\langle \langle \dots \rangle \rangle \langle \langle \dots \rangle \rangle^2}{\langle \langle \dots \rangle \rangle^2} + \frac{\langle \langle \dots \rangle \rangle^2}{\langle \langle \dots \rangle \rangle^2} \right) \right. \\
 & \left(\frac{(x_2+x_1x_4)^2\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle^2}{(1+x_4^2)^2(-x_4^3(x_5^2+\langle \langle \dots \rangle \rangle)^2 + \langle \langle \dots \rangle \rangle + x_8^2) + \langle \langle \dots \rangle \rangle^2} + \frac{(x_4^2x_5^3 + \langle \langle \dots \rangle \rangle) + x_{11}\langle \langle \langle \dots \rangle \rangle \rangle^2}{(x_{10}(x_{11}(-1+(-2+x_4)x_4)x_5 + \langle \langle \dots \rangle \rangle) + \langle \langle \dots \rangle \rangle + x_4\langle \langle \dots \rangle \rangle))^2} \right)
 \end{aligned}$$

$x_{perp} =$

(3.14)

Com base neste em (3.13) e (3.14), verifica-se que a única variável cuja projeção é nula, e por conseguinte, não podendo ser fixada, visto que comprometeria a convergência da solução do sistema diferencial algébrico é a variável x_{11} , ou ainda, como nomeada pelas metodologias na literatura, ω_0 .

Abre-se então um leque de discussões a partir desta demonstração, a qual apresenta e confirma a inadequação da fixação da variável correspondente à frequência do autovalor responsável pelo aparecimento da bifurcação de Hopf, impactando em afirmações anteriores apresentadas na literatura (AN et al., 2008; MITHULANANTHAN; CAÑIZARES; REEVE, 2000; GUPTA; VARMA; SRIVASTAVA, 1998), entre outros. Este fato é de suma importância para a contextualização dos trabalhos realizados para determinação de pontos de bifurcação de Hopf, visto que, sem a inclusão da variável ω_0 à gama de variáveis dos sistemas diferenciais algébricos que representam sistemas de potência em geral, a solução do mesmo de forma direta não poderia ser efetuada.

Assim, surgiu-se a necessidade da investigação deste fenômeno, a partir de uma metodologia que fosse contemplativa de forma geral, rápida e eficiente, de forma a ser inclusa em estudos de operação para contribuir com a informação de margem de estabilidade devido a BH. Poucas metodologias baseadas em métodos diretos atualmente não realizam a fixação de ω_0 , e dentre estas, destaca-se (SALIM; ALBERTO; BRETAS, 2010) conforme apresentado anteriormente.

3.3 Importância da Convergência de Metodologias Diretas

Em sistemas elétricos de potência, a determinação rápida do ponto de máximo carregamento devido a BH pode ser de extrema importância análise de grande número de contingências em um sistema de grande porte. Métodos diretos são uma alternativa para a determinação rápida deste ponto de máximo carregamento. Entretanto, conforme apresentado em diversos trabalhos na literatura, a convergência destas metodologia diretas depende da escolha de condições iniciais relativamente próximas ao ponto de bifurcação, ou seja, da distância do caso base (ponto de operação relativo às condições iniciais) até o caso onde ocorre a BH (AJJARAPU, 1992).

Desta forma, para sistema reais em operação, espera-se encontrar este ponto de BH a partir de uma condição inicial de operação na qual o sistema esteja operando em uma região segura. A idéia principal é demonstrar que uma convergência com uma distância de aproximadamente 50% entre caso base e o caso onde ocorre a BH é suficiente pois, quando analisa-se um sistema real como o brasileiro, ou, como nesta seção o equivalente sul/sudeste, este não permitiria fisicamente um aumento de carga em suas linhas que fosse superior a este limite.

Para a análise do sistema em tempo real, é interessante, para a justificativa do aumento desta faixa, analisar a variação de carga do sistema ao longo de uma faixa tempo-

Distância máxima verificada através de simulações.

ral. O estudo para operação possuiria esta metodologia como uma ferramenta adicional para a avaliação da margem de estabilidade do sistema na situação da ponta de carga, e, portanto, deve ser adequado à necessidade dos engenheiros responsáveis.

Atualmente, nos centros de operação, os limites de segurança normalmente analisados correspondem, por exemplo, ao limite de violação de tensão, ao amortecimento do valor pico a pico da tensão, a limites operativos de equipamentos, entre outros. Estes limites são importantes exatamente quando ocorrem antes do ponto de máxima transferência de potência (BSN). Assim, a partir de estudos realizados no planejamento, o valor limite de carga é definido, e a operação ocorre utilizando como valor máximo 5% a menos de carga do valor de carga encontrado para o limite de segurança estabelecido, caso este limite se encontre próximo ao ponto de máximo carregamento (BSN) (ONS, 2011a). Por outro lado, caso o limite de segurança esteja longe do colapso, a operação tem como valor máximo a carga imediatamente anterior à correspondente a violação dos limites de segurança. Porém, entre os critérios avaliados não se encontram a bifurcação de Hopf.

Através do uso de uma metodologia que contemple o cálculo da margem de carregamento considerando Hopf, os estudos de pré-operação podem, então, avaliar às 7 horas da manhã, qual será a margem de estabilidade devido à Hopf na ponta de carga, frente a uma lista de contingências, e verificar se esta é adequada do ponto de vista de segurança do sistema. Em casos mais críticos, este estudo poderia então prever quanto tempo estaria disponível para realizar alguma manobra no sistema (fornecimento de reativos, por exemplo), caso alguma ação fosse necessária.

Para um caso onde a variação de carga é mínima, a ferramenta descrita em (SALIM; ALBERTO; BRETAS, 2010), da maneira como foi concebida, é suficiente para a avaliação do crescimento de carga nos centros de operação e para a verificação da estabilidade do sistema e da margem de carregamento adicional na ponta de carga. Como exemplo, considere o gráfico da Figura 3.6. Este refere-se ao gráfico da curva de carga para o sistema Sudeste/Centro-Oeste para o dia 29/01/2011 (ONS, 2011b), que é considerado um caso típico para fins de operação.

É possível verificar que a variação de carga entre os horários de 7 e 19 horas é de aproximadamente 15%, ou seja, às 7 horas a carga deste sistema é de 32.409 MW e às 19 horas a carga passa a ser de 35.208 MW. Desta forma, caso o sistema estivesse submetido a uma BH, a metodologia descrita na seção 3 poderia verificar qual seria a margem de estabilidade devido a BH das próximas horas, visto que o crescimento da carga não seria excessivamente elevado ao longo do dia, o que resultaria em um caso base próximo ao caso crítico. Como os estudos da operação dispõem da taxa de crescimento de carga a cada intervalo de tempo, fica simplificado o processo de cálculo do tempo disponível caso seja necessária alguma atuação no sistema.

Para exemplificar uma situação real mais crítica do ponto de vista de carregamento, onde haveria a necessidade da complementaridade da metodologia descrita em (SALIM; ALBERTO; BRETAS, 2010), considere o gráfico de curva de carga correspondente ao sistema Sudeste/Centro-Oeste, para o dia 26/04/2011, apresentado na Figura 3.7 (ONS, 2011b). Observa-se que a variação de carga entre 7 e 19 horas corresponde a um aumento

Figura 3.6: Curva de carga da região Sul/Centro-Oeste no dia 29/01/2011.

Figura 3.7: Curva de carga da região Sul/Centro-Oeste no dia 26/04/2011.

de carga de 32.527 MW para 41.224 MW, respectivamente, ou seja, 26,83%. Assim, caso esta ferramenta de BH fosse executada antes das alterações realizadas para o tratamento das condições iniciais e apresentadas nesta seção, esta poderia não encontrar convergência, visto que a metodologia apresentada em SALIM; ALBERTO; BRETAS (2010) não apresenta convergência para condições iniciais afastadas mais do que aproximadamente 23% de carregamento do ponto de bifurcação.

Verifica-se assim a necessidade da realização de desenvolvimentos na metodologia supracitada, de forma que em estudos de pré-operação possa se verificar a margem de estabilidade devido a Hopf até o caso de ponta da curva, ou quanto mais for necessário (26,83% de distância da carga às 7h da manhã), para então verificar, através de um

método direto, quanto de margem o sistema apresenta até a BH. Desta forma, esta seção apresenta a utilização da teoria de homotopia, assim como a utilização desta e da metodologia de esparsidade RRC(U) na metodologia descrita em (SALIM; ALBERTO; BRETAS, 2010), que, utilizadas em conjunto, possibilitam um aumento da margem de convergência entre o caso base e o ponto de BH.

3.3.1 Tratamento das Condições Iniciais

Conforme descrito anteriormente, a metodologia apresentada em (SALIM; ALBERTO; BRETAS, 2010) alcança a convergência somente quando as condições iniciais estiverem afastadas de até 23% (no parâmetro de carga) do ponto de bifurcação, aproximadamente. Ainda, ressalta-se que a não convergência desta metodologia não implica na não existência de um ponto de BH. Problemas numéricos ou condições iniciais distantes da solução podem conduzir a uma divergência. Para obter-se certeza sobre a não existência de um ponto de BH e/ou para aumentar a faixa de convergência do sistema emprega-se métodos numéricos de continuação para aproximar o ponto de operação inicial da solução do sistema.

Apresentou-se também, nas seções anteriores, a necessidade da obtenção de uma maior faixa de afastamento deste parâmetro, devido às necessidades atribuídas à operação do sistema. Assim sendo, foi escolhida a metodologia de homotopia para fornecer um tratamento das condições iniciais com a finalidade de cumprir com este objetivo. Esta metodologia, descrita teoricamente no Capítulo 2, foi empregada no primeiro estágio do algoritmo, ilustrado na Figura 3.1, descrito em (SALIM; ALBERTO; BRETAS, 2010), ou seja, na fase do cálculo das condições iniciais.

Assim, seja o sistema considerado em (3.15). Este é considerado em (2.35) como $f(x, \mu)$, conforme :

$$F(x, \mu) = \begin{bmatrix} f(x, y, \mu) \\ g(x, y, \mu) \\ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} - \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_I^T & \omega_I^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} - 1 \\ \begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Foi utilizada a notação $F(x, \mu)$ ao invés de $f(x, \mu)$ para não haver conflito com a notação $f(x, y, \mu)$, já utilizada anteriormente.

A partir de (3.15), foi encontrado, então, o mapa homotópico trivial, através de (2.36), dado por:

$$M(x, t) = F(x, \lambda) + (t - 1)F(x_0, \lambda_0) \quad (3.16)$$

Sabe-se ainda que, pelo teorema da função implícita (SOTOMAYOR, 1973), pode-se fixar o parâmetro t em $M(x, t)$ na forma:

$$M(t)^{-1} = \{x \mid M(x, t) = 0\} \quad (3.17)$$

Assim, $M(0)^{-1}$ consiste em todos os pontos iniciais, $x(0)$, ou, de forma equivalente, $M(x, 0) = k(x) = 0$. Da mesma forma, $M(1)^{-1}$ refere-se a todos os pontos $x^* = x(1)$ que solucionam $M(x, 1) = f(x) = 0$. Pode-se então definir as equações homotópicas como (3.16) e (3.17).

Derivando $M(x, t) = 0$, pela regra da cadeia obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial t} &= 0 \\ \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial M}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Chegando por fim na equação (3.18), que pode ser solucionada através de um método de integração (como mencionado anteriormente). Assim, incluindo esta na metodologia descrita neste capítulo, obtém-se:

$$\dot{x} = -F(x_0, \lambda_0) \cdot (J_N)^{-1} \quad (3.19)$$

onde J_N é definido na equação (3.6).

3.3.2 Resultados Numéricos com Tratamento das Condições Iniciais

A partir da metodologia descrita por SALIM; ALBERTO; BRETAS (2010) foi inserido o tratamento das condições iniciais por homotopia e foram refeitas as simulações apresentadas no trabalho supracitado. Ressalta-se que o tratamento da inversa da Jacobiana J_N na homotopia foi realizado através de esparsidade, compensando o esforço computacional envolvido no uso da mesma para o tratamento das condições iniciais. O método de resolução da homotopia é o mesmo algoritmo apresentado em (BURDEN; FAIRES, 2001, pg. 561), sendo que qualquer metodologia de continuação/integração pode ser utilizada. Ainda, além dos sistemas simulados anteriormente, descritos nos Anexos B.1 e B.3, cujos pontos de BH e autovalores estão descritos em (OLIVEIRA SALIM, 2009), foi também aplicada a metodologia para o sistema equivalente Sul/Sudeste brasileiro, descrito no Anexo B.4.

Visando reduzir ainda mais o esforço computacional, a técnica RR(C)U foi adaptada para a utilização nos estágios de tratamento das condições iniciais (PISSANETZKY,

2006). Da mesma maneira como apresentado anteriormente, os testes foram divididos de acordo com os diferentes casos, descritos na Tabela 3.4.

Ressalta-se que, na Tabela 3.4, o tratamento das condições iniciais inclui o cálculo das mesmas através da homotopia, e não somente a aplicação das condições para determinação das condições iniciais de v_R , v_I , ω_R e ω_I . Ainda, toda a análise desta seção envolve a metodologia avaliada por SALIM; ALBERTO; BRETAS (2010), ou seja, o **Caso I**, e a metodologia com homotopia para o tratamento das condições iniciais, denominado **Caso H**.

Tabela 3.4: Casos numéricos analisados.

	Pré-Condicionamento das Cond. Iniciais	Homotopia	Técnica RR(C)U
Caso H	✓	✓	✓
Caso I	✓		✓

Foram realizados testes no sistema de duas áreas referentes aos casos **Caso I** e **Caso H** da metodologia supracitada, bem como testes com a metodologia clássica, a título de comparação. A Tabela 3.5, apresenta os tempos de processamento para o emprego das metodologias no sistema de duas áreas.

Primeiramente, como pode ser observado, a introdução da técnica RR(C)U, conforme anteriormente observado, já reduz significativamente o tempo de processamento para a metodologia clássica de estimação de margem de estabilidade devido a bifurcação de Hopf. Essa redução foi de 56%. No sistema estudado com a metodologia descrita em (SALIM; ALBERTO; BRETAS, 2010), o **Caso I** reduziu ainda mais o tempo de execução para a determinação da margem de estabilidade, chegando a uma redução de 96,2% no tempo de processamento com relação à metodologia clássica de cálculo de autovalores. Inserindo o tratamento da condição inicial por homotopia, o processamento, com relação ao **Caso I**, foi reduzido em 23%. É importante destacar que a metodologia de homotopia, apesar de ter um custo computacional alto, não afetou o tempo total de processamento da metodologia, visto que reduz o número de iterações da metodologia direta. Ainda, ressalta-se que a homotopia não é realizada até o seu parâmetro alcançar o valor $t = 1$, pois neste ponto, a metodologia continuada de homotopia encontraria o próprio ponto de BH. A homotopia é realizada até o seu parâmetro obter um valor igual a 0.35.

A Figura 3.8 apresenta graficamente o resultado da utilização da homotopia no cálculo das condições iniciais, considerando a curva $P - V$ da barra 11 do sistema de duas áreas. Pode-se observar que as condições calculadas com a homotopia encontram-se muito mais próximas do ponto de bifurcação, proporcionando uma melhor convergência.

Apesar do sistema de duas áreas ser um sistema pequeno, a introdução do tratamento por homotopia proporcionou a redução do número de iterações no cálculo da metodologia direta (de duas iterações para apenas uma) sem comprometer o valor encontrado de

Tabela 3.5: Processamento das metodologias para o sistema de duas áreas.

Método	Nº de Iterações	Tempo total[s]	μ
Clássico	-	8.16	1.181
Clássico com RR(C)U	-	3.6	1.181
Caso I	2	0.31	1.18099
Caso H	1	0.24	1.18099

μ , ou seja, do carregamento do sistema no exato ponto da BH, conforma ilustra a Figura 3.2.

O mesmo estudo foi aplicado para o sistema New England IEEE 39 barras. A Tabela 3.6 apresenta a comparação entre a metodologia clássica, o **Caso I** e o **Caso H**. Mais uma vez, o tempo de cálculo utilizando a homotopia para as condições iniciais reduziu em aproximadamente 32% o tempo de processamento envolvido no cálculo. Comparando este tempo com o necessário para o cálculo da metodologia clássica, esta alteração aumentou a eficiência para determinar a margem de carregamento em 46 vezes aproximadamente. Pode-se também ressaltar a redução do número de iterações, o que possibilitou a metodologia de homotopia ser uma vantagem para a utilização como estimação de uma condição inicial. Foram utilizadas as mesmas condições para a homotopia que utilizadas para o sistema de duas áreas. Ainda, resalta-se que o grau de esparsidade do sistema New England é relativamente maior do que o do sistema de duas áreas, proporcionando um aumento de eficiência relativa no ganho de processamento.

Figura 3.8: Homotopia para o sistema de duas áreas.

Tabela 3.6: Comparação das metodologias para o sistema New England.

Método	Nº de Iterações	Tempo total[s]	μ
Clássico	-	36.48	1.23
Clássico com RR(C)U	-	12.54	1.23
Caso I	5	1.15	1.2341
Caso H	2	0.78	1.2301

Por fim, estudos também foram realizados para um ponto de bifurcação de Hopf encontrado no sistema equivalente Sul/Sudeste. Este sistema possui 65 barras e um grau de esparsidade maior que o do sistema New England.

É importante observar que este sistema foi modelado de acordo com a metodologia descrita por SALIM; ALBERTO; BRETAS (2010), ou seja, tendo geradores modelados em 4ª ordem e um AVR com excitação rápida (1ª ordem). Para este sistema, o ponto de BH encontra-se em $\mu = 1.10606$, apresentando uma margem de estabilidade de aproximadamente 10,06% a partir do caso base.

A Tabela 3.7 apresenta a comparação do tempo de simulação entre a metodologia clássica, o **Caso I** e o **Caso H**. Pode-se observar a eficiência da aplicação da esparsidade na metodologia clássica para determinar a BH, onde a redução do tempo computacional é significativa. Com relação ao **Caso I**, este reduziu o tempo computacional para apenas 2 s, tempo este 27 vezes menor do que o necessário para a estimação da margem de carregamento através da metodologia clássica. Em seguida, é analisado o **Caso H**, onde é aplicando o tratamento das condições iniciais por homotopia. Neste observou-se uma redução do tempo de processamento de aproximadamente 33% quando comparado ao **Caso I**. Este tempo é reduzido pois a estimação das condições iniciais reduz o número de iterações do método de Newton de 8 para 3 iterações, justificando sua utilização. As Tabelas 3.8 e 3.9 apresentam os autovalores do sistema para o caso base e o ponto de BH, respectivamente, sendo que os autovalores responsáveis pelo aparecimento da bifurcação foram destacados. Observou-se também uma variação considerável no valor de ω_0 , confirmando a não convergência por parte de outras metodologias diretas que fixam esta na gama de variáveis.

Tabela 3.7: Comparação das metodologias para o sistema Sul/Sudeste.

Método	Nº de Iterações	Tempo total[s]	μ
Clássico	-	56.937	1.10
Clássico com RR(C)U	-	29.543	1.10
Caso I	8	2.007	1.1059
Caso H	3	1.34	1.1060

3.3.3 Considerações

Comparando os resultados obtidos em todos os sistemas, fica evidente a influência do grau de esparsidade do sistema na eficiência relativa da metodologia, ou seja, quanto mais esparsa, mais rápido ocorre o tempo de processamento do programa, levando em consideração o número de barras. Desta forma, a aplicação do tratamento das condições iniciais via homotopia, para estes sistemas apresentados (sistema de duas áreas, sistema New England e sistema equivalente Sul/Sudeste brasileiro), mostrou-se uma forma viável para a redução do tempo de processamento quando há a necessidade de se encontrar a margem de carregamento do sistema devido a bifurcações de Hopf.

O estudo da pré-operação pode, conforme mencionado anteriormente, utilizar esta ferramenta para adquirir o tempo que ainda lhe resta, baseado em uma taxa de crescimento de carga, para que alguma ação seja realizada, quando há a previsão da ocorrência da bifurcação em uma dada topologia do sistema. Os resultados apresentados também fazem observações com relação à redução do número de iterações na metodologia, visto que, quanto melhor, ou mais próxima estiver a condição inicial da solução do problema, mais rápido é possível encontrar a mesma solução.

Ainda, vale ressaltar que o tratamento via homotopia requer a inversão da matriz Jacobiana do sistema, J_N , e que, dada a sua esparsidade, pode ser necessária a utilização de metodologias de inversão rápidas ou paralelas, como as encontradas em (BETANCOURT; ALVARADO, 1986). Mesmo contendo este processo de inversão de matrizes, os desenvolvimentos propostos para a metodologia de SALIM; ALBERTO; BRETAS (2010) mostraram melhorias do ponto de vista de desempenho computacional, mesmo quando submetidos a testes em sistemas de grande porte. Ressalta-se ainda que a utilização da homotopia deve ser analisada para verificar se o processamento computacional empregado de fato reduz o tempo computacional envolvido no processo ou se este apenas possibilita a convergência da metodologia proposta. Portanto, conclui-se que, enquanto a solução da homotopia não interferir e até melhorar a solução desta metodologia, quando este tratamento for necessário (bifurcações a mais de 23% de carga do caso base), esta pode ser utilizada de forma viável para determinar condições iniciais da metodologia apresentada em (SALIM; ALBERTO; BRETAS, 2010). Na verdade, sugere-se fortemente o tratamento das condições iniciais através da homotopia, uma vez que ela garante a convergência para pontos mais distantes da bifurcação, evitando a realização de cálculos desnecessários.

Ainda, foi inserida, através da realização da metodologia clássica, para os três sistemas, o cálculo da projeção das variáveis do sistema no espaço nulo da matriz Jacobiana do sistema, J_N , da mesma forma como demonstrado nas seções anteriores. O resultado confirmou a discussão realizada na seção 3.2. A variável correspondente à frequência do autovalor no exato ponto onde cruza o eixo imaginário possui uma projeção nula no espaço nulo da matriz do sistema, necessariamente demonstrando a importância da inclusão desta variável no espaço de variáveis do sistema.

Tabela 3.8: Autovalores do sistema Sul/Sudeste para o caso base $\mu = 1$.

Autovalor	Parte Real	Parte Imaginária	Valor Absoluto	Amortecimento [%]	Freq. [Hz]
1	-980.6012	0.000	980.601	100.0	0.00
2	-993.7475	0.000	993.748	100.0	0.00
3	-995.1668	0.000	995.167	100.0	0.00
4	-999.0432	0.000	999.043	100.0	0.00
5	-998.6991	0.000	998.699	100.0	0.00
6	-998.4256	0.000	998.426	100.0	0.00
7	-326.9018	0.000	326.902	100.0	0.00
8	-198.2450	0.000	198.245	100.0	0.00
9	-187.2160	0.000	187.216	100.0	0.00
10	-99.8780	0.000	99.878	100.0	0.00
11	-91.2833	0.000	91.283	100.0	0.00
12	-22.6889	43.000	48.619	46.7	6.84
13	-22.6889	-43.000	48.619	46.7	6.84
14	-0.0632	37.751	37.751	0.2	6.01
15	-0.0632	-37.751	37.751	0.2	6.01
16	-0.1887	30.263	30.264	0.6	4.82
17	-0.1887	-30.263	30.264	0.6	4.82
18	-0.1529	27.761	27.761	0.6	4.42
19	-0.1529	-27.761	27.761	0.6	4.42
20	-0.4925	26.434	26.438	1.9	4.21
21	-0.4925	-26.434	26.438	1.9	4.21
22	-0.1324	24.693	24.693	0.5	3.93
23	-0.1324	-24.693	24.693	0.5	3.93
24	-0.0645	22.699	22.699	0.3	3.61
25	-0.0645	-22.699	22.699	0.3	3.61
26	-0.3144	21.820	21.822	1.4	3.47
27	-0.3144	-21.820	21.822	1.4	3.47
28	-0.5791	21.336	21.344	2.7	3.40
29	-0.5791	-21.336	21.344	2.7	3.40
30	-0.3086	20.397	20.400	1.5	3.25
31	-0.3086	-20.397	20.400	1.5	3.25
32	-0.0569	19.352	19.352	0.3	3.08
33	-0.0569	-19.352	19.352	0.3	3.08
34	-1.8400	18.476	18.568	9.9	2.94
35	-1.8400	-18.476	18.568	9.9	2.94
36	-16.0776	3.767	16.513	97.4	0.60
37	-16.0776	-3.767	16.513	97.4	0.60
38	-0.1286	16.362	16.363	0.8	2.60
39	-0.1286	-16.362	16.363	0.8	2.60
40	-0.5313	15.447	15.456	3.4	2.46
41	-0.5313	-15.447	15.456	3.4	2.46
42	-0.4410	12.719	12.726	3.5	2.02
43	-0.4410	-12.719	12.726	3.5	2.02
44	-10.2460	8.939	13.597	75.4	1.42
45	-10.2460	-8.939	13.597	75.4	1.42
46	-11.0285	0.000	11.029	100.0	0.00
47	-8.1936	0.000	8.194	100.0	0.00
48	-5.6937	0.000	5.694	100.0	0.00
49	-4.8366	1.020	4.943	97.8	0.16
50	-4.8366	-1.020	4.943	97.8	0.16
51	-2.5609	0.000	2.561	100.0	0.00
52	-2.3012	0.000	2.301	100.0	0.00
53	-0.2007	0.000	0.201	100.0	0.00
54	-1.7502	0.000	1.750	100.0	0.00
55	-1.4238	0.000	1.424	100.0	0.00

Tabela 3.9: Autovalores do sistema Sul/Sudeste no caso de bifurcação $\mu = 1.106$.

Autovalor	Parte Real	Parte Imaginária	Valor Absoluto	Amortecimento [%]	Freq. [Hz]
1	-981.9044	0.000	981.904	100.0	0.00
2	-993.9008	0.000	993.901	100.0	0.00
3	-995.2392	0.000	995.239	100.0	0.00
4	-998.5131	0.000	998.513	100.0	0.00
5	-999.0000	0.000	999.000	100.0	0.00
6	-999.1526	0.000	999.153	100.0	0.00
7	-326.3213	0.000	326.321	100.0	0.00
8	-198.1437	0.000	198.144	100.0	0.00
9	-186.3231	0.000	186.323	100.0	0.00
10	-99.8439	0.000	99.844	100.0	0.00
11	-90.7741	0.000	90.774	100.0	0.00
12	-23.0767	46.820	52.198	44.2	7.45
13	-23.0767	-46.820	52.198	44.2	7.45
14	-0.0288	41.685	41.685	0.1	6.63
15	-0.0288	-41.685	41.685	0.1	6.63
16	-0.1878	31.611	31.611	0.6	5.03
17	-0.1878	-31.611	31.611	0.6	5.03
18	-0.3370	27.504	27.506	1.2	4.38
19	-0.3370	-27.504	27.506	1.2	4.38
20	-0.1808	27.080	27.081	0.7	4.31
21	-0.1808	-27.080	27.081	0.7	4.31
22	-0.0831	24.931	24.931	0.3	3.97
23	-0.0831	-24.931	24.931	0.3	3.97
24	-0.1925	22.726	22.727	0.8	3.62
25	-0.1925	-22.726	22.727	0.8	3.62
26	-16.2164	3.952	16.691	97.2	0.63
27	-16.2164	-3.952	16.691	97.2	0.63
28	-0.0515	20.888	20.888	0.2	3.32
29	-0.0515	-20.888	20.888	0.2	3.32
30	0.0000	19.733	19.733	-0.0	3.14
31	0.0000	-19.733	19.733	-0.0	3.14
32	-0.3126	18.834	18.837	1.7	3.00
33	-0.3126	-18.834	18.837	1.7	3.00
34	-0.1824	17.726	17.727	1.0	2.82
35	-0.1824	-17.726	17.727	1.0	2.82
36	-10.3935	9.672	14.197	73.2	1.54
37	-10.3935	-9.672	14.197	73.2	1.54
38	-0.1151	14.639	14.639	0.8	2.33
39	-0.1151	-14.639	14.639	0.8	2.33
40	-1.5916	14.458	14.546	10.9	2.30
41	-1.5916	-14.458	14.546	10.9	2.30
42	-0.4949	12.672	12.682	3.9	2.02
43	-0.4949	-12.672	12.682	3.9	2.02
44	-1.5032	10.534	10.641	14.1	1.68
45	-1.5032	-10.534	10.641	14.1	1.68
46	-11.2703	0.000	11.270	100.0	0.00
47	-7.0176	0.000	7.018	100.0	0.00
48	-5.9171	0.000	5.917	100.0	0.00
49	-5.0947	0.942	5.181	98.3	0.15
50	-5.0947	-0.942	5.181	98.3	0.15
51	-2.4472	0.000	2.447	100.0	0.00
52	-2.2000	0.000	2.200	100.0	0.00
53	-1.8455	0.000	1.846	100.0	0.00
54	-1.3617	0.000	1.362	100.0	0.00
55	-1.1854	0.000	1.185	100.0	0.00

Metodologia Direta para Detecção e Predição de Bifurcações Sela-Nó

O Capítulo 2 apresentou uma revisão teórica sobre bifurcações e uma revisão bibliográfica sobre metodologias de detecção das mesmas em SEP. Entre estas bifurcações encontra-se a bifurcação Sela-Nó, cuja ocorrência, em um SEP modelado com cargas e potência constante, coincide com a máxima transferência de potência. Este capítulo tem como objetivo apresentar o desenvolvimento de uma metodologia direta para o cálculo do ponto de operação onde ocorre uma BSN, em um dado sistema de potência, através de um conjunto de equações pré-definido. Como base para o desenvolvimento da metodologia, será utilizada a metodologia desenvolvida em (SALIM; ALBERTO; BRETAS, 2010) e descrita no Capítulo 3. Neste capítulo, também é apresentada a linearização das equações propostas pela metodologia supracitada aplicadas a SEP, visto que estas serão utilizadas na formulação do método de Newton, também previamente apresentado (BARROSO, 1987). Entre outras vantagens, o embasamento da metodologia de cálculo de BSN na metodologia de cálculo de BH permite diversas simplificações do ponto de vista de aplicação (computacional e desempenho), quando ambos os cálculos devem ser realizados em um mesmo sistema, viabilizando, desta forma, uma metodologia mais abrangente em relação à determinação de pontos de bifurcação.

A literatura descreve que metodologias diretas para encontrar o ponto de BSN não são normalmente utilizadas, uma vez que podem não apresentar uma convergência satisfatória (AJJARAPU, 2006; CUTSEM; VOURNAS, 2003; CHIANG; WANG; FLUECK, 1997). As abordagens atualmente existentes optam pela utilização das equações do fluxo de carga para encontrar este ponto de colapso, o que omite detalhes do desempenho dinâmico do sistema, relacionado especialmente aos sistemas de controle dos geradores. Visando desenvolver uma metodologia abrangente para a determinação de pontos de bifurcação em SEP, ou seja que determina ao mesmo tempo BSN e BH, este capítulo equaciona o problema de determinação da BSN através da representação do mesmo por

Como exemplo, pode-se citar a dinâmica dos reguladores de tensão, que nas equações estáticas são representadas por simples restrições algébricas em barras com tensão controlada.

equações algébrico-diferenciais (EAD). Assim, serão incluídas as equações de equilíbrio da parte dinâmica do sistema para a determinação desta bifurcação de forma direta e será avaliada a convergência desta metodologia para esta condição.

Para o equacionamento apresentado nas seções seguintes, será utilizado o sistema genérico algébrico-diferencial que representa um SEP conforme (3.1), onde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ e $\mu \in \mathbb{R}$, e x representa o vetor de variáveis de estado dinâmicas, y o vetor de variáveis estáticas e μ o carregamento do sistema.

4.1 Formulação da Metodologia

A formulação da metodologia proposta está baseada nas condições necessárias para a ocorrência de uma BSN e contempla a determinação de três conjuntos de equações, a saber:

1. Equações representando o equilíbrio do sistema;
2. Equações representando as condições necessárias para ocorrência de uma bifurcação Sela-Nó;
3. Equações complementares. Sendo estas linearmente independentes das demais equações, fornecem o balanço entre número de equações e número de variáveis.

Os conjuntos de equações supracitados estão detalhados nas seções posteriores, para a determinação de uma formulação aumentada de equações que será utilizada para solucionar o problema em questão.

4.1.1 Equações Representando o Equilíbrio do Sistema

As equações a serem incluídas na metodologia referem-se às equações de equilíbrio do sistema. Estas englobam tanto o comportamento estático, quanto o comportamento dinâmico do sistema.

A representação do sistema na metodologia proposta, ao invés da utilização das equações algébricas, as quais são normalmente utilizadas quando necessita-se avaliar o ponto de máximo carregamento de um sistema, será utilizado o conjunto algébrico-diferencial do mesmo. Esta representação (4.1) inclui, além das equações estáticas de fluxo de potência, as equações dinâmicas dos geradores em equilíbrio e sistemas de controle, como os reguladores de tensão, por exemplo.

$$\begin{cases} f(x, y, \mu) = 0 \\ g(x, y, \mu) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Este sistema possui a seguinte matriz Jacobiana:

O modelo do sistema é um conjunto EAD, entretanto as equações necessárias para a obtenção da BSN são apenas algébricas.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial \mu} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial \mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_\mu \\ G_x & G_y & G_\mu \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

4.1.2 Equações Representando as condições Necessárias para Ocorrência de uma Bifurcação Sela-Nó

Em adição às equações de equilíbrio do sistema, são utilizadas também as equações referentes à bifurcação Sela-Nó. A condição necessária para que uma BSN ocorra é dada pela seguinte equação:

$$\det J = 0 \quad (4.3)$$

Entretanto, esta condição é normalmente representada por sua condição equivalente (AJJARAPU, 2006; CUTSEM; VOURNAS, 2003):

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y} \cdot u &= 0 \\ G_y \cdot u &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde g representa as equações algébricas da rede, y as variáveis algébricas e u corresponde ao autovetor à esquerda de G_y .

Observa-se que G_y é apenas uma parte da matriz apresentada em (4.2). Assim, adaptando-se (4.4) para englobar as equações dinâmicas, a condição necessária para a ocorrência de uma BSN para a ser representada por:

$$\begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = 0 \quad (4.5)$$

onde $v = v_R + j \cdot v_I$ e $\omega = \omega_R + j \cdot \omega_I$ correspondem ao autovetor à esquerda das variáveis dinâmicas e estáticas, respectivamente. Visando o cálculo de apenas números reais na metodologia proposta, (4.5) pode ser desenvolvida na seguinte forma:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

4.1.3 Equações Complementares

Com base em (4.1) e (4.5), evidencia-se a necessidade de equações complementares para a formulação de um sistema aumentado. Este fato pode ser observado quando analisa-se o número de variáveis envolvidas neste processo, onde obtém-se $3n + 3m$ equações

e $3n + 3m + 1$ variáveis, visto que o sistema possui n equações diferenciais e m equações algébricas e mais o carregamento μ como parâmetro. Verifica-se, então, que será necessário acrescentar ao conjunto de equações aumentadas apenas uma equação.

Para escolher esta equação adicional, a literatura reporta que métodos diretos que possuem como finalidade a determinação da BSN não possuem uma boa convergência e ainda que, a estas metodologias utilizam a equação adicional conforme a normalização dos autovetores, através da norma euclidiana:

$$\|u\| = 1 \quad (4.7)$$

Buscando evitar esse problema de convergência será utilizado neste trabalho uma equação que relaciona propriedades dos autovetores associados ao ponto de bifurcação e que também é LI com relação ao sistema em estudo, para fins de determinação da BSN. Desta forma, utilizou-se uma condição que determina uma restrição diferente a estes autovetores, de modo que a parte real e imaginária destes sejam ortogonais entre si, de acordo com (4.8):

$$\begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} = 0 \quad (4.8)$$

Esta restrição foi utilizada também em SALIM; ALBERTO; BRETAS (2010)

4.1.4 Formulação do Sistema Aumentado

A partir das equações detalhadas anteriormente, pode-se formular um conjunto de equações proposto para a obtenção do ponto de bifurcação Sela-Nó de um sistema algébrico-diferencial através de um cálculo direto. Desta forma (4.1), (4.6) e (4.8) dão origem ao seguinte conjunto de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y, \mu) = 0 \\ g(x, y, \mu) = 0 \\ \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} = 0 \end{array} \right. \quad (4.9)$$

O conjunto representado em (4.9) contém a condição para a ocorrência da bifurcação Sela-Nó e pode ser resolvido diretamente pelo método de Newton. Adotando-se a notação apresentada no Capítulo 3, consideram-se as derivadas $F_x = A$, $F_y = B$, $G_x = C$ e $G_y = D$, e suas respectivas derivadas (derivadas segunda do sistema diferencial-algébrico),

Norma que mede a distância entre a origem e o ponto de interesse, $r = \sqrt{x^T x}$.

que possuem a notação M_k , onde M denota as matrizes $A, \dots, D$, e k a variável sobre a qual a matriz é derivada. Desta forma, obtém-se a matriz Jacobiana do sistema que será utilizada para a solução do mesmo pelo método de Newton, conforme (B.1). A modelagem matemática utilizada em todas as metodologias apresentadas nesta tese está descrita no Apêndice B.

4.2 Algoritmo da Metodologia

Definido o conjunto de equações do sistema aumentado e a Jacobiana do sistema nas seções anteriores, esta seção apresenta o algoritmo utilizado para a determinação da margem de estabilidade devido a bifurcações Sela-Nó.

Após ser realizada a modelagem do sistema, é realizado o cálculo das condições iniciais referentes, a este sistema, que está detalhado em (SAUER; PAI, 1998). Para a equação referente à perpendicularidade dos autovetores utilizam-se considerações para suas partes real e imaginária. Basicamente, supõe-se que v_R e v_I possuem a mesma magnitude, sendo que v_I possui sinal negativo alternado entre seus valores (caracterizando o complexo conjugado), e ainda, $\omega_I = 0$. Em seguida o algoritmo monta a matriz Jacobiana referente ao conjunto de equações apresentado em (4.9) para então obter a solução do sistema (B.1) através do método de Newton. Caso o algoritmo não apresente convergência, é realizado um tratamento das condições iniciais através do método continuado de homotopia, para aproximar o ponto de operação inicial do ponto de colapso, descrito no Capítulo 3. O fluxograma ilustrado na Figura 4.1 apresenta o algoritmo da metodologia proposta.

Figura 4.1: Algoritmo para determinação da margem de carregamento devido a bifurcação Sela-Nó.

4.3 Resultados

Esta seção apresenta os resultados obtidos através da metodologia descrita neste capítulo, referente à determinação da margem de estabilidade e/ou carregamento devido à bifurcação Sela-Nó. Os dados dos sistemas aqui apresentados podem ser encontrados no Anexo B. Ainda, ressalta-se que toda a programação envolvida foi realizada em MATLAB (MATLAB, 2002). Deve-se salientar também que todos os testes envolvidos nesta tese foram realizados em um computador de processador Intel Core 2 de 1.86 GHz e 4 GB de RAM, e que a metodologia desenvolvida nesta tese possui um tratamento de esparsidade, RRC(U), encontrado em (PISSANETZKY, 2006).

Os resultados apresentados nesta seção estão separados em subseções, de acordo com o sistema analisado: sistema de duas áreas, sistema New England, sistema equivalente 65 barras Sul/Sudeste. Para fins de comparação, são também apresentados resultados obtidos com a ferramenta Organon (JARDIM et al., 1998), que é uma das ferramentas utilizadas pelos operadores do sistema interligado nacional. O cálculo da margem de estabilidade estática desta ferramenta é realizado com o método descrito em (SOUZA; CAÑIZARES; QUINTANA, 1997). Ainda, o método de Newton utilizado pela metodologia proposta possui como critério de parada um erro absoluto igual a 0.01 p.u., ou seja, a diferença entre o incremento das variáveis da iteração atual e da anterior deve ser menor que 0.01 e, ainda, estes valores devem garantir que as equações de equilíbrio sejam satisfeitas. Este mesmo critério de convergência foi adotado na ferramenta Organon.

Para garantir uma comparação adequada em relação ao tempo de processamento, o tempo utilizado para esta comparação foi o tempo de processamento de máquina, e não o de execução do software envolvido por qualquer uma das metodologias, visto que as metodologias são implementadas em plataformas diferentes, MATLAB e FORTRAN.

Este capítulo também apresenta o número de iterações necessárias para a obtenção do resultado das metodologias. Como o método utilizado para comparação é uma metodologia continuada, não deve-se comparar o número de iterações entre este e a metodologia desenvolvida, visto que, a metodologia desenvolvida, possui o número de iterações correspondente às iterações do método de Newton e a metodologia continuada possui as iterações correspondentes a cada passo da continuação. Entretanto o número de iterações será apresentado a título de informação.

4.3.1 Sistema de Duas Áreas

A topologia deste sistema é apresentada no Anexo B. Este sistema pode ser encontrado em detalhes em (KUNDUR, 1994), e seus dados dinâmicos foram alterados com a finalidade de adaptar os modelos implementados pela metodologia neste sistema. Os resultados obtidos para este sistema, referentes à utilização da ferramenta Organon e à metodologia desenvolvida, estão apresentados na Tabela 4.1, a qual informa o número de iterações envolvidas em cada metodologia, e sub-iteraões (caso pertinente), o tempo total de processamento e o carregamento máximo obtido.

Tabela 4.1: Avaliação das metodologias para o sistema de duas áreas.

Método	Máximo Carregamento [%]	Nº iterações	Nº de sub-Iterações	Tempo total [s]
Organon	25.30	21	6	0.316
Metodologia desenvolvida	25.26	6	-	0.099

A coluna denotada Máximo Carregamento apresenta o valor em percentagem de máxima transferência de potência do sistema analisado com relação ao caso base. Desta forma, observa-se que o sistema de duas áreas tanto para a ferramenta Organon quanto para a metodologia desenvolvida possui valores praticamente iguais, atribuindo-se o erro à correção numérica diferenciada entre ambas as metodologias.

Ainda, observa-se que em relação ao número de iterações, o fluxo continuado aumentou sucessivamente a carga em 21 vezes e cada uma dessas atualizações possui sub-iterações referentes ao preditor/corretor, que em média foram de seis para cada iteração. Como a metodologia apresentada nesta tese é direta, o número de iterações para a mesma refere-se ao número de passos utilizados pelo método de Newton para a obtenção do resultado. Com base na Figura 4.1, nota-se que apenas utiliza-se a homotopia para casos onde não existe a convergência na primeira execução do algoritmo. Este fato não ocorreu para o sistema aqui apresentado, ou seja, a convergência ocorreu sem a necessidade do tratamento das condições iniciais com a distância de carregamento do caso base de 24.86%.

Também foi analisado o tempo de processamento de máquina utilizado por ambas as metodologias. Nota-se que a metodologia direta proposta apresentou um menor tempo de resposta no processamento, aproximadamente 3 vezes mais rápido que o método do fluxo continuado utilizado pela ferramenta Organon. A curva $V - \lambda$ deste sistema até o ponto de máxima transferência de potência está apresentada na Figura 4.2, obtida através do Organon. As barras visualizadas neste gráfico são as barras 7, 8 e 9, sendo as barras 7 e 9 barras de carga.

4.3.2 Sistema New England 39 Barras

Os resultados desta seção referem-se ao modelo reduzido do sistema de potência em New England. Detalhes da modelagem utilizada para este sistema podem ser encontradas no Anexo B. Analogamente ao sistema de duas áreas, resultados obtidos para este sistema também são referentes à utilização da ferramenta Organon e à metodologia desenvolvida. Estes estão apresentados na Tabela 4.2.

Mais uma vez a avaliação de máximo carregamento do sistema para ambas as metodologias foi muito próximo, evidenciando a validade da metodologia. Para o caso do sistema New England de 39 barras, como o caso base possuía uma carga bem reduzida, foi possível aumentar o carregamento em mais de 120% da carga inicial. Com relação ao número de iterações, observou-se mais uma vez a elevada quantidade de iterações dadas

Figura 4.2: Curva $V - \lambda$ do sistema de duas áreas obtida no Organon.

pelo método de continuação, que, contabilizando cada passo de incremento de carga e cada iteração realizada pelo preditor/corretor, apresentou aproximadamente 195 iterações (Iterações = $39 \cdot 5$). Este número elevado pode justificar o tempo de processamento mais alto para a ferramenta continuada.

Observa-se que a metodologia desenvolvida foi 1.5 vezes mais eficiente computacionalmente que o método de continuação. Este tempo foi relativamente mais lento para este sistema do que para o sistema de duas áreas. Este fato ocorreu devido à utilização da metodologia de homotopia para a determinação das condições iniciais, visto que a primeira execução do programa não obteve convergência. Assim, o tempo computacional apresentado na tabela para a metodologia proposta corresponde efetivamente à execução do algoritmo por duas vezes: uma divergente sem homotopia e outra convergente com

Tabela 4.2: Avaliação das metodologias para o sistema New England.

Método	Máximo Carregamento [%]	Nº iterações	Nº de sub-Iterações	Tempo total [s]
Organon	122.02	39	5	0.455
Metodologia desenvolvida	121.98	7	-	0.287

homotopia. Se a homotopia tivesse sido diretamente utilizada, o tempo de execução do algoritmo proposto seria ainda menor. Apesar da metodologia de homotopia requerer um custo computacional elevado, ressalta-se que esta não está sendo realizada de forma completa ($t \in [0, 1]$), e sim de forma a aproximar o ponto de operação do ponto de BSN ($t \in [0, 0.35]$).

Obtidas as condições iniciais mais próximas do ponto de bifurcação Sela-Nó (máxima transferência de potência), a metodologia desenvolvida obteve convergência. Esta distância da condição inicial localizou-se a aproximadamente 62% de carregamento do caso base. A Figura 4.3 ilustra a curva $V - \lambda$ referente a este sistema, contendo a informação supracitada retirada do Organon. Pode-se observar nesta figura que o valor de λ , assim como na Figura 4.2, necessita ser multiplicado pelo fator de crescimento de carga de 0.1%. As barras avaliadas por esta figura correspondem às barras 8, 26 e 29.

Figura 4.3: Curva $V - \lambda$ do sistema New England obtida no Organon.

4.3.3 Sistema Equivalente Sul/Sudeste 65 barras

O sistema equivalente Sul/Sudeste também foi utilizado para verificar o desempenho da metodologia desenvolvida. A modelagem deste sistema pode ser encontrada no Anexo B, e, com detalhes em (ALVES, 2007). Este sistema possui em sua composição 15 máquinas, 5 a mais do que o sistema New England, cujos resultados foram apresentados na seção anterior.

A metodologia desenvolvida e a ferramenta Organon foram utilizadas, mais uma vez, para a avaliação do colapso de tensão deste sistema. Os resultados estão apresentados na Tabela 4.3, que possui as mesmas informações apresentadas para os sistemas anteriormente estudados.

Tabela 4.3: Avaliação das metodologias para o sistema 65 Barras.

Método	Máximo Carregamento [%]	Nº iterações	Nº de sub-Iterações	Tempo total [s]
Organon	26.23	25	6	0.337
Metodologia desenvolvida	26.20	5	-	0.142

Observa-se, através dos resultados apresentados na Tabela 4.3 que mais uma vez a condição de máximo carregamento apresentou-se aproximadamente igual, atribuindo-se a diferença entre os valores encontrados à implementação e ao erro numérico apresentados pelas metodologias.

Pode-se notar que, assim como nos casos anteriores, a diferença no número de iterações entre as metodologias foi grande. Com relação ao tempo de processamento, a metodologia desenvolvida apresentou-se aproximadamente 2 vezes mais rápida. Esta melhoria no tempo relativo, quando comparado com o sistema New England, pode ser atribuída ao fato do sistema 65 barras ser bastante esparso, aumentando a eficiência no tratamento de esparsidade utilizado (RRC(U)). Entretanto, esta melhora no tempo de processamento relativo não é significativamente mais elevada, quando comparada ao sistema New England. Esta característica pode estar relacionada com o fato do sistema de 65 barras possuir mais máquinas, aumentando o número de equações diferenciais envolvidas no equacionamento. Mesmo assim, a metodologia apresentou-se robusta e mais eficiente computacionalmente.

Ressalta-se ainda que, este sistema não necessitou da etapa de cálculo das condições iniciais via método de homotopia, uma vez que obteve convergência na primeira tentativa, ou seja, a uma distância de carregamento do caso base de 26.2%. A Figura 4.4 apresenta a curva $V - \lambda$ deste sistema. As barras apresentadas neste gráfico são: 234 que refere-se à subestação Samambaia-345, 320 referente à usina de Emborcação-500, e 840 referente à subestação de Cascavel-138, sendo as duas primeiras na região Sudeste e a última na região Sul.

4.4 Considerações Finais

A metodologia proposta apresentada nesta seção foi equacionada e introduzida de modo que pudessem ser analisados seus resultados de forma isolada da metodologia de bifurcação de Hopf. Levando em consideração que a literatura associa uma convergência pobre para esta bifurcação, a metodologia de homotopia para determinar condições iniciais para a metodologia desenvolvida foi adicionada ao algoritmo. Como resultado, os problemas de convergência antes encontrados para o estudo desta bifurcação foram minimizados.

Obtiveram-se então resultados coerentes e promissores, e, para validar seu funcionamento, uma ferramenta de comparação utilizada no ONS (Organon) foi adicionada como

Figura 4.4: Curva $V - \lambda$ do sistema equivalente 65 barras obtida no Organon.

método comparativo ao trabalho. A eficiência destes resultados permitiram propor um algoritmo computacional que fornecesse como saída uma margem de carregamento seja esta devido a BH ou a BSN, que será apresentada no Capítulo 5.

Metodologia para Determinação da Margem de Estabilidade devido a Bifurcações

Nos capítulos anteriores foram apresentados equacionamentos e metodologias diretas que possuíam a finalidade de determinar margens de estabilidade tanto devido a bifurcações de Hopf quanto devido a bifurcações Sela-Nó. Entretanto, a margem de estabilidade de um SEP é única, uma vez que corresponde à diferença de carregamento entre o caso estudado e o maior carregamento que ainda permite uma operação estável do sistema.

Sabe-se que, quando as cargas do SEP são modeladas como injeções constantes de potência ativa e reativa, as BSN coincidem com a máxima transferência de potência do sistema, e, desta forma, este sistema possui uma margem de carregamento devido a BSN neste ponto (CUTSEM; VOURNAS, 2003). No Capítulo 2, apresentaram-se diversas metodologias para a determinação desta margem de carregamento devido a BSN, demonstrando a importância do estudo deste assunto, na análise estática de SEP. No entanto, estudos posteriores mostraram que a margem de estabilidade devido a BSN não é a mais conservadora para fins de estudos de análise de segurança (AJJARAPU; LEE, 1992; TAYLOR, 1981; CUTSEM; VOURNAS, 2003; MITHULANANTHAN; CAÑIZARES; REEVE, 2000). Esta margem, que é obtida através de um modelo algébrico do sistema, não fornece informações sobre o aparecimento de fenômenos oscilatórios que também podem ser causados também pelo crescimento de carga no sistema.

Assim, diversos trabalhos surgiram na linha de estudo destes fenômenos oscilatórios, que, através da teoria de bifurcações, foram caracterizados como bifurcações de Hopf. Foi demonstrado que, devido a estas bifurcações, o sistema poderia tornar-se instável antes de alcançar a máxima transferência de potência, a partir de um crescimento de carga. Este fato direcionou diversas metodologias de avaliação da margem de carregamento para a inclusão da BH, e conseqüentemente das equações diferenciais na representação do sistema (CHIANG; WANG; FLUECK, 1997).

A partir deste cenário, este trabalho, que ao contrário de muitos, iniciou-se na ava-

liação de margem de carregamento devido a bifurcações de Hopf, propõe a formulação de uma metodologia combinada, que forneça ao sistema de potência avaliado, o máximo carregamento que este possa ter, seja devido a BSN ou BH. Ressalta-se que o controle de reativos também foi introduzido na avaliação, implicando em um tratamento para bifurcações induzidas por limites.

Esta metodologia combinada utilizou-se da formulação matemática desenvolvida em (SALIM; ALBERTO; BRETAS, 2010) e da metodologia direta descrita no Capítulo 4, para obter-se um cálculo computacional eficiente e robusto. A metodologia descrita no Capítulo 4 foi equacionada e introduzida de modo que pudessem ser analisados seus resultados isoladamente da metodologia de bifurcação de Hopf. Levando em consideração que a literatura associa uma convergência pobre para esta bifurcação, utilizou-se, quando necessário, a metodologia de homotopia para determinar condições iniciais para a metodologia desenvolvida, e como resultado, os problemas de convergência antes encontrados para o estudo desta bifurcação foram minimizados.

A metodologia combinada apresentada neste Capítulo tem como objetivo realizar a avaliação de segurança de uma lista de contingências existentes, para estudos do operador nacional do sistema, de um sistema da ordem do sistema interligado nacional, considerando o critério (n-1). Para realizar esta análise, são também apresentados o condicionamento numérico das matrizes para as metodologias supracitadas, a avaliação comparativa com um algoritmo sequencial e o aplicativo computacional desenvolvido.

5.1 Equacionamento

O equacionamento utilizado pela metodologia desenvolvida envolve a utilização dos conjuntos de equações que deram base ao desenvolvimento das metodologias de determinação de margem de carregamento devido a BH e BSN. Seja o sistema algébrico-diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \mu) & f : \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ 0 = g(x, y, \mu) & g : \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (5.1)$$

O primeiro conjunto de equações a ser considerado, (5.1), contempla tanto as equações dinâmicas de um SEP, referentes às equações das máquinas e controladores, $f(x, y, \mu)$, como as equações algébricas referentes ao estator e à rede, $g(x, y, \mu)$, onde μ é o parâmetro de carregamento do sistema. Ressalta-se ainda que, teoricamente, para fins de determinação da BSN, apenas as equações algébricas seriam necessárias, o que as torna, por alguns autores, classificadas como *bifurcações estáticas* (CUTSEM; VOURNAS, 2003). Entretanto, como este trabalho tem como objetivo também a determinação da margem de carregamento devido a BH, faz-se necessário que as equações dinâmicas do sistema estejam presentes de forma a podermos visualizar o comportamento dinâmico do sistema. Tal representação mais completa do sistema só contribui para uma precisão maior na determinação da BSN (AJJARAPU, 1992). As equações de equilíbrio do sistema (5.1)

são descritas conforme 5.2:

$$\begin{cases} f(x, y, \mu) = 0 \\ g(x, y, \mu) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Com relação às variáveis do SEP envolvidas no sistema descrito por (5.2), observa-se que este sistema foi modelado baseado na dependência de um parâmetro, sendo este, para SEP, o carregamento. Os modelos de máquinas e controladores do SEP utilizados na representação do sistema estão descritos na Seção B.

Outro conjunto de equações a ser avaliado refere-se ao que descreve a ocorrência das bifurcações, sejam elas Hopf ou Sela-Nó, a serem analisadas no sistema. As condições para existência das mesmas em sistemas foi apresentada nas seções 2.1.3 e 2.1.1, respectivamente. Descrevendo a teoria qualitativamente, deve-se considerar que, para a ocorrência de uma bifurcação Sela-Nó, é necessário que haja um autovalor nulo na gama de autovalores do sistema (5.2) linearizado. Já para a ocorrência de uma bifurcação de Hopf, deve-se considerar sua ocorrência, para fins de cálculos matemáticos, quando o sistema (5.2) linearizado, possuir um par único de autovalores puramente imaginários. Considere então o sistema (5.2) linearizado:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Seja então a equação que descreve o cálculo de autovalores, λ , de um sistema:

$$J \cdot u = \lambda \cdot u \quad (5.4)$$

onde u denota um autovetor à direita. Considera-se $\lambda = r + j\omega_0$, e, portanto, seu autovetor também é complexo, $u = \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix}$, onde v_R , v_I , ω_R e ω_I são vetores reais, e estão assim separados para ressaltar os respectivos vetores referentes à parte diferencial, v , e à parte algébrica, ω .

Para o caso da BH, a parte real do autovalor no ponto de bifurcação é nula, ou seja $r = 0$, e ainda, o autovalor no ponto de bifurcação multiplica apenas a parte do autovetor u associada à parte dinâmica do sistema:

$$\begin{cases} J \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + \omega_0 \begin{bmatrix} v_I \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ J \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} - \omega_0 \begin{bmatrix} v_R \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Ainda, na condição de carregamento onde ocorre uma BSN, o autovalor é nulo ($r + j\omega_0 = 0$). Realizando-se as respectivas substituições:

$$\begin{cases} J \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} = 0 \\ J \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Desta forma, as restrições algébricas que representam o aparecimento de BH e BSN, são respectivamente dadas por (5.5) e (5.6).

O terceiro conjunto de equações objetiva igualar a quantidade de variáveis do sistema em relação à quantidade de equações da formulação proposta. Assim, para determinar a BH tem-se $3n + 3m$ equações e $3n + 3m + 2$ variáveis, e para a determinar a BSN tem-se $3n + 3m$ equações e $3n + 3m + 1$ variáveis, como descrito nos capítulos anteriores. Visando suprir a falta de equações linearmente independentes nestes sistemas para a utilização de variáveis adicionais é proposta a utilização de duas equações, a saber: a equação de normalização dos autovetores e a equação de perpendicularidade entre a parte real e imaginária dos autovetores. Estas foram explicadas e descritas nos Capítulos 3 e 4, e estão apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_I^T & \omega_I^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} &= 1 \\ \begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Desta forma, obtém-se dois conjuntos de equações para solução do problema de determinação de margem de carregamento devido a BH, (5.8), e devido a BSN, (5.9):

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x, y, \mu) & = 0 \\ g(x, y, \mu) & = 0 \\ \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ 0 \end{bmatrix} & = 0 \\ \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} - \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ 0 \end{bmatrix} & = 0 \\ \begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_I^T & \omega_I^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} & = 1 \\ \begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} & = 0 \end{array} \right. \quad (5.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y, \mu) = 0 \\ g(x, y, \mu) = 0 \\ \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} = 0 \end{array} \right. \quad (5.9)$$

5.2 Avaliação Estrutural das Matrizes Jacobianas

Os sistemas (5.8) e (5.9), quando linearizados, possuem respectivamente as seguintes matrizes Jacobianas:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} A & B & F_\mu & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ C & D & G_\mu & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \left(\begin{array}{c} A_x \cdot v_R + \\ B_x \cdot \omega_R \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} A_y \cdot v_R + \\ B_y \cdot \omega_R \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} A_\mu \cdot v_R + \\ B_\mu \cdot \omega_R \end{array} \right) & A & \emptyset & B & \emptyset \\ \left(\begin{array}{c} C_x \cdot v_R + \\ D_x \cdot \omega_R \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} C_y \cdot v_R + \\ D_y \cdot \omega_R \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} C_\mu \cdot v_R + \\ D_\mu \cdot \omega_R \end{array} \right) & C & \emptyset & D & \emptyset \\ \left(\begin{array}{c} A_x \cdot v_I + \\ B_x \cdot \omega_I \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} A_y \cdot v_I + \\ B_y \cdot \omega_I \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} A_\mu \cdot v_I + \\ B_\mu \cdot \omega_I \end{array} \right) & \emptyset & A & \emptyset & B \\ \left(\begin{array}{c} C_x \cdot v_I + \\ D_x \cdot \omega_I \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} C_y \cdot v_I + \\ D_y \cdot \omega_I \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} C_\mu \cdot v_I + \\ D_\mu \cdot \omega_I \end{array} \right) & \emptyset & C & \emptyset & D \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & v_I^T & v_R^T & \omega_I^T & \omega_R^T \end{array} \right] \quad (5.10)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} A & B & F_\mu & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ C & D & G_\mu & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \left(\begin{array}{c} A_x \cdot v_R + \\ B_x \cdot \omega_R \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} A_y \cdot v_R + \\ B_y \cdot \omega_R \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} A_\mu \cdot v_R + \\ B_\mu \cdot \omega_R \end{array} \right) & A & \omega_0 \cdot I & B & \emptyset & v_I \\ \left(\begin{array}{c} C_x \cdot v_R + \\ D_x \cdot \omega_R \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} C_y \cdot v_R + \\ D_y \cdot \omega_R \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} C_\mu \cdot v_R + \\ D_\mu \cdot \omega_R \end{array} \right) & C & \emptyset & D & \emptyset & \emptyset \\ \left(\begin{array}{c} A_x \cdot v_I + \\ B_x \cdot \omega_I \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} A_y \cdot v_I + \\ B_y \cdot \omega_I \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} A_\mu \cdot v_I + \\ B_\mu \cdot \omega_I \end{array} \right) & -\omega_0 \cdot I & A & \emptyset & B & -v_R \\ \left(\begin{array}{c} C_x \cdot v_I + \\ D_x \cdot \omega_I \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} C_y \cdot v_I + \\ D_y \cdot \omega_I \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} C_\mu \cdot v_I + \\ D_\mu \cdot \omega_I \end{array} \right) & \emptyset & C & \emptyset & D & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 2v_R^T & 2v_I^T & 2\omega_R^T & 2\omega_I^T & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & v_I^T & v_R^T & \omega_I^T & \omega_R^T & \emptyset \end{array} \right] \quad (5.11)$$

Através de (5.10) e (5.11), pode-se observar que estas possuem estruturas de equações similares e que podem ser expressas em formatos de blocos. Os blocos comuns estão destacados através de cores iguais. Esta separação da estrutura da matriz em blocos, devido a similaridade entre as Jacobianas, apresenta-se importante para o desenvolvimento do algoritmo proposto, uma vez que, através destes blocos, partes destas matrizes são atualizadas separadamente ao longo do processo, fornecendo para matriz final um condicionamento apropriado para sua convergência na medida em que a solução aproxima-se de um erro mínimo. Ao mesmo tempo, se evitam cálculos repetidos para os dois equacionamentos. É importante ressaltar este fato, uma vez que a metodologia para encontrar o ponto de BH, também engloba as condições necessárias para a convergência para uma BSN, pois, para isto, basta que o valor da frequência do autovalor imaginário, no

ponto de bifurcação seja igual a zero, $\omega_0 = 0$. Devido a isto, verifica-se que, o caminho da solução da metodologia proposta, através da combinação de ambos os conjuntos de equações, perseguem o mesmo caminho, evitando uma possível instabilidade numérica ou ainda uma divergência.

O condicionamento numérico destas matrizes próximas do ponto do bifurcação, isoladamente, dificulta a convergência das respectivas metodologias, necessitando que as mesmas possuam uma melhor condição inicial, ou seja, um ponto de operação mais próximo do ponto de bifurcação. Buscando-se tornar robusto o conjunto de equações a esta instabilidade numérica, e ainda, de forma a acelerar o tempo de processamento, durante o processo de combinação destas metodologias, serão utilizados concomitantemente, durante o cálculo, os blocos supracitados, ou até mesmo o congelamento dos mesmos.

O bloco cinza corresponde às equações de equilíbrio em conjunto com as derivadas destas funções em relação às variáveis do sistema. Este bloco está presente em ambas as estruturas e corresponde a um dos blocos mais densos em termos numéricos desta estrutura esparsa que é a matriz Jacobiana destas equações. Outros blocos pertencentes a (5.10) e (5.11) correspondem ao bloco rosa e o bloco amarelo. Estes serão tratados da mesma forma em relação ao tratamento numérico que o bloco cinza. Por fim, os blocos verde e azul, são os blocos correspondentes às restrições de suas respectivas bifurcações e serão estimados separadamente ao longo do processo.

Observa-se ainda a grande esparsidade envolvida nestes blocos de matrizes, o que implica na necessidade de um tratamento matemático específico e eficiente, uma vez que, o não tratamento desta esparsidade implica, muitas vezes em instabilidades numéricas, além de altos tempos de processamento necessários para a obtenção de uma resposta. O tratamento utilizado para o processamento de todos os cálculos das matrizes esparsas envolvidas foi o RRC(U), descrito em (PISSANETZKY, 2006). Este tratamento possibilitou um aumento de velocidade do cálculo das matrizes que é proporcional ao grau de esparsidade das mesmas. Ainda, é importante ressaltar que esta esparsidade também depende da topologia dos sistemas adotados para teste, variando em grau conforme o número de barras, conexão de suas linhas, inserção de geradores, entre outros.

De forma a exemplificar a estrutura esparsa envolvida no tratamento das matrizes Jacobianas supracitadas, as Figuras 5.1, 5.2 e 5.3 apresentam o padrão da dispersão dos elementos da matriz (5.11) para os sistemas de duas áreas, IEEE14 barras e New England, respectivamente. Ressalta-se que n_z refere-se ao número de elementos da matriz analisada. Observa-se ainda que a dispersão é coerente

Normalmente avaliado através da relação entre o maior e o menor valor singular da matriz. Matrizes esparsas são matrizes onde a imensa maioria das entradas são nulas.

para os sistemas, uma vez que a estrutura da metodologia é a mesma, e ainda, que os blocos retangulares correspondem à estrutura topológica da rede SEP. Pode-se acrescentar que (5.11), para os diversos sistemas, possui, como padrão, um condicionamento melhor do que o observado pela matriz (5.10). Este fato pode ser estudado de forma análoga à análise do condicionamento do fluxo continuado descrito em (V.AJJARAPU; C.CHRISTY, 1991).

Figura 5.1: Dispersão dos elementos da matriz Jacobiana (5.11) para o sistema de duas áreas na primeira iteração.

5.3 Algoritmo Proposto

Esta seção descreve o o algoritmo proposto nesta tese para a determinação da margem de carregamento de um SEP devido a bifurcações, assim como o processo de cálculo envolvido a cada iteração da matriz Jacobiana no cálculo de Newton-Raphson objetivando a convergência do sistema de equações dado po (5.10) e (5.11).

A Figura 5.4 ilustra o algoritmo da metodologia. Este inicia-se com a entrada de dados no sistema, estes dados envolvem os dados estáticos, que são as informações de barras e conexões do SEP e os dados dinâmicos envolvendo informações referentes à modelagem dos geradores e controladores associados aos mesmos. Nesta etapa, o ponto de operação do sistema representa as condições do caso base com o carregamento do sistema, μ , igual a 1. É a partir destes dados que se determina a ordem de grandeza do sistema a ser avaliado dependendo da ordem dos modelos dinâmicos associados ao SEP.

Figura 5.2: Dispersão dos elementos da matriz Jacobiana (5.11) para o sistema IEEE 14 barras na primeira iteração.

Figura 5.3: Dispersão dos elementos da matriz Jacobiana (5.11) para o sistema New England na primeira iteração.

A partir dos dados estáticos de entrada, é calculado um fluxo de potência, com a finalidade da obtenção de um equilíbrio representativo do sistema. De posse desta informação, segue o cálculo das condições iniciais das variáveis das equações dinâmicas e algébricas do estator (ex. I_{d0} , I_{q0} , E_{fd0} , entre outros). Este passo é realizado somente se os dados de entrada, fornecidos ao programa, corresponderem a um ponto de operação fictício, como um *flat start*, onde a tensão

Figura 5.4: Algoritmo completo para a determinação da margem de estabilidade de um sistema de potência.

de todas as barras é configurada como unitária e os ângulos considerados nulos, caso contrário o programa inicia-se com o cálculo das condições iniciais. Em seguida, é realizado o cálculo das condições iniciais das equações dinâmicas conforme apresentado em (SAUER; PAI, 1998). Para a condição inicial das variáveis que representam os autovetores associados ao autovalor no ponto de bifurcação, utilizam-se as mesmas considerações dos Capítulos 3 e 4.

Inicia-se então a formulação do método de Newton-Raphson, uma vez que, diferentemente da metodologia de fluxo continuado onde o crescimento de carga é realizado concomitantemente seguido de diversos fluxos de potência, esta metodologia proposta realiza o cálculo da margem de carregamento de forma a utilizar um conjunto de equações que já engloba as considerações suficientes para encontrar o ponto de máximo carregamento, sendo necessária sua solução deste conjunto apenas uma vez. Para esta etapa deve-se considerar as matrizes Jacobianas apresentadas em (5.10) e (5.11), pois objetiva-se encontrar a margem de carregamento seja devido a BSN ou a BH.

Cada iteração do método de Newton, na metodologia proposta, é composta de duas partes, que serão descritas a seguir e estão ilustradas na Figura 5.5. A iteração 1 inicia-se com a formulação de (5.11), ou seja, na primeira parte da primeira iteração, a matriz a ser avaliada no cálculo refere-se às variáveis referentes à BH, denominadas na Figura 5.5 de ΔX_{1a} e ω_{01} . Após o cálculo destas variáveis, inicia-se a parte 2 da primeira iteração. Os blocos cinza, rosa e amarelo

A suposição que v_R e v_I possuem a mesma magnitude, sendo v_I considerado com sinal negativo alternado entre valores conforme um complexo conjugado e ω_I igual a zero.

de (5.11) são mantidos constantes e utilizados para calcular (5.10), sendo que o restante dos elementos desta matriz são calculados a partir de ΔX_{1a} , que são as variáveis resultantes da primeira parte da iteração. Avalia-se então a matriz formada conforme (5.10) e encontram-se as variáveis do sistema para este conjunto de equações, identificadas na Figura 5.5 por ΔX_{1b} .

Como resultado da primeira iteração, obtém-se o conjunto de variáveis ΔX_{1b} e ω_{01} . A partir destas inicia-se a segunda iteração. Novamente, na primeira parte da segunda iteração, a matriz (5.11) é calculada com o resultado da primeira iteração e um novo conjunto de variáveis é fornecido, ΔX_{2a} e ω_{02} . Os blocos cinza, rosa e amarelo são mais uma vez mantidos constantes e os demais elementos são calculados utilizando-se ΔX_{2a} para calcular (5.10). Ressalta-se ainda que, uma vez que em um SEP existem limitações de reativos, tape discreto e controle discreto de tensão via elementos *shunt*, entre cada iteração, quando os limites dos geradores inseridos como dados de entrada são atingidos, sua respectiva barra possui sua modelagem alterada nas equações de barra *PV* para barra *PQ*, e o reativo é fixado no limite. Se, na iteração seguinte o valor da tensão voltar para dentro da faixa especificada, essa modelagem retorna para a representação *PV*. O número máximo de alterações entre modelos devido ao alcance de limites pode ser definido pelo usuário. Ainda, tapes discretos e controles discretos de tensão via elementos *shunt* são considerados, na implementação, como contínuos.

Como resultado da segunda parte da segunda iteração obtém-se ΔX_{2b} . E assim, o método de Newton segue até que este obtenha convergência. A convergência é atingida quando o resultado de quaisquer uma das partes da iteração subtraído pela mesma parte da iteração anterior for menor do que um erro especificado. Ou seja, obtém-se o o valor do máximo carregamento e do ponto de bifurcação quando $X_{2a} - X_{1a} < \epsilon$ ou quando $X_{2b} - X_{1b} < \epsilon$. A primeira condição implica que o método de Newton obteve convergência para um ponto de bifurcação Sela-Nó e a segunda condição atendida implica em um ponto de bifurcação de Hopf. Quando a metodologia encontra convergência, obtém-se então o valor de máximo carregamento para o sistema devido a bifurcações. Caso o algoritmo não possua convergência, isto pode indicar um mal condicionamento da estrutura do sistema, o que implica em uma condição de singularidade na Jacobiana. Recomenda-se então que seja realizada mais uma vez o cálculo das condições iniciais do sistema, através de um tratamento, para que estas sejam inseridas novamente como entrada ao programa. Outra ação que pode ser realizada, caso não haja convergência da metodologia, é o cálculo prévio das condições de equilíbrio do sistema para estes serem inseridos como condição inicial, uma vez que, neste caso, o sistema estaria representado em um ponto de operação mais próximo da solução final, melhorando o condicionamento da matriz a ser avaliada. O algo-

ritmo deve necessariamente fornecer um resultado, uma vez que o ponto de BSN é uma condição encontrada em todos os SEP, coincidindo, na maioria das vezes, com a máxima transferência de potência.

Figura 5.5: Processo iterativo para a solução da metodologia proposta.

5.4 Programa Desenvolvido

Para se fazer uso da metodologia proposta, foi criado um aplicativo computacional, contendo uma interface amigável para sua utilização. Este contempla a inserção de dados de entrada para um SEP qualquer, informações sobre os sistemas utilizados como estudo de caso (duas áreas, IEEE 14 barras, Sul/SE 65 barras e SIN modificado) e ainda fornece os resultados calculados para o usuário de forma que sejam identificados o número de iterações da metodologia, o máximo carregamento do sistema, o tempo de processamento e a indicação do critério de parada, seja pelo aparecimento de bifurcações Sela-Nó ou Hopf.

Todas as bibliotecas de cálculo foram implementadas utilizando o código de interpretação do MATLAB (MATLAB, 2002), que, através do comando *mbuild*

compila os arquivos e funções programadas em um executável cujo código refere-se à linguagem C. Utilizando este executável para a realização dos cálculos, uma implementação para interfaciamento foi realizada com o objetivo de facilitar a utilização do programa. Este desenvolvimento foi realizado através de bibliotecas gráficas referentes à linguagem Java (TECHNOLOGY, 2005). As Figuras 5.6, 5.7 e 5.8 ilustram o aplicativo desenvolvido indicando o programa na entrada de dados, informações sobre sistemas de estudo de caso e resultados, respectivamente.

Observa-se, pela Figura 5.6, que a inserção de dados para o programa pode ser realizada tanto de forma manual, através das abas "*Dados da LT e Geradores*", "*Dados das Barras*", como através do fornecimento de um arquivo de formato livre, contendo todos os dados para o sistema, possuindo a extensão *.txt. O exemplo do cartão de entrada, 39B.txt, pode ser visualizado no Anexo A. Ainda, o usuário tem a opção de fornecer a potência aparente da base do sistema (MVA), escolher o erro utilizado para a convergência da metodologia, o número máximo de iterações e os limites de tensão para as barras. A Figura 5.7 ilustra o aplicativo fornecendo informações sobre o diagrama unifilar de cada sistema, suas áreas e sentidos de fluxo para o caso base. No exemplo, o diagrama apresentado refere-se ao sistema New England (IEEE 39 barras).

Pode-se verificar também, conforme apresentado na Figura 5.8, o resultado da análise da margem de estabilidade para o sistema New England, a partir de uma dada condição inicial. Conforme apresentado, o programa fornece o sistema ao qual está realizando a análise, a margem de carregamento do sistema (em porcentagem), o número de iterações realizadas pela metodologia, e, por fim, o tempo de processamento envolvido ao longo da análise. Ainda, as figuras apresentam outras abas que correspondem a análises auxiliares do programa como, por exemplo, o cálculo de um fluxo de potência e uma análise de contingências. Através da análise de contingências, o programa fornece um ordenamento crescente de severidade, com relação às suas respectivas margem de carregamento, seja devido a BSN ou devido a BH, de uma série de casos onde cada caso refere-se à retirada de uma linha da topologia do sistema como contingência (perda simples), ou seja, o critério $(n - 1)$. Ainda, através do menu *File* o usuário encontra a possibilidade de fechar o programa com a opção *Exit*, e, através do menu *Help*, pode-se verificar a versão do programa que está sendo utilizado.

The image shows a screenshot of a software application window titled "Margem de Estabilidade devido a Bifurcações". The window has a menu bar with "File" and "Help". Below the menu bar is a tabbed interface with the following tabs: "Dados Gerais", "Dados da LT e Geradores", "Dados das Barras", "Sistemas", "Cálculo do Fluxo", "Margem de Estabilidade", and "Análise de Contingência". The "Dados Gerais" tab is currently selected. The main area of the window contains several input fields and a button:

- Número de Barras: 39
- Base do Sistema: 100
- Erro: 0.001
- Iterações: 30
- V_{mín} [p.u.]: 0.8
- V_{max}[p.u.]: 1.1
- Inserir Arquivo de Dados: C:\Teste\39B.txt
- Localizar button

Figura 5.6: Aplicativo Computacional - Inserção de Dados.

Figura 5.7: Aplicativo Computacional - Diagrama dos Sistemas.

Figura 5.8: Aplicativo Computacional - Análise da Margem de Estabilidade.

Resultados Numéricos

Este capítulo descreve os testes realizados utilizando-se a metodologia apresentada no Capítulo 5, referente à determinação da margem de carregamento de um SEP devido a bifurcações. Os testes serão apresentados em seções e são separados por sistema de estudo. Ainda, a metodologia proposta é comparada à metodologia de fluxo continuado, utilizada na ferramenta Organon (JARDIM et al., 1998). Este fluxo continuado não contempla o aparecimento de BH, e, portanto, forneceu resultados diferentes de máximo carregamento de certos casos estudados (SOUZA; CAÑIZARES; QUINTANA, 1997). Uma comparação sobre o número de iterações das metodologias e ainda do tempo de processamento envolvido durante o cálculo também é apresentado.

O método de Newton, utilizado na forma descrita no Capítulo 5, recebeu como configuração de critério de parada um erro absoluto igual a 0.01 p.u., sendo este avaliado através da diferença entre os valores das variáveis calculadas de uma iteração subtraída do valor da iteração anterior. Este mesmo critério foi adotado para a metodologia comparativa utilizada.

Os sistemas utilizados para estudo são o sistema de duas áreas, o sistema IEEE 14 barras, o sistema New England, o sistema equivalente Sul /Sudeste brasileiro e o SIN modificado. Todos os testes foram realizados em um computador que possui processador Intel Core(TM)2 Duo de 3.00GHz e 4GB de memória RAM. Deve-se ainda salientar que a metodologia proposta possui um tratamento de cálculo que considera a esparsidade do sistema, e este é descrito em (PISSA-NETZKY, 2006). Este tratamento é importante ao longo do processo devido ao grande grau de esparsidade das matrizes em estudo, conforme apresentado nos capítulos anteriores e, desta forma, absolutamente necessário para garantir a eficiência da metodologia devido à ordem das matrizes Jacobianas avaliadas para cada sistema.

6.1 Sistema de Duas Áreas

Os dados do sistema de duas áreas utilizado nos capítulos anteriores, foram modificados nesta tese para a realização dos testes, sendo que as modificações podem ser encontradas no Anexo B, ao passo que o sistema completo está descrito em (KUNDUR, 1994). A Tabela 6.1 apresenta os resultados obtidos tanto através da metodologia proposta como através da ferramenta Organon e da metodologia clássica. Segundo a literatura, a metodologia clássica refere-se ao cálculo sucessivo de autovalores na medida em que é acrescentada carga no sistema. Estas duas comparações são necessárias de forma a verificar a margem de carregamento calculada pela metodologia proposta, uma vez que o Organon não fornece esta margem devido a BH, somente devido a BSN.

Observa-se que a metodologia proposta obteve convergência para um ponto de BH, fato este indicado pelo critério de parada da metodologia, conforme apresentado no Capítulo 5, ou seja, $X_{ia} - X_{(i-1)a} < \epsilon$. O número de iterações realizado pela metodologia foi igual a 3, considerando o fato de que suas iterações não são comparativas às iterações do Organon, visto que este último considera como iteração um incremento de carga e, a cada incremento, é calculado um novo fluxo de potência, que realiza 6 iterações em média. É importante ressaltar que, para este estudo de caso, a margem de carregamento encontrada devido a BH é menor que a margem de máxima transferência de potência (BSN), sendo que, desta forma, a estimativa da BSN como margem de estabilidade, está insegura, pois não leva em consideração o aparecimento de oscilações no sistema.

Outro ponto a ser avaliado refere-se ao tempo de processamento envolvido nestas metodologias. A metodologia proposta apresentou-se 3 vezes mais eficiente do que a metodologia de fluxo continuado e 9 vezes mais rápida do que a metodologia clássica. O tempo computacional destas metodologias pode ser diretamente comparado, uma vez que a avaliação está sendo feita em nível de processamento de máquina, e não a nível de execução de programa computacional.

Tabela 6.1: Comparação das metodologias para o sistema de duas áreas.

Ferramenta	Bifurcação	Máximo Carregamento [%]	Nº iterações	Nº de sub-Iterações	Tempo total [s]
Metodologia desenvolvida	BH	18.10	3	-	0.100
M. Clássica	BH	18.11	8	-	0.960
Organon	BSN	25.30	21	6	0.316

Este sistema foi modificado com a finalidade de adaptação dos modelos implementados pela metodologia proposta.

6.2 Sistema IEEE 14 Barras

O sistema IEEE 14 barras possui 4 geradores, 11 cargas, 15 linhas de transmissão e 5 transformadores. Seus dados e seu diagrama unifilar estão apresentados no Anexo B. Este sistema foi utilizado para a avaliação de sua margem de carregamento através das três metodologias descritas anteriormente. Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 6.2.

Primeiramente, pode-se observar que este sistema possuiu convergência na metodologia proposta para um ponto de BSN, e não para um ponto de BH como o sistema de duas áreas apresentado na seção anterior. Este fato foi definido através do critério de parada da metodologia proposta que utilizou $X_{ib} - X_{(i-1)b} < \epsilon$. Outro ponto importante, foi o fato de que esta convergência foi obtida sem o pré-condicionamento das condições iniciais, visto que a matriz Jacobiana do sistema durante as iterações apresentou-se bem condicionada. Sendo assim, recursos para aproximar a condição inicial do ponto de bifurcação, como por exemplo, a homotopia, não foram necessários para a avaliação destes resultados.

Desta forma, assim como a metodologia clássica de cálculo de autovalores e a ferramenta Organon, a metodologia proposta encontrou o mesmo valor para a margem de carregamento, fato este que verifica seu resultado. Observa-se que o fluxo continuado precisou de 35 incrementos de carga para chegar ao ponto de máximo carregamento, sendo que cada incremento utilizou em média 7 iterações de Newton em seu cálculo, o que torna a metodologia de fluxo continuado lenta e ineficiente quanto comparada à metodologia proposta.

O tempo de processamento foi reduzido em aproximadamente 2.75 vezes em comparação com a metodologia de fluxo continuado, e 25 vezes em comparação com a metodologia de cálculo de autovalores. Este fato não só engloba o fato deste sistema de equações englobar as condições de máximo carregamento e calculá-las diretamente, como também o fato deste sistema apresentar uma matriz de avaliação do sistema bastante esparsa.

Tabela 6.2: Comparação das metodologias para o sistema IEEE 14 barras.

Ferramenta	Bifurcação	Máximo Carregamento [%]	Nº iterações	Nº de sub-Iterações	Tempo total [s]
Metodologia desenvolvida	BSN	33.38	4	-	0.140
M. Clássica	BSN	33.40	30	-	3.600
Organon	BSN	33.39	35	7	0.386

6.3 Sistema New England

Assim como as metodologias dos capítulos anteriores, o sistema de 39 barras de New England também foi avaliado para determinar sua máxima margem de carregamento utilizando a metodologia proposta. Este sistema possui 10 geradores, ou seja, possui assim um número maior de equações dinâmicas em relação aos sistemas estudados nas seções anteriores.

De acordo com a Tabela 6.3, onde os resultados estão apresentados, observa-se que o sistema obteve um máximo carregamento para a ocorrência de uma bifurcação de Hopf, fato que leva o sistema a possuir uma margem de estabilidade devido a BH e não devido a BSN. É relevante ressaltar que a margem de estabilidade encontrada é aproximadamente duas vezes menor do que a margem fornecida pela máxima transferência de potência. Isto significa que, caso a BH não fosse considerada na análise deste sistema, é possível que o mesmo apresentasse oscilações durante sua operação, fato este indesejável em SEP.

Avaliando o número de iterações, mais uma vez observa-se um número reduzido para a metodologia proposta, uma vez que esta refere-se a iterações do método de Newton e não a incrementos de carga conforme é considerado no cálculo de autovalores e na metodologia de fluxo continuado. Em média, o número de sub-iterações realizadas pela ferramenta Organon foi de aproximadamente 5 por iteração.

Para fazer a avaliação do tempo de processamento envolvido na metodologia, é possível observar a grande eficiência desta em comparação às metodologias utilizadas como comparação. Com relação a ferramenta Organon, a metodologia proposta reduziu o tempo de avaliação de segurança em duas vezes, aproximadamente. Já para a metodologia clássica de cálculo de autovalores, esta redução foi de 57 vezes. Este fato mais uma vez remete-se ao fato da metodologia proposta não realizar o cálculo de autovalores e nem solucionar as equações dinâmicas do SEP, mas sim incluir estas condições em um conjunto de equações para que sejam avaliadas de forma direta, aumentando a eficiência do algoritmo. Ainda, com relação à convergência, esta apresentou-se sem a necessidade de avaliação de um ponto mais próximo da bifurcação das condições iniciais do problema em questão, ou seja, não houve a necessidade do emprego da homotopia.

6.4 Sistema Equivalente Sul/Sudeste

O sistema avaliado nesta seção pode ser encontrado de forma detalhada em (ALVES, 2007), e seus dados estão resumidos no Anexo B. Este sistema foi testado para a determinação do seu máximo carregamento e a metodologia proposta con-

Tabela 6.3: Comparação das metodologias para o sistema New England.

Ferramenta	Bifurcação	Máximo Carregamento [%]	Nº iterações	Nº de sub-Iterações	Tempo total [s]
Metodologia desenvolvida	BH	69.40	4	-	0.231
M. Clássica	BH	69.40	33	-	13.20
Organon	BSN	122.02	39	5	0.455

vergiu para o aparecimento de um BH. Esta margem caracterizou-se mais conservadora em comparação com a margem calculada no fluxo continuado, uma vez que esta apresentou-se aproximadamente duas vezes menor. Ainda, ressalta-se que, da mesma forma que os sistemas anteriores, este sistema não foi estruturado de forma a buscar o aparecimento de uma BH.

Observa-se ainda, através da Tabela 6.4, que apesar deste sistema possuir um maior número de barras do que o sistema de New England, este possuiu uma convergência mais rápida do que a anterior. Este fato advém do processo de formação da matriz, onde, para esta topologia de sistema, a matriz Jacobiana apresentou um melhor condicionamento. Ainda, observou-se também que a margem de carregamento é menor, ou seja, o ponto de bifurcação se encontra mais próximo do ponto de operação referente ao caso base, fato este que aproxima o ponto de condição inicial do ponto de bifurcação e assim, melhora a convergência do processo.

Estes motivos também impactam no tempo de processamento envolvido para este sistema, uma vez que, apesar de um maior número de barras, este tempo de cálculo apresentou-se inferior para todas as metodologias, em comparação com o sistema New England. Ainda, através da Tabela 6.4, verifica-se que o tempo de processamento da metodologia proposta foi aproximadamente 3 vezes inferior do que a metodologia de fluxo continuado, e 83 vezes menor que a metodologia de cálculo sucessivo de autovalores do sistema. Ainda, a este cenário, soma-se uma estrutura esparsa de sistema que, apesar de possuir o mesmo padrão dos sistemas anteriores, também contribui para o melhoramento deste tempo de processamento. Ressalta-se, mais uma vez, que a convergência da metodologia proposta para este sistema não apresentou necessidade de nenhum tratamento anterior de homotopia.

6.5 Sistema Interligado Nacional Modificado

O último sistema avaliado através da metodologia proposta corresponde ao sistema interligado nacional modificado. Este sistema é identificado como modifi-

Tabela 6.4: Comparação das metodologias para o sistema equivalente Sul/Sudeste.

Ferramenta	Bifurcação	Máximo Carregamento [%]	Nº iterações	Nº de sub-Iterações	Tempo total [s]
Metodologia desenvolvida	BH	10.60	5	-	0.149
M. Clássica	BH	10.59	22	-	12.35
Organon	BSN	26.23	25	6	0.377

cado apenas pela alteração de seus dados dinâmicos, sendo que os seus dados de cargas e sua topologia foram preservados. Este sistema de estudo possui 72 áreas, 4570 barras, 297 geradores, 4179 linhas de transmissão e 1206 transformadores e seus dados específicos estão detalhados em (ONS, 2011b).

Considerou-se que todos os geradores podem ser modelados por modelos de 4ª ordem e que o único controle presente nestas máquinas é o regulador de tensão, que foi modelado como o ARV IEEE Tipo I, ou seja, um regulador de 3ª ordem, conforme descrito no Capítulo 4. O diagrama unifilar do mesmo, bem como os níveis de tensão de suas linhas de transmissão, para o horizonte de 2011, estão ilustrados na Figura 6.1.

Os resultados descritos nesta seção estão divididos em duas partes, sendo que a primeira refere-se à análise geral do sistema, conforme realizado para as outras metodologias. A segunda parte dos resultados refere-se à aplicabilidade adotada para a referida metodologia proposta no contexto de avaliação de contingências. Esta avaliação de uma lista de contingências pré-estabelecidas como principais pelos estudos de operação do ONS (ONS, 2011b), teve como finalidade realizar um ordenamento crescente destes casos baseados na severidade de seus eventos, determinando a margem de estabilidade do sistema em cada caso.

6.5.1 Avaliação da Margem de Carregamento

Assim como para os outros sistemas, os testes realizados nesta seção referem-se à determinação da margem de carregamento do SIN modificado. Os resultados desta análise para a metodologia proposta e para as metodologias comparativas estão apresentados na Tabela 6.5. Observa-se que a margem de carregamento encontrada para o sistema foi de aproximadamente 15% para as três metodologias, sendo esta margem encontrada devido ao aparecimento de um ponto de BSN no sistema. Este foi indicado na metodologia proposta através da condição de parada, citada nas seções anteriores, de $X_{ib} - X_{(i-1)b} < \epsilon$.

Verifica-se, ainda, que o número de iterações apresenta-se reduzido devido à proximidade do ponto de operação do caso base com o ponto de bifurcação en-

Figura 6.1: Diagrama Unifilar do SIN.

contrado e devido à grande esparsidade do sistema. Ainda, com relação ao tempo total de simulação, a metodologia proposta apresentou-se aproximadamente 2.5 vezes mais eficiente do que em relação à metodologia de fluxo continuado e 185 vezes mais rápida do que a metodologia de cálculo sucessivo de autovalores para um sistema.

Mais uma vez a metodologia proposta apresentou uma convergência direta sem a necessidade do tratamento de condições iniciais ou manipulações no sistema, o que indica que a metodologia proposta apresenta, em sua matriz de avaliação, um bom condicionamento numérico.

6.5.2 Análise de Contingências

Esta seção apresenta a aplicabilidade da metodologia proposta, para a avaliação da margem de segurança do sistema frente a uma lista de contingências. Essas

Tabela 6.5: Comparação das metodologias para o SIN modificado.

Ferramenta	Bifurcação	Máximo Carregamento [%]	Nº iterações	Nº de sub-Iterações	Tempo total [s]
Metodologia desenvolvida	BSN	15.01	5	-	3.378
M. Clássica	BSN	14.99	15	-	610.9
Organon	BSN	15.00	14	5	8.516

serão ordenadas de forma crescente em relação a sua margem de carregamento, e, desta forma, de acordo com sua severidade, ou seja, da mais crítica para a menos crítica. A lista possui 19 contingências, sendo que cada contingência refere-se à perda simples de uma linha de transmissão do sistema, cuja localidade encontra-se na região Sudeste, especificamente na área de Minas Gerais. A Figura 6.2 ilustra as linhas de transmissão desta área com a indicação destas contingências e a Tabela 6.6 descreve a lista de contingências a serem avaliadas nesta seção, visualizadas através da figura supracitada.

Tabela 6.6: Lista de Contingências.

Contingência	Barra de Origem	Barra de Destino
1	Bom Despacho	São Gonçalo do Pará
2	Bom Despacho	Ouro Preto
3	Bom Despacho	Jaguara - 500
4	Bom Despacho	Neves
5	Bom Despacho	São Gotardo
6	São Gotardo	Nova Ponte
7	São Gotardo	Emborcação
8	Água Vermelha	São Simão
9	São Simão	Itumbiara
10	Itumbiara - 500	Emborcação
11	Nova Ponte	Jaguara - 500
12	São Simão	Jaguara - 500
13	Paracatu	Luziânia
14	Jaguara - 345	Luis Carlos Barreto
15	Marimbondo	Porto Colômbia
16	Itumbiara - 345	Porto Colômbia
17	Porto Colômbia	Volta Grande
18	Luis Carlos Barreto	Volta Grande
19	Volta Grande	Jaguara - 345

A Tabela 6.7 apresenta a avaliação de cada contingência utilizando a metodologia proposta e sua comparação com a ferramenta Organon que utilizou-se do fluxo continuado para a determinação da margem de carregamento do sistema.

(*) Equipamentos operando desligados devido a superação de equipamentos

Figura 6.2: Localização das contingências na área de Minas Gerais.

Ressalta-se que o fluxo continuado apenas obtém o ponto de máximo carregamento e não considera bifurcações de Hopf. Desta forma, quando há o aparecimento da BH, uma contingência que tem uma margem de carregamento devido a BSN grande, possui uma margem de estabilidade menor do que a calculada. Este fato ocorre para as contingências 1, 4, 8, 9, 10 e 14. A Tabela 6.8 apresenta o ordenamento por ordem de severidade fornecido pela metodologia proposta e pelo Organon. Fica evidente que, avaliar um sistema apenas devido à ocorrência de BSN, pode fornecer uma margem de carregamento insegura em algumas situações. Caracterizou-se então a necessidade da inclusão da avaliação de BH durante o estudo de segurança de um sistema através de margens de estabilidade.

Outro ponto importante a ser observado refere-se ao tempo de processamento envolvido na análise de uma lista de contingências. A lista apresentada nesta seção foi avaliada em aproximadamente metade do tempo de processamento pela metodologia proposta em comparação ao Organon. Caso fosse considerada esta comparação em relação à metodologia clássica de cálculo de autovalores, este tempo seria da ordem de 3 horas. Mais uma vez fica caracterizada a contribuição para a determinação de margem de carregamento para SEP, evitando assim o cálculo de autovalores na consideração das equações dinâmicas do sistema.

Tabela 6.7: Comparação das metodologias para a lista de contingências.

Contingência	Metodologia Proposta			Organon		
	Bifurcação	Margem [%] de Carregam.	Tempo[s]	Bifurcação	Margem [%] de Carregam.	Tempo[s]
1	BH	3.200	2.91	BSN	5.800	7.48
2	BSN	6.029	1.01	BSN	6.030	2.70
3	BSN	6.380	1.50	BSN	6.370	4.29
4	BH	4.690	0.92	BSN	6.100	3.10
5	BSN	6.470	2.01	BSN	6.470	4.29
6	BSN	6.480	2.22	BSN	6.480	4.10
7	BSN	6.490	2.25	BSN	6.490	4.43
8	BH	2.110	0.91	BSN	6.620	3.90
9	BH	3.940	0.95	BSN	6.640	4.16
10	BH	3.950	0.99	BSN	6.630	4.21
11	BSN	6.589	2.35	BSN	6.590	5.22
12	BSN	6.620	1.95	BSN	6.620	4.30
13	BSN	6.390	1.99	BSN	6.390	4.20
14	BH	5.550	1.49	BSN	6.590	4.94
15	BSN	6.590	1.99	BSN	6.600	4.04
16	BSN	6.600	1.85	BSN	6.601	4.92
17	BSN	6.630	2.01	BSN	6.630	4.16
18	BSN	6.120	0.91	BSN	6.120	3.65
19	BSN	5.910	1.02	BSN	5.900	3.31
Tempo Total			31.30	81.4		

Tabela 6.8: Ordenamento da lista de contingências por severidade.

	Metodologia Proposta	Organon
Contingências	8	1
	1	19
	9	2
	10	4
	4	18
	14	3
	19	13
	2	5
	18	6
	3	7
	13	11
	5	14
	6	15
	7	16
	11	8
	15	12
	16	10
	12	17
	17	9

Através da Tabela 6.7, observa-se que, considerando o critério de BH para determinação da margem de carregamento, esta sofre redução nas contingências 1, 4, 8, 9, 10 e 14. Este fato reflete claramente no ordenamento por severidade da lista de contingências apresentada na Tabela 6.8. Observa-se ainda, através da Figura 6.2 que as contingências 8, 9, 10 e 14 estão localizadas em uma área com forte característica geradora, fato este que explicaria o aparecimento de oscilações no sistema quando da ocorrência das mesmas. Já as contingências 1 e 4, estão situadas em uma região de carga, ilustrada por uma região cinza na Figura 6.2. Investigando em mais detalhes observou-se que em Neves, que está situada próximo da contingência 4, encontra-se um compensador síncrono, fato este que, com a perda da linha Bom Despacho-Neves, infere o aparecimento de um modo inter-área no sistema, explicando a oscilação ocorrida. Em relação à contingência 1, Bom Despacho-São Gonçalo do Pará, observa-se a existência de um compensador estático na barra de Ouro Preto. Dessa forma, a atuação de um controle rápido associado ao compensador estático leva ao aparecimento de uma oscilação no sistema nessa região para a ocorrência da contingência 1.

Considerações Finais

A determinação da margem de estabilidade é uma prática corrente utilizada em estudos de avaliação de segurança em sistemas elétricos de potência. Esta é uma função que garante uma operação segura e confiável do sistema, e, sem a mesma, os sistemas elétricos estariam mais suscetíveis a blecautes. Atualmente, critérios para a determinação desta margem não levam em consideração a avaliação de possíveis oscilações causadas pelo leve incremento de carga no sistema analisado. Baseado neste cenário, estudos para a predição de uma margem de estabilidade devido à bifurcações de Hopf em SEP receberam atenção especial nos últimos anos, com o objetivo de aumentar a confiabilidade e a segurança dos SEPs. Apesar destes estudos, ainda havia a necessidade de uma metodologia que levasse em consideração não só a máxima transferência de potência, mas também estas possíveis oscilações devido ao aparecimento de uma BH.

Foi com este objetivo que esta tese foi concebida, visando o desenvolvimento de tal metodologia, considerando como principal contribuição as limitações envolvidas por diversas metodologias de determinação de margem de carregamento, em especial o tratamento das respectivas variáveis do SEP em estudo, de forma que estas não fossem erroneamente fixadas, impactando na convergência da metodologia. Ainda, foi levada em consideração a preocupação com o tempo de execução (processamento) da tarefa de avaliação de segurança em estudos de pré-operação, pois este fato é pontualmente considerado na literatura, e, nos estudos de pré-operação, onde o tempo para a realização dos estudos não é grande, esta variável é de suma importância.

No equacionamento desta metodologia, foram modelados apenas os geradores e os AVR's no SEP (em relação à parte dinâmica). O primeiro utiliza um modelo de quarta ordem e o segundo um modelo de AVR IEEE-Tipo I (SAUER; PAI, 1998), conforme descritos no Capítulo 4. Os sistemas avaliados nas realizações dos testes foram: Kundur encontrado em (KUNDUR, 1994, pág. 813), que possui 2 áreas; o sistema IEEE 14 barras; o sistema IEEE 39 barras, conhecido como New

England; e o sistema equivalente Sul/Sudeste de 65 barras, sendo estes descritos no Anexo B. Ainda, com o intuito de avaliar o desempenho da metodologia em um sistema de larga escala, foi utilizado para teste também, um sistema da ordem do sistema interligado nacional e de mesma topologia, considerando para este, ainda, uma avaliação de uma lista de contingências, de forma a verificar o ordenamento das mesmas com relação à sua severidade, através de sua margem de estabilidade determinada pela metodologia proposta.

O presente trabalho apresentou um equacionamento baseado nas ferramentas matemáticas apresentadas em MOORE; SPENCE (1993) e HOLODNIOK; KUBICEK (1984) que caracteriza o aparecimento de BH e no equacionamento de determinação de singularidade para a determinação da BSN, para a formulação da metodologia proposta. Estas equações, foram utilizadas de forma combinada, em uma formulação de um algoritmo envolvendo o método de Newton, que pode utilizar, se necessário, técnicas de esparsidade para melhorar o tempo computacional envolvido no processo. A formulação deste algoritmo é descrito em detalhes no Capítulo 5, e é feita uma analogia com a metodologia de fluxo desacoplado para melhor entendimento do processo.

Obtida esta formulação, o ponto de bifurcação, seja esta Hopf ou Sela-Nó, é encontrado no sistema para a determinação da margem de estabilidade devido ao mesmo. Observa-se que esta margem é determinada ao longo do processo juntamente com o tipo de bifurcação encontrada no sistema. Para verificar a precisão da metodologia proposta, e ainda sua eficiência, o resultado da mesma é comparado a resultados obtidos através de metodologias existentes na literatura, como, por exemplo, a metodologia de fluxo continuado para a determinação da BSN (através da ferramenta Organon, utilizada em estudos de operação no ONS) e a metodologia clássica de cálculo de autovalores para a determinação da BH. A metodologia proposta para a determinação desta margem inclui a preocupação com o tempo de execução do mesmo, incluindo em seu programa técnicas de esparsidade quando necessário, e também a preocupação com a convergência do algoritmo. A partir da análise destes resultados, algumas conclusões puderam ser observadas, e serão discutidas neste Capítulo.

Primeiramente, é importante observar que atualmente, na determinação da margem de estabilidade de um SEP, a BH não é considerada como critério de avaliação de segurança, e desta forma, a margem de estabilidade devido a BSN, ou seja, o "nariz da curva P-V", pode não coincidir com a margem de estabilidade do sistema, uma vez que esta não representa de forma real a verdadeira margem de carregamento do sistema, restringindo o impacto do incremento de carga no impacto dinâmico no SEP, ou seja, ignorando o aparecimento de oscilações, pois a avaliação realizada apenas leva em consideração as equações estáticas do

sistema, e desta forma, não pode retornar uma informação de BH.

Outro ponto importante, refere-se ao ganho incorporado por esta metodologia, visto que esta não necessita da realização do cálculo sucessivo de autovalores ou ainda da solução de um conjunto de equações diferenciais do sistema para a determinação do ponto de bifurcação a ser encontrado. Estes fatores estão relacionados principalmente ao ganho computacional oferecido pela metodologia proposta, definindo-a como adequada para estudos de operação. Ainda, esta metodologia, apesar de utilizar-se de um método iterativo como o método de Newton para a solução de suas equações, determina de forma direta o ponto de máximo carregamento, não sendo necessária a condução da carga até o seu máximo, como é realizado através do fluxo de potência continuado, por exemplo.

Com relação à convergência da metodologia proposta, observa-se que esta não apresentou dificuldades para a solução do algoritmo proposto para os sistemas de estudo de caso. Mais ainda, assim como é característica do método de Newton, este conjunto de equações possui uma melhor convergência (mais rápida) quando a condição inicial das variáveis envolvidas no processo encontram-se mais próximas da solução do mesmo. Desta forma, para que se possa obter uma maior eficiência da metodologia em estudo, pode-se realizar o tratamento das condições iniciais, seja por cálculos aproximados das condições dos autovalores, pelo cálculo prévio das condições de equilíbrio, ou ainda pela utilização de métodos homotópicos.

Por fim, os resultados da metodologia proposta foram comparados aos da ferramenta Organon para a determinação da margem de estabilidade dos sistemas, demonstrando a precisão do seu resultado quando foram encontradas a margem devido a BSN e comparados à metodologia clássica do cálculo de autovalores para demonstrar a precisão do resultado da margem devido à uma BH. A metodologia então, demonstrou-se com potencial para serem realizadas avaliações de segurança de um SEP frente a uma lista de contingência que possuem o critério de segurança $n - 1$. Observou-se, através desta análise a importância de uma metodologia mais contemplativa com relação a critérios para a determinação de um ordenamento de severidade para esta lista de contingências, visto que a margem utilizada atualmente apresenta-se insegura.

Ressalta-se ainda que as análises apresentadas nesta tese foram realizadas considerando um modelo específico de gerador e regulador de tensão e desconsiderando possíveis controladores existentes no sistema, visando não só a demonstração da funcionalidade da metodologia proposta, como também a simplificação do SEP, visando analisar a importância da inclusão do critério de oscilações na avaliação da margem de carregamento do sistema. Baseando-se no desempenho obtido pelo algoritmo proposto em relação aos algoritmos existentes, conclui-

se que a metodologia proposta apresenta-se promissora para a determinação da margem de estabilidade devido a bifurcações em SEP. O esforço computacional reduzido e a atuação eficiente da metodologia proposta mostraram-se necessários para um bom desempenho prático nesta área.

7.1 Trabalhos Futuros

Não obstante o desempenho satisfatório apresentado pela metodologia proposta, este trabalho não abrangeu toda a gama de modelos de sistemas de energia elétrica, na medida em que diversos aspectos referentes aos mesmos não foram incluídos devido ao escopo apresentado por esta tese, que possuía como finalidade uma análise contemplativa da metodologia em questão. Desta forma, para que este trabalho em um futuro próximo seja viabilizado para utilização em estudos de operação, algumas sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros nesta área são propostas.

Primeiramente apresenta-se a necessidade da adição de outros modelos de geradores, AVR e ainda a inclusão de outros tipos de controle que possam afetar o desempenho dinâmico do sistema frente a um incremento lento e sucessivo de carregamento. Com isto, seria interessante a realização de outra lista de testes para avaliar o desempenho e a convergência da metodologia proposta quando utilizado para avaliação de segurança de SEP devido à ocorrência de uma lista de contingências. Mais ainda, visto que a metodologia faz utilização do método de Newton para a solução de equações, surge também a necessidade de averiguação mais profunda do tratamento das condições iniciais da metodologia proposta, conforme realizado para as metodologias isoladas de determinação do ponto de BH e BSN, tratando, desta forma eventuais problemas de convergência.

Outro ponto a ser considerado refere-se à inclusão de critérios de convergência para o aparecimento de bifurcações induzidas por limites na metodologia proposta desenvolvida nesta tese, pois, apesar desta contemplar seu aparecimento, nenhuma restrição para a convergência na metodologia foi adicionada, fato este que requer a alteração da modelagem das equações, de forma que sejam inclusas parâmetros matemáticos auxiliares.

Por fim, sendo estes aspectos inseridos, propõe-se o desenvolvimento de um programa robusto e eficiente para que este sirva de auxílio na identificação da margem de carregamento de um SEP, proporcionando a inclusão de critérios não contemplados na avaliação de segurança do sistema interligado.

Referências

- ABED, E. H.; VARAIYA, P. P. Nonlinear Oscillations in Power Systems. **International Journal of Electrical Power and Energy Systems**, Amsterdam, v.6, n.1, p.37–43, Janeiro 1984.
- AJJARAPU, V. Nonlinear static and dynamical aspects of power systems: a bifurcation approach. **ISCAS '92. Proceedings. IEEE International Symposium on Circuits and Systems**, San Diego, CA, USA, v.6, p.3013–3016 vol.6, May 1992.
- PAI, M. A.; STANKOVIC, M. (Ed.). **Computational Techniques for Voltage Stability Assessment and Control**. Iowa, USA: Springer, 2006.
- AJJARAPU, V.; LEE, B. Bifurcation Theory and its Application to Nonlinear Dynamical Phenomena in an Electrical Power System. **IEEE Transactions on Power Systems**, Piscataway, NJ, v.7, n.1, p.424–431, Fevereiro 1992.
- SPRINGER-VERLAG (Ed.). **Numerical continuation methods**. London: Springer, 1990.
- ALLWRIGHT, D. J. Harmonic balance and the Hopf bifurcation. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge, v.82, p.453–467, Agosto 1977.
- ALVES, W. F. **Proposição de Sistemas Teste para a Análise Computacional de Sistemas de Potência**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) — Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro.
- AN, Y.; DUAN, X.; ZHANG, Q.; LI, Q.; ZHANG, D.; ZHENG, M. Extended Moore-Spence Equations Based Reduced Method for Computing Bifurcation Points of Power System Model. **Proceedings of the 17th World Congress**, Seoul, Korea, p.6–11, Julho 2008.

- ARROWSMITH, D. K.; PLACE, C. M. **Dynamical Systems**. Boca Raton: CRC PRes, 1990.
- BARROSO, L. C. **Cálculo Numérico**. São Paulo, SP: Harbra, 1987.
- BETANCOURT, R.; ALVARADO, F. L. Parallel Inversion of Sparse Matrices. **IEEE Transactions on Power Systems**, [S.l.], 1986.
- BONILLA, L. L.; TEITSWORTH, S. W. **Nonlinear Wave Methods for Charge Transport**. [S.l.]: Wiley-VCH, 2010.
- PEREIRA, A. (Ed.). **Análise Numérica**. São Paulo, SP: Thomson, 2001.
- CHEN, G.; HILL, D. J. (Ed.). **Bifurcation control: theory and applications**. Berlin: Springer, 2003.
- CHIANG, H.-D.; WANG, C.-S.; FLUECK, A. J. Look-ahead Voltage and Load Margin Contingency Selection Functions for Large-Scale Power Systems. **IEEE Transactions on Power Systems**, Piscataway, NJ, v.12, n.1, Fevereiro 1997.
- CHOW, J. H.; WU, F. F.; MOMOH, J. A. **Applied mathematics for restructured electric power systems: optimization, control, and computational intelligence**. New York, NY: Springer, 2003.
- CUTSEM, T. V.; VOURNAS, C. **Voltage Stability of Electric Power Systems**. Boston: Kluwer Academic, 2003.
- ELETRONBRAS. **http://www.eletronbras.com**. [S.l.: s.n.], 2011.
- FENG, Z.; AJJARAPU, V.; LONG, B. Identification of Voltage Collapse Through Direct Equilibrium Tracing. **IEEE Transactions on Power System**, Piscataway, NJ, v.15, n.1, 2000.
- GHASEMI, H.; CAÑIZARES, C.; REEVE, J. Prediction of instability Points Using System Identification. **Bulk Power System Dynamics and Control - VI**, Cortina d'Ampezzo, Italy, 2004.
- GOMES, S.; MARTINS, N.; PORTELA, C. Computing Small-Signal Stability Boundaries for Large-Scale Power Systems. **Power Engineering Review, IEEE**, Piscataway, NJ, v.22, n.12, p.61–61, Dezembro 2002.
- GUPTA, C.; VARMA, R.; SRIVASTAVA, S. A method to determine closest Hopf bifurcation in power systems considering exciter and load dynamics. **International Conference on Energy Management and Power Delivery**, Singapore, v.1, p.293–297, Março 1998.

- HASSARD, B. D.; KAZARINOFF, N. D.; WAN, Y. H. **Theory and Applications of Hopf Bifurcation**. Cambridge: Cambridge Press, 1981.
- HOLODNIOK, M.; KUBICEK, M. New Algorithms for the Evaluation of Complex Bifurcation Points in Ordinary Differential Equations. A Comparative Study. **Applied Mathematics and Computation**, New York, NY, v.15, p.261–274, 1984.
- HSU, I.; KAZARINOFF, N. An Applicable Bifurcation Formula and Instability of Small Periodic Solutions of the Field-Noyes Model. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Amsterdam, v.55, p.61–89, Julho 1976.
- HUANG, G.; ZHAO, L.; SONG, X. A New Bifurcation Analysis for Power System Dynamic Voltage Stability Studies. **Power Engineering Society Winter Meeting**, New York, NY, v.2, p.27–31, Janeiro 2002.
- JARDIM, J. L.; SILVA, A. P. A. da; SOUZA, A. C. Z. de; FALCÃO, D. M.; BORGES, C. L.; TARANTO, G. N. A New On-Line Dynamic Security Assessment System. **SEPOPE**, [S.l.], 1998.
- KUNDUR, P. **Power System Stability and Control**. New York, NY: McGraw-Hill, 1994.
- KUNDUR, P.; PASERBA, J.; AJJARAPU, V.; ANDERSON, G.; BOSE, A.; CANIZARES, C.; HATZIARGYRIOU, N.; HILL, D.; STANKOVIC, A.; TAYLOR, C. W.; CUTSEM, T. V.; VITTAL, V. **Definitions and classification of power system stability**. New Jersey: IEEE/CIGRE Joint Task force on Stability Terms, IEEE transactions on Power Systems, 2004. (19).
- KWATNY, H.; FISCHL, R.; NWANKPA, C. Local bifurcation in power systems: theory, computation, and application. **Proceedings of the IEEE**, Piscataway, NJ, v.83, n.11, p.1456–1483, Nov 1995.
- LEE, B.; AJJARAPU, V. Period Doubling Route to Chaos in an electric Power System. **IEEE Proceedings**, Piscataway, NJ, v.140, n.11, p.490–496, 1993.
- MAKAROV, Y.; HILL, D.; DONG, Z. Y. Computation of Bifurcation Boundaries for Power Systems: a new delta-plane method. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, Piscataway, NJ, v.47, n.4, p.536–544, Abril 2000.
- MAKAROV, Y. V.; HISKENS, I. A Continuation Method Approach to Finding the Closest Saddle Node Bifurcation Point. In: NSF/ECC WORKSHOP ON BULK POWER SYSTEM VOLTAGE PHENOMENA III, 1994. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1994.

- MARSDEN, J. E.; MCCracken, M. **Power System Voltage Stability**. New York, NY: Springer, 1976.
- MATLAB. **The Language of Technical Computing**. [S.l.]: The Mathworks, 2002.
- MEES, A. I.; CHUA, L. O. Harmonic balance and the Hopf bifurcation. **The Hopf Bifurcation Theorem and its Applications to Nonlinear Oscillations in Circuits and Systems**, Piscataway, NJ, v.26, n.1, p.235–254, Abril 1979.
- SPRINGER-VERLAG (Ed.). **Power System Modelling and Scripting**. London: Springer, 2010.
- MITHULANANTHAN, N.; CAÑIZARES, C. A.; REEVE, J. Índices para detectar Bifurcações de Hopf em Sistemas de Potência. **North American Power Symposium**, Waterloo, Outubro 2000.
- MOIOLA, J. L.; CHEN, G. **Hopf Bifurcation Analysis**. Hackensack, NJ: World Scientific, 1996.
- MOORE, G.; SPENCE, A. The Calculation of Turning Points of Nonlinear Equations. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, Philadelphia, PA, v.17, p.567–576, Agosto 1993.
- OLIVEIRA SALIM, K. C. de. **Método rápido para avaliação da margem de estabilidade de tensão devido a bifurcação de Hopf**. 2009. Mestrado em Engenharia Elétrica — Escola de Engenharia de São Carlos, São Paulo, SP.
- ONS. **Módulo 23 - Critérios para estudos**. [S.l.: s.n.], 2011.
- ONS, G. **Base de Dados para Cargas**. [S.l.]: ONS - Operador Nacional do Sistema Elétrico, 2011.
- PISSANETZKY, S. **Refactoring with Relations**. Texas: SciControls, 2006.
- ROGERS, G. **Power System Oscillations**. Boston: Springer, 1999.
- SALIM, K. C. O.; ALBERTO, L. F. C.; BRETAS, N. G. Fast Methodology for Voltage Stability Margin Evaluation due to Hopf Bifurcation. **IEEE General Meeting**, Minneapolis, 2010.
- SANTOS, C. J. R. dos. **Método Rápido para Avaliação da Margem de Estabilidade de Tensão Considerando os Limites de Potência Reativa dos Geradores**. 2008. Mestrado em Engenharia Elétrica — EESC - Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, SP.

- SAUER, P. W.; PAI, M. A. **Power System Dynamics and Stability**. New Jersey, NJ: Prentice Hall, 1998.
- SAVI, M. A. **Dinâmica Não-Linear e Caos**. Rio de Janeiro, RJ: E-papers, 2007.
- SOTOMAYOR, J. Generic bifurcations of dynamical systems. In: PEIXOTO, M. M. (Ed.). **Dinamical Systems**. New York, NY: Academic Press, 1973. p.549–560.
- SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro, RJ: Impa, 1979.
- SOUZA, A. C. Z. de; CAÑIZARES, C. A.; QUINTANA, V. H. New Techniques to Speed Up Voltage Collapse Computations Using Tangent Vectors. **IEEE Transactions on Power Systems**, [S.l.], 1997.
- STRANG, G. The Fundamental Theorem of Linear Algebra. **American Mathematical Monthly**, [S.l.], 1993.
- WELLESLEY-CAMBRIDGE (Ed.). **Introduction to Linear Algebra**. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 2003.
- TAN, C.; VARGHESE, M.; VARAIYA, P.; WU, F. Bifurcation and Chaos in Power Systems. In: VISWANADHAN, N. (Ed.). **Academy Proceedings in Engineering Sciences**. Bangalore, IN: Indian Academy of Sciences, 1993. p.761–786.
- TAYLOR, C. W. **Power System Voltage Stability**. New York, NY: McGraw-Hill, 1981.
- TECHNOLOGY, O. **Java Platform, Standard Edition, and the JDK**. [S.l.]: Oracle Technology Network, 2005.
- V.AJJARAPU; C.CHRISTY. The Continuation Power Flow: a tool for steady state voltage stability analisys. **IEEE PICA**, [S.l.], p.304–311, 1991.
- VENKATASUBRAMANIAN, V.; LI, Y. Analysis of 1996 Western American Electric Blackouts. **Bulk Power System Dynamics and Control - VI**, Cortina d'Ampezzo, Italy, p.22–27, Agosto 2004.
- WANG, Q.; LIU, M. An improved Continuation Power Flow Algorithm for Identifying Limit-induced Bifurcation Point of Static Voltage Stability. **APSCOM**, Hong Kong, 2006.
- ZHAO, J.; CHIANG, H.-D.; LI, H. Enhanced Look-ahead Margin Estimation for Voltage Security Assessment. **Power Engineering Society General Meeting**, Toronto, 2003.

Apêndices

Derivadas da Jacobiana do Sistema Diferencial-Algébrico

Neste apêndice serão apresentadas as derivadas utilizadas na montagem da matriz Jacobiana do método de Newton para a realização do cálculo do resultado do sistema diferencial-algébrico. As equações são apresentadas conforme a descrição da metodologia apresentada anteriormente no Capítulo 4.

Sendo o modelo do gerador de 4ª ordem e o do regulador de 3ª ordem, o número de equações diferenciais por máquina são 7. Dessa forma, seguem as derivadas.

A.1 Derivadas da matriz A

$$\begin{aligned} A_{\delta i} &= \emptyset; & A_{\omega i} &= \emptyset; & A_{E'qi} &= \emptyset; \\ A_{E'di} &= \emptyset; & A_{Efdi} &= \emptyset; & A_{Vi} &= \emptyset; & A_{\theta i} &= \emptyset \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$A_{Idi} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{M_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & \emptyset & & & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.2})$$

$$A_{Iqi} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{M_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & \emptyset & & & \emptyset \end{array} \right] \quad (A.3)$$

onde,

$i = 1, \dots, m;$

m é o número de geradores;

$\emptyset$ denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho $7m \times 7m$.

A.2 Derivadas da matriz B

$$\begin{aligned} B_{\delta i} &= \emptyset; & B_{\omega i} &= \emptyset; \\ B_{Efdi} &= \emptyset; & B_{Vi} &= \emptyset; & B_{\theta i} &= \emptyset \end{aligned} \quad (A.4)$$

$$B_{Iqi} = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 0 & & & \\ \frac{(X'_d - X'_q)}{M_i} & 0 & & & \\ 0 & 0 & \emptyset & & \\ 0 & 0 & & \emptyset & \emptyset \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \hline & \emptyset & \emptyset & & \end{array} \right] \quad (A.5)$$

$$B_{Idi} = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 0 & & & \\ 0 & \frac{(X'_d - X'_q)}{M_i} & & & \\ 0 & 0 & \emptyset & & \\ 0 & 0 & & \emptyset & \emptyset \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \hline & \emptyset & \emptyset & & \end{array} \right] \quad (A.6)$$

$$B_{E'di} = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 0 & & & \\ \frac{-1}{M_i} & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \emptyset & & \\ 0 & 0 & & \emptyset & \emptyset \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \hline & \emptyset & \emptyset & & \end{array} \right] \quad (\text{A.7})$$

$$B_{E'qi} = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 0 & & & \\ 0 & \frac{-1}{M_i} & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \emptyset & & \\ 0 & 0 & & \emptyset & \emptyset \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \hline & \emptyset & \emptyset & & \end{array} \right] \quad (\text{A.8})$$

onde,

$i = 1, \dots, m$;

m é o número de geradores;

$\emptyset$ denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho $7m \times 2(m + nbus)$;

$nbus$ denota o número de barras do sistema.

A.3 Derivadas da matriz C

$$\begin{aligned} C_{\omega i} &= \emptyset; & C_{E'di} &= \emptyset; \\ C_{E'qi} &= \emptyset; & C_{Efdi} &= \emptyset; \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$C_{\delta i} = \left[\begin{array}{cccccc|c|c|c} -V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset & \\ V_i \text{cos}(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset & \\ \hline & \emptyset & & & & & & \emptyset & \\ \hline -I_{di} V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) - I_{qi} V_i \text{cos}(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset & \\ -I_{di} V_i \text{cos}(\delta_i - \theta_i) + I_{qi} V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset & \\ \hline & \emptyset & & & & & & \emptyset & \\ \hline & \emptyset & & & & & & & \end{array} \right] \quad (\text{A.10})$$

$$C_{Idi} = \left[\begin{array}{cccccc|c} & \emptyset & & & & & \\ \hline V_i \cos(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset \\ -V_i \sin(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & \emptyset & & & & & & \emptyset \\ \hline & \emptyset & & & & & & \end{array} \right] \quad (\text{A.11})$$

$$C_{Iqi} = \left[\begin{array}{cccccc|c} & \emptyset & & & & & \\ \hline -V_i \sin(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset \\ -V_i \cos(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & \emptyset & & & & & & \emptyset \\ \hline & \emptyset & & & & & & \end{array} \right] \quad (\text{A.12})$$

$$C_{Vi} = \left[\begin{array}{cccccc|c} \cos(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset \\ \sin(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & \emptyset & & & & & & \emptyset \\ \hline I_{di} \cos(\delta_i - \theta_i) - I_{qi} \sin(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset \\ -I_{di} \sin(\delta_i - \theta_i) - I_{qi} \cos(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & \emptyset & & & & & & \emptyset \\ \hline & \emptyset & & & & & & \end{array} \right] \quad (\text{A.13})$$

$$C_{\theta i} = \left[\begin{array}{cccccc|c} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset \\ -V_i \cos(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & \emptyset & & & & & & \emptyset \\ \hline I_{di} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) + I_{qi} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset \\ I_{di} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) - I_{qi} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & \emptyset & & & & & & \emptyset \\ \hline & \emptyset & & & & & & \end{array} \right] \quad (\text{A.14})$$

onde,

$i = 1, \dots, m;$

m é o número de geradores;

$\emptyset$ denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho $2(m + nbus) \times 7m$;

$nbus$ denota o número de barras do sistema.

A.4 Derivadas da matriz D

As derivadas de D serão apresentadas através das derivadas das suas respectivas sub-matrizes de modo a facilitar sua visualização em detalhes.

A.4.1 Derivadas da matriz B_2

$$\begin{aligned} B_{2_{\delta i}} &= \emptyset; & B_{2_{\omega i}} &= \emptyset; & B_{2_{E'qi}} &= \emptyset; & B_{2_{E'di}} &= \emptyset; \\ B_{2_{lqi}} &= \emptyset; & B_{2_{ldi}} &= \emptyset; & B_{2_{Vi}} &= \emptyset; & B_{2_{\theta i}} &= \emptyset; & B_{2_{Efdi}} &= \emptyset. \end{aligned} \quad (A.15)$$

onde,

$i = 1, \dots, m$;

$\emptyset$ denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho $2m \times 2m$;

A.4.2 Derivadas da matriz B_3

$$\begin{aligned} B_{3_{\omega i}} &= \emptyset; & B_{3_{E'qi}} &= \emptyset; & B_{3_{E'di}} &= \emptyset; \\ B_{3_{lqi}} &= \emptyset; & B_{3_{ldi}} &= \emptyset; & B_{3_{Efdi}} &= \emptyset. \end{aligned} \quad (A.16)$$

$$B_{3_{\delta i}} = \left[\begin{array}{cc|c} -V_i \sin(\delta_i - \theta_i) & -\cos(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ -V_i \cos(\delta_i - \theta_i) & \sin(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (A.17)$$

$$B_{3_{Vi}} = \left[\begin{array}{cc|c} \cos(\delta_i - \theta_i) & 0 & \emptyset \\ -\sin(\delta_i - \theta_i) & 0 & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (A.18)$$

$$B_{3_{\theta i}} = \left[\begin{array}{cc|c} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) & \cos(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ V_i \cos(\delta_i - \theta_i) & -\sin(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (A.19)$$

onde,

$i = 1, \dots, m$;

$\emptyset$ denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho $2m \times 2m$;

A.4.3 Derivadas da matriz C_2

$$\begin{aligned} C_{2_{\omega i}} &= \emptyset; & C_{2_{E'qi}} &= \emptyset; & C_{2_{E'di}} &= \emptyset; \\ C_{2_{Iqi}} &= \emptyset; & C_{2_{Idi}} &= \emptyset; & C_{2_{Efdi}} &= \emptyset. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$C_{2_{\delta i}} = \left[\begin{array}{cc|c} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) & -V_i \sin(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ -V_i \sin(\delta_i - \theta_i) & -V_i \cos(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.21})$$

$$C_{2_{Vi}} = \left[\begin{array}{cc|c} \sin(\delta_i - \theta_i) & \cos(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \cos(\delta_i - \theta_i) & -\sin(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.22})$$

$$C_{2_{\theta i}} = \left[\begin{array}{cc|c} \sin(\delta_i - \theta_i) & \cos(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \cos(\delta_i - \theta_i) & -\sin(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.23})$$

onde,

$i = 1, \dots, m;$

$\emptyset$ denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho $2m \times 2m$;

A.4.4 Derivadas da matriz C_3

$$C_{3_{\omega i}} = \emptyset; \quad C_{3_{E'qi}} = \emptyset; \quad C_{3_{E'di}} = \emptyset; \quad C_{3_{Efdi}} = \emptyset. \quad (\text{A.24})$$

$$C_{3_{\delta i}} = \left[\begin{array}{cc|c} I_{qi} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) + I_{di} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) & I_{di} \cos(\delta_i - \theta_i) - I_{qi} \sin(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ I_{di} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) - I_{qi} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) & -I_{di} \sin(\delta_i - \theta_i) - I_{qi} \cos(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.25})$$

$$C_{3_{Iqi}} = \left[\begin{array}{cc|c} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) & \cos(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ V_i \cos(\delta_i - \theta_i) & -\sin(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.26})$$

$$C_{3_{Idi}} = \left[\begin{array}{cc|c} -V_i \cos(\delta_i - \theta_i) & \sin(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ V_i \sin(\delta_i - \theta_i) & \cos(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.27})$$

$$C_{3_{Vi}} = \left[\begin{array}{cc|c} \left(\begin{array}{c} I_{qi} \text{sen}(\delta_i - \theta_i) - I_{di} \text{cos}(\delta_i - \theta_i) \\ + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{sen}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \end{array} \right) & -2Y_{i,i} \text{cos}(\alpha_{i,i}) & \emptyset \\ \left(\begin{array}{c} I_{di} \text{sen}(\delta_i - \theta_i) + I_{qi} \text{cos}(\delta_i - \theta_i) \\ - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{cos}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \end{array} \right) & -2Y_{i,i} \text{sen}(\alpha_{i,i}) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.28})$$

$$C_{3_{Vk}} = \left[\begin{array}{cc|c} V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_{i,k} \text{sen}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) & - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_{i,k} \text{cos}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) & \emptyset \\ -V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_{i,k} \text{cos}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) & - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_{i,k} \text{sen}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.29})$$

$$C_{3_{\theta i}} = \left[\begin{array}{cc|c} \left(\begin{array}{c} -I_{qi} V_i \text{cos}(\delta_i - \theta_i) \\ -I_{di} V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) \\ + V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{cos}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} -I_{di} \text{cos}(\delta_i - \theta_i) \\ + I_{qi} \text{sen}(\delta_i - \theta_i) \\ + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{sen}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \end{array} \right) & \emptyset \\ \left(\begin{array}{c} -I_{di} V_i \text{cos}(\delta_i - \theta_i) \\ + I_{qi} V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) \\ + V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{sen}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} I_{di} \text{sen}(\delta_i - \theta_i) \\ + I_{qi} \text{cos}(\delta_i - \theta_i) \\ - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{cos}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \end{array} \right) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.30})$$

$$C_{3_{\theta k}} = \left[\begin{array}{cc|c} -V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{cos}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) & - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{sen}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) & \emptyset \\ -V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{sen}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{cos}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.31})$$

onde,

$$i = 1, \dots, m;$$

$$k = m + 1, \dots, nbus;$$

$\emptyset$ denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho $2m \times 2m$;

A.4.5 Derivadas da matriz C_4

$$\begin{aligned} C_{4_{\delta i}} &= \emptyset; & C_{4_{\omega i}} &= \emptyset; & C_{4_{E'qi}} &= \emptyset; \\ C_{4_{E'di}} &= \emptyset; & C_{4_{lqi}} &= \emptyset; & C_{4_{ldi}} &= \emptyset; & C_{4_{Efdi}} &= \emptyset. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$C_{4_{V_i}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

$$a_{i,j} = \begin{bmatrix} -V_j Y_{i,j} \text{sen}(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) & -Y_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \\ V_j Y_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) & -Y_{i,j} \text{sen}(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \end{bmatrix}$$

$$C_{4_{V_j}} = \begin{bmatrix} 0 & b_{1,j} & \dots & 0 \\ 0 & b_{2,j} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & b_{i,j} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

$$b_{i,j} = \begin{bmatrix} -V_i Y_{i,j} \text{sen}(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) & 0 \\ V_i Y_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{4_{\theta_i}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{i,1} & c_{i,2} & \dots & c_{i,j} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

$$c_{i,j} = \begin{bmatrix} -V_i V_j Y_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) & V_i Y_{i,j} \text{sen}(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \\ -V_i V_j Y_{i,j} \text{sen}(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) & -V_i Y_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \end{bmatrix}$$

$$C_{4\theta_j} = \begin{bmatrix} 0 & d_{1,j} & \cdots & 0 \\ 0 & d_{2,j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & d_{i,j} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

$$d_{i,j} = \begin{bmatrix} V_i V_j Y_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) & -V_i Y_{i,j} \sin(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \\ V_i V_j Y_{i,j} \sin(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) & V_i Y_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \end{bmatrix}$$

onde,

$i = 1, \dots, m;$

$j = m + 1, \dots, nbus;$

$\emptyset$ denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho $2m \times 2(nbush - m);$

A.4.6 Derivadas da matriz D_1

$$\begin{aligned} D_{1_{\delta i}} &= \emptyset; & D_{1_{\omega i}} &= \emptyset; & D_{1_{E'qi}} &= \emptyset; \\ D_{1_{E'di}} &= \emptyset; & D_{1_{Iqi}} &= \emptyset; & D_{1_{Idi}} &= \emptyset; & D_{1_{Efdi}} &= \emptyset. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$$D_{1_{V_i}} = \begin{bmatrix} 0 & a_{1,j} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{i,j} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

$$a_{i,j} = \begin{bmatrix} -V_j Y_{j,i} \sin(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) & 0 \\ V_j Y_{j,i} \cos(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{1_{V_j}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{i,1} & b_{i,2} & \cdots & b_{i,j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

$$b_{i,j} = \begin{bmatrix} -V_i Y_{j,i} \sin(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) & -Y_{j,i} \cos(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) \\ V_i Y_{j,i} \cos(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) & -Y_{j,i} \sin(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) \end{bmatrix}$$

$$D_{1\theta_i} = \begin{bmatrix} 0 & c_{1,j} & \cdots & 0 \\ 0 & c_{2,j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & c_{i,j} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

$$c_{i,j} = \begin{bmatrix} V_j V_i Y_{j,i} \cos(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) & -V_j Y_{j,i} \sin(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) \\ V_j V_i Y_{j,i} \sin(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) & V_j Y_{j,i} \cos(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) \end{bmatrix}$$

$$D_{1\theta_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{i,1} & d_{i,2} & \cdots & d_{i,j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

$$d_{i,j} = \begin{bmatrix} -V_j V_i Y_{j,i} \cos(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) & -V_j Y_{j,i} \sin(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) \\ -V_j V_i Y_{j,i} \sin(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) & -V_j Y_{j,i} \cos(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) \end{bmatrix}$$

onde,

$i = 1, \dots, m;$

$j = m + 1, \dots, nbus;$

$\emptyset$ denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho $2(nbush - m) \times 2m;$

A.4.7 Derivadas da matriz D_2

$$\begin{aligned} D_{2\delta i} &= \emptyset; & D_{2\omega i} &= \emptyset; & D_{2E'qi} &= \emptyset; & D_{2Vi} &= \emptyset; \\ D_{2E'di} &= \emptyset; & D_{2lqi} &= \emptyset; & D_{2ldi} &= \emptyset; & D_{2Efdi} &= \emptyset. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

$$D_{2V_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1,j} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{d,1} & b_{d,2} & \cdots & c_{d,d} & \cdots & b_{d,j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{d,j} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{d,j} = \begin{bmatrix} -V_d Y_{d,j} \text{sen}(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) & 0 \\ V_d Y_{d,j} \text{cos}(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.43})$$

$$b_{d,j} = \begin{bmatrix} -V_j Y_{j,d} \text{sen}(\theta_j - \theta_d - \alpha_{j,d}) & Y_{j,d} \text{cos}(\theta_j - \theta_d - \alpha_{j,d}) \\ V_j Y_{j,d} \text{cos}(\theta_j - \theta_d - \alpha_{j,d}) & -Y_{j,d} \text{sen}(\theta_j - \theta_d - \alpha_{j,d}) \end{bmatrix}$$

$$c_{d,d} = \begin{bmatrix} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{d,k} \text{sen}(\theta_{dj} - \theta_k - \alpha_{d,k}) & -2Y_{d,d} \text{cos}(\alpha_{d,d}) \\ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{d,k} \text{cos}(\theta_{dj} - \theta_k - \alpha_{d,k}) & -2Y_{d,d} \text{sen}(\alpha_{d,d}) \end{bmatrix}$$

$$D_{2\theta_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1,j} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{d,1} & b_{d,2} & \cdots & c_{d,d} & \cdots & b_{d,j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{d,j} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{d,j} = \begin{bmatrix} V_d V_j Y_{d,j} \text{cos}(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) & -V_d Y_{d,j} \text{sen}(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) \\ V_d V_j Y_{d,j} \text{sen}(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) & V_d Y_{d,j} \text{cos}(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) \end{bmatrix}$$

$$b_{d,j} = \begin{bmatrix} -V_j V_d Y_{d,j} \text{cos}(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) & V_d Y_{d,j} \text{sen}(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) \\ -V_j V_d Y_{d,j} \text{sen}(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) & -V_d Y_{d,j} \text{cos}(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) \end{bmatrix}$$

$$c_{d,d} = \begin{bmatrix} V_d \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{d,k} \text{cos}(\theta_{dj} - \theta_k - \alpha_{d,k}) & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{d,k} \text{sen}(\theta_{dj} - \theta_k - \alpha_{d,k}) \\ V_d \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{d,k} \text{sen}(\theta_{dj} - \theta_k - \alpha_{d,k}) & -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{d,k} \text{cos}(\theta_d - \theta_k - \alpha_{d,k}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.44})$$

onde,

$$i = 1, \dots, m;$$

$$j = m + 1, \dots, nbus;$$

$$d = m + 1, \dots, nbus;$$

$\emptyset$ denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho $2(nb\text{us} - m) \times 2(nb\text{us} - m)$;

Modelagem de Sistemas de Potência com Dependência de Parâmetros

As equações propostas anteriormente, apesar de terem sido motivadas para uso em SEP, foram apresentadas e formuladas de tal forma que possam ser aplicadas a qualquer modelo de sistema algébrico-diferencial. A aplicação da metodologia proposta a SEP está condicionada à definição adequada de f , g , com seus respectivos modelos de geradores e reguladores de tensão.

Para fins de apresentação da metodologia proposta e seus resultados, serão apresentados nesta seção as equações referentes a modelos específicos de equipamentos de SEP. Entretanto, ressalta-se que, teoricamente, qualquer modelo de equipamento poderia ser utilizado. Assim, nesta tese será apresentado o equacionamento de um SEP considerando geradores com modelos de 4ª ordem, controlados por reguladores de tensão modelados conforme o AVR IEEE-Tipo I (SAUER; PAI, 1998). A Figura B.1 representa o circuito do estator e suas restrições algébricas no modelo adotado do gerador, ao passo que a Figura B.2 apresenta o modelo de AVR adotado. A Figura B.3 apresenta o modelo geral de um SEP com

m geradores e n barras.

$$\begin{bmatrix}
 A & B & F_\mu & \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \\
 C & D & G_\mu & \emptyset \emptyset \emptyset \emptyset \\
 \begin{pmatrix} A_x \cdot v_R + \\ B_x \cdot \omega_R \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_y \cdot v_R + \\ B_y \cdot \omega_R \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_\mu \cdot v_R + \\ B_\mu \cdot \omega_R \end{pmatrix} & A \emptyset B \emptyset \\
 \begin{pmatrix} C_x \cdot v_R + \\ D_x \cdot \omega_R \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_y \cdot v_R + \\ D_y \cdot \omega_R \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_\mu \cdot v_R + \\ D_\mu \cdot \omega_R \end{pmatrix} & C \emptyset D \emptyset \\
 \begin{pmatrix} A_x \cdot v_I + \\ B_x \cdot \omega_I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_y \cdot v_I + \\ B_y \cdot \omega_I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_\mu \cdot v_I + \\ B_\mu \cdot \omega_I \end{pmatrix} & \emptyset A \emptyset B \\
 \begin{pmatrix} C_x \cdot v_I + \\ D_x \cdot \omega_I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_y \cdot v_I + \\ D_y \cdot \omega_I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_\mu \cdot v_I + \\ D_\mu \cdot \omega_I \end{pmatrix} & \emptyset C \emptyset D \\
 \emptyset & \emptyset & \emptyset & v_I^T v_R^T \omega_I^T \omega_R^T
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta \mu \\ \Delta v_R \\ \Delta v_I \\ \Delta \omega_R \\ \Delta \omega_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x, y, \mu) \\ g(x, y, \mu) \\ \begin{bmatrix} AB \\ CD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} AB \\ CD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_R^T \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (B.1)$$

Figura B.1: Circuito dinâmico para o modelo de máquina síncrona.

Figura B.2: Modelo AVR IEEE-TIPO I.

Figura B.3: Modelo geral com m -máquinas e n -barras.

Foi também considerada a modelagem do gerador de 3ª ordem e o AVR rápido, entretanto, como estes modelos de gerador e AVR, apresentados em OLIVEIRA SALIM (2009), são respectivamente uma simplificação do modelo de 4ª ordem e do AVR IEEE-Tipo I, apenas o equacionamento de maior ordem para o sistema será apresentado, sendo inferidas quando necessárias, as respectivas simplificações. Ressalta-se ainda que a formulação ora apresentada foi baseada no equacionamento apresentado em (SAUER; PAI, 1998), sendo ainda neste incluído o parâmetro de bifurcação a ser analisado, μ , definido como o carregamento do sistema. Este parâmetro possui a função de controlar o tamanho do incremento de potência ativa e reativa tanto da geração quanto da carga.

Para modelar o crescimento de carga, é utilizada uma representação baseada no momento de inércia dos geradores, onde a direção de crescimento de carga é proporcional à inércia de cada gerador (SANTOS, 2008). Ainda, nas considerações realizadas ao modelo, este desconsidera os efeitos sub-transitórios e a saturação da máquina, entretanto a saturação do regulador de tensão é considerada, (S_E). Ainda, P_{m_i} , potência mecânica estabelecida em cada máquina, é considerada constante, ou seja, desconsidera-se a dinâmica dos reguladores de velocidade. Por fim, o coeficiente de amortecimento linear da máquina é considerado proporcional ao desvio de frequência. Pode-se então aplicar a (4.9) o equacionamento de um sistema de potência conforme será realizado a seguir.

Seja o sistema diferencial-algébrico apresentado em (3.1). As equações diferenciais que representam a dinâmica de cada gerador e dos seus sistemas de controle são as seguintes:

$$\dot{\delta}_i = \omega_i - \omega_s \quad (\text{B.2a})$$

$$\dot{\omega}_i = \frac{1}{M_i} \cdot \left(P_{m_i} + \frac{M_i}{M_t} (\mu - 1) \sum_{i=1}^n P_{L_{0i}} \right) - \frac{[E'_{qi} - X'_{di} I_{di}] I_{qi}}{M_i} \quad (\text{B.2b})$$

Esta escolha é arbitrária, qualquer outra regra de incremento de geração pode ser utilizada.

$$\dot{E}'_{qi} = -\frac{[E'_{di} - X'_{qi}I_{qi}]I_{di}}{M_i} - \frac{D_i(\omega_i - \omega_s)}{M_i} + \frac{E'_{qi}}{T'_{do_i}} - \frac{(X_{di} - X'_{di})I_{di}}{T'_{do_i}} + \frac{E_{fd_i}}{T'_{do_i}} \quad (B.2c)$$

$$\dot{E}'_{di} = -\frac{E'_{di}}{T'_{qo_i}} + \frac{(X_{qi} - X'_{qi})I_{qi}}{T'_{qo_i}} \quad (B.2d)$$

$$\dot{E}_{fd_i} = -\frac{K_{E_i} + S_E(E_{fd_i})}{T_{E_i}} + \frac{V_{R_i}}{T_{E_i}} \quad (B.2e)$$

$$\dot{V}_{R_i} = -\frac{V_{R_i}}{T_{A_i}} + \frac{K_{A_i}R_{f_i}}{T_{A_i}} - \frac{K_{A_i}K_{F_i}E_{fd_i}}{T_{A_i}T_{F_i}} + \frac{K_{A_i}}{T_{A_i}}(V_{ref_i} - V_i) \quad (B.2f)$$

$$\dot{R}_{F_i} = -\frac{R_{F_i}}{T_{F_i}} + \frac{K_{F_i}E_{fd_i}}{(T_{F_i})^2} \quad (B.2g)$$

sendo $i = 1, \dots, m$, onde m é o número de geradores do sistema e

- δ_i posição angular do rotor do gerador da barra i em $[rad]$;
- ω_i velocidade do gerador em $[rad/s]$;
- ω_s velocidade síncrona em $[rad/s]$;
- M_i constante de inércia em $[s^2]$;
- P_{m_i} potência mecânica do gerador i em $[MW]$;
- M_t soma das constantes de inércia de todas as máquinas;
- P_{L_0} potência ativa na carga especificada, $\mu = 1$, $[MW]$;
- E'_{qi} fluxo no enrolamento amortecedor do eixo de quadratura, $[p.u.]$;
- E'_{di} fluxo no enrolamento amortecedor do eixo direto, $[p.u.]$;
- I_{di} corrente de armadura do eixo direto em $[p.u.]$;
- I_{qi} corrente de armadura do eixo de quadratura em $[p.u.]$;
- X_{qi} reatância de eixo de quadratura em $[p.u.]$;
- X_{di} reatância de eixo direto em $[p.u.]$;
- X'_{di} reatância transitória de eixo direto em $[p.u.]$;
- X'_{qi} reatância transitória de eixo de quadratura em $[p.u.]$;
- E_{fd_i} tensão de campo dimensionada $[p.u.]$;
- V_{ref_i} módulo da tensão de referência do AVR em $[p.u.]$;
- V_i módulo da tensão da barra i em $[p.u.]$;
- K_{A_i} ganho do amplificador do AVR do gerador i $[p.u.]$;
- K_{E_i} ganho da excitatriz do AVR do gerador i $[p.u.]$;
- K_{F_i} ganho da malha de estabilização do AVR do gerador i $[p.u.]$;
- R_{f_i} resistência do enrolamento de campo do gerador i $[p.u.]$;
- R_{F_i} resistência da malha estabilizadora do AVR do gerador i $[p.u.]$;
- V_{F_i} saída do amplificador do AVR do gerador i $[p.u.]$;
- S_E função de saturação do AVR $[p.u.]$;
- T_{A_i} constante de tempo do AVR do gerador i $[s]$;

- T_{E_i} constante de tempo da excitatriz do gerador i [s];
 T_{F_i} constante de tempo de estabilização i [s].

Algumas simplificações podem ser realizadas a partir deste conjunto de equações para que o modelo de 3ª ordem e o modelo de AVR rápido possam ser utilizados para o mesmo procedimento aqui descrito. Estas simplificações estão descritas em (OLIVEIRA SALIM, 2009) e correspondem à desconsideração de (B.2d), e a alteração de (B.2e), (B.2f) e (B.2g) por uma equação que refere-se somente à tensão de campo, E_{fd} .

Já as equações algébricas do modelo compreendem às equações do estator e da rede. Estas equações são respectivamente dadas por:

$$E'_{d_i} - V_i \sin(\delta_i - \theta_i) + R_{s_i} I_{d_i} + X'_{q_i} I_{q_i} = 0 \quad (\text{B.3a})$$

$$E'_{q_i} - V_i \cos(\delta_i - \theta_i) - R_{s_i} I_{q_i} + X'_{d_i} I_{d_i} = 0 \quad (\text{B.3b})$$

$$0 = \mu \cdot P_L(V_i) + I_{d_i} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) + I_{q_i} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) \quad (\text{B.4a})$$

$$- \sum_{k=1}^n V_i V_k Y_{i,k} \cos(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k})$$

$$0 = \mu \cdot Q_L(V_i) + I_{d_i} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) - I_{q_i} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) \quad (\text{B.4b})$$

$$- \sum_{k=1}^n V_i V_k Y_{i,k} \cos(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k})$$

$$0 = \mu \cdot P_{L_0}(V_j) - \sum_{k=1}^n V_j V_k Y_{j,k} \cos(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) \quad (\text{B.4c})$$

$$0 = \mu \cdot Q_{L_0}(V_j) - \sum_{k=1}^n V_j V_k Y_{j,k} \sin(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) \quad (\text{B.4d})$$

para $i = 1, \dots, m$ e $j = m + 1, \dots, n$, onde,

- R_{s_i} resistência da armadura em [p.u.];
 θ_i ângulo da tensão na barra i em [rad];
 $Y_{i,k}$ valor absoluto de (i, k) da matriz admitância do sistema [p.u.];
 α ângulo referente ao valor absoluto da matriz admitância em [rad];

Note que as equações (B.4a) e (B.4b) referem-se a barras que possuem conexão com gerador e as equações (B.4c) e (B.4d) a barras sem geradores.

B.1 Linearização do Modelo

Linearizando-se (B.2) a (B.4), obtém-se (4.10) a (4.13). Onde Δ representa uma variação.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \Delta \dot{\delta}_i \\ \Delta \dot{\omega}_i \\ \Delta E'_{qi} \\ \Delta E'_{di} \\ \Delta E_{fdi} \\ \Delta \dot{V}_{Ri} \\ \Delta \dot{R}_{Fi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{D_i I_{qi} I_{di}}{M_i M_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T'_{doi}} & \frac{1}{T'_{doi}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T_{Ei}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{si} (E_{fdi} - E'_{di}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{K_{Ai} K_{Fi} K_{Ai}}{T_{Ai} T_{Fi} T_{Ai} A_i} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{K_{Fi}}{(T_{Fi})^2} & -\frac{1}{T_{Fi}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta_i \\ \Delta \omega_i \\ \Delta E'_{qi} \\ \Delta E'_{di} \\ \Delta E_{fdi} \\ \Delta V_{Ri} \\ \Delta R_{Fi} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{I_{qi} (X'_{di} - X'_{qi}) - E'_{di} (X'_{di} - X'_{qi}) - E'_{qi}}{M_i} & \frac{I_{di} (X'_{di} - X'_{qi}) - E'_{di} (X'_{di} - X'_{qi}) - E'_{di}}{M_i} \\ \frac{(X_{di} - X'_{di})}{T'_{doi}} & 0 \\ 0 & \frac{(X_{qi} - X'_{qi})}{T'_{qoi}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta I_{di} \\ \Delta I_{qi} \end{bmatrix} \quad (B.5) \\
 & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{K_{Ai}}{T_{Ai}} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_{Ai}}{T_{Ai}} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta P_{mi} \\ \Delta V_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{k=1}^n \frac{P_{L_{ok}}}{M_t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \Delta \mu
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 = & \begin{bmatrix} -V_i \cos(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 \\ V_i \sin(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta_i \\ \Delta \omega_i \\ \Delta E'_{qi} \\ \Delta E'_{di} \\ \Delta E_{fdi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +R_{si} & X'_{qi} \\ -X'_{di} & -R_{si} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta I_{di} \\ \Delta I_{qi} \end{bmatrix} \quad (B.6) \\
 & + \begin{bmatrix} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) - \sin(\delta_i - \theta_i) \\ -V_i \sin(\delta_i - \theta_i) - \cos(\delta_i - \theta_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \begin{bmatrix} I_{d_i} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) - I_{q_i} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) \\ -I_{d_i} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) - I_{q_i} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_i \\ \Delta\omega_i \\ \Delta E'_{q_i} \\ \Delta E'_{d_i} \\ \Delta E_{fd_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) V_i \cos(\delta_i - \theta_i) \\ V_i \cos(\delta_i - \theta_i) - V_i \sin(\delta_i - \theta_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta I_{d_i} \\ \Delta I_{q_i} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} I_{q_i} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) \\ -I_{d_i} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) \\ + V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \sin(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{d_i} \sin(\delta_i - \theta_i) \\ + I_{q_i} \cos(\delta_i - \theta_i) \\ - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \cos(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} I_{d_i} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) \\ + I_{q_i} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) \\ - V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \cos(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{d_i} \cos(\delta_i - \theta_i) \\ - I_{q_i} \sin(\delta_i - \theta_i) \\ - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \sin(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix} \\
& + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \begin{bmatrix} -V_i V_k Y_{i,k} \sin(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) - V_i Y_{i,k} \cos(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \\ V_i V_k Y_{i,k} \cos(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) - V_i Y_{i,k} \sin(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\theta_k \\ \Delta V_k \end{bmatrix} \\
& + \sum_{\substack{j=m+1 \\ k \neq i}}^n \begin{bmatrix} -V_i V_j Y_{i,j} \sin(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) - V_i Y_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \\ V_i V_j Y_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) - V_i Y_{i,j} \sin(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\theta_j \\ \Delta V_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{L_{oi}} \\ Q_{L_{oi}} \end{bmatrix} \Delta\mu
\end{aligned}$$

(B.7)

$$\begin{aligned}
 0 = & \sum_{k=1}^m \begin{bmatrix} -V_j V_k Y_{j,k} \sin(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) - V_j Y_{j,k} \cos(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) \\ V_j V_k Y_{j,k} \cos(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) - V_j Y_{j,k} \sin(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_k \\ \Delta V_k \end{bmatrix} \\
 & + \sum_{\substack{k=m+1 \\ k \neq j}}^n \begin{bmatrix} -V_j V_k Y_{j,k} \sin(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) - V_j Y_{j,k} \cos(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) \\ V_j V_k Y_{j,k} \cos(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) - V_j Y_{j,k} \sin(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_k \\ \Delta V_k \end{bmatrix} \quad (B.8) \\
 & + \begin{bmatrix} P_{L_{0j}} \\ Q_{L_{0j}} \end{bmatrix} \Delta \mu
 \end{aligned}$$

Para um sistema multi-máquinas, (4.10), (4.11), (4.12) e (4.13) podem ser representadas, de uma forma compacta, considerando $\Delta I_{g_i} = \begin{bmatrix} \Delta I_{d_i} \\ \Delta I_{q_i} \end{bmatrix}$, $\Delta V_{g_i} = \begin{bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix}$ e $\Delta u_i = \begin{bmatrix} \Delta P_{m_i} \\ \Delta V_{ref} \end{bmatrix}$, resultando em:

$$\Delta \dot{X}_i = A_1 \Delta X_i + A_2 \Delta I_{g_i} + A_3 \Delta V_{g_i} + E \Delta u_i + A_4 \Delta \mu \quad (B.9)$$

$$0 = B_1 \Delta X_i + B_2 \Delta I_{g_i} + B_3 \Delta V_{g_i} \quad (B.10)$$

$$0 = C_1 \Delta X + C_2 \Delta I_g + C_3 \Delta V_g + C_4 \Delta V_l + C_5 \Delta \mu \quad (B.11)$$

$$0 = D_1 \Delta V_g + D_2 \Delta V_l + D_3 \Delta \mu \quad (B.12)$$

onde ΔX representa a variação das variáveis dinâmicas, ΔV_l representa a variação das variáveis de tensão das barras e $\Delta \mu$ a variação do parâmetro de carregamento.

Em (4.14) a (4.17), as matrizes A_1 , A_2 , A_3 , E , B_1 , B_2 , B_3 , C_1 e C_2 são matrizes bloco diagonais, a matriz A_4 tem a forma $\begin{bmatrix} A_{41} & \dots & A_{4m} \end{bmatrix}^T$ e, por fim, as matrizes C_3 , C_4 , D_1 e D_2 são matrizes cheias. C_5 e D_3 são respectivamente, definidas como $\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} P_{L_{0i}} \\ Q_{L_{0i}} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} P_{L_{0m}} \\ Q_{L_{0m}} \end{pmatrix} \end{bmatrix}^T$ e $\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} P_{L_{0m+1}} \\ Q_{L_{0m+1}} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} P_{L_{0n}} \\ Q_{L_{0n}} \end{pmatrix} \end{bmatrix}^T$.

Descreveu-se aqui então o modelo diferencial-algébrico que representa um sistema de potência multi-máquinas, com cada máquina possuindo um gerador de 4ª ordem e um regulador de tensão de 3ª ordem. Para melhor visualização do sistema diferencial-algébrico, pode-se rearranjar (4.14)-(4.17) para a forma $\dot{x} =$

$f(x, y, \mu)$ e $0 = g(x, y, \mu)$, resultando em:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\delta}_i \\ \Delta \dot{\omega}_i \\ \Delta \dot{E}'_{qi} \\ \Delta \dot{E}'_{di} \\ \Delta \dot{E}_{fdi} \\ \Delta \dot{V}_{Ri} \\ \Delta \dot{R}_{Fi} \end{bmatrix} = A_1 \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta_i \\ \Delta \omega_i \\ \Delta E'_{qi} \\ \Delta E'_{di} \\ \Delta E_{fdi} \\ \Delta V_{Ri} \\ \Delta R_{Fi} \end{bmatrix} + [A_2 A_3 \emptyset] \cdot \begin{bmatrix} \Delta I_g \\ \Delta V_g \\ \Delta V_l \end{bmatrix} + A_4 \cdot \Delta \mu \\ \\ 0 = \begin{bmatrix} B_1 \\ C_1 \\ \emptyset \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta_i \\ \Delta \omega_i \\ \Delta E'_{qi} \\ \Delta E'_{di} \\ \Delta E_{fdi} \\ \Delta V_{Ri} \\ \Delta R_{Fi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 B_3 \emptyset \\ C_2 C_3 C_4 \\ \emptyset D_1 D_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta I_g \\ \Delta V_g \\ \Delta V_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \emptyset \\ C_5 \\ D_3 \end{bmatrix} \cdot \Delta \mu \end{array} \right. \quad (B.13)$$

Igualando as notações de (4.18) às notações do sistema apresentado em (3.1), pode-se definir:

$$\begin{aligned} A &= A_1; & B &= [A_2 A_3 \emptyset]; \\ C &= \begin{bmatrix} B_1 \\ C_1 \\ \emptyset \end{bmatrix} & \text{e} & D = \begin{bmatrix} B_2 B_3 \emptyset \\ C_2 C_3 C_4 \\ \emptyset D_1 D_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (B.14)$$

As derivadas das matrizes descritas em (4.19) são apresentadas no Apêndice A devido à sua extensão. Estas formarão a matriz Jacobiana do sistema aumentado, apresentada de forma genérica em (B.1).

Anexos

Cartão Exemplo

	!De	Para	R	X	B	Tap
linedata =	1	2	0.0035	0.0411	0.6987	1.000
	1	39	0.0010	0.0250	0.7500	1.000
	2	3	0.0013	0.0151	0.2572	1.000
	2	25	0.0070	0.0086	0.1460	1.000
	3	4	0.0013	0.0213	0.2214	1.000
	3	18	0.0011	0.0133	0.2138	1.000
	4	5	0.0008	0.0128	0.1342	1.000
	4	14	0.0008	0.0129	0.1382	1.000
	5	6	0.0002	0.0026	0.0434	1.000
	5	8	0.0008	0.0112	0.1476	1.000
	6	7	0.0006	0.0092	0.1130	1.000
	6	11	0.0007	0.0082	0.1389	1.000
	7	8	0.0004	0.0046	0.0780	1.000
	8	9	0.0023	0.0363	0.3804	1.000
	9	39	0.0010	0.0250	1.2000	1.000
	10	11	0.0004	0.0043	0.0729	1.000
	10	13	0.0004	0.0043	0.0729	1.000
	13	14	0.0009	0.0101	0.1723	1.000
	14	15	0.0018	0.0217	0.3660	1.000
	15	16	0.0009	0.0094	0.1710	1.000
	16	17	0.0007	0.0089	0.1342	1.000
	16	19	0.0016	0.0195	0.3040	1.000
	16	21	0.0008	0.0135	0.2548	1.000
	16	24	0.0003	0.0059	0.0680	1.000
	17	18	0.0007	0.0082	0.1319	1.000
	17	27	0.0013	0.0173	0.3216	1.000
	21	22	0.0008	0.0140	0.2565	1.000

22	23	0.0006	0.0096	0.1846	1.000
23	24	0.0022	0.0350	0.3610	1.000
25	26	0.0032	0.0323	0.5130	1.000
26	27	0.0014	0.0147	0.2396	1.000
26	28	0.0043	0.0474	0.7802	1.000
26	29	0.0057	0.0625	1.0290	1.000
28	29	0.0014	0.0151	0.2490	1.000
12	11	0.0016	0.0435	0.0000	1.006
12	13	0.0016	0.0435	0.0000	1.006
6	31	0.0000	0.0250	0.0000	1.070
10	32	0.0000	0.0200	0.0000	1.070
19	33	0.0007	0.0142	0.0000	1.070
20	34	0.0009	0.0180	0.0000	1.009
22	35	0.0000	0.0143	0.0000	1.025
23	36	0.0005	0.0272	0.0000	1.000
25	37	0.0006	0.0232	0.0000	1.025
2	30	0.0000	0.0181	0.0000	1.025
29	38	0.0008	0.0156	0.0000	1.025
19	20	0.0007	0.0138	0.0000	1.060

!N°	Tipo	V	A	P1	Q1	Pg	Qg	Qmin	Qmax			
busdata =		1	0	1.0	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0	0
		2	0	1.0	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0	0
		3	0	1.0	0	322.0	2.4	0.0	0.0	0	0	0
		4	0	1.0	0	500.0	184.0	0.0	0.0	0	0	0
		5	0	1.0	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0	0
		6	0	1.0	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0	0
		7	0	1.0	0	233.8	84.0	0.0	0.0	0	0	0
		8	0	1.0	0	522.0	176.0	0.0	0.0	0	0	0
		9	0	1.0	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0	0
		10	0	1.0	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0	0
		11	0	1.0	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0	0
		12	0	1.0	0	7.5	88.0	0.0	0.0	0	0	0
		13	0	1.0	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0	0
		14	0	1.0	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0	0
		15	0	1.0	0	320.0	153.0	0.0	0.0	0	0	0
		16	0	1.0	0	329.0	32.3	0.0	0.0	0	0	0
		17	0	1.0	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0	0

18	0	1.0	0	158.0	30.0	0.0	0.0	0	0	0
19	0	1.0	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0	0
20	0	1.0	0	628.0	103.0	0.0	0.0	0	0	0
21	0	1.0	0	274.0	115.0	0.0	0.0	0	0	0
22	0	1.0	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0	0
23	0	1.0	0	247.5	84.6	0.0	0.0	0	0	0
24	0	1.0	0	308.6	-92.0	0.0	0.0	0	0	0
25	0	1.0	0	224.0	47.2	0.0	0.0	0	0	0
26	0	1.0	0	139.0	17.0	0.0	0.0	0	0	0
27	0	1.0	0	281.0	75.5	0.0	0.0	0	0	0
28	0	1.0	0	206.0	27.6	0.0	0.0	0	0	0
29	0	1.0	0	283.5	26.9	0.0	0.0	0	0	0
30	2	1.0475	0	0.0	0.0	250	0.0	-99.99	99.99	0
31	1	0.9820	0	9.2	4.6	0.0	0.0	-99.99	99.99	0
32	2	0.9831	0	0.0	0.0	650	0.0	-99.99	99.99	0
33	2	0.9972	0	0.0	0.0	632	0.0	-99.99	99.99	0
34	2	1.0123	0	0.0	0.0	508	0.0	-99.99	99.99	0
35	2	1.0493	0	0.0	0.0	650	0.0	-99.99	99.99	0
36	2	1.0635	0	0.0	0.0	560	0.0	-99.99	99.99	0
37	2	1.0278	0	0.0	0.0	540	0.0	-99.99	99.99	0
38	2	1.0265	0	0.0	0.0	830	0.0	-99.99	99.99	0
39	2	1.0300	0	1104.0	250.0	1000	0.0	-99.99	99.99	0

!Dados do Gerador

! n°	H	Xd	Xdl	Xq	Xql	Td01	Tq01	D
gendata = 30	500.0	0.02	0.006	0.019	0.008	7.0	0.7	0
31	30.3	0.295	0.0697	0.282	0.170	6.56	1.5	0
32	35.8	0.2495	0.0531	0.237	0.0876	5.7	1.5	0
33	28.6	0.262	0.0436	0.258	0.166	5.69	1.5	0
34	26.0	0.67	0.132	0.62	0.166	5.4	0.44	0
35	34.8	0.254	0.05	0.241	0.0814	7.3	0.4	0
36	26.4	0.295	0.049	0.292	0.186	5.66	1.5	0
37	24.3	0.290	0.057	0.280	0.0911	6.7	0.41	0
38	34.5	0.2106	0.057	0.205	0.0587	4.79	1.96	0
39	42.0	0.1	0.031	0.069	0.008	10.2	0.1	0

!Dados Do Avr

! KA	TA	Ke	Te	Kf	Tf
exciter =	10.0	0.015	1.0	0.2	1

Estudo de Caso

Os sistemas utilizados para teste da metodologia são descritos a seguir conforme os dados utilizados, e não referente aos dados encontrados na literatura.

B.1 Sistema de Duas Áreas

Para estudos preliminares da metodologia proposta foi utilizado o sistema de 2 áreas descrito em KUNDUR (1994). Sua topologia básica é ilustrada na Figura B.1. Este contém 11 barras e duas áreas conectadas por uma *tie line* entre as barras 7 e 9, as quais possuem cargas e capacitores para a compensação de reativos. Cada área ainda possui dois geradores de 900 MVA e 20 kV.

Os modelos de gerador utilizados para o cálculo da margem de estabilidade deste sistema foram modificados, e devido a isto seus resultados não coincidem com o apresentado em KUNDUR (1994), já que os modelos lá apresentados são diferentes.

Figura B.1: Diagrama unifilar do sistema Kundur de duas áreas.

B.1.1 Dados Estáticos

As Tabelas B.1 e B.2 apresentam os dados estáticos do sistema Kundur apresentado anteriormente, sendo a primeira tabela referente aos dados das barras e a segunda aos dados das linhas do sistema. A carga do sistema foi reduzida, se comparada ao caso base encontrado no livro, de forma que, para o modelo do AVR rápido utilizado o sistema fosse estável no caso base.

Tabela B.1: Dados das barras do sistema Kundur de duas áreas.

Nº	Tipo	V [p.u]	A	P_g [MW]	Q_g [MVAR]	P_l [MW]	Q_l [MVAR]	Sh.	Ar.
1	PV	1.030	0.0	560	0				1
2	PV	1.010	0.0	560	0				1
3	S	1.030	-6.8	575.2	0				2
4	PV	1.010	0.0	560	0				2
5	PQ								1
6	PQ								1
7	PQ					773.6	80	200	1
8	PQ								1
9	PQ					1413.6	80	350	2
10	PQ								2
11	PQ								2

Tabela B.2: Dados das linhas do sistema Kundur de duas áreas.

De	Para	R [p.u]	X [p.u]	B [MVAR]
1	5	0.0000	.0166	
5	6	0.0025	.0250	4.375
6	7	0.0010	.0100	1.750
2	6	0.0000	.0166	
7	8	1.0010	.110	19.25
8	9	1.0010	.110	19.25
9	10	0.0010	.0100	1.750
10	11	0.0025	.0250	4.375
10	4	0.0000	.0166	
11	3	0.0000	.0166	

B.1.2 Dados Dinâmicos

As Tabelas B.3 e B.4 apresentam os dados dos geradores e dos AVRs, respectivamente.

Tabela B.3: Dados dos geradores do sistema Kundur de duas áreas.

Nº	H	X_d	X'_d	X_q	X'_q	T'_{d0}	T'_{q0}	D
1	6.5	1.8	0.3	1.7	0.55	8	0.4	0.0
2	6.5	1.8	0.3	1.7	0.55	8	0.4	0.0
3	6.175	1.8	0.3	1.7	0.55	8	0.4	0.0
4	6.175	1.8	0.3	1.7	0.55	8	0.4	0.0

Tabela B.4: Dados dos AVRs do sistema Kundur de duas áreas

K_A	T_A
10	0.055
10	0.055
10	0.055
10	0.055

B.2 Sistem IEEE 14 barras

O sistema IEEE 14 barras representa uma parte do sistema de potência norte-americano sendo este situado no centro-oeste do EUA. Este é um dos sistemas que vêm sendo utilizados para solução de problemas estáticos e dinâmicos em sistemas de potência.

O sistema IEEE 14 barras possui 4 geradores, 11 cargas, 15 linhas de transmissão e 5 transformadores. A Figura B.2 ilustra este sistema.

Figura B.2: Diagrama unifilar do sistema IEEE 14 barras.

B.2.1 Dados Estáticos

As Tabelas B.5 e B.6 apresentam os dados estáticos do sistema IEEE 14 barras, sendo a primeira tabela referente aos dados das barras e a segunda aos dados das linhas do sistema.

Tabela B.5: Dados das barras do sistema IEEE 14 barras.

Nº	Tipo	V [p.u]	A	P_g [MW]	Q_g [MVAR]	P_l [MW]	Q_l [MVAR]	Sh.	Ar.
1	S	1.060				232.4	-16.9		1
2	PV	1.045	-4.98	21.7	12.7	40.0	42.4	-40.0	1
3	PV	1.010	-12.72	94.2	19.0		23.4		1
4	PQ	1.019	-10.33	47.8	-3.9				1
5	PQ	1.020	-8.78	7.6	1.6				1
6	PV	1.070	-14.22	11.2	7.5		12.2	-6.0	1
7	PQ	1.062	-13.37						1
8	PV	1.090	-13.36				17.4	-6.0	1
9	PQ	1.056	-14.94	29.5	16.6				1
10	PQ	1.051	-15.10	9.0	5.8				1
11	PQ	1.057	-14.79	3.5	1.8				1
12	PQ	1.055	-15.07	6.1	1.6				1
13	PQ	1.050	-15.16	13.5	5.8				1
14	PQ	1.036	-16.04	14.9	5.0				1

Tabela B.6: Dados das linhas do sistema IEEE 14 barras.

De	Para	R [p.u]	X [p.u]	B [MVar]	Tape
1	2	0.01938	0.05917	0.0528	
1	5	0.05403	0.22304	0.0492	
2	3	0.04699	0.19797	0.0438	
2	4	0.05811	0.17632	0.0340	
2	5	0.05695	0.17388	0.0346	
3	4	0.06701	0.17103	0.0128	
4	5	0.01335	0.04211		
4	7		0.20912		0.978
4	9		0.55618		0.969
5	6		0.25202		0.932
6	11	0.09498	0.19890		
6	12	0.12291	0.25581		
6	13	0.06615	0.13027		
7	8		0.17615		
7	9		0.11001		
9	10	0.03181	0.08450		
9	14	0.12711	0.27038		
10	11	0.08205	0.19207		
12	13	0.22092	0.19988		
13	14	0.17093	0.34802		

B.2.2 Dados Dinâmicos

As Tabelas B.7 e B.8 apresentam os dados dos geradores e dos AVRs, respectivamente.

Tabela B.7: Dados dos geradores do sistema IEEE 14 barras.

Nº	H	X_d	X'_d	X_q	X'_q	T'_{d0}	T'_{q0}	D
1	15.00	0.0200	0.0060	0.019	0.0080	7.00	0.70	0
2	5.30	0.2950	0.0697	0.282	0.1700	6.56	1.50	0
3	4.80	0.2495	0.0531	0.237	0.0876	5.70	1.50	0
6	7.60	0.2620	0.0436	0.258	0.1660	5.69	1.50	0
8	9.00	0.6700	0.1320	0.620	0.1660	5.40	0.44	0

Tabela B.8: Dados dos AVR's do sistema IEEE 14 barras.

K_A	T_A	K_e	T_e	K_f	T_f
100.0	0.015	1.0	0.2	1	0.1
100.0	0.015	1.0	0.2	1	0.1
100.0	0.015	1.0	0.2	1	0.1
100.0	0.015	1.0	0.2	1	0.1
100.0	0.015	1.0	0.2	1	0.1

B.3 Sistema New England 39 Barras

O sistema de 39 barras é um sistema padrão para teste de novas metodologias e representa um modelo reduzido do sistema de potência em New England. Este sistema vem sendo utilizado para solução de problemas estáticos e dinâmicos em sistemas de potência.

O sistema New England 39 barras possui 10 geradores, 19 cargas, 36 linhas de transmissão e 12 transformadores, sendo estes organizados em 3 áreas. A Figura B.3 ilustra este sistema.

B.3.1 Dados Estáticos

As Tabelas B.9 e B.10 apresentam os dados estáticos do sistema de 39 barras, sendo a primeira tabela referente aos dados das barras e a segunda aos dados das linhas do sistema.

B.3.2 Dados Dinâmicos

As Tabelas B.11 e B.12 apresentam os dados dos geradores e dos AVR's, respectivamente. Observe que os valores dinâmicos dos parâmetros do gerador possuem bases definidas.

Tabela B.9: Dados das barras do sistema New England.

Nº	Tipo	V [p.u]	A	P_g [MW]	Q_g [MVAR]	P_l [MW]	Q_l [MVAR]	Sh.	Ar.
1	PQ	1.0	0.0						1
2	PQ	1.0	0.0						1
3	PQ	1.0	0.0			322.0	2.4		1
4	PQ	1.0	0.0			500.0	184.0		2
5	PQ	1.0	0.0						2
6	PQ	1.0	0.0						2
7	PQ	1.0	0.0			233.8	84.0		2
8	PQ	1.0	0.0			522.0	176.0		2
9	PQ	1.0	0.0						2
10	PQ	1.0	0.0						2
11	PQ	1.0	0.0						2
12	PQ	1.0	0.0			7.5	88.0		2
13	PQ	1.0	0.0						2
14	PQ	1.0	0.0						2
15	PQ	1.0	0.0			320.0	153.0		3
16	PQ	1.0	0.0			329.0	32.0		3
17	PQ	1.0	0.0						1
18	PQ	1.0	0.0			158.0	30.0		1
19	PQ	1.0	0.0						3
20	PQ	1.0	0.0			628.0	103.0		3
21	PQ	1.0	0.0			274.0	115.0		3
22	PQ	1.0	0.0						3
23	PQ	1.0	0.0			247.5	84.6		3
24	PQ	1.0	0.0			308.6	-92.0		3
25	PQ	1.0	0.0			224.0	47.2		1
26	PQ	1.0	0.0			139.0	17.0		1
27	PQ	1.0	0.0			281.0	75.5		1
28	PQ	1.0	0.0			206.0	27.6		3
29	PQ	1.0	0.0			283.5	26.9		3
30	PV	1.0475	0.0	250.0	0.0				1
31	S	0.9820	0.0	0.0	0.0	9.2	4.6		2
32	PV	0.9831	0.0	650.0	0.0				2
33	PV	0.9972	0.0	632.0	0.0				3
34	PV	1.0123	0.0	508.0	0.0				3
35	PV	1.0493	0.0	650.0	0.0				3
36	PV	1.0635	0.0	560.0	0.0				3
37	PV	1.0278	0.0	540.0	0.0				1
38	PV	1.0265	0.0	830.0	0.0				3
39	PV	1.0300	0.0	1000.0	0.0	1104.0	250.0		2

Tabela B.10: Dados das linhas do sistema New England.

De	Para	R [p.u]	X [p.u]	B [MVar]
1	2	0.0035	0.0411	0.6987
1	39	0.0010	0.0250	0.7500
2	3	0.0013	0.0151	0.2572
2	25	0.0070	0.0086	0.1460
3	4	0.0013	0.0213	0.2214
3	18	0.0011	0.0133	0.2138
4	5	0.0008	0.0128	0.1342
4	14	0.0008	0.0129	0.1382
5	6	0.0002	0.0026	0.0434
5	8	0.0008	0.0112	0.1476
6	7	0.0006	0.0092	0.1130
6	11	0.0007	0.0082	0.1389
7	8	0.0004	0.0046	0.0780
8	9	0.0023	0.0363	0.3804
9	39	0.0010	0.0250	1.2000
10	11	0.0004	0.0043	0.0729
10	13	0.0004	0.0043	0.0729
13	14	0.0009	0.0101	0.1723
14	15	0.0018	0.0217	0.3660
15	16	0.0009	0.0094	0.1710
16	17	0.0007	0.0089	0.1342
16	19	0.0016	0.0195	0.3040
16	21	0.0008	0.0135	0.2548
16	24	0.0003	0.0059	0.0680
17	18	0.0007	0.0082	0.1319
17	27	0.0013	0.0173	0.3216
21	22	0.0008	0.0140	0.2565
22	23	0.0006	0.0096	0.1846
23	24	0.0022	0.0350	0.3610
25	26	0.0032	0.0323	0.5130
26	27	0.0014	0.0147	0.2396
26	28	0.0043	0.0474	0.7802
26	29	0.0057	0.0625	1.0290
28	29	0.0014	0.0151	0.2490
12	11	0.0016	0.0435	0.0000
12	13	0.0016	0.0435	0.0000
6	31	0.0000	0.0250	0.0000
10	32	0.0000	0.0200	0.0000
19	33	0.0007	0.0142	0.0000
20	34	0.0009	0.0180	0.0000
22	35	0.0000	0.0143	0.0000
23	36	0.0005	0.0272	0.0000
25	37	0.0006	0.0232	0.0000
2	30	0.0000	0.0181	0.0000
29	38	0.0008	0.0156	0.0000
19	20	0.0007	0.0138	0.0000

Figura B.3: Diagrama unifilar do sistema New England 39 barras.

Tabela B.11: Dados dos geradores do sistema New England.

Nº	H	X_d	X'_d	X_q	X'_q	T'_{d0}	T'_{q0}	D	Base
30	500.0	0.02	0.006	0.019	0.008	7.0	0.7	0.0	100.0
31	30.3	0.295	0.0697	0.282	0.170	6.56	1.5	0.0	612.0
32	35.8	0.2495	0.0531	0.237	0.0876	5.7	1.5	0.0	765.0
33	28.6	0.262	0.0436	0.258	0.166	5.69	1.5	0.0	700.0
34	26.0	0.67	0.132	0.62	0.166	5.4	0.44	0.0	613.0
35	34.8	0.254	0.05	0.241	0.0814	7.3	0.4	0.0	798.0
36	26.4	0.295	0.049	0.292	0.186	5.66	1.5	0.0	660.0
37	24.3	0.290	0.057	0.280	0.0911	6.7	0.41	0.0	660.0
38	34.5	0.2106	0.057	0.205	0.0587	4.79	1.96	0.01	1151.0
39	42.0	0.1	0.031	0.069	0.008	10.2	0.1	0.0	300.0

Tabela B.12: Dados dos AVR's do sistema New England.

K_A	T_A
10.0	0.015
10.0	0.015
10.0	0.015
10.0	0.015
10.0	0.015
10.0	0.015
10.0	0.015
10.0	0.015
10.0	0.015
10.0	0.015

B.4 Sistema Equivalente Sul-Sudeste Brasileiro 65 Barras

Este sistema representa um equivalente do sistema elétrico da região sul e sudeste do Brasil. Este foi proposto em ALVES (2007) para a análise computacional de sistemas de potência.

O sistema Sul-Sudeste de 65 barras possui 15 geradores, 21 cargas e 95 linhas de transmissão, que estão divididos em 2 áreas. A Figura B.4 ilustra o sistema.

Figura B.4: Diagrama unifilar do sistema equivalente Sul/Sudeste com 65 barras.

B.4.1 Dados Estáticos

As Tabelas B.13 e B.14 apresentam os dados estáticos do sistema equivalente 65 barras, sendo a primeira tabela referente aos dados das barras e a segunda aos dados das linhas do sistema.

Tabela B.13: Dados das barras do sistema 65 barras.

Nº	Tipo	V [p.u]	A	P_g [MW]	Q_g [MVAR]	P_l [MW]	Q_l [MVAR]	Sh.
1	PV	1.000	3.56	800	-332			
2	PV	1.010	-1.30	900	-253			
3	PV	1.000	-27.0		-618			
4	PQ	1.048	-7.50					
5	PQ	1.069	-19.0					
6	PQ	1.068	-29.0					
7	PQ	1.063	-29.0					
8	PQ	1.053	-38.0			1200	150	
9	PQ	1.061	-30.0			105	33	
10	PQ	1.059	-27.0			200	38	
11	PQ	1.020	-34.0			440	160	
12	PQ	1.036	-0.87					
13	PQ	1.042	-8.40			75	25	
14	PQ	1.032	-3.00			454	48	
15	PQ	1.009	-8.60					
16	PQ	0.992	-11.0			900	300	
17	PV	1.000	8.35	700	-217			
18	PV	1.020	8.32	250	-85.3			
19	PV	1.010	8.32	350	-146			
20	PV	1.010	1.32	200	-247			
21	PQ	1.034	3.08					
22	PQ	1.053	3.64					
23	PQ	1.045	2.43			214	74	
24	PQ	1.040	4.62					
25	PQ	1.045	-.021					
26	PV	1.020	2.10	800	-60.4			
27	PQ	1.029	-2.30					
28	PQ	1.003	-7.90			700	150	
29	S	1.030		1049	5.281			
30	PV	1.030	13.8	1150	46.14			
31	PV	1.030	6.57	1200	-157			

Tabela B.13: Dados das barras do sistema 65 barras.

Nº	Tipo	V [p.u]	A	P_g [MW]	Q_g [MVAR]	P_l [MW]	Q_l [MVAR]	Sh.
32	PQ	1.000	-25.0			735	191	
33	PQ	1.061	-6.30					
34	PQ	0.995	-17.0			13.4	4.2	
35	PQ	0.999	4.23					
36	PQ	0.986	1.24			159	36	
37	PQ	1.015	5.08			94	18	
38	PQ	1.053	-0.1					
39	PQ	1.065	-23					
40	PQ	1.049	6.23					
41	PQ	1.056	7.46					
42	PQ	1.028	8.37					
43	PV	1.040	-3.2	700	-229			
44	PV	1.030	-3.6	600	-205			
45	PV	1.030	15.9	700	155.4			
46	PV	1.030	10.3	950	13.17			
47	PQ	1.061	-6.7					
48	PQ	1.000	-6.8			237	59	
49	PQ	1.071	-25					
50	PQ	1.000	-27			1149	53.06	
51	PQ	1.086	-13					
52	PQ	1.057	-23					100
53	PQ	1.000	-25			844.7	469.1	
54	PQ	1.073	-20					
55	PQ	1.000	-22			755.6	56.24	
56	PQ	1.050	-22					
57	PQ	1.078	-8.7					
58	PQ	1.003	-27			70	2	
59	PQ	1.078	-10					
60	PQ	1.035	9.31					
61	PQ	1.061	2.53					
62	PQ	1.000	-25			1228	425	
63	PQ	1.059	-36					
64	PQ	1.056	-39			110	43	
65	PQ	1.000	4.01			403	126	

Tabela B.14: Dados das linhas do sistema equivalente Sul/Sudeste 65 barras.

De	Para	R [p.u]	X [p.u]	B [MVAR]
4	2		0.0126	
4	5	0.00172	0.0272	2.314
4	5	0.00171	0.0270	2.302
4	12	0.00209	0.0293	2.546
4	13		0.0235	
4	27	0.00153	0.0240	2.038
5	6	0.00156	0.0246	2.085
5	7	0.00152	0.0239	2.026
6	9		0.0240	
6	63	0.00110	0.0191	1.618
7	11		0.0241	
8	7	0.00196	0.0310	2.649
8	63	0.00050	0.0082	0.693
10	3		0.0095	
10	7	0.00105	0.0161	1.363
10	7	0.00105	0.0161	1.363
12	1		0.0100	
12	14		0.0172	
12	14		0.0172	
12	25	0.00147	0.0232	1.966
15	12	0.00280	0.0399	3.553
15	21	0.00270	0.0387	3.440
16	15		0.0111	
16	15		0.0100	
21	12	0.00125	0.0193	1.499
21	17		0.0135	
21	24	0.00082	0.0125	0.989
22	18		0.0351	
22	23		0.0216	
22	23		0.0216	
22	24	0.00100	0.0151	1.196
22	25	0.00280	0.0484	4.195
24	19		0.0193	
25	20		0.0141	
25	27	0.00093	0.0137	1.123
27	26		0.0102	
28	27		0.0142	
32	39	0.00032	0.0114	
32	39	0.00030	0.0116	
33	29		0.0112	

Tabela B.14: Dados das linhas do sistema equivalente Sul/Sudeste 65 barras.

De	Para	R [p.u]	X [p.u]	B [MVAR]
33	47	0.00010	0.0012	0.152
33	47	0.00010	0.0012	0.154
34	48	0.02444	0.1265	0.217
35	36		0.0664	
35	36		0.0629	
35	42	0.01130	0.0699	0.126
35	60	0.01220	0.0769	0.138
35	65	0.00220	0.0109	0.018
35	65	0.00170	0.0103	0.020
38	31		0.0105	
38	47	0.00052	0.0065	0.804
38	61	0.00056	0.0069	0.857
39	10	0.00308	0.0395	4.448
39	10	0.00308	0.0395	4.448
40	41	0.00050	0.0073	0.780
41	30		0.0102	
42	37		0.0636	
42	60	0.00150	0.0089	0.016
47	39	0.00200	0.0255	3.127
47	51	0.00162	0.0204	2.501
47	52	0.00200	0.0269	3.364
48	47	0.00031	0.0120	
48	60	0.03045	0.1573	0.271
48	60	0.03041	0.1571	0.270
49	51	0.00255	0.0292	3.604
49	52	0.00127	0.0160	1.958
50	49	0.00031	0.0115	
50	49	0.00032	0.0116	
50	49		0.0127	
50	58	0.01271	0.0656	0.113
50	58	0.01283	0.0656	0.115
51	54	0.00187	0.0234	2.872
52	39	0.00050	0.0044	0.475
53	34	0.02210	0.1147	0.196
53	52	0.00032	0.0116	
53	52	0.00031	0.0116	
53	58	0.01892	0.0977	0.168
53	58	0.01895	0.0970	0.170
54	56	0.00073	0.0091	1.121
55	54	0.00020	0.0121	
55	54	0.00020	0.0123	
56	57	0.00282	0.0385	4.930

Tabela B.14: Dados das linhas do sistema equivalente Sul/Sudeste 65 barras.

De	Para	R [p.u]	X [p.u]	B [MVAR]
57	43	0.00012	0.0153	
57	54	0.00164	0.0303	3.548
57	59	0.00073	0.0092	1.122
57	61	0.00172	0.0217	2.651
59	44		0.0206	
59	51	0.00047	0.0059	0.718
60	45	0.00024	0.0170	
61	41	0.00076	0.0117	1.245
61	46	0.00011	0.0151	
62	56	0.00030	0.0121	
62	56	0.00039	0.0113	
62	56	0.00036	0.0121	
63	64		0.0520	
65	40		0.0127	

B.4.2 Dados Dinâmicos

As Tabelas B.15 e B.16 apresentam os dados dos geradores e dos AVR's, respectivamente.

Tabela B.15: Dados dos geradores do sistema equivalente Sul/Sudeste 65 barras.

Nº	H	X_d	X'_d	X_q	X'_q	T'_{d0}	T'_{q0}	D
1	4.31	0.73	0.26	0.52	0.0	8.3	0.	0.0
2	5.05	1.06	0.33	0.63	0.0	5.4	0.	0.0
3	1.60	1.70	0.37	1.00	0.0	9.0	0.	0.0
17	4.722	0.929	0.32	0.69	0.0	5.0	0.	0.0
18	4.244	0.975	0.278	0.58	0.0	4.6	0.	0.0
19	4.91	1.00	0.30	0.69	0.0	5.7	0.	0.0
20	6.228	0.948	0.25	0.645	0.0	7.0	0.	0.0
26	4.03	0.91	0.26	0.57	0.0	6.2	0.	0.0
29	4.439	0.919	0.303	0.686	0.0	7.92	0.	0.0
30	4.071	0.878	0.245	0.566	0.0	7.59	0.	0.0
31	4.071	0.878	0.245	0.566	0.0	7.59	0.	0.0
43	4.349	1.10	0.31	0.73	0.0	6.9	0.	0.0
44	4.844	1.00	0.32	0.75	0.0	6.0	0.	0.0
45	3.281	1.26	0.332	0.752	0.0	7.99	0.	0.0
46	3.873	0.918	0.317	0.623	0.0	10.0	0.	0.0

Tabela B.16: Dados dos AVRs do sistema equivalente Sul/Sudeste 65 barras.

K_A	T_A
10.0	0.010
30.0	0.001
100.0	0.001
80.2	0.001
50.2	0.183
56.0	0.001
100.0	0.054
400.0	0.001
190.8	0.005
200.0	0.001
200.0	0.010
100.0	0.003
16.5	0.005
250.5	0.060
695.6	0.022

Definições

Este anexo tem como finalidade fazer uma revisão de alguns conceitos e resultados que serão úteis ao longo do trabalho. Ao leitor familiarizado com a revisão proposta para este anexo fica a seu critério dispensar ou não a leitura, retornando ao mesmo conforme a necessidade. Estas definições podem ser encontradas em detalhes em (SOTOMAYOR, 1979).

C.1 Topologia do Espaço Euclidiano

Nesta seção serão apresentados alguns itens relevantes sobre a topologia do espaço euclidiano..

C.1.1 Norma

Seja n um número natural. O espaço *euclidiano* n -dimensional é o produto de n fatores iguais a $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}.$$

Os pontos de $\mathbb{R}^n$ são todas as n -listas $x = (x_1, \dots, x_n)$ cujas coordenadas $x_1, \dots, x_n$ são números reais.

É conhecido da álgebra linear que $\mathbb{R}^n$ com as operações usuais de soma e multiplicação tem estrutura de espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo dos reais.

Um *produto interno* num espaço vetorial real E é uma aplicação $\langle, \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ que faz corresponder a cada par de vetores $x, y \in E$ um número real, indicado por $\langle x, y \rangle$, de tal modo que, para quaisquer $x, z, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, valham:

$$P1. \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle;$$

$$P2. \quad \langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle;$$

$$P3. \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle;$$

$$P4. x \neq 0 \implies \langle x, x \rangle > 0.$$

Um exemplo de produto interno em $\mathbb{R}^n$ e o mais importante é o produto interno canônico, o qual é dado por

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n,$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, escreveremos $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, onde $\langle, \rangle$ é o produto interno canônico. Assim,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

O número $\|x\|$ chama-se a *norma euclidiana*. A norma euclidiana goza das seguintes propriedades, onde $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $|\alpha|$ significa o valor absoluto do número real α :

$$N1. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;$$

$$N2. \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|;$$

$$N3. x \neq 0 \implies \|x\| > 0.$$

De um modo geral, uma *norma* num espaço vetorial E é qualquer função real $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpra as condições N1, N2 e N3 acima. Há uma infinidade de normas que se podem considerar no espaço euclidiano.

Uma norma num espaço vetorial E dá origem a uma noção de distância em E . Dados $x, y \in E$, a *distância* de x a y é definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Verifica-se facilmente que a distância goza das seguintes propriedades, para $x, y, z \in E$ quaisquer:

$$d1. d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z);$$

$$d2. d(x, y) = d(y, x);$$

$$d3. x \neq y \implies d(x, y) > 0.$$

A primeira dessas propriedades é chamada a desigualdade triangular.

C.2 Equações Diferenciais Ordinárias

O modo mais comum para definir um sistema dinâmico de tempo contínuo é através de equações diferenciais ordinárias do tipo $\dot{x} = f(x)$ onde $f(x)$ representa um vetor de funções. Um sistema dinâmico em que a equação diferencial ordinária depende explicitamente do tempo é dito ser um sistema dinâmico variante no tempo ou um sistema dinâmico não autônomo. Caso não dependa diretamente do tempo é dito ser um sistema dinâmico autônomo.

C.2.1 Teoria Geral

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e I um intervalo não degenerado da reta.

Definição C.2.1 Uma função diferenciável $\varphi : I \longrightarrow \Omega$ é uma solução da equação diferencial ordinária

$$\dot{x} = f(x)$$

no intervalo I se o gráfico de φ em I está contido em Ω e

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(\varphi(t)) \text{ para todo } t \in I.$$

Se uma condição inicial é conhecida, a solução $\varphi(t)$, também deve satisfazer essa condição. Dessa forma, para um problema de valor inicial (P.V.I.)

$$\dot{x} = f(x); x(0) = x_0$$

deve se achar uma solução φ tal que tanto a equação diferencial quanto a condição inicial estejam satisfeitas. Nesse sentido, o teorema de existência e unicidade, mostrado a seguir estabelece quais são as condições para se a existência e a unicidade das soluções num determinado conjunto denotado por Ω .

Teorema C.2.1 Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e $x_0 \in \Omega$. Então existe um $\alpha > 0$ e uma única solução $\varphi : (-\alpha, \alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ do (P.V.I.)

$$\dot{x} = f(x); x(0) = x_0$$

com $\varphi(0) = x_0$.

Supondo ainda que as hipóteses do Teorema anterior estejam satisfeitas. Então para cada $x_0 \in \Omega$ existe uma única solução maximal $\varphi(\cdot, x_0)$ de

$$\dot{x} = f(x); x(0) = x_0$$

definida num intervalo maximal de existência de φ . Denota-se este intervalo maximal por $I_{x_0} = (w_-(x_0), w_+(x_0))$.

Uma questão importante da teoria de equações diferenciais ordinárias (E.D.O.) é a continuidade da solução com relação as condições iniciais. Nessa linha, tem-se o seguinte resultado:

Teorema C.2.2 Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 . Considere $\varphi(t, x_0)$ a solução do (P.V.I.)

$$\dot{x} = f(x); x(0) = x_0$$

definida no seu intervalo maximal de existência $(w_-(x_0), w_+(x_0))$. Então

$$D = \{(t, x_0) : x_0 \in \Omega \text{ e } t \in (w_-(x_0), w_+(x_0))\}$$

é aberto em $\mathbb{R} \times \Omega$ e φ é contínua em D .

Além da continuidade com relação as condições iniciais a solução de uma E.D.O. autônoma satisfaz as seguintes propriedades:

- (1) $\varphi(0, x) = x$ para todo $x \in \Omega$;
- (2) $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ para todo $x \in \Omega$ e todos $t, s \in \mathbb{R}$ tais que $t + s \in (w_-(x), w_+(x))$ e $t \in (w_-(\varphi(s, x)), w_+(\varphi(s, x)))$.

Observação C.2.1 A aplicação f é também chamada de campo vetorial e a aplicação $t \longrightarrow \varphi(t, x_0)$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$ define uma curva em Ω , passando por x_0 , a qual denomina-se trajetória ou órbita passando por x_0 , e que denotaremos pelo conjunto $\{\varphi(t, x_0); t \in (w_-(x_0), w_+(x_0))\}$. A unicidade das soluções garante que as trajetórias não se interceptam.

Neste trabalho, estudam-se os modelos descritos pela equação diferencial ordinária não linear

$$\dot{x} = f(x) \tag{C.1}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é pelo menos um campo vetorial de classe C^1 . Além disso, por questão de simplicidade e até mesmo pelo fato de que geralmente as equações diferenciais ordinárias que representam modelos físicos estejam definidas para todo o tempo, considera-se que a equação (C.1) é tal que as soluções estejam definidas para todo o tempo.

C.2.2 Comportamento Assintótico

Dada uma condição inicial do sistema (C.1) pode-se perguntar o que acontece com a trajetória que passa por x_0 quando o tempo tende para o ∞ ou $-\infty$. Usualmente estas trajetórias se aproximam de equilíbrios, ciclos limites, órbitas quase-periódicas, órbitas caóticas ou até mesmo união de um certo conjunto de órbitas. Todos esses conjuntos mencionados acima onde a trajetória pode se aproximar são chamados de conjuntos limites, cuja definição matemática e algumas de suas propriedades serão exploradas a seguir.

Definição C.2.2 Um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é um ponto ω -limite da solução $\varphi(t, x_0)$ de (C.1) se existir uma sequência $\{t_j\}$, com $t_j \longrightarrow +\infty$ quando $j \longrightarrow +\infty$, tal que $\varphi(t_j, x_0) \longrightarrow p$ quando $j \longrightarrow +\infty$. O conjunto de todos os pontos ω -limite de $\varphi(t, x_0)$ é chamado conjunto ω -limite da solução $\varphi(t, x_0)$, ou simplesmente, ω -limite de x_0 , e é denotado por $\omega(x_0)$.

Definição C.2.3 Um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é um ponto α -limite da solução $\varphi(t, x_0)$ de (2.1) se existir uma sequência $\{t_j\}$, com $t_j \rightarrow -\infty$ quando $j \rightarrow +\infty$ tal que $\varphi(t_j, x_0) \rightarrow p$ quando $j \rightarrow +\infty$. O conjunto de todos os pontos α -limite de $\varphi(t, x_0)$ é chamado conjunto α -limite da solução $\varphi(t, x_0)$, ou simplesmente, α -limite de x_0 , e é denotado por $\alpha(x_0)$.

O próximo teorema exhibe propriedades para o conjunto ω -limite de uma solução qualquer $\varphi(t, x_0)$ de (C.1). De maneira análoga vale as mesmas propriedades valem para o conjunto α -limite.

Teorema C.2.3 O conjunto ω -limite de uma solução $\varphi(t, x_0)$ do sistema autônomo (C.1) é fechado e invariante.

C.2.3 Equilíbrios e Estabilidade Local

Dada uma solução conhecida do sistema (C.1) muitas vezes é de interesse saber qual o comportamento qualitativo do sistema nas vizinhanças dessa solução, nesse sentido é a teoria de estabilidade que fornece todo o ferramental matemático para se entender fenômenos relacionados a esse tipo de problema. Na literatura existem diversas definições sobre conceitos que envolvem estabilidade, nesse texto utilizaremos a definição de estabilidade no sentido de Lyapunov.

Uma solução $\varphi(t)$ do sistema (C.1) é estável quando toda solução com valores iniciais próximos aos de $\varphi(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ e permanece próxima de $\varphi(t)$ quando $t \rightarrow +\infty$. Utilizando a formulação matemática o que foi escrito acima toma o seguinte aspecto.

Definição C.2.4 Seja $\varphi(t)$ um solução de (C.1) definida para $t \geq 0$. Diz-se que $\varphi(t)$ é estável se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que se $\psi(t)$ é solução de (C.1) e $\|\psi(0) - \varphi(0)\| < \delta$ então $\psi(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ e $\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$. Se além disso existir $\delta_1 > 0$ tal que $\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \delta_1$ implica $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\psi(t) - \varphi(t)\| = 0$, então φ diz-se assintoticamente estável.

Um caso especial de soluções apresentados a seguir são os pontos de equilíbrio. É nesse tipo de solução que existe o interesse para estudos de estabilidade.

Definição C.2.5 Um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio do sistema (C.1) se $f(x^*) = 0$.

Note que, se $x^* \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio do sistema (C.1), então a solução φ de (C.1) iniciando em x^* no tempo $t = 0$ é a função constante, ou seja, $\varphi(t) = x^*$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sem maiores dificuldades pode-se verificar que o ponto de equilíbrio é um conjunto invariante de (C.1).

Um pergunta que pode ser feita é como calcular pontos de equilíbrio para um sistema do tipo (C.1), uma vez que dependendo da complexidade do modelo, o cálculo de tais equilíbrios se torna complicado até mesmo usando ferramental numérico. Por outro lado, conhecendo o ponto de equilíbrio analisa-se o comportamento local do modelo nas vizinhanças deste ponto de equilíbrio. Neste sentido, os conceitos propostos abaixo caracterizam a estabilidade de pontos de equilíbrio.

Definição C.2.6 *Um ponto de equilíbrio x^* de (C.1) é estável se, para cada $\epsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que, para toda condição inicial x_0 satisfazendo $\|x_0 - x^*\| < \delta$, tem-se $\|\varphi(t, x_0) - x^*\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$.*

Definição C.2.7 *Um ponto de equilíbrio x^* do sistema (C.1) é instável se ele não é estável.*

Um outra propriedade interessante dos pontos de equilíbrio é a atratividade definida a seguir.

Definição C.2.8 *Um ponto de equilíbrio x^* é atrativo se existir $\delta > 0$ tal que a bola aberta $B(x^*; \delta)$ tem a seguinte propriedade:*

$$x_0 \in B(x^*; \delta) \implies \varphi(t, x_0) \longrightarrow x^* \text{ quando } t \longrightarrow +\infty.$$

Definição C.2.9 *Um ponto de equilíbrio de (C.1) é assintoticamente estável se for estável e atrativo.*

Em algumas situações, deseja-se que não apenas o ponto de equilíbrio seja assintoticamente estável, mas também que todas as soluções tendam para este equilíbrio quando o tempo tende ao infinito. Para isto, define-se o conceito de estabilidade global assintótica.

Definição C.2.10 *Um ponto de equilíbrio de (C.1) é globalmente assintoticamente estável se ele é estável e para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(t, x_0) \longrightarrow x^*$ quando $t \longrightarrow +\infty$.*

Da definição anterior pode-se concluir que, se x^* é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável de (C.1), então ele é único.

Definição C.2.11 *Um ponto de equilíbrio x^* de (C.1) é hiperbólico se todos os autovalores da matriz Jacobiana do sistema linearizado associado possuem parte real não nula.*

A demonstração destas definições podem ser encontradas de forma detalhada em (SOTOMAYOR, 1979).