UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DANIEL SOUTO SIQUEIRA

**Aplicação de Funções Energia
Generalizadas de Controle no Projeto de
Reguladores para TCSCs em Sistemas
Elétricos de Potência**

DANIEL SOUTO SIQUEIRA

**Aplicação de Funções Energia
Generalizadas de Controle no Projeto de
Reguladores para TCSCs em Sistemas
Elétricos de Potência**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Sistemas Elétricos de Potência

ORIENTADOR: Prof. Dr. Newton Geraldo Bretas

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Luís F. C. Alberto

São Carlos
2017

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

S622a	<p>Siqueira, Daniel Souto</p> <p>Aplicação de funções energia generalizadas de controle no projeto de reguladores para TCSCs em sistemas elétricos de potência / Daniel Souto Siqueira; orientador Newton Geraldo Bretas; coorientador Luís Fernando Costa Alberto. -- São Carlos, 2017.</p> <p>Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica e Área de concentração em Sistemas Elétricos de Potência). -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2017.</p> <p>1. Controle não linear. 2. Função energia. 3. Função energia generalizada. 4. Função Energia Generalizada de Controle. 5. Dispositivos FACTS 6. Dispositivos TCSC. 7. Sistemas Elétricos de Potência I. Título.</p>
-------	--

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **DANIEL SOUTO SIQUEIRA**.

Título da tese: "Aplicação de funções energia generalizadas de controle no projeto de reguladores para TCSCs em sistemas elétricos de potência".

Data da defesa: 06.03.2017.

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**
(Presidente designado)
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Titular **Marco Henrique Terra**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Associado **José Carlos de Melo Vieira Junior**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Aguinaldo Silveira e Silva**
(Universidade Federal de Santa Catarina/UFSC)

Aprovado

Prof. Dr. **Luiz Carlos Pereira da Silva**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica:
Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**

Aos meus Pais, Idelvando e Eni

Agradecimentos

A Deus por estar sempre ao meu lado, por conceder serenidade e coragem durante todo o caminho.

Ao Professor Newton G. Bretas, pela oportunidade, confiança, orientações, conselhos e ensinamentos.

Ao Professor Luís Fernando Costa Alberto, pela co-orientação, auxílios, ensinamentos e contribuições efetivas para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais, Idelvando e Eni pelo apoio incondicional, estímulo e amor. Às minhas irmãs Helen, Isabela e Bruna pelo carinho e compreensão. A minha namorada Thais pelo incentivo, companheirismo e amor.

Aos professores e colegas do LACO (Laboratório de Análise Computacional em Sistemas Elétricos de Potência) que estiveram presentes nos momentos de aprendizado e que foram essenciais à conclusão deste trabalho.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro concedido a esta pesquisa sob o número 2011/23345-8.

Resumo

SIQUEIRA, D. S.(2017). *Aplicação de Funções Energia Generalizadas de Controle no Projeto de Reguladores para TCSCs em Sistemas Elétricos de Potência*. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

O dispositivo TCSC vem sendo utilizado com grande eficiência em sistemas elétricos de potência para melhoria da estabilidade transitória e para fornecer amortecimento às oscilações eletromecânicas. Diversos trabalhos vêm sendo desenvolvidos com o intuito de sintetizar leis de controle para estes dispositivos. A maioria das técnicas empregadas para o projeto de controle em sistemas elétricos de potência utilizam modelos linearizados. Controladores projetados com técnicas lineares podem perder eficiência quando este ponto de operação varia de forma significativa. Controladores não lineares podem oferecer maior robustez a estas variações. Dentre várias técnicas de projeto de controle não linear, os métodos baseados em funções de Lyapunov e/ou funções energia têm sido amplamente utilizados em sistemas elétricos de potência. Estas técnicas requerem a existência de uma função de Lyapunov e/ou função energia para o projeto, entretanto, mostrou-se que não existem funções de Lyapunov e/ou funções energia gerais para modelos de sistemas elétricos mais complexos que consideram, por exemplo, as perdas do sistema. Funções energia generalizadas (FEG) surgiram como uma alternativa para lidar com estas classes de modelos que apresentam comportamento complexo.

Apresentamos neste trabalho uma função energia generalizada para modelos de sistemas elétricos de potência preservando a estrutura da rede elétrica, com um modelo de terceira ordem para os geradores síncronos e considerando as perdas no sistema de transmissão. Com a FEG proposta, sintetizamos leis de controle não lineares para dispositivos TCSC, que independe da topologia da rede, utilizando sinais de realimentação locais e/ou remotos. As leis de controle projetadas melhoram significativamente a dinâmica do sistema e aumentam consideravelmente a região de estabilidade do sistema.

Palavras-chave: Controle não Linear, Função Energia, Função Energia Generalizada, Função Energia Generalizada de Controle, Dispositivos FACTS, Dispositivos TCSC, Sistemas Elétricos de Potência.

Abstract

SIQUEIRA, D. S.(2017). *Application of Control Generalized Energy Function on Design of Regulators for TCSCs in Electric Power Systems*. Ph.D thesis, School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2017.

The TCSC device has been used with great efficiency in electric power systems to improve transient stability and to provide damping to electromechanical oscillations. Several studies have been developed in order to synthesize control laws for these devices. Most of the techniques used to design controller in electric power systems use linearized models. Controllers designed with linear techniques can lose efficiency when the operating point varies significantly. Nonlinear controllers can provide robustness to these variations. Among various techniques for nonlinear control design, the ones based on Lyapunov functions and/or energy functions have been widely used in electric power systems. These techniques require the existence of a Lyapunov function and/or energy function for the design, however, it was shown the non existence of Lyapunov function and/or general energy function for comprehensive electrical power system models, such as, system with losses. Generalized energy functions emerged as an alternative to deal with these classes of models that exhibit complex behavior.

Here we develop a generalized energy function to electrical power system models preserving the structure of the network, with a third-order model for synchronous generators and considering losses in the transmission system. With the proposed generalized energy function, nonlinear control laws are synthesized for TCSC devices, which are independent of the network topology, employ local and/or remote feedback signals. The designed control laws significantly improve the system dynamics and greatly increase stability regions of electrical power system.

Keywords: Nonlinear Control, Energy Function, Generalized Energy Function, Control Generalized Energy Function, FACTS Devices, TCSC Devices, Electrical Power Systems.

Lista de Ilustrações

2.1	Modelo físico do gerador síncrono.	33
2.2	Conjugados no rotor de um gerador síncrono.	34
2.3	Modelo físico do gerador.	36
2.4	Circuito elétrico equivalente do gerador síncrono.	36
2.5	Representação dos eixos de referência da rede elétrica e do gerador.	41
3.1	Modelo π com parâmetros concentrados da linha de transmissão.	45
3.2	Modelo π da linha de transmissão com a convenção adotada para cálculo do fluxo de potência.	46
3.3	Modelo do transformador defasador generalizado.	47
4.1	Diferentes limites de transferência de potência nas linhas de transmissão (MATHUR; VARMA, 2002).	51
4.2	Classificação dos dispositivos FACTS	52
4.3	Dispositivo FACTS conectado em paralelo.	53
4.4	Dispositivo FACTS conectado em série.	53
4.5	Configuração Típica do TCSC.	55
4.6	Reator Controlado a Tiristor.	55
4.7	Curva característica da impedância equivalente do TCSC.	56
4.8	Configuração do TCSC com vários estágios de compensação.	57
4.9	Modelo dinâmico do TCSC.	57
4.10	Linha de transmissão com o TCSC instalado.	58
4.11	Representação do TCSC na linha como reatância capacitiva.	58
4.12	Modelo do dispositivo TCSC na rede elétrica.	58
5.1	Ilustração da definição de ponto de equilíbrio estável.	66
5.2	Ilustração da definição de ponto de equilíbrio assintoticamente estável.	66
5.3	Função de Lyapunov para o sistema (5.3).	67
5.4	Comportamento da função de Lyapunov e da derivada da função de Lyapunov ao longo do tempo para o sistema (5.3).	68

5.5	Plano de fase do sistema (5.8) em malha aberta ($u = 0$).	70
5.6	Retrato de fase do sistema em malha fechada, $h(x) = x_1^2 - 2x_2$	71
5.7	Plano de fase do sistema em malha fechada ($h(x) = -2x_2$) e estimativa da região de estabilidade da origem.	72
5.8	Relações entre as trajetórias dos sistemas A-D (5.16) e S-P (5.18 (CHIANG; ALBERTO, 2015)).	74
5.9	Relações entre as fronteiras das regiões de estabilidade e os pontos de equilíbrio dos sistemas A-D e S-P.	75
6.1	Ilustração do teorema 6.1.4: A componente conexa $S_c(L)$ é uma estimativa da região de estabilidade via função energia.	79
6.2	Região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade via função energia do sistema (6.3).	81
6.3	Plano de fase do sistema (6.12) em malha aberta ($u = 0$).	84
6.4	Região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade via função energia de controle do sistema em malha fechada (6.12).	84
7.1	Função energia generalizada e seus conjuntos limitados $C_{i's}$	88
7.2	Ilustração do teorema 7.1.1:(A) Toda solução limitada ou tem uma intersecção não vazia com C_j ($\phi_1(t)$), ou se aproxima do conjunto M , na fronteira de C ($\phi_2(t)$). (B) O conjunto ω -limite de um sistema dinâmico não linear complexo pode interceptar mais de uma componente conexa C_j de C	89
7.3	Ilustração do teorema 7.1.3: A componente conexa $S_c(L)$ é uma estimativa da região de estabilidade via função energia generalizada.	90
7.4	Relações entre os pontos de equilíbrio e as regiões de derivada positivas.	92
7.5	Região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade do ponto de equilíbrio x^{s3} via função energia generalizada.	92
7.6	Plano de fase do sistema (7.8) em malha aberta ($u = 0$).	94
7.7	Região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade via função energia generalizada de controle do sistema em malha fechada (7.8).	95
8.1	Relações entre os pontos de equilíbrio do sistema (8.80) e as regiões de derivada positiva (conjuntos $C_{i's}$) da função energia generalizada (8.81).	125
8.2	Região de estabilidade, fronteira da região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade do sistema (8.80).	125
8.3	Comportamento ao longo do tempo da função energia generalizada para a condição inicial $(x_1, x_2) = (-1; 0,5)$ para o sistema (8.80).	126
8.4	Região de estabilidade, fronteira da região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade do sistema (8.86).	127
8.5	Comportamento ao longo do tempo da função energia generalizada para a condição inicial $(y_0, z_0) = (1,5; 4)$ do sistema (8.86).	128

8.6	Estimativa da região de estabilidade do sistema (8.92).	129
8.7	Fronteira da região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade do sistema (8.92).	130
8.8	Região de estabilidade, fronteira da região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade do sistema (8.92).	130
8.9	Comportamento ao longo do tempo da função energia generalizada para a condição inicial $(x_0, y_0, z_0) = (1; 0,9; 0,5)$ para o sistema (8.92).	131
9.1	Representação de um sistema elétrico de potência.	136
9.2	Modelo TCSC na rede elétrica.	137
9.3	Diagrama de controle do conversor de potência distribuído (LEE; CHU; CHENG, 2013).	138
9.4	Conversor de Potência versus Barramento Infinito.	143
9.5	Estimativa da região de estabilidade do sistema (9.30).	144
9.6	Comportamento ao longo do tempo da função energia generalizada para a condição inicial $(\theta, V) = (1, 25; 0,44)$ para o sistema (9.30).	145
9.7	Gerador síncrono versus barramento infinito.	145
9.8	Estimativa da região de estabilidade do sistema (9.33).	146
9.9	Fronteira da região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade do sistema (9.33).	147
9.10	Região de estabilidade, fronteira da região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade do sistema (9.33).	147
9.11	Comportamento ao longo do tempo da função energia generalizada para a condição inicial $(E, \delta, \omega) = (1,1; 0,8; -0,8)$ para o sistema (9.33).	148
9.12	Geradores síncronos e conversor de potência conectado em um sistema de três barras.	148
9.13	Região de estabilidade, fronteira da região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade do sistema (9.38).	150
9.14	Comportamento ao longo do tempo da função energia generalizada para a condição inicial $(\theta_1, V_1, \theta_2, V_2, E_1, \delta, \omega) = (0,2022; 1,0008; 0,0978; 0,9960; 0,9907; 0,6388; 1)$ para o sistema (9.38).	151
10.1	Sistema gerador vs barramento infinito com dispositivo TCSC instalado. . . .	158
10.2	Comportamento dinâmico do sistema (10.20) com a atuação do controle LC1 . . .	159
10.3	Comportamento dinâmico do dispositivo TCSC.	160
10.4	Comparação entre as regiões de estabilidade sistema (10.20) sem controle e com o controle não linear LC1	161
10.5	Comportamento dinâmico do sistema (10.20) com a atuação do controle LC2 . .	163
10.6	Comportamento dinâmico da reatância do dispositivo TCSC.	163

10.7	Comparação entre as regiões de estabilidade sistema (10.20) sem controle e com o controle não linear LC2	164
10.8	Sistema da figura 9.1 dividido em p áreas.	165
10.9	Comportamento dinâmico do sistema (10.20) com a atuação do controle LC3	167
10.10	Comportamento dinâmico a reatância do dispositivo TCSC.	168
10.11	Comparação entre as regiões de estabilidade sistema (10.20) sem controle e com o controle não linear LC3	168
11.1	Sistema teste 1: 4 Barras, 1 Gerador (CEPEL, 2012).	172
11.2	Sistema teste 1: regulador de tensão do gerador (CEPEL, 2012).	172
11.3	Sistema teste 1: malha de controle do dispositivo TCSC.	173
11.4	Sistema teste 1 - autovalores no plano complexo: (A) TCSCs operando com controle não linear 1 ; (B) TCSCs operando com controle não linear 2	174
11.5	Sistema teste 1: ângulo em graus e velocidade em p.u. do gerador.	175
11.6	Sistema teste 1: frequências das Barras 2 e 4 em Hz.	176
11.7	Sistema teste 1: fluxos de Potência nas linhas 2-3 e 2-4 do sistema em p.u..	176
11.8	Sistema teste 1: reatância do TCSC.	177
11.9	Sistema teste 1: fluxo de Potência na linha 2-4 para um degrau na referência do PI de 0.1.	177
11.10	Sistema teste 2 - 11 barras, 4 Geradores, 2 Áreas (KUNDUR, 1994).	178
11.11	Autovalores do sistema teste 2 no plano complexo sem estabilizadores.	179
11.12	Sistema teste 2 com dois dispositivos TCSCs instalados.	180
11.13	Sistema teste 2: malha de controle dos dispositivos TCSCs.	180
11.14	Sistema teste 2 - autovalores no plano complexo: (A) TCSCs operando com controle não linear 1 ; (B) TCSCs operando com controle não linear 2	182
11.15	Sistema teste 2 com TCSCs: ângulos dos geradores do sistema em [graus].	183
11.16	Sistema teste 2 com TCSCs: frequências dos geradores do sistema em [Hz].	183
11.17	Sistema teste 2: Reatâncias dos dispositivos TCSCs.	184
11.18	Estrutura típica de um PSS.	184
11.19	Sistema teste 2 - autovalores no plano complexo: (A) PSSs e TCSCs operando com controle não linear 1 ; (B) PSSs e TCSCs operando com controle não linear 2	185
11.20	Sistema teste 2 com PSSs e TCSCs: ângulos dos geradores em [graus].	186
11.21	Sistema teste 2 com PSSs e TCSCs: frequências dos geradores em [Hz].	186
11.22	Sistema teste 2: reatâncias dos dispositivos TCSCs.	187
11.23	Diagrama unifilar do sistema teste New England/New York.	188
11.24	Autovalores do sistema teste 3 no plano complexo sem estabilizadores.	190
11.25	Diagrama unifilar do sistema teste New England/New York com inclusão do dispositivo TCSC.	191

11.26 Sistema teste 3 - autovalores do sistema no plano complexo com um PSS no gerador G9 e TCSCs operando com o controle não linear 2	193
11.27 Sistema teste 3 com PSS em G9 e com os TCSCs operando com o controle não linear 2 - ângulos dos geradores.	194
11.28 Sistema teste 3: reatância dos dispositivos TCSCs operando com o controle não linear 2	194
11.29 Sistema teste 3 - autovalores no plano complexo com apenas a operação dos PSSs.	195
11.30 Sistema teste 3 - autovalores no plano complexo: (A) PSSs e TCSCs operando com controle não linear 1 ; (B) PSSs e TCSCs operando com controle não linear 2	196
11.31 Sistema teste 3 com PSSs e TCSCs: ângulos dos geradores em [graus]. . . .	197
11.32 Sistema teste 3 com PSSs e TCSCs: frequências dos geradores em [Hz]. . . .	198
11.33 Sistema teste 3: reatâncias dos dispositivos TCSCs.	198

Lista de Tabelas

4.1	Aplicações práticas de dispositivos FACTS	54
11.1	Dados do sistema teste 1: 4 barras, 1 gerador.	172
11.2	Sistema teste 1: módulo e ângulo da tensão das barras.	173
11.3	Sistema teste 1: autovalores do sistema com controle PI para o TCSC	174
11.4	Sistema teste 1 - tempos críticos de eliminação das faltas.	175
11.5	Sistema teste 2: dados dos geradores.	178
11.6	Sistema teste 2: parâmetros das linhas.	178
11.7	Sistema teste 2: potência fornecida pelos geradores.	179
11.8	Sistema teste 2: parâmetros das linhas 8-12 e 8-13.	180
11.9	Sistema teste 2: parâmetros dos TCSCs 7-12 e 9-13.	180
11.10	Sistema teste 2: lista de contingência.	182
11.11	Sistema teste 2 com TCSCs - tempos críticos de eliminação das faltas. . . .	182
11.12	Sistema teste 2: parâmetros dos PSSs.	184
11.13	Sistema teste 2 com PSSs e TCSCs - tempos críticos de eliminação das faltas.	185
11.14	Sistema teste 3: resultado do fluxo de potência do sistema.	188
11.15	Sistema teste 3: parâmetros das linhas 49-69, 60-70 e 41-71.	191
11.16	Sistema teste 3: parâmetros dos TCSCs 18-69, 42-71 e 61-70.	191
11.17	Sistema teste 3: parâmetros do PSS em G9	193
11.18	Sistema teste 3: parâmetros dos PSSs (RAMOS et al., 2014).	195
11.19	Sistema teste 3: lista de contingência.	196
11.20	Sistema teste 3 com PSS e TCSC - tempos críticos de eliminação das faltas. .	197

Lista de Abreviaturas

AG	Algoritmo Genético
AVR	Automatic voltage regulator
CSC	Compensadores séries controlados
FACTS	Flexible AC transmission system
FE	Função Energia
FEC	Função Energia de Controle
FEG	Função Energia Generalizada
FEGC	Função Energia Generalizada de Controle
FLC	Função Lyapunov
FLC	Função Lyapunov de Controle
GTO	Gate Turn-Off thyristor
GCSC	Gate Controlled Series Capacitor
HVDC	High Voltage Direct Current
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
IGBT	Insulated Gate Bipolar Transistor
IGCT	Integrated Gate Commutated Thyristor
IPFC	Interline Power Flow Controller
LMI	Linear matrix inequality
LQG	Linear-quadratic-gaussian
PBC	Passivity-based control
PI	Proporcional-integral
PID	Proporcional-integral-derivativo
PSS	Power system stabilizer
RAF	Phase Angle Regulators
SEP	Sistema elétrico de potência

SSSC	Static Synchronous Series Compensator
STATCOM	Static Var Compensator
SVC	Static Var Compensator
TCSC	Thyristor controlled Series Capacitor
TCR	Thyristor Controlled Reactor
TSC	Thyristor Switched Capacitor
TSSC	Thyristor Switched Series Capacitor
UPFC	Unified Power Flow Controller

Sumário

1	Introdução	23
1.1	Contribuições	28
1.2	Estrutura do Trabalho	28
 Parte I Modelos dos Componentes de Sistemas Elétricos de Potência para estudos de Estabilidade		31
2	Modelagem de Geradores Síncronos	33
2.1	Equações Mecânicas	34
2.2	Equações Elétricas	36
2.3	Modelo para Estudo de Estabilidade	38
3	Modelagem dos Componentes da Rede Elétrica	45
3.1	Modelos de Linhas de Transmissão	45
3.2	Modelos de Transformadores	47
3.3	Modelos de Cargas	48
3.4	Modelo Algébrico da Rede Elétrica	50
4	Dispositivos FACTS	51
4.1	Dispositivo TCSC	54
4.2	Modelagem do Dispositivo TCSC na Rede Elétrica	58
 Parte II Análise e Controle de Sistemas Dinâmicos não Lineares		61
5	Fundamentos da Teoria de Sistemas Dinâmicos Não Lineares	63
5.1	Conceitos Preliminares	63
5.2	Teoria de Lyapunov	65
5.3	Teoria de Sistemas Singularmente Perturbados	72

6	Função Energia	77
6.1	Função Energia e Região de Estabilidade	77
6.2	Função Energia de Controle	82
7	Função Energia Generalizada	87
7.1	Função Energia Generalizada e Região de Estabilidade	87
7.2	Funções Energia Generalizada de Controle	93
8	Funções Energia Generalizadas para Classes de Sistemas Dinâmicos	97
8.1	Existência de Funções Energia Generalizadas	97
8.2	Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade para classes de Sis- temas Dinâmicos não Lineares	118
8.3	Exemplos Numéricos	123
Parte III Análise e Controle de Sistemas Elétricos de Potência		133
9	Função Energia Generalizada para Sistemas Elétricos de Potência	135
9.1	Construindo uma Função Energia Generalizada para SEP Modelados com a Estrutura da Rede Preservada	136
9.2	Exemplos Numéricos	143
10	Metodologia de Projeto de Controladores Não Lineares para Disposi- tivos TCSC	153
10.1	Modelo Dinâmico de um Sistema Elétrico de Potência com Dispositivos TCSCs	153
10.2	Metodologia de Projetos de Controladores Não Lineares via Função Energia Generalizada de Controle	155
11	Simulações e Resultados	171
11.1	Sistema teste 1	172
11.2	Sistema teste 2	178
11.3	Sistema teste 3	187
12	Conclusões e Perspectivas futuras	201
	Referências	203

Capítulo 1

Introdução

O problema de estabilidade em sistemas elétricos de potência é um dos mais complexos relatados em sistemas físicos. A sua análise envolve diferentes cenários e exige uma constante revisão e desenvolvimento de técnicas e dispositivos que atuem no sentido de aumentar os limites de estabilidade desses sistemas.

Os sistemas elétricos de potência são projetados para fornecer energia dos centros geradores aos centros consumidores através de linhas de transmissão. Estes sistemas estão suscetíveis a falhas podendo levar a problemas de estabilidade.

A utilização da compensação de potência reativa através de capacitores ou compensadores estáticos de reativos tem sido objeto de muito estudo, uma vez que, promovem o aumento da capacidade de transferência de potência. Em geral, quando esta capacidade é aumentada, as perdas nas linhas são minimizadas, ocorre uma melhoria na regulação de tensão e na estabilidade transitória (NATARAJAN, 2005).

A conexão em série de capacitores com a linha produz efeitos muito benéficos na melhoria da estabilidade (KIMBARK, 1966; NOROOZIAN et al., 2001; GRUNBAUM; HALVARSSON; JONES, 2010). A sua utilização de forma dinâmica vem sendo investigada desde meados dos anos 60 (KIMBARK, 1966). Por exemplo, KIMBARK (1966) já propunha tais controladores e mostrava que tais controles levavam a uma melhoria significativa dos limites de estabilidade transitória do sistema. Porém, apenas no final dos anos 80, com o desenvolvimento dos dispositivos FACTS, que houve grandes investimentos de fabricantes de equipamentos e organizações de pesquisa neste tema.

Os dispositivos FACTS (*Flexible AC Transmission Systems* - Sistemas Flexíveis em Corrente Alternada) foram propostos por HINGORANI (1988, 1991) com a função de controlar o fluxo de energia em linhas específicas em regime permanente e em regime transitório, tornando a rede eletronicamente controlada, alterando assim os modos de operação e controle (ACHA, 2004).

Da família dos FACTS o TCSC (*Thyristor Controlled Series Capacitor* - Capacitor Série Controlado a Tiristor) é um dispositivo altamente confiável que utiliza tecnologia

dos tiristores de potência com a função de variar o grau de compensação em série de linhas de transmissão. É considerado um dos compensadores dinâmicos mais eficazes, pois oferece a possibilidade de um ajuste flexível e de forma rápida dos seus parâmetros, trazendo inúmeros benefícios para a operação e controle de sistemas elétricos de potência, além disto possibilitando a aplicação de teorias avançadas no projeto de controladores desse dispositivo.

Devido as suas características, o TCSC vem sendo utilizado em sistemas de potência não apenas para compensação série de linhas de transmissão, mas também para a melhoria da dinâmica do sistema (NOROOZIAN et al., 2001). Por exemplo, em sistemas elétricos de potência, a instabilidade pode manifestar-se devido a perturbações. Estas perturbações podem causar instabilidades sob a forma de modos não oscilatórios devido a insuficiência de conjugado de sincronização entre geradores (KUNDUR, 1994). O problema de estabilidade relatado é classificado como um problema de estabilidade transitória (KUNDUR, 1994). O dispositivo TCSC pode contribuir para a sincronização desses sistemas, melhorando os limites de estabilidade transitória.

Em um segundo momento, a instabilidade pode se manifestar, mesmo com os geradores em sincronismo, através de modos de oscilações devido à falta de conjugado de amortecimento. Estes modos de oscilações eletromecânicas encontram-se na faixa de frequência de 0,1 a 0,8 [Hz] quando estão relacionados com oscilações de grupos de geradores de áreas diferentes, ou na faixa de frequência de 0,8 a 2 [Hz] quando estão relacionados com oscilações de grupos de geradores da mesma área (KUNDUR, 1994; PAL; CHAUDHURI, 2005). Este problema é classificado como estabilidade dinâmica. Posto isto, muitos autores têm demonstrado a eficácia do TCSC para estabilização e o amortecimento de oscilações eletromecânicas em sistemas elétricos de potência (YANG; LIU; MCCALLEY, 1998a; SWIFT; WANG, 1996; ANGQUIST; LUNDIN; SAMUELSSON, 1993).

Diferentes métodos de controle para síntese de sinais estabilizantes têm sido desenvolvidos e aplicados para atenuar essas oscilações (WANG; SWIFT; LI, 1998; DOLAN; SMITH; MITTELSTADT, 1995a).

Os controles dos dispositivos TCSC são usualmente desenvolvidos com funções específicas. Por exemplo, alguns desenvolvem o controle apenas para o amortecimento das oscilações eletromecânicas ou para atender aos limites de estabilidade transitória ou uma combinação dos dois. Podemos encontrar vários trabalhos que desenvolvem a malha de controle considerando apenas a sua atuação na estabilidade transitória (PASERBA et al., 1995; NELSON et al., 1996; DEL ROSSO; CANIZARES; DONA, 2003; CHUNLIN; XI-ANGNING, 2009), assim como, uma parte considerável dos controladores desenvolvidos para dispositivos TCSC promovem apenas o amortecimento das oscilações eletromecânicas e apresentam diferentes técnicas com este objetivo (YANG; LIU; MCCALLEY, 1998b; SUBRAMANIAN; DEVI, 2010).

Muitas teorias de controle vêm sendo usadas: (i)técnicas de otimização foram aplicadas

para garantir que o controle se adapte a diversas condições de operação (TARANTO; CHOW, 1995; FAN; FELIACHI, 2001); (ii) técnicas através da análise de autovalores e posicionamentos de pólos são utilizadas para fornecer os parâmetro do controle do TCSC otimizando seu desempenho (NOROOZIAN; ADERSSON, 1994; DOLAN; SMITH; MITTELSTADT, 1995b; CHEN et al., 1995; ROUCO; PAGOLA, 1997; LIU; VITTAL; ELIA, 2005).

Além das técnicas empregadas com a intenção de amortecer as oscilações, existem técnicas que têm como propósito combinar as funções, ou seja, atuar tanto no amortecimento das oscilações eletromecânicas como na estabilidade transitória do sistema (CHOI; JIANG; SHRESTHA, 1996). Em CHOI; JIANG; SHRESTHA (1996), um compensador é proposto para um sistema multi-máquinas, com a enésima máquina sendo um barramento infinito e o compensador com uma combinação entre TSC (Thyristor Switched Capacitor) e um TCR (Thyristor Controlled Reactor). O TCR tinha a função de amortecer as oscilações eletromecânicas enquanto o TSC tinha a função de estabilizar o sistema para grandes variações de potência.

Para desempenhar as suas funções, os controladores são projetados utilizando várias técnicas, dentre as quais se destacam técnicas lineares, técnicas não lineares, técnicas de controle inteligentes, etc..

As técnicas clássicas de controle linear ainda são bastante usadas para síntese de controladores FACTS, no entanto, apresentam algumas desvantagens, uma vez que, garantem a estabilidade apenas aos modos presentes no ponto de operação utilizado no projeto, assim perdendo a eficiência quando este ponto de operação varia de forma significativa (KUIAVA, 2007).

Com o objetivo de superar essas desvantagens, uma grande variedade de metodologias de projeto de controladores que vão desde técnicas de controle robusto passando por técnicas de controle inteligentes, até técnicas de controle não lineares têm sido estudadas. Técnicas de controle robusto baseadas em LMIs (*Linear Matrix Inequalities* - Desigualdades Matriciais Lineares), por exemplo, são empregadas em KUIAVA (2007) e MIOTTO (2010) com o objetivo de garantir a estabilidade robusta do sistema com taxas de amortecimento mínimas.

Estratégias inteligentes, incluindo técnicas de otimização (Fuzzy, Algoritmos Genéticos, Algoritmos Evolutivos), (ZHANG et al., 2006; DASH; MISHRA; PANDA, 2000; YUAN; SUN; CHENG, 2007), PID (proporcional-integral-derivativo) (ZULKIFLI et al., 2008) e LQG (linear quadrático-gaussiano) (SON; PARK, 2000) vêm sendo largamente utilizadas no projeto de controladores TCSC, principalmente devido às suas características de inteligência, robustez, auto-adaptabilidade e tolerância a falhas.

Todas as técnicas de projetos anteriores citadas exploram sistemas linearizados e a eficiência dos projetos é verificada através de simulações não lineares do sistema a posteriori. Entretanto, estas análises não garantem que para perturbações que levam o sistema para

pontos distantes daqueles usados para o projeto do controlador, a atuação do controlador seja eficaz e contribua para a estabilização do sistema.

Visando o estudo mais aprofundado dos fenômenos que ocorrem no sistema real, modelos não lineares devem ser empregados, e as técnicas de projeto de controladores baseadas nesses modelos, são cada vez mais desenvolvidas. Dentre tais técnicas podemos destacar: linearização por realimentação (feedback linearization) (POSHTAN; SINGH; RASTGOUFARD, 2006; LI, 2006), função de Lyapunov de controle (FLC) (GHANDHARI et al., 2001; GHANDHARI; ANDERSSON; HISKENS, 2001; GHANDHARI, 2002), controle baseado em passividade (PBC) (WANG; MEI; PANG, 2002), entre outras. A grande dificuldade de algumas dessas técnicas citadas é que as leis de controle obtidas por elas são funções de variáveis de difícil síntese, ou até mesmo, de variáveis globais, as quais possuem dificuldades de empregabilidade.

A técnica de controle baseada na FLC é apresentada por GHANDHARI; ANDERSSON; HISKENS (2001) se mostra muito interessante, uma vez que as leis de controle obtidas pela metodologia são independentes da topologia da rede e da localização da perturbação, utilizando sinais de realimentação locais capazes de aumentar a região de estabilidade do ponto de equilíbrio pós-falta. Porém os modelos utilizados para síntese dessa leis são baseados em modelos simples de sistemas elétricos potência. Por exemplo, em GHANDHARI; ANDERSSON; HISKENS (2001) para a construção da FLC foi utilizado um modelo de 3º ordem para geradores, cargas como impedância constante e as perdas do sistema foram desprezadas. Assim, o método de FLC se mostra inadequado para trabalhar com modelos mais detalhados que aquele relatado, uma vez que não é uma tarefa trivial encontrar uma função de Lyapunov associada a modelos mais detalhados. Além disto, a teoria de Lyapunov não nos fornece bases para uma avaliação sistemática da região de estabilidade de sistemas dinâmicos.

Uma alternativa interessante para análise e controle de sistemas dinâmicos não lineares é a teoria de função energia (FE) (CHIANG; ALBERTO, 2015). Funções energia são úteis para obter estimativas ótimas da região de estabilidade. Por exemplo, o conceito de função energia associado com a teoria de região de estabilidade é a base para os métodos diretos empregados na análise da estabilidade de sistemas elétricos de potência (PAI; PADIYAR; RADHAKRISHNA, 1981; TSOLAS; ARAPOSTATHIS; VARAIYA, 1985; CHIANG; WU; VARAIYA, 1987; ALBERTO; SILVA; BRETAS, 2001; CHIANG, 2011). A existência de funções energia proporciona não só a possibilidade da avaliação de estabilidade de sistemas elétricos de potência, mas também oferece uma medida da margem de estabilidade e ajuda na concepção de controle preventivos (CHIANG; WANG, 1996; ERNST; RUIZ-VEGA; PAVELLA, 2000).

Nesta linha, em SILVA et al. (2009) o conceito de função energia de controle (FEC) foi apresentado. Este conceito, associado com a teoria de função energia apresentada em CHIANG; ALBERTO (2015), torna-se uma importante e poderosa ferramenta de análise e

controle de sistemas dinâmicos. Assim, FEC oferece bases não só para o desenvolvimento de leis de controle para dispositivos FACTS, mas também uma avaliação sistemática da região de estabilidade do sistema com a inclusão desses controladores.

Contudo, não há uma abordagem sistemática para a busca de funções energia. No passado, a existência de funções energia foi investigada para uma grande classe de modelos de sistema de potência (ATHAY; PODMORE; VIRMANI, 1979; PAI; PADIYAR; RADHAKRISHNA, 1981; TSOLAS; ARAPOSTATHIS; VARAIYA, 1985). Na verdade, tem sido demonstrado que as funções energia não existem para modelos de sistemas elétricos de potência com perdas (CHIANG, 1989) e funções energia numéricas (aproximadas) têm sido usualmente empregadas (ATHAY; PODMORE; VIRMANI, 1979; CHIANG, 2011).

A função energia generalizada (FEG) foi apresentada por ALBERTO (2006) e desenvolvida posteriormente por SILVA et al. (2009) com a proposição da função energia generalizada de controle (FEGC). O conceito de FEG e FEGC se baseia na extensão do princípio de invariância de LaSalle (RODRIGUES; ALBERTO; BRETAS, 2000). Assim, este conceito pode ser utilizado tanto para a concepção de controles ou quanto para avaliar a estabilidade através de métodos diretos (BRETAS; ALBERTO, 2003). Com os recentes desenvolvimentos da teoria de função energia generalizada é possível estender as ferramentas baseadas em função energia existentes para sistema elétricos de potência com modelos mais gerais, incluindo modelos de sistemas de energia modernos, que não admitem funções energia no sentido usual.

Uma característica importante da função energia generalizada é que a sua derivada ao longo de trajetórias do sistema, ao contrário da função energia e função de Lyapunov, pode ser positiva em alguns conjuntos limitados. A caracterização completa da fronteira de estabilidade de uma classe de sistemas dinâmicos não-lineares admitindo uma função energia generalizada foi desenvolvida em ALBERTO; CHIANG (2012a). Esta categoria inclui os sistemas que exibem comportamentos complexos em seus conjuntos limites, tais como órbitas fechadas e trajetórias caóticas e, em particular, inclui uma classe de modelos de sistemas elétricos de potência com a estrutura da rede preservada e com perdas.

O desenvolvimento de funções energia generalizadas e a caracterização da fronteira da região de estabilidade de sistemas dinâmicos que admitem funções energia generalizadas tem um grande potencial para permitir o desenvolvimento de métodos diretos para a avaliação da estabilidade de modelos de sistemas elétricos de potência modernos, incluindo aqueles com dispositivos FACTS, dispositivos HVDC e com fontes renováveis. Além disto, o conceito de FEGC permite a elaboração de controladores para estes sistemas modernos.

A existência de uma função energia generalizada para sistemas elétricos de potência é relevante, pois possibilita a análise e controle de sistemas elétricos de potência modernos. Com a FEGC será possível obter leis de realimentação de controle de dispositivos TCSC para estabilização, considerando modelos mais detalhados de sistemas elétricos de potência quando comparados ao modelos utilizado por GHANDHARI; ANDERSSON;

HISKENS (2001), e também uma estimativa da região de estabilidade poderá ser obtida.

Particularmente, esse trabalho visa a utilização da FEGC para síntese de leis de controles estabilizantes para o dispositivo TCSC.

1.1 Contribuições

Neste trabalho empregaremos a técnica de controle não linear baseada na função energia generalizada de controle para o projeto de controladores de dispositivos TCSCs. Além de permitir o projeto do controlador, a técnica fornece a possibilidade de obter uma estimativa da região de estabilidade do sistema e, portanto, pode subsidiar a avaliação sistemática da contribuição do controlador no problema de estabilidade transitória.

As principais contribuições deste trabalho são:

- desenvolvimento de funções energia generalizadas para três importantes classes de sistemas dinâmicos não lineares decorrentes de sistemas elétricos de potência: uma classe de sistemas quase-gradiente, uma classe de sistemas de segunda ordem e uma classe de sistemas de terceira ordem. A caracterização da fronteira da região de estabilidade dessas classes de sistemas dinâmicos também é apresentada;
- construção de uma função energia generalizada para sistemas elétricos de potência modelados com a estrutura da rede elétrica preservada, considerando as perdas do sistema, com a inclusão de dispositivos FACTS, com modelos de cargas dinâmicos, com modelos de 3º ordem de geradores síncronos e com conversores de potência distribuídos;
- síntese de leis de controle não lineares formadas com sinais locais e remotos para sistemas multi-máquinas baseadas na FEGC para dispositivos TCSCs;
- avaliação da região de estabilidade em função das leis de controle projetadas.

1.2 Estrutura do Trabalho

Para um melhor entendimento e organização, esta tese foi dividida em 3 partes: (I) Modelos dos componentes de sistemas elétricos de potência para estudos de estabilidade; (II) Análise e controle de sistemas dinâmicos não lineares; (III) Análise e controle de sistemas elétricos de potência. Assim, o trabalho ficou estruturado da seguinte forma:

■ Parte I: Modelos de Componentes de Sistemas elétricos de Potência -

Nesta parte são apresentados os modelos dos componentes de sistemas de potência com destaque aos dispositivos FACTS. Para o leitor mais experiente acerca dos conhecimentos em sistemas elétricos de potência sugerimos iniciar a leitura a partir da parte II. Esta parte foi dividida em 3 capítulos organizados da seguinte forma:

- No Capítulo 2, **Modelagem de Geradores Síncronos**, são apresentados, de forma resumida, os modelos dinâmicos dos geradores síncronos utilizados no estudo de estabilidade em sistemas elétricos de potência.
- No Capítulo 3, **Modelagem dos Componentes da Rede Elétrica**, são apresentados os modelos dos componentes da rede elétrica mais comuns empregados no estudo de estabilidade de sistemas elétricos de potência. Assim, o mesmo é exposto de forma sucinta com o intuito de permitir uma visão geral sobre os referidos modelos.
- No capítulo 4, **Dispositivos FACTS**, são discutidos aspectos relevantes relacionados aos dispositivos FACTS. Os conceitos sobre dispositivos FACTS são apresentados dando ênfase especificamente ao dispositivo TCSC.

■ **Parte II: Análise e Controle de Sistemas Dinâmicos não Lineares** - Nesta parte são apresentados os conceitos básicos sobre a teoria de sistemas dinâmicos não lineares e uma revisão da teoria de função energia e de função energia generalizada. Além disso é demonstrada a existência de funções energia generalizadas para importantes classes de sistemas dinâmicos não lineares. As contribuições deste trabalho se iniciam a partir do capítulo 8, assim, para o leitor mais experiente acerca dos conhecimentos em análise e controle de sistemas dinâmicos sugerimos iniciar a leitura a partir do referido capítulo.. Esta parte ficou dividida em 4 capítulos estruturados como se segue:

- No Capítulo 5, **Fundamentos da Teoria de Sistemas Dinâmicos Não Lineares**, são apresentados conceitos relevantes da teoria de sistemas dinâmicos não lineares, em particular para o entendimento dos conceitos relacionado a teoria de funções energia e de funções energia generalizadas.
- No Capítulo 6, **Função Energia**, uma revisão da teoria de função energia é apresentada.
- No Capítulo 7, **Função Energia Generalizada**, uma revisão da teoria de função energia generalizada é apresentada.
- No capítulo 8, **Funções Energia Generalizadas para Classes de Sistemas Dinâmicos**, a existência de funções energia generalizadas para classes de sistemas dinâmicos não lineares decorrentes de sistemas elétricos de potência é demonstrada.

■ **Parte III: Análise e Controle de Sistemas Elétricos de Potência** - Nesta parte, é apresentado o desenvolvimento de controles não lineares para o dispositivo TCSC:

- No Capítulo 9, **Função Energia Generalizada para Sistemas Elétricos de Potência**, a construção de uma função energia generalizada para sistemas elétricos de potência modelados com a estrutura da rede preservada é apresentada.
- No Capítulo 10, **Metodologia de Projeto de Controladores Não Lineares para Dispositivos TCSC**, são desenvolvidos os controles não lineares para o dispositivo TCSC baseado na função energia generalizada de controle.
- No Capítulo 11, **Simulações e Resultados**, são realizadas simulações em alguns sistemas para comprovar a eficiência dos controles projetados.
- No capítulo 12, **Conclusões e Perspectivas futuras**, são apresentadas as conclusões e as perspectivas futuras deste trabalho.

Parte I

Modelos dos Componentes de Sistemas Elétricos de Potência para estudos de Estabilidade

Modelagem de Geradores Síncronos

O gerador síncrono é um dos elementos principais de sistemas elétricos de potência, sendo responsável pela maior parte de geração da energia elétrica no mundo.

O gerador síncrono é formado por dois elementos principais, o estator (parte fixa) e o rotor (parte girante). O estator possui um conjunto de enrolamentos denominado enrolamento de armadura, que é composto por um conjunto de bobinas trifásicas com o eixo magnético de cada fase deslocado 120° em relação aos outros (CHAPMAN, 2011). O rotor em um gerador síncrono é responsável pela produção de campo magnético, e esse campo pode ser produzido por ímãs permanentes ou por um conjunto de enrolamentos alimentado por um fonte de corrente contínua. Assim, o rotor é acionado por uma fonte motriz que associado ao campo magnético faz induzir tensões trifásicas no enrolamento do estator do gerador e, desse modo, a potência elétrica é fornecida ao sistema (CHAPMAN, 2011).

Do ponto de vista construtivo os rotores dos geradores síncronos podem ser de pólos salientes ou de pólos lisos, figura 2.1.

Figura 2.1: Modelo físico do gerador síncrono.

Geradores de pólos salientes são caracterizados por possuírem um grande diâmetro e um pequeno comprimento axial (características de máquinas empregadas em baixa rotação) e são empregados quando sua fonte motriz é de natureza hidráulica (FITZGERALD; KINGSLEY; UMANS, 2003; CHAPMAN, 2011). Enquanto os de pólos lisos são caracterizados por possuírem um pequeno diâmetro e um grande comprimento axial e são acionados por turbinas, gás ou vapor, e trabalham em altas velocidades (FITZGERALD; KINGSLEY; UMANS, 2003; CHAPMAN, 2011).

A partir do modelo físico são feitas suposições para estabelecer relações básicas entre seus elementos, caracterizando o comportamento do gerador durante sua operação. Neste capítulo, será apresentado o modelo matemático do gerador síncrono utilizado para estudos de estabilidade.

2.1 Equações Mecânicas

As equações mecânicas estabelecem as interações entre os conjugados elétrico e mecânico de uma máquina síncrona. A figura 2.2 ilustra a convenção dos conjugados adotada para a análise de uma máquina síncrona operando como um gerador.

Figura 2.2: Conjugados no rotor de um gerador síncrono.

Estas relações podem ser expressas através das equações do movimento rotacional em sistemas físicos. A equação a seguir estabelece de forma algébrica estas relações:

$$J \dot{\omega}_{m(t)} = T_{mec} - T_{ele}, \quad (2.1)$$

onde, T_{mec} e T_{ele} são os conjugados mecânico e elétrico, respectivamente, J é o momento de inércia e $\omega_{m(t)}$ a velocidade angular.

Para sistemas elétricos de potência, é conveniente trabalhar com potência, uma vez que a determinação do conjugado é um processo complicado e a medida da potência é simples (BRETAS; ALBERTO, 2000a). A potência é dada pela relação da velocidade angular pelo conjugado ($P = \omega T$). Assim, a equação (2.1) torna-se:

$$J \omega_m \dot{\omega}_{m(t)} = P_{mec} - P_{ele}, \quad (2.2)$$

onde, P_{mec} é a potência mecânica, P_{ele} é a potência elétrica e $J\omega$ é definido como sendo a quantidade de movimento angular M_m , ou seja, é a energia armazenada no movimento angular. Assim, denomina-se M_m de constante de inércia da máquina.

Em estudos de estabilidade, estamos interessados na variação do ângulo elétrico, assim, faz-se necessário relacionar as equações da máquina com o ângulo elétrico da mesma. O ângulo elétrico se relaciona com o ângulo mecânico da seguinte forma:

$$\delta_e = p \delta_m, \quad \implies \quad \dot{\delta}_e = p \dot{\delta}_m \quad (2.3)$$

onde p é o número de pares de pólos magnéticos, δ_e é o ângulo elétrico e δ_m é o ângulo mecânico. Portanto, a equação (2.2) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_e &= \omega_e, \\ \frac{M_m}{p} \dot{\omega}_e &= P_{mec} - P_{ele}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Usualmente trabalha-se com grandezas por unidade (p.u.). Assim, para converter as equações divide-se pela potência base, obtendo-se:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_e &= \omega_e, \\ \frac{M_m}{p S_b} \dot{\omega}_e &= \frac{P_{mec}}{S_b} - \frac{P_{ele}}{S_b}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Reescrevendo a equação (2.5), temos:

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \omega, \\ M \dot{\omega} &= P_m - P_e. \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde, P_m é a potência mecânica em p.u., P_e é a potência elétrica em p.u., M é a constante de inércia em p.u., $\delta_e = \delta$ e $\omega_e = \omega$.

Para melhor representação do modelo físico através das equações do movimento é conveniente o acréscimo de um termo de amortecimento ($D\omega$) na equação (2.6) (RAMOS; ALBERTO; BRETAS, 2000). O termo de amortecimento representa a interação do efeito dos enrolamentos amortecedores da máquina e é sempre no sentido contrário de rotação do rotor (KUNDUR, 1994), assim, a equação (2.6) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \omega, \\ M \dot{\omega} &= P_m - P_e - D \omega, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde, D é definido como constante de amortecimento. A equação (2.7) é denominada equação de swing (balanço) do gerador síncrono.

2.2 Equações Elétricas

A figura 2.3 nos mostra um esquema típico de um gerador síncrono de 2 pólos. O gerador é formado por um conjunto de enrolamentos trifásicos no estator e por enrolamentos de campo no rotor. O gerador também é constituído por um conjunto de enrolamentos amortecedores que tem a função de amortecer possíveis variações que ocorrem devido a perturbações no funcionamento do mesmo (RAMOS; ALBERTO; BRETAS, 2000).

Figura 2.3: Modelo físico do gerador.

Com o objetivo de caracterizar o funcionamento do gerador síncrono, a partir do modelo físico é possível estabelecer um circuito elétrico equivalente (RAMOS; ALBERTO; BRETAS, 2000; ANDERSON; FOUAD, 2002), conforme ilustra a figura 2.4.

Figura 2.4: Circuito elétrico equivalente do gerador síncrono.

De acordo com o circuito elétrico equivalente ilustrado na figura 2.4, o gerador síncrono é representado por:

- circuito equivalente do rotor, no qual está inserida a tensão de excitação V_F ;
- circuitos equivalentes dos enrolamentos amortecedores, para os eixos Q e D;
- circuito trifásico do enrolamento de armadura, fases a, b e c.

As tensões nos enrolamentos são dadas pela lei de Faraday, e de acordo com RAMOS; ALBERTO; BRETAS (2000) podemos estabelecê-las da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{abc} \\ \mathbf{V}_{FDQ} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{abc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{FDQ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{FDQ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{abc} \\ \dot{\lambda}_{FDQ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

onde, $\mathbf{V}_{abc}$, $\mathbf{i}_{abc}$, λ_{abc} , $\mathbf{V}_{FDQ}$, $\mathbf{i}_{FDQ}$, λ_{FDQ} são vetores com as tensões, correntes e fluxos concatenados nas fases a , b , c e nos circuitos F , D , Q respectivamente, $\mathbf{R}_{abc}$ e $\mathbf{R}_{FDQ}$ são matrizes diagonais com as resistências dos circuitos e $\mathbf{V}_n$ é a tensão de neutro.

O modelo matemático apresentado na equação (2.8) representa de forma satisfatória o comportamento elétrico do gerador. Porém, da forma que está representado, as indutâncias mútuas variam com a posição do rotor (RAMOS; ALBERTO; BRETAS, 2000; ANDERSON; FOUAD, 2002). A transformação de Park é utilizada para simplificar o problema uma vez que as equações são reescritas em um referencial girante ($0dq$), que é representado por dois eixos girantes, d e q , e um terceiro eixo estático (RAMOS; ALBERTO; BRETAS, 2000; ANDERSON; FOUAD, 2002). No referencial $0dq$ as indutâncias são constantes. A relação entre o sistema de referência abc e o sistema de referência $0dq$ é estabelecido desta forma:

$$i_{0dq} = P \cdot i_{abc}, \quad (2.9)$$

onde,

$$P = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta_m) & \cos\left(\theta_m - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_m + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin(\theta_m) & \sin\left(\theta_m - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta_m + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

onde θ_m é o ângulo entre o eixo de referência fixo do estator e o eixo de referência girante.

A equação (2.8) no sistema de referência $0dq$ torna-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{0dq} \\ \mathbf{V}_{FDQ} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{0dq} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{FDQ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{0dq} \\ \mathbf{i}_{FDQ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{0dq} \\ \dot{\lambda}_{0dq} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}\lambda_{0dq} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{0dq} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

onde, $\mathbf{R}_{0dq}$ é uma matriz diagonal com resistências equivalentes, $\mathbf{V}_{0dq}$, $\mathbf{i}_{0dq}$, λ_{0dq} e $\mathbf{n}_{0dq}$ são as tensões, correntes, fluxos concatenados e a tensão de neutro no sistema de referência $0dq$, respectivamente. A relação entre os fluxos magnéticos e as correntes é calculada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{0dq} \\ \lambda_{0dq} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{0dq} & \mathbf{M}_{FDQ} \\ \mathbf{M}_{FDQ}^T & \mathbf{L}_{FDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{0dq} \\ \mathbf{i}_{FDQ} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

onde, $\mathbf{L}_{0dq}$ e $\mathbf{L}_{FDQ}$ são matrizes referentes às indutâncias próprias e $\mathbf{M}_{FDQ}$ é a matriz referente às indutâncias mútuas nos enrolamentos.

Portanto, o conjunto de equações (2.11) e (2.12) caracteriza o comportamento elétrico de um gerador síncrono. Para detalhes do modelo elétrico apresentado nesta seção, consultar RAMOS; ALBERTO; BRETAS (2000).

2.3 Modelo para Estudo de Estabilidade

O modelo mecânico apresentado na seção 2.1 em conjunto com o modelo elétrico apresentado na seção 2.2 representa de forma detalhada o comportamento eletromecânico do gerador. Porém, para análise de estabilidade em sistema elétricos de potência, algumas hipóteses podem ser usadas para diminuir a ordem do modelo, simplificando a análise. Embora essas simplificações diminuam o nível de detalhamento da representação do comportamento dos geradores, ainda é possível examinar este comportamento de forma satisfatória.

A seguir, iremos apresentar dois modelos que são usados habitualmente em sistemas elétricos de potência para análise de estabilidade.

2.3.1 Modelo de Um Eixo

O modelo de um eixo é um modelo de 3º ordem que é utilizado com muita frequência na análise de oscilações eletromecânicas e na avaliação da estabilidade transitória. De acordo com RAMOS; ALBERTO; BRETAS (2000), para a sua representação, as seguintes hipóteses simplificadoras são consideradas no modelo elétrico apresentado na seção 2.2:

- O efeito transitório dos enrolamentos amortecedores são desconsiderados, ou seja, desprezam-se os termos de $\dot{\lambda}$ e considera-se $\omega_m = 1$ p.u.. Assim, transformando as equações v_D e v_F do modelo apresentado na seção 2.2 em equações puramente algébricas.
- Considera-se que a tensão E'_d seja sempre zero.

Portanto, com as hipóteses simplificadores acima descritas, as equações elétricas da máquina podem ser reescritas desta forma:

$$\begin{aligned} T'_{do} \dot{E}'_q &= E_{fd} - E'_q + (x_d - x'_d)I_d, \\ V_q &= E'_q - rI_q + x'_d I_d, \\ V_d &= -rI_d + x'_q I_q, \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde, E'_q é tensão no estator equivalente ao efeito do fluxo concatenado nos enrolamentos de campo; E_{fd} é a tensão no enrolamento de campo referida ao estator; I_q , I_d , V_q e V_d são as componentes da corrente e tensão respectivamente no estator na referência $0dq$; T'_{do} é a constante de tempo de circuito aberto transitório de eixo direto; x_q , x_d , x'_q e x'_d são as reatâncias transitória e síncrona respectivamente na referência $0dq$ e r a resistência por fase do estator. As potências ativa (P_e) e reativa (Q_e) são assim calculadas:

$$P_e = E'_q I_q + (x'_d - x'_q) I_d I_q, \tag{2.14}$$

$$Q_e = -E'_q I_d - x'_q I_q^2 - x'_d I_d^2. \tag{2.15}$$

O modelo de um eixo completo é representando a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \omega, \\ M \dot{\omega} &= P_m - P_e - D \omega, \\ T'_{do} \dot{E}'_q &= E_{fd} - E'_q + (x_d - x'_d) I_d, \\ V_q &= E'_q - rI_q + x'_d I_d \\ V_d &= -rI_d + x'_q I_q \\ P_e &= E'_q I_q + (x'_d - x'_q) I_d I_q, \\ Q_e &= -E'_q I_d - x'_q I_q^2 - x'_d I_d^2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Para mais detalhes do modelo apresentado nesta seção, consultar RAMOS; ALBERTO; BRETAS (2000); ANDERSON; FOUAD (2002).

2.3.2 Modelo Clássico

O modelo clássico é um dos modelos mais usados para análise da estabilidade transitória. Para determinação deste modelo as seguintes hipóteses simplificadoras são admitidas (RAMOS; ALBERTO; BRETAS, 2000):

- considera-se que a tensão de campo E_{fd} não sofre variações bruscas;
- admite-se que o fluxo no enrolamento de campo é constante, sendo assim, E'_q é constante;
- considera-se que as reatâncias transitórias de eixo direto e quadratura são iguais, $x'_d = x'_q$.

O modelo clássico completo é representando a seguir:

$$\begin{aligned}
 \dot{\delta} &= \omega, \\
 M \dot{\omega} &= P_m - P_e - D \omega, \\
 V_q &= E'_q - r I_q + x'_d I_d \\
 V_d &= -r I_d + x'_d I_q \\
 P_e &= E'_q I_q, \\
 Q_e &= -E'_q I_d - x'_d (I_q^2 + I_d^2).
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

2.3.3 Modelo do Gerador Síncrono na Referência da Rede Elétrica

Para estudos dinâmicos de sistemas elétricos de potência, as equações dos geradores síncronos são utilizadas em conjunto com as equações da rede elétrica. Como cada gerador está representado na sua própria referência, faz-se necessário utilizar um sistema de referência comum e expressar todas as variáveis nesta referência (RAMOS; ALBERTO; BRETAS, 2000). Para isto, utiliza-se a referência da rede elétrica, e portanto, as equações dos geradores são definidas nesta referência.

Nesta subseção, vamos expressar o modelo do gerador síncrono na referência da rede elétrica.

Considere o modelo de um eixo do gerador apresentado na seção 2.3.1:

$$\begin{aligned}
 \dot{\delta} &= \omega, \\
 M \dot{\omega} &= P_m - P_e - D \omega, \\
 T'_{do} \dot{E}'_q &= E_{fd} - E'_q + (x_d - x'_d) I_d,
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde, M é a constante de inércia da máquina, P_m é a potência mecânica, D coeficiente de amortecimento e P_e é a potência gerada. A potência elétrica gerada é calculada da seguinte forma:

$$P_e = E'_q I_q + (x'_d - x'_q) I_d I_q, \quad (2.19)$$

$$Q_e = -E'_q I_d - x'_q I_q^2 - x'_d I_d^2. \quad (2.20)$$

A tensão terminal na referência do gerador é dada por:

$$V_q = E'_q - r I_q + x'_d I_d, \quad (2.21)$$

$$V_d = -r I_d - x'_q I_q. \quad (2.22)$$

Isolando I_q e I_d nas equações (2.21) e (2.22), temos:

$$\begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} = \frac{1}{r^2 + x'_d x'_q} \begin{bmatrix} r & -x'_q \\ x'_d & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -V_d \\ E'_q - V_q \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Considere o diagrama vetorial da figura 2.5, em que o sistema de referência do gerador (eixo dq) e o sistema de referência da rede (eixo $R_e I_m$) estão representados. O ângulo δ representa o deslocamento angular entre o eixo dq e o eixo $R_e I_m$. O ângulo θ representa o ângulo da tensão terminal na referência $R_e I_m$.

Figura 2.5: Representação dos eixos de referência da rede elétrica e do gerador.

De acordo com o diagrama vetorial apresentado na figura 2.5, podemos expressar V_d e V_q na referência da rede desta forma:

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V \sin(\delta - \theta) \\ V \cos(\delta - \theta) \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Substituindo a equação (2.24) em (2.23) para calcular as correntes do gerador na referência da rede, temos:

$$\begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} = \frac{1}{r^2 + x'_d x'_q} \begin{bmatrix} r & -x'_q \\ x'_d & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \sin(\delta - \theta) \\ E'_q - V \cos(\delta - \theta) \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Portanto,

$$I_d = -\frac{x'_q}{r^2 + x'_d x'_q} E'_q + \frac{x'_q}{r^2 + x'_d x'_q} V \cos(\delta - \theta) + \frac{r}{r^2 + x'_d x'_q} V \sin(\delta - \theta), \quad (2.26)$$

$$I_q = \frac{r}{r^2 + x'_d x'_q} E'_q - \frac{r}{r^2 + x'_d x'_q} V \cos(\delta - \theta) + \frac{x'_d}{r^2 + x'_d x'_q} V \sin(\delta - \theta). \quad (2.27)$$

Expressando a potência ativa gerada na referência da rede, temos:

$$P_e = G_g \left(\eta_1 E_q'^2 + \eta_2 V^2 - \eta_3 E_q' V \cos(\delta - \theta) + \eta_4 E_q' V \sin(\delta - \theta) - \frac{1}{2} \eta_5 V^2 \cos(2\delta - 2\theta) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \eta_4 V^2 \sin(2\delta - 2\theta) \right) - B_g^q E_q' V \sin(\delta - \theta) - \frac{1}{2} (B_g^d - B_g^q) V^2 \sin(2\delta - 2\theta), \quad (2.28)$$

onde,

$$\eta_1 = \frac{r^2 + x_q'^2}{(r^2 + x'_d x'_q)}, \quad \eta_2 = \frac{(x'_d - x'_q)^2}{2(r^2 + x'_d x'_q)}, \quad \eta_3 = \frac{(r^2 - x'_d x'_q + 2x_q'^2)}{(r^2 + x'_d x'_q)}, \quad \eta_4 = \frac{2r(x'_d - x'_q)}{(r^2 + x'_d x'_q)} \\ \eta_5 = \frac{(x_d'^2 - x_q'^2)}{(r^2 + x'_d x'_q)}, \quad G_g = \frac{r}{(r^2 + x'_d x'_q)}, \quad B_g^d = -\frac{x'_d}{(r^2 + x'_d x'_q)}, \quad B_g^q = -\frac{x'_q}{r^2 + x'_d x'_q}. \quad (2.29)$$

Expressando a potência reativa gerada na referência da rede, temos:

$$Q_e = \frac{1}{2} (B_g^d + B_g^q) V^2 - B_g^q E_q' V \cos(\delta - \theta) - G_g E_q' V \sin(\delta - \theta) - \frac{1}{2} (B_g^d - B_g^q) V^2 \cos(2\delta - 2\theta) \quad (2.30)$$

Portanto, o modelo de um eixo na referência da rede é escrito desta forma:

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \omega, \\ M\dot{\omega} &= (P_m - P_e - D\omega), \\ T\dot{E} &= E_{FD} - CE - B_g^q V \cos(\delta - \theta) + G_g V \sin(\delta - \theta),\end{aligned}\tag{2.31}$$

onde,

$$T = \frac{T'_{do}}{(x_d - x'_d)}, \quad C = \frac{(r^2 + x_d x'_q)}{(r^2 + x'_d x'_q)(x_d - x'_d)}, \quad E_{FD} = \frac{E_{fd}}{(x_d - x'_d)}, \quad E = E'_q.\tag{2.32}$$

O modelo (2.31) pode ser simplificado considerando $x'_q = x'_d$:

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \omega, \\ M\dot{\omega} &= (P_m - P_e - D\omega), \\ T\dot{E} &= E_{FD} - CE - B_g V \cos(\delta - \theta) + G_g V \sin(\delta - \theta),\end{aligned}\tag{2.33}$$

onde,:

$$C = \frac{(r^2 + x_d x'_d)}{(r^2 + x_d'^2)(x_d - x'_d)}, \quad B_g^d = B_g^q = B_g = -\frac{x'_d}{r^2 + x_d'^2}.\tag{2.34}$$

As potências geradas tornam-se:

$$P_e = G_g E^2 - G_g E V \cos(\delta - \theta) - B_g E V \sin(\delta - \theta)\tag{2.35}$$

$$Q_e = B_g V^2 - B_g E V \cos(\delta - \theta) - G_g E'_q V \sin(\delta - \theta)\tag{2.36}$$

Neste capítulo, apresentamos modelos simplificados que caracterizam o comportamento dinâmicos dos geradores síncronos. Estes modelos são utilizados para estudos de estabilidade em sistemas elétricos de potência de forma satisfatória. Posteriormente, neste trabalho, estes modelos serão utilizados na construção de uma função energia generalizada. No próximo capítulo, vamos apresentar os modelos dos elementos da rede elétrica mais comuns utilizados em estudos de estabilidade.

Capítulo 3

Modelagem dos Componentes da Rede Elétrica

Neste capítulo, os modelos dos componentes da rede elétrica mais comuns empregados no estudo de estabilidade de sistemas elétricos de potência são apresentados. Para este propósito, considera-se que estes elementos operam em regime permanente senoidal, uma vez que as dinâmicas eletromagnéticas são muito mais rápidas que as dinâmicas eletromecânicas, simplificando assim os modelos empregados para estudos de estabilidade. As expressões de fluxo de potência em linhas de transmissão e transformadores, e a caracterização de cargas são descritas nas seções subsequentes.

3.1 Modelos de Linhas de Transmissão

Considera-se a linha de transmissão representada por um modelo π com parâmetros concentrados e em regime permanente senoidal. A figura 3.1 apresenta este modelo:

Figura 3.1: Modelo π com parâmetros concentrados da linha de transmissão.

Onde $\mathbf{Z}_{km}$ representa a impedância série e $\mathbf{Y}^{sh}$ a admitância paralela da linha. A impedância série é dada por:

$$\mathbf{Z}_{km} = r_{km} + jx_{km}, \quad (3.1)$$

onde r_{km} e x_{km} representam respectivamente a resistência e reatância série da linha. A admitância da linha é dada por:

$$\mathbf{Y}_{km} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{km}} = g_{km} + jb_{km}, \quad (3.2)$$

onde g_{km} e b_{km} representam respectivamente a condutância e a susceptância da linha. A condutância e a susceptância podem ser calculadas da seguinte forma:

$$g_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}, \quad b_{km} = -\frac{x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}. \quad (3.3)$$

Para o cálculo do fluxo de potência na linha, considere a figura 3.2:

Figura 3.2: Modelo π da linha de transmissão com a convenção adotada para cálculo do fluxo de potência.

Montando a matriz admitância ($\mathbf{Y}$) do sistema de duas barras temos:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} (g_{km} + jb_{km}) + jb^{sh} & -(g_{km} + jb_{km}) \\ -(g_{km} + jb_{km}) & (g_{km} + jb_{km}) + jb^{sh} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Assim, a corrente $\mathbf{I}_{km}$ e $\mathbf{I}_{mk}$ podem ser calculadas como se segue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{km} \\ \mathbf{I}_{mk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (g_{km} + jb_{km}) + jb^{sh} & -(g_{km} + jb_{km}) \\ -(g_{km} + jb_{km}) & (g_{km} + jb_{km}) + jb^{sh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_k \\ \mathbf{V}_m \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

onde $\mathbf{V}_k$ e $\mathbf{V}_m$ são as tensões fasoriais das barras k e m respectivamente.

$$\mathbf{V}_k = V_k e^{j\theta_k}, \quad \mathbf{V}_m = V_m e^{j\theta_m}. \quad (3.6)$$

A potência aparente é definida como sendo $\mathbf{S} = \mathbf{VI}^*$, portanto a potência da linha pode ser escrita desta forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{km} \\ \mathbf{S}_{mk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_k e^{j\theta_k} & 0 \\ 0 & V_m e^{j\theta_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (g_{km} - jb_{km}) - jb^{sh} & -(g_{km} - jb_{km}) \\ -(g_{km} - jb_{km}) & (g_{km} - jb_{km}) - jb^{sh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k e^{-j\theta_k} \\ V_m e^{-j\theta_m} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\mathbf{k}\mathbf{m}} \\ \mathbf{S}_{\mathbf{m}\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{km} \\ P_{mk} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} Q_{km} \\ Q_{mk} \end{bmatrix},$$

onde,

$$\begin{bmatrix} P_{km} \\ P_{mk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{km} V_k^2 - g_{km} V_k V_m \cos(\theta_{km}) - b_{km} V_k V_m \sin(\theta_{km}) \\ g_{km} V_m^2 - g_{km} V_m V_k \cos(\theta_{km}) + b_{km} V_m V_k \sin(\theta_{km}) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{km} \\ Q_{mk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(b_{km} + b^{sh}) V_k^2 + b_{km} V_k V_m \cos(\theta_{km}) - g_{km} V_k V_m \sin(\theta_{km}) \\ -(b_{km} + b^{sh}) V_m^2 + b_{km} V_m V_k \cos(\theta_{km}) + g_{km} V_m V_k \sin(\theta_{km}) \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

e $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$.

As equações (3.7) e (3.8) são as expressões que determinam os fluxos de potência ativa e reativa na linha respectivamente. Para maiores detalhes, sugere-se consultar MONTICELLI (1983); MONTICELLI; GARCIA (2003); CANIZARES; GOMEZ-EXPOSITO; CONEJO (2011).

3.2 Modelos de Transformadores

Nesta seção, vamos apresentar as equações de fluxo de potência em transformadores defasadores. Para este fim, considere o modelo apresentado na figura 3.3.

Figura 3.3: Modelo do transformador defasador generalizado.

O modelo de transformador defasador apresentado na figura 3.3 consiste em uma impedância série e um transformador ideal com relação de transformação $1 : t_{km}$, onde $t_{km} = a_{km} e^{j\phi_{km}}$. Os modelos de transformadores defasadores puros ($t = 1 e^{j\phi_{km}}$) e transformadores em fase $t_{km} = a_{km}$ são considerados casos especiais do modelo geral apresentado.

Considerando o modelo de transformador defasador apresentado na figura 3.3, podemos calcular as correntes $\mathbf{I}_{\mathbf{k}\mathbf{m}}$ e $\mathbf{I}_{\mathbf{m}\mathbf{k}}$ do transformador desta forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\mathbf{k}\mathbf{m}} \\ \mathbf{I}_{\mathbf{m}\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (g_{km} + jb_{km}) & -(g_{km} + jb_{km}) \\ -(g_{km} + jb_{km}) & (g_{km} + jb_{km}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{km} V_k e^{j\theta_k + \phi_{km}} \\ V_m e^{j\theta_m} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Calculando as potências aparentes temos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\mathbf{km}} \\ \mathbf{S}_{\mathbf{mk}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{km} V_k e^{j\theta_k + \phi_{km}} & 0 \\ 0 & V_m e^{j\theta_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (g_{km} - jb_{km}) & -(g_{km} - jb_{km}) \\ -(g_{km} - jb_{km}) & (g_{km} - jb_{km}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{km} V_k e^{-j\theta_k + \phi_{km}} \\ V_m e^{-j\theta_m} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} P_{km} \\ P_{mk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{km}^2 g_{km} V_k^2 - a_{km} g_{km} V_k V_m \cos(\theta_{km} + \phi_{km}) - a_{km} b_{km} V_k V_m \sin(\theta_{km} + \phi_{km}) \\ g_{km} V_m^2 - a_{km} g_{km} V_m V_k \cos(\theta_{km} + \phi_{km}) + a_{km} b_{km} V_m V_k \sin(\theta_{km} + \phi_{km}) \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{km} \\ Q_{mk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{km}^2 b_{km} V_k^2 + a_{km} b_{km} V_k V_m \cos(\theta_{km}) - a_{km} g_{km} V_k V_m \sin(\theta_{km}) \\ -(b_{km} + b^{sh}) V_m^2 + a_{km} b_{km} V_m V_k \cos(\theta_{km}) + a_{km} g_{km} V_m V_k \sin(\theta_{km}) \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

As equações (3.11) e (3.12) são as expressões que determinam os fluxos de potência ativa e reativa em transformadores. Para maiores detalhes, sugere-se consultar MONTICELLI (1983); MONTICELLI; GARCIA (2003); CANIZARES; GOMEZ-EXPOSITO; CONEJO (2011).

3.3 Modelos de Cargas

A carga é um dos componentes mais complexos em sistemas elétricos de potência, pois apresenta comportamentos na maioria das vezes imprevisíveis devido a sua diversidade de elementos. Embora a tarefa de modelagem de carga não seja trivial, é comum utilizar algumas representações simplificadas (BRETAS; ALBERTO, 2000a).

Os efeitos da carga nos estudos de estabilidade são usualmente verificados através de simulações computacionais, resultando em comportamentos diferentes para cada tipo de representação (BRETAS; ALBERTO, 2000a).

As cargas podem ser representadas de maneira geral desta forma:

$$P_{Lk} = P_k^0 \sum_j a_{jk} \left(\frac{V_k}{V_k^0} \right)^j + d_k \dot{\theta}_k, \quad (3.13)$$

$$Q_{Lk} = Q_k^0 \sum_j b_{jk} \left(\frac{V_k}{V_k^0} \right)^j, \quad (3.14)$$

onde, P_k^0 , Q_k^0 são respectivamente a potência ativa e reativa de referência da barra k , V_k , V_k^0 são respectivamente a tensão e tensão de referência da barra k , a_{jk} , b_{jk} são constantes

que dependem das características da carga, d_k coeficiente de dependência da carga com a frequência e $\dot{\theta}_k$ frequência na barra k .

Para o modelo apresentado, podemos observar três casos particulares:

■ Potência constante:

$$P_{Lk} = P_k^0, \quad (3.15)$$

$$Q_{Lk} = Q_k^0; \quad (3.16)$$

■ Corrente constante:

$$P_{Lk} = P_k^0 \left(\frac{V_k}{V_k^0} \right), \quad (3.17)$$

$$Q_{Lk} = Q_k^0 \left(\frac{V_k}{V_k^0} \right); \quad (3.18)$$

■ Impedância Constante:

$$P_{Lk} = P_k^0 \left(\frac{V_k}{V_k^0} \right)^2, \quad (3.19)$$

$$Q_{Lk} = Q_k^0 \left(\frac{V_k}{V_k^0} \right)^2. \quad (3.20)$$

Em geral as cargas comportam-se como uma combinação dos três casos particulares apresentados (BERG, 1973; CONCORDIA; IHARA, 1982). Este modelo é conhecido como **ZIP**, impedância constante (**Z**), corrente constante (**I**) e potência constante (**P**). O modelo **ZIP** é expresso da seguinte forma:

$$P_{Lk} = P_k^0 \left[a_{0k} + a_{1k} \left(\frac{V_k}{V_k^0} \right) + a_{2k} \left(\frac{V_k}{V_k^0} \right)^2 \right], \quad (3.21)$$

$$Q_{Lk} = Q_k^0 \left[b_{0k} + b_{1k} \left(\frac{V_k}{V_k^0} \right) + b_{2k} \left(\frac{V_k}{V_k^0} \right)^2 \right], \quad (3.22)$$

com

$$a_{0k} + a_{1k} + a_{2k} = 1, \quad (3.23)$$

$$b_{0k} + b_{1k} + b_{2k} = 1. \quad (3.24)$$

Para maiores detalhes sobre a modelagem de cargas em sistemas elétricos de potência, sugere-se consultar BERG (1973); CONCORDIA; IHARA (1982); IEEE (1993); BRETAS; ALBERTO (2000a).

3.4 Modelo Algébrico da Rede Elétrica

Nesta seção vamos apresentar as equações de injeções de potência ativa e reativa nas barras de um sistema elétrico.

Considere um sistema elétrico formado por n barras. A injeção de potência em uma barra k da rede pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{V}_k \left(\sum_{m=1}^n (\mathbf{Y}_{km}^{\text{bus}} \mathbf{V}_m) \right)^*, \quad (3.25)$$

onde, $\mathbf{V}_k$ e $\mathbf{V}_m$ são as tensões nas barras k e m , respectivamente e $\mathbf{Y}_{km}$ é o elemento $k - m$ da matriz de admitância do sistema. Desenvolvendo a equação (3.25), temos:

$$\mathbf{S}_k = V_k e^{j\theta_k} \left(\sum_{m=1}^n (G_{km} - jB_{km})(V_m e^{-j\theta_m}) \right), \quad (3.26)$$

$$\mathbf{S}_k = V_k \left(\sum_{m=1}^n V_m (G_{km} - jB_{km})(\cos(\theta_{km}) + j\text{sen}(\theta_{km})) \right), \quad (3.27)$$

$$\mathbf{S}_k = V_k \left(\sum_{m=1}^n V_m (G_{km} \cos(\theta_{km}) + B_{km} \text{sen}(\theta_{km})) + j V_m (G_{km} \text{sen}(\theta_{km}) - B_{km} \cos(\theta_{km})) \right), \quad (3.28)$$

onde, V_k e V_m são os módulos das tensões das barras k e m , $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$, θ_k e θ_m são os ângulos das barras k e m , G_{km} e B_{km} são as partes real e imaginária do ramo $k - m$ da matriz admitância do sistema.

As injeções de potência ativa e reativa são:

$$P_k = V_k \sum_{m=1}^n V_m (G_{km} \cos(\theta_{km}) + B_{km} \text{sen}(\theta_{km})), \quad (3.29)$$

$$Q_k = V_k \sum_{m=1}^n V_m (G_{km} \text{sen}(\theta_{km}) - B_{km} \cos(\theta_{km})). \quad (3.30)$$

Neste capítulo, apresentamos, de forma resumida, os elementos mais comuns empregados para estudos de estabilidade em sistemas elétricos de potência. Estes modelos serão importantes para a construção de uma função energia generalizada para sistemas elétricos de potência.

Dispositivos FACTS

Os dispositivos FACTS (*Flexible Alternating Current Transmission Systems* - Sistemas Flexíveis em Corrente Alternada) são equipamentos desenvolvidos para flexibilizar a operação e controle dos sistemas de transmissão de energia (ETT et al., 2011).

Os dispositivos FACTS são definidos como sistemas de transmissão em corrente alternada que incorporam controladores estáticos utilizando, ou não, componentes de eletrônica de potência, para o controle e aumento da capacidade de transferência de potência nas linhas de transmissão (IEEE, 1997).

A capacidade de transferência de potência de uma linha de transmissão é limitada por vários fatores, tais como, limites térmicos, limites de estabilidade de tensão e limites de estabilidade angular. A figura 4.1 ilustra esses limites.

Figura 4.1: Diferentes limites de transferência de potência nas linhas de transmissão (MATHUR; VARMA, 2002).

Os dispositivos FACTS fornecem o controle de um ou mais parâmetros do sistema de transmissão, assim contribuindo para o desempenho do mesmo, aumentando por exemplo, os limites de estabilidade angular e de tensão. Além do aumento dos limites de estabilidade do sistema podemos destacar outros benefícios do uso desses dispositivos, tais como (ZHANG; REHTANZ; PAL, 2012):

- controle do fluxo de potência;
- controle da Tensão;
- compensação de reativos;
- melhora da qualidade da energia;
- mitigação do efeito flicker;
- mitigação da ressonância subsíncrona.

Vários dispositivos FACTS foram desenvolvidos, dentre os quais se destacam: compensadores séries controlados (CSC), comutadores de carga, reguladores do ângulo de fase (RAF), compensadores estáticos (SVC), e compensadores e controladores unificados de fluxo de potência (UPFC) (ACHA, 2004). A maioria desses dispositivos desempenha um papel útil durante a operação tanto em regime permanente quanto em regime transitório.

Os dispositivos FACTS podem ser classificados quanto a forma de conectá-los ao sistema e em relação do dispositivo de controle usado, como ilustrado na figura 4.2:

Figura 4.2: Classificação dos dispositivos FACTS

Os dispositivos FACTS baseados em VSC (*Voltage Source Converters* - Conversor Fonte de Tensão) e que são formados por uma fonte de tensão, que pode ser uma bateria ou um capacitor com uma ponte retificadora, têm algumas vantagens sobre os tipos de dispositivos baseados em impedância variável. Por exemplo, o STATCOM (*Static Compensator* - Compensador Estático) é muito mais compacto do que um SVC (*Static VAR compensator* - Compensador de Potência Reativa) e pode fornecer suporte de reativos mesmo em valores baixos de tensão do seu barramento, podendo ainda fornecer potência ativa se estiver conectado a uma fonte de energia ou de armazenamento de energia nos seus terminais DC (PADIYAR, 2007).

Os dispositivos em paralelo atuam fornecendo ou consumindo reativos de acordo com as necessidades do sistema. Estes dispositivos podem ser entendidos como fontes de tensão ou correntes conectados em paralelo com o sistema, figura 4.3.

Figura 4.3: Dispositivo FACTS conectado em paralelo.

Os dispositivos conectados em paralelo podem controlar a tensão na barra mantendo os níveis de tensão dentro dos limites regulamentados (HINGORANI; GYUGYI, 2000). Dentre os dispositivos paralelos, destacam-se os dispositivos SVC e STATCOM.

O dispositivo SVC é formado por um reator controlado a tiristor e um capacitor controlado a tiristor conectados em paralelos. O SVC é visto como uma impedância variável, atuando de forma rápida. Devido as suas características, ele contribui significativamente para a melhoria da dinâmica do sistema.

O dispositivo STATCOM é um avanço quando comparados aos compensadores síncronos convencionais. Ele é baseado em conversores VSC formados por componentes tais como GTO, IGBT, IGCT, etc.. Além das vantagens já citas anteriormente do dispositivo STATCOM em relação ao SVC, ele possui respostas mais rápidas, contribuindo de forma efetiva no desempenho do sistema (ZHANG; REHTANZ; PAL, 2012).

Os dispositivos FACTS que atuam em série com a linha podem ser modelados como fontes de tensão ou corrente, figura 4.4.

Figura 4.4: Dispositivo FACTS conectado em série.

Assim, os dispositivos séries possibilitam controlar, de forma bem efetiva, o fluxo de potência em linhas específicas aumentando de forma significativa a quantidade de energia transportada pelo sistema (HINGORANI; GYUGYI, 2000). Estes dispositivos, se utilizados de forma correta, com estruturas de controle adequadas, podem contribuir no desempenho dinâmico do sistema.

Dentre os dispositivos séries podemos destacar os que atuam como impedância variável TSSC, TCSC e os dispositivos baseados em VSC, por exemplo, SSSC. O TSSC é um

dispositivo que tem a capacidade de variar a sua impedância série de forma discreta, ou seja, o seu grau de compensação é controlado através da inserção de módulos discretos de chaveamentos (PADIYAR, 2007), enquanto o TCSC tem a capacidade de variar sua impedância de forma contínua (PADIYAR, 2007).

Portanto, a rede elétrica recebe inúmeros benefícios com a implantação dos dispositivos FACTS, pois estes contribuem para o funcionamento adequado do sistema reduzindo perdas de energia e melhorando o perfil de tensão, maximizam a capacidade de transporte de energia das linhas, e aumentam o limite de estabilidade transitória e estabilidade a pequenas perturbações, aprimorando, como consequência, a segurança dinâmica do sistema (PADIYAR, 2007).

4.1 Dispositivo TCSC

O uso do controle a tiristores para compensação série torna-se muito interessante, uma vez que, com a possibilidade do controle rápido permite a melhoria na operação do sistema de energia. Justamente por isso, desenvolveu-se o TCSC (*Thyristor Controlled Series Capacitor* - Capacitor Série Controlado a Tiristor), que é um dispositivo FACTS controlado a tiristor que tem como função variar o grau de compensação de forma rápida e contínua, obtendo rápidas variações de fluxos nas linhas a serem controladas.

O TCSC pode oferecer vários benefícios para o sistema, podendo destacar: controle rápido e contínuo para vários níveis de transmissão, controle do fluxo de potência em linhas específicas permitindo a utilização ótima da rede, amortecimento das oscilações eletromecânicas inter-áreas, mitigação da ressonância subsíncrona, melhoria nos limites de estabilidade, redução da corrente de curto-circuito (MATHUR; VARMA, 2002).

Devido aos vários benefícios que o TCSC oferece, existem algumas aplicações deste dispositivo no mundo. Na tabela 4.1, apresentam-se alguns dispositivos TCSCs que estão atualmente em operação.

Tabela 4.1: Aplicações práticas de dispositivos FACTS

	Ano da Instalação	Local	Dispositivo Instalado
1	1991	West Virginia - EUA	TCSC
2	1993	Slatt, EUA	TCSC
3	1993	Kayenta, EUA	TCSC
4	1998	Stöde, Sweden	TCSC
5	1999	Interconexão norte-sul, Brasil	TCSC

4.1.1 Conceitos Básicos do Dispositivo TCSC

A figura 4.5 mostra a configuração básica do dispositivo TCSC, onde o mesmo é formado por um capacitor fixo em paralelo com um reator controlado a tiristor (PADIYAR, 2007).

Figura 4.5: Configuração Típica do TCSC.

O reator controlado a tiristor (TCR - *Thyristor Controlled Reactor*) é um dispositivo formado por tiristores em série com um indutor, figura 4.6.

Figura 4.6: Reator Controlado a Tiristor.

O valor da reatância resultante no TCR é função do ângulo de disparo (α) do tiristor e pode ser calculada desta forma (MATHUR; VARMA, 2002):

$$X_{TCR}(\alpha) = \omega L \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sin(2\alpha) \right)^{-1}. \quad (4.1)$$

O valor da impedância resultante nos terminais do TCSC pode ser calculado fazendo o paralelo da reatância capacitiva com a reatância resultante do TCR:

$$X_{TCSC} = \frac{X_C X_{TCR}(\alpha)}{X_{TCR}(\alpha) - X_C}, \quad (4.2)$$

Portanto, o TCSC possui um circuito LC paralelo ajustável e a reatância $X_{TCR}(\alpha)$ pode variar desde seu valor máximo (infinito) ao seu valor mínimo (ωL). O gráfico da figura 4.7 mostra a curva característica da reatância resultante nos terminais do TCSC em função do ângulo de disparo α .

Figura 4.7: Curva característica da impedância equivalente do TCSC.

O TCSC pode variar a sua impedância em uma faixa de operação que está definida entre $0 \leq \alpha < \alpha_{Llim}$. Nesta faixa de operação o TCSC comporta-se como uma reatância indutiva, e na faixa de $\alpha_{Clim} \leq \alpha < \pi$, comporta-se como uma reatância capacitiva. A região onde os valores de α estão compreendidos entre $\alpha_{Llim} \leq \alpha \leq \alpha_{Clim}$ é definida como região ressonante, pois nesse intervalo $X_{TCR}(\alpha)$ entra em ressonância com X_C e por consequência X_{TCSC} atinge valores elevados (HINGORANI; GYUGYI, 2000).

O TCSC apresenta três modos de operação a saber: (i) o modo by-pass do capacitor; (ii) o modo de bloqueio; e (iii) o modo de condução parcial (modo Vernier) (MATHUR; VARMA, 2002):

- (i) Modo by-pass - O tiristor conduz continuamente resultando numa impedância equivalente com comportamento predominantemente de uma reatância indutiva.
- (ii) Modo de bloqueio - O TCR é bloqueado, assim o comportamento torna se agora como o de uma reatância capacitiva.
- (iii) Modo de condução parcial (modo Vernier) - Neste modo o TCSC pode comportar-se como uma reatância capacitiva controlada ou como uma reatância indutiva controlada, não sendo possível realizar uma transição de um comportamento para o outro de modo suave devido à região ressonante.

Habitualmente, o TCSC opera na região capacitiva, ou seja, o módulo de X_C é maior que o módulo do $X_{TCR}(\alpha)$, assim compensando de forma capacitiva a linha. A implementação de um TCSC pode possuir vários estágios de compensação para obtenção de um melhor desempenho deste dispositivo (HINGORANI; GYUGYI, 2000).

Figura 4.8: Configuração do TCSC com vários estágios de compensação.

4.1.2 Modelo Dinâmico de TCSC

As características dinâmicas do dispositivo TCSC podem ser modeladas através de um modelo diferencial de primeira ordem (PAL; CHAUDHURI, 2005), figura 4.9.

Figura 4.9: Modelo dinâmico do TCSC.

Este modelo representa a resposta natural do dispositivo, ou seja, caracteriza as dinâmicas internas do mesmo (DEL ROSSO; CANIZARES; DONA, 2003). A seguir apresenta-se a equação diferencial do modelo apresentado:

$$T_{tcsc} \dot{x}_{tcsc} = x_{tcsc}^0 + \Delta x_{tcsc} - x_{tcsc}, \quad \text{com} \quad x_{tcsc}^{min} \leq x_{tcsc} \leq x_{tcsc}^{max}, \quad (4.3)$$

onde, x_{tcsc} é a reatância do TCSC, x_{tcsc}^0 é a reatância de referência, Δx_{tcsc} reatância de controle e T_{tcsc} é a constante de tempo do dispositivo. Geralmente o valor da reatância de referência (x_{tcsc}^0) é determinada através de um sistema de controle em regime permanente e o valor da reatância de controle (Δx_{tcsc}) é determinado através de um sistema de controle em regime transitório. A constante de tempo T_{tcsc} habitualmente em estudos de estabilidade dinâmica possui valor em torno de $T_{tcsc} = 0,02$ [s] (PAL; CHAUDHURI, 2005).

Para estudos de estabilidade transitória é comum negligenciar as dinâmicas internas do dispositivo, ou seja, considerar que o mesmo atue de forma instantânea ($T_{tcsc} = 0$). Assim, a equação (4.3) assume a seguinte forma:

$$x_{tcsc} = x_{tcsc}^0 + \Delta x_{tcsc}, \quad \text{com} \quad x_{tcsc}^{min} \leq x_{tcsc} \leq x_{tcsc}^{max}, \quad (4.4)$$

Na próxima seção, vamos apresentar a modelagem do TCSC na rede elétrica.

4.2 Modelagem do Dispositivo TCSC na Rede Elétrica

Os dispositivos TCSC são elementos instalados em série com a linha de transmissão com a função principal de compensar dinamicamente a reatância série da mesma. A figura 4.10 apresenta o esquema de um TCSC instalado em uma linha de transmissão:

Figura 4.10: Linha de transmissão com o TCSC instalado.

O TCSC é representado na rede como sendo uma reatância capacitiva em série com a linha de transmissão. A figura 4.11 apresenta a linha de transmissão com o TCSC conectado em uma de suas extremidades.

Figura 4.11: Representação do TCSC na linha como reatância capacitiva.

Considerando a barra terminal do TCSC, pode-se representar o mesmo como apresentado na figura 4.12, e a partir dessa configuração apresentar-se o equacionamento do dispositivo na rede elétrica.

Figura 4.12: Modelo do dispositivo TCSC na rede elétrica.

O fluxo de potência ativa e reativa no dispositivo TCSC é igual ao fluxo de potência na linha e pode ser calculado desta forma:

$$P_{ki} = -\frac{V_k V_i}{x_{tcsc}} \sin(\theta_{ki}), \quad (4.5)$$

$$P_{ik} = \frac{V_k V_i}{x_{tcsc}} \sin(\theta_{ki}), \quad (4.6)$$

$$(4.7)$$

$$Q_{ki} = -\frac{V_k^2}{x_{tcsc}} + \frac{V_k V_i}{x_{tcsc}} \cos(\theta_{ki}), \quad (4.8)$$

$$Q_{ik} = -\frac{V_i^2}{x_{tcsc}} + \frac{V_k V_i}{x_{tcsc}} \cos(\theta_{ki}), \quad (4.9)$$

onde, $\theta_{ki} = \theta_k - \theta_i$, V_k , V_i , θ_k e θ_i , são respectivamente os módulos e ângulos das tensões das barras k e i . Considerando o modelo dinâmico de TCSC atuando de forma instantânea ($T_{tcsc} = 0$), a reatância capacitiva do TCSC pode ser representada como:

$$x_{tcsc} = x_{tcsc}^0 + \Delta x_{tcsc}, \quad (4.10)$$

onde x_{tcsc}^0 é a reatância do TCSC em regime permanente (reatância de referência) e Δx_{tcsc} é a reatância de controle. Definindo:

$$b_{tcsc}^0 = -\frac{1}{x_{tcsc}^0}, \quad (4.11)$$

$$u = \frac{\Delta x_{tcsc}}{x_{tcsc}^0 + \Delta x_{tcsc}}, \quad (4.12)$$

as equações do fluxo de potência na LT com o TCSC poderão ser reescritas da seguinte forma:

$$P_{ki} = (1 - u) b_{tcsc}^0 V_k V_i \sin(\theta_{ki}), \quad (4.13)$$

$$P_{ik} = -(1 - u) b_{tcsc}^0 V_k V_i \sin(\theta_{ki}), \quad (4.14)$$

$$Q_{ki} = (1 - u) (b_{tcsc}^0 V_k^2 - b_{tcsc}^0 V_k V_i \cos(\theta_{ki})), \quad (4.15)$$

$$Q_{ik} = (1 - u) (b_{tcsc}^0 V_i^2 - b_{tcsc}^0 V_k V_i \cos(\theta_{ki})), \quad (4.16)$$

ou seja,

$$P_{ki} = (1 - u) P_{ki}^0, \quad (4.17)$$

$$P_{ik} = -(1 - u) P_{ki}^0, \quad (4.18)$$

$$Q_{ki} = (1 - u) Q_{ki}^0, \quad (4.19)$$

$$Q_{ik} = (1 - u) Q_{ik}^0 \quad (4.20)$$

As equações (4.17), (4.18), (4.19) e (4.20) determinam os fluxos de potência no dispositivo.

O objetivo deste capítulo, foi apresentar as características dos dispositivos FACTS, em particular do dispositivo TCSC. O modelo apresentado do dispositivo TCSC será utilizado para a síntese de leis de controle não lineares para este dispositivo.

Parte II

Análise e Controle de Sistemas Dinâmicos não Lineares

Capítulo 5

Fundamentos da Teoria de Sistemas Dinâmicos Não Lineares

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos relevantes da teoria de sistemas dinâmicos não lineares, e em particular alguns conceitos relacionados à teoria de função energia e função energia generalizada. Para mais detalhes sobre a teoria de sistemas dinâmicos sugerem-se as seguintes referências: BRAUER; NOHEL (1989); KHALIL (2002); SASTRY (1999); CHIANG; ALBERTO (2015).

5.1 Conceitos Preliminares

Considere o seguinte sistema dinâmico autônomo não linear:

$$\dot{x} = f(x), \quad (5.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$. Vamos admitir que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^r , $r \geq 1$, condição suficiente para garantir a existência e unicidade das soluções do sistema (5.1). Seja $\phi(t, x_0)$ uma solução particular de (5.1) iniciando em x_0 , no instante $t = 0$ e defina $\phi_t(x_0) := \{\phi(t, x_0) \in \mathbb{R}^n : t \in \mathbb{R}\}$ a trajetória que passa através de x_0 .

A matriz jacobiana do sistema (5.1) em um ponto x_p é definida por:

$$Df(x_p) = \left. \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right|_{x=x_p} \quad (5.2)$$

Definição 5.1.1 (Pontos de Equilíbrio). *Um ponto $x_e \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio do sistema (5.1) se $f(x_e) = 0$.*

Definição 5.1.2 (Pontos de Equilíbrio Hiperbólicos). *Um ponto de equilíbrio $x_e \in \mathbb{R}^n$ do sistema (5.1) é hiperbólico se todos os autovalores da matriz $Df(x_e)$ não possuem parte real nula.*

Definição 5.1.3 (Variedade Estável e Instável de Pontos de Equilíbrio Hiperbólicos). *Seja $x_e \in \mathbb{R}^n$ um ponto de equilíbrio hiperbólico e $D \subset \mathbb{R}^n$ uma vizinhança de x_e . Defina-se variedade estável ($W^s(x_e)$) e instável ($W^u(x_e)$) da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} W^s(x_e) &:= \{x \in D : \phi(t, x) \rightarrow x_e \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}, \\ W^u(x_e) &:= \{x \in D : \phi(t, x) \rightarrow x_e \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}. \end{aligned}$$

Definição 5.1.4 (Conjunto Atrativo). *Um conjunto $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, fechado e invariante, é um conjunto atrativo se existir uma vizinhança D de γ tal que, para todo $x_0 \in D$, $\phi(t, x_0) \in D$, para todo $t \geq 0$ e $\phi(t, x_0) \rightarrow \gamma$ quando $t \rightarrow \infty$.*

Definição 5.1.5 (Região de Estabilidade). *A região de estabilidade $A(\gamma)$ de um conjunto atrativo γ do sistema (5.1) é o conjunto*

$$A(\gamma) := \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(t, x) \rightarrow \gamma \text{ quando } t \rightarrow \infty\},$$

ou seja, é a coleção de condições iniciais x com trajetórias $\phi(t, x)$ que tendem para γ quando o tempo tende para infinito.

A fronteira topológica da região de estabilidade $A(\gamma)$ é denominada de **fronteira da região de estabilidade** e é denotada como $\partial A(\gamma)$. Nos estudos do comportamento dinâmico de sistemas não lineares, um dos interesses principais é o estudo do comportamento assintótico das trajetórias do sistema (5.1), assim, o conceito de conjuntos limites é fundamental para esta compreensão.

Definição 5.1.6 (Conjunto limite). *Um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é um ponto ω – limite de $\phi(t, x_0)$ (ou simplesmente de x_0) se existir uma sequência de tempo $\{t_n\}$, satisfazendo $t_n \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$, tal que $\phi(t_n, x_0) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$. O conjunto de todos os pontos ω – limite de x_0 é chamado de conjunto ω – limite de x_0 e é denotado por $\omega(x_0)$.*

O conjunto α – limite é definido similarmente ao conjunto ω – limite, tomando $t_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Uma importante propriedade de um conjunto ω – limite é sua invariância, sendo essa propriedade fundamental na teoria de sistemas dinâmicos.

Definição 5.1.7 (Conjunto Invariante). *Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto invariante em relação ao sistema (5.1) se, para qualquer $x_0 \in D$, $\phi(t, x_0) \in D$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Conjuntos fechados e invariantes podem ser decompostos em máximas componentes indecomponíveis.

Definição 5.1.8 (Conjunto invariante indecomponível). *O conjunto invariante γ é indecomponível se para todo par de pontos $x, y \in \gamma$ e $\varepsilon > 0$, existe um ε de x para y . Mais precisamente, existem $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ e tempos $t_1, t_2, \dots, t_n \geq 1$, tal que, a distância de $\phi(t_i, x_{i-1})$ para x_i é menor que ε .*

Anteriormente, definimos variedades estáveis e instáveis de pontos de equilíbrio hiperbólicos. Vamos definir variedades estáveis e instáveis de conjuntos invariantes.

Definição 5.1.9 (Variedade estável e instável). *Seja Λ um conjunto invariante. A variedade estável de Λ , $W^s(\Lambda)$, é o conjunto de todos os pontos q , tal que, $\omega(q) \subset \Lambda$. Similarmente, a variedade instável de Λ , $W^u(\Lambda)$, é o conjunto de todos os pontos q , tal que, $\alpha(q) \subset \Lambda$.*

5.2 Teoria de Lyapunov

Métodos de análise de estabilidade para sistemas não lineares foram estabelecidos pela teoria de Lyapunov, também conhecidos como métodos diretos. Estes se baseiam em um conceito análogo ao de energia, ou seja, através de uma função escalar do sistema, conclui-se a respeito do comportamento dinâmico do sistema sem a necessidade da resolução das equações de estado que modelam o sistema. As funções de Lyapunov são boas ferramentas de projeto fornecendo diretrizes para escolhas de sinais de realimentação, na medida em que impõem restrições na construção da realimentação tais como a derivada da função ser negativa. Esta ideia foi desenvolvida com a introdução da função de Lyapunov de controle (FLC) (JURDJEVIC; QUINN, 1978; SONTAG, 1983; ARTSTEIN, 1983; SONTAG, 1989). Entretanto, o grande obstáculo da FLC é encontrar uma função de Lyapunov.

Nesta seção uma revisão dos conceitos de função de Lyapunov e função de Lyapunov de controle são apresentados. Para detalhes, segurem-se consultar FREEMAN; KOKOTOVIC (1996); KHALIL (2002); BARREIRA; VALLS (2012).

5.2.1 Função de Lyapunov

O método de Lyapunov tem como objetivo principal o estudo de estabilidade de pontos de equilíbrio. A seguir, apresenta-se o conceito de estabilidade de pontos de equilíbrio no sentido de Lyapunov.

Definição 5.2.1 (Ponto de Equilíbrio Estável). *Um ponto x_e é um ponto de equilíbrio estável do sistema (5.1) se dado $\varepsilon > 0$ (arbitrariamente pequeno), existe um $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que se $\|x_0 - x_e\| < \delta$ então $\|\varphi(t, x_0) - x_e\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.*

Um ponto de equilíbrio é estável se, para valores suficientemente pequenos de perturbações iniciais, as soluções do sistema permanecem em uma vizinhança arbitrariamente pequena deste ponto de equilíbrio. A figura 5.1 apresenta uma ilustração da definição de ponto de equilíbrio estável.

Figura 5.1: Ilustração da definição de ponto de equilíbrio estável.

Definição 5.2.2 (Ponto de Equilíbrio Assintoticamente Estável). *Um ponto x_e é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável se é estável e se existe um $\delta > 0$, tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, x_0)\| = x_e$ para qualquer $\|x_0 - x_e\| < \delta$.*

Um ponto de equilíbrio do sistema é assintoticamente estável, se é estável, e para valores suficientemente pequenos de perturbações iniciais as soluções convergem para o ponto de equilíbrio quando $t \rightarrow \infty$. Na figura 5.2, apresenta-se uma ilustração da definição de ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Figura 5.2: Ilustração da definição de ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Considere o sistema autônomo não linear (5.1). A seguir será apresentada a definição de função de Lyapunov.

Definição 5.2.3 (Função de Lyapunov). *Seja x_e um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico não linear (5.1). Uma função $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ com $D \subset \mathbb{R}^n$, de classe C^1 definida em uma vizinhança D de x_e é uma função de Lyapunov do sistema (5.1) se:*

(L1) $V(x_e) = 0$ e $V(x) > 0$ se $x \neq x_e$ para $x \in D$

(L2) $\dot{V}(x) \leq 0$ para $x \in D$.

A função de Lyapunov é uma função de Lyapunov estrita quando:

(L3) $\dot{V}(x) < 0$ para $x \in D - \{x_e\}$.

A existência de uma função de Lyapunov permite estabelecer condições suficientes para estabilidade de pontos de equilíbrio de sistemas dinâmicos.

Teorema 5.2.1 (Teorema de Lyapunov). *Seja x_e um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico não linear (5.1) e $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 definida em uma vizinhança D de x_e . Então,*

- (i) *se $V(x)$ é uma função de Lyapunov do sistema (5.1), então x_e é um ponto de equilíbrio estável;*
- (ii) *se $V(x)$ é uma função de Lyapunov estrita do sistema (5.1), então x_e é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.*

O teorema de Lyapunov fornece uma condição suficiente para estabilidade de pontos de equilíbrio (KHALIL, 2002; BARREIRA; VALLS, 2012), porém não nos fornece um método sistemático para encontrar as funções de Lyapunov.

O exemplo 5.2.1 ilustra os conceitos apresentados nesta subseção.

Exemplo 5.2.1 - Considere o seguinte sistema dinâmico não linear:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2^3,\end{aligned}\tag{5.3}$$

Considere a seguinte função como candidata a função de Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2,\tag{5.4}$$

O sistema (5.3) possui um ponto de equilíbrio $x_e = (0; 0)$. Temos $V(x_e) = 0$ e $V(x) > 0$ para $x \neq x_e$. A derivada de $V(x)$ é dada por:

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_2^4 < 0 \text{ para } x \in \mathbb{R}^n - \{x_e\}.\tag{5.5}$$

Portanto, $V(x)$ é uma função de Lyapunov estrita e de acordo com o teorema 5.2.1 x_e é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Figura 5.3: Função de Lyapunov para o sistema (5.3).

Podemos observar nas figuras 5.3 e 5.4 que a função de Lyapunov é uma função decrescente ao longo das trajetórias do sistema e que o valor de $V(x)$ tende para zero à medida que o tempo tende para o infinito.

Figura 5.4: Comportamento da função de Lyapunov e da derivada da função de Lyapunov ao longo do tempo para o sistema (5.3).

5.2.2 Função Lyapunov de Controle

Nesta subseção, iremos considerar o problema de controle e apresentaremos a definição de funções de Lyapunov de controle (FLC) (JURDJEVIC; QUINN, 1978; SONTAG, 1983; ARTSTEIN, 1983). O conceito de função de Lyapunov de controle oferece condições suficientes para estabilização de sistemas não lineares em malha fechada (JURDJEVIC; QUINN, 1978; SONTAG, 1983; ARTSTEIN, 1983).

Considere agora o seguinte sistema autônomo controlado:

$$\dot{x} = F(x, u), \quad (5.6)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de estado do sistema, $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle e $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^r , $r \geq 1$. Suponha que x_e seja um ponto de equilíbrio do sistema em malha aberta ($u = 0$), isto é, $F(x_e, 0) = 0$. Deseja-se obter uma lei de realimentação $u = h(x)$, tal que o ponto de equilíbrio do sistema x_e em malha fechada (5.7) seja assintoticamente estável.

$$\dot{x} = F(x, h(x)). \quad (5.7)$$

Definição 5.2.4 (Função de Lyapunov de Controle). *Seja x_e um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico não linear (5.6). Uma função $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ com $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, de*

classe C^1 definida em uma vizinhança D de x_e , é uma função de Lyapunov de controle (FLC) do sistema (5.6) se existir uma lei de realimentação de controle $u = h(x)$ com $h(x_e) = 0$, de classe C^1 , tal que a função $W : D \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $W(x) = V(x, h(x))$ seja uma função de Lyapunov de (5.7).

O teorema a seguir retirado de SILVA et al. (2009), garante a estabilidade assintótica de pontos de equilíbrio em malha fechada do sistema (5.7).

Teorema 5.2.2 (Estabilidade do Sistema em Malha Fechada). *(SILVA et al., 2009) Seja V uma função de Lyapunov de controle de (5.6), então, existe uma lei de realimentação de controle $u = h(x)$ com $h(x_e) = 0$, tal que, o ponto x_e em malha fechada (5.7) é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.*

A Função de Lyapunov de Controle é uma condição suficiente para garantir a estabilidade de pontos de equilíbrio do sistema em malha fechada. A grande dificuldade da FLC é que para muitos sistemas dinâmicos é de extrema complexidade encontrar uma FLC.

Embora o objetivo principal da teoria de Lyapunov seja demonstrar a estabilidade de pontos de equilíbrio, é possível obter informações da região de estabilidade através da FLC. Assim, em SILVA et al. (2009) o seguinte teorema foi apresentado:

Teorema 5.2.3 (Região de Estabilidade do Sistema em Malha Fechada). *(SILVA et al., 2009) Seja x_e um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico não linear (5.6) e $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 definida em uma vizinhança D de x_e . Se a função $W(x) = V(x, h(x))$ satisfaz as seguintes condições:*

(i) $W(x_e) = 0$ e $W(x) > 0$ para todo $x \in D - \{x_e\}$

(ii) $\dot{W}(x_e) = 0$ e $\dot{W}(x) < 0$ para $x \in D - \{x_e\}$.

Então x_e é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha fechada, além disso, existe uma contante L , tal que, a componente conexa $S_c(L)$ do conjunto de nível $\{x \in D : W(x) < L\}$ está contida na região de estabilidade $A(x_e)$.

O teorema 5.2.3 oferece uma estimativa da região de estabilidade, entretanto, a mesma não é uma estimativa ótima (SILVA et al., 2009).

O exemplo 5.2.2 ilustra os conceitos apresentados nesta subseção.

Exemplo 5.2.2 - Considere o seguinte sistema dinâmico não linear:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_1^2 + x_2 + u,\end{aligned}\tag{5.8}$$

Vamos estudar a estabilidade da origem do sistema dinâmico não linear (5.8). A origem do sistema (5.8) em malha aberta ($u = 0$) é um ponto de sela. A figura 5.5 apresenta o plano de fase do sistema em malha aberta ($u = 0$).

Figura 5.5: Plano de fase do sistema (5.8) em malha aberta ($u = 0$).

O objetivo é encontrar uma lei de controle para que a origem do sistema (5.8) seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Considere a seguinte função como candidata a função de Lyapunov de controle:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2, \quad (5.9)$$

Temos que $V(0,0) = 0$ e $V(x) > 0$ para todo $x \neq (0,0)$. A derivada de $V(x)$ é dada por:

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 + x_2^2 - x_1^2x_2 + ux_2 \quad (5.10)$$

Com o objetivo de tornar $\dot{V}(x) \leq 0$, vamos escolher a seguinte lei de controle $u = h(x)$:

$$h(x) = x_1^2 - kx_2, \quad (5.11)$$

onde, k é uma constante positiva. A derivada $\dot{V}(x)$ torna-se:

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - (k-1)x_2^2 \quad (5.12)$$

Para valores de $k \geq 1$, a função (5.9) é uma função de Lyapunov de controle e $h(x)$ é uma lei de controle estabilizante para o sistema (5.8). Portanto, a origem em malha fechada é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. A figura 5.6 apresenta o plano de fase do sistema em malha fechada com a lei de controle proposta e $k = 2$.

Figura 5.6: Retrato de fase do sistema em malha fechada, $h(x) = x_1^2 - 2x_2$.

Para o sistema apresentado, a lei de controle (5.11) torna a origem do sistema (5.8) globalmente assintoticamente estável.

Para ilustrar o uso do teorema 5.2.3, vamos considerar a seguinte lei de controle:

$$h(x) = -kx_2, \quad (5.13)$$

A derivada $\dot{V}(x)$ torna-se:

$$\dot{V}(x) = - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Assim, para a lei de controle (5.13), a função (5.9) será uma função de Lyapunov de controle apenas na seguinte região:

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x_1 \leq 2, \forall x_2\} \quad (5.15)$$

Considerando a lei de controle (5.13) com $k = 2$, a origem torna-se localmente assintoticamente estável. A figura 5.7 apresenta o plano de fase do sistema em malha fechada com a lei de controle (5.13) e uma estimativa da região de estabilidade via teorema 5.2.3 com $L = 1,9$.

Figura 5.7: Plano de fase do sistema em malha fechada ($h(x) = -2x_2$) e estimativa da região de estabilidade da origem.

5.3 Teoria de Sistemas Singularmente Perturbados

O comportamento dinâmico de sistemas físicos é usualmente modelado através de equações diferenciais ordinárias. Porém, alguns sistemas físicos apresentam restrições nos seus estados, tais como, leis de kirchoff em redes elétricas ou restrições de posição em sistemas mecânicos. Estas restrições de estado são usualmente modeladas através de equações algébricas. Os sistemas que apresentam em seu modelo de estado equações diferenciais e equações algébricas são chamados de sistemas dinâmicos algébrico-diferenciais (CHIANG; ALBERTO, 2015).

A análise de modelos algébrico-diferenciais é de extrema complexidade, pois apresenta dinâmicas complexas próximas a superfícies singulares.

Para evitar as dificuldades que os modelos algébrico-diferenciais apresentam, algumas técnicas podem ser empregadas. Uma das técnicas mais comum é a redução do sistema, ou seja, as equações algébricas são eliminadas resultando assim em um sistema de equações diferenciais. Entretanto, esta técnica apresenta algumas limitações, uma vez que com a redução, informações sobre as dinâmicas de alguns elementos podem ser ocultadas.

Uma segunda forma é o tratamento das equações algébricas como equações diferenciais singularmente perturbadas, ou seja, regularizam-se as dinâmicas algébricas através da inserção de um parâmetro transformando as restrições algébricas em um conjunto de equações diferenciais.

Nesta seção, vamos apresentar uma breve revisão dos conceitos e definições de sistemas dinâmicos algébrico-diferenciais e de sistemas dinâmicos singularmente perturbados. Para

mais detalhes dos conceitos e definições apresentados, sugere-se consultar KOKOTOVIC; KHALI; O'REILLY (1999); KHALIL (2002); CHIANG; ALBERTO (2015).

5.3.1 Sistemas Dinâmicos Algébrico-Diferenciais

Considere a seguinte classe de sistemas dinâmicos algébrico diferencial (A-D):

$$(\Sigma_o) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ 0 = g(x, y) \end{cases} \quad (5.16)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de estado, $y \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de variáveis algébricas. As funções $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ são funções de classe C^r , $r \geq 1$. As variáveis do sistema (5.16) pertencem ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+m}$ e sua trajetória está restrita a um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+m}$,

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} | 0 = g(x, y)\}. \quad (5.17)$$

A função $\phi(t) = (x(t), y(t)) : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, é uma solução particular do sistema (5.16) se $(x(t), y(t)) \in \Gamma$ para todo $t \in I$ e $(x(t), y(t))$ satisfaz (5.16) para todo $t \in I$. A solução iniciando em $(x_0, y_0) \in \Gamma$, no instante $t = 0$, é denotada $\phi(t, x_0, y_0)$.

Definição 5.3.1 (Pontos de Equilíbrio do Sistema A-D). *Um ponto $(x_e, y_e) \in \mathbb{R}^{n+m}$ é um ponto de equilíbrio do sistema algébrico-diferencial (5.16) se $f(x_e, y_e) = 0$ e $g(x_e, y_e) = 0$.*

Definição 5.3.2 (Região de Estabilidade do Sistema A-D). *Seja Γ_s uma componente conexa de Γ e $(x_s, y_s) \in \Gamma_s$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema algébrico-diferencial (5.16). A região de estabilidade $A(x_s, y_s)$ de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável (x_s, y_s) do sistema (5.16) é definida:*

$$A(x_s, y_s) := \{(x, y) \in \Gamma_s : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, (x, y)) = (x_s, y_s)\}.$$

A teoria de sistemas algébrico-diferenciais não está totalmente desenvolvida, por exemplo, a teoria sobre a região de estabilidade e a fronteira da região de estabilidade desses sistemas ainda está em processo de desenvolvimento (CHIANG; ALBERTO, 2015). Assim, a teoria de sistemas singularmente perturbados surge como uma alternativa interessante para regularização das dinâmicas relacionadas às restrições algébricas.

5.3.2 Sistemas Dinâmicos Singularmente Perturbados

A teoria de sistemas singularmente perturbados foi introduzida no início da década de 50 para análise e controle de sistemas dinâmicos, sendo inicialmente estudada por Tikhonov, Levinson, Vasil'eva, Wasow, Hoppensteadt, O'Malley (KOKOTOVIC; KHALI; O'REILLY, 1999). Esta é uma classe especial contendo um parâmetro ε suficientemente

pequeno. Quando ε tende a zero a equação diferencial torna-se uma equação algébrica. Nesta seção vamos apresentar alguns conceitos relacionados a teoria de sistemas singularmente perturbados.

Considere a seguinte classe de sistemas dinâmicos singularmente perturbados (S-P):

$$(\Sigma_\varepsilon) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \varepsilon \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (5.18)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ são funções de classe C^r , com $r \geq 1$, e ε é um parâmetro positivo e suficientemente pequeno.

As variáveis do sistema dinâmico S-P apresentam dinâmicas em escalas de tempos diferentes, sendo divididas em duas escalas de tempos, variáveis lentas e variáveis rápidas (KOKOTOVIC; KHALI; O'REILLY, 1999; CHIANG; ALBERTO, 2015).

Seja $\phi_\varepsilon(t, x_0, y_0)$ a trajetória do sistema (5.18) que passa por (x_0, y_0) no instante $t = 0$. Segundo CHIANG; ALBERTO (2015), as trajetórias do sistema S-P (5.18) associado a um sistema A-D não estão confinadas na variedade de restrição algébrica Γ e não são exatamente as mesmas do sistema A-D (5.16). Porém, as trajetórias geradas do sistema S-P (5.18) são aproximações válidas para o sistema A-D (5.16) (CHIANG; ALBERTO, 2015). A figura 5.8 ilustra as relações entre as trajetórias dos sistemas A-D (5.16) e S-P (5.18).

Figura 5.8: Relações entre as trajetórias dos sistemas A-D (5.16) e S-P (5.18 (CHIANG; ALBERTO, 2015).

O sistema A-D e o seu correspondente S-P compartilham algumas propriedades importantes, incluindo as relações entre suas regiões de estabilidade e seus pontos de equilíbrio (CHIANG; ALBERTO, 2015).

Definição 5.3.3 (Região de Estabilidade do Sistema S-P). *Se (x_s, y_s) é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema singularmente perturbado (5.18), então a região de estabilidade é definida:*

$$A_\varepsilon(x_s, y_s) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_\varepsilon(t, (x, y)) = (x_s, y_s)\}.$$

Os pontos de equilíbrio do sistema A-D e S-P são os mesmos para qualquer ε (KOKOTOVIC; KHALI; O'REILLY, 1999; CHIANG; ALBERTO, 2015). Segundo (CHIANG; ALBERTO, 2015), existe uma relação entre as regiões de estabilidade desses sistemas, mais precisamente, para o parâmetro ε suficientemente pequeno (CHIANG; ALBERTO, 2015) a fronteira da região de estabilidade desses sistemas se aproximam. Na figura 5.9, apresenta-se uma ilustração dessa aproximação.

Figura 5.9: Relações entre as fronteiras das regiões de estabilidade e os pontos de equilíbrio dos sistemas A-D e S-P.

O propósito dessa seção foi apresentar alguns conceitos sobre a teoria de sistemas algébrico-diferenciais e sistemas singularmente perturbados e as suas relações. Estes conceitos são importantes para os objetivos deste trabalho, uma vez que, sistemas elétricos de potência podem ser modelados através de equações algébrico-diferenciais. As dinâmicas algébricas desses modelos podem ser regularizadas através da teoria de sistemas singularmente perturbados. Essa regularização das dinâmicas algébricas de sistemas elétricos de potência possibilita uma forma de construir funções energia e funções energia generalizadas para esses sistemas.

Os próximos capítulos, apresentaremos uma revisão dos conceitos sobre a teoria de função energia e função energia generalizada.

Capítulo 6

Função Energia

O conceito de função energia (CHIANG; WU; VARAIYA, 1987) tem sido extensivamente usado em sistemas elétricos de potência para análise e projeto de controles não lineares (CHANDHARI; ANDERSSON; HISKENS, 2002; SILVA, 2006; SILVA et al., 2009) e para avaliação da estabilidade transitória (PAI; PADIYAR; RADHAKRISHNA, 1981; TSOLAS; ARAPOSTATHIS; VARAIYA, 1985; CHIANG; WU; VARAIYA, 1987; ALBERTO; SILVA; BRETAS, 2001). Este conceito possui um grande potencial para fornecer avaliações e controles em tempo real para sistemas elétricos de potência modernos. Por exemplo, o conceito de função energia e o desenvolvimento da teoria de regiões de estabilidade conduzem aos desenvolvimentos dos métodos diretos, tais como o método CUEP (*Controlling Unstable Equilibrium Point* - Ponto de equilíbrio instável de controle), permitindo a elaboração de ferramentas computacionais para a avaliação em tempo real da estabilidade transitória (CHIANG et al., 2009).

A existência de funções energia fornece não apenas a possibilidade de avaliações de estabilidade de sistemas elétricos de potência, mas também oferece uma medida da margem de estabilidade e um auxílio no projeto de controles preventivos (CHIANG; WANG, 1996; ERNST; RUIZ-VEGA; PAVELLA, 2000).

Neste capítulo, uma revisão da teoria de função energia será apresentado.

6.1 Função Energia e Região de Estabilidade

Considere o seguinte sistema autônomo não linear:

$$\dot{x} = f(x), \tag{6.1}$$

onde x é o vetor de variáveis de estado, $x \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^r , com $r \geq 1$.

O conjunto $E := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$ é o conjunto formado pelos pontos de equilíbrio do sistema (6.1). A seguinte definição de função energia foi proposta por CHIANG; WU; VARAIYA (1987).

Definição 6.1.1 (Função Energia). (*CHIANG; WU; VARAIYA, 1987*) Uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 é uma função energia do sistema (6.1) se:

- (E1) $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (naturalmente, $\dot{V}(x) = 0$ para todo ponto $x \in E$).
- (E2) se $x_0 \notin E$, então o conjunto $\{t \in \mathbb{R} : \dot{V}(\phi(t, x_0)) = 0\}$ tem medida zero em $\mathbb{R}$.
- (E3) para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se $V(\phi(t, x_0))$ é limitado para $t \geq 0$, então $\phi(t, x_0)$ é limitado para $t \geq 0$.

A propriedade (E1) indica que a função energia é não crescente ao longo da trajetória do sistema (6.1), porém, não implica que a função energia é estritamente decrescente ao longo da trajetória. A propriedade (E2) garante a não existência de um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ tal que $\dot{V}(x(t)) = 0$ para $t \in [t_1, t_2]$, consequentemente, as propriedades (E1) e (E2) implicam que a função energia ao longo da trajetória do sistema (6.1) é estritamente decrescente. A propriedade (E3) garante que se a função $V(\phi(t, x_0))$ é limitada ao longo da trajetória do sistema (6.1), então a trajetória $\phi(t, x_0)$ é limitada para $t \geq 0$ (ALBERTO, 2006; ALBERTO; CHIANG, 2012a; CHIANG; ALBERTO, 2015).

O conceito de função energia permite tirar conclusões a respeito dos conjuntos limites (CHIANG; ALBERTO, 2015)

Teorema 6.1.1 (Função Energia e Conjuntos Limites). (*CHIANG; ALBERTO, 2015*) Seja $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função energia do sistema (6.1) e admita que todos os pontos de equilíbrio do sistema sejam hiperbólicos. Então, o conjunto ω – limite de cada trajetória é formado por um único ponto de equilíbrio.

A existência de uma função energia implica que os conjuntos limites são formados apenas por pontos de equilíbrio hiperbólicos, teorema 6.1.1 (CHIANG; ALBERTO, 2015). Porém, em geral, o comportamento assintótico de sistemas dinâmicos não lineares gerais pode ser muito complicado, por exemplo os conjuntos limites podem apresentar trajetórias quase periódicas ou trajetórias caóticas. Entretanto, como será mostrado no teorema 6.1.2, se o sistema dinâmico admite a existência de uma função energia, então, o sistema pode exibir apenas comportamentos simples. Por exemplo, para cada trajetória do sistema que admite uma função energia existem apenas dois comportamentos possíveis: sua trajetória converge para um ponto de equilíbrio ou sua trajetória torna-se ilimitada (converge para infinito) com aumento ou diminuição de tempo. Este resultado é explicado no seguinte teorema apresentado por (ALBERTO, 2006):

Teorema 6.1.2 (Comportamento global das trajetórias). (*ALBERTO, 2006*) Se existe uma função satisfazendo as condições (E1) e (E2) de uma função energia para o sistema (6.1), então toda trajetória limitada do sistema (6.1) converge para um ponto de equilíbrio.

O teorema 6.1.2 garante que não existem ciclos limites (comportamentos oscilatórios) ou comportamentos complicados limitados, tais como, trajetórias quase periódicas, trajetórias caóticas, etc. no sistema. Como consequência, qualquer sistema dinâmico não linear que exiba comportamento complexo não admite funções energia.

A existência de uma função energia também tem uma importante implicação em termos de uma caracterização da região de estabilidade $A(x^s)$ de sistemas dinâmicos (CHIANG; ALBERTO, 2015), que será apresentado no teorema 6.1.3.

Teorema 6.1.3 (Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade via Função Energia). (CHIANG; ALBERTO, 2015) *Se o sistema dinâmico (6.1) admite uma função energia e todos os pontos de equilíbrio são hiperbólicos, então a fronteira da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável x^s está contido na união das variedades estáveis de todos os pontos de equilíbrios instáveis x_i na fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^s)$*

$$\partial A(x^s) \subset \bigcup_{x_i \in \partial A(x^s)} W^s(x_i) \quad (6.2)$$

Como uma consequência dessa caracterização, o teorema 6.1.4 fornece uma estimativa ótima da região de estabilidade em termos de curvas de nível de uma dada função energia (ALBERTO, 2006; CHIANG; ALBERTO, 2015).

Teorema 6.1.4 (Estimativa da Região de estabilidade via função energia). (ALBERTO, 2006) *Suponha que o sistema (6.1) admita uma função energia V . Sejam x_i , $i = 1, 2, \dots$ os pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^s)$. Defina $L \leq \min_i V(x_i)$ e seja $S_c(L)$ a componente conexa do conjunto de nível $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$ contendo o ponto de equilíbrio x^s . Então $S_c(L)$ é uma estimativa da região de estabilidade, ou seja, $S_c(L) \subset A(x^s)$.*

Na figura 6.1, apresenta-se a ilustração do teorema 6.1.4.

Figura 6.1: Ilustração do teorema 6.1.4: A componente conexa $S_c(L)$ é uma estimativa da região de estabilidade via função energia.

De acordo com o teorema 6.1.4 a fronteira da região de estabilidade ($\partial A(x^s)$) de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável (x^s) de um sistema que admite um função energia é composta pela união das variedades estáveis dos pontos de equilíbrio instáveis ($x_i, i = 1, 2, \dots$). Dentre os pontos de equilíbrios que fazem parte da fronteira da região de estabilidade temos $\min_i V(x_i) = L$. Portanto, a componente conexa $S_c(L)$ do conjunto de nível da função que contém o ponto de equilíbrio x^s é uma estimativa da região de estabilidade.

Segundo ALBERTO (2006), $S_c(L)$ é a melhor estimativa da região de estabilidade que pode ser obtida na forma de uma curva de nível da função energia V .

A seguir, apresenta-se um exemplo de aplicação de função energia.

Exemplo 6.1.1 - Considere o seguinte sistema dinâmico não linear:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 + b\sin(x_1) + c,\end{aligned}\tag{6.3}$$

onde, a, b, c são entradas positivas e $x \in \mathbb{R}^2$. Considere a seguinte função escalar como candidata a função energia para o sistema (6.3):

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + cx_1 - b\cos(x_1) + \alpha,\tag{6.4}$$

onde, α é uma constante arbitrária.

Para demonstrar que a função escalar (6.4) é uma função energia do sistema (6.3) iremos primeiramente mostrar que a função satisfaz a condição **(E1)**. Derivando $V(x)$ ao longo das órbitas do sistema (6.3), temos:

$$\dot{V}(x) = -ax_2^2 \leq 0,\tag{6.5}$$

Deste modo, a propriedade **(E1)** de uma função energia é satisfeita.

Para verificar a veracidade da propriedade **(E2)**, suponha uma trajetória não trivial $\varphi(t) = (x(t))$ tal que $\dot{V}(\varphi(t)) = 0$ ao longo de um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ de medida não nula. Visto que a é um número positivo, temos que $x_2 = 0$ no intervalo I , então, x_1 é constante. Portanto, $\varphi(t)$ é uma solução trivial, contradizendo a hipótese inicial, e assim, como consequência, a propriedade **(E2)** é satisfeita.

Para demonstrar que $V(x)$ satisfaz a hipótese **(E3)**, verifica-se primeiro através da fórmula da variação das constantes (BRAUER; NOHEL, 1989) que x_2 é limitada, ou seja,

$$x_2(t) \leq |x_2(0)| + \left| \frac{c+b}{a} \right|.\tag{6.6}$$

Assim, temos

$$V(x) \leq \frac{1}{2} \left(|x_2(0)| + \left| \frac{c+b}{a} \right| \right)^2 + c x_1 + b + k, \quad (6.7)$$

ou seja,

$$V(x) \leq c x_1 + N. \quad (6.8)$$

Por hipótese $V(x)$ é limitado,

$$V(x) \leq c x_1 + N \leq M. \quad (6.9)$$

Portanto, conclui-se que $c x_1$ é limitado se e somente se $V(x)$ for limitado. Assim, as soluções do sistema são também limitadas satisfazendo a hipótese **(E3)** da definição de função energia.

Considere o sistema (6.3) com os seguintes parâmetros: $a = 1$, $b = 1$ e $c = 0,2$. O sistema (6.3) possui três pontos de equilíbrio, um ponto de equilíbrio assintoticamente estável $x^s = (-0,2; 0)$ e outros dois pontos de equilíbrio instáveis $x^{u1} = (-2,94; 0)$ e $x^{u2} = (3,34; 0)$. A constante $\alpha = 1,02$ foi escolhida para que a função $V(x)$ seja igual a zero no ponto de equilíbrio estável ($V(x^s) = 0$). Para estimar a região de estabilidade via função energia verifica-se $\min\{V(x^{u1}), V(x^{u2})\} = L$, ou seja, no exemplo $\min\{1,96; 2,67\} = 1,96$. A figura 6.2 apresenta a estimativa da região de estabilidade via função energia do sistema (6.3).

Figura 6.2: Região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade via função energia do sistema (6.3).

6.2 Função Energia de Controle

A existência de uma função de Lyapunov de controle é uma condição suficiente para garantir estabilidade assintótica de pontos de equilíbrio para sistemas em malha fechada (FREEMAN; KOKOTOVIC, 1996). Embora, o objetivo principal da teoria de Lyapunov seja o estudo da estabilidade de pontos de equilíbrio, através do teorema 5.2.3, é possível obter informações sobre a região de estabilidade do sistema em malha fechada. Entretanto, o grande obstáculo é encontrar uma função de Lyapunov de controle que satisfaça todas as condições do teorema de Lyapunov, considerando-se ainda que a mesma não fornece estimativas ótimas da região de estabilidade (SILVA et al., 2009).

O conceito de função energia de controle proposto por SILVA et al. (2009) tem como objetivo obter leis de controle estabilizantes para sistemas em malha fechada, além disso, é possível obter informações dos conjuntos limites e uma estimativa ótima da região de estabilidade (SILVA et al., 2009; ALBERTO, 2006).

Considere o seguinte sistema autônomo não linear controlado:

$$\dot{x} = F(x, u), \quad (6.10)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é vetor de variáveis de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle e $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 . Suponha que a origem¹ seja um ponto de equilíbrio do sistema em malha aberta ($u = 0$), isto é, $F(0, 0) = 0$. Deseja-se obter uma lei de realimentação $u = h(x)$, tal que a origem do sistema em malha fechada (6.10) seja assintoticamente estável.

$$\dot{x} = F(x, h(x)). \quad (6.11)$$

A seguir apresenta-se a definição de função energia de controle proposta por SILVA et al. (2009).

Definição 6.2.1 (Função Energia de Controle). (SILVA et al., 2009) Uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , é uma Função Energia de Controle de (6.10), se existir uma lei de realimentação de controle $u = h(x)$, de classe C^1 , tal que $W(x) = V(x, h(x))$ seja uma função energia do sistema em malha fechada (6.11).

Como consequência da existência de uma função energia de controle o próximo teorema garante a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada.

Teorema 6.2.1 (Estabilidade e Região de Estabilidade do Sistema em Malha Fechada via Função Energia de Controle). (SILVA et al., 2009) Seja $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função energia de controle de (6.10). Se existir uma componente conexa limitada $S_c(L)$ do conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x, h(x)) < L\}$, tal que x^s seja o único ponto de equilíbrio contido no interior de $S_c(L)$, então x^s é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha fechada (6.11). Além disso, $S_c(L)$ é uma estimativa da região de estabilidade.

¹Não há perda de generalidade em estudar a estabilidade da origem.

Além da estabilidade assintótica em malha fechada, o teorema 6.2.1 oferece uma estimativa da região de estabilidade, ainda que esta estimativa não seja ótima. O próximo teorema, proposto por SILVA et al. (2009), permite obter uma estimativa ótima da região de estabilidade via função energia de controle.

Teorema 6.2.2 (Estimativa Ótima da Região de Estabilidade do Sistema em Malha Fechada via Função Energia de Controle). *(SILVA et al., 2009) Seja $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função energia de controle e x^s um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha fechada. Defina o nível de energia*

$$L = \min_{x_i \in \{E \cap \partial A(x^s)\}} W(x_i).$$

A componente conexa $S_c(L)$ do conjunto de nível $\{x \in \mathbb{R}^n : W(x) = V(x, h(x)) < L\}$ contendo x^s está contida na região de estabilidade do sistema em malha fechada. Então $S_c(L)$ é uma estimativa da região de estabilidade do sistema em malha fechada.

Exemplo 6.2.1 - Considere o seguinte sistema dinâmico não linear controlado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= a x_2 + b \sin(x_1) + c + u,\end{aligned}\tag{6.12}$$

onde, a, b, c são entradas positivas, $x \in \mathbb{R}^2$ e u é a entrada de controle. Considere a seguinte função escalar como candidata a função energia de controle para o sistema (6.12):

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + c x_1 - b \cos(x_1) + \alpha,\tag{6.13}$$

onde, α é uma constante arbitrária.

O objetivo é escolher uma lei de realimentação $u = h(x)$, para que o ponto de equilíbrio x^s em malha fechada seja assintoticamente estável. Derivando $V(x)$ ao longo das órbitas do sistema (6.12), temos:

$$\dot{V}(x) = a x_2^2 + u x_2.\tag{6.14}$$

Para o sistema em malha aberta, ou seja, $u = 0$, temos que:

$$\dot{V}(x) = a x_2^2 \geq 0.\tag{6.15}$$

Vamos escolher uma lei de realimentação, tal que, $\dot{V}(x) \leq 0$. Para isso, considere a seguinte lei de controle:

$$h(x) = -k x_2,\tag{6.16}$$

onde k é o ganho do controlador e o seu valor deve ser $k > a$. Portanto, conclui-se que $h(x) = -k x_2$ é uma lei de controle não linear estabilizante do sistema (6.12).

Considere o sistema (6.3) com os seguintes parâmetros: $a = 1$, $b = 1$ e $c = 0,2$. O sistema (6.3) em malha aberta possui três pontos de equilíbrio instáveis $x^s = (-0, 2; 0)$, $x^{u1} = (-2, 94; 0)$ e $x^{u2} = (3, 34; 0)$. O ponto de equilíbrio x^s é hiperbólico do tipo 2 (foco instável) e os pontos de equilíbrio x^{u1} e x^{u2} são hiperbólicos do tipo 1 (sela). A figura 6.3 apresenta o plano de fase do sistema em malha aberta.

Figura 6.3: Plano de fase do sistema (6.12) em malha aberta ($u = 0$).

Para o sistema em malha fechada com $h(x) = -kx_2$, o ganho foi escolhido para que a função (6.13) seja função energia de controle em malha fechada, ou seja, $k = 2$. A figura apresenta a região de estabilidade e a sua estimativa via função energia de controle.

Figura 6.4: Região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade via função energia de controle do sistema em malha fechada (6.12).

O conceito de função energia possibilita o estudo da estabilidade e do comportamento das soluções de sistemas dinâmicos não lineares. Além disso, função energia oferece uma forma de obter estimativas da região de estabilidade desses sistemas. Porém, em vários sistemas físicos é difícil encontrar uma função satisfazendo todas as condições de uma função energia. Com o objetivo de estudar sistemas físicos mais complexos, o conceito de função energia generalizada é apresentado. Este conceito relaxa as condições de função energia. O próximo capítulo apresenta-se uma revisão de função energia generalizada.

Para um melhor entendimento e verificação das provas dos teoremas apresentados neste capítulo sugere-se consultar ALBERTO (2006); SILVA et al. (2009); ALBERTO; CHIANG (2012b); CHIANG; ALBERTO (2015).

Função Energia Generalizada

O conceito de função energia apresentado por CHIANG; HIRSCH; WU (1988) tem sido amplamente utilizado para análise e projeto de controle de sistemas dinâmicos não-lineares. Este conceito foi desenvolvido sob a suposição de que os conjuntos limites de tais sistemas são compostos exclusivamente de pontos de equilíbrio hiperbólicos. Entretanto, a estrutura dos conjuntos limites de sistemas dinâmicos em geral podem ser muito complexas admitindo trajetórias caóticas, soluções quase-periódicas e órbitas fechadas. Por exemplo, a existência de órbitas fechadas e comportamento caótico já foi relatado na literatura em sistemas elétricos de potência (CHIANG et al., 1993; VENKATASUBRAMANIAN; JI, 1999; SUSUKI; HIKIHARA; CHIANG, 2004). Como consequência, estes modelos de sistema dinâmicos não lineares não admitem uma função energia e como consequência a teoria de função energia não pode ser aplicada em sistema de potência de forma geral.

O conceito de função energia generalizada apresentado por ALBERTO (2006), que é uma generalização do conceito de função energia, surge como uma alternativa prática para a análise de sistemas dinâmicos não lineares que apresentam tais comportamentos complexos, fornecendo informações úteis sobre os seus conjuntos limites (ALBERTO, 2006; ALBERTO; CHIANG, 2012a).

Neste capítulo, uma revisão da teoria de função energia generalizada será apresentada.

7.1 Função Energia Generalizada e Região de Estabilidade

Considere o seguinte sistema autônomo não linear:

$$\dot{x} = f(x), \tag{7.1}$$

onde x é o vetor de variáveis de estado, $x \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 .

Seja $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^r , $r \geq 1$, e defina o seguinte conjunto:

$$C := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) \geq 0 \right\}, \quad (7.2)$$

onde a derivada de V é positiva. O conjunto C é usualmente composto por uma coleção enumerável de componentes conexas C_i , onde C_i é a i -ésima componente conexa do conjunto C . Estes conjuntos por hipótese são isolados, isto é, existe uma coleção de conjuntos abertos e disjuntos $D_{i's}$ satisfazendo $C_i \subset D_i$ para todo i (ALBERTO, 2006). A seguir apresenta-se a definição de função energia generalizada para o sistema (7.1) proposta em ALBERTO (2006).

Definição 7.1.1 (Função Energia Generalizada). (ALBERTO, 2006) Uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função energia generalizada do sistema (7.1) se:

- (G1) O número de componentes conexas C_i de C é finito.
- (G2) O conjunto C_i é limitado para todo i .
- (G3) para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se $V(\phi(t, x_0))$ é limitado para $t \geq 0$, então $\phi(t, x_0)$ é limitado para $t \geq 0$.

A definição de função energia generalizada permite que a derivada da função ao longo das trajetórias possa ser positiva nos conjuntos limitados $C_{i's}$ (ALBERTO, 2006). A figura 7.1 ilustra este conceito.

Figura 7.1: Função energia generalizada e seus conjuntos limitados $C_{i's}$.

Com o conceito de função energia generalizada é possível obter informações importantes a respeito dos conjuntos limites de sistemas não lineares, incluindo aqueles que apresentam comportamentos complexos em seus conjuntos limites. A seguir o teorema 7.1.1, apresentado em ALBERTO; CHIANG (2012a), mostra que a existência de uma função energia generalizada garante que os conjuntos limites do sistema estão localizados no conjunto $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$, em que a derivada da função energia generalizada é zero, ou tem intersecção não vazia com conjuntos limitados $C_{i's}$ onde a derivada da função energia generalizada é positiva.

Teorema 7.1.1 (FEG e Conjuntos Limites). (ALBERTO; CHIANG, 2012a) *Seja V uma função energia generalizada do sistema (7.1) e $M := \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$. Considere que a trajetória $\varphi(t, x_0)$ do sistema (7.1) é limitada para $t \geq 0$. Então:*

- (i) *existe um nível $L \in \mathbb{R}$ tal que $\omega(x_0) \subset (M \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x \in V^{-1}(L)\})$;*
- (ii) *ou existe pelo menos uma componente conexa C_j de C tal que $\omega(x_0) \subset C_j \neq \emptyset$.*

Para o sistema dinâmico não linear (7.1) que admite uma função energia generalizada, o teorema 7.1.1, fornece informações sobre a localização dos conjuntos limites de trajetórias limitadas. Assim, de acordo com o teorema 7.1.1, se as soluções limitadas não se aproximam do conjunto M , onde o derivada de V ao longo da trajetórias do sistema (7.1) é igual a zero, então o ω – limite fatalmente interceptará pelo menos uma componente conexa C_j de C (ALBERTO, 2006; ALBERTO; CHIANG, 2012a). A figura 7.2 ilustra este resultado. É importante destacar que o conjunto ω – limite pode interceptar mais de uma componente conexa C_j de C (ALBERTO, 2006; ALBERTO; CHIANG, 2012a).

Figura 7.2: Ilustração do teorema 7.1.1:(A) Toda solução limitada ou tem uma intersecção não vazia com C_j ($\phi_1(t)$), ou se aproxima do conjunto M , na fronteira de C ($\phi_2(t)$). (B) O conjunto ω – limite de um sistema dinâmico não linear complexo pode interceptar mais de uma componente conexa C_j de C .

A principal diferença entre o conceito tradicional de função energia e função energia generalizada é que na função energia é imperativo que todos os seus conjuntos limites estejam contidos nos conjuntos onde a derivada da função energia ao longo das trajetórias do sistema seja igual a zero. O conceito de função energia generalizada relaxa essa suposição (ALBERTO; CHIANG, 2012a).

Uma consequência importante da existência de uma função energia generalizada é a caracterização da fronteira da região de estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares complexos.

Teorema 7.1.2 (Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade via Função Energia Generalizada). (ALBERTO; CHIANG, 2012a) *Se γ é um conjunto atrativo do sistema dinâmico não linear (7.1) que admite uma função energia generalizada, então a fronteira da região de estabilidade está contida na união das variedades estáveis de todos os conjuntos indecomponíveis invariantes Λ_i na fronteira da região de estabilidade:*

$$A(\gamma) \subseteq \bigcup_{\Lambda_i \subset \partial A(\Lambda_s)} W^s(\Lambda_i).$$

Além disso, uma estimativa da região de estabilidade pode ser obtida via conjunto de nível de uma função energia generalizada. O próximo teorema, apresentado em CHIANG; ALBERTO (2015), fornece as bases para obter uma estimativa da região de estabilidade de um conjunto atrativo γ na forma de um conjunto de nível de uma função energia generalizada.

Teorema 7.1.3 (Estimativa da Região de Estabilidade via Função Energia Generalizada). (CHIANG; ALBERTO, 2015) *Considere que o sistema (7.1) admita uma função energia generalizada V e o número de componentes conexas C_i de C tal que $A(\gamma) \cap C_i \neq \emptyset$ é finita. Sejam C_i , $i = 1, 2, \dots$ componentes conexas de C com intersecção não vazia com a fronteira da região de estabilidade $\partial A(\gamma)$. Seja $L \leq \min_{x \in \bigcup_i \partial C_i} V(x)$ e $S_c(L)$ a componente conexa do conjunto de nível $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$ contendo o conjunto atrativo γ . Então $S_c(L)$ é um subconjunto de $A(\gamma)$ ($S_c(L) \subset A(\gamma)$), e é uma estimativa da região de estabilidade.*

O teorema 7.1.3 mostra que uma estimativa da região de estabilidade pode ser obtida, ainda que uma função energia não exista, com uma função energia generalizada fornecida. A figura 7.3 ilustra o teorema 7.1.3.

Figura 7.3: Ilustração do teorema 7.1.3: A componente conexa $S_c(L)$ é uma estimativa da região de estabilidade via função energia generalizada.

A seguir apresenta-se um exemplo de aplicação de função energia generalizada.

Exemplo 7.1.1 - Considere o seguinte sistema dinâmico não linear:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -a x_1 - b x_2 \sin(x_1) + \epsilon \cos(x_1) \\ \dot{x}_2 &= -c x_2 + b \cos(x_1) - \epsilon \sin(x_1)\end{aligned}\quad (7.3)$$

onde, a , b , c são números reais positivos e ϵ é um número positivo, real e pequeno. Considere a seguinte função escalar como candidata a função energia generalizada para o sistema (7.3):

$$V(x) = \frac{1}{2}a x_1^2 + \frac{1}{2}c x_2^2 - b x_2 \cos(x_1) + \alpha, \quad (7.4)$$

onde, α é uma constante arbitrária.

Para demonstrar que a função escalar (7.4) é uma função energia generalizada do sistema (7.3), vamos primeiramente verificar a veracidade das hipóteses **(G1)** e **(G2)**.

Derivando a função (7.4) ao longo das trajetórias do sistema (7.3), temos:

$$\dot{V}(x) = -\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 + \epsilon \cos(x_1)\dot{x}_1 - \epsilon \sin(x_1)\dot{x}_2, \quad (7.5)$$

Os termos quadráticos de $\dot{V}(x)$ são iguais a zero apenas no conjunto de pontos de equilíbrio do sistema, e como $\epsilon \cos(x_1)$ e $\epsilon \sin(x_1)$ são limitados, para ϵ suficientemente pequeno, as regiões onde a derivada de $V(x)$ é positiva estão contidas em pequenos conjuntos conexos e limitados $C_{i's}$ próximos aos pontos de equilíbrio. Os pontos de equilíbrio do sistema (7.3) são isolados, logo os conjuntos $C_{i's}$ são isolados. Portanto as hipóteses **(G1)** e **(G2)** são satisfeitas.

A função $V(x)$ é uma função própria, logo a hipótese **(G3)** é satisfeita, e portanto, a função escalar (7.4) é uma função energia generalizada do sistema (7.3).

Agora, considere o sistema (7.3) com os seguintes parâmetros: $a = 0,5$, $b = 2$, $c = 0,5$ e $\epsilon = 0,25$. O sistema (7.3) possui onze pontos de equilíbrio, seis pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis $x^{s1}=(-5, 79; 3, 28)$, $x^{s2}=(-2, 98; -3, 87)$, $x^{s3}=(0, 029; 3, 98)$, $x^{s4}=(2, 93; -4, 01)$, $x^{s5}=(5, 93; 3, 92)$, $x^{s6}=(8, 64; -3, 19)$, e outros cinco pontos de equilíbrio instáveis $x^{u1}=(-5, 24; 1, 59)$, $x^{u2}=(-1, 80; -0, 43)$, $x^{u3}=(1, 54; -0, 38)$, $x^{u4}=(4, 89; 1, 22)$ e $x^{u5}=(8, 43; -2, 59)$.

A figura 7.4 ilustra as relações entre os pontos de equilíbrio e as regiões de derivada positiva (conjuntos $C_{i's}$). As regiões de derivada positiva (conjuntos $C_{i's}$) são limitadas, e estão próximas aos pontos de equilíbrio, como pode ser observado na figura 7.4.

Figura 7.4: Relações entre os pontos de equilíbrio e as regiões de derivada positivas.

Vamos estudar a região de estabilidade do ponto de equilíbrio estável x^{s3} . A constante $\alpha = 1,02$ foi escolhida para que a função $V(x)$ seja igual a zero no ponto de equilíbrio estável ($V(x^s) = 0$). De acordo com o teorema 7.1.2, a fronteira da região de estabilidade do ponto de equilíbrio estável x^{s3} é composta pela variedade estável dos conjuntos limites que estão na fronteira da região de estabilidade, que neste caso são os pontos de equilíbrio instáveis x^{u2} e x^{u3} . Além disto, de acordo com o teorema 7.1.3, $S_c(L)$ é uma estimativa da região de estabilidade, onde $L = 4,64$. A figura 7.5 apresenta a região de estabilidade, a fronteira da região de estabilidade e uma estimativa da região de estabilidade via função energia generalizada para o sistema (6.3).

Figura 7.5: Região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade do ponto de equilíbrio x^{s3} via função energia generalizada.

7.2 Funções Energia Generalizada de Controle

Nesta seção apresentaremos o conceito de função energia generalizada de controle (FEGC) proposto por SILVA et al. (2009).

Considere o sistema autônomo controlado:

$$\dot{x} = F(x, u), \quad (7.6)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é vetor de variáveis de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle e $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 . Suponha que a origem¹ seja um ponto de equilíbrio do sistema em malha aberta ($u = 0$), isto é, $F(0, 0) = 0$. Deseja-se obter uma lei de realimentação $u = h(x)$, tal que a origem do sistema em malha fechada (7.6) seja assintoticamente estável.

$$\dot{x} = F(x, h(x)). \quad (7.7)$$

Definição 7.2.1 (Função Energia Generalizada de Controle). *(SILVA et al., 2009) Uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , é uma função energia generalizada de Controle de (7.6), se existir uma lei de realimentação de controle $u = h(x)$, de classe C^1 , tal que $W(x) = V(x, h(x))$ seja uma Função Energia Generalizada do sistema em malha fechada (7.7).*

Como consequência da existência de uma função energia generalizada de controle o próximo teorema proposto por SILVA et al. (2009), garante a estabilidade assintótica de conjuntos atrativos e permite obter uma estimativa da região de estabilidade desses conjuntos.

Teorema 7.2.1 (Estabilidade e Estimativa da Região de Estabilidade do Sistema em Malha Fechada via Função Energia Generalizada de Controle). *(SILVA et al., 2009) Considere que o sistema (7.6) admita uma função energia generalizada de controle V . Seja $L \in \mathbb{R}$ um número real tal que a componente conexa $S_c(L)$ de $\{x \in \mathbb{R}^n : W(x) < L\}$ seja limitada. Suponha que $\sup_{x \in C \cap S_c(L)} W(x) := l < L$. Então $S_c(l) := \{x \in S_c(L) : W(x) \leq l\}$ contém um conjunto H invariante e assintoticamente estável e $S_c(L)$ é uma estimativa da região de estabilidade de H . Além disto, H tem intersecção não vazia com o conjunto $C \cap S_c(l)$.*

Mesmo com derivadas positivas, o teorema (7.2.1) mostra a existência de um conjunto assintoticamente estável, oferecendo alguma informação da sua localização e uma estimativa da região de estabilidade. Maiores detalhes a respeito do que foi exposto nesta seção podem ser encontrados em ALBERTO (2006); SILVA et al. (2009); SILVA; ALBERTO; BRETAS (2010).

¹Não há perda de generalidade em estudar a estabilidade da origem.

A seguir apresenta-se um exemplo de aplicação de função energia generalizada de controle.

Exemplo 7.1.1 - Considere o seguinte sistema dinâmico não linear controlado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -a x_1 - b x_2 \sin(x_1) - c + \epsilon \cos(x_1) \\ \dot{x}_2 &= d x_2 + b \cos(x_1) - e + u - \epsilon \sin(x_1)\end{aligned}\quad (7.8)$$

onde, a, b, c, d, e , são números reais positivos, ϵ é um número positivo, real e pequeno, e u é a entrada de controle. Considere o sistema (7.8) com os seguintes parâmetros $a = 1$, $b = 2$, $c = 0,1$, $d = 1$, $e = 2$ e $\epsilon = 0,1$. Para o sistema (7.8) em malha aberta ($u=0$), a origem é instável (ponto de sela). A figura apresenta o plano de fase do sistema em malha aberta ($u=0$).

Figura 7.6: Plano de fase do sistema (7.8) em malha aberta ($u = 0$).

O objetivo é escolher uma lei de realimentação $u = h(x)$ para que a origem em malha fechada seja assintoticamente estável. Para isto, considere a seguinte função escalar como candidata a função energia generalizada de controle para o sistema (7.8):

$$V(x) = \frac{1}{2}a x_1^2 + \frac{1}{2}d x_2^2 - b x_2 \cos(x_1) + c x_1 + e x_2 + \alpha, \quad (7.9)$$

onde α é uma constante arbitrária.

Derivando a função (7.9) ao longo das órbitas do sistema (7.8), temos:

$$\dot{V}(x) = -\dot{x}_1^2 - (\dot{x}_2 - 2d x_2 - u)\dot{x}_2 + \epsilon \cos(x_1)\dot{x}_1 - \epsilon \sin(x_1)\dot{x}_2, \quad (7.10)$$

Vamos escolher uma lei de realimentação de controle, tal que, $V(x)$ seja uma função energia generalizada de controle. Para isso, considere a seguinte lei de controle:

$$h(x) = -2b x_2. \quad (7.11)$$

A derivada da função (7.9) torna-se:

$$\dot{V}(x) = -\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 + \epsilon \cos(x_1)\dot{x}_1 - \epsilon \sin(x_1)\dot{x}_2, \quad (7.12)$$

Portanto, conclui-se que $h(x) = -2b x_2$ é uma lei de controle não linear estabilizante do sistema (7.8) e a função (7.9) é uma função energia generalizada de controle para o sistema em malha fechada.

A figura 7.5 apresenta a região de estabilidade, a fronteira da região de estabilidade e uma estimativa da região de estabilidade via função energia generalizada de controle para o sistema (7.8) em malha fechada.

Figura 7.7: Região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade via função energia generalizada de controle do sistema em malha fechada (7.8).

Apresentamos neste capítulo uma revisão dos conceitos de função energia generalizada. No próximo capítulo vamos desenvolver funções energia generalizadas para importantes classes de sistemas dinâmicos não lineares. Para um melhor entendimento e verificação das provas dos teoremas apresentados neste capítulo, sugere-se consultar ALBERTO (2006); SILVA et al. (2009); ALBERTO; CHIANG (2012b); CHIANG; ALBERTO (2015).

Capítulo 8

Funções Energia Generalizadas para Classes de Sistemas Dinâmicos

A construção de funções escalares é o problema central na análise e controle de sistemas dinâmicos não lineares via métodos diretos. A grande dificuldade no emprego de técnicas que utilizam métodos diretos tais como, funções de Lyapunov, funções energia e funções energia generalizadas, para análise e projeto de controladores de sistemas físicos é encontrar boas candidatas. Não existem métodos sistemáticos para a obtenção destas funções, e usualmente, a busca por tais funções é baseada em um processo de tentativa e erro, cujo sucesso depende significativamente da experiência do engenheiro projetista.

Neste capítulo, iremos demonstrar a existência de funções energia generalizadas para classes de sistemas dinâmicos não lineares decorrentes de sistemas elétricos de potência. Os resultados deste capítulo foram publicados em SIQUEIRA; ALBERTO; BRETAS (2015); SIQUEIRA et al. (2017); ALBERTO et al. (2017).

8.1 Existência de Funções Energia Generalizadas

Nesta subseção, vamos desenvolver funções energia generalizadas para três importantes classes de sistemas dinâmicos não lineares: uma classe de sistemas quase-gradiente, uma classe de sistemas de segunda ordem e uma classe de sistemas de terceira ordem.

8.1.1 Uma Classe de Sistemas Dinâmicos Quase-Gradiente

Considere a seguinte classe de sistemas dinâmicos não lineares:

$$T\dot{x} = -\frac{\partial}{\partial x}V(x) + \varepsilon g(x) \quad (8.1)$$

onde T é uma matriz positiva definida, ε é um número real pequeno, $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 e g é uma função de classe C^1 .

A função V , sob certas condições (por exemplo se a função V é uma função própria), é uma função energia para o sistema dinâmico não linear (8.1) não perturbado ($\varepsilon = 0$).

As proposições 8.1.1, 8.1.2, e 8.1.3 provam sob diferentes hipóteses sobre a função V e o campo vetorial, que a função escalar V é uma função energia generalizada do sistema perturbado (8.1) para ε suficientemente pequeno. Mais precisamente, as proposições 8.1.1, 8.1.2 e 8.1.3 afirmam que a função escalar V satisfaz as propriedades **(G2)** e **(G3)** de uma função energia generalizada para ε suficientemente pequeno.

A propriedade **(G1)** permanece válida para um grande número de sistemas dinâmicos. De fato, para classes de sistemas polinomiais, a propriedade **(G2)** implica na propriedade **(G1)** (RIBEIRO; ALBERTO, 2016). Isto vem do fato que todo conjunto algébrico pode ser unicamente decomposto na união de um número finito de conjuntos algébricos indecomponíveis (BOCHNAK J. COSTE M., 1998). Consequentemente, sob as condições das proposições 8.1.1, 8.1.2 e 8.1.3, a função V é uma função de energia generalizada para uma extensa classe de sistemas dinâmicos na forma do sistema (8.1).

Proposição 8.1.1 (Condições suficientes para as hipóteses **(G2)** e **(G3)**). *Considere o sistema dinâmico não linear (8.1) onde $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 e g é uma funções de classe C^1 . Se $g(x)$ é uma função limitada, $V(x)$ é função própria e existem números $\rho > 0$ e $R > 0$, tal que, $\|\frac{\partial}{\partial x}V(x)\| > \rho$ para todo $\|x\| > R$, então, a função $V(x)$ satisfaz as hipóteses **(G2)** e **(G3)** de uma função energia generalizada para ε suficientemente pequeno.*

Demonstração. A derivada de $V(x)$ é dada por:

$$\dot{V}(x) = -\dot{x}^T T \dot{x} + \varepsilon g(x)^T \dot{x}. \quad (8.2)$$

A matriz T é positiva definida. Se G é um limite para a função $g(x)$, temos:

$$-\dot{V} = \dot{x}^T T \dot{x} - \varepsilon g^T(x) \dot{x} \geq \sigma_{\min}(T) \|\dot{x}\|^2 - \varepsilon G \|\dot{x}\|. \quad (8.3)$$

Consequentemente, o conjunto C está contido no conjunto $B = \left\{ x : \|\dot{x}\| \leq \frac{\varepsilon G}{\sigma_{\min}(T)} \right\}$.

Vamos mostrar que o conjunto B é limitado. Para isto, mostraremos que $\|\dot{x}\| > \frac{\varepsilon G}{\sigma_{\min}(T)}$ no lado de fora da bola de R para ε suficientemente pequeno.

$$\begin{aligned} \|\dot{x}\| &= \left\| T^{-1} \left[-\frac{\partial V(x)}{\partial x} + \varepsilon g(x) \right] \right\| \geq \sigma_{\min}(T^{-1}) \left\| -\frac{\partial V(x)}{\partial x} + \varepsilon g(x) \right\| \geq \\ &\quad \sigma_{\min}(T^{-1}) \left| \left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\| - \varepsilon \|g(x)\| \right|, \end{aligned} \quad (8.4)$$

Para $\|x\| > R$, existe um $\|\frac{\partial V(x)}{\partial x}\| > \rho$. Se escolhermos ε , tal que, $\rho - \varepsilon G > 0$, isto é, $\varepsilon < \frac{\rho}{G}$, então:

$$\|\dot{x}\| \geq \sigma_{\min}(T^{-1})(\rho - \varepsilon G). \quad (8.5)$$

Agora, se escolhermos $\varepsilon < \frac{\rho k}{(1+k)G}$, onde $k = \sigma_{\min}(T^{-1})\sigma_{\min}(T)$, temos:

$$\|\dot{x}\| \geq \sigma_{\min}(T^{-1})(\rho - \varepsilon G) > \frac{\varepsilon G}{\sigma_{\min}(T)}, \quad \text{para } \|x\| > R. \quad (8.6)$$

Consequentemente, o conjunto $C \subset B$ é limitado e pertence a bola de raio R para ε suficientemente pequeno. Portanto, **(G2)** é satisfeita. Uma vez que, $V(x)$ é uma função própria, então **(G3)** é também satisfeita. Isto conclui a prova. $\square$

A condição que $\|\frac{\partial}{\partial x}V(x)\| > \rho$ para todo $\|x\| > R$ elimina a possibilidade de $\|\frac{\partial}{\partial x}V(x)\|$ aproximar de zero no infinito. Esta condição é importante para garantir que o conjunto C seja limitado. Se $\frac{\partial}{\partial x}V(x)$ é uma função própria, então para qualquer $\rho > 0$ existe $R > 0$, tal que, $\|\frac{\partial}{\partial x}V(x)\| > \rho$ para todo $\|x\| > R$. Consequentemente, a proposição 8.1.1 é válida se as condições sobre $\frac{\partial}{\partial x}V(x)$ são substituídas com a condição $\frac{\partial}{\partial x}V(x)$ sendo um função própria.

A próxima proposição é similar à anterior, mas agora, relaxamos a hipótese que $g(x)$ é uma função limitada impondo algum controle na norma de $\frac{\partial}{\partial x}V(x)$ longe dos pontos de equilíbrio do sistema não perturbado.

Proposição 8.1.2 (Condições suficientes para as hipóteses **(G2)** e **(G3)**). *Considere o sistema dinâmico não linear (8.1) onde $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 e g é uma função de classe C^1 . Suponha que o sistema não perturbado ($\varepsilon = 0$) tenha um número finito e isolado de pontos de equilíbrio x_i , $i = 1, 2, \dots, p$. Se $V(x)$ é uma função própria e existem números $\rho > 0$ e $K > 0$, tal que:*

- (i) $B_\rho(x_i) \cap B_\rho(x_j) = \emptyset$ para todo i, j com $i \neq j$ onde $B_\rho(x_i)$ é uma bola de raio $\rho > 0$ com o centro em x_i ,
- (ii) $\|\frac{\partial}{\partial x}V(x)\| > K\|g(x)\|$ para todo $\|x\| \notin B_\rho(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, p$,

então, a função $V(x)$ satisfaz as hipóteses **(G2)** e **(G3)** de uma função energia generalizada para ε suficientemente pequeno.

Demonstração. A derivada de $V(x)$ é dada por:

$$-\dot{V} = \left[\frac{\partial}{\partial x} V(x) \right]^T T^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial x} V(x) \right] - \varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial x} V(x) \right]^T T^{-1} g(x), \quad (8.7)$$

Usando o fato que $\left\| \frac{\partial}{\partial x} V(x) \right\| > K \|g(x)\|$ para todo $\|x\| \notin \bigcup_i B_\rho(x_i)$, temos:

$$-\dot{V} \geq \left(\sigma_{\min}(T^{-1}) - \frac{\varepsilon}{K} \|T^{-1}\| \right) \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\|^2 \geq 0, \quad (8.8)$$

para todo $\|x\| \notin \bigcup_i B_\rho(x_i)$.

Consequentemente, para ε suficientemente pequeno as regiões onde a derivada de V é positiva estão contidas em $\bigcup_i B_\rho(x_i)$. Isto prova **(G2)**. Uma vez que $V(x)$ é uma função própria, então **(G3)** também é satisfeita. Isto conclui a prova. $\square$

Em algumas aplicações, as hipóteses das proposições 8.1.1 e 8.1.2 não são verificadas, mas o campo vetorial é periódico. A próxima proposição, prova que $V(x)$ é uma função energia generalizada sob a condição alternativa que o campo vetorial não perturbado é periódico.

Proposição 8.1.3. *Considere o sistema dinâmico não linear (8.1) onde $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 e g é uma função de classe C^1 . Se o sistema não perturbado (8.1) ($\varepsilon = 0$) admite um número finito e isolado de pontos de equilíbrio em conjuntos compactos, $\frac{\partial}{\partial x} V(x)$ é periódico, $g(x)$ é uma função limitada e $V(x)$ é uma função própria, então, a função $V(x)$ satisfaz as hipóteses **(G2)** e **(G3)** de uma função energia generalizada para ε suficientemente pequeno.*

Demonstração. A prova inicia com os mesmos passos da prova da proposição 8.1.1. Se G é um limite para a função $g(x)$, então, provamos que o conjunto C está contido no conjunto $B = \left\{ x : \|\dot{x}\| \leq \frac{\varepsilon G}{\sigma_{\min}(T)} \right\}$. Agora, vamos mostrar, para ε suficientemente pequeno, que o conjunto B , consequentemente o conjunto C , está contida na união de um conjunto finito de bolas disjuntas em conjuntos compactos.

Seja T_p o período de $\frac{\partial}{\partial x} V(x)$ e considere o hipercubo $H = [0, T_p]^n = [0, T_p] \times \dots \times [0, T_p]$. Suponha inicialmente que $\frac{\partial}{\partial x} V(x) \neq 0$ para todo $x \in H$ e seja ρ o mínimo de $\left\| \frac{\partial}{\partial x} V(x) \right\|$ em H .

Se escolhermos $\varepsilon < \frac{\rho k}{(1+k)G}$, onde $k = \sigma_{\min}(T^{-1})\sigma_{\min}(T)$, então, seguindo os mesmos passos da prova da proposição 8.1.1, provamos que:

$$\|\dot{x}\| \geq \sigma_{\min}(T^{-1})(\rho - \varepsilon G) > \frac{\varepsilon G}{\sigma_{\min}(T)} \quad \text{para } x \in H. \quad (8.9)$$

Isto implica que o conjunto B está vazio e a derivada de $V(x)$ é sempre negativa. Suponha agora que $\frac{\partial}{\partial x}V(x)$ é nulo em um número finito de pontos x_i , $i = 1, \dots, p$ em H . Sem perda de generalidade, podemos assumir que os pontos x_i , $i = 1, \dots, p$ não pertencem a fronteira do conjunto H . Então, existe um raio $\beta > 0$, tal que, as bolas $D_i = B_\beta(x_i)$ de raio β centrada no ponto x_i são disjuntas e estão contidas em H . Fora destas bolas e dentro do conjunto H , o campo vetorial atinge um valor mínimo $\rho > 0$. Escolhendo ε , tal que, $\varepsilon < \frac{\rho k}{(1+k)G}$, garante que o conjunto C está contido na união das bolas $D_i = B_\beta(x_i)$, $i = 1, \dots, p$. A coleção finita dos conjuntos D_i é uma estimativa da localização das componentes do conjunto C . Portanto, cada componente C_i de C é limitada e a hipótese **(G2)** é satisfeita. Uma vez que $V(x)$ é uma função própria, então, as hipóteses **(G3)** é também satisfeita completando a prova. $\square$

8.1.2 Uma Classe de Sistemas Dinâmicos de Segunda Ordem

Nesta seção vamos desenvolver uma função energia generalizada para a seguinte classe de sistemas de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z, \\ M\dot{z} &= -Dz - \frac{\partial}{\partial y}U(y) + \varepsilon g(y) \end{aligned} \quad (8.10)$$

onde M e D são matrizes positivas definidas, ε é um número real pequeno, $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 e $g(y)$ é uma função de classe C^1 .

Considere a seguinte função:

$$V(y, z) = \frac{1}{2}z^T Mz + U(y) + \beta \left[\frac{\partial}{\partial y}U(y) \right]^T z. \quad (8.11)$$

Esta função foi inspirada nos resultados de BRETAS; ALBERTO (2000b); ALBERTO; SILVA; BRETAS (2002); BRETAS; ALBERTO (2003); SILVA; ALBERTO; BRETAS (2003); SILVA et al. (2005); ALBERTO; CHIANG (2012b).

A função (8.11), com $\beta = 0$, sob certas condições (por exemplo se $U(y)$ é uma função própria) é uma função energia para o sistema (8.10) não perturbado ($\varepsilon = 0$). As proposições 8.1.4, 8.1.5, 8.1.6 e 8.1.7 mostram que a função (8.11) é uma função energia generalizada para o sistema (8.10) para $\beta > 0$ e ε suficientemente pequenos. Mais precisamente, as proposições 8.1.4, 8.1.5 e 8.1.6 oferecem diferentes condições suficientes para satisfazer a propriedade **(G2)**, enquanto 8.1.7 oferece condições suficientes para satisfazer a propriedade **(G3)**.

Proposição 8.1.4 (Condições suficientes para a hipótese **(G2)**). *Considere o sistema dinâmico não linear (8.10) onde $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 e g é uma função de classe C^1 . Se $g(y)$ e $\frac{\partial^2}{\partial y^2}U(y)$ são funções limitadas e existem números $\rho > 0$ e $R > 0$, tal que, $\|\frac{\partial}{\partial y}U(y)\| > \rho$ para todo $\|y\| > R$, então, a função (8.11) satisfaz a hipótese **(G2)** de uma função energia generalizada para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos.*

Demonstração. A derivada de $V(y, z)$ é dada por:

$$\dot{V}(y, z) = - \begin{bmatrix} z \\ \frac{\partial}{\partial y}U(y) \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} z \\ \frac{\partial}{\partial y}U(y) \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} g(y) \\ \beta M^{-1}g(y) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} z \\ \frac{\partial}{\partial y}U(y) \end{bmatrix}, \quad (8.12)$$

onde,

$$Q = \begin{bmatrix} D - \beta \frac{\partial^2}{\partial y^2}U(y) & \frac{1}{2}\beta D M^{-1} \\ \frac{1}{2}\beta D M^{-1} & \beta M^{-1} \end{bmatrix}. \quad (8.13)$$

Vamos mostrar que a matriz Q é positiva definida para $\beta > 0$ suficientemente pequeno. Utilizando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994), podemos escrever que $Q > 0$ é equivalente a:

$$\beta M^{-1} > 0, \quad D - \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}U(y) + \frac{1}{4}D^2 M^{-1} \right) > 0. \quad (8.14)$$

Compactamente, podemos reescrever (8.14) da seguinte forma:

$$D - \beta \Delta > 0, \quad (8.15)$$

onde,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2}U(y) + \frac{1}{4}D^2 M^{-1} \quad (8.16)$$

A matriz M^{-1} é positiva definida. Com o auxílio da teoria de autovalores e de acordo com o teorema 6.9.8 apresentado em (STOER; BULIRSCH, 2002, pag. 447), para $\beta > 0$ suficientemente pequeno, os autovalores da matriz (8.15) podem ser estimados desta forma:

$$\lambda_i - \beta \frac{v_i^e \Delta_{ii} v_i^d}{v_i^e v_i^d}, \quad (8.17)$$

onde λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, são os autovalores da matriz D , v^e e v^d são os autovetores à esquerda e à direita da matriz D , respectivamente.

Uma vez que, λ_i s são positivos e as funções Δ_{ii} s são limitadas, então, a matriz (8.15) é positiva definida para $\beta > 0$ suficientemente pequeno. Consequentemente, Q é positiva definida se β é suficientemente pequeno.

Se G é um limite para a função $g(y)$, temos:

$$-\dot{V}(y, z) \geq \sigma_{\min}(Q) \left\| \left(z, \frac{\partial}{\partial y} U(y) \right) \right\|^2 - \varepsilon G \Omega \left\| \left(z, \frac{\partial}{\partial y} U(y) \right) \right\|. \quad (8.18)$$

onde $\Omega = \sqrt{1 + (\beta \sigma_{\max}(M^{-1}))^2}$.

Assim, o conjunto C está contido no conjunto $B = \left\{ (z, y) : \left\| \left(z, \frac{\partial}{\partial y} U(y) \right) \right\| \leq \frac{\varepsilon G \Omega}{\sigma_{\min}(Q)} \right\}$.

Vamos mostrar que o conjunto B é limitado. Para isto, vamos mostrar que $\left\| \left(z, \frac{\partial}{\partial y} U(y) \right) \right\| > \frac{\varepsilon G \Omega}{\sigma_{\min}(Q)}$ fora da bola de raio R para ε suficientemente pequeno.

Para $\|y\| > R$, existe $\left\| \frac{\partial}{\partial y} U(y) \right\| > \rho$. Então,

$$\left\| \left(z, \frac{\partial}{\partial y} U(y) \right) \right\| \geq \left\| \frac{\partial U(y)}{\partial y} \right\| > \rho \quad \text{for } \|x\| > R. \quad (8.19)$$

Agora, basta escolher $\varepsilon < \frac{\rho \sigma_{\min}(Q)}{G \Omega}$ para garantir $C \subset B$ é limitado e pertence a bola de raio R . Concluimos que as componentes em que a derivada de V é positiva estão contidas em um conjunto limitado. Consequentemente, **(G2)** é verdadeira. Isto completa a prova. $\square$

A proposição 8.1.5 oferece condições suficientes para que **(G2)** seja verdadeira relaxando a hipótese que $g(y)$ é uma função limitada.

Proposição 8.1.5 (Condições suficientes para a hipótese **(G2)**). *Considere o sistema dinâmico não linear (8.10) onde $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 e $g(y)$ é uma função de classe C^1 . Suponha que o sistema não perturbado ($\varepsilon = 0$) tenha um número finito e isolado de pontos de equilíbrio (y_i, z_i) , $i = 1, 2, \dots, p$. Se $\frac{\partial^2}{\partial y^2} U(y)$ é uma função limitada e existem números $\rho > 0$ e $K > 0$, tal que:*

(i) $B_\rho(y_i, z_i) \cap B_\rho(y_j, z_j) = \emptyset$ for all i, j com $i \neq j$ onde $B_\rho(y_i, z_i)$ é uma bola de raio $\rho > 0$ com o centro em (y_i, z_i) ,

(ii) $\left\| \left(\frac{\partial}{\partial y} U(y) \right) \right\| > K \|g(y)\|$ para todo $\|(z, y)\| \notin B_\rho(y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, p$,

então, a função (8.11) satisfaz a hipótese **(G2)** de uma função energia generalizada para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos.

Demonstração. A prova inicia com os mesmos passos da prova da proposição 8.1.4. Então, concluímos que Q em (8.12) é positiva definida se $\beta > 0$ é suficientemente pequeno.

Da equação (8.12), temos:

$$-\dot{V} \geq \sigma_{\min}(Q) \left\| \left(z, \frac{\partial}{\partial y} U(y) \right) \right\|^2 - \varepsilon \Omega \|g(y)\| \left\| \left(z, \frac{\partial}{\partial y} U(y) \right) \right\|. \quad (8.20)$$

onde $\Omega = \sqrt{1 + (\beta \sigma_{\max}(M^{-1}))^2}$.

Usando o fato que $\left\| \left(z, \frac{\partial}{\partial y} U(y) \right) \right\| > K \|g(x)\|$ para todo $\|(z, y)\| \notin \bigcup_i B_\rho(x_i)$, temos:

$$-\dot{V} \geq \left(\sigma_{\min}(Q) - \frac{\varepsilon}{K} \Omega \right) \left\| \left(z, \frac{\partial}{\partial y} U(y) \right) \right\|^2 \geq 0,$$

para todo $\|(z, y)\| \notin \bigcup_i B_\rho(x_i)$.

Consequentemente, para ε suficientemente pequeno, as regiões onde a derivada de V é positiva estão contidas em $\bigcup_i B_\rho(x_i)$. Isto prova **(G2)** e completa a prova. $\square$

A próxima proposição oferece condições alternativas suficientes que garantem que a hipótese **(G2)** é verdadeira sub a condição que o campo vetorial é periódico na variável y .

Proposição 8.1.6 (Condições suficientes para a hipótese **(G2)**). *Considere o sistema dinâmico não linear (8.10) onde $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 e $g(y)$ é uma função de classe C^1 . Suponha que o sistema não perturbado ($\varepsilon = 0$) tenha um número finito e isolado de pontos de equilíbrio em conjuntos compactos. Se $\frac{\partial}{\partial y} U(y)$ é uma função periódica, $g(y)$ e $\frac{\partial^2}{\partial y^2} U(y)$ são funções limitadas, então, a função (8.11) satisfaz a hipótese **(G2)** de uma função energia generalizada para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos.*

Demonstração. A prova inicia com os mesmos passos da prova da proposição 8.1.4. Então, concluímos que Q em (8.12) é positiva definida se β é suficientemente pequeno. Se $G > 0$ é um limite para função $g(y)$, então, provamos que o conjunto C está contido no conjunto $B = \left\{ (z, y) : \left\| \left(z, \frac{\partial}{\partial y} U(y) \right) \right\| \leq \frac{\varepsilon G \Omega}{\sigma_{\min}(Q)} \right\}$, com $\Omega = \sqrt{1 + (\beta \sigma_{\max}(M^{-1}))^2}$. Agora, vamos mostra que, para ε suficientemente pequeno, o conjunto B , consequentemente o conjunto C , está contido na união de um conjunto finito de bolas disjuntas em conjuntos compactos.

Seja T_p o período de $\frac{\partial U(y)}{\partial y}$ e considere o hipercubo $H = [0, T_p]^n = [0, T_p] \times \dots \times [0, T_p]$. Suponha inicialmente que $\frac{\partial U(y)}{\partial y} \neq 0$ para todo $y \in H$ e seja ρ o mínimo de $\|\frac{\partial U(y)}{\partial y}\|$ em H .

Se escolhermos $\varepsilon < \frac{\sigma_{\min}(Q)\rho}{G\Omega}$, então, seguindo os mesmos passos da proposição 8.1.4, provamos que:

$$\|(z, \frac{\partial}{\partial y}U(y))\| \geq \|(\frac{\partial}{\partial y}U(y))\| \geq \rho > \frac{\varepsilon G\Omega}{\sigma_{\min}(Q)} \quad \text{for } x \in H.$$

Isto implica que o conjunto B é vazio e a derivada de $V(y, z)$ é sempre negativa. Suponha agora que $\frac{\partial}{\partial y}U(x)$ é nula em um número finito de pontos $x_i, i = 1, \dots, P$ in H . Sem perda de generalidade, podemos assumir que os pontos $x_i, i = 1, \dots, p$ não pertencem a fronteira do conjunto H . Então, existe um raio $\gamma > 0$, tal que, as bolas $D_i = B_\gamma(x_i)$ de raio γ centrada nos pontos de equilíbrio x_i s são disjuntas e pertencem ao conjunto H . Fora destas bolas e dentro do conjunto H , $\|\frac{\partial}{\partial y}U(y)\|$ atinge um valor mínimo $\rho > 0$.

Escolhendo ε , tal que, $\varepsilon < \frac{\sigma_{\min}(Q)\rho}{G\Omega}$, garante que as componentes do conjunto C estão contidas nas bolas $D_i = B_\beta(x_i), i = 1, \dots, p$. A coleção finita dos conjuntos D_i é uma estimativa da localização das componentes dos conjuntos C . Portanto, cada componente C_i é limitada e a hipótese **(G2)** é verdadeira. Isto completa a prova. $\square$

A proposição **(G2)** implica em **(G1)** para uma extensa classe de sistemas dinâmicos (RIBEIRO; ALBERTO, 2016). A próxima proposição apresenta condições suficientes que garantem que a hipótese **(G3)** é verdadeira.

Proposição 8.1.7 (Condição suficiente para as hipótese **(G3)**). *Considere a classe de sistemas de segunda ordem (8.10) e a função escalar V como (8.11). Suponha que $U(y)$ seja uma função própria, $\frac{\partial}{\partial y}U(y)$ e $g(y)$ sejam limitada. Então, para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos, a função (8.11) satisfaz a hipótese **(G3)** de uma função energia generalizada.*

Demonstração. Como uma aplicação direta da fórmula da variação das constantes (BRAUER; NOHEL, 1989), prova-se que $z(t)$ é sempre limitada. Suponha, por contradição, que $\sup_{t \geq 0} \|V(y(t), z(t))\| < \infty$ e $\varphi(t, y_0, z_0) = (y(t), z(t))$ é ilimitada para $t \geq 0$. Como $z(t)$ é limitada, então $y(t)$ deve ser ilimitada para $t \geq 0$. Isto implica que $\sup_{t \geq 0} \|U(y(t))\| = \infty$. Usando os fatos que (i) $\|z(t)\|$ é limitada para $t \geq 0$, (ii) $\sup_{t \geq 0} \|U(y(t))\| = \infty$, concluímos que $\sup_{t \geq 0} \|V(y(t), z(t))\| = \infty$. Isto é uma contradição, e portanto $\sup_{t \geq 0} \|U(y(t))\| < \infty$ e $\varphi(t, y_0, z_0) = (y(t), z(t))$ é limitado para $t \geq 0$. Isto conclui a prova. $\square$

8.1.3 Uma Classe de Sistemas Dinâmicos de Terceira Ordem

Nas subseções anteriores, exibimos funções energia generalizadas para duas importantes classes de sistemas dinâmicos não lineares, uma classe de sistemas quase-gradiente e uma classe de sistemas de segunda ordem. Nesta subseção, vamos demonstrar a existência de uma função energia generalizada para a seguinte classe de sistemas dinâmicos não lineares de terceira ordem:

$$\begin{aligned} T\dot{x} &= -\frac{\partial}{\partial x}U(x, y) + \varepsilon g_1(x, y), \\ \dot{y} &= z, \\ M\dot{z} &= -Dz - \frac{\partial}{\partial y}U(x, y) + \varepsilon g_2(x, y), \end{aligned} \quad (8.21)$$

onde T , M e D são matrizes positivas definidas e ε é um número real pequeno. A função $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 , g_1 e g_2 são funções de classe C^1 .

Considere a seguinte função:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}z^T Mz + U(x, y) + \beta \left[\frac{\partial}{\partial y}U(x, y) \right]^T z. \quad (8.22)$$

A função (8.22) com $\beta = 0$ sob certas condições (por exemplo $U(x, y)$ é uma função própria) é uma função energia para o sistema (8.21) não perturbado ($\varepsilon = 0$). As próximas proposições demonstram que a função (8.22) é uma função energia generalizada para o sistema (8.21) com $\beta > 0$ e ε suficientemente pequenos.

Proposição 8.1.8 (Condições suficientes para a hipótese **(G2)**). *Considere o sistema dinâmico não linear (8.21) onde $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 , g_1 e g_2 são funções de classe C^1 . Se g_1 , g_2 , $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ são funções limitadas e existem números $\rho > 0$ e $R > 0$, tal que, $\|(\frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial x})\| > \rho$ para todo $\|(x, y)\| > R$, então, a função (8.22) satisfaz a hipótese **(G2)** de uma função energia generalizada para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos.*

Demonstração. Considerando a função (8.22), derivando-a ao longo das órbitas do sistema (8.21), verifica-se que:

$$\dot{V}(x, y, z) = - \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ \frac{\partial}{\partial y}U(x, y) \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ \frac{\partial}{\partial y}U(x, y) \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \\ \beta M^{-1}g_2(x, y) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ \frac{\partial}{\partial y}U(x, y) \end{bmatrix} \quad (8.23)$$

onde,

$$Q = \begin{bmatrix} T & -\frac{1}{2}\beta \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \right]^T & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \right] & D - \beta \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y) & \frac{1}{2}\beta D M^{-1} \\ 0 & \frac{1}{2}\beta D M^{-1} & \beta M^{-1} \end{bmatrix}. \quad (8.24)$$

Primeiramente, vamos mostrar que a matriz Q é positiva definida para $\beta > 0$ suficientemente pequeno. A matriz Q pode ser reescrita desta forma:

$$Q = \begin{bmatrix} T & S(\beta) \\ S(\beta)^T & R(\beta) \end{bmatrix}, \quad (8.25)$$

onde,

$$S(\beta) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\beta \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \right]^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (8.26)$$

$$R(\beta) = \begin{bmatrix} D - \beta \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y) & \frac{1}{2}\beta D M^{-1} \\ \frac{1}{2}\beta D M^{-1} & \beta M^{-1} \end{bmatrix}. \quad (8.27)$$

Utilizando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994), podemos escrever que:

$$Q = \begin{bmatrix} T & S(\beta) \\ S(\beta)^T & R(\beta) \end{bmatrix} > 0, \quad (8.28)$$

é equivalente a:

$$T > 0, \quad R(\beta) - S(\beta)^T T^{-1} S(\beta) > 0. \quad (8.29)$$

A matriz T é positiva definida. Consequentemente, temos que verificar a condição $R(\beta) - S(\beta)^T T^{-1} S(\beta) > 0$. Usando novamente o complemento de Schur, verifica-se que $R(\beta) - S(\beta)^T T^{-1} S(\beta) > 0$ é equivalente a:

$$D - \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y) + \frac{1}{4} D^2 M^{-1} \right) - \beta^2 \left(\frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \right] T^{-1} \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \right]^T \right) > 0. \quad (8.30)$$

Compactamente, podemos reescrever (8.30) da seguinte forma:

$$D - \beta(\beta\Lambda + \Delta) > 0, \quad (8.31)$$

onde,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y) + \frac{1}{4} D^2 M^{-1}, \quad (8.32)$$

$$\Lambda = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \right] T^{-1} \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \right]^T. \quad (8.33)$$

Utilizando o teorema 6.9.8 apresentado em (STOER; BULIRSCH, 2002, pag. 447), para $\beta > 0$ suficientemente pequeno, como primeira aproximação, os autovalores da matriz (8.31) podem ser estimados desta forma:

$$\lambda_i - \beta \frac{v_i^e (\beta \Lambda_{ii} + \Delta_{ii}) v_i^d}{v_i^e v_i^d}, \quad (8.34)$$

onde λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, os autovalores da matriz D , v^e e v^d são os autovetores da matriz à esquerda e à direita da matriz D , respectivamente.

A matriz (8.31) é positiva definida se todos os seus autovalores são positivos. Uma vez que λ_i s são positivos, para $\beta > 0$ suficientemente pequeno, a matriz (8.31) é positiva definida e, como consequência, Q é positiva definida.

Se G_1 e G_2 são limites para funções g_1 e g_2 , respectivamente, temos:

$$-\dot{V}(x, y, z) \geq \sigma_{\min}(Q) \left\| \left(\dot{x}, z, \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\|^2 - \varepsilon (G_1 + G_2 \Omega) \left\| \left(\dot{x}, z, \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\|, \quad (8.35)$$

onde $\Omega = \sqrt{1 + (\beta \sigma_{\max}(M^{-1}))^2}$.

O conjunto C está contido no conjunto $B = \left\{ (x, z, y) : \left\| \left(\dot{x}, z, \frac{\partial}{\partial y} U(y) \right) \right\| \leq \frac{\varepsilon (G_1 + G_2 \Omega)}{\sigma_{\min}(Q)} \right\}$.

Vamos mostrar que o conjunto B é limitado. Para isto, vamos mostrar que $\left\| \left(\dot{x}, z, \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\| > \frac{\varepsilon (G_1 + G_2 \Omega)}{\sigma_{\min}(Q)}$ fora da bola de raio R para ε suficientemente pequeno.

Para $\|(x, y)\| > R$, existe $\left\| \left(\frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right\| > \rho$. Se escolhermos ε , tal que $\rho - \varepsilon G_1 > 0$, isto é, $\varepsilon < \frac{\rho}{G_1}$, então:

$$\left\| \left(\dot{x}, z, \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\| \geq \xi(\rho - \varepsilon G_1), \quad (8.36)$$

onde $\xi = \min\{1, \sigma_{\min}(Q)\}$. Agora, se escolhermos $\varepsilon < \frac{\rho\xi\sigma_{\min}(Q)}{G_1(1 + \xi\sigma_{\min}(Q)) + G_2\Omega}$:

$$\|(\dot{x}, z, \frac{\partial U}{\partial y})\| \geq \xi(\rho - \varepsilon G_1) > \frac{\varepsilon(G_1 + G_2\Omega)}{\sigma_{\min}(Q)}, \quad \text{para } \|(x, y)\| > R. \quad (8.37)$$

Portanto, o conjunto $C \subset B$ é limitado e pertence a bola de raio R para ε suficientemente pequeno. Concluimos que as componentes de C estão contidas em um conjunto limitado. Isto prova **(G2)**. $\square$

A proposição 8.1.9 fornece condições suficientes para **(G2)** relaxando a hipótese que g_1 e g_2 são funções limitadas.

Proposição 8.1.9 (Condições suficientes para as hipóteses **(G2)**). *Considere o sistema dinâmico não linear (8.21) onde $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 , g_1 e g_2 são funções de classe C^1 . Suponha que o sistema não perturbado ($\varepsilon = 0$) tenha um número finito e isolado de pontos de equilíbrio (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, \dots, p$. Se $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ são funções limitadas e existem números $\rho > 0$ e $K > 0$, tal que:*

- (i) $B_\rho(x_i, y_i, z_i) \cap B_\rho(x_j, y_j, z_j) = \emptyset$ para todo i, j com $i \neq j$, onde $B_\rho(x_i, y_i, z_i)$ é uma bola de raio $\rho > 0$ com centro em (x_i, y_i, z_i) ,
- (ii) $\|(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y})\| > K(\|g_1(x)\| + \|g_2(x)\|)$ para todo $\|(x, z, y)\| \notin B_\rho(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, p$,

então, a função (8.22) satisfaz a hipótese **(G2)** de uma função energia generalizada para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos.

Demonstração. A derivada de $V(x, y, z)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y, z) = & - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U(x, y) \\ z \\ \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) \end{bmatrix}^T Q' \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U(x, y) \\ z \\ \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} T^{-1} g_1(x, y) \\ \beta \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) T^{-1} g_1(x, y) + g_2(x, y) \\ \beta M^{-1} g_2(x, y) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U(x, y) \\ z \\ \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.38)$$

onde,

$$Q' = \begin{bmatrix} T^{-1} & -\frac{1}{2}\beta \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) T^{-1} \right]^T & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) T^{-1} \right] & D - \beta \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y) & \frac{1}{2}\beta D M^{-1} \\ 0 & \frac{1}{2}\beta D M^{-1} & \beta M^{-1} \end{bmatrix}. \quad (8.39)$$

Seguindo os mesmos passos da prova da proposição 8.1.8 provamos para $\beta > 0$ suficientemente pequeno que a matriz Q' é positiva definida.

Agora, usando o fato que $\left\| \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\| > K (\|g_1(x)\| + \|g_2(x)\|)$ para todo $\|(x, z, y)\| \notin \bigcup_i B_\rho(x_i)$, temos:

$$-\dot{V} \geq \left(\sigma_{\min}(Q) - \eta \frac{\varepsilon}{K} \Omega \right) \left\| \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\|^2 \geq 0, \quad \text{para todo } \|(x, z, y)\| \notin \bigcup_i B_\rho(x_i), \quad (8.40)$$

onde $\Omega = \sqrt{1 + (\beta \sigma_{\max}(M^{-1}))^2}$, $\eta = \max\{\gamma, \Omega\}$ e $\gamma = \|T^{-1}\| \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right\|$.

Consequentemente, para ε suficientemente pequeno, as regiões onde a derivada de V é positiva estão contidas em $\bigcup_i B_\rho(x_i)$. Isto prova **(G2)** e completa a prova. $\square$

A próxima proposição oferece condições suficientes que garantem que a função (8.22) satisfaz a hipótese **(G2)** sub a condição que o campo vetorial é periódico nas variáveis y e x .

Proposição 8.1.10 (Condições suficientes para as hipóteses **(G2)**). *Considere o sistema dinâmico não linear (8.21) onde $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 , g_1 e g_2 são funções de classe C^1 . Suponha que o sistema não perturbado ($\varepsilon = 0$) tenha um número finito e isolado de pontos de equilíbrio em conjuntos compactos. Se $\frac{\partial U}{\partial x}$ e $\frac{\partial U}{\partial y}$ são funções periódicas, g_1 , g_2 , $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ são funções limitadas, então, a função (8.22) satisfaz a hipótese **(G2)** de uma função energia generalizada para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos.*

Demonstração. A prova inicia com os mesmos passos da proposição 8.1.8, então para $\beta > 0$ suficientemente pequeno Q em (8.23) é positiva definida. Se G_1 e G_2 são limites para as funções g_1 e g_2 , respectivamente, então, provamos que o conjunto C está contido no conjunto $B = \left\{ (x, z, y) : \left\| \left(\dot{x}, z, \frac{\partial}{\partial y} U(y) \right) \right\| \leq \frac{\varepsilon (G_1 + G_2 \Omega)}{\sigma_{\min}(Q)} \right\}$, com $\Omega = \sqrt{1 + (\beta \sigma_{\max}(M^{-1}))^2}$. Agora, vamos mostrar que, para ε suficientemente pequeno, que o conjunto B , e consequentemente o conjunto C , está contido na união de um conjunto finito de bolas disjuntas em conjuntos compactos.

Sejam T_{xp} e T_{yp} os períodos $\frac{\partial U}{\partial y}$ e $\frac{\partial U}{\partial x}$, respectivamente, e considere o conjunto $H = [0, T_{xp1}] \times \dots \times [0, T_{xpn}] \times [0, T_{yp1}] \dots \times [0, T_{ypn}]$. Suponha inicialmente que $\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$ e $\frac{\partial U}{\partial x} \neq 0$ para todo $(x, y) \in H$ e seja ρ o mínimo de $\left\| \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\|$ em H .

Se escolhermos $\varepsilon < \frac{\rho \xi \sigma_{\min}(Q)}{G_1(1 + \xi \sigma_{\min}(Q)) + G_2 \Omega}$, com $\xi = \min\{1, \sigma_{\min}(Q)\}$, então, seguindo os mesmos passos da da prova proposição 8.1.8, provamos que:

$$\|(\dot{x}, z, \frac{\partial U}{\partial y})\| \geq \xi(\rho - \varepsilon G_1) > \frac{\varepsilon(G_1 + G_2 \Omega)}{\sigma_{\min}(Q)}, \quad \text{para todo } \|(x, y)\| > R, \quad (8.41)$$

Isto implica que o conjunto B é vazio e a derivada de $V(x, y, z)$ é sempre negativa. Suponha agora que $\frac{\partial U}{\partial x}$ e $\frac{\partial U}{\partial y}$ são nulos em um número finito de pontos (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, \dots, p$ em H . Sem perda de generalidade, podemos assumir que os pontos (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, \dots, p$ não pertencem a fronteira de H . Então, existe um raio $\gamma > 0$, tal que as bolas $D_i = B_\gamma(x_i, y_i, z_i)$ de raio γ centrada nos pontos de equilíbrio (x_i, y_i, z_i) são disjuntas e pertencem ao conjunto H . Foras destas bolas e dentro do conjunto H , $\|(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y})\|$ atingem um valor mínimo $\rho > 0$. Escolhendo ε , tal que $\varepsilon < \frac{\rho \xi \sigma_{\min}(Q)}{G_1(1 + \xi \sigma_{\min}(Q)) + G_2 \Omega}$, garante que as componentes do conjunto C estão contidas nas bolas $D_i = B_\beta(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, p$. A coleção finita dos conjuntos D_i é uma estimativa da localização das componentes do conjunto C . Portanto, cada componente C_i é limitada e a hipótese **(G2)** é verdadeira. Isto completa a prova. $\square$

A próxima proposição apresenta condições suficientes para garantir a veracidade da hipótese **(G3)**.

Proposição 8.1.11 (Condições suficientes para a hipótese **(G3)**). *Considere o sistema dinâmico não linear (8.21) onde $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 , g_1 e g_2 são funções de classe C^1 . Suponha que $U(x, y)$ seja uma função própria, $\frac{\partial}{\partial y} U(x, y)$ e $g_2(x, y)$ sejam limitadas. Então, para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos, a função (8.22) satisfaz a hipótese **(G3)** de uma função energia generalizada.*

Demonstração. Como uma aplicação direta da fórmula da variação das constantes (BRAUER; NOHEL, 1989), prova-se que $z(t)$ é sempre limitada. Suponha, por contradição, que $\sup_{t \geq 0} \|V(x(t), y(t), z(t))\| < \infty$ e $\varphi(t, x_0, y_0, z_0) = (x(t), y(t), z(t))$ é ilimitada para $t \geq 0$. Como $z(t)$ é limitada, então $(x(t), y(t))$ deve ser ilimitada para $t \geq 0$. Isto implica que $\sup_{t \geq 0} \|U(x(t), y(t))\| = \infty$. Usando os fatos que (i) $\|z(t)\|$ é limitada para $t \geq 0$, (ii) $\sup_{t \geq 0} \|U(x(t), y(t))\| = \infty$, concluímos que $\sup_{t \geq 0} \|V(x(t), y(t), z(t))\| = \infty$. Isto é uma contradição, e portanto $\sup_{t \geq 0} \|U(x(t), y(t))\| < \infty$ e $\varphi(t, x_0, y_0, z_0) = (x(t), y(t), z(t))$ é limitado para $t \geq 0$. Isto conclui a prova. $\square$

Existência de Funções Energia Generalizadas de Controle

Anteriormente demonstramos a existência de uma função energia generalizada para uma classe de sistemas de terceira ordem. Vamos agora considerar o problema de controle

e demonstrar a existência de uma função energia generalizada de controle para uma classe de sistemas de terceira ordem controlado.

Considere o sistema dinâmico (8.21) com entradas de controle:

$$\begin{aligned} T\dot{x} &= -\frac{\partial}{\partial x}U(x, y) + u\frac{\partial}{\partial x}U(x, y) + \varepsilon g_1(x, y), \\ \dot{y} &= z, \\ M\dot{z} &= -Dz - \frac{\partial}{\partial y}U(x, y) + \varepsilon g_2(x, y), \end{aligned} \quad (8.42)$$

onde $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$, T , M e D são matrizes positivas definidas, ε é um número real pequeno. A função $U : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$, é de classe C^2 , $g_1(x, y)$ e $g_2(x, y)$ são funções de classe C^1 . A função $u\frac{\partial}{\partial x}U(x, y)$ é definida como se segue:

$$u\frac{\partial}{\partial x}U(x, y) = \begin{bmatrix} u_1 \frac{\partial}{\partial x_1}U(x, y) \\ u_2 \frac{\partial}{\partial x_2}U(x, y) \\ \vdots \\ u_m \frac{\partial}{\partial x_m}U(x, y) \end{bmatrix}, \quad (8.43)$$

$u_1, u_2, \dots, u_m$ são entradas de controle. Considere a seguinte função como candidata a função energia generalizada de controle,

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}z^T Mz + U(x, y) + \beta \left[\frac{\partial}{\partial y}U(x, y) \right]^T z, \quad (8.44)$$

Anteriormente foi demonstrado que para $u_1 = 0, u_2 = 0, \dots, u_m = 0$ a função (8.44) é uma função energia generalizada para o sistema (8.42). O objetivo é escolher leis de realimentação $u_1 = lc_1(x, y), u_2 = lc_2(x, y), \dots, u_m = lc_m(x, y)$ para que um ponto de equilíbrio x^s em malha fechada seja assintoticamente estável. Para isso, considere a seguinte lei de controle:

$$Lc = - \begin{bmatrix} lc_1 \\ lc_2 \\ \vdots \\ lc_m \end{bmatrix}, \quad \text{com } lc_i(x, y) = -k \sum_{j=1}^m p_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}U(x, y) \dot{x}_j, \quad (8.45)$$

onde, $k > 0$ é o ganho do controlador, $p_{ij} \geq 0$, com $p_{ij} = p_{ji}$, é um valor de ponderação. Podemos reescrever a lei de controle (8.45) desta forma:

$$Lc = -kP\partial U\dot{x} \quad (8.46)$$

onde,

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}, \quad \partial U = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} U(x, y) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} U(x, y) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m} U(x, y) \end{bmatrix}. \quad (8.47)$$

A seguir demonstraremos que a função (8.44) é uma função energia generalizada de controle para o sistema em malha fechada considerando a lei de controle (8.46).

Proposição 8.1.12. *Considere o sistema dinâmico não linear controlado (8.42) e a lei de controle não linear (8.46). Seja (8.44) uma função energia generalizada para o sistema (8.42) em malha aberta ($u=0$) para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos. Se P em (8.46) é uma matriz positiva semidefinida, então a função (8.44) é uma função energia generalizada de controle para o sistema (8.42) em malha fechada para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos.*

Demonstração. Derivando a função (8.44) ao longo das órbitas do sistema (8.42) e considerando $u = 0$, verifica-se que:

$$\dot{V}(x, y, z) = - \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \\ \beta M^{-1} g_2(x, y) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) \end{bmatrix} \quad (8.48)$$

onde,

$$Q = \begin{bmatrix} T & -\frac{1}{2}\beta \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \right]^T & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \right] & D - \beta \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y) & \frac{1}{2}\beta D M^{-1} \\ 0 & \frac{1}{2}\beta D M^{-1} & \beta M^{-1} \end{bmatrix}, \quad (8.49)$$

Para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos e sob as hipóteses das proposições 8.1.8 ou 8.1.9 ou 8.1.10 e 8.1.11, demonstramos que a função (8.44) é uma função energia generalizada em malha aberta ($u=0$). Considere agora o sistema em malha fechada com a lei de controle (8.46). A derivada da função da função (8.44) considerando a lei de controle (8.46) assume a mesma forma de (8.48), porém, a matriz Q torna-se:

$$Q' = \begin{bmatrix} \Gamma & -\frac{1}{2}\beta \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \right]^T & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \right] & D - \beta \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y) & \frac{1}{2}\beta D M^{-1} \\ 0 & \frac{1}{2}\beta D M^{-1} & \beta M^{-1} \end{bmatrix}, \quad (8.50)$$

$$\Gamma = T + k \partial U^T P \partial U. \quad (8.51)$$

Vamos provar que Q' é positiva definida para β suficientemente pequeno. Assim, utilizando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994), podemos concluir que $Q' > 0$ é equivalente a:

$$\Gamma > 0, \quad D - \beta(\beta\Lambda + \Delta) > 0. \quad (8.52)$$

onde,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y) + \frac{1}{4} D^2 M^{-1}, \quad \Lambda = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \right] \Gamma^{-1} \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \right]^T. \quad (8.53)$$

A matriz T é positiva definida. Como ∂U é uma matriz não singular e por hipótese P é positiva semidefinida, então, de acordo com o teorema 2.6b apresentado em (RENCER; SCHAALJE, 2008, pag. 26), $\partial U^T P \partial U$ é positiva semidefinida. Consequentemente, Γ é positiva definida. Seguindo os mesmos passos da prova da proposição 8.1.8, concluímos que $D - \beta(\beta\Lambda + \Delta) > 0$ é positiva definida para $\beta > 0$ suficientemente pequeno, e consequentemente Q' é positiva definida.

Portanto, (8.46) é uma lei de controle não linear e a função (8.44) é uma função energia generalizada de controle para o sistema (8.42) em malha fechada. $\square$

A próxima proposição garante que (8.46) é uma lei de controle não linear estabilizante e (8.44) é uma função energia generalizada de controle para o sistema (8.42) em malha fechada relaxando a hipótese que P em (8.46) é positiva semidefinida.

Proposição 8.1.13. *Considere o sistema dinâmico não linear controlado (8.42) e a lei de controle não linear (8.46). Considere todas as hipóteses das proposições 8.1.9 e 8.1.11. Se ∂U em (8.46) é limitada, então, para $k > 0$, $\beta > 0$ e ε suficientemente pequenos, a função (8.44) é uma função energia generalizada de controle para o sistema (8.42) em malha fechada.*

Demonstração. Derivando a função (8.44) ao longo das órbitas do sistema (8.42) e considerando a lei de controle (8.46), verifica-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y, z) = & - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U(x, y) \\ z \\ \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) \end{bmatrix}^T Q' \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U(x, y) \\ z \\ \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \Gamma^{-1} g_1(x, y) \\ \beta \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \Gamma^{-1} g_1(x, y) + g_2(x, y) \\ \beta M^{-1} g_2(x, y) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U(x, y) \\ z \\ \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.54)$$

onde,

$$Q' = \begin{bmatrix} \Gamma^{-1} & -\frac{1}{2}\beta \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \Gamma^{-1} \right]^T & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \Gamma^{-1} \right] & D - \beta \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y) & \frac{1}{2}\beta D M^{-1} \\ 0 & \frac{1}{2}\beta D M^{-1} & \beta M^{-1} \end{bmatrix}. \quad (8.55)$$

$$\Gamma = T + k \partial U^T P \partial U. \quad (8.56)$$

Primeiramente vamos provar que Q' é positiva definida para $k > 0$ e $\beta > 0$ suficientemente pequenos. Assim, utilizando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994), $Q' > 0$ implica que:

$$\Gamma^{-1} > 0, \quad D - \beta(\beta\Lambda + \Delta) > 0. \quad (8.57)$$

onde,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y) + \frac{1}{4} D^2 M^{-1}, \quad \Lambda = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \right] \Gamma^{-1} \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \right]^T. \quad (8.58)$$

A matriz T é positiva definida. A matriz ∂U é limitada, então, pelo o teorema 6.9.8 apresentado em (STOER; BULIRSCH, 2002, pag. 447), podemos concluir que para $k > 0$ suficientemente pequeno Γ é positiva definida, logo Γ^{-1} é positiva definida. Novamente, seguindo os mesmos passos da prova da proposição 8.1.8, concluímos que $D - \beta(\beta\Lambda + \Delta) > 0$ é positiva definida para $k > 0$ e $\beta > 0$ suficientemente pequenos, e consequentemente Q' é positiva definida.

Agora, usando o fato da proposição 8.1.9 que $\left\| \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\| > K (\|g_1(x)\| + \|g_2(x)\|)$ para todo $\|(x, z, y)\| \notin \bigcup_i B_\rho(x_i)$, temos:

$$-\dot{V} \geq \left(\sigma_{\min}(Q') - \eta \frac{\varepsilon}{K} \Omega \right) \left\| \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\|^2 \geq 0, \quad \text{para todo } \|(x, z, y)\| \notin \bigcup_i B_\rho(x_i), \quad (8.59)$$

onde $\Omega = \sqrt{1 + (\beta \sigma_{\max}(M^{-1}))^2}$, $\eta = \max\{\gamma, \Omega\}$ e $\gamma = \|\Gamma^{-1}\| \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right\|$.

Consequentemente, para ε suficientemente pequeno, as regiões onde a derivada de V é positiva estão contidas em $\bigcup_i B_\rho(x_i)$. Isto prova **(G2)**.

Um vez que U é uma função própria, $\frac{\partial}{\partial y} U(x, y)$ e $g_2(x, y)$ são limitadas, então usando os mesmos argumentos da proposição 8.1.11 provamos que **(G3)** é verdadeira e consequentemente, a função (8.44) em malha fechada é uma função energia generalizada. Portanto, (8.46) é uma lei de controle não linear e a função (8.44) é uma função energia generalizada de controle para o sistema (8.42) em malha fechada. $\square$

Considere agora a seguinte lei de controle:

$$Lc = - \begin{bmatrix} lc_1 \\ lc_2 \\ \vdots \\ lc_m \end{bmatrix}, \quad \text{com } lc_i(x, y) = -k \sum_{j=1}^m p_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} U(x, y) \sum_{s=1}^n r_s z_s. \quad (8.60)$$

onde, $k > 0$ é o ganho do controlador, $p_{ij} \geq 0$, com $p_{ij} = p_{ji}$, e $r_s \geq 0$ são valores de ponderações. Podemos reescrever a lei de controle desta forma:

$$Lc = -kP\partial URz \quad (8.61)$$

onde,

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}, \quad \partial U = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} U(x, y) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} U(x, y) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_m} U(x, y) \end{bmatrix},$$

$$R_{m \times n} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{bmatrix}. \quad (8.62)$$

Proposição 8.1.14. *Considere o sistema dinâmico não linear controlado (8.42) e a lei de controle não linear (8.61). Considere todas as hipóteses das proposições 8.1.9 e 8.1.11. Se ∂U em (8.61) é limitada, então, para $k > 0$, $\beta > 0$ e ε suficientemente pequenos, a função (8.44) é uma função energia generalizada de controle para o sistema (8.42) em malha fechada.*

Demonstração. Derivando a função (8.44) ao longo das órbitas do sistema (8.42) e considerando a lei de controle (8.61), verifica-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y, z) = & - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U(x, y) \\ z \\ \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) \end{bmatrix}^T Q' \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U(x, y) \\ z \\ \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} T^{-1} g_1(x, y) \\ \beta \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) T^{-1} g_1(x, y) + g_2(x, y) \\ \beta M^{-1} g_2(x, y) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U(x, y) \\ z \\ \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.63)$$

onde,

$$Q' = \begin{bmatrix} T^{-1} & -\frac{1}{2} \left[\beta \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) T^{-1} - k \Gamma^T \right]^T & 0 \\ -\frac{1}{2} \left[\beta \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) T^{-1} - k \Gamma^T \right] & D - \beta \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y) & \frac{1}{2} \beta D M^{-1} \\ 0 & \frac{1}{2} \beta D M^{-1} & \beta M^{-1} \end{bmatrix}. \quad (8.64)$$

$$\Gamma = \partial U^T P \partial U R. \quad (8.65)$$

Vamos provar que Q' é positiva definida para $k > 0$ e $\beta > 0$ suficientemente pequenos. Assim, utilizando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994), $Q' > 0$ implica que:

$$T^{-1} > 0, \quad D - (\Lambda(\beta, k) + \Delta(\beta)) > 0. \quad (8.66)$$

onde,

$$\Delta(\beta) = \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y) + \frac{1}{4} D^2 M^{-1} \right), \quad (8.67)$$

$$\Lambda(\beta, k) = \frac{1}{4} \left[\beta \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) T^{-1} - k \Gamma^T \right] T^{-1} \left[\beta \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) T^{-1} - k \Gamma^T \right]^T. \quad (8.68)$$

A matriz T é positiva definida. Consequentemente, temos que verificar a condição $D - (\Lambda(\beta) + \Delta(\beta, k)) > 0$. Os autovalores da matriz $D - (\Lambda(\beta) + \Delta(\beta, k)) > 0$, para $\beta > 0$ e $k > 0$ suficientemente pequenos, podem ser estimados desta forma (STOER; BULIRSCH, 2002, pag. 447):

$$\lambda_i - \frac{v_i^e (\Delta(\beta) + \Lambda(\beta, k)) v_i^d}{v_i^e v_i^d}, \quad (8.69)$$

onde λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, são os autovalores da matriz D , v^e e v^d são os autovetores à esquerda e à direita da matriz Φ , respectivamente.

A matriz D é positiva definida se todos os seus autovalores são positivos. Portanto, para $\beta > 0$ e $k > 0$ suficientemente pequenos, a matriz $D - (\Delta(\beta) + \Lambda(\beta, k))$ é positiva definida e, como consequência, Q' é positiva definida.

Agora, usando o fato da proposição 8.1.9 que $\left\| \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\| > K (\|g_1(x)\| + \|g_2(x)\|)$ para todo $\|(x, z, y)\| \notin \bigcup_i B_\rho(x_i)$, temos:

$$-\dot{V} \geq \left(\sigma_{\min}(Q') - \eta \frac{\varepsilon}{K} \Omega \right) \left\| \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\|^2 \geq 0, \quad \text{para todo } \|(x, z, y)\| \notin \bigcup_i B_\rho(x_i), \quad (8.70)$$

onde $\Omega = \sqrt{1 + (\beta \sigma_{\max}(M^{-1}))^2}$, $\eta = \max\{\gamma, \Omega\}$ e $\gamma = \|T^{-1}\| \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right\|$.

Consequentemente, para ε suficientemente pequeno, as regiões onde a derivada de V é positiva estão contidas em $\bigcup_i B_\rho(x_i)$. Isto prova **(G2)**.

Um vez que U é uma função própria, $\frac{\partial}{\partial y} U(x, y)$ e $g_2(x, y)$ são limitadas, então usando os mesmos argumentos da proposição 8.1.11 provamos que **(G3)** é verdadeira e consequentemente, a função (8.44) em malha fechada é uma função energia generalizada. Portanto, (8.61) é uma lei de controle não linear e a função (8.44) é uma função energia generalizada de controle para o sistema (8.42) em malha fechada.

□

8.2 Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade para classes de Sistemas Dinâmicos não Lineares

Nesta seção, vamos apresentar condições suficientes para a caracterização da fronteira da região de estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares que admitem funções energia generalizadas apresentadas na seção anterior.

8.2.1 Uma Classe de Sistemas Quase-Gradiente

A próxima proposição fornece uma caracterização da fronteira da região de estabilidade para a classe de sistemas quase-gradiente (8.1).

Proposição 8.2.1 (Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade do Sistema (8.1)). *Considere o sistema dinâmico não linear (8.1) onde $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 e g é uma função de classe C^1 . Seja γ um conjunto atrativo do sistema quase-gradiente (8.1). Se $g(x)$ é uma função limitada, $V(x)$ é função própria e existem números $\rho > 0$ e $R > 0$, tal que, $\|\frac{\partial}{\partial x}V(x)\| > \rho$ para todo $\|x\| > R$, então, para ε suficientemente pequeno, a fronteira da região de estabilidade $\partial A(\gamma)$ está contida na união das variedades estáveis de todos os conjuntos invariantes indecomponíveis Λ_i na fronteira da região de estabilidade:*

$$\partial A(\gamma) \subseteq \bigcup_{\Lambda_i \subset \partial A(\Lambda_s)} W^s(\Lambda_i). \quad (8.71)$$

Demonstração. A proposição 8.1.1 demonstra que, para ε suficientemente pequeno, a função $V(x)$ é uma função energia generalizada para a classe de sistemas quase-gradiente (8.1). Então a prova segue do teorema 7.1.2. $\square$

A próxima proposição fornece condições para caracterização da fronteira da região de estabilidade do sistema (8.1) para as hipóteses alternativas apresentadas na proposição 8.1.2.

Proposição 8.2.2 (Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade do Sistema (8.1)). *Considere o sistema dinâmico não linear (8.1) onde $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 e g é uma função de classe C^1 . Seja γ um conjunto atrativo do sistema quase-gradiente (8.1). Suponha que o sistema não perturbado ($\varepsilon = 0$) tenha um número finito e isolado de pontos de equilíbrio x_i , $i = 1, 2, \dots, p$. Se $V(x)$ é uma função própria e existem números $\rho > 0$ e $K > 0$, tal que: (i) $B_\rho(x_i) \cap B_\rho(x_j) = \emptyset$ para todo i, j com $i \neq j$ onde $B_\rho(x_i)$ é uma bola de raio $\rho > 0$ com o centro em x_i , (ii) $\|\frac{\partial V(x)}{\partial x}\| > K\|g(x)\|$ para todo $\|x\| \notin B_\rho(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, p$, então, para ε suficientemente pequeno, a fronteira da região de estabilidade $\partial A(\gamma)$ está contida na união das variedades estáveis de todos os conjuntos invariantes indecomponíveis Λ_i na fronteira da região de estabilidade:*

$$\partial A(\gamma) \subseteq \bigcup_{\Lambda_i \subset \partial A(\Lambda_s)} W^s(\Lambda_i). \quad (8.72)$$

Demonstração. A proposição 8.1.2 demonstra que, para ε suficientemente pequeno, a função $V(x)$ é uma função energia generalizada para a classe de sistemas quase-gradiente (8.1). Então a prova segue do teorema 7.1.2. $\square$

A próxima proposição fornece condições para caracterização da fronteira da região de estabilidade do sistema (8.1) para as condições que o campo vetorial não perturbado é periódico.

Proposição 8.2.3 (Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade do Sistema (8.1)). *Considere o sistema dinâmico não linear (8.1) onde $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 e g é uma função de classe C^1 . Seja γ um conjunto atrativo do sistema quase-gradiente (8.1). Se o sistema não perturbado (8.1) ($\varepsilon = 0$) admite um número finito e isolado de pontos de equilíbrio em conjuntos compactos, $\frac{\partial}{\partial x}V(x)$ é periódico, $g(x)$ é uma função limitada e $V(x)$ é uma função própria, então, para ε suficientemente pequeno, a fronteira da região de estabilidade $\partial A(\gamma)$ está contida na união das variedades estáveis de todos os conjuntos invariantes indecomponíveis Λ_i na fronteira da região de estabilidade:*

$$\partial A(\gamma) \subseteq \bigcup_{\Lambda_i \subset \partial A(\Lambda_s)} W^s(\Lambda_i). \quad (8.73)$$

Demonstração. A proposição 8.1.3 demonstra que, para ε suficientemente pequeno, a função $V(x)$ é uma função energia generalizada para a classe de sistemas quase-gradiente (8.1). Então a prova segue do teorema 7.1.2. $\square$

8.2.2 Uma Classe de Sistemas de Segunda Ordem

Demonstramos, sob condições razoáveis, que a função (8.11) é uma função energia generalizada para o sistema (8.10) se ε e $\beta > 0$ são suficientemente pequenos. A próxima proposição fornece uma caracterização da fronteira da região de estabilidade para a classe de sistemas de segunda ordem (8.10).

Proposição 8.2.4 (Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade do Sistema (8.10)). *Considere o sistema dinâmico não linear (8.10) onde $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 e g é uma função de classe C^1 . Seja γ um conjunto atrativo do sistema de segunda ordem (8.10). Considere V como a função (8.11). Se $U(y)$ é uma função própria, $g(y)$, $\frac{\partial}{\partial y}U(y)$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}U(y)$ são funções limitadas e existem números $\rho > 0$ e $R > 0$, tal que, $\|\frac{\partial}{\partial y}U(y)\| > \rho$ para todo $\|y\| > R$, então, para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos, a fronteira da região de estabilidade $\partial A(\gamma)$ está contida na união das variedades estáveis de todos os conjuntos invariantes indecomponíveis Λ_i na fronteira da região de estabilidade:*

$$\partial A(\gamma) \subseteq \bigcup_{\Lambda_i \subset \partial A(\Lambda_s)} W^s(\Lambda_i). \quad (8.74)$$

Demonstração. As proposições 8.1.4 e 8.1.7 demonstram que, para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos, a função (8.11) é uma função energia generalizada para a classe de sistemas de segunda ordem (8.10). Então a prova segue do teorema 7.1.2. $\square$

A próxima proposição fornece condições para caracterização da fronteira da região de estabilidade do sistema (8.1) para as hipóteses alternativas apresentadas na proposição 8.1.5.

Proposição 8.2.5 (Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade do Sistema (8.10)). *Considere o sistema dinâmico não linear (8.10) onde $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 e g é uma função de classe C^1 . Seja γ um conjunto atrativo do sistema de segunda ordem (8.10). Considere V como a função (8.11). Suponha que o sistema não perturbado ($\varepsilon = 0$) tenha um número finito e isolado de pontos de equilíbrio (y_i, z_i) , $i = 1, 2, \dots, p$. Se $U(y)$ é uma função própria, $g(y)$, $\frac{\partial}{\partial y}U(y)$ e $\frac{\partial^2}{\partial y^2}U(y)$ são funções limitadas e existem números $\rho > 0$ e $K > 0$, tal que: (i) $B_\rho(y_i, z_i) \cap B_\rho(y_j, z_j) = \emptyset$ for all i, j com $i \neq j$ onde $B_\rho(y_i, z_i)$ é uma bola de raio $\rho > 0$ com o centro em (y_i, z_i) ; (ii) $\|(z, \frac{\partial}{\partial y}U(y))\| > K\|g(y)\|$ para todo $\|(z, y)\| \notin B_\rho(y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, p$, então, para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos, a fronteira da região de estabilidade $\partial A(\gamma)$ está contida na união das variedades estáveis de todos os conjuntos invariantes indecomponíveis Λ_i na fronteira da região de estabilidade:*

$$\partial A(\gamma) \subseteq \bigcup_{\Lambda_i \subset \partial A(\Lambda_s)} W^s(\Lambda_i). \quad (8.75)$$

Demonstração. As proposições 8.1.5 e 8.1.7 demonstram que, para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos, a função (8.11) é uma função energia generalizada para a classe de sistemas de segunda ordem (8.10). Então a prova segue do teorema 7.1.2. $\square$

A próxima proposição fornece uma caracterização da fronteira da região de estabilidade para a classe de sistema (8.10) sob a hipótese que o campo vetorial é periódico na variável y .

Proposição 8.2.6 (Caracterização da Região de Estabilidade do sistema (8.10)). *Considere o sistema dinâmico não linear (8.10) onde $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 e g é uma função de classe C^1 . Seja γ um conjunto atrativo do sistema de segunda ordem (8.10). Considere V como a função (8.11). Se o sistema não perturbado ($\varepsilon = 0$) tem um número finito e isolado de pontos de equilíbrio em conjuntos compactos, $U(y)$ é uma função própria, $g(y)$ e $\frac{\partial^2}{\partial y^2}U(y)$ são funções limitadas e $\frac{\partial}{\partial y}U(y)$ é uma função periódica e limitada. Então, para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos, a fronteira da região de estabilidade $\partial A(\gamma)$ está contida na união das variedades estáveis de todos os conjuntos invariantes indecomponíveis Λ_i na fronteira da região de estabilidade:*

$$\partial A(\gamma) \subseteq \bigcup_{\Lambda_i \subset \partial A(\Lambda_s)} W^s(\Lambda_i). \quad (8.76)$$

Demonstração. As proposições 8.1.6 e 8.1.7 demonstram que, para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos, a função (8.11) é uma função energia generalizada para a classe de sistemas de segunda ordem (8.10). Então a prova segue do teorema 7.1.2. $\square$

8.2.3 Uma Classe de Sistemas de Terceira ordem

Vamos agora fornecer uma caracterização da fronteira da região de estabilidade para a classe de sistemas de terceira ordem (8.21).

Proposição 8.2.7 (Caracterização da Região de Estabilidade do sistema (8.21)). *Considere o sistema dinâmico não linear (8.21) onde $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 , g_1 e g_2 são funções de classe C^1 . Seja γ um conjunto atrativo do sistema dinâmico não linear (8.21). Considere V como a função (8.22). Se $U(x, y)$ é uma função própria, g_1 , g_2 , $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ são funções limitadas e existem números $\rho > 0$ e $R > 0$, tal que, $\|(\frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial y})\| > \rho$ para todo $\|(x, y)\| > R$, então, para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos, a fronteira da região de estabilidade $\partial A(\gamma)$ está contida na união das variedades estáveis de todos os conjuntos invariantes indecomponíveis Λ_i na fronteira da região de estabilidade:*

$$\partial A(\gamma) \subseteq \bigcup_{\Lambda_i \subset \partial A(\Lambda_s)} W^s(\Lambda_i). \quad (8.77)$$

Demonstração. As proposições 8.1.8 e 8.1.11 demonstram que, para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos, a função (8.22) é uma função energia generalizada para a classe de sistemas de terceira ordem (8.21). Então a prova segue do teorema 7.1.2. $\square$

A próxima proposição fornece condições para caracterização da fronteira da região de estabilidade do sistema (8.21) que satisfaz as hipóteses das proposições 8.1.9 e 8.1.11.

Proposição 8.2.8 (Caracterização da Região de Estabilidade do sistema (8.21)). *Considere o sistema dinâmico não linear (8.21) onde $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 , g_1 e g_2 são funções de classe C^1 . Seja γ um conjunto atrativo do sistema dinâmico não linear (8.21). Considere V como a função (8.22). Suponha que o sistema não perturbado ($\varepsilon = 0$) tenha um número finito e isolado de pontos de equilíbrio (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, \dots, p$. Se $U(x, y)$ é uma função própria, g_1 , $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ são funções limitadas e existem números $\rho > 0$ e $K > 0$, tal que: (i) $B_\rho(x_i, y_i, z_i) \cap B_\rho(x_j, y_j, z_j) = \emptyset$ para todo i, j com $i \neq j$, onde $B_\rho(x_i, y_i, z_i)$ é uma bola de raio $\rho > 0$ com centro em (x_i, y_i, z_i) ; (ii) $\|(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y})\| > K (\|g_1\| + \|g_2\|)$ para todo $\|(x, z, y)\| \notin B_\rho(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, p$. Então, para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos, a fronteira da região de estabilidade $\partial A(\gamma)$ está contida na união das variedades estáveis de todos os conjuntos invariantes indecomponíveis Λ_i na fronteira da região de estabilidade:*

$$\partial A(\gamma) \subseteq \bigcup_{\Lambda_i \subset \partial A(\Lambda_s)} W^s(\Lambda_i). \quad (8.78)$$

Demonstração. As proposições 8.1.9 e 8.1.11. demonstram que, para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos, a função (8.22) é uma função energia generalizada para a classe de sistemas de terceira ordem (8.21). Então a prova segue do teorema 7.1.2. $\square$

A próxima proposição fornece condições para caracterização da fronteira da região de estabilidade do sistema (8.21) para as condições que o campo vetorial não perturbado é periódico.

Proposição 8.2.9 (Caracterização da Região de Estabilidade do sistema (8.21)). *Considere o sistema dinâmico não linear (8.21) onde $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 , g_1 e g_2 são funções de classe C^1 . Seja γ um conjunto atrativo do sistema dinâmico não linear (8.21). Considere V como a função (8.22). Suponha que o sistema não perturbado ($\varepsilon = 0$) tenha um número finito e isolado de pontos de equilíbrio em conjuntos compactos. Se $U(x, y)$ é uma função própria, g_1 , $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ são funções limitadas, $\frac{\partial}{\partial x} U(x, y)$ é uma função periódica e $\frac{\partial}{\partial x} U(x, y)$ é uma função periódica e limitada, então, para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos, a fronteira da região de estabilidade $\partial A(\gamma)$ está contida na união das variedades estáveis de todos os conjuntos invariantes indecomponíveis Λ_i na fronteira da região de estabilidade:*

$$\partial A(\gamma) \subseteq \bigcup_{\Lambda_i \subset \partial A(\Lambda_s)} W^s(\Lambda_i). \quad (8.79)$$

Demonstração. As proposições 8.1.10 e 8.1.11. demonstram que, para ε e $\beta > 0$ suficientemente pequenos, a função (8.22) é uma função energia generalizada para a classe de sistemas de terceira ordem (8.21). Então a prova segue do teorema 7.1.2. $\square$

8.3 Exemplos Numéricos

Nesta seção apresentaremos exemplos numéricos para ilustrar os resultados analíticos desenvolvidos neste capítulo.

8.3.1 Exemplo de um Sistema Dinâmico Quase-Gradiente

Considere o seguinte sistema quase-gradiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a x_1 - b x_2 \sin(x_1) - \varepsilon \cos(x_1) \\ \dot{x}_2 &= -c x_2 + b \cos(x_1) - \varepsilon \sin(x_1) \end{aligned} \quad (8.80)$$

onde a, b, c são números reais e ε é um número suficientemente pequeno.

O sistema (8.80) com os seguintes parâmetros: $a = 0,5$, $b = 2$, $c = 0,5$ e $\varepsilon = 0,25$ tem os seguintes pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis $x^{s1} = (-5,67; 2,97)$, $x^{s2} = (-2,82; -3,64)$, $x^{s3} = (0,12; 3,91)$, $x^{s4} = (3,07; -4,02)$, $x^{s5} = (6,02; 3,99)$ e os seguintes pontos de equilíbrio instáveis $x^{u1} = (-5,26; 1,68)$, $x^{u2} = (-1,81; -0,48)$, $x^{u3} = (1,54; -0,38)$ e $x^{u4} = (4,89; 1,21)$. A figura 8.1 ilustra esses pontos.

O sistema assume a forma do sistema (8.1) escolhendo:

$$V(x) = \frac{1}{2}a x_1^2 + \frac{1}{2}c x_2^2 - b x_2 \cos(x_1) + \alpha, \quad (8.81)$$

onde α é uma constante arbitrária. Para os valores numéricos dos parâmetros apresentados anteriormente, a constante α foi escolhida igual a 3,94, tal que a função (8.81) torna-se zero no ponto de equilíbrio x^{s3} .

Assim, considerando (8.81) temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a x_1 + b x_2 \sin(x_1) \\ c x_2 - b \cos(x_1) \end{bmatrix}. \quad (8.82)$$

A função $g(x)$ assume a seguinte forma:

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(x_1) \\ -\sin(x_1) \end{pmatrix}. \quad (8.83)$$

Para o sistema (8.80) não perturbado ($\varepsilon = 0$), verifica-se que:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} V(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} V(x) = b \sin(x_1), \quad (8.84)$$

portanto, o sistema (8.80) não perturbado ($\varepsilon = 0$) é gradiente. Vamos mostrar que o sistema (8.80) satisfaz todas as hipóteses da proposição 8.1.1, e portanto, $V(x)$ em (8.81) será uma função energia generalizada do sistema quase-gradiente(8.80). Para este fim, vamos mostrar que $V(x)$ é uma função própria.

Suponha por contradição que a função $V(x)$ não seja própria. Então, existe um número $M > 0$ e uma sequência (x_{1_k}, x_{2_k}) com $\|(x_{1_k}, x_{2_k})\| \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, tal que $V(x_{1_k}, x_{2_k}) < M$ para todo k . Se $|x_{2_k}|$ é ilimitado, isto é, $x_{2_k} \rightarrow \infty$, então $\|V(x(t))\|$ é ilimitado e assim, chegamos a uma contradição. Consequentemente x_{2_k} é limitado e temos que ter $x_{1_k} \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Mas, novamente neste caso, $\|V(x(t))\|$ é também ilimitada e chegamos a uma contradição. Consequentemente, a hipóteses que $V(x)$ não é própria é falso.

A funções $g_1(x)$ e $g_2(x)$ são limitadas. Assim, verifica-se que as regiões de derivada positiva são limitadas e pertencem a seguinte bola de raio R :

$$(x_1 - x_{1i}^e)^2 + (x_2 - x_{2i}^e)^2 < R^2, \quad (8.85)$$

onde $R^2 = \varepsilon \frac{b + \varepsilon}{c}$ e (x_{1i}^e, x_{2i}^e) é um ponto de equilíbrio do sistema não perturbado ($\varepsilon = 0$). Logo, o sistema (8.80) satisfaz as hipóteses da proposição 8.1.2 e a função (8.81) é uma função energia generalizada.

A figura 8.1 ilustra as relações entre os pontos de equilíbrio e as regiões de derivada positiva, conjuntos $C_{i's}$.

Figura 8.1: Relações entre os pontos de equilíbrio do sistema (8.80) e as regiões de derivada positiva (conjuntos $C_{i's}$) da função energia generalizada (8.81).

A fronteira da região de estabilidade do ponto de equilíbrio x^{s3} é composta pela variedade estável dos conjuntos limites contidos nela, que neste caso são os pontos de equilíbrio instáveis x^{u2} e x^{u3} . Aplicando o teorema 7.1.3, $S_c(L)$ é uma estimativa da região de estabilidade, onde, $L = 4,64$. A figura 8.2 apresenta a região de estabilidade, a fronteira da região de estabilidade e uma estimativa para o ponto x^{s3} via função energia generalizada.

Figura 8.2: Região de estabilidade, fronteira da região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade do sistema (8.80).

A figura 8.5 ilustra o comportamento no domínio do tempo da função energia generalizada e da sua derivada para uma condição inicial $(x_1, x_2) = (-1; 0,5)$. A trajetória do

sistema não cruza o conjunto C_3 , onde a derivada de $V(x)$ é positiva. Consequentemente, nesta trajetória a função energia generalizada é decrescente ao longo do tempo.

Figura 8.3: Comportamento ao longo do tempo da função energia generalizada para a condição inicial $(x_1, x_2) = (-1; 0,5)$ para o sistema (8.80).

8.3.2 Exemplo de um Sistemas Dinâmico de Segunda Ordem

Considere o sistema dinâmico não linear (8.86):

$$\begin{aligned}\dot{y} &= z, \\ M\dot{z} &= -Dz + A - B\sin(y) + \varepsilon \cos(y),\end{aligned}\tag{8.86}$$

onde A, B, D, M são números reais positivos e ε é um número real pequeno. O sistema (8.86), com os seguintes parâmetros: $A = 0,97$, $B = 1,58$, $D = 0,02$, $M = 0,032$ e $\varepsilon = 0,025$ tem o seguinte ponto de equilíbrio assintoticamente estável, $(y^s, z^s) = (0,68; 0)$. Embora o sistema (8.86) possa exibir uma função energia no sentido usual, vamos mostrar que o mesmo sistema também admite uma função energia generalizada.

O sistema assume a forma de (8.10) se escolhermos:

$$U(y) = -Ay - B\cos(y) + \alpha,\tag{8.87}$$

onde α é uma constante arbitrária. Assim, considerando (8.87), temos:

$$\frac{\partial}{\partial y}U(y) = -A + B\sin(y),\tag{8.88}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}U(y) = B\cos(y),\tag{8.89}$$

$$g(y) = \varepsilon \cos(y).\tag{8.90}$$

De acordo com a seção 8.1.2, temos a seguinte candidata a função energia generalizada:

$$V(y, z) = \frac{1}{2}Mz^2 - Ay - B \cos(y) + \alpha + \beta(-A + B \sin(y))z. \quad (8.91)$$

Uma vez que, $\frac{\partial}{\partial y}U(y)$ é uma função periódica e limitada, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}U(y)$ e $g(y)$ são funções limitadas, então, o sistema satisfaz todas as hipóteses das proposições 8.1.6 e 8.1.7, e portanto, (8.91) é uma função energia generalizada para o sistema (8.86).

Para os valores numéricos dos parâmetros apresentados anteriormente a constante α foi escolhida igual a 1,89, tal que, a função U torna-se zero no ponto de equilíbrio estável, $y^s = 0,68$ e $z^s = 0$, e $\beta = 1,11 \cdot 10^{-3}$.

A fronteira da região de estabilidade é composta pela a variedade estável do ponto de equilíbrio instável $(y^u, z^u) = (2,50; 0)$, que é o único conjunto limite na fronteira da região de estabilidade de (y^s, z^s) . A figura 8.4 ilustra a fronteira da região de estabilidade. Aplicando o teorema, uma estimativa da região de estabilidade do ponto de equilíbrio estável é obtida e apresentada na figura 8.4, para $L = 0,70$.

Figura 8.4: Região de estabilidade, fronteira da região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade do sistema (8.86).

A figura 8.5 ilustra o comportamento no domínio do tempo da função energia generalizada e da sua derivada para uma condição inicial $(y_0, z_0) = (1,5; 4)$. A trajetória do sistema cruza com o conjunto C_1 , onde a derivada de $V(y, z)$ é positiva. Consequentemente, a função energia generalizada é não decrescente ao longo do tempo. Ela oscila entrando e saindo com conjunto C_1 .

Figura 8.5: Comportamento ao longo do tempo da função energia generalizada para a condição inicial $(y_0, z_0) = (1,5; 4)$ do sistema (8.86).

8.3.3 Exemplo de um Sistema Dinâmico de Terceira Ordem

Vamos agora apresentar um exemplo de sistemas de terceira ordem que satisfaz as hipóteses das proposições 8.1.9 e 8.1.11.

Considere o sistema dinâmico não linear (8.92):

$$\begin{aligned} T\dot{x} &= -Cx + A + B\cos(y) + \varepsilon\sin(y), \\ \dot{y} &= z, \\ M\dot{z} &= -Dz + Py - Bx\sin(y) + \varepsilon\sin(y) \end{aligned} \quad (8.92)$$

onde A, B, C, D, M, P, T são números reais positivos e ε é um número real pequeno. O sistema (8.92) com os seguintes parâmetros: $A = 2,29$, $B = 1,43$, $C = 2,86$, $D = 0,04$, $M = 0,032$, $P = 1$, $T = 7,14$ e $\varepsilon = 0,043$ tem um ponto de equilíbrio estável $(x^s, y^s, z^s) = (0; 0; 1,3)$ e outros dois pontos de equilíbrio instáveis $(x^{u1}, y^{u1}, z^{u1}) = (-1,24; 0; 0,94)$ e $(x^{u2}, y^{u2}, z^{u2}) = (1,27; 0; 0,97)$. Ele assume a forma do sistema (8.21) se escolhermos:

$$U(x, y) = \frac{1}{2}Cx^2 - \frac{1}{2}Py^2 - Ax - Bx\cos(y) + \alpha \quad (8.93)$$

onde α é uma constante arbitrária. Assim, considerando (8.93), temos:

$$\frac{\partial}{\partial y}U(x, y) = -Py + Bx\sin(y), \quad (8.94)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x, y) = Cx - A - B\cos(y), \quad (8.95)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} U(y) = -P + Bx \cos(y), \quad (8.96)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) = -Py + B \sin(y), \quad (8.97)$$

$$g_1(y) = g_2(y) = \varepsilon \cos(y). \quad (8.98)$$

De acordo com a seção 8.1.3, temos seguinte função como candidata a função energia generalizada:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} M z^2 + \frac{1}{2} C x^2 - \frac{1}{2} P y^2 - A x - B x \cos(y) + \alpha + \beta (-P y + B x \sin(y)) z, \quad (8.99)$$

onde (x, y, z) estão na região $\Omega = \{(x, y, z) \mid |x| < K, |y| < \infty, |z| < \infty\}$ e β é número positivo. A constante $\alpha = 2,42$ foi escolhida, tal que (8.99) seja igual a zero no ponto de equilíbrio estável, e $\beta = 0,0089$. Para a região Ω , $\frac{\partial}{\partial y} U(y)$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2} U(y)$, $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y)$, e $g_1(y)$ são limitadas. Além disso, verifica-se que fora da seguinte bola de raio R centrada nos pontos de equilíbrio do sistema (8.92) não perturbado ($\varepsilon = 0$), as condições (i) e (ii) da proposição 8.1.9 são satisfeitas.

$$(x - x_i^e)^2 + (y - y_i^e)^2 + (z - z_i^e)^2 > R^2, \quad (8.100)$$

onde $R^2 = \varepsilon \frac{C^2}{B}$. Portanto, todas as hipóteses das proposições 8.1.9 e 8.1.11 são satisfeitas e a função $V(x, y, z)$ em (8.99) é uma função energia generalizada para o sistema (8.92). Utilizando o teorema 7.1.3 exibido no capítulo 7, uma estimativa da região de estabilidade para o sistema (8.92) é obtida e apresentada nas figuras 8.6, 8.7 e 8.8, para $L = 0,3204$.

Figura 8.6: Estimativa da região de estabilidade do sistema (8.92).

As regiões de derivadas positivas estão próximas aos pontos de equilíbrio e a fronteira da região de estabilidade é composta pelas variedades estáveis de dois conjuntos invariantes indecomponíveis, que neste caso são os pontos de equilíbrio instáveis (x^{u1}, y^{u1}, z^{u1}) e (x^{u2}, y^{u2}, z^{u2}) , que são os conjuntos limites na fronteira da região de estabilidade de (x^s, y^s, z^s) . A figura 8.7 ilustra esta fronteira.

Figura 8.7: Fronteira da região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade do sistema (8.92).

Na figura 8.8, formada no plano que contém (x^{u1}, y^{u1}, z^{u1}) , (x^{u2}, y^{u2}, z^{u2}) e $(0, 92; -2, 8; 18)$, podemos observar que os conjuntos C_1 e C_2 têm intersecções não vazias com a fronteira da região de estabilidade.

Figura 8.8: Região de estabilidade, fronteira da região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade do sistema (8.92).

A figura 8.9 ilustra o comportamento no domínio do tempo da função energia generalizada para a condição inicial $(x_0, y_0, z_0) = (1; 0,9; 0,5)$.

Figura 8.9: Comportamento ao longo do tempo da função energia generalizada para a condição inicial $(x_0, y_0, z_0) = (1; 0,9; 0,5)$ para o sistema (8.92).

Neste capítulo, funções energia generalizadas foram derivadas para algumas classes de sistemas dinâmicos não lineares gerais que não admitem funções energia no sentido usual. A existência de funções energia generalizadas tem implicações importantes sobre o comportamento dinâmico e a caracterização da fronteira da região de estabilidade desses sistemas. Demonstramos que para as classes de sistemas dinâmicos que admitem uma função energia generalizada a fronteira da região de estabilidade é composta pela variedade estáveis dos conjuntos limites que estão na fronteira dessa região. Com o teorema apresentado por CHIANG; ALBERTO (2015), é possível obter estimativas da região de estabilidade dos sistemas apresentados neste capítulo. Além disso, demonstramos a existência de uma função energia generalizada de controle e como consequência apresentamos leis de controle não lineares gerais para uma classe de sistemas de terceira ordem. No próximo capítulo, vamos construir uma função energia generalizada para um sistema elétrico de potência utilizando os resultados deste capítulo.

Parte III

Análise e Controle de Sistemas Elétricos de Potência

Capítulo 9

Função Energia Generalizada para Sistemas Elétricos de Potência

Funções energia e funções de Lyapunov têm sido amplamente utilizadas para estudar a estabilidade de sistemas elétricos de potência. A existência de funções energia tem implicações importantes sobre os comportamentos dinâmicos desses sistemas. Não existem métodos sistemáticos para a obtenção destas funções. No passado, a existência de funções energia foi investigada para uma grande classe de modelos de sistemas elétricos de potência (ATHAY; PODMORE; VIRMANI, 1979; PAI; PADIYAR; RADHAKRISHNA, 1981; TSOLAS; ARAPOSTATHIS; VARAIYA, 1985). Entretanto, foi demonstrado que funções energia não existem para modelos de sistemas elétricos de potência com perdas (CHIANG, 1989). Sendo assim, funções energia numéricas (aproximada) têm sido usualmente empregadas para avaliação de estabilidade transitória (ATHAY; PODMORE; VIRMANI, 1979; CHIANG, 2011).

Recentemente, técnicas como SOS (*Sum of Squares Programming*) e LMI (*Linear Matrix Inequalities*) têm sido investigadas para construção automática de funções energia e funções de Lyapunov (CHESI et al., 2005). Tentativas para derivar funções de Lyapunov para os modelos de sistemas elétricos de potência empregando essas técnicas foram relatadas (ANGHEL; MILANO; PAPACHRISTODOULOU, 2013). No entanto, estes métodos são geralmente demorados, limitado a sistemas de baixa dimensão e não fornecem funções de Lyapunov gerais, isto é, se alguma alteração de parâmetro ocorrer, por exemplo, devido à alteração da topologia, o procedimento para a construção da função de Lyapunov tem que ser repetido, o que torna o procedimento lento e inadequado para aplicação de avaliação de estabilidade em tempo real.

Neste capítulo, uma função energia generalizada é derivada para modelos de sistemas elétricos de potência gerais. Em particular, uma função energia generalizada é construída para um modelo de sistema elétricos de potência com a estrutura da rede elétrica preservada considerando as perdas do sistema, com a inclusão de dispositivos FACTS, com modelos de cargas dinâmicos, com modelos de 3º ordem de geradores síncronos e com

conversores de potência distribuídos.

9.1 Construindo uma Função Energia Generalizada para Sistemas Elétricos de Potência Modelados com a Estrutura da Rede Preservada

Considere um sistema composto por n geradores síncronos, m cargas, N dispositivos TCSCs e k conversores de potência. A figura 9.1 mostra a representação desse sistema.

Figura 9.1: Representação de um sistema elétrico de potência.

Os geradores são modelados pelo seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} T_i' \dot{E}_i &= -C_i' E_i + E_{FDi} - B_{gi} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) + G_{gi} V_i \sin(\delta_i - \theta_i), \\ \dot{\delta}_i &= \omega_i, \\ M_i \dot{\omega}_i &= -D_i \omega_i + P_{mi} - P_{ei}, \end{aligned} \quad (9.1)$$

$$\begin{aligned} B_{gi} &= -\frac{x_{di}'}{x_{di}'^2 + r_i^2}, \quad G_{gi} = \frac{r_i}{x_{di}'^2 + r_i^2}, \quad T_i' = \frac{\tau_{doi}'}{x_{di} - x_{di}'}, \quad E_{FDi} = \frac{E_{fdi}}{x_{di} - x_{di}'}, \\ C_i' &= \frac{x_{di} x_{di}' + r_i^2}{(x_{di} - x_{di}')(x_{di}'^2 + r_i^2)}, \end{aligned} \quad (9.2)$$

onde, o significado de cada variável pode ser encontrado no capítulo 2 na seção 2.3. As potências elétricas geradas ativa e reativa são dadas por:

$$P_{ei} = G_{gi} E_i^2 - G_{gi} E_i V_i \cos(\delta_i - \theta_i) - B_{gi} E_i V_i \sin(\delta_i - \theta_i), \quad (9.3)$$

$$Q_{ei} = B_{gi} V_i^2 - B_{gi} E_i V_i \cos(\delta_i - \theta_i) - G_{gi} E_i V_i \sin(\delta_i - \theta_i). \quad (9.4)$$

De acordo com o capítulo 4, seção 4.2, os dispositivos TCSCs são modelados como uma reatância capacitiva variável. A figura 9.2 mostra esse modelo.

Figura 9.2: Modelo TCSC na rede elétrica.

A susceptância do dispositivo TCSC pode ser determinada da seguinte forma:

$$b_{tcscij} = b_{tcscij}^0 (1 - u_{ij}), \quad (9.5)$$

onde,

$$x_{tcscij} = x_{tcscij}^0 + \Delta x_{tcscij}, \quad (9.6)$$

$$b_{tcscij}^0 = -\frac{1}{x_{tcscij}^0}, \quad u_{ij} = \frac{\Delta x_{tcscij}}{x_{tcscij}^0 + \Delta x_{tcscij}}. \quad (9.7)$$

Nas equações acima x_{tcscij}^0 é a reatância do TCSC em regime permanente e Δx_{tcscij} é a reatância de controle. Definindo as matrizes B^{cs} e B^{cs0} como sendo as matrizes que contêm as susceptâncias total e em regime permanente dos dispositivos TCSCs, respectivamente. Essas matrizes assumem as seguintes formas:

$$B_{ij}^{cs} = -b_{tcscij}, \quad B_{ii}^{cs} = \sum_{\substack{j \in \Omega_j \\ j \neq i}} b_{tcscij}, \quad B_{ij}^{cs0} = -b_{tcscij}^0, \quad B_{ii}^{cs0} = \sum_{\substack{j \in \Omega_j \\ j \neq i}} b_{tcscij}^0, \quad (9.8)$$

onde Ω_i é o conjunto de barras vizinhas da i -ésima barra.

As equações que determinam os fluxos de potência no dispositivo TCSC instalado entre duas barras $i - j$ são:

$$P_{ij}^{tcsc} = -B_{ij}^{cs} V_i V_j \sin(\theta_i - \theta_j), \quad (9.9)$$

$$Q_{ij}^{tcsc} = -B_{ij}^{cs} V_i^2 + B_{ij}^{cs} V_i V_j \cos(\theta_i - \theta_j). \quad (9.10)$$

As cargas são consideradas dinâmicas e são modeladas desta forma:

$$P_{Li} = P_{Li}^0 + D_{Li} \dot{\theta}_i, \quad (9.11)$$

$$Q_{Li} = Q_{Li}^0 V_i + B_{Li} V_i^2, \quad (9.12)$$

onde o significado de cada variável pode ser encontrado no capítulo 3.

A utilização de sistemas de geração com energia renováveis, tais como, solar, biomassa e eólica, tem atraído grande atenção e está em constante desenvolvimento. A integração de algumas dessas formas de geração de energia limpa com o sistema elétrico de potência é através de conversores de potência. Estes dispositivos atuam de forma eficaz nesta integração, devido a alta qualidade e a confiabilidade desses conversores.

Como consequência da inserção dessas novas tecnologias em sistemas elétricos de potência, diferentes modelos dinâmicos e problemas de estabilidade surgiram, exigindo novas investigações sobre a existência de funções energia para estas novas classes de modelos.

Sistemas de controle para os conversores de potência vêm sendo desenvolvidos. Os modelos convencionais são baseados no controle de potência ativa - frequência ($P - f$) e potência reativa-tensão ($Q - V$) (LEE; CHU; CHENG, 2013; LU; CHU, 2014). Entretanto, o desempenho do controle de potência reativa-tensão tem alta dependência em relação aos parâmetros da linha de transmissão (LEE; CHU; CHENG, 2013). Para contornar essas dificuldades, em LEE; CHU; CHENG (2013), foi proposto o controle de potência reativa-derivada da tensão ($Q - \dot{V}$). A figura a seguir apresenta o diagrama de controle desses conversores.

Figura 9.3: Diagrama de controle do conversor de potência distribuído (LEE; CHU; CHENG, 2013).

Neste trabalho vamos considerar a presença dessa nova tecnologia na construção de uma função energia generalizada. Vamos considerar o modelo apresentado em LEE; CHU; CHENG (2013). Neste modelo as dinâmicas rápidas são desprezadas e o modelo $P - f / Q - \dot{V}$ é descrito como se segue:

$$\begin{aligned} D_{pi}\dot{\theta}_i &= P_i^* - k_{pi}\theta_i - V_i \sum_{j \in \Omega_i} V_j (G_{ij} \cos(\theta_{ij}) + B_{ij} \sin(\theta_{ij})), \\ D_{qi}\dot{v}_i &= Q_i^* - k_{qi}V_i - V_i \sum_{j \in \Omega_i} V_j (G_{ij} \sin(\theta_{ij}) - B_{ij} \cos(\theta_{ij})), \end{aligned} \quad (9.13)$$

onde v_i é definido por $v_i = \ln(V_i)$, P_i^* e Q_i^* são as potências ativa e reativa injetadas pelo conversor de potência, respectivamente, D_{pi} , D_{qi} , K_{pi} e K_{qi} são os coeficientes do controlador.

O sistema é formado por $n + 2N + m + k$ barras. O balanço de potência nas barras terminais dos geradores pode ser assim modelado:

$$\begin{aligned} 0 &= P_{ei} - V_i \sum_{j \in \Omega_i} V_j (G_{ij} \cos(\theta_{ij}) + B_{ij} \sin(\theta_{ij})), \\ 0 &= Q_{ei} - V_i \sum_{j \in \Omega_i} V_j (G_{ij} \sin(\theta_{ij}) - B_{ij} \cos(\theta_{ij})), \end{aligned} \quad (9.14)$$

para $i = 1, \dots, n$.

O balanço de potência para as barras onde estão instalados os dispositivos TCSCs é:

$$\begin{aligned} 0 &= -V_i \sum_{j \in \Omega_j} V_j (G_{ij} \cos(\theta_{ij}) + B_{ij} \sin(\theta_{ij})) - \sum_{\substack{j \in \Omega_j \\ j \neq i}} P_{ij}^{tcsc}, \\ 0 &= -V_i \sum_{j \in \Omega_j} V_j (G_{ij} \sin(\theta_{ij}) - B_{ij} \cos(\theta_{ij})) - \sum_{\substack{j \in \Omega_j \\ j \neq i}} Q_{ij}^{tcsc}, \end{aligned} \quad (9.15)$$

para $i = n + 1, n + 2, \dots, n + 2N$.

O balanço de potência para as barras onde estão localizadas as cargas é:

$$\begin{aligned} 0 &= -P_{Li} - V_i \sum_{j \in \Omega_i} V_j (G_{ij} \cos(\theta_{ij}) + B_{ij} \sin(\theta_{ij})), \\ 0 &= -Q_{Li} - V_i \sum_{j \in \Omega_i} V_j (G_{ij} \sin(\theta_{ij}) - B_{ij} \cos(\theta_{ij})), \end{aligned} \quad (9.16)$$

$i = n + 2N + 1, n + 2N + 2, \dots, n + 2N + m$

Nas equações (9.14 - 9.16), V_i, V_j são as magnitudes das tensões das barras do ramo $i-j$, θ_i, θ_j são os ângulos das barras do ramo $i-j$, G_{ij}, B_{ij} são os termos real e imaginário respectivamente da matriz admitância do sistema e Ω_i é conjunto de barras vizinhas da i -ésima barra, inclusive a barra i .

Reescrevendo as equações do sistema, temos:

$$\begin{aligned} T_i' \dot{E}_i &= -C_i' E_i + E_{FDi} - B_{gi} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) + G_{gi} V_i \sin(\delta_i - \theta_i), \\ \dot{\delta}_i &= \omega_i, \\ M_i \dot{\omega}_i &= -D_i \omega_i + P_{mi} - G_{gi} E_i^2 + G_{gi} E_i V_i \cos(\delta_i - \theta_i) + B_{gi} E_i V_i \sin(\delta_i - \theta_i), \end{aligned} \quad (9.17)$$

$$\begin{aligned} 0 &= G_{gi} E_i^2 - G_{gi} E_i V_i \cos(\delta_i - \theta_i) - B_{gi} E_i V_i \sin(\delta_i - \theta_i) - V_i \sum_{j \in \Omega_i} V_j (G_{ij} \cos(\theta_{ij}) + B_{ij} \sin(\theta_{ij})), \\ 0 &= B_{gi} V_i^2 - B_{gi} E_i V_i \cos(\delta_i - \theta_i) - G_{gi} E_i V_i \sin(\delta_i - \theta_i) - V_i \sum_{j \in \Omega_i} V_j (G_{ij} \sin(\theta_{ij}) - B_{ij} \cos(\theta_{ij})), \end{aligned} \quad (9.18)$$

para $i = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} 0 &= -V_i \sum_{j \in \Omega_j} V_j \left(G_{ij} \cos(\theta_{ij}) + B_{ij} \sin(\theta_{ij}) \right) - V_i \sum_{j \in \Omega_j} -V_j B_{ij}^{cs} \sin(\theta_{ij}), \\ 0 &= -V_i \sum_{j \in \Omega_j} V_j \left(G_{ij} \sin(\theta_{ij}) - B_{ij} \cos(\theta_{ij}) \right) - V_i \sum_{j \in \Omega_j} V_j B_{ij}^{cs} \cos(\theta_{ij}), \end{aligned} \quad (9.19)$$

para $i = n + 1, n + 2, \dots, n + 2N$.

$$\begin{aligned} 0 &= -P_{Li}^0 - D_{Li} \dot{\theta}_i - V_i \sum_{j \in \Omega_i} V_j \left(G_{ij} \cos(\theta_{ij}) + B_{ij} \sin(\theta_{ij}) \right), \\ 0 &= -Q_{Li}^0 V_i - B_{Li} V_i^2 - V_i \sum_{j \in \Omega_i} V_j \left(G_{ij} \sin(\theta_{ij}) - B_{ij} \cos(\theta_{ij}) \right), \end{aligned} \quad (9.20)$$

para $i = n + 2N + 1, n + 2N + 2, \dots, n + 2N + m$.

$$\begin{aligned} D_{pi} \dot{\theta}_i &= P_i^* - k_{pi} \theta_i - V_i \sum_{j \in \Omega_i} V_j \left(G_{ij} \cos(\theta_{ij}) + B_{ij} \sin(\theta_{ij}) \right), \\ D_{qi} \dot{v}_i &= Q_i^* - k_{qi} V_i - V_i \sum_{j \in \Omega_i} V_j \left(G_{ij} \sin(\theta_{ij}) - B_{ij} \cos(\theta_{ij}) \right), \end{aligned} \quad (9.21)$$

para $i = n + 2N + m + 1, n + 2N + m + 2, \dots, n + 2N + m + k$.

As equações (9.17 - 9.21) modelam o comportamento dinâmico do sistema elétrico de potência apresentado na figura 9.1. Este conjunto de equações algébrico-diferenciais pode ser reescrito de forma compacta escolhendo uma função $U : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , onde p é a dimensão do sistema, como se segue:

$$\begin{aligned} U_{nc} &= -\sum_{i=1}^n \left(P_{mi} \delta_i + E_{FDi} E_i + \frac{1}{2} B_{gi} V_i^2 - E_i V_i B_{gi} \cos(\delta_i - \theta_i) \right) + \sum_{i=a+1}^b \left(P_{Li}^0 \theta_i + Q_{Li}^0 V_i + \frac{1}{2} B_{Li} V_i^2 \right) \\ &\quad - \sum_{i=b+1}^d \left(P_i^* \theta_i + Q_i^* \ln(V_i) - k_{qi} V_i - \frac{1}{2} k_{pi} \theta_i^2 \right) - \sum_{i=1}^d \frac{1}{2} B_{ii} V_i^2 - \sum_{i=1}^{d-1} V_i \sum_{j=i+1}^d V_j B_{ij} \cos(\theta_{ij}) + \alpha, \end{aligned} \quad (9.22)$$

$$U_c = - \sum_{i=n+1}^a \frac{1}{2} B_{ii}^{cs0} V_i^2 + \sum_{i=1}^{a-1} V_i \sum_{j=i+1}^a V_j B_{ij}^{cs0} \cos(\theta_{ij}), \quad (9.23)$$

$$U = U_{nc} + U_c \quad (9.24)$$

onde α é uma constante, $a = n + 2N$, $b = n + 2N + m$ e $d = n + 2N + m + k$.

Então, podemos reescrever o conjunto de equações algébrico-diferenciais (9.17 - 9.21), considerando as entradas de controle dos dispositivos TCSCs iguais a zero ($u_{ij} = 0$), na seguinte forma compacta:

$$\begin{aligned} T\dot{x} &= -\frac{\partial}{\partial x}U(x, y) + \varepsilon g_1(x, y), \\ \dot{y} &= z, \\ M\dot{z} &= -Dz - \frac{\partial}{\partial y}U(x, y) + \varepsilon g_2(x, y), \end{aligned} \tag{9.25}$$

onde $x = \begin{bmatrix} \theta \\ V \\ E \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} \delta \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} \omega \end{bmatrix}$,

$$\varepsilon g_1(x, y) = \begin{bmatrix} -E_1 V_1 G_{g1} \text{sen}(\delta_1 - \theta_1) - V_1 \sum_{j \in \Omega_1} V_j G_{1j} \text{sen}(\theta_{1j}) \\ \vdots \\ -E_n V_n G_{gn} \text{sen}(\delta_n - \theta_n) - V_n \sum_{j \in \Omega_n} V_j G_{nj} \text{sen}(\theta_{nj}) \\ -V_{n+1} \sum_{j \in \Omega_{n+1}} V_j G_{n+1j} \text{sen}(\theta_{n+1j}) \\ \vdots \\ -V_d \sum_{j \in \Omega_b} V_j G_{dj} \text{sen}(\theta_{dj}) \\ G_{g1} E_1^2 - G_{g1} E_1 V_1 \cos(\delta_1 - \theta_1) - V_1 \sum_{j \in \Omega_1} V_j G_{1j} \cos(\theta_{1j}) \\ \vdots \\ G_{gn} E_n^2 - G_{gn} E_n V_n \cos(\delta_n - \theta_n) - V_n \sum_{j \in \Omega_n} V_j G_{nj} \cos(\theta_{nj}) \\ -V_{n+1} \sum_{j \in \Omega_{n+1}} V_j G_{n+1j} \cos(\theta_{n+1j}) \\ \vdots \\ -V_d \sum_{j \in \Omega_b} V_j G_{dj} \cos(\theta_{dj}) \\ G_{g1} V_1 \text{sen}(\delta_1 - \theta_1) \\ \vdots \\ G_{gn} V_n \text{sen}(\delta_n - \theta_n) \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon g_2(x, y) = \begin{bmatrix} -G_{g1}E_1^2 + G_{g1}E_1V_1 \cos(\delta_1 - \theta_1) \\ \vdots \\ -G_{gn}E_n^2 + G_{gn}E_nV_n \cos(\delta_n - \theta_n) \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T' \end{bmatrix}, \quad (9.26)$$

O conjunto de equações algébrico-diferenciais (9.25), com entradas de controle iguais a zero ($u_{ij} = 0$), não está exatamente na forma do sistema (8.21), pois a matriz T é singular.

9.1.1 Um modelo de Sistemas Elétrico de Potência na forma de um Sistema Singularmente Perturbado

Vamos tratar o conjunto de equações algébrico-diferenciais apresentado anteriormente como um sistema singularmente perturbado. Então, vamos mostrar que, com esta regularização das dinâmicas do sistema dinâmico algébrico-diferencial por meio da teoria de sistemas singularmente perturbados, o sistema (9.25), com entradas de controle iguais a zero, assume a forma geral do sistema não linear (8.21). Considerando esta abordagem, temos o seguinte sistema singularmente perturbado associado ao sistema algébrico-diferencial (9.25):

$$\begin{aligned} T_\mu \dot{x} &= -\frac{\partial}{\partial x} U(x, y) + \varepsilon g_1(x, y), \\ \dot{y} &= z, \\ M \dot{z} &= -Dz - \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) + \varepsilon g_2(x, y), \end{aligned} \quad (9.27)$$

com

$$T_\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T' \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

onde μ_1, μ_2 , são matrizes diagonais com entradas positivas suficientemente pequenas.

Uma vez que, o sistema (9.27) tem a mesma forma do sistema (8.21) e assumindo que as tensões em sistemas elétricos de potência são sempre limitadas, então podemos provar,

para uma região de operação que todas as condições das proposições 8.1.9 e 8.1.11 são satisfeitas para o modelo (9.27). Além disso, normalmente a propriedade **(G2)** implica na propriedade **(G1)**, por exemplo isto é verdadeiro para sistemas polinomiais (RIBEIRO; ALBERTO, 2016). Então de acordo com os teoremas 8.1.9 e 8.1.11 podemos desenvolver uma função energia generalizada para o sistema (9.17) - (9.21), com entradas de controle iguais a zero ($u_{ij} = 0$), como se segue:

$$\begin{aligned}
 W = & \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M_i \omega_i^2 - \sum_{i=1}^n \left(P_{mi} \delta_i + E_{FDi} E_i + \frac{1}{2} B_{gi} V_i^2 - E_i V_i B_{gi} \cos(\delta_i - \theta_i) \right) + \sum_{i=n+1}^a \frac{1}{2} B_{ii}^{cs0} V_i^2 \\
 & + \sum_{i=1}^{a-1} V_i \sum_{j=i+1}^a V_j B_{ij}^{cs0} \cos(\theta_{ij}) + \sum_{i=a+1}^b \left(P_{Li}^0 \theta_i + Q_{Li}^0 V_i + \frac{1}{2} B_{Li} V_i^2 \right) - \sum_{i=b+1}^d \left(P_i^* \theta_i + Q_i^* \ln(V_i) - k_{qi} V_i \right) \\
 & + \sum_{i=b+1}^d \frac{1}{2} k_{pi} \theta_i^2 - \sum_{i=1}^d \frac{1}{2} B_{ii} V_i^2 - \sum_{i=1}^{d-1} V_i \sum_{j=i+1}^d V_j B_{ij} \cos(\theta_{ij}) - \beta \sum_{i=1}^n (P_m + B_{gi} E_i V_i \sin(\delta_i - \theta_i)) \omega_i \\
 & + \alpha
 \end{aligned} \tag{9.29}$$

onde α é uma constante arbitrária, $a = n + 2N$, $b = n + 2N + m$ e $d = n + 2N + m + k$.

Nesta seção apresentamos uma função energia generalizada para sistemas elétricos de potência. Embora não verificamos analiticamente a hipótese **(ii)** da proposição 8.1.9, comprovaremos a seguir, através de exemplos numéricos que (9.29) é uma função energia generalizada para o sistema (9.17) - (9.21).

9.2 Exemplos Numéricos

Apresentaremos exemplos numéricos para ilustrar que a função energia generalizada apresentada anteriormente de fato atende às condições de uma função energia generalizada. O objetivo é a caracterização e a estimativa da região de estabilidade via funções energia generalizadas.

Exemplo 9.2.1 - Considere um conversor de potência conectado a um grande sistema, como ilustrado na figura 9.4.

Figura 9.4: Conversor de Potência versus Barramento Infinito.

De acordo com a seção anterior, as equações dinâmicas de um conversor são:

$$\begin{aligned} D_p \dot{\theta} &= -K_p \theta + P^* - GV^2 + GVV_{in} \cos(\theta) + BVV_{in} \sin(\theta), \\ D_q \dot{v} &= -K_q V + Q^* + BV^2 - BVV_{in} \cos(\theta) + GVV_{in} \sin(\theta), \end{aligned} \quad (9.30)$$

$$B = -\frac{x}{r^2 + x^2}, \quad G = \frac{r}{r^2 + x^2}, \quad (9.31)$$

onde θ é o ângulo da tensão da barra onde o conversor de potência está conectado, V é o módulo da tensão, $v = \ln(V)$, V_{in} é o módulo da tensão do barramento infinito, r é a resistência da linha, x é a reatância da linha, D_p , D_q , K_p e K_q são os coeficientes do controle do conversor, P^* e Q^* são respectivamente a injeção de potência ativa e reativa.

De acordo com a seção anterior temos a seguinte função energia generalizada para o sistema (9.30):

$$W = \frac{1}{2}K_p \theta^2 - \frac{1}{2}BV^2 + k_q V - P^* \theta - Q^* \ln(V) + BVV_{in} \cos(\theta) + \alpha, \quad (9.32)$$

onde α é uma constante arbitrária.

Considere o sistema com os seguintes parâmetros: $P^* = 1$ p.u., $Q^* = 0,41$ p.u., $D_p = 0,1$ p.u., $D_q = 0,1$ p.u., $K_p = 0,2$ p.u., $K_q = 0,2$ p.u., $r = 0,05$ p.u., $x = 0,5$ p.u.. A constante $\alpha = 1,02$ foi escolhida para que a função W seja zero no ponto de equilíbrio estável ($\theta = 0,439$ [rad] e $V = 1,049$ p.u.). A figura 9.5 mostra uma estimativa da região de estabilidade do sistema (9.30) obtida com a aplicação do teorema 7.1.3, onde, $L = 0,3103$.

Figura 9.5: Estimativa da região de estabilidade do sistema (9.30).

De acordo com os resultados do teorema 7.1.1, as regiões de derivada positiva, conjuntos C_1 e C_2 , são limitadas e estas regiões estão próximas aos pontos de equilíbrio. A

fronteira da região de estabilidade é composta da variedade estável do ponto de equilíbrio instável, que neste caso é $\theta = 1,93$ [rad] e $V = 0,31$ p.u., de acordo com o teorema 7.1.2.

Figura 9.6: Comportamento ao longo do tempo da função energia generalizada para a condição inicial $(\theta, V) = (1,25; 0,44)$ para o sistema (9.30).

A figura 9.6 ilustra o comportamento no domínio do tempo da função energia generalizada e da sua derivada para uma condição inicial $(\theta, V) = (1,25; 0,44)$.

Exemplo 9.2.2 - Considere um gerador síncrono conectado a um barramento infinito através de uma linha de transmissão. A figura 9.7 apresenta o sistema.

Figura 9.7: Gerador síncrono versus barramento infinito.

Considerando a rede elétrica reduzida ao nó interno do gerador, temos o seguinte modelo dinâmico do sistema apresentado na figura 9.7.

$$\begin{aligned} T\dot{E} &= -CE + E_{FD} - BV_{in} \cos(\delta) + GV_{in} \sin(\delta), \\ \dot{\delta} &= \omega, \\ M\dot{\omega} &= -D\omega + P_m - (GE^2 - GEV_{in} \cos(\delta) - BEV_{in} \sin(\delta)), \end{aligned} \quad (9.33)$$

$$B = -\frac{x'_d + x_l}{(x'_d + x_l)^2 + (r_a + r_l)^2}, \quad G = \frac{r_a + r_l}{(x'_d + x_l)^2 + (r_a + r_l)^2}, \quad T = \frac{\tau'_{do}}{x_d - x'_d}, \quad (9.34)$$

$$C = \frac{(x_d + x_l)(x'_d + x_l) + (r_a + r_l)^2}{(x_d - x'_d)((x'_d + x_l)^2 + (r_a + r_l)^2)}, \quad E_{FD} = \frac{E_{fd}}{x_d - x'_d}, \quad (9.35)$$

onde x_l é a reatância da linha, r_l é a resistência da linha e o significado de cada variável do gerador pode ser encontrado no capítulo 2 na seção 2.3. De acordo com os resultados deste capítulo, temos a seguinte função energia generalizada para o sistema (9.33):

$$W = \frac{1}{2}M\omega^2 + \frac{1}{2}CE^2 - P_m\delta - E_{FD}E + BEV_{in}\cos(\delta) + \alpha - \beta(P_m + BEV_{in}\sin(\delta))\omega, \quad (9.36)$$

onde α é uma constante arbitrária.

Considere o sistema com os seguintes parâmetros: $P_m = 1$ p.u., $M = 0,0318$ p.u., $D = 0,04$ p.u., $\tau'_{do} = 5$ p.u., $E_{fd} = 1,60$ p.u., $r_a = 0,001$ p.u., $x'_d = 0,2$ p.u., $x_d = 0,9$ p.u., $x_l = 0,5$ p.u., $r_l = 0,020$ p.u., e $\beta = 0,0122$. A constante $\alpha = 2,700$ foi escolhida para que a função W torna-se zero no ponto de equilíbrio estável, $E = 1,222$ p.u., $\omega = 0$ [rad/s] e $\delta = 0,596$ [rad].

Utilizando o teorema 7.1.3, uma estimativa da região de estabilidade do sistema (9.33) é obtida, com $L = 0,2190$, e apresentada nas figuras 9.8, 9.9 e 9.10.

Figura 9.8: Estimativa da região de estabilidade do sistema (9.33).

As regiões de derivada positiva estão próximas aos pontos de equilíbrio e a fronteira da região de estabilidade é composta pela variedade estável de um conjunto invariante indecomponível, que neste caso é um ponto de equilíbrio instável ($E = 0,699$ p.u., $\omega = 0$ [rad/s] e $\delta = 1,803$ [rad]).

Figura 9.9: Fronteira da região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade do sistema (9.33).

Podemos observar nas figuras 9.9 e 9.10 que o conjunto C_2 tem intersecção não vazia com a fronteira da região de estabilidade.

Figura 9.10: Região de estabilidade, fronteira da região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade do sistema (9.33).

A figura 9.11 ilustra o comportamento no domínio do tempo da função energia generalizada e da sua derivada para uma condição inicial $(E, \delta, \omega) = (1, 1; 0, 8; -0, 8)$.

Figura 9.11: Comportamento ao longo do tempo da função energia generalizada para a condição inicial $(E, \delta, \omega) = (1, 1; 0, 8; -0, 8)$ para o sistema (9.33).

A função energia generalizada para o sistema (9.33) é não decrescente, consequentemente ela oscila entrando e saindo com conjunto C_1 .

Exemplo 9.2.3 - Considere o sistema apresentado na figura 9.12 (o sistema original foi retirado de ATHAY; PODMORE; VIRMANI (1979)).

Figura 9.12: Geradores síncronos e conversor de potência conectado em um sistema de três barras.

O sistema é composto por um gerador síncrono, por um conversor de potência, por uma carga dinâmica (S_1) e uma carga de potência constante (S_2). As cargas apresentam os seguintes modelos:

$$S_2 = P_{L2} + jQ_{L2}, \quad S_1 = P_{L1} + jQ_{L1} \implies \begin{cases} P_{L1} = P_{L1}^0 + D_{L1}\dot{\theta}_1 \\ Q_{L1} = Q_{L1}^0 V_1 + B_{L1}V_1^2 \end{cases} \quad (9.37)$$

De acordo com a seção anterior, o modelo dinâmico do sistema apresentado na figura 9.12 é dado pelo seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} D_{L1}\dot{\theta}_1 &= P_{e1} - P_{L1}^0 - V_1 \sum_{j=1}^3 V_j (G_{1j} \cos(\theta_{1j}) + B_{1j} \sin(\theta_{1j})), \\ \varepsilon_1 \dot{v}_1 &= Q_{e1} - Q_{L1} - V_1 \sum_{j=1}^3 V_j (G_{1j} \sin(\theta_{1j}) - B_{1j} \cos(\theta_{1j})), \\ D_{p2}\dot{\theta}_2 &= -k_{p2}\theta_2 + P_2^* - P_{L2} - V_2 \sum_{j=1}^3 V_j (G_{2j} \cos(\theta_{2j}) + B_{2j} \sin(\theta_{2j})), \\ D_{q2}\dot{V}_2 &= -k_{q2}V_2 + Q_2^* - Q_{L2} - V_2 \sum_{j=1}^3 V_j (G_{2j} \sin(\theta_{2j}) - B_{2j} \cos(\theta_{2j})), \\ T_1\dot{E}_1 &= E_{FD1} - C_1 E_1 - B_{g1} V_1 \cos(\delta_1 - \theta_1) + G_{g1} V_1 \sin(\delta_1 - \theta_1), \\ \dot{\delta}_1 &= \omega_1, \\ M_1\dot{\omega}_1 &= -D_1\omega_1 + P_{m1} - P_{e1}, \end{aligned} \quad (9.38)$$

onde

$$\begin{aligned} P_{e1} &= G_{g1} E_1^2 - G_{g1} E_1 V_1 \cos(\delta_1 - \theta_1) - B_{g1} E_1 V_1 \sin(\delta_1 - \theta_1), \\ Q_{e1} &= B_{g1} V_1^2 - B_{g1} E_1 V_1 \cos(\delta_1 - \theta_1) - G_{g1} E_1 V_1 \sin(\delta_1 - \theta_1). \end{aligned} \quad (9.39)$$

O significado de cada variável e de cada parâmetro está descrito na seção 9.1. De acordo com a subseção 9.1.1, temos a seguinte função energia generalizada para o sistema (9.38):

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} M_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} C_1 E_1^2 + \frac{1}{2} k_{p2} \theta_2^2 - P_{m1} \delta_1 - E_{FD1} E_1 - \frac{1}{2} B_{g1} V_1^2 + E_1 V_1 B_{g1} \cos(\delta_1 - \theta_1) \\ &\quad + P_{L1}^0 \theta_1 + Q_{L1}^0 V_1 + \frac{1}{2} B_{L1} V_1^2 + P_{L1} \theta_2 + Q_{L2} \ln(V_2) - P_2^* \theta_2 - Q_2^* \ln(V_2) + k_{q2} V_2 - \frac{1}{2} B_{11} V_1^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} B_{22} V_2^2 - V_1 V_2 B_{12} \cos(\theta_{12}) - V_1 V_3 B_{13} \cos(\theta_{13}) - V_2 V_3 B_{23} \cos(\theta_{23}) + \alpha \\ &\quad - \beta (P_m + B_{gi} E_i V_i \sin(\delta_i - \theta_i)) \omega_1 \end{aligned} \quad (9.40)$$

onde α é uma constante arbitrária.

Considere o sistema com os seguintes parâmetros: $P_m = 2,50$ p.u., $M = 0,053$ p.u., $D = 0,03$ p.u., $\tau'_{do} = 5$ p.u., $E_{fd} = 1,825$ p.u., $ra = 0,00075$ p.u., $x_d' = 0,2$ p.u., $x_d = 0,9$ p.u., $P_2^* = 2$ p.u., $Q_2^* = 0,50$ p.u., $D_{p2} = 0,1$ p.u., $D_{q2} = 0,1$ p.u., $K_{p2} = 0,2$ p.u., $K_{q2} = 0,2$ p.u., $P_{L1}^0 = 1,5$ p.u., $D_{L1} = 0,02$ p.u., $Q_{L1}^0 = 0,40$ p.u., $B_{L1} = -0,6$ p.u., $\varepsilon_1 = 0,01$ p.u., $P_{L2} = 1$ p.u., $Q_{L2} = 0,3$ p.u., $Z_{12} = 0,0046 + j0,46$ p.u., $Z_{13} = 0,0026 + j0,26$ p.u. e $Z_{23} = 0,000806 + j0,0806$ p.u.. Este sistema tem o ponto de equilíbrio estável ($\theta_1 = 0,202$ p.u., $V_1 = 1$ p.u., $\theta_2 = 0,097$ p.u., $V_2 = 0,99$ p.u., $E_1 = 1,100$ p.u., $\delta = 0,672$ [rad] e $\omega = 0$ [rad/s]). A constante $\alpha = 10.53$ foi escolhida tal que a função W torna-se zero no ponto de equilíbrio estável e $\beta = 1,11 \times 10^{-4}$.

Aplicando o teorema 7.1.3, obtemos uma estimativa da região de estabilidade via função energia generalizada que é apresentada na figura 9.13 para nível de energia $L = 0,015$.

A fronteira da região de estabilidade é composta pela variedade estável do ponto de equilíbrio instável ($\theta_1 = 0,2402$ p.u., $V_1 = 0,8344$ p.u., $\theta_2 = 0,1017$ p.u., $V_2 = 0,9708$ p.u., $E_1 = 0,8860$ p.u., $\delta = 0,9813$ [rad] and $\omega = 0$ [rad/s]), que é o único conjunto limite na fronteira dessa região.

Figura 9.13: Região de estabilidade, fronteira da região de estabilidade e estimativa da região de estabilidade do sistema (9.38).

A figura 9.14 apresenta o comportamento ao longo do tempo da função energia generalizada para a condição inicial $(\theta_1, V_1, \theta_2, V_2, E_1, \delta, \omega) = (0,2022; 1,0008; 0,0978; 0,9960; 0,9907; 0,6388; 1)$ para o sistema (9.38).

Figura 9.14: Comportamento ao longo do tempo da função energia generalizada para a condição inicial $(\theta_1, V_1, \theta_2, V_2, E_1, \delta, \omega) = (0,2022; 1,0008; 0,0978; 0,9960; 0,9907; 0,6388; 1)$ para o sistema (9.38).

Neste capítulo, uma função energia generalizada foi derivada para modelos gerais de sistemas elétricos de potência que não admitem função energia. Esta classe geral inclui modelos de sistemas elétricos de potência modernos, com conversores de potência distribuídos e dispositivos FACTS, além de considerar as perdas do sistema. Esta função pode desempenhar um papel muito importante no desenvolvimento de métodos diretos para avaliação da estabilidade em tempo real de sistemas elétricos de potência. Além disso, a função energia generalizada pode subsidiar o desenvolvimento de controles para estes sistemas. No próximo capítulo, vamos utilizar os resultados dos capítulos 8 e 9 para a síntese de leis de controle não lineares para o dispositivo TCSC.

Capítulo 10

Metodologia de Projeto de Controladores Não Lineares para Dispositivos TCSC

O dispositivo TCSC traz inúmeros benefícios para a operação e controle de sistemas elétricos de potência. Esquemas de controle adequados para este dispositivo podem melhorar a estabilidade transitória e auxiliar no amortecimento de oscilações eletromecânicas desses sistemas. Assim, a síntese de leis de controle para o dispositivo TCSC surge como uma questão de grande importância, uma vez que a escolha de sinais de entrada adequados pode aumentar os limites de estabilidade.

Neste capítulo, vamos utilizar a teoria de função energia generalizada de controle para a síntese de leis de controle não lineares para o dispositivo TCSC.

10.1 Modelo Dinâmico de um Sistema Elétrico de Potência com Dispositivos TCSCs

No capítulo anterior, apresentamos um modelo de sistemas elétricos de potência com a inclusão do dispositivo TCSC. O sistema, apresentado na figura 9.1, após a regularização das dinâmicas algébricas através da teoria de sistemas singularmente perturbados são modelados pelo seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} T_i' \dot{E}_i &= -C_i' E_i + E_{FDi} - B_{gi} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) + G_{gi} V_i \sin(\delta_i - \theta_i), \\ \dot{\delta}_i &= \omega_i, \\ M_i \dot{\omega}_i &= -D_i \omega_i + P_{mi} - G_{gi} E_i^2 + G_{gi} E_i V_i \cos(\delta_i - \theta_i) + B_{gi} E_i V_i \sin(\delta_i - \theta_i), \end{aligned} \quad (10.1)$$

$$\begin{aligned}
\mu_{1i}\dot{\theta}_i &= G_{gi}E_i^2 - G_{gi}E_iV_i \cos(\delta_i - \theta_i) - B_{gi}E_iV_i \sin(\delta_i - \theta_i) - V_i \sum_{j \in \Omega_i} V_j (G_{ij} \cos(\theta_{ij}) \\
&\quad + B_{ij} \sin(\theta_{ij})), \\
\mu_{2i}\dot{v}_i &= B_{gi}V_i^2 - B_{gi}E_iV_i \cos(\delta_i - \theta_i) - G_{gi}E_iV_i \sin(\delta_i - \theta_i) - V_i \sum_{j \in \Omega_i} V_j (G_{ij} \sin(\theta_{ij}) \\
&\quad - B_{ij} \cos(\theta_{ij})),
\end{aligned} \tag{10.2}$$

para $i = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned}
\mu_{1i}\dot{\theta}_i &= -V_i \sum_{j \in \Omega_j} V_j (G_{ij} \cos(\theta_{ij}) + B_{ij} \sin(\theta_{ij})) - V_i \sum_{j \in \Omega_j} -V_j B_{ij}^{cs} \sin(\theta_{ij}), \\
\mu_{2i}\dot{v}_i &= -V_i \sum_{j \in \Omega_j} V_j (G_{ij} \sin(\theta_{ij}) - B_{ij} \cos(\theta_{ij})) - V_i \sum_{j \in \Omega_j} V_j B_{ij}^{cs} \cos(\theta_{ij}),
\end{aligned} \tag{10.3}$$

para $i = n + 1, n + 2, \dots, n + 2N$.

$$\begin{aligned}
D_{Li}\dot{\theta}_i &= -P_{Li}^0 - V_i \sum_{j \in \Omega_i} V_j (G_{ij} \cos(\theta_{ij}) + B_{ij} \sin(\theta_{ij})), \\
\mu_{2i}\dot{v}_i &= -Q_{Li}^0 V_i - B_{Li}V_i^2 - V_i \sum_{j \in \Omega_i} V_j (G_{ij} \sin(\theta_{ij}) - B_{ij} \cos(\theta_{ij})),
\end{aligned} \tag{10.4}$$

para $i = n + 2N + 1, n + 2N + 2, \dots, n + 2N + m$.

$$\begin{aligned}
D_{pi}\dot{\theta}_i &= P_i^* - k_{pi}\theta_i - V_i \sum_{j \in \Omega_i} V_j (G_{ij} \cos(\theta_{ij}) + B_{ij} \sin(\theta_{ij})), \\
D_{qi}\dot{v}_i &= Q_i^* - k_{qi}V_i - V_i \sum_{j \in \Omega_i} V_j (G_{ij} \sin(\theta_{ij}) - B_{ij} \cos(\theta_{ij})),
\end{aligned} \tag{10.5}$$

para $i = n + 2N + m + 1, n + 2N + m + 2, \dots, n + 2N + m + k$.

O significado da cada variável do modelo apresentado pode ser encontrado no capítulo 9. Este conjunto de equações diferenciais pode ser escrito de forma compacta como se segue:

$$\begin{aligned}
T_\mu \dot{x} &= -\frac{\partial}{\partial x} U(x, y) + u \frac{\partial}{\partial x} U_c(x, y) + \epsilon g_1(x, y), \\
\dot{y} &= z, \\
M \dot{z} &= -Dz - \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) + \epsilon g_2(x, y),
\end{aligned} \tag{10.6}$$

onde cada parâmetro pode ser verificado no capítulo 9.

A partir desse modelo e através dos resultados do capítulo 8, vamos propor leis de controle não lineares com sinais locais e remotos para o dispositivo TCSC.

10.2 Metodologia de Projetos de Controladores Não Lineares via Função Energia Generalizada de Controle

Para efeito da aplicação da metodologia de projetos de controladores não lineares via função energia generalizada de controle, vamos primeiramente trabalhar com o modelo compacto (10.6) e associá-lo posteriormente ao modelo nas variáveis do sistema elétrico (10.1-10.5).

Considere o sistema dinâmico (10.6) e a seguinte candidata a função energia generalizada de controle:

$$W(x, y, z) = \frac{1}{2} z^T M z + U(x, y) + \beta \left[\frac{\partial}{\partial y} U(x, y) \right]^T z. \quad (10.7)$$

No capítulo 8, demonstramos que a função (10.7), sob algumas hipóteses e para entradas de controle iguais a zero, é uma função energia generalizada para o sistema dinâmico (10.6). Além disto, de acordo com o capítulo 9, a função (10.7) nas variáveis do sistema dinâmico (10.1-10.5), assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} W = & \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M_i \omega_i^2 - \sum_{i=1}^n \left(P_{mi} \delta_i + E_{FDi} E_i + \frac{1}{2} B_{gi} V_i^2 - E_i V_i B_{gi} \cos(\delta_i - \theta_i) \right) + \sum_{i=n+1}^a \frac{1}{2} B_{ii}^{cs0} V_i^2 \\ & + \sum_{i=1}^{a-1} V_i \sum_{j=i+1}^a V_j B_{ij}^{cs0} \cos(\theta_{ij}) + \sum_{i=a+1}^b \left(P_{Li}^0 \theta_i + Q_{Li}^0 V_i + \frac{1}{2} B_{Li} V_i^2 \right) - \sum_{i=b+1}^d \left(P_i^* \theta_i + Q_i^* \ln(V_i) - k_{qi} V_i \right) \\ & + \sum_{i=b+1}^d \frac{1}{2} k_{pi} \theta_i^2 - \sum_{i=1}^d \frac{1}{2} B_{ii} V_i^2 - \sum_{i=1}^{d-1} V_i \sum_{j=i+1}^d V_j B_{ij} \cos(\theta_{ij}) - \beta \sum_{i=1}^n (P_m + B_{gi} E_i V_i \sin(\delta_i - \theta_i)) \omega_i \\ & + \alpha \end{aligned} \quad (10.8)$$

Derivando (10.7) ao longo das órbitas do sistema (10.6), temos:

$$\begin{aligned} \dot{W}(x, y, z) = & - \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) \end{bmatrix} + \dot{x}^T u \frac{\partial}{\partial x} U_c(x, y) + \epsilon \begin{bmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \\ \beta M^{-1} g_2(x, y) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (10.9)$$

onde,

$$Q = \begin{bmatrix} T_\mu & -\frac{1}{2}\beta \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \right]^T & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(x, y) \right] & D - \beta \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y) & \frac{1}{2}\beta D M^{-1} \\ 0 & \frac{1}{2}\beta D M^{-1} & \beta M^{-1} \end{bmatrix}. \quad (10.10)$$

A parcela $\dot{x}^T u \frac{\partial}{\partial x} U_c(x, y)$ da equação (10.9) assume a seguinte forma nas variáveis do sistema elétrico (10.1-10.5):

$$\begin{aligned} \dot{x}^T u \frac{\partial}{\partial x} U_c(x, y) \implies & \sum_{i=n+1}^a \sum_{j=i+1}^a -u_{ij} B_{ij}^{cs0} V_i^2 \dot{v}_i + \sum_{i=n+1}^{a-1} \sum_{j=i+1}^a u_{ij} \left(V_i V_j B_{ij}^{cs0} \cos(\theta_{ij}) \right) \dot{v}_i \\ & + u_{ij} \left(V_i V_j B_{ij}^{cs0} \cos(\theta_{ij}) \right) \dot{v}_j - \sum_{i=n+1}^{a-1} \sum_{j=i+1}^a u_{ij} \left(V_i V_j B_{ij}^{cs0} \sin(\theta_{ij}) \right) \dot{\theta}_{ij}, \end{aligned} \quad (10.11)$$

onde u_{ij} é a entrada de controle. Esta parcela surge no modelo associado ao sistema (10.1-10.5) devido a presença dos dispositivos TCSCs. Assim, de acordo com este modelo, temos N dispositivos TCSCs e cada dispositivo está entre duas barras. Portanto, um dispositivo situado entre duas barras $i - j$ introduz na equação (10.11) o seguinte termo:

$$\begin{aligned} & u_{ij} \left(\left(-V_i V_j B_{ij}^{cs0} \sin(\theta_{ij}) \right) \dot{\theta}_{ij} + \left(-B_{ij}^{cs0} V_i^2 + V_i V_j B_{ij}^{cs0} \cos(\theta_{ij}) \right) \dot{v}_i \right. \\ & \left. + \left(-B_{ij}^{cs0} V_j^2 + V_i V_j B_{ij}^{cs0} \cos(\theta_{ij}) \right) \dot{v}_j \right), \end{aligned} \quad (10.12)$$

ou seja,

$$u_{ij} \left(P_{ij}^{cs0} \dot{\theta}_{ij} + Q_{ij}^{cs0} \dot{v}_i + Q_{ji}^{cs0} \dot{v}_j \right). \quad (10.13)$$

onde P_{ij}^{cs0} e Q_{ij}^{cs0} são os fluxos de potência ativa e reativa, da barra i para barra j , sem o efeito dinâmico da reatância do TCSC, respectivamente, Q_{ji}^{cs0} é o fluxo de potência reativa da barra j para barra i , $\dot{\theta}_i$, $\dot{\theta}_j$, $\dot{v}_i = \frac{\dot{V}_i}{V_i}$, $\dot{v}_j = \frac{\dot{V}_j}{V_j}$ são as derivadas dos ângulos e dos módulos das tensões das barras i e j , respectivamente.

Portanto, o objetivo é escolher leis de realimentação de controle, tal que, W seja uma função energia generalizada de controle em malha fechada.

10.2.1 Síntese de Leis de Controle locais para Dispositivos TCSC

Nesta subseção, vamos sintetizar leis de controle com sinais de realimentação locais que satisfaçam às exigências da FEGC. Para isto, considere a seguinte lei de controle:

$$\mathbf{LC1}_{ij} = -k_{ij} \left(P_{ij}^{cs0} \dot{\theta}_{ij} + Q_{ij}^{cs0} \dot{v}_i + Q_{ji}^{cs0} \dot{v}_j \right). \quad (10.14)$$

onde k_{ij} , com $k_{ij} = k_{ji}$, é o ganho do controlador. Substituindo (10.14) em (10.13), obtemos:

$$-k_{ij} \left(P_{ij}^{cs0} \dot{\theta}_{ij} + Q_{ij}^{cs0} \dot{v}_i + Q_{ji}^{cs0} \dot{v}_j \right)^2. \quad (10.15)$$

Expressando (10.15) na forma matricial obtém-se:

$$-k_{ij} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{\theta}_j \\ \dot{v}_j \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{ij}^{cs0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{ij}^{cs0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{ji}^{cs0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{ji}^{cs0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{ij}^{cs0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{ij}^{cs0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{ji}^{cs0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{ji}^{cs0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{\theta}_j \\ \dot{v}_j \end{bmatrix}. \quad (10.16)$$

Compactamente, podemos reescrever (10.16), desta forma:

$$-k_{ij} X_{ij}^T S_{ij} P_{ij} S_{ij} X_{ij}, \quad (10.17)$$

onde,

$$X_{ij} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{\theta}_j \\ \dot{v}_j \end{bmatrix}, \quad S_{ij} = \begin{bmatrix} P_{ij}^{cs0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{ij}^{cs0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{ji}^{cs0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{ji}^{cs0} \end{bmatrix}, \quad P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.18)$$

Portanto, para os N dispositivos TCSCs, considerando a lei de controle (10.14), a equação (10.11) pode ser reescrita desta forma:

$$-X^T S P S X, \quad (10.19)$$

onde, X é um vetor formado com os X_{ijs} elementos, S é uma matriz diagonal formada com os S_{ijs} elementos e P é uma matriz diagonal formada com os P_{ijs} elementos, com $i = n + 1, n + 3, \dots, n + 2N - 1$ e $j = n + 2, n + 4, \dots, n + 2N$.

As matrizes P_{ijs} são positivas semidefinidas, então P é uma matriz positiva semidefinida. Uma vez que a função (10.8) em malha aberta ($u = 0$) é uma função energia generalizada e a matriz P é positiva semidefinida, então, a lei de controle (10.14) satisfaz as hipóteses da proposição 8.1.12. Portanto, conclui-se que (10.14) é uma lei de controle não linear estabilizante e a função (10.8) é uma função energia generalizada de controle para o sistema em malha fechada.

Exemplo 10.1.1 - Considere um sistema formado por um gerador conectado a um barramento infinito através de uma linha de transmissão onde se encontra instalado um dispositivo TCSC (figura 10.1).

Figura 10.1: Sistema gerador vs barramento infinito com dispositivo TCSC instalado.

Considerando o modelo clássico do gerador, o modelo dinâmico do sistema após a regularização das dinâmicas algébricas pode ser escrito desta forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{\delta}_1 &= \omega_1, \\
 M_1 \dot{\omega}_1 &= -D_1 \omega_1 + P_{m1} - P_{e1}, \\
 \mu_{11} \dot{\theta}_1 &= P_{e1} - P_{12}^{tcsc}, \\
 \mu_{21} \dot{v}_1 &= Q_{e1} - Q_{12}^{tcsc}, \\
 \mu_{12} \dot{\theta}_2 &= -P_{21}^{tcsc} - P_{23}^{Lin}, \\
 \mu_{22} \dot{v}_2 &= -Q_{21}^{tcsc} - Q_{23}^{Lin},
 \end{aligned} \tag{10.20}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 P_{ei} &= G_{g1} E_1^2 - G_{g1} E_1 V_1 \cos(\delta_1 - \theta_1) - B_{g1} E_1 V_1 \sin(\delta_1 - \theta_1), \\
 Q_{e1} &= B_{g1} V_1^2 - B_{g1} E_1 V_1 \cos(\delta_1 - \theta_1) - G_{g1} E_1 V_1 \sin(\delta_1 - \theta_1), \\
 P_{12}^{tcsc} &= (1 - u) \left(-B_{12}^{cs0} V_1 V_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right), \\
 Q_{12}^{tcsc} &= (1 - u) \left(-B_{12}^{cs0} V_1^2 + B_{12}^{cs} V_1 V_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right), \\
 P_{21}^{tcsc} &= (1 - u) \left(-B_{12}^{cs0} V_1 V_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \right), \\
 Q_{21}^{tcsc} &= (1 - u) \left(-B_{12}^{cs0} V_2^2 + B_{12}^{cs} V_1 V_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{23}^{Lin} &= -G_{23}V_2^2 + G_{23}V_2V_3 \cos(\theta_{23}) + B_{23}V_2V_3 \sin(\theta_{23}), \\
Q_{23}^{Lin} &= B_{23}V_2^2 - B_{23}V_2V_3 \cos(\theta_{23}) + G_{23}V_2V_3 \sin(\theta_{23}).
\end{aligned} \tag{10.21}$$

Os significados das variáveis do sistema (10.20) podem ser encontrados nos capítulos 2, 3, 4 e 9. O Gerador está fornecendo potência ao sistema e no instante $t = 1$ [s] ocorre um curto-circuito trifásico no barramento infinito. O defeito é retirado após um intervalo de tempo, restaurando a topologia inicial do sistema (sistema pós-falta igual ao sistema pré-falta). Os parâmetros do sistema são: $P_m = 1$ [pu], $M = 0,0318$ [pu], $E = 1,11$ [pu], $r_a = 0,001$ [pu], $x'_d = 0,2$ [pu], $D = 0,015$ [pu], $r_l = 0,035$, $x_l = 0,7$, $x_{tcsc}^0 = -0,2$ [pu], $x_{tcsc}^{min} = -0,4$ [pu] e $x_{tcsc}^{max} = -0,1$ [pu]. A seguir a estabilidade nas condições apresentadas será analisada.

De acordo com esta seção temos a seguinte lei de controle com sinais locais para o dispositivo TCSC:

$$\mathbf{LC1} = -k_1 \left(P_{12}^{cs0} \dot{\theta}_{ij} + Q_{12}^{cs0} \dot{v}_i + Q_{21}^{cs0} \dot{v}_j \right). \tag{10.22}$$

O tempo crítico de eliminação da perturbação para o sistema sem controle foi de 206 [ms]. Para o sistema considerando o TCSC com a lei de controle **LC1**, com $k_1 = 0,15$, o tempo crítico de eliminação da perturbação foi de 252 [ms]. O gráfico da figura 10.2 apresenta o comportamento dinâmico do sistema para a perturbação descrita com um tempo de eliminação da falta de 206 [ms].

Figura 10.2: Comportamento dinâmico do sistema (10.20) com a atuação do controle **LC1**.

O gráfico da figura 10.3 apresenta o comportamento dinâmico da reatância do dispositivo TCSC atuando com a lei de controle **LC1**.

Figura 10.3: Comportamento dinâmico do dispositivo TCSC.

Como pode-se observar, a lei de controle melhorou a dinâmica do sistema, diminuindo as oscilações e fazendo com que o sistema convirja mais rapidamente para o ponto de equilíbrio.

Para avaliarmos de fato a contribuição do controlador na estabilidade do sistema, vamos verificar o quanto a lei de controle proposta está aumentando a região de estabilidade do sistema, além disto, vamos obter uma estimativa da região de estabilidade via função energia generalizada de controle. Para isto, considere a seguinte função energia generalizada de controle:

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{1}{2}M_1\omega_1^2 - P_{m1}\delta_1 - \frac{1}{2}B_{g1}V_1^2 + E_1V_1B_{g1}\cos(\delta_1 - \theta_1) - \frac{1}{2}B_{12}^{cs0}V_1^2 + V_1V_2B_{12}^{cs0}\cos(\theta_{12}) \\
 & + \frac{1}{2}B_{23}V_2^2 - V_2V_3B_{23}\cos(\theta_{23}) + \alpha - \beta(P_{m1} + E_1V_1B_{g1}\sin(\delta_1 - \theta_1))\omega_1
 \end{aligned} \quad (10.23)$$

A figura 10.4 apresenta a comparação entre a região de estabilidade do sistema sem controle e com controle não linear **LC1** no plano formado pelos pontos de equilíbrio estável $(0, 49; 1, 04; 0, 66; 1, 10; 0, 66; 0, 00)$, equilíbrio instável $(2, 26; 0, 58; 2, 57; 1, 11; 2, 57; 0, 00)$ e $p_1 (-0, 50; 0, 40; -1, 24; 0, 30; 0, 50; 6, 00)$, além de uma estimativa desta região via função (10.23), com $L = 0, 674$.

Figura 10.4: Comparação entre as regiões de estabilidade sistema (10.20) sem controle e com o controle não linear **LC1**.

Pode-se constatar que a lei de controle **LC1** aumentou de forma significativa a região de estabilidade do sistema (10.20), mostrando que o controle atua de forma efetiva no sentido de aumentá-la.

A lei de controle **LC1** se mostrou eficaz para a estabilização do sistema. Porém, ela é função dos valores da potência ativa e reativa sem o efeito dinâmico da reatância do TCSC que são valores que não podem ser diretamente medidos, além de valores da derivada do módulo da tensão, dificultando sua implementação prática. Embora isso não venha a ser um impeditivo, é possível obter uma lei de controle formada com sinais mais simples e fáceis de serem medidos quando comparada com a lei de controle **LC1**. A seguir apresentaremos um nova lei de controle com sinais de mais simples obtenção.

Considere a seguinte lei de controle:

$$\mathbf{LC2}_{ij} = -k_{ij} P_{ij}^{cs} (\dot{\theta}_i + \dot{\theta}_j). \quad (10.24)$$

onde k_{ij} , com $k_{ij} = k_{ji}$, é o ganho do controlador, P_{ij}^{cs} é o fluxo de potência ativa no dispositivo TCSC. Substituindo (10.24) em (10.13), obtemos:

$$-k_{ij} P_{ij}^{cs} (\dot{\theta}_i + \dot{\theta}_j) \left(P_{ij}^{cs0} \dot{\theta}_{ij} + Q_{ij}^{cs0} \dot{v}_i + Q_{ji}^{cs0} \dot{v}_j \right). \quad (10.25)$$

Reescrevendo (10.25) na forma matricial:

$$-k_{ij} \frac{x_{tcsc}^0}{x_{tcsc}} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{\theta}_j \\ \dot{v}_j \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{ij}^{cs0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{ij}^{cs0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{ji}^{cs0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{ji}^{cs0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{ij}^{cs0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{ij}^{cs0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{ji}^{cs0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{ji}^{cs0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{\theta}_j \\ \dot{v}_j \end{bmatrix} \quad (10.26)$$

Escrevendo compactamente (10.26), temos:

$$-k_{ij} X_{ij}^T S_{ij} P_{ij} S_{ij} X_{ij}, \quad (10.27)$$

onde,

$$X_{ij} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{\theta}_j \\ \dot{v}_j \end{bmatrix}, \quad S_{ij} = \begin{bmatrix} P_{ij}^{cs0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{ij}^{cs0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{ji}^{cs0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{ji}^{cs0} \end{bmatrix}, \quad P_{ij} = \frac{x_{tcsc}^0}{x_{tcsc}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.28)$$

Portanto, para os N dispositivos TCSCs, considerando a lei de controle (10.24), a equação (10.11) pode ser reescrita desta forma:

$$-X^T S P S X, \quad (10.29)$$

onde, X é um vetor formado com os X_{ijs} elementos, S é uma matriz diagonal formada com os S_{ijs} elementos e P é uma matriz diagonal formada com os P_{ijs} elementos, com $i = n + 1, n + 3, \dots, n + 2N - 1$ e $j = n + 2, n + 4, \dots, n + 2N$.

Admitindo que as tensões em sistemas elétricos de potência são sempre limitadas, além disso, x_{tcscij} e a matriz S também são limitadas, então, para uma região de operação com k_{ij} , β e as perdas do sistema (10.1-10.5) suficientemente pequenos, todas as condições da proposição 8.1.13 são satisfeita para o modelo dinâmico (10.1-10.5) com a lei de controle (10.24). Portanto, (10.24) é uma lei de controle não linear estabilizante e a função (10.8) é uma função energia generalizada de controle para o sistema em malha fechada.

Exemplo 10.1.2 - Considere o mesmo cenário apresentado no exemplo 10.1.1. Porém, considere a seguinte lei de controle baseada em (10.25) para o TCSC do sistema (10.20):

$$\mathbf{LC2} = -k_2 P_{12}^{cs} (\dot{\theta}_i + \dot{\theta}_i). \quad (10.30)$$

A seguir a estabilidade do sistema (10.20) será analisada considerando a lei de controle **LC2**. Assim, para a perturbação apresentada no exemplo 10.1.1, obtemos um tempo crítico de eliminação da falta considerando o TCSC com a lei de controle **LC2** e $k_2 = 0,035$ de 252 [ms]. O gráfico da figura 10.5 apresenta o comportamento dinâmico do sistema para a perturbação descrita com um tempo de eliminação da falta de 206 [ms].

Figura 10.5: Comportamento dinâmico do sistema (10.20) com a atuação do controle **LC2**.

O gráfico da figura 10.6 apresenta o comportamento dinâmico da reatância do dispositivo TCSC com a lei de controle **LC2**.

Figura 10.6: Comportamento dinâmico da reatância do dispositivo TCSC.

Como pode-se observar, a lei de controle **LC2**, assim como a **LC1**, melhorou a dinâmica do sistema, diminuindo as oscilações e fazendo com que o sistema convirja mais rapidamente para o ponto de equilíbrio.

Novamente vamos avaliar a região de estabilidade para verificar o quanto a lei de controle está contribuindo para o aumento dela. Além disso, utilizaremos uma função energia generalizada como (10.23) para obter uma estimativa dessa região.

A figura 10.7 apresenta a comparação entre a região de estabilidade do sistema sem controle e com controle não linear **LC2** no plano formado pelos pontos de equilíbrio estável $(0, 49; 1, 04; 0, 66; 1, 10; 0, 66; 0, 00)$, equilíbrio instável $(2, 26; 0, 58; 2, 57; 1, 11; 2, 57; 0, 00)$ e $p_1 (-0, 50; 0, 40; -1, 24; 0, 30; 0, 50; 6, 00)$, além de uma estimativa desta região via função (10.23), com $L = 0, 674$.

Figura 10.7: Comparação entre as regiões de estabilidade sistema (10.20) sem controle e com o controle não linear **LC2**.

Pode-se observar no gráfico da figura 10.7 que a lei de controle **LC2** também aumentou de forma significativa a região de estabilidade do sistema (10.20), mostrando-nos que o controle atua de forma efetiva nesse sentido.

10.2.2 Síntese de Leis de Controle Remotas para Dispositivos TCSC

Na subseção anterior, foram propostas leis de controle não lineares baseadas em sinais de realimentação locais para o dispositivo TCSC. Embora as leis locais sejam eficazes para a estabilização do sistema, em alguns trabalhos tem sido demonstrado que leis de controle

para dispositivos FACTS baseado em sinais remotos têm alcançado bons resultados na estabilização de sistemas elétricos de potência (CAI et al., 2008; ZHU et al., 2008). Nesta subseção, vamos propor uma lei de controle baseada em sinais remotos. Para isto, vamos utilizar o conceito de Centro de Ângulo como referência.

O Centro de Ângulo (COA) como referência é uma representação que se baseia em uma inércia equivalente para os sistema. O COA é uma transformação bastante utilizada para análise de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência. Define-se Centro de Ângulo de um sistema elétrico de potência da seguinte forma:

$$\delta_{COA} = \frac{1}{M_T} \sum_{i=1}^n M_i \delta_i, \quad \omega_{COA} = \frac{1}{M_T} \sum_{i=1}^n M_i \omega_i, \quad \text{com} \quad M_T = \sum_{i=1}^n M_i \quad (10.31)$$

onde, δ_{is} , ω_{is} e M_{is} são os ângulos, velocidades e constante de inércia das máquinas do sistema, respectivamente.

O sistema a ser analisado possui n geradores, k conversores de potência distribuídos, m cargas e N dispositivos TCSCs, como se vê na figura 9.1. Vamos considerar que os geradores, conversores de potência e as cargas estão divididos em p áreas e os TCSCs estão conectados entre essas áreas, como ilustrado na figura 10.8.

Figura 10.8: Sistema da figura 9.1 dividido em p áreas.

Definindo para uma área A_q a velocidade COA (ω_{COAq}) desta área, temos:

$$\omega_{COAq} = \frac{1}{M_{Tq}} \sum_{j \in \Omega_q} M_j \omega_j, \quad \text{com} \quad M_{Tq} = \sum_{j \in \Omega_q} M_j \quad (10.32)$$

onde Ω_q o conjunto de geradores pertencente a área A_q .

Considere a seguinte lei de controle:

$$\mathbf{LC3}_{ij} = -k_{ij} P_{ij}^{cs} \omega_{COAq}. \quad (10.33)$$

onde k_{ij} , com $k_{ij} = k_{ji}$, é o ganho do controlador, P_{ij}^{cs} é o fluxo de potência ativa no dispositivo TCSC. Substituindo (10.33) em (10.13), temos:

$$-k_{ij}P_{ij}^{cs}\omega_{COAq}\left(P_{ij}^{cs0}\dot{\theta}_{ij} + Q_{ij}^{cs0}\dot{v}_i + Q_{ji}^{cs0}\dot{v}_j\right). \quad (10.34)$$

Reescrevendo (10.34) na forma matricial, temos:

$$k_{ij}\frac{x_{tcsc}^0}{x_{tcsc}}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{\theta}_j \\ \dot{v}_j\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}P_{ij}^{cs0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{ij}^{cs0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{ji}^{cs0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{ji}^{cs0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{ij}^{cs0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{ij}^{cs0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{ji}^{cs0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{ji}^{cs0}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}r_{1q} & r_{2q} & \cdots & r_{nq} \\ r_{1q} & r_{2q} & \cdots & r_{nq} \\ r_{1q} & r_{2q} & \cdots & r_{nq} \\ r_{1q} & r_{2q} & \cdots & r_{nq}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n\end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad r_{jq} = \frac{M_j}{M_{Tq}}f_q, \quad (10.35)$$

onde M_j é a constante de inércia da máquina j , M_{Tq} é o somatório das constantes de inércia da área q e f_q é um fator de multiplicação. Se a máquina j faz parte da área q , $f_q = 1$ se não $f_q = 0$. Compactamente podemos escrever (10.35) desta forma:

$$-k_{ij}X_{ij}^TS_{ij}P_{ij}S_{ij}R_iZ, \quad (10.36)$$

onde,

$$X_{ij} = \begin{bmatrix}\dot{\theta}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{\theta}_j \\ \dot{v}_j\end{bmatrix}, \quad S_{ij} = \begin{bmatrix}P_{ij}^{cs0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{ij}^{cs0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{ji}^{cs0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{ji}^{cs0}\end{bmatrix}, \quad P_{ij} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$R_{ij} = \begin{bmatrix}r_{1i} & r_{2i} & \cdots & r_{ni} \\ r_{1i} & r_{2i} & \cdots & r_{ni} \\ r_{1i} & r_{2i} & \cdots & r_{ni} \\ r_{1i} & r_{2i} & \cdots & r_{ni}\end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix}\omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n\end{bmatrix} \quad (10.37)$$

Portanto, para os N dispositivos TCSCs, considerando a lei de controle (10.14), a equação (10.11) pode ser reescrita desta forma:

$$-X^TSPSRZ, \quad (10.38)$$

onde, X é um vetor formado com os X_{ijs} elementos, S é uma matriz diagonal formada com os S_{ijs} elementos e P é uma matriz diagonal formada com os P_{ijs} elementos, com

$i = n + 1, n + 3, \dots, n + 2N - 1$ e $j = n + 2, n + 4, \dots, n + 2N$, e R é um vetor formado com os R_{is} , com $i = 1, 2, \dots, N$.

Admitindo que as tensões em sistemas elétricos de potência são sempre limitadas, além disso, x_{tcscij} e a matriz S também são limitadas, então, para uma região de operação com k_{ij} , β e as perdas do sistema (10.1-10.5) suficientemente pequenos, todas as condições da proposição 8.1.14 são satisfeitas para o modelo dinâmico (10.1-10.5) com a lei de controle (10.33). Portanto, (10.33) é uma lei de controle não linear estabilizante e a função (10.8) é uma função energia generalizada de controle para o sistema em malha fechada.

Exemplo 10.1.3 - Considere novamente o mesmo cenário apresentado no exemplo 10.1.1. Porém, considere agora seguinte lei de controle baseada em (10.34) para o TCSC do sistema (10.20):

$$\mathbf{LC3} = -k_3 P_{12}^{cs} \omega_1. \quad (10.39)$$

A seguir a estabilidade do sistema (10.20) será analisada considerando a lei de controle **LC3**. Para a perturbação apresentado no exemplo 10.1.1, obtemos um tempo crítico de eliminação da falta considerando o TCSC com a lei de controle **LC3** e $k_3 = 0.051$ de 250 [ms]. O gráfico da figura 10.9 apresenta o comportamento dinâmico do sistema para a perturbação descrita com um tempo de eliminação da falta de 206 [ms].

Figura 10.9: Comportamento dinâmico do sistema (10.20) com a atuação do controle **LC3**.

O gráfico da figura 10.10 apresenta o comportamento dinâmico da reatância do dispositivo TCSC com a lei de controle **LC3**.

Figura 10.10: Comportamento dinâmico a reatância do dispositivo TCSC.

A lei de controle **LC3** melhorou a dinâmica do sistema, fazendo com que o mesmo convirja mais rapidamente para o ponto de equilíbrio.

A seguir, o impacto sobre a região de estabilidade será avaliado. Além disso, utilizaremos uma função energia generalizada como (10.23) para obter uma estimativa da região de estabilidade. A figura 10.11 apresenta a comparação entre a região de estabilidade do sistema sem controle e com controle não linear **LC3** além de uma estimativa desta região via função (10.23).

Figura 10.11: Comparação entre as regiões de estabilidade sistema (10.20) sem controle e com o controle não linear **LC3**.

Por fim, conclui-se que a lei de controle **LC3** também aumentou de forma significativa a região de estabilidade do sistema 10.20.

Neste capítulo leis de controle não lineares baseadas em sinais locais e remotos foram derivadas. Essas leis foram formadas por sinais de simples obtenção. Além disso em testes preliminares elas se mostraram efetivas na estabilização dos sistemas estudados. No próximo capítulo vamos avaliar essas leis em sistemas elétricos de potência de grande porte e com modelos mais detalhados.

Capítulo 11

Simulações e Resultados

Para comprovar a eficiência dos controles projetados no capítulo 10 para dispositivos TCSC, neste capítulo, simulações são realizadas analisando a estabilidade dos sistemas enumerados a seguir utilizando os dispositivos com as leis de controle propostas neste trabalho:

- (1) - sistema teste 1: 4 Barras, 1 Gerador;
- (2) - sistema teste 2: 11 barras, 4 Geradores, 2 Áreas;
- (3) - sistema teste 3: 68 Barras, 16 Geradores, 5 Áreas.

Este estudo será realizado através dos softwares desenvolvidos pelo Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL):

- ANAREDE[®] (calcula o fluxo de potência);
- PACDYN[®] (analisa a estabilidade de sistemas quando sujeitos a pequenos distúrbios via cálculo dos autovalores da matriz associada);
- ANATEM[®] (simulação no domínio do tempo, de sistemas de equações diferenciais não lineares).

No capítulo 10, foram sintetizadas 3 leis de controle não lineares para dispositivos TCSC. Em testes anteriores as leis de controle desenvolvidas se mostraram eficazes na estabilização de sistemas elétricos de potência. Neste capítulo vamos realizar o estudo de estabilidade considerando apenas as leis de controle (10.24) e (10.33). A não utilização da lei de controle (10.14) é por motivos de dificuldade de implementação nos softwares utilizados, pois os mesmos se mostraram inadequados para o cálculo das derivadas dos sinais de realimentação que compõem a lei de controle (10.14).

Anteriormente, para o desenvolvimento das leis de controle, utilizamos modelos simples dos componentes dos sistemas elétricos de potência, neste capítulo entretanto utilizaremos modelos mais detalhados destes componentes nos sistemas estudados.

11.1 Sistema teste 1

O sistema teste 1 é composto de 4 barras e 1 gerador conforme mostrado na figura 11.1:

Figura 11.1: Sistema teste 1: 4 Barras, 1 Gerador (CEPEL, 2012).

Este sistema foi retirado de CEPEL (2012) e é formado por um gerador que fornece energia a um grande sistema através de um transformador e duas linhas de transmissão; em uma das linhas existe um dispositivo TCSC instalado. O gerador é de polos salientes e a sua potência nominal é de $S_n = 1000$ [MVA]. O sistema completo, com os valores dos parâmetros do gerador, da rede (base de 100 [MVA] e 138 [KV]), e do dispositivo TCSC encontra-se na tabela 11.1.

Tabela 11.1: Dados do sistema teste 1: 4 barras, 1 gerador.

L_d [pu]	L_q [pu]	L_d' [pu]	L_d'' [pu]	τ_{do}' [s]	τ_{do}'' [s]	τ_{qo}'' [s]	H [s]
10	7	3	2.5	7.50	0.090	0.200	5
x_{12} [pu]	x_{23} [pu]	r_{23} [pu]	x_{43} [pu]	r_{43} [pu]	x_{tcsc}^0 [pu]	x_{tcsc}^{min} [pu]	x_{tcsc}^{max} [pu]
0.01	0.04	0.002	0.06	0.002	- 0.02	-0.03	-0.01

O gerador possui um regulador de tensão com a seguinte configuração:

Figura 11.2: Sistema teste 1: regulador de tensão do gerador (CEPEL, 2012).

A malha de controle do dispositivo TCSC será formada pelo controle em regime permanente e pelo controle não linear projetado, como ilustrado na figura 11.3.

Figura 11.3: Sistema teste 1: malha de controle do dispositivo TCSC.

O controle em regime permanente do dispositivo TCSC será através de um controlador PI (proporcional-integral). Os parâmetros do controlador **PI**, $k_p = 0.001$ e $k_i = 0.030$, foram ajustados para que o mesmo apresente um comportamento suficientemente lento e assim não entre em conflito com o controle não linear.

O controle em regime transitório é formado pelo controle não linear projetado conforme mostrado no capítulo 10. Para a identificação do tipo de controlador não linear utilizado vamos denominar de **controle não linear 1**, o controlador baseado em leis de realimentação locais, com a seguinte expressão:

$$\mathbf{LC1} = k_1 P_{24} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4), \quad (11.1)$$

onde k_1 é o ganho do controlador, P_{24} é o fluxo de potência ativa da barra 2 para a barra 4, $\dot{\theta}_2$ e $\dot{\theta}_4$ representam a variação da frequência nas barras 2 e 4, respectivamente.

O **controle não linear 2**, que é baseado na lei de controle com sinais remotos, será formado pela seguinte expressão:

$$\mathbf{LC2} = k_2 P_{24} \omega, \quad (11.2)$$

onde k_2 é o ganho do controlador, P_{24} é o fluxo de potência ativa da barra 2 para a barra 4, e ω é a variação de velocidade do gerador.

O gerador está fornecendo 1000 [MW] para a rede. A tabela a seguir apresenta os valores de módulo e ângulo da tensão das barras correspondentes a este ponto de operação.

Tabela 11.2: Sistema teste 1: módulo e ângulo da tensão das barras.

nº da barra	V [pu]	θ [graus]
1	1,00	17,39
2	0,99	11,61
3	1,00	0,00
4	1,00	17,39

Avaliando a estabilidade do sistema através dos autovalores correspondentes a este ponto de operação, apresentado na tabela 11.2, e considerando o TCSC apenas com o

controle PI, o sistema apresenta um autovalor com taxa de amortecimento abaixo de 5% (mal amortecido). A tabela 11.3 apresenta os autovalores para esta condição descrita.

Tabela 11.3: Sistema teste 1: autovalores do sistema com controle **PI** para o TCSC

Nº	Real	Imaginário	Amort. [%]	Freq. [Hz]
1	-0,110	7,017	1,573	1,1168
2	-9,380	3,306	94,311	0,526
3	-16,376	0	100	0
4	-5,857	0	100	0
5	-0,115	0	100	0

Para melhorar a característica de resposta do sistema, utilizaremos um controle não linear tipo 1 e também um controle não linear tipo 2 com ganhos $k_1 = 2,41$ e $k_2 = 2,41$, respectivamente, na expectativa de que o sistema apresente uma taxa de amortecimento superior a 20%, com os TCSCs operando com ambos os controles. O gráfico da figura 11.4 apresenta o posicionamento dos polos no plano complexo do sistema para os controles não lineares projetados.

Figura 11.4: Sistema teste 1 - autovalores no plano complexo: (A) TCSCs operando com **controle não linear 1**; (B) TCSCs operando com **controle não linear 2**.

Vamos avaliar a estabilidade transitória do sistema para as seguintes contingências:

■ **Contingência 1:** curto circuito trifásico na barra 1;

■ **Contingência 2:** curto circuito trifásico na barra 2;

Para estas contingências o sistema pós-falta é igual ao sistema pré-falta. A tabela a seguir apresenta os tempos críticos de eliminação das faltas (TCE).

Tabela 11.4: Sistema teste 1 - tempos críticos de eliminação das faltas.

Cont.	PI	controle não linear - 1	controle não linear - 2
1	168.4 [ms]	188.4 [ms]	208.4 [ms]
2	187.4 [ms]	205.4 [ms]	227.4 [ms]

Como podemos observar na tabela 11.4, o dispositivo TCSC com a malha de controle não linear, utilizando o controle não linear 1 ou o controle não linear 2, aumentou o TCE do sistema para as condições de falta simulada.

Os gráficos das figuras 11.5, 11.6, 11.7 apresentam o comportamento dinâmico do sistema para um curto-circuito trifásico na barra 2 com um tempo de eliminação da falta de 50 [ms].

Figura 11.5: Sistema teste 1: ângulo em graus e velocidade em p.u. do gerador.

Figura 11.6: Sistema teste 1: frequências das Barras 2 e 4 em Hz.

Figura 11.7: Sistema teste 1: fluxos de Potência nas linhas 2-3 e 2-4 do sistema em p.u..

O gráfico da figura 11.8 apresenta o comportamento dinâmico da reatância do dispositivo TCSC durante a contingência citada anteriormente.

Figura 11.8: Sistema teste 1: reatância do TCSC.

O gráfico da figura 11.9 apresenta a variação do fluxo de potência na linha 2-4, para uma perturbação degrau na referência do **PI** de 0.1.

Figura 11.9: Sistema teste 1: fluxo de Potência na linha 2-4 para um degrau na referência do **PI** de 0.1.

Conforme mostrado nos gráficos, o dispositivo TCSC com os controles não lineares projetados atuou de forma efetiva melhorando o comportamento dinâmico do sistema bem como aumentando os limites de estabilidade transitória do mesmo.

11.2 Sistema teste 2

O sistema teste 2 é composto de 11 barras, 4 Geradores e foi proposto por KUNDUR (1994). Nesta seção, avaliaremos a estabilidade deste sistema. A figura 11.10 apresenta o sistema.

Figura 11.10: Sistema teste 2 - 11 barras, 4 Geradores, 2 Áreas (KUNDUR, 1994).

Este sistema é dividido em duas áreas. Cada área possui dois geradores. Os parâmetros dos geradores na base de 900 [MVA] e 20 [kV] são apresentados na tabela 11.5.

Tabela 11.5: Sistema teste 2: dados dos geradores.

x_d	x_q	x'_d	x'_q	x''_d	x''_q	x_l	r_a	τ'_{do}
1.8	1.7	0.3	0.55	0.25	0.25	0.2	0.0025	8s
τ'_{qo}	τ''_{do}	τ''_{qo}	A_{sat}	B_{sat}	Ψ_{T1}	K_D	H_a	H_b
4s	0.03s	0.05s	0.015	9.6	0.9	0	6.5	6.173

Na tabela 11.5, H_a é o valor da constante de inércia para os geradores **G1** e **G2**, e H_b é valor da constante de inércia para os geradores **G3** e **G4**. A definição dos outros parâmetros dos geradores podem ser encontrados em KUNDUR (1994). Cada transformador possui uma impedância de $j0.15$ [pu], na base de 900 [MVA] e 20/230 [KV]. A tabela 11.6 apresenta os parâmetros das linhas na base de 100 [MVA] e 230 [KV].

Tabela 11.6: Sistema teste 2: parâmetros das linhas.

r_L [pu]	x_L [pu]	b_C [pu]
0,011	0,11	0,1925

O sistema opera com a área 1 exportando 400 [MVA] para área 2. A tabela 11.7 apresenta a potência ativa e reativa que cada gerador está fornecendo para o sistema.

Tabela 11.7: Sistema teste 2: potência fornecida pelos geradores.

Gerador	Pot. Ativa Gerada [MW]	Pot. Reativa Gerada [MVar]
G1	700	185
G2	700	235
G3	719	176
G4	700	202

O sistema está alimentando duas cargas L_7 e L_9 , com valores $967 + j100$ [VA] e $1767 + j100$ [VA], respectivamente. Além disso, dois bancos de capacitores paralelos estão instalados nas barras 7 e 9, com valores de $j100$ [MVar] cada.

Os geradores do sistema são equipados com reguladores de tensão. O modelo dos reguladores com os seus respectivos valores de parâmetros podem ser encontrados em (KUNDUR, 1994).

Inicialmente vamos avaliar a estabilidade do sistema sem estabilizadores, ou seja, sem PSSs (Power System Stabilizers) e dispositivos TCSCs.

Para o ponto de operação descrito anteriormente, a análise dos autovalores do sistema revela que o mesmo é instável, pois apresenta autovalores com parte real positiva. O gráfico da figura 11.11 apresenta os autovalores do sistema sem estabilizadores no plano complexo.

Figura 11.11: Autovalores do sistema teste 2 no plano complexo sem estabilizadores.

Vamos considerar agora, o sistema com dois dispositivos TCSCs instalados, como ilustrado na figura 11.12.

Figura 11.12: Sistema teste 2 com dois dispositivos TCSCs instalados.

Para não alterar o ponto de operação do sistema anteriormente definido, alteramos os valores dos parâmetros originais das linhas 8 – 12 e 8 – 13 para os seguintes valores:

Tabela 11.8: Sistema teste 2: parâmetros das linhas 8-12 e 8-13.

Linha	r_L [pu]	x_L [pu]
8-12	0,011	0,132
8-13	0,011	0,132

Os parâmetros dos dispositivos TCSCs 7 – 12 e 9 – 13 são apresentados na tabela 11.9.

Tabela 11.9: Sistema teste 2: parâmetros dos TCSCs 7-12 e 9-13.

TCSC	x_{tcsc}^0 [pu]	x_{tcsc}^{min} [pu]	x_{tcsc}^{max} [pu]
7-12	-0,022	-0,055	-0,011
9-12	-0,022	-0,055	-0,011

Os TCSCs irão operar com os controles não lineares projetados anteriormente. Assim, a malha do estabilizador não linear será como apresentado na figura 11.13.

Figura 11.13: Sistema teste 2: malha de controle dos dispositivos TCSCs.

O **controle não linear 1**, apresenta as seguintes leis de controle para os dispositivos:

■ dispositivo TCSC 7-12:

$$\mathbf{LC1}_1 = k_{l1} P_{7-12}(\dot{\theta}_7 + \dot{\theta}_{12}), \quad (11.3)$$

■ dispositivo TCSC 9-13:

$$\mathbf{LC1}_2 = k_{l2} P_{9-13}(\dot{\theta}_9 + \dot{\theta}_{13}), \quad (11.4)$$

onde $k_{l1} = 10$ e $k_{l2} = 10$, são os ganhos das leis de controle, P_{7-12} e P_{9-13} são os fluxos de potência ativa da barra 7 para barra 12 e da barra 9 para a barra 13, respectivamente, $\dot{\theta}_7$, $\dot{\theta}_9$, $\dot{\theta}_{12}$ e $\dot{\theta}_{13}$ são as variações das frequências das barras onde estão instalados os dispositivos.

O **controle não linear 2**, apresenta as seguintes leis de controle para os dispositivos:

■ dispositivo TCSC 7-12:

$$\mathbf{LC2}_1 = k_{r1} P_{7-12}(\omega_{COA1}), \quad (11.5)$$

■ dispositivo TCSC 9-13:

$$\mathbf{LC2}_1 = k_{r2} P_{9-13}(\omega_{COA2}), \quad (11.6)$$

onde $k_{r1} = 10$ e $k_{r2} = 10$, são os ganhos das leis de controle, ω_{COA1} é a velocidade *COA* da área 1 e ω_{COA2} é a velocidade *COA* da área 2. Essas velocidades são calculadas conforme as equações (11.7) e (11.8) dadas a seguir:

$$\omega_{COA1} = \frac{M1\omega_1}{M_{T1}} + \frac{M1\omega_2}{M_{T1}}, \quad \text{com } M_{T1} = M_1 + M_2, \quad (11.7)$$

$$\omega_{COA2} = \frac{M3\omega_3}{M_{T2}} + \frac{M4\omega_3}{M_{T2}}, \quad \text{com } M_{T2} = M_3 + M_4, \quad (11.8)$$

com, ω_1 , ω_2 , ω_3 , ω_4 , M_1 , M_2 , M_3 e M_4 , as velocidades e constantes de inércia dos geradores **G1**, **G2**, **G3** e **G4**, respectivamente.

Considerando o **controle não linear 1** e o **controle não linear 2**, como descritos anteriormente, o sistema torna-se estável, com os TCSCs atuando com ambos os controles, e apresenta taxa de amortecimento mínima acima de 5%. O gráfico da figura 11.14 apresenta os autovalores do sistema no plano complexo.

Figura 11.14: Sistema teste 2 - autovalores no plano complexo: (A) TCSCs operando com **controle não linear 1**; (B) TCSCs operando com **controle não linear 2**.

Para a avaliação da estabilidade transitória, a tabela 11.10 apresenta uma lista de contingências às quais o sistema será submetido.

Tabela 11.10: Sistema teste 2: lista de contingência.

Contingência	Curto-Circuito Trifásico na Barra
1	6
2	7
3	9
4	10
5	11

Para todos os casos agora em análise, o sistema pós falta é igual ao sistema pré-falta. A tabela 11.11 apresenta os tempos críticos de eliminação das contingências avaliadas.

Tabela 11.11: Sistema teste 2 com TCSCs - tempos críticos de eliminação das faltas.

Cont.	Sem Controle	Controle não linear - 1	Controle não linear - 2
1	Inst.	169.5 [ms]	170.4 [ms]
2	Inst.	188.4 [ms]	196.4 [ms]
3	Inst.	204.5 [ms]	204.5 [ms]
4	Inst.	250.4 [ms]	220.5 [ms]
5	Inst.	136.5 [ms]	148.4 [ms]

Os gráficos das figuras 11.16, 11.15 e 11.17 apresentam o comportamento dinâmico do sistema com o controle não linear dos dispositivos TCSCs para um curto-circuito na barra 6 com um tempo de eliminação de falta igual a 50 [ms].

Figura 11.15: Sistema teste 2 com TCSCs: ângulos dos geradores do sistema em [graus].

Figura 11.16: Sistema teste 2 com TCSCs: frequências dos geradores do sistema em [Hz].

O gráfico da figura 11.17 apresenta o comportamento dinâmico da reatância dos dispositivos TCSCs.

Figura 11.17: Sistema teste 2: Reatâncias dos dispositivos TCSCs.

Podemos concluir através dos resultados apresentados que as leis de controle atuam de forma eficaz para a estabilização do sistema.

Em seguida, consideraremos que os geradores estejam equipados com PSSs. A estrutura básica do PSS utilizado é mostrada na figura 11.18.

Figura 11.18: Estrutura típica de um PSS.

Para as análises, os geradores G1, G2 e G3 estão equipados com PSSs com os seguintes parâmetros:

Tabela 11.12: Sistema teste 2: parâmetros dos PSSs.

Gerador	K_{pss}	T_w	T_1	T_2	T_3	T_4	V_{min}	V_{max}
G1	10	30	0,310	0,233	0,310	0,233	-0,05	0,2
G2	10	30	0,220	0,126	0,220	0,126	-0,05	0,2
G3	10	5	0,213	0,123	0,213	0,123	-0,05	0,2

Com PSSs e controladores não lineares para dispositivos TCSCs as taxas de amortecimentos mínimas acima de 5% são obtidas. O gráfico da figura 11.19 apresentam os autovalores do sistema com PSSs e TCSCs com os controles não lineares.

Figura 11.19: Sistema teste 2 - autovalores no plano complexo: (A) PSSs e TCSCs operando com **controle não linear 1**; (B) PSSs e TCSCs operando com **controle não linear 2**.

Considerando a lista de contingências apresentada na tabela 11.10 e o sistema com PSSs e controladores não lineares, temos o seguinte resultado para os tempos críticos de eliminação das faltas.

Tabela 11.13: Sistema teste 2 com PSSs e TCSCs - tempos críticos de eliminação das faltas.

Cont.	PSS	PSS e Controle não linear 1	PSS e Controle não linear 2
1	231.4 [ms]	265.5 [ms]	270.4 [ms]
2	256.4 [ms]	298.4 [ms]	305.4 [ms]
3	373.4 [ms]	454.5 [ms]	471.4 [ms]
4	337.4 [ms]	421.4 [ms]	429.4 [ms]
5	291.5 [ms]	391.4 [ms]	396.5 [ms]

A atuação conjunta dos controladores melhora de forma significativa a estabilidade do sistema. Os gráficos a seguir mostram o comportamento do sistema para um curto circuito trifásico na linha 6 com um tempo de eliminação de falta igual a 50 [ms].

Figura 11.20: Sistema teste 2 com PSSs e TCSCs: ângulos dos geradores em [graus].

Figura 11.21: Sistema teste 2 com PSSs e TCSCs: frequências dos geradores em [Hz].

Os gráficos da figura 11.22 apresentam os comportamentos dinâmicos das reatâncias dos dispositivos TCSCs.

Figura 11.22: Sistema teste 2: reatâncias dos dispositivos TCSCs.

Pode-se concluir que as leis de controle não lineares atuaram no sistema de forma efetiva, melhorando suas condições de estabilidade transitória bem como a dinâmica do sistema.

Para completar a análise da atuação dos controladores não lineares projetados para sistema elétricos de potência, na próxima seção vamos avaliar um sistema de maior dimensão quando comparado aos sistemas até aqui estudados.

11.3 Sistema teste 3

O sistema teste 3 é composto de 68 barras e 16 geradores divididos em 5 áreas, conforme a figura 11.23. Nesta seção vamos estudar a estabilidade deste sistema. Ele é resultado do equivalente reduzido do sistema teste New England (NETS) conectado com o sistema New York (NYPS). Assim, o sistema equivalente é formado por cinco regiões das quais NETS e NYPS são representadas por grupos de geradores, além disto as outras três áreas são representadas por geradores equivalentes.

Figura 11.23: Diagrama unifilar do sistema teste New England/New York.

Os geradores são modelados por um sistema de equações de sexta ordem; os geradores de 1 a 12 são equipados com reguladores de tensão. Os parâmetros dos geradores com seus respectivos reguladores e dos demais componentes do sistema podem ser encontrados em RAMOS et al. (2014). A tabela 11.14 apresenta o resultado do fluxo e potência do sistema para uma condição de operação.

Tabela 11.14: Sistema teste 3: resultado do fluxo de potência do sistema.

Barra	V [pu]	θ [graus]	Carga		Geração	
			P[MW]	Q [MVar]	P[MW]	Q [MVar]
1	1.04	-9.02	0.00	0.00	250.00	196.77
2	0.98	-1.04	0.00	0.00	545.00	71.19
3	0.98	1.56	0.00	0.00	650.00	81.72
4	1.00	1.61	0.00	0.00	632.00	0.47
5	1.01	-0.69	0.00	0.00	505.00	116.67
6	1.05	3.78	0.00	0.00	700.00	254.73
7	1.06	5.97	0.00	0.00	560.00	290.97
8	1.03	-2.91	0.00	0.00	540.00	49.48
9	1.02	2.59	0.00	0.00	800.00	60.00
10	1.01	-9.72	0.00	0.00	500.00	-10.40

11	1.00	-7.30	0.00	0.00	1000.00	10.44
12	1.01	-22.69	0.00	0.00	1350.00	276.20
13	1.01	-28.72	0.00	0.00	3591.00	888.89
14	1.00	11.00	0.00	0.00	1785.00	69.93
15	1.00	-0.02	0.00	0.00	1000.00	57.37
16	1.00	-0.00	0.00	0.00	3379.67	89.03
17	0.95	-36.10	6000.00	300.00	0.00	0.00
18	1.00	-5.80	2470.00	123.00	0.00	0.00
19	0.93	-4.33	0.00	0.00	0.00	0.00
20	0.98	-5.94	680.00	103.00	0.00	0.00
21	0.96	-7.12	274.00	115.00	0.00	0.00
22	0.99	-1.86	0.00	0.00	0.00	0.00
23	1.00	-2.22	248.00	85.00	0.00	0.00
24	0.96	-9.94	309.00	-92.00	0.00	0.00
25	1.00	-10.07	224.00	47.00	0.00	0.00
26	0.99	-11.09	139.00	17.00	0.00	0.00
27	0.97	-12.92	281.00	76.00	0.00	0.00
28	0.99	-7.56	206.00	28.00	0.00	0.00
29	0.99	-4.61	284.00	27.00	0.00	0.00
30	0.98	-19.79	0.00	0.00	0.00	0.00
31	0.98	-17.55	0.00	0.00	0.00	0.00
32	0.97	-15.31	0.00	0.00	0.00	0.00
33	0.97	-19.83	112.00	0.00	0.00	0.00
34	0.98	-26.18	0.00	0.00	0.00	0.00
35	1.04	-27.15	0.00	0.00	0.00	0.00
36	0.96	-28.90	102.00	-19.50	0.00	0.00
37	0.96	-11.85	0.00	0.00	0.00	0.00
38	0.99	-18.85	0.00	0.00	0.00	0.00
39	0.99	-39.35	267.00	12.60	0.00	0.00
40	1.04	-13.68	65.63	23.53	0.00	0.00
41	1.00	9.47	1000.00	250.00	0.00	0.00
42	1.00	-0.88	1150.00	250.00	0.00	0.00
43	0.98	-37.98	0.00	0.00	0.00	0.00
44	0.98	-38.05	267.60	4.84	0.00	0.00
45	1.05	-29.42	208.00	21.00	0.00	0.00
46	0.99	-20.67	150.70	28.50	0.00	0.00
47	1.02	-19.56	203.10	32.59	0.00	0.00
48	1.03	-18.43	241.20	2.20	0.00	0.00
49	0.99	-19.98	164.00	29.00	0.00	0.00
50	1.06	-19.08	100.00	-147.00	0.00	0.00

51	1.06	-27.33	337.00	-122.00	0.00	0.00
52	0.95	-12.90	158.00	30.00	0.00	0.00
53	0.99	-19.01	252.70	118.60	0.00	0.00
54	0.99	-11.60	0.00	0.00	0.00	0.00
55	0.96	-13.28	322.00	2.00	0.00	0.00
56	0.92	-12.02	200.00	73.60	0.00	0.00
57	0.91	-11.27	0.00	0.00	0.00	0.00
58	0.91	-10.46	0.00	0.00	0.00	0.00
59	0.90	-13.37	234.00	84.00	0.00	0.00
60	0.91	-14.09	208.80	70.80	0.00	0.00
61	0.96	-23.29	104.00	125.00	0.00	0.00
62	0.91	-7.37	0.00	0.00	0.00	0.00
63	0.91	-8.43	0.00	0.00	0.00	0.00
64	0.84	-8.43	9.00	88.00	0.00	0.00
65	0.91	-8.24	0.00	0.00	0.00	0.00
66	0.92	-10.25	0.00	0.00	0.00	0.00
67	0.93	-11.49	320.00	153.00	0.00	0.00
68	0.95	-10.13	329.00	32.00	0.00	0.00

Para iniciar a análise de estabilidade do sistema teste 3, vamos avaliar os autovalores do sistema no ponto de operação descrito anteriormente (tabela 11.14). Esta análise nos revela que o sistema sem estabilizadores (PSSs e TCSCs) é instável, pois apresenta autovalores com parte real positiva. O gráfico da figura 11.24 apresenta os autovalores do sistema.

Figura 11.24: Autovalores do sistema teste 3 no plano complexo sem estabilizadores.

Vamos agora, considerar o sistema teste com três dispositivos TCSCs instalados, como ilustrado na figura 11.25.

Figura 11.25: Diagrama unifilar do sistema teste New England/New York com inclusão do dispositivo TCSC.

Para não alterar o ponto de operação do sistema (tabela 11.14), alteramos os valores originais dos parâmetros das linhas 49-69, 60-70 e 41-71 para os seguintes valores, conforme dados na Tabela 11.15.

Tabela 11.15: Sistema teste 3: parâmetros das linhas 49-69, 60-70 e 41-71.

Linha	r_L [pu]	x_L [pu]
49-69	0,0076	0,1369
60-70	0,0023	0,0435
41-71	0,0040	0,0720

Os parâmetros dos dispositivos TCSCs 18-69, 42-71 e 61-70 são apresentados na tabela 11.16.

Tabela 11.16: Sistema teste 3: parâmetros dos TCSCs 18-69, 42-71 e 61-70.

TCSC	x_{tcsc}^0 [pu]	x_{tcsc}^{min} [pu]	x_{tcsc}^{max} [pu]
18-69	-0,0228	-0,06844	-0,00568
42-71	-0,0072	-0,02172	-0,00175
61-70	-0,0120	-0,0360	-0,0030

A malha de controle dos dispositivos TCSCs é como apresentada na figura 11.13. O **controle não linear 1** apresenta as seguintes leis de controle para os dispositivos:

- dispositivo TCSC 18-69:

$$\mathbf{LC}_{\text{TCSC18-69}} = k_{l1} P_{18-69} (\dot{\theta}_{18} + \dot{\theta}_{69}) \quad (11.9)$$

- dispositivo TCSC 42-71:

$$\mathbf{LC}_{\text{TCSC42-71}} = k_{l2} P_{42-71} (\dot{\theta}_{42} + \dot{\theta}_{71}) \quad (11.10)$$

- dispositivo TCSC 61-70:

$$\mathbf{LC}_{\text{TCSC61-70}} = k_{l3} P_{61-70} (\dot{\theta}_{61} + \dot{\theta}_{70}) \quad (11.11)$$

Os ganhos das leis de controle são $k_{l1} = 10$, $k_{l2} = 1.5$ e $k_{l3} = 1.2$, P_{18-69} , P_{42-71} e P_{61-70} são os fluxos de potência ativa da barra 18 para barra 69, da barra 42 para barra 71 e da barra 61 para a barra 70, respectivamente, $\dot{\theta}_{18}$, $\dot{\theta}_{42}$, $\dot{\theta}_{61}$, $\dot{\theta}_{69}$, $\dot{\theta}_{70}$ e $\dot{\theta}_{71}$ são as variações das frequências das barras onde estão instalados os dispositivos.

O **controle não linear 2**, apresenta as seguintes leis de controle para os dispositivos:

- dispositivo TCSC 18-69:

$$\mathbf{LC}_{\text{TCSC18-69}} = k_{r1} P_{18-69} \omega_{COA5} \quad (11.12)$$

- dispositivo TCSC 42-71:

$$\mathbf{LC}_{\text{TCSC42-71}} = k_{r2} P_{42-71} \omega_{COA4} \quad (11.13)$$

- dispositivo TCSC 61-70:

$$\mathbf{LC}_{\text{TCSC61-70}} = k_{r3} P_{61-70} \omega_{COA2} \quad (11.14)$$

onde, os ganhos do controle $k_{r1} = 20$, $k_{r2} = 2$ e $k_{r3} = 2$, ω_{COA2} é a velocidade COA da área 2, ω_{COA4} é a velocidade COA da área 4 e ω_{COA5} é a velocidade COA da área 5. Essas velocidades são calculadas conforme as equações a seguir:

$$\begin{aligned} \omega_{COA2} &= \frac{M_{10}\omega_{10}}{M_{T2}} + \frac{M_{11}\omega_{11}}{M_{T2}} + \frac{M_{12}\omega_{12}}{M_{T2}} + \frac{M_{13}\omega_{13}}{M_{T2}}, \quad \text{com } M_{T2} = M_{10} + M_{11} + M_{12} + M_{13}, \\ \omega_{COA4} &= \omega_{15}, \\ \omega_{COA5} &= \omega_{16}, \end{aligned} \quad (11.15)$$

onde, ω_{10} , ω_{11} , ω_{12} , ω_{13} , ω_{14} , ω_{15} , ω_{16} , M_{10} , M_{11} , M_{12} e M_{13} , são as velocidades e constantes de inércia dos geradores correspondente aos seus números, respectivamente.

Considerando os TCSCs operando com o **controle não linear 1** ou com o **controle não linear 2** como descrito anteriormente, o sistema ainda permanece instável. A não estabilização é justificada pelo fato do sistema não satisfazer todas as hipóteses do teorema 7.2.1.

Se considerarmos os TCSCs operando com o **controle não linear 2** e o gerador **G9** equipado com um PSS o sistema torna-se estável, mas com taxa de amortecimento abaixo de 5%. A tabela a seguir apresenta os parâmetros do PSS do gerador **G9** retirados de RAMOS et al. (2014):

Tabela 11.17: Sistema teste 3: parâmetros do PSS em **G9**.

PSS	K_{pss}	T_w	T_1	T_2	T_3	T_4	V_{min}	V_{max}
9	12	10	0.09	0.02	0.09	0.02	-0.05	0.2

O gráfico da figura 11.26 apresenta os autovalores do sistema com um PSS em **G9** e com os TCSCs operando com o **controle não linear 2**.

Figura 11.26: Sistema teste 3 - autovalores do sistema no plano complexo com um PSS no gerador **G9** e TCSCs operando com o **controle não linear 2**.

O gráficos a seguir apresentam o comportamento dinâmico do sistema para um curto circuito na barra 18 com um tempo de eliminação de falta igual a 50 [ms].

Figura 11.27: Sistema teste 3 com PSS em **G9** e com os TCSCs operando com o **controle não linear 2** - ângulos dos geradores.

Figura 11.28: Sistema teste 3: reatância dos dispositivos TCSCs operando com o **controle não linear 2**.

Consideraremos a seguir os geradores de 1 a 11 equipados com PSSs. A tabela 11.18 apresenta os parâmetros dos PSSs. Os valores desses parâmetros foram obtidos de RAMOS et al. (2014).

Tabela 11.18: Sistema teste 3: parâmetros dos PSSs (RAMOS et al., 2014).

PSS	K_{pss}	T_w	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	V_{min}	V_{max}
1	20	15	0.15	0.04	0.15	0.04	0.15	0.04	-0.05	0.2
2	20	15	0.15	0.04	0.15	0.04	0.15	0.04	-0.05	0.2
3	20	15	0.15	0.04	0.15	0.04	0.15	0.04	-0.05	0.2
4	20	15	0.15	0.04	0.15	0.04	0.15	0.04	-0.05	0.2
5	20	15	0.15	0.04	0.15	0.04	0.15	0.04	-0.05	0.2
6	20	15	0.15	0.04	0.15	0.04	0.15	0.04	-0.05	0.2
7	20	15	0.15	0.04	0.15	0.04	0.15	0.04	-0.05	0.2
8	20	15	0.15	0.04	0.15	0.04	0.15	0.04	-0.05	0.2
9	12	10	0.09	0.02	0.09	0.02	0	0	-0.05	0.2
10	20	15	0.15	0.04	0.15	0.04	0.15	0.04	-0.05	0.2
11	20	15	0.15	0.04	0.15	0.04	0.15	0.04	-0.05	0.2
12	20	15	0.15	0.04	0.15	0.04	0.15	0.04	-0.05	0.2

Pela análise dos autovalores do sistema, verificamos que o mesmo apresenta modos de oscilações com taxa de amortecimento abaixo de 5%, considerando apenas a operação dos PSSs. O gráfico da figura 11.29 apresenta estes autovalores no plano complexo.

Figura 11.29: Sistema teste 3 - autovalores no plano complexo com apenas a operação dos PSSs.

Considerando a operação conjunta dos PSSs com os TCSCs (com o **controle não linear 1** ou com o **controle não linear 2**) o sistema não mais apresenta modos de oscilação mal amortecidos. O gráfico da figura 11.30 apresenta os autovalores do sistema com PSSs e TCSCs.

Figura 11.30: Sistema teste 3 - autovalores no plano complexo: (A) PSSs e TCSCs operando com **controle não linear 1**; (B) PSSs e TCSCs operando com **controle não linear 2**.

Avaliaremos a seguir a estabilidade transitória do sistema. A tabela 11.19 apresenta uma lista de contingências ao qual o sistema será submetido.

Tabela 11.19: Sistema teste 3: lista de contingência.

Contingência	Curto-Circuito Trifásico na Barra
1	18
2	19
3	31
4	42
5	58
6	61

Para todos os casos apresentados na lista de contingências o sistema pós-falta é igual ao sistema pré-falta. A tabela a seguir apresenta os tempos críticos de eliminação destas faltas.

Tabela 11.20: Sistema teste 3 com PSS e TCSC - tempos críticos de eliminação das faltas.

Cont.	PSS	PSS e Controle não linear - 1	PSS e Controle não linear - 2
1	190.4 [ms]	205.4 [ms]	205.4 [ms]
2	148.4 [ms]	151.4 [ms]	151.4 [ms]
3	291.5 [ms]	291.5 [ms]	291.5 [ms]
4	365.4 [ms]	386.5 [ms]	386.5 [ms]
5	171.4 [ms]	171.4 [ms]	171.4 [ms]
6	260.4 [ms]	270.4 [ms]	271.5 [ms]

Pode-se observar nos resultados apresentados na tabela 11.20 que para a maioria dos casos a presença dos TCSCs com os controles não lineares aumentou a margem de estabilidade do sistema.

Os gráficos das figuras 11.31, 11.32 apresentam o comportamento dinâmico do sistema para um curto circuito trifásico na barra 18 com um tempo de eliminação de falta igual a 50 [ms].

Figura 11.31: Sistema teste 3 com PSSs e TCSCs: ângulos dos geradores em [graus].

Os dispositivos TCSCs quando incorporados ao sistema melhoram a dinâmica do sistema, estabilizando o mesmo com tempos menores quando comparado com a atuação apenas dos PSSs.

Figura 11.32: Sistema teste 3 com PSSs e TCSCs: frequências dos geradores em [Hz].

O gráfico da figura 11.33 apresenta o comportamento dinâmico dos dispositivos TCSCs como descritos anteriormente.

Figura 11.33: Sistema teste 3: reatâncias dos dispositivos TCSCs.

Pode-se concluir, após todos estes testes, que os TCSCs operando com as leis de controle não lineares atuam de forma efetiva na estabilização do sistema, melhorando os limites de estabilidade. Nos sistemas teste 1 e 2 somente a presença dos TCSCs operando com os controles não lineares já era suficiente para estabilização do sistema. Além disso, os resultados do controle linear 2 (composto por sinais remotos) foram melhores quando comparados ao controle não linear 1 (composto por sinais locais).

Capítulo 12

Conclusões e Perspectivas futuras

Neste trabalho empregamos a técnica de controle não linear baseada na função energia generalizada de controle para o projeto de controladores de dispositivos TCSC.

Um estudo sobre a existência de funções energia generalizadas para sistemas dinâmicos não lineares foi realizado. Como consequência deste estudo, funções energia generalizadas foram desenvolvidas para três importantes classes de sistemas dinâmicos não lineares gerais decorrentes de sistemas de potência: uma classe de sistemas quase gradiente, uma classe de sistemas de segunda ordem e uma classe de sistemas de terceira ordem. Ressalta-se que estas classes não admitem funções energia no sentido usual. A existência de funções energia generalizadas tem implicações importantes sobre o comportamento dinâmico do sistema e sobre a caracterização da fronteira da região de estabilidade. Assim, demonstramos para as três classes de sistemas dinâmicos que admitem uma função energia generalizada, que a fronteira da região de estabilidade é composta pelas variedades estáveis dos conjuntos limites que estão na fronteira dessa região. Com essa caracterização, foi possível obter estimativas ótimas das regiões de estabilidade dessas classes de sistemas. Além disso, demonstramos a existência de uma função energia generalizada de controle e como consequência apresentamos leis de controle não lineares gerais para uma classe de sistemas de terceira ordem. Vale destacar, que os resultados sobre funções energia generalizadas de controle são preliminares e requerem mais investigações.

Com base nos resultados sobre a existência de funções energia generalizadas, uma função energia generalizada foi derivada para modelos gerais de sistemas elétricos de potência que não admitem função energia. Esta classe geral inclui modelos de sistemas elétricos de potência modernos, com conversores de potência distribuídos e dispositivos TCSCs, além de considerar as perdas do sistema. Esta função pode desempenhar um papel muito importante no desenvolvimento de métodos diretos para avaliação da estabilidade em tempo real de sistemas elétricos de potência. Além disso, a função energia generalizada desenvolvida pode subsidiar o desenvolvimento de controles não lineares para estes sistemas.

Com a função energia generalizada para sistemas elétricos de potência e utilizando os resultados sobre a existência de funções energia generalizada de controle, foi possível a síntese de leis de controle estabilizantes para o dispositivo TCSC. Estas leis de controle não lineares foram compostas por sinais locais e/ou sinais remotos que independem da topologia do sistema. Como análise inicial alguns testes foram feitos em sistemas elétricos de potência com os TCSCs operando com as leis de controle não lineares propostas. Nos testes apresentados no capítulo 10 foi possível avaliar a influência do controle não linear projetado de um sistema máquina vs barramento infinito. Nele constatamos que as leis de controle propostas aumentaram de forma significativa a região de estabilidade do sistema. No capítulo 11 foram feitos teste em sistemas multi-máquinas com outros equipamentos de controle (Regulador de velocidade, reguladores de tensão, PSS). Nesses testes, as leis de controle se mostraram efetivas para estabilização e para a melhora da dinâmica do sistema, aumentando os limites de estabilidade. Vale destacar que a lei de controle baseada em sinais remotos apresentaram melhores resultados quando comparadas com a lei formada com sinais locais.

Os testes deste trabalho apresentaram resultados muito interessantes, porém para uma análise mais completa novos testes precisam ser feitos, comparando os resultados aqui apresentados com os resultados de controles lineares convencionais para esses dispositivos.

Embora neste trabalho o dispositivo TCSC tenha sido estudado, o principal objetivo foi demonstrar como a teoria de função energia generalizada de controle é aplicável para o desenvolvimento de controladores para sistemas elétricos de potência. Assim, com os resultados aqui alcançados, pode-se estender o desenvolvimento desses controladores para uma extensa lista de dispositivos modernos, tais como, SVC, STATCOM, UPFC, HVDC etc.. Além disso, com a grande inserção de fontes de geração distribuída, torna-se interessante o controle distribuído de geração. Os resultados desta tese possibilitam o desenvolvimento de controles não lineares para estabilidade de frequência desses sistemas, viabilizando o controle local e podendo assim aumentar os limites de estabilidade desses sistemas.

Referências

- ACHA, E. **FACTS: Modelling and Simulation in Power Networks**. New York, NY: Wiley, 2004. 420p.
- ALBERTO, L. F. C. **Caracterização e estimativas da área de atração de sistemas dinâmicos não lineares**. Tese (Livre Docência em Análise de Estabilidade em Sistemas Elétricos de Potência) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.
- ALBERTO, L. F. C.; CHIANG, H. D. Characterization of Stability Region for General Autonomous Nonlinear Dynamical Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v.57, n.6, p.1564–1569, June 2012.
- ALBERTO, L. F. C.; CHIANG, H. D. Towards development of generalized energy functions for electric power systems. In: IEEE POWER AND ENERGY SOCIETY GENERAL MEETING, 2012, San Diego, CA. **Anais. . . IEEE**, 2012. p.1–6.
- ALBERTO, L. F. C.; SIQUEIRA, D. S.; CHIANG, H.-D.; BRETAS, N. G. Generalized Energy Functions for Classes of Nonlinear Dynamical Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], 2017. (Submitted paper).
- ALBERTO, L.; SILVA, F.; BRETAS, N. Direct methods for transient stability analysis in power systems: state of art and future perspectives. In: POWER TECH PROCEEDINGS, 2001, Porto. **Anais. . . IEEE**, 2001. v.2, p.6.
- ALBERTO, L.; SILVA, F.; BRETAS, N. Extended Lyapunov functions for power systems detailed models. **Power Systems Computation Conference (PSCC)**, Seville, Spain, 2002.
- ANDERSON, P. M.; FOUAD, A. A. **Power System Control and Stability**. 2.ed. Piscataway, NJ: Wiley-IEEE Press, 2002. 672p.
- ANGHEL, M.; MILANO, F.; PAPACHRISTODOULOU, A. Algorithmic Construction of Lyapunov Functions for Power System Stability Analysis. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Paper**, [S.l.], v.60, n.9, p.2533–2546, 2013.

- ANGQUIST, L.; LUNDIN, B.; SAMUELSSON, J. Power oscillation damping using controlled reactive power compensation-a comparison between series and shunt approaches. **IEEE Transactions on Power Systems**, [S.l.], v.8, n.2, p.687 –700, may 1993.
- ARTSTEIN, Z. Stabilization with relaxed controls. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, [S.l.], v.7, n.11, p.1163 – 1173, 1983.
- ATHAY, T.; PODMORE, R.; VIRMANI, S. A Practical Method for the Direct Analysis of Transient Stability. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, [S.l.], v.PAS-98, n.2, p.573–584, March 1979.
- BARREIRA, L.; VALLS, C. **Equações Diferenciais Ordinarias: teoria qualitativa**. 1.ed. Lisboa: Livraria da Física, 2012.
- BERG, G. J. Power-system load representation. **Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of**, [S.l.], v.120, n.3, p.344–348, March 1973.
- BOCHNAK J. COSTE M., R. M.-F. **Real algebraic geometry**. New York: Springer, 1998.
- BOYD, S.; GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities In System And Control Theory**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- BRAUER, F.; NOHEL, J. **The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations: an introduction**. New York: Dover, 1989. (Dover Books on Mathematics Series).
- BRETAS, N.; ALBERTO, L. Energy function for power systems with transmission losses: extension of the invariance principle. In: POWERCON 2000. 2000 INTERNATIONAL CONFERENCE ON POWER SYSTEM TECHNOLOGY. PROCEEDINGS, 2000, Perth, WA. **Anais. . . IEEE**, 2000. v.1, p.145 –150 vol.1.
- BRETAS, N.; ALBERTO, L. Lyapunov function for power systems with transfer conductances: extension of the invariance principle. **IEEE Transactions on Power Systems**, [S.l.], v.18, n.2, p.769 – 777, may 2003.
- BRETAS, N. G.; ALBERTO, L. F. C. **Estabilidade Transitória em Sistemas Eletroenergético**. 1.ed. São Carlos: EESC-USP, 2000. 155p.
- CAI, Z.; ZHU, L.; LAN, Z.; GAN, D.; NI, Y.; SHI, L.; BI, T. A study on robust adaptive modulation controller for {TCSC} based on {COI} signal in interconnected power systems. **Electric Power Systems Research**, [S.l.], v.78, n.1, p.147 – 157, 2008.
- CANIZARES, C.; GOMEZ-EXPOSITO, A.; CONEJO, A. **Sistemas de Energia Elétrica - Análise e Operação**. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2011.

- CEPEL. **ANATEM - Análise de Transitórios Eletromecânicos, Manual do Usuário**. Rio de Janeiro: [s.n.], 2012. versão 10.04.06.
- CHANDHARI, M.; ANDERSSON, G.; HISKENS, I. Control Lyapunov functions for controllable series devices. In: POWER ENGINEERING SOCIETY WINTER MEETING, 2002. IEEE, 2002. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2002. v.2, p.753 vol.2–.
- CHAPMAN, S. **Electric Machinery Fundamentals**. 5.ed. [S.l.]: McGraw-Hill Science, 2011.
- CHEN, X.; PAHALAWATHTHA, N.; ANNAKKAGE, U.; KUMBLE, C. Controlled series compensation for improving the stability of multi-machine power systems. **Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings-**, [S.l.], v.142, n.4, p.361–366, jul 1995.
- CHESI, G.; GARULLI, A.; TESI, A.; VICINO, A. LMI-Based computation of optimal quadratic Lyapunov functions for odd polynomial systems. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, [S.l.], v.15, p.35–49, 2005.
- CHIANG, H. **Direct Methods for Stability Analysis of Electric Power Systems: theoretical foundation, bcu methodologies, and applications**. [S.l.]: Wiley, 2011.
- CHIANG, H.; ALBERTO, L. **Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems: theory, estimation, and applications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015.
- CHIANG, H.-D. Study of the existence of energy functions for power systems with losses. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, [S.l.], v.36, n.11, p.1423–1429, Nov 1989.
- CHIANG, H.-D.; HIRSCH, M.; WU, F. Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v.33, n.1, p.16–27, Jan 1988.
- CHIANG, H.-D.; LIU, C.-W.; VARAIYA, P.; WU, F.; LAUBY, M. Chaos in a simple power system. **IEEE Transactions on Power Systems**, [S.l.], v.8, n.4, p.1407–1417, Nov 1993.
- CHIANG, H.-D.; TADA, Y.; LI, H.; TAKAZAWA, T. TEPCO-BCU for on-line dynamic security assessments of large-scale power systems. In: ADVANCES IN POWER SYSTEM CONTROL, OPERATION AND MANAGEMENT (APSCOM 2009), 8TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON, 2009. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2009. p.1–14.
- CHIANG, H.-D.; WANG, C.-S. Toward On-Line Dynamic Contingency Screening of Electric Power Systems Using BCU Method. In: V SYMPOSIUM OF SPECIALISTS IN

- ELECTRIC OPERATIONAL AND EXPANSION PLANNING, V SEPOPE, RECIFE, 1996. **Anais...** [S.l.: s.n.], 1996.
- CHIANG, H.-D.; WU, F.; VARAIYA, P. Foundations of direct methods for power system transient stability analysis. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, [S.l.], v.34, n.2, p.160–173, Feb 1987.
- CHOI, S.; JIANG, F.; SHRESTHA. Suppression of transmission system oscillations by thyristor-controlled series compensation. **Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings-**, [S.l.], v.143, n.1, p.7 –12, jan 1996.
- CHUNLIN, G.; XIANGNING, X. Transient stability control of TCSC. In: INDUSTRIAL ELECTRONICS AND APPLICATIONS, 2009. ICIEA 2009. 4TH IEEE CONFERENCE ON, 2009. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2009. p.1399 –1402.
- CONCORDIA, C.; IHARA, S. Load Representation in Power System Stability Studies. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, [S.l.], v.PAS-101, n.4, p.969–977, April 1982.
- DASH, P. K.; MISHRA, S.; PANDA, G. Damping Multimodal Power System Oscillation Using a Hybrid Fuzzy Controller for Series Connected Facts Devices. **Power**, [S.l.], v.15, n.4, p.1360–1366, 2000.
- DEL ROSSO, A.; CANIZARES, C.; DONA, V. A study of TCSC controller design for power system stability improvement. **IEEE Transactions on Power Systems**, [S.l.], v.18, n.4, p.1487 – 1496, nov. 2003.
- DOLAN, P.; SMITH, J.; MITTELSTADT, W. A study of TCSC optimal damping control parameters for different operating conditions. **IEEE Transactions on Power Systems**, [S.l.], v.10, n.4, p.1972 –1978, nov. 1995.
- DOLAN, P.; SMITH, J.; MITTELSTADT, W. Prony analysis and modeling of a TCSC under modulation control. In: CONTROL APPLICATIONS, 1995., PROCEEDINGS OF THE 4TH IEEE CONFERENCE ON, 1995. **Anais...** [S.l.: s.n.], 1995. p.239 –245.
- ERNST, D.; RUIZ-VEGA, D.; PAVELLA, M. Preventive and Emergency Transient Stability Control. In: VII SYMPOSIUM OF SPECIALISTS IN ELECTRIC OPERATIONAL AND EXPANSION PLANNING, VII SEPOPE, CURITIBA, 2000. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2000.
- ETT, G.; SAIKI, G. Y.; JARDINI, J. A.; TANNURI, J. G.; REIS, L. B.; MASUDA, M.; SANTOS, M. L.; ARNEZ, R. L. V.; CASOLARI, R. P.; FRONTIN, S. O.; SOUSA, T. **Alternativas não convencionais para transmissão de energia elétrica: estado da arte**. [S.l.: s.n.], 2011.

- FAN, L.; FELIACHI, A. Robust TCSC control design for damping inter-area oscillations. In: POWER ENGINEERING SOCIETY SUMMER MEETING, 2001, 2001. **Anais. . .** [S.l.: s.n.], 2001. v.2, p.784–789 vol.2.
- FITZGERALD, A. E.; KINGSLEY, C.; UMANS, S. **Electric machinery**. 6.ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2003.
- FREEMAN, R. A.; KOKOTOVIC, P. V. **Robust nonlinear control design: state-space and lyapunov techniques**. 1.ed. Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser Basel, 1996. (Modern Birkhäuser Classics).
- GHANDHARI, M. Application of control Lyapunov functions to static VAr compensator. In: CONTROL APPLICATIONS, 2002. PROCEEDINGS OF THE 2002 INTERNATIONAL CONFERENCE ON, 2002. **Anais. . .** [S.l.: s.n.], 2002. v.1, p.1–6 vol.1.
- GHANDHARI, M.; ANDERSSON, G.; HISKENS, I. A. Control Lyapunov functions for controllable series devices. **IEEE Transactions on Power Systems**, [S.l.], v.16, n.4, p.689–694, Nov 2001.
- GHANDHARI, M.; ANDERSSON, G.; PAVELLA, M.; ERNST, D. A control strategy for controllable series capacitor in electric power systems. **Automatica**, [S.l.], v.37, n.10, p.1575 – 1583, 2001.
- GRUNBAUM, R.; HALVARSSON, P.; JONES, P. Series compensation for increased power transmission capacity. In: POWER ELECTRONICS, MACHINES AND DRIVES (PEMD 2010), 5TH IET INTERNATIONAL CONFERENCE ON, 2010. **Anais. . .** [S.l.: s.n.], 2010. p.1 –6.
- HINGORANI, N. G. High Power Electronics and flexible AC Transmission System. **IEEE Power Engineering Review**, [S.l.], v.8, n.7, p.3–4, July 1988.
- HINGORANI, N. G. FACTS-flexible AC transmission system. In: AC AND DC POWER TRANSMISSION, 1991., INTERNATIONAL CONFERENCE ON, 1991. **Anais. . .** [S.l.: s.n.], 1991. p.1–7.
- HINGORANI, N.; GYUGYI, L. **Understanding FACTS Concepts and Technology of Flexible AC Transmission Systems**. [S.l.]: New York : IEEE Press, 2000. 432p.
- IEEE. Load representation for dynamic performance analysis [of power systems]. **IEEE Transactions on Power Systems**, [S.l.], v.8, n.2, p.472–482, May 1993.
- IEEE. Proposed terms and definitions for flexible AC transmission system (FACTS). **IEEE Transactions on Power Delivery**, [S.l.], v.12, n.4, p.1848 –1853, oct 1997.
- JURDJEVIC, V.; QUINN, J. Controllability and stability. **Journal of Differential Equations**, [S.l.], v.28, n.3, p.381 – 389, 1978.

- KHALIL, H. **Nonlinear Systems**. 3.ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2002. (Pearson Education).
- KIMBARK, E. Improvement of System Stability by Switched Series Capacitors. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, [S.l.], v.PAS-85, n.2, p.180–188, feb. 1966.
- KOKOTOVIC, P.; KHALI, H.; O'REILLY, J. **Singular Perturbation Methods in Control: analysis and design**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999. (Classics in Applied Mathematics).
- KUIAVA, R. **Controle robusto de dispositivos FACTS para o amortecimento de oscilações em sistemas elétricos de potência**. 2007. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Universidade de São Paulo EESC, São Carlos São Paulo.
- KUNDUR, P. **Power System Stability and Control**. New York, NY: McGraw-Hill, 1994. 1176p.
- LEE, C.-T.; CHU, C.-C.; CHENG, P.-T. A New Droop Control Method for the Autonomous Operation of Distributed Energy Resource Interface Converters. **IEEE Transactions on Power Electronics**, [S.l.], v.28, n.4, p.1980–1993, April 2013.
- LI, X. Y. Nonlinear controller design of thyristor controlled series compensation for damping inter-area power oscillation. **Electric Power Systems Research**, [S.l.], v.76, p.1040–1046, 2006.
- LIU, Q.; VITTAL, V.; ELIA, N. LMI pole placement based robust supplementary damping controller (SDC) for a thyristor controlled series capacitor (TCSC) device. In: POWER ENGINEERING SOCIETY GENERAL MEETING, 2005. IEEE, 2005. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2005. p.1381 – 1386 Vol. 2.
- LU, L.-Y.; CHU, C.-C. Robust consensus-based droop control for multiple power converters in isolated micro-grids. In: CIRCUITS AND SYSTEMS (ISCAS), 2014 IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON, 2014. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2014. p.1820–1823.
- MATHUR, R.; VARMA, R. **Thyristor-Based FACTS Controllers for Electrical Transmission Systems**. 1.ed. [S.l.]: Wiley-IEEE Press, 2002.
- MIOTTO, E. L. **Análise da Estabilidade Dinâmica de Sistemas Elétricos de Potência Multimáquinas com Dispositivos FACTS TCSC e Controladores Robustos**. 2010. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina.
- MONTICELLI, A. **Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica**. São Paulo, SP: Edgard Blücher Ltda., 1983.

- MONTICELLI, A.; GARCIA, A. **Introdução a Sistemas de Energia Elétrica**. Campinas, SP: UNICAMP, 2003.
- NATARAJAN, R. **Power System Capacitors**. [S.l.]: CRC Press, 2005. 576p.
- NELSON, R.; BIAN, J.; RAMEY, D.; LEMAK, T.; RIETMAN, T.; HILL, J. Transient Stability Enhancement With Facts Controllers. In: AC AND DC POWER TRANSMISSION, SIXTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON (CONF. PUBL. NO. 423), 1996. **Anais...** [S.l.: s.n.], 1996. p.269 –274.
- NOROOZIAN, M.; ADERSSON, G. Damping of power system oscillations by use of controllable components. **IEEE Transactions on Power Delivery**, [S.l.], v.9, n.4, p.2046 –2054, oct 1994.
- NOROOZIAN, M.; GHANDHARI, M.; ANDERSSON, G.; GRONQUIST, J.; HISKENS, I. A robust control strategy for shunt and series reactive compensators to damp electromechanical oscillations. **IEEE Transactions on Power Delivery**, [S.l.], v.16, n.4, p.812 –817, oct 2001.
- PADIYAR, K. R. **FACTS CONTROLLERS IN POWER TRANSMISSION AND DISTRIBUTION**. 1st.ed. [S.l.]: Department of Electrical Engineering, Indian Institute of Science, Bangalore-560 012., 2007. 548p.
- PAI, M.; PADIYAR, K.; RADHAKRISHNA, C. Transient Stability Analysis of Multi-Machine AC/DC Power Systems Via Energy-Function Method. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, [S.l.], v.PAS-100, n.12, p.5027–5035, Dec 1981.
- PAL, B.; CHAUDHURI, B. **ROBUST CONTROL IN POWER SYSTEMS**. [S.l.]: Springer, 2005. 190p.
- PASERBA, J.; MILLER, N.; LARSEN, E.; PIWKO, R. A thyristor controlled series compensation model for power system stability analysis. **IEEE Transactions on Power Delivery**, [S.l.], v.10, n.3, p.1471 –1478, jul 1995.
- POSHTAN, M.; SINGH, B. N.; RASTGOUFARD, P. A Nonlinear Control Method for SSSC to Improve Power System Stability. **Control**, [S.l.], 2006.
- RAMOS, R. A.; ALBERTO, L. F. C.; BRETAS, N. G. **Modelagem de Máquinas Síncronas Aplicada ao Estudo de Estabilidade de Sistemas Elétricos de Potência**. 1.ed. [S.l.: s.n.], 2000. 78p.
- RAMOS, R. A.; KUIAVA, R.; FERNANDES, T. C. C.; PATACA, L. C.; MANSOUR, M. R. **IEEE PES Task Force on Benchmark Systems for Stability Controls: report on the 68-bus system (new england / new york test system)**. versão 4.0.

- RENCHER, A. C.; SCHAAALJE, G. B. **Linear Models in Statistics**. 2.ed. [S.l.]: Wiley, 2008.
- RIBEIRO, Y. C. S.; ALBERTO, L. F. C. Use of Sum of Squares Programming to find Generalized Energy Functions. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], 2016. (Submitted paper).
- RODRIGUES, H.; ALBERTO, L.; BRETAS, N. On the invariance principle: generalizations and applications to synchronization. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, [S.l.], v.47, n.5, p.730 –739, may 2000.
- ROUCO, L.; PAGOLA, F. An eigenvalue sensitivity approach to location and controller design of controllable series capacitors for damping power system oscillations. **IEEE Transactions on Power Systems**, [S.l.], v.12, n.4, p.1660 –1666, nov 1997.
- SASTRY, S. **Nonlinear systems: Analysis, stability, and control**. New York, NY: Springer-Verlag, 1999.
- SILVA, F.; ALBERTO, L.; BRETAS, N. Extended Lyapunov function for power systems with transmission losses. In: IEEE POWER TECH CONFERENCE PROCEEDINGS, 2003, Bologna. **Anais. . . IEEE**, 2003. v.3, p.6 pp. Vol.3–.
- SILVA, F.; ALBERTO, L.; LONDON J.B.A., J.; BRETAS, N. Smooth perturbation on a classical energy function for lossy power system stability analysis. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**, [S.l.], v.52, n.1, p.222–229, Jan 2005.
- SILVA, F. H. **Relatorio de Atividades de Pós - Doutorado**. [S.l.: s.n.], 2006.
- SILVA, F. H.; ALBERTO, L. F.; BRETAS, N. G. Função energia generalizada uniforme de controle para estabilização de sistema não lineares com incertezas. **CBA: Congresso Brasileiro de Automatica**, [S.l.], p.5234–5240, 06 2010.
- SILVA, F. H.; GUEDES, R. B.; ALBERTO, L. F.; BRETAS, N. G. Função energia generalizada de controle para estabilização de sistemas não lineares. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, [S.l.], v.20, p.133 – 145, 06 2009.
- SIQUEIRA, D.; ALBERTO, L.; BRETAS, N. Generalized energy functions for a class of lossy networking preserving power system models. In: CIRCUITS AND SYSTEMS (IS-CAS), 2015 IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON, 2015. **Anais. . . [S.l.: s.n.]**, 2015. p.926–929.

- SIQUEIRA, D. S.; ALBERTO, L. F. C.; CHIANG, H.-D.; BRETAS, N. G. Towards Generalized Energy Functions for Electric Power Systems with Power Converters. **IEEE Transactions on Power Systems**, [S.l.], 2017. (Submitted paper).
- SON, K.; PARK, J. On the robust LQG control of TCSC for damping power system oscillations. **IEEE Transactions on Power Systems**, [S.l.], v.15, n.4, p.1306–1312, 2000.
- SONTAG, E. D. A Lyapunov-Like Characterization of Asymptotic Controllability. **SIAM Journal on Control and Optimization**, [S.l.], v.21, n.3, p.462–471, 1983.
- SONTAG, E. D. A universal construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization. **Systems & Control Letters**, [S.l.], v.13, n.2, p.117 – 123, 1989.
- STOER, J.; BULIRSCH, R. **Introduction to Numerical Analysis**. [S.l.]: Springer, 2002. (Texts in Applied Mathematics).
- SUBRAMANIAN, D.; DEVI, R. Application of TCSC Power Oscillation Damping controller to enhance power system dynamic performance. In: POWER ELECTRONICS, DRIVES AND ENERGY SYSTEMS (PEDES) 2010 POWER INDIA, 2010 JOINT INTERNATIONAL CONFERENCE ON, 2010. **Anais. . .** [S.l.: s.n.], 2010. p.1 –5.
- SUSUKI, Y.; HIKIHARA, T.; CHIANG, H.-D. Stability boundaries analysis of electric power system with dc transmission based on differential-algebraic equation system. **IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences**, [S.l.], v.E87-A, n.9, p.2339–2346, Sep. 2004.
- SWIFT, F.; WANG, H. Application of the controllable series compensator in damping power system oscillations. **Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings-**, [S.l.], v.143, n.4, p.359 –364, jul 1996.
- TARANTO, G.; CHOW, J. A robust frequency domain optimization technique for tuning series compensation damping controllers. **IEEE Transactions on Power Systems**, [S.l.], v.10, n.3, p.1219 –1225, aug 1995.
- TSOLAS, N.; ARAPOSTATHIS, A.; VARAIYA, P. A structure preserving energy function for power system transient stability analysis. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, [S.l.], v.32, n.10, p.1041–1049, Oct 1985.
- VENKATASUBRAMANIAN, V.; JI, W. Coexistence of four different attractors in a fundamental power system model. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, [S.l.], v.46, n.3, p.405–409, Mar. 1999.

- WANG, H.; SWIFT, F.; LI, M. A unified model for the analysis of FACTS devices in damping power system oscillations. II. Multi-machine power systems. **IEEE Transactions on Power Delivery**, [S.l.], v.13, n.4, p.1355–1362, oct 1998.
- WANG, Z.; MEI, S.; PANG, X. Study on passivity-based control of TCSC. **Proceedings. International Conference on Power System Technology**, [S.l.], p.1918–1922, 2002.
- YANG, N.; LIU, Q.; MCCALLEY, J. TCSC controller design for damping interarea oscillations. **IEEE Transactions on Power Systems**, [S.l.], v.13, n.4, p.1304–1310, nov 1998.
- YANG, N.; LIU, Q.; MCCALLEY, J. TCSC controller design for damping interarea oscillations. **IEEE Transactions on Power Systems**, [S.l.], v.13, n.4, p.1304–1310, nov 1998.
- YUAN, Y.; SUN, Y.; CHENG, L. Design of Delayed Input Wide-Area FACTS Controller Using Genetic Algorithm. **Control**, [S.l.], p.1–6, 2007.
- ZHANG, L.; YE, B.; JIANG, Q.; CAO, Y. Application of Multi-Objective Evolutionary Programming in Coordinated Design of FACTS Controllers for Transient Stability Improvement. **Electrical Engineering**, [S.l.], p.2085–2089, 2006.
- ZHANG, X.; REHTANZ, C.; PAL, B. **Flexible AC Transmission Systems: modelling and control**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2012. (Power Systems).
- ZHU, L.; CAI, Z.; NI, Y.; LAN, Z.; GAN, D. A novel controller design for STATCOM based on the concept of area center of inertia. In: THIRD INTERNATIONAL CONFERENCE ON ELECTRIC UTILITY DEREGULATION AND RESTRUCTURING AND POWER TECHNOLOGIES, 2008., 2008. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2008. p.1281–1286.
- ZULKIFLI, S. A.; CHING, K. B.; HAMDAN, R.; IBRAHIM, N. A. Study of Poles And Zeros Arrangement Method for PID Controller on TCSC. **Distribution**, [S.l.], n.1, 2008.