UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

ANA PAULA MIJOLARO

Sincronização de uma classe de Sistemas não-
lineares Acoplados com Aplicações em Sistemas
Elétricos de Potência

São Carlos

2008

Ana Paula Mijolaro

**SINCRONIZAÇÃO DE UMA CLASSE DE
SISTEMAS NÃO-LINEARES ACOPLADOS COM
APLICAÇÕES EM SISTEMAS ELÉTRICOS DE
POTÊNCIA**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Sistemas Elétricos de Potência

Orientador: Prof. Luís F.C. Alberto

Co-Orientador: Prof. Newton G. Bretas

São Carlos

2008

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

M636s Mijolaro, Ana Paula
Sincronização de uma classe de sistemas não-lineares acoplados com aplicações em sistemas elétricos de potência / Ana Paula Mijolaro ; orientador Luís Fernando Costa Alberto, co-orientador Newton G. Bretas. -- São Carlos, 2008.

Tese (Doutorado-Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas Elétricos de Potência) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2008.

1. Sincronização. 2. Sistemas elétricos de potência - coerência. 3. Estabilidade. 4. Atratores não globais. 5. *Clusters*. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Bacharel **ANA PAULA MIJOLARO**

Tese defendida e julgada em 11/08/2008 perante a Comissão Julgadora:

Prof. Associado **LUÍS FERNANDO COSTA ALBERTO (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) Aprovada

Prof. Associado **LAURENCE DUARTE COLVARA**
(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" /UNESP/Campus de Ilha Solteira) Aprovada

Prof. Dr. **RICARDO EGYDIO DE CARVALHO**
(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" /UNESP/Campus de Rio Claro) Aprovada

Prof. Associado **ZHAO LIANG**
(Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação/USP) Aprovada

Prof. Titular **VILMA ALVES DE OLIVEIRA**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) Aprovada

Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*Aos meus pais,
pela dedicação, carinho e paciência.*

Agradecimentos

Ao querido Professor Luís pela orientação, ensinamentos, formação, críticas, sugestões, paciência, sensibilidade e bondade.

Ao Professor Bretas pela co-orientação, por todo incentivo, pelos bons conselhos, pela oportunidade.

À FAPESP – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pela bolsa de estudo concedida.

Aos membros da Banca Examinadora pelas contribuições na elaboração da versão corrigida.

Aos colegas do LACo (Laboratório de Análise Computacional) pelas contribuições diretas ou indiretas. Em especial, à minha amiga Carol, pela amizade e pela “Terapia do Abraço”, que foi muito importante em alguns momentos deste doutorado.

Aos “colegas de carona”, pelas conversas e amizades criadas.

À minha amiga Simone pela ajuda e incentivo durante todo este período.

À minha família, que desde sempre vem me apoiando em todos os sentidos para alcançar meus objetivos. Em especial, ao Tadeu, que me suporta mesmo nos momentos mais difíceis, me apoiando, consolando, enfim, sendo um verdadeiro companheiro.

“De todos os meios que conduzem à sorte,
os mais seguros são a perseverança e o
trabalho.”

Louis Reybaud

Resumo

Neste trabalho, estudou-se a sincronização de uma classe de sistemas dinâmicos não-lineares acoplados. Do ponto de vista teórico, apresentam-se resultados que fornecem condições suficientes sobre o campo vetorial e estimativas dos parâmetros de acoplamentos que garantem sincronização de um conjunto de soluções de uma classe de sistemas não-lineares acoplados. Diferentemente da grande maioria dos resultados existentes na literatura de sincronização de sistemas não-lineares acoplados, os resultados propostos nesta tese podem ser aplicados para demonstrar sincronização em sistemas que não possuem atratores globais, incluindo casos “instáveis”, onde as soluções são não-limitadas. Quando o sistema não possui atrator global, foi utilizado um resultado, também proposto nesta tese, que fornece estimativas uniformes de atratores, para estimar conjuntos positivamente invariantes contidos na região de sincronização do sistema. Os resultados teóricos propostos foram empregados para demonstrar sincronização em um sistema formado por dois pêndulos acoplados e também por dois sistemas de Duffing acoplados. Do ponto de vista aplicado, estuda-se o problema de coerência de geradores em sistemas elétricos de potência. Valendo-se dos resultados teóricos desta tese, um índice foi proposto para detectar e identificar geradores fracamente coerentes, os chamados *clusters*. A metodologia de análise de coerência proposta nesta tese não requer grande esforço computacional e poderia ser utilizada em aplicações em tempo real. Os resultados mostraram que a análise deste índice fornece, a priori, sem a necessidade de simulações numéricas, informações importantes sobre a presença de acoplamento forte entre as máquinas, a localização dos pontos de equilíbrio instáveis de controle, assim como a existência de modos de instabilidade combinados.

Palavras-Chave: Sincronização, coerência, estabilidade, atratores não globais, *clusters*.

Abstract

Synchronization of a class of coupled non-linear systems is studied in this work. From the theoretical point of view, we present synchronization results that provide sufficient conditions on the vector field and estimates of the coupling parameters that guarantee synchronization. Differently from the existing approaches in the nonlinear systems literature, our results can be applied to demonstrate synchronization in systems that do not have global attractors, including even “unstable” cases, where the solutions are unbounded. When the system does not globally synchronize, a result that provides uniform estimates of attractors is used to present an estimate of a positively invariant set contained in the synchronization region. The theoretical results are applied to demonstrate synchronization between two nonlinear pendulums and two coupled Duffing’s systems. From the applied point of view, we study the problem of coherency between generators in electrical power systems. Using the theoretical results of this thesis, an index is proposed to detect and identify groups of weakly-coherent generators, the so called clusters. The proposed coherency analysis methodology proposed in this text does not require a great computational effort and is suitable for online applications. Our results have shown that this index analysis provides important information about the strong coupling between the generators, the location of the controlling unstable equilibrium points and the existence of combined unstable modes.

Key-words: Synchronization, coherency, stability, non global attractors, clusters.

Lista de Figuras

2.1	Interpretação geométrica do Princípio de Invariância de LaSalle.	21
2.2	Interpretação geométrica da Extensão do Princípio de Invariância.	24
2.3	Funções a , b e c do Teorema 2.14.	26
2.4	Interpretação geométrica do Princípio de Invariância Uniforme	27
2.5	Relação entre as funções a , b e V do Teorema 2.15. B_I é um subconjunto de A_I enquanto B_L é um subconjunto de A_L .	31
2.6	Ilustração do Teorema 2.15. O conjunto B_L é um conjunto invariante de A_L . Além disso, trajetórias começando em B_L alcançam o conjunto B_I e depois não deixam o conjunto A_I . O conjunto B_L faz o papel de uma região de estabilidade enquanto A_I é uma estimativa do atrator.	32
4.1	Ilustração do conjunto Λ no plano $\mathbb{R}^2$. Verifica-se que a diagonal $D := \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2, y_1 = y_2\}$ está contida no conjunto Λ .	48
4.2	A região em cinza é o conjunto dos parâmetros K_2 e K_I , onde o Teorema 3.3 garante sincronização do sistema (4.1)–(4.2). Neste caso, $m=2$, $M=4$ e $\mu=1$.	51
4.3	Curvas de nível da função V dada pela expressão (4.4) para o exemplo dos pêndulos acoplados, com $C_I=2$; $P=3$, $D_I=1$, $K_I=2.1$, $K_2=2.55$ e $\tau=0.06$. As projeções das duas trajetórias no plano $\mathbb{R}^2$ do sistema (4.1)–(4.2) são mostradas na figura. Ambas sincronizam quando $t \rightarrow \infty$. A curva de nível verde representa o maior conjunto invariante contido no conjunto $\Lambda := \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 < 2\pi/3\}$ que é a estimativa do atrator.	53
4.4	Ilustração no domínio do tempo das duas soluções do sistema (4.1)–(4.2) que foram projetadas na Fig.4.3. Em ambos os casos, sincronização é observada.	54
4.5	A) Trajetória Projetada quando o sistema não possui parâmetros idênticos: A órbita tende a um ponto próximo da origem. A sincronização não é perfeita, conforme verificado na ampliação desta figura no retângulo próximo à origem. B) Trajetória de (4.1)-(4.2) para os parâmetros: $K_I=2.1$, $K_2=2.55$, $P_1=3.3$, $P_2=3.9$, $C_1=2.3$, $C_2=1.93$, $D_1=1.0$, e $D_2=0.8$. Na parte ampliada pode ser visto que as trajetórias ficam próximas quando o tempo cresce. A sincronização não é perfeita, pois os parâmetros dos subsistemas 1 e 2 são próximos, mas não idênticos. A condição inicial para a trajetória 3 é $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (2.0, 5.5, 3.5, -2.5)$.	55

4.6	Sincronização do Sistema de Duffing. Em A) mostra-se a sincronização na evolução temporal das trajetórias. Em B) verifica-se que a diferença entre o subsistema 1 e 2 decresce quando $t \rightarrow \infty$. Em C) apresenta-se o comportamento complexo de duas trajetórias sincronizadas no plano $x(t), y(t)$.	57
4.7	Soluções do Sistema (4.8). Em A) os parâmetros do sistema são idênticos $C_1 = C_2 = 2$, e $P_1 = P_2 = 3$. Em B), tem-se $C_1 = 2$, $C_2 = 1.4$, $P_1 = 2.6$ e $P_2 = 3$. Nos dois casos, a constante de acoplamento é $K_1 = 2$. Verifica-se sincronização perfeita em A) e em B) a diferença entre as trajetórias é da ordem da diferença dos parâmetros dos sistemas.	60
5.1	Sistema de duas máquinas versus Barramento Infinito.	71
5.2	Curvas de nível da energia potencial para o sistema de duas máquinas e um barramento infinito, $P_1=0.8$, $P_2=1.5$, $C_1=1.7$, $C_2=2.0$ e $M_1=M_2=1$. Pontos extremos da função energia potencial correspondem a equilíbrios do sistema (5.1).	73
5.3	Sistema teste de 7 geradores e 10 barras do CIGRÉ.	76
5.4	Simulações dos ângulos dos rotores no domínio do tempo, para o Sistema CIGRÉ 7 geradores e 10 barras da Figura 5.3. a) Tempo de abertura = 0.2s b) Tempo de abertura = 0.5s. Neste caso, os ângulos dos rotores são medidos com relação a referência síncrona. A contingência é um curto trifásico que ocorre nas vizinhanças da barra 6 e o defeito é isolado pela eliminação da linha 4-6.	78
5.5	Comportamento das diferenças angulares dos geradores do sistema em regime permanente do Sistema CIGRÉ de 7 geradores e 10 barras da Figura 5.3.	80
5.6	Comportamento das diferenças angulares dos geradores do sistema da Fig. 5.3, para condições pré-falta, com uma alteração fictícia da potência mecânica injetada do gerador 7. A expressão da potência mecânica do gerador em questão é dada pela equação (5.2)	81
5.7	Simulação do comportamento dos ângulos no sistema gradiente reduzido associado ao sistema original da Figura 5.3, considerando o TESTE 3. a) perturbação fictícia no gerador 7. b) perturbação fictícia no gerador 6.	83
5.8	<i>Cluster</i> identificado pelo índice de coerência $I^*(i, j)$ da equação (5.15) para o sistema da Figura 5.3.	94
5.9	Sistema teste de 10 geradores e 39 barras do IEEE (<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.</i>).	95
5.10	Simulações no domínio do tempo do sistema teste de 10 geradores e 39 barras. À esquerda: ângulos de todos geradores de 0 a 5s. À direita: ângulos dos gerados fortemente acoplados, ou seja, pares de máquinas (1,3) e (6,7). Falta de 2s de duração na barra 22 do sistema da Figura 5.9 e eliminação do defeito através da eliminação da linha	99

	21-22.	
5.11	Simulações no domínio do tempo do sistema teste de 10 geradores e 39 barras. À <i>esquerda</i> : ângulos de todos os geradores de 0 a 5s. À <i>direita</i> : ângulos dos gerados fortemente acoplados, ou seja, os pares de máquinas (1,3) e (6,7). Falta de 2s de duração na barra 34 e configuração do pós-falta igual a do pré-falta.	101
5.12	Simulações no domínio do tempo do sistema teste de 10 geradores e 39 barras. À <i>esquerda</i> : Simulação dos ângulos de todos os geradores de 0 a 5s. À <i>direita</i> : ângulos dos gerados fortemente acoplados, ou seja, ângulos dos gerados apenas para os pares de máquinas (1,3) e (6,7). Falta de 2s de duração na barra 25 e configuração do pós-falta igual a do pré-falta.	101
5.13	Simulações no domínio do tempo do sistema teste de 10 geradores e 39 barras. À <i>Esquerda</i> : Simulação dos ângulos de todos os geradores de 0 a 5s. À <i>direita</i> : Simulação dos ângulos dos gerados apenas para os pares de máquinas (1,3) e (6,7). Falta de 2s de duração na barra 29 e configuração do pós-falta igual a do pré-falta.	102
5.14	Simulações no domínio do tempo do sistema teste de 10 geradores e 39 barras. À <i>Esquerda</i> : Simulação dos ângulos de todos os geradores de 0 a 5s. À <i>direita</i> : Simulação dos ângulos dos gerados apenas para os pares de máquinas (1,3) e (6,7). Falta de 2s de duração na barra 20 e configuração do pós-falta igual a do pré-falta.	102
5.15	Simulações no domínio do tempo do sistema teste de 10 geradores e 39 barras. À <i>Esquerda</i> : Simulação dos ângulos de todos os geradores de 0 a 5s. À <i>direita</i> : Simulação dos ângulos dos gerados apenas para os pares de máquinas (1,3) e (6,7). Falta de 2s de duração na barra 6 e configuração do pós-falta igual a do pré-falta.	103
5.16	<i>Clusters</i> identificados no sistema teste de 10 geradores e 39 barras do IEEE através da análise do índice $I^*(i, j)$ da equação (5.15).	104
5.17	Projeção da trajetória em falta e da trajetória do sistema gradiente reduzido no plano (δ_6, δ_7) quando esta ocorre na barra 35 (teste <i>g</i>). Verifica-se que a aproximação do ponto de equilíbrio de controle obtido pelo algoritmo BCU está distante da diagonal e o mesmo falha na obtenção do ponto de equilíbrio instável de controle	105
5.18	Projeção da trajetória em falta e da trajetória do sistema gradiente reduzido no plano (δ_6, δ_7) quando esta ocorre na barra 22 e a eliminação da linha 21-22 ocorre depois de 2s (teste a). Verifica-se que a aproximação do ponto de equilíbrio de controle obtido pelo algoritmo BCU está próximo da diagonal e o método converge e encontra corretamente o ponto de equilíbrio instável de controle.	106
A.1	Transformada de Park.	117

A.2	Uma máquina ligada um sistema elétrico.	118
A.3	Circuito equivalente à Figura A.2 com gerador representado pelo modelo clássico	118
A.4	Sistema de duas máquinas versus Barramento Infinito.	119
A.5	Sistema Multimáquinas.	123

Lista de Tabelas

5.1	Dados do Sistema.	77
5.2	Dados da Linha de Transmissão.	77
5.3	Matrizes C_{ij} e D_{ij} do sistema pós-falta do sistema de 7 geradores e 10 barras do CIGRÉ.	93
5.4	Índice $I^*(i, j)$ dado em (5.11) para o sistema teste do CIGRÉ (Figura 5.3) na configuração pós-falta. Considerou-se um curto trifásico ocorrendo nas vizinhanças da barra 6 e o defeito é isolado pela eliminação da linha 4-6.	93
5.5	Dados do Sistema Teste 2.	96
5.6	Dados da Linha de Transmissão.	96
5.7	Matrizes C_{ij} e D_{ij} do Sistema Teste de 10 geradores e 39 barras.	97
5.8	Índice $I^*(i, j)$ dado em (5.11) para o sistema teste do IEEE (Figura 3.4). Considerou-se um curto trifásico ocorrendo nas vizinhanças da barra 22 e o defeito é isolado eliminando a linha 21-22 do sistema.	98
5.9	Índice $I^*(i, j)$ dado em (5.11) para o sistema teste do IEEE (Figura 3.4) para o caso em que o sistema pós-falta é igual ao pré-falta.	100

Lista de Abreviaturas

BCU	<i>Boundary Controlling Unstable Equilibrium Point</i>
CIGRÉ	<i>International Council on Large Electric Systems</i>
CUEP	<i>Controlling Unstable Equilibrium Point</i>
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.</i>
PEBS	<i>Potential Energy Boundary Surface</i>
SEP	<i>Sistema Elétrico de Potência</i>

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}$	Espaço dos números reais
$\mathbb{R}^n$	Espaço vetorial de dimensão N
$\bar{\Omega}_l$	Fecho do conjunto Ω_l .
$\tilde{\underline{Y}}_{bus}$	Representa o sistema como um todo: nó interno das forças eletromotrizes dos geradores.
$\dot{\omega}_u$	Valor em p.u. da velocidade angular do campo
δ	Parâmetro auxiliar ou ângulo do rotor
ε	Parâmetro auxiliar ou precisão do sincronismo
η	Vetor Parâmetros auxiliar
λ	Vetor de Parâmetros auxiliar ou Autovalores de uma matriz
ω	Velocidade Angular ou frequência de Oscilação
Λ	Conjunto no qual os parâmetros variam ou conjunto onde se estuda sincronização
ξ	Variável de estado
α	Função auxiliar ou ângulo de defasagem entre a referência fixa e girante no tempo $t=0$
β	Função auxiliar
ϕ	Função auxiliar
γ	Parâmetro auxiliar
μ	Parâmetro auxiliar
τ	Parâmetro auxiliar
θ	Ângulo mecânico com relação ao eixo de referência fixa.
$\varphi(t, x_0)$	Solução da equação diferencial com condição inicial x_0
ω_{0m}	Velocidade mecânica síncrona do sistema
Γ_1	Conjunto auxiliar
Γ_2	Conjunto auxiliar
ζ_1	Parâmetro auxiliar
ζ_2	Parâmetro auxiliar
ζ_3	Parâmetro auxiliar

χ_c	Vetor de parâmetros de acoplamento
ω_e	Velocidade elétrica.
χ_i	Vetor de parâmetros
ω_i	Desvio da frequência da máquina i com relação à velocidade síncrona
Ω_L	Estimativa da Bacia de Atração na extensão do Princípio de Invariância e no Princípio de Invariância Original.
Ω_l	Componente da estimativa do atrator na extensão do Princípio de Invariância e no Princípio de Invariância Original.
ω_m	Velocidade mecânica.
$\delta_m(t)$	Ângulo mecânico formado entre o rotor e a referência girante.
ω_s	Frequência síncrona.
a	Estimativa uniforme inferior da Função de Lyapunov
A	Conjunto Auxiliar
A_L	Conjunto que contém a bacia de atração no Princípio de Invariância Uniforme e no Resultado de Estabilidade para sistemas não-autônomos.
A_l	Componente da estimativa do atrator no Princípio de Invariância Uniforme e no Resultado de Estabilidade para sistemas não-autônomos.
B	Maior conjunto invariante contido em E e susceptâncias do sistema elétrico.
b	Estimativa uniforme superior da Função de Lyapunov
B_L	Estimativa da Bacia de Atração no Princípio de Invariância Uniforme e no Resultado de Estabilidade para sistemas não-autônomos.
B_l	Conjunto Auxiliar
$\tilde{Y}_{bus}$	Matriz que representa o sistema como um todo: nó interno das forças eletromotrizes dos geradores, cargas constantes do sistema e rede elétrica.
c	Estimativa uniforme da Função de Lyapunov
C	Conjunto no qual a derivada da Função de Lyapunov é maior que zero, ou conjunto no qual a função c é menor que zero ou parâmetro do sistema elétrico.
D	Conjunto diagonal ou coeficiente de amortecimento das máquinas

	síncronas ou parâmetro auxiliar.
E	Estimativa do atrator na extensão do Princípio de Invariância e no Princípio de Invariância Original ou Módulo da força eletromotriz do gerador.
E_{∞}	Módulo da tensão no barramento infinito.
E_i	Módulo da força eletromotriz na máquina i .
E_L	Estimativa do Atrator no Princípio de Invariância Uniforme
F	Função auxiliar.
g	Função auxiliar ou parâmetro auxiliar.
G	Função auxiliar.
G_i+jB_i	Amitância da linha que interliga a máquina i com o barramento infinito.
$G_{ij}+jB_{ij}$	Amitância da linha que interliga as duas máquinas ou admitância de transição.
h	Função auxiliar ou parâmetro auxiliar.
H	Função auxiliar ou constante de inércia nas máquinas síncronas.
I	Índice para análise e detecção de coerência de geradores.
i_0	Corrente estacionária.
$i_{d'}$	Projeção das correntes de fase ao longo do eixo direto.
i_q	Projeção das correntes de fase ao longo do eixo em quadratura.
J	Momento de inércia do conjunto rotor-turbina
K	Constante de acoplamento auxiliar
K_1	Constante de acoplamento.
K_2	Constante de acoplamento.
L	Parâmetro auxiliar ou Valor da Função de Lyapunov que define os conjuntos A_L , B_L , E_L e Ω_L .
l	Valor da Função de Lyapunov que define os conjuntos A_l , B_l , E_l e Ω_L .
$\bar{A}_L$	Fecho do conjunto A_L .
m	Parâmetro auxiliar.
M	Parâmetro auxiliar ou momento de inércia.
M_i	Coeficiente de inércia das máquinas síncronas.
M_m	Momento angular do rotor.
P	Potência mecânica líquida aplicada à máquina síncrona.

p	Número de pares de pólos da máquina.
P_{li}	Potência ativa que representa a carga ativa da barra i (pré-falta).
P_{mi}	Potência mecânica injetada no gerador i .
Q_{li}	Potência reativa que representa a carga reativa da barra i .
s	Valor mínimo da constante de acoplamento que garante sincronização.
S_B	Potência operante trifásica base da máquina
$S_c(L)$	Conjunto positivamente invariante no resultado de estabilidade para sistemas não-autônomos.
$S_c(l)$	Conjunto auxiliar.
t	Tempo.
T	Constante de amortecimento assíncrono ou Transformador.
T_e	Torque Elétrico.
T_{eu}	Valor em p.u. do torque elétrico
T_m	Torque Mecânico.
T_{mu}	Valor em p.u. do torque mecânico
T_r	Torque resultante.
V	Função de Lyapunov.
V_i	Tensão da barra i .
V_p	Energia potencial.
w	Parâmetro auxiliar.
x	Variável de estado.
x_0	Condição Inicial.
x'_d	Reatância síncrona.
x_s	Ponto de equilíbrio.
y	Variável de estado.
$\underline{Y}_1$	Matriz de admitâncias nodal $n \times n$ que contém dados do sistema referentes às n barras dos geradores conectadas entre si.
$\underline{Y}_2$	Matriz de admitâncias $n \times m$ referentes às n barras dos geradores às m barras das cargas do sistema.
$\underline{Y}_3$	Representa a matriz de admitâncias $m \times n$ referentes às n barras dos geradores às m barras das cargas do sistema.
$\underline{Y}_4$	Matriz de admitâncias $m \times m$ que contém dados do sistema das m barras de cargas conectadas entre si.

$\underline{Y}_{bus}$	Matriz que representa a topologia do sistema de transmissão
Y_L	Matriz $(m+n) \times (m+n)$ que representa as cargas do sistema.
z	Variável de estado com incertezas.
Z_T	Impedância equivalente

Sumário

1. Introdução aos Estudos de Sincronização e Coerência de Geradores em Sistemas Elétricos de Potência.....	1
2. Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias.....	11
2.1. Estimativas de Soluções de Equações Diferenciais Não-Lineares.....	11
2.1.1 Fórmula da Variação das Constantes.....	12
2.1.2 Desigualdade de Gronwall Generalizada	12
2.2. Alguns Resultados de Estabilidade	13
2.2.1 Resultados de Estabilidade de Sistemas Autônomos	13
2.2.2 Definições de Estabilidade e Resultados de Lyapunov para Sistemas Não-Autônomos.....	17
2.3 Princípio de Invariância e suas Generalizações.....	19
2.4 Estimativas Uniformes para Sistemas Não-Autônomos.....	28
3. Resultados de Sincronização de Sistemas dinâmicos.....	35
4. Aplicações dos Resultados de Sincronização.....	47
4.1. Pêndulos Acoplados	47
4.2. Equação de Duffing Forçada	55
4.3. Sistemas de Primeira Ordem Acoplados	58
5. Sincronização e Coerência de Geradores em Sistemas Elétricos de Potência	63
5.1. Introdução ao Estudo de Estabilidade Transitória em Sistemas Elétricos de Potência.....	65
5.2. Coerência de Geradores.....	69
5.3. Análise de Coerência e Estudos dos Pontos de Equilíbrio num Sistema de Duas Máquinas versus um Barramento Infinito	71
5.4. Coerência Fraca, Equilíbrios e Modos Combinados de Instabilidade.....	75

5.5. Coerência Fraca e Equilíbrios em um Sistema de Duas Máquinas versus Barramento Infinito	84
5.6. Detecção de Grupos de Geradores Coerentes	89
6. Conclusões e Perspectivas Futuras	107
APÊNDICE:	
A – Modelagem em Sistemas elétricos de Potência	111
A.1. Introdução	111
A.2. Dinâmica do Gerador	111
A.2.1 Modelo Clássico	115
A.3. Sistema de Duas Máquinas Versus Barramento Infinito	119
A.4. Sistemas Multimáquinas	120
A.5. Gradiente Reduzido	127
Referências	129

1. Introdução aos Estudos de Sincronização e Coerência de Geradores em Sistemas Elétricos de Potência

O fenômeno de sincronização está presente em muitas situações da vida diária. Segundo o Novo Dicionário Aurélio (1999), a palavra *sincronização* significa “Ato ou efeito de manter uma operação em conjugação ou entrosamento com outra.” O senso comum nos diz que dois entes sincronizam se, depois de certo tempo, eles apresentam comportamento semelhante ou ocorrem ao mesmo tempo. A sincronização do som e imagem em um filme é exemplo deste fenômeno em nosso cotidiano.

O pesquisador holandês Christian Huygens (✠1629–‡1695), muito famoso por seus estudos em óptica, construção de telescópios e relógios, provavelmente foi o primeiro cientista a observar e descrever o fenômeno de sincronização em 1665. Acompanhando, durante algum tempo, o comportamento de um par de relógios de pêndulo que havia construído, ele fez uma observação que achou interessante o suficiente para incluí-la em sua próxima carta ao seu pai. Ele notou que os pêndulos suspensos numa parede comum sempre se movimentavam em sentidos opostos. Huygens ficou intrigado e testou o fenômeno perturbando o ritmo – e os relógios sempre retornavam ao mesmo tipo de movimento relativo. Sendo um cientista, ele procurou por uma explicação para o que chamou de “simpatia dos dois relógios”. Ele concluiu que cada pêndulo causava uma movimentação imperceptível na parede na qual estavam conectados, e que este movimento forçava o outro pêndulo a mover-se em sincronia com o primeiro. Uma vez sincronizados, suas forças opostas se cancelariam e por isso a parede permaneceria imóvel. Para detalhes deste relato, veja PIKOVSKY; *et al* (2001).

De fato, Huygens estava correto. Exceto por algumas diferenças na terminologia, esta é exatamente a explicação que possuímos hoje para o fenômeno de sincronização mútua. Em terminologia moderna, os pêndulos do experimento descrito anteriormente sincronizaram em *anti-fase* devido ao *acoplamento* entre os pêndulos. O que faz o estudo da sincronização tão interessante é que ela tem, atualmente, uma gama de aplicações bem grande.

Na metade do século XIX, em seu famoso tratado: “A Teoria do Som”, RAYLEIGH (1945) descreveu um fenômeno interessante de sincronização em sistemas acústicos: ele além de observar a sincronização mútua quando dois tubos distintos, mas similares, começavam a tocar em harmonia, verificou também os efeitos da superposição construtiva e destrutiva das oscilações sonoras. De lá para cá, estudos mostraram que a sincronização espontânea entre osciladores está presente em toda a parte, das células ao sistema solar, respondendo inclusive por vários mecanismos vitais que governam o funcionamento de nosso organismo.

O primeiro estudo científico de sincronização na área de Engenharia Elétrica ocorreu, provavelmente, em 1920 quando os pesquisadores W.H. Eccles e J. H. Vincent acoplaram dois geradores cujas freqüências eram levemente diferentes e demonstraram que o acoplamento forçava os sistemas a vibrarem com uma freqüência comum. Eles estudaram sistematicamente, teoricamente e experimentalmente, a sincronização de válvulas (ou geradores) termiônicas, equipamentos elétricos bastante simples baseados num tubo de vácuo que produz corrente alternada. Este novo estágio na investigação da sincronização trouxe avanços importantes no campo da Engenharia Elétrica, pois na época, os dispositivos citados previamente eram os elementos básicos de sistemas de rádio comunicação ROSENBLUM e PIKOVSKY (2003).

Poucos anos depois, APPLETON (1922) e VAN DER POL (1927) repetiram e

estenderam o experimento com os geradores de Eccles e Vincent e deram o primeiro passo teórico no estudo da sincronização. Considerando o caso mais simples, eles mostraram que a frequência do gerador pode ser sincronizada por um sinal externo de uma frequência levemente diferente daquela frequência original que era experimentada pelo gerador. De fato, este fenômeno, universal em sistemas não-lineares, atualmente é ainda observado e estudado em diversos campos das ciências aplicadas como, por exemplo, em Física, Biologia, Engenharias Mecânica e Elétrica, etc.

Na Biologia, por exemplo, os estudos de sincronização vão desde aqueles relacionados com células que controlam o batimento do coração TORRE (1976), YPEY *et al.* (1980), PROKHOROV *et al.* (2003), passam pelo estudo de músculos intestinais de mamíferos REUSS (1996) e vão até estudos sobre a sincronização de ciclos menstruais em mulheres que dividem a mesma casa, mesma universidade, etc. SKANDHAN *et al.* (1979).

Tão surpreendente quanto a descoberta de Huygens, foi a descoberta de FUJISAKA e YAMADA (1983). Neste trabalho verificou-se que a sincronização ocorre mesmo entre sistemas caóticos, que têm por característica primária a sensibilidade a variações em suas condições iniciais.

Atualmente, um exemplo em que os conceitos de sincronização têm sido empregados com muito sucesso é em sistemas de comunicação segura para codificação/decodificação de informação. Nesta linha de pesquisa, a partir da década de 1990, têm destaque os trabalhos de CUOMO e OPPENHEIM (1993), onde os autores descrevem um circuito analógico para a implementação do sistema caótico de LORENZ (1963), onde os autores estudaram mensagens criptografadas e decodificadas através de lasers caóticos e o trabalho de YANG e CHUA (1997) que estudaram a estabilidade de sistemas de controle impulsivo para sincronização de sistemas caóticos. TRESSER e

WOLFORK (1995), GAMEIRO (1999) e recentemente BOWONG, *et al.* (2006) discutem outros resultados relacionados à sincronização de sistemas caóticos utilizados em sistemas de comunicação. Em 1993, Roy e seu grupo FABINY, *et al.* (1993) observaram coerência e sincronização entre lasers acoplados e investigaram as dependências e correlações das intensidades destes lasers tanto teoricamente como experimentalmente.

Em 1997, PECORA *et al.* (1997) realizaram uma revisão sobre os fundamentos da sincronização de sistemas caóticos, apresentaram os principais resultados da literatura de sincronização de sistemas caóticos e também realizaram testes com diversas configurações de acoplamento com as disponíveis aplicações em circuitos caóticos e hipercaóticos*.

Experimentalmente, em ZHANG, *et al.* (1999) os autores mostram que dois pêndulos caóticos parametricamente excitados apresentam um tipo de comportamento hipercaótico. Eles também apresentaram um esquema de realimentação periódica para sincronizar os dois subsistemas de pêndulos. Encontraram condições sobre os expoentes de Lyapunov que garantem a sincronização dos subsistemas. Também na linha de pêndulos caóticos excitados, BAKER, *et al.* (1999) trabalharam com pêndulos caóticos unidirecionalmente acoplados.

Outros trabalhos apresentam o estudo de sincronização de sistemas bidirecionalmente acoplados e sincronização em anti-fase USHIO (1995) e PIKOVSKY *et al.* (1996). Estudos de sincronização parcial aparecem, por exemplo, em ZHAO (2003) que estudou a sincronização e *clustering* aplicados à análise de segmentação de imagens, e sincronização generalizada ABARBANEL *et al.* (1996) e KOCAREV e PARLITZ (1996).

* Sistemas hipercaóticos são aqueles com mais de um expoente de Lyapunov positivo.

Outra linha de pesquisa onde a sincronização tem sido aplicada com sucesso é na estimação de parâmetros de sistemas não-lineares CARI, ALBERTO e BRETAS (2006) e PONOMARENKO (2007), YU, *et al.*(2007) e HUANG e GUO (2004).

Nossa motivação em estudar sincronização vem do estudo de coerência não-linear entre geradores em sistemas elétricos de potência. Em WU e TSAI (1983), os autores estudaram coerência entre geradores utilizando análises linearizadas. Entretanto, a análise não-linear pode fornecer informações importantes que não podem ser extraídas da análise linearizada. Uma destas informações é a localização dos pontos de equilíbrio instáveis do sistema. A localização dos mesmos poderá, por exemplo, auxiliar a análise de estabilidade transitória via métodos diretos baseados no ponto de equilíbrio instável de controle[†]. Apesar deste efetivo interesse por sincronização em diversas áreas da ciência, ainda não existe um suporte matemático satisfatório para estudar a sincronização de muitos sistemas não-lineares acoplados. Alguns métodos matemáticos para estudar sincronismo de uma classe de sistemas acoplados foram apresentados por AFRAIMOVICH, *et al.* (1986). Resultados abstratos, robustez com relação aos parâmetros e dissipatividade uniforme foram obtidos em RODRIGUES (1996) e AFRAIMOVICH e RODRIGUES (1998). Para sistemas de dimensão infinita podem-se encontrar alguns resultados em RODRIGUES (1996), CARVALHO, *et al.* (1998), HALE (1997; n.d.) e AFRAIMOVICH, *et al.* (1997), onde neste último, os autores provaram que a sincronização em uma malha de osciladores não-lineares, linearmente acoplados com seus vizinhos, ocorre desde que o acoplamento seja dissipativo e os coeficientes de acoplamento sejam suficientemente grandes. Os autores provam também

[†] O ponto de equilíbrio instável de controle (do inglês: *controlling unstable equilibrium point*) foi proposto por CHIANG *et al.* (1994) nos estudos de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência através dos chamados métodos diretos. Este ponto consistiria no ponto de equilíbrio, que na direção da falta, seria o responsável pela definição da estabilidade. Mais precisamente, os autores definiram que o ponto de equilíbrio instável de controle é o ponto de equilíbrio instável, cuja variedade estável contém o *exit point*, ou ponto onde a trajetória de falta deixa a região de estabilidade. Para maiores detalhes da técnica de como encontrar o CUEP, vide CHIANG *et al.* (1994).

que o tamanho de um atrator é comparável à diferença dos parâmetros entre os dois subsistemas analisados. Aplicações mais recentes destes resultados podem ser encontradas em LABOURIAU e RODRIGUES (2003), onde os autores estudaram sincronização em uma classe de equações diferenciais que modelam a atividade elétrica em sistemas biológicos, como, por exemplo, o impulso nervoso, músculos e células pancreáticas.

Embora a motivação para o estudo de sincronização tenha sido a análise de coerência entre geradores, neste trabalho estudar-se-ão problemas mais gerais, principalmente na análise de sincronismo entre sistemas não-lineares com dimensão finita. Em muitos trabalhos nesta área RODRIGUES (1996) e AFRAIMOVICH e RODRIGUES (1998), LABOURIAU e RODRIGUES (2003), AFRAIMOVICH, *et al.* (1997), o princípio de análise de sincronismo entre sistemas acoplados segue, basicamente, os seguintes passos:

- a) Em uma primeira etapa, uma estimativa do atrator global, uniforme com relação ao parâmetro de acoplamento, é obtida. Para isto, uma das alternativas é o uso de uma Função de Lyapunov adequada. Com isto, tem-se a garantia de que todas as soluções entram em tempo finito em um conjunto limitado;
- b) De posse da informação de limitação das trajetórias, estuda-se o sincronismo em uma segunda etapa.

Uma limitação do procedimento de análise de sincronismo descrito anteriormente é que o sincronismo só pode ser estudado na presença de atratores estáveis globais. Nesta pesquisa, estuda-se a sincronização de sistemas em situações em que a estabilidade não é garantida e/ou a sincronização global não acontece. Além da análise de sincronização em sistemas não necessariamente estáveis, estuda-se o problema de

sincronização parcial, ou seja, estudam-se também subconjuntos sincronizados (*clustering*) na presença de um grande número de sistemas acoplados.

O estudo de sincronismo de sistemas instáveis e a determinação de subconjuntos sincronizados (clusters) dentro de uma rede de sistemas acoplados são motivados pela análise não-linear de coerência (sincronização de geradores) em sistemas elétricos de potência ALBERTO (2000), BRETAS e ALBERTO (2000). Como, em geral, a dimensão de sistemas de potência é muito grande, a análise da coerência pode ser usada para reduzir o esforço computacional em estudos de estabilidade pela agregação de geradores coerentes em um único gerador equivalente. Este fará parte do equivalente dinâmico do sistema, que consiste em um número menor de barras, transformadores, linhas, geradores e seus controles, resultando em uma economia de tempo de processamento e reproduzindo, sem perda significativa de precisão, o comportamento dinâmico da parte de interesse do sistema original.

O estudo de coerência para a detecção de geradores coerentes e construção de modelos agregados foi muito utilizado na década de 80. A necessidade deste tipo de estudo na época era a viabilização, via redução de modelos, de estudos de estabilidade de sistemas de grande porte devido aos recursos computacionais limitados da época.

Atualmente, o interesse pela análise de coerência é mais amplo. Ainda do ponto de vista de redução de modelos, a análise de coerência é importante. Neste caso, a redução do modelo, via uso de modelos agregados, ainda é utilizada para o projeto de controladores de amortecimento, RAMOS, ALBERTO e BRETAS (2004-a, 2004-b, 2003), quando técnicas tais como LMI's (*Linear Matrix Inequalities*) são empregadas para o projeto. Para estes estudos, os recursos computacionais ainda são limitados e requerem o uso de modelos agregados.

Existem também relatos de oscilações não-lineares (que não são detectadas via modelos linearizados) que surgem da interação entre geradores fortemente acoplados em QIU, *et al.* (2004), KYRIAKIDES *et al.* (2004) e ZHU, *et al.* (2001). Estes geradores poderiam ser detectados via análise de coerência não-linear.

Alguns métodos foram propostos na literatura para identificar máquinas coerentes. Basicamente, eles são divididos em três tipos. Dois deles são baseados na linearização do modelo. O outro é baseado em simulações no domínio do tempo.

As análises linearizadas possuem a desvantagem de não capturar toda complexidade da dinâmica do Sistema Elétrico de Potência por utilizarem modelos linearizados. Já as simulações no domínio do tempo, embora possuam a vantagem de utilizar a análise não-linear, demandam grande esforço computacional e apenas um PVI (Problema de Valor Inicial) é analisado a cada simulação.

Neste trabalho, estudar-se-á coerência via técnicas de análise não-lineares. A motivação para tal estudo é obter informações auxiliares que poderiam agilizar a análise de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência de grande porte via métodos diretos. Dentre as informações que se espera obter, destacam-se a localização dos pontos de equilíbrio de controle e a presença de modos combinados de instabilidade. Uma vantagem das técnicas apresentadas nesta tese é que os algoritmos de análise não requerem simulações numéricas e cálculos complexos, como é o caso, por exemplo, do cálculo de autovetores em análises linearizadas.

Do ponto de vista teórico, esta pesquisa oferece duas contribuições principais. A primeira delas é um resultado de estabilidade uniforme para estudo de sistemas não-autônomos. Este resultado é útil e foi utilizado neste trabalho para estimar conjuntos positivamente invariantes que estão contidos dentro da região de sincronização do

sistema. A segunda é um resultado que fornece condições suficientes para garantir sincronização de dois subsistemas autônomos de segunda ordem com acoplamento não-linear. Este resultado é utilizado para demonstrar sincronização em um sistema formado por dois pêndulos acoplados e também de dois sistemas de Duffing acoplados. O resultado não exige a existência de um atrator global e não requer a demonstração de dissipatividade uniforme. As condições exigidas pelo resultado para garantir sincronização são satisfeitas para uma grande quantidade de sistemas físicos e além de provar sincronização, oferece uma estimativa suficiente das constantes de acoplamento que certifica a sincronização.

Do ponto de vista aplicado, os resultados teóricos de sincronização apresentados na primeira parte da tese são aplicados ao estudo de sincronização e coerência de geradores em sistemas elétricos de potência com o objetivo de identificar acoplamentos fortes entre geradores. Acoplamentos fortes são um indicativo da existência de modos de instabilidade combinados CHIANG *et al.* (1993), PAI (1989) e podem fornecer informações importantes a respeito da localização dos pontos de equilíbrio instáveis de controle CHIANG, *et al.* (1994) nas análises de estabilidade transitória via métodos diretos. Um índice que detecta grupos de geradores fracamente coerentes, os chamados *clusters*, em sistemas de potência com diversos geradores e interligações, é proposto. Este índice é testado em 2 sistemas elétricos de potência e através dele verificam-se a correlação entre a informação de coerência fraca e a localização dos pontos de equilíbrio de controle.

Quanto à organização desta tese, segue-se à seguinte ordem: no Capítulo 2 apresentam-se algumas definições e resultados de estabilidade para sistemas autônomos e não-autônomos que serão utilizados ao longo do texto. Além disso, apresenta-se um resultado novo de estabilidade para sistemas autônomos que será útil para estimar a região de sincronização de sistemas que não sincronizam globalmente. Em seguida, no

Capítulo 3 apresentam-se as definições de sincronização usadas nesta pesquisa e os resultados de sincronização para sistemas não-lineares acoplados propostos neste trabalho. O Capítulo 4 dedica-se à aplicação dos resultados apresentados nos Capítulos 2 e 3 em dois exemplos: Pêndulos acoplados e Sistemas de Duffing acoplados. No Capítulo 5 o problema de análise de coerência de geradores em sistemas de potência é revisitado e os resultados do Capítulo 3 são aplicados para propor um índice que detecta grupos de geradores coerentes. As conclusões do trabalho bem como as perspectivas futuras de trabalho são apresentadas no Capítulo 6.

2. Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias

Neste Capítulo, serão revisados alguns dos principais resultados de análise qualitativa de equações diferenciais ordinárias do tipo $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{x} = f(t, x)$, os quais serão utilizados neste texto. Começar-se-á com dois resultados importantes muito utilizados na literatura para estimar soluções de equações diferenciais ordinárias, são eles: a Fórmula da Variação das Constantes e a Desigualdade de Gronwall Generalizada. Em seguida, definições e resultados clássicos de estabilidade para sistemas autônomos e não-autônomos, tais como: Teorema de Lyapunov e Princípio de Invariância de LaSalle (e generalizações) são apresentados.

Para o caso de sistemas não-autônomos, será apresentado um **resultado inédito**, segundo nosso conhecimento, que fornece condições suficientes que garantem estimativas uniformes dos atratores de uma classe de sistemas que apresentam uma determinada estrutura. Este teorema é uma adaptação dos resultados apresentados em GAMEIRO e RODRIGUES (2001). Vale a pena ressaltar que este resultado será utilizado nas aplicações apresentadas no Capítulo 4 deste texto para estimar a região de sincronização num sistema formado por dois pêndulos não-lineares acoplados.

2.1. Estimativas de Soluções de Equações Diferenciais Não-Lineares

Nesta Seção, serão apresentados alguns resultados encontrados para estimar soluções de equações diferenciais ordinárias não-lineares. São estes: a Fórmula da Variação das Constantes e a Desigualdade de Gronwall Generalizada.

2.1.1 Fórmula da Variação das Constantes

A Fórmula da Variação das Constantes aparece na literatura de sistemas não-lineares como ferramenta para a resolução de equações diferenciais ordinárias da seguinte maneira:

Considere o seguinte sistema não-homogêneo:

$$\dot{y} = A(t)y + g(t, y) \quad (2.1)$$

onde $A(t)$ é uma matriz contínua e $g(t)$ é uma função contínua.

A Fórmula da Variação das Constantes afirma que se o sistema possui a forma (2.1), então, a solução deste sistema será dada por:

$$y(t) = e^{\int_0^t A(s)ds} y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s A(s)ds} g(\tau, y(\tau)) d\tau$$

Para a demonstração deste resultado, vide BRAUER e NOHEL (1969, p.72).

2.1.2 Desigualdade de Gronwall Generalizada

As desigualdades integrais aparecerem na literatura de sistemas não-lineares, como uma ferramenta para estimar as soluções de equações diferenciais ordinárias. GRONWALL (1919) apresentou uma destas desigualdades como segue:

Seja $\phi(t)$ tal que

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\phi(s)ds$$

onde $\phi(t)$ e $\alpha(t)$ são funções contínuas e $\beta(t) \geq 0$. Então para $t \geq t_0$, $\phi(t)$ satisfaz:

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(u)du} ds$$

Para a demonstração do resultado, vide DRAGOMIR (2003, p.1).

2.2. Alguns Resultados de Estabilidade

A teoria de estabilidade tem um papel central na teoria de sistemas dinâmicos. Existem diferentes definições de estabilidade na literatura, como por exemplo, estabilidade de pontos de equilíbrio, órbitas periódicas e estabilidade de entrada-saída. Nesta Seção estar-se-á interessado em apresentar a estabilidade de pontos de equilíbrio de sistemas autônomos que é geralmente caracterizada no sentido de Lyapunov. Lyapunov (1857-1918) foi um matemático e engenheiro russo que criou as bases desta teoria que hoje leva o seu nome.

2.2.1 Resultados de Estabilidade de Sistemas Autônomos

Inicialmente, será considerado o seguinte sistema autônomo:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.2)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^l . Um ponto $x_s \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio de (2.2) se $f(x_s) = 0$.

Denota-se por $\varphi(t, x_0)$ a solução de (2.2) com condição inicial em x_0 , ou seja, $\varphi(0, x_0) = x_0$.

Definição 2.1. *Um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é invariante com relação à (2.2) se, para todo $x_0 \in B$, $\varphi(t, x_0) \in B$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Nos próximos Capítulos da tese, a noção de invariância possui papel importante, especialmente no Capítulo 4, onde estimativas positivamente invariantes da região de

sincronização de sistemas acoplados são obtidas. Pontos de equilíbrio e órbitas periódicas são exemplos de conjuntos invariantes.

Definição 2.2. *Um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é positivamente (negativamente) invariante com relação à (2.2) se, para todo $x_0 \in B$, $\varphi(t, x_0) \in B$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ ($t \in \mathbb{R}_-$).*

Um conceito importante em estudos qualitativos de equações diferenciais ordinárias não-lineares são os conjuntos ω -limite e α -limite .

Definição 2.3. *Um ponto p pertence ao conjunto:*

- ω -limite de x_0 , $\omega(x_0)$, se existir uma seqüência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\varphi(t, x_0) \rightarrow p$ quando $t \rightarrow \infty$;
- α -limite de x_0 , $\alpha(x_0)$, se existir uma seqüência $t_n \rightarrow -\infty$ tal que $\varphi(t, x_0) \rightarrow p$ quando $t \rightarrow -\infty$.

Os conjuntos ω -limite e α -limite são conjuntos fechados e invariantes. Se $\varphi(t, x_0)$ é uma solução limitada para $t \geq 0$, então, além de fechado e invariante, o conjunto $\omega(x_0)$ é não-vazio, conexo, e $\varphi(t, x_0)$ tende para x_0 quando t tende para o infinito.

A seguir, define-se o conceito de estabilidade de pontos de equilíbrios de sistemas autônomos no sentido de Lyapunov.

Definição 2.4. *Um ponto de equilíbrio x_s do sistema (2.2) é (no sentido de Lyapunov):*

- Estável se dado um $\varepsilon > 0$ (arbitrariamente pequeno), existir um $\delta > 0$ tal que $\|\varphi(t, x_0) - x_s\| \leq \varepsilon$ para $t \geq 0$ sempre que $\|x_0 - x_s\| \leq \delta$.

- *Instável se não for estável;*
- *Assintoticamente estável se for estável e existir um $\eta > 0$ tal que $\varphi(t, x_0) \rightarrow x_s$ quando $t \rightarrow \infty$ sempre que $\|x_0 - x_s\| \leq \eta$.*

O conceito de estabilidade no sentido de Lyapunov é uma característica local do campo vetorial nas vizinhanças do ponto de equilíbrio. Embora esta informação seja importante, muitas vezes deseja-se estudar o comportamento global do sistema. Neste caso, o conceito de bacia de atração tem sua importância.

Definição 2.5. *A área de atração ou bacia de atração $A(x_s)$ de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável x_s é o conjunto de todas as condições iniciais cujas trajetórias tendem para x_s quando $t \rightarrow \infty$. Em linguagem de conjunto tem-se:*

$$A(x_s) := \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(t, x_0) \rightarrow x_s \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$$

A área de atração $A(x_s)$ de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável x_s é um conjunto aberto, conexo e invariante KHALIL (1996).

Definição 2.6. *Um ponto de equilíbrio x_s é globalmente assintoticamente estável se for assintoticamente estável e $A(x_s) = \mathbb{R}^n$.*

Em outras palavras, um ponto de equilíbrio x_s é globalmente assintoticamente estável se é estável e todas as trajetórias tendem para x_s quando $t \rightarrow \infty$.

A estabilidade de um ponto de equilíbrio pode ser estudada por linearização. A seguir, será apresentado um resultado que oferece condições suficientes sobre o sistema linearizado para garantir a estabilidade de um ponto de equilíbrio do sistema não linear.

Teorema 2.7. *Seja x_s um ponto de equilíbrio de (2.2) e suponha que $f:D \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja continuamente diferenciável, onde D é uma vizinhança do equilíbrio x_s . Seja*

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_s}$$

Então,

1. *O ponto de equilíbrio x_s é assintoticamente estável se $\text{Re} \lambda_i < 0$ para todos os autovalores de A .*
2. *O ponto de equilíbrio x_s é instável se $\text{Re} \lambda_i > 0$ para pelo menos um autovalor de A .*

A demonstração do resultado anterior pode ser encontrada em KHALIL (1996).

Lyapunov oferece uma alternativa para o estudo de estabilidade via o uso de uma função escalar auxiliar denominada função de Lyapunov. A seguir, apresenta-se o chamado Teorema de Lyapunov.

Teorema 2.8. *Seja $x_s=0$ um ponto de equilíbrio de (2.2). Seja $V:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável, tal que*

$$V(0)=0 \text{ e } V(x) > 0 \text{ em } \mathbb{R}^n - \{0\} \quad (2.3)$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0 \text{ em } \mathbb{R}^n - \{0\} \quad (2.4)$$

Então $x_s=0$ é estável. Além disso, se

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) < 0 \text{ em } \mathbb{R}^n - \{0\} \quad (2.5)$$

Então $x_s=0$ é assintoticamente estável.

A demonstração do Teorema 2.7 é encontrada em KHALIL (1996).

O Teorema de Lyapunov fornece condições suficientes, porém, não necessárias para se caracterizar os pontos de equilíbrio como estável e assintoticamente estável.

O resultado de Lyapunov tem a vantagem de estudar estabilidade sem resolver as equações diferenciais. Entretanto, uma das principais desvantagens é que este resultado não fornece nenhuma maneira sistemática de encontrar a Função de Lyapunov. A condição mais restritiva para encontrar tal função é que se exige que a derivada da Função de Lyapunov seja semi-definida negativa, ao longo das trajetórias do sistema. Em sistemas complexos, tais como os sistemas caóticos, dificilmente encontram-se funções que satisfaçam esta condição.

2.2.2 Definições de Estabilidade e Resultados de Lyapunov para Sistemas

Não-Autônomos

Considere o seguinte sistema não-autônomo:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.6)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 . Um ponto $x_s \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio de (2.2) se $f(t, x_s) = 0$.

Denota-se por $\varphi(t, t_0, x_0)$ uma solução de (2.6) definida para $t \geq 0$ com condição inicial em (t_0, x_0) .

Definição 2.9: Diz-se que $\varphi(t, t_0, x_0)$ é estável se dados $\varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que se $|x_0 - \varphi(t_0, x_0)| < \delta$, então $x(t, t_0, x_0)$ está definida para $t \geq t_0$ e $|x(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$, $\forall t \geq t_0$.

Pode ser mostrado que não há perda de generalidade em se estudar a estabilidade da solução nula. A estabilidade da solução $\varphi(t)$ de $\dot{x} = f(t, x)$ é equivalente à estabilidade da solução nula de $\dot{z} = F(t, z)$, onde $\dot{z} = f(t, \varphi(t, t_0, x_0) + z) - f(t, \varphi(t, t_0, x_0)) = F(t, z)$ com $F(t, 0) = 0$, KHALIL (1996). Em função desta equivalência, pode se definir, sem perda de generalidade, a estabilidade da solução nula.

Definição 2.10: O ponto de equilíbrio $x \equiv 0$ (ou solução nula) do sistema (2.6) é:

- **Estável** se dados $\varepsilon > 0$, e $t_0 \geq 0$, existir um $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que se $|x_0| < \delta$, então $x(t, t_0, x_0)$ está definida em $[t_0, \infty)$ e $|x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$, para $t \geq t_0$.
- **Uniformemente estável** se for estável com $\delta = \delta(\varepsilon)$ (independente de t_0).
- **Assintoticamente estável** se for estável e se dado $t_0 \geq 0$ existir $\rho = \rho(t_0) > 0$ tal que se $|x_0| < \rho$ então $x(t, t_0, x_0) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.
- **Uniformemente assintoticamente estável** se for uniformemente estável, assintoticamente estável com ρ independente de $t_0 \geq 0$ e se para cada $\eta > 0$ existir $T = T(\eta) > 0$ tal que $|x_0| < \rho$, então $|x(t, t_0, x_0)| < \eta$ para $t \geq t_0 + T$.
- **Instável** se não for estável.

O próximo teorema é uma extensão Teorema 2.8 para sistemas não-autônomos.

Teorema 2.11: *Seja $x=0$ um ponto de equilíbrio de (2.6) e $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$ uma vizinhança da origem. Seja $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável satisfazendo:*

$$\begin{aligned}\alpha_1(|x|) &\leq V(t, x) \leq \alpha_2(|x|) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) &\leq -\alpha_3(|x|)\end{aligned}$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in \Omega$, onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são funções contínuas definidas em $[0, r)$. Então, $x=0$ é um ponto de equilíbrio uniformemente assintoticamente estável.

Para demonstração do Teorema, veja KHALIL (1996).

É importante ressaltar que os estudos de Lyapunov se concentram em uma análise local do sistema dinâmico em torno do ponto de equilíbrio. O Princípio de Invariância de LaSalle e suas extensões, por sua vez, estudam o comportamento assintótico do sistema e fornecem uma estimativa da área de atração.

2.3 Princípio de Invariância e suas Generalizações

O Princípio de Invariância de LaSalle aparece como uma extensão da teoria de Lyapunov. Ele tem sido uma das ferramentas mais importantes para estudar o comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais. Este resultado foi primeiramente estabelecido e provado para equações diferenciais autônomas definidas em espaços de dimensão finita por LASALLE (1960a; 1960b). Uma versão deste Princípio será apresentada no Teorema 2.12. Generalizações do Princípio de Invariância propostas por RODRIGUES, ALBERTO e BRETAS (2000) são úteis para encontrar estimativas de atratores de sistemas autônomos não-lineares. Elas serão apresentadas nos

Teoremas 2.13 e 2.14. Inspirados nos Teoremas 2.13 e 2.14, propõe-se um resultado (Teorema 2.15) sobre estimativas uniformes de atratores em sistemas não-autônomos que será útil neste trabalho para obter estimativas da região de sincronização de sistemas acoplados.

Teorema 2.12 (Princípio de Invariância de LaSalle) *Sejam $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1 . Seja L uma constante real tal que $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) < L\}$ seja limitado. Admita que $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega_L$ e defina $E := \{x \in \Omega_L \mid \dot{V}(x) = 0\}$. Seja B o maior conjunto invariante contido em E . Então, toda solução de (2.2) iniciando em Ω_L converge para B quando $t \rightarrow \infty$.*

Este teorema foi demonstrado pela primeira vez por LASALLE (1960b). A demonstração do Teorema 2.12 é apresentada a seguir para que o leitor possa comparar com outras demonstrações que aparecerão ao longo do texto.

Demonstração ALBERTO (2000): Sejam $x_0 \in \Omega_L$ e $\varphi(t, x_0)$ a solução da equação diferencial com condição inicial x_0 em $t=0$. Seja $[0, t_+)$ o máximo intervalo de existência desta solução enquanto esta permanecer dentro de Ω_L . Então, $\dot{V}(\varphi(t, x_0)) \leq 0$ neste intervalo e $V(\varphi(t, x_0))$ é decrescente. Conseqüentemente $V(\varphi(t, x_0)) \leq V(x_0) < L$. Isto implica que $t_+ = \infty$ e o ω -limite $\omega(x_0)$ de $\varphi(t, x_0)$ está contido no conjunto $\{x \in \Omega_L \mid V(x) \leq V(x_0)\}$, o qual é um subconjunto compacto de Ω_L . Como $V(\varphi(t, x_0))$ é decrescente e inferiormente limitada, $V(\varphi(t, x_0)) \rightarrow v \in \mathbb{R}$, quando $t \rightarrow \infty$. Uma vez que $\omega(x_0)$ é um conjunto invariante de (2.2), tem-se que $V \equiv v$ em $\omega(x_0)$ e, portanto,

$\dot{V} \equiv 0$ em $\omega(x_0)$. Conclui-se, portanto, que $\varphi(t, x_0) \rightarrow \omega(x_0) \subset B$, quando $t \rightarrow \infty$. ■

Observe que o teorema não diz nada a respeito de como encontrar a função V . Na verdade, não existem métodos sistemáticos para encontrar uma função V , e encontrá-la é uma tarefa não trivial. Outro problema do Teorema 2.12 é que este apresenta condições para a existência de um conjunto atrativo, porém não garante estabilidade. Portanto, se as condições do Teorema 2.12 não são satisfeitas nada pode ser afirmado a respeito do comportamento das soluções de (2.2).

Para interpretar geometricamente este teorema, observe a Figura 2.1. O conjunto Ω_L é limitado de acordo com as hipóteses do Teorema 2.12. Dentro de Ω_L a derivada de V é não positiva ao longo das soluções de (2.2). O Teorema 2.12 garante que todas as soluções de (2.2) iniciando dentro de Ω_L tendem para o maior conjunto invariante contido em E .

Figura 2.1. Interpretação geométrica do Princípio de Invariância de LaSalle.

O Princípio de Invariância apresentado é um caso particular da extensão do princípio de invariância proposta por RODRIGUES, ALBERTO e BRETAS (2000).

Basicamente, permite-se que a derivada de V seja positiva em algumas regiões. Com estas condições menos restritivas, alguns problemas bastante complicados, que dificilmente eram tratados pela teoria convencional, podem ser tratados via a Extensão do Princípio de Invariância. Um exemplo deste tipo de problema são sistemas caóticos.

Teorema 2.13: (Extensão do Princípio de Invariância). *Sejam $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1 . Seja L uma constante tal que $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) < L\}$ seja limitado. Seja $C := \{x \in \Omega_L \mid \dot{V}(x) > 0\}$, e admita que $\sup_{x \in C} V(x) = l < L$. Defina $\bar{\Omega}_l = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq l\}$ e $E := \{x \in \Omega_L \mid \dot{V}(x) = 0\} \cup \bar{\Omega}_l$. Seja B o maior conjunto invariante de (2.2) contido em E . Então, toda solução de (2.2) iniciando em Ω_L converge para o conjunto invariante B quando $t \rightarrow \infty$.*

Além disto, se $x_0 \in \bar{\Omega}_l$, então $\varphi(t, x_0) \in \bar{\Omega}_l$ para todo $t \geq 0$ e $\varphi(t, x_0)$ tende para o maior conjunto invariante de (2.2) contido em $\bar{\Omega}_l$. A demonstração que se segue foi retirada de ALBERTO (2000).

Demonstração: Suponha que $x_0 \in \Omega_L$ e $x_0 \notin \bar{\Omega}_l$. Seja $\varphi(t, x_0)$ a solução da equação diferencial com condição inicial x_0 em $t=0$. Seja $[0, t_+)$ o máximo intervalo de existência desta solução enquanto esta permanece dentro de Ω_L . Admita inicialmente que a solução $\varphi(t, x_0)$ permaneça fora do conjunto $\bar{\Omega}_l$ para $t \in [0, t_+)$. Como $C \subset \bar{\Omega}_l$, então, $\dot{V}(\varphi(t, x_0)) \leq 0$ neste intervalo. Portanto, $V(\varphi(t, x_0))$ é decrescente neste intervalo e por consequência $V(\varphi(t, x_0)) \leq V(x_0) < L$. Isto implica que $t_+ = \infty$ e o ω -limite de $\varphi(t, x_0)$ está contido no conjunto $\{x \in \Omega_L \mid V(x) \leq V(x_0)\}$, o qual é um subconjunto compacto de Ω_L . Como $V(\varphi(t, x_0)) \rightarrow v \in \mathbb{R}$, quando $t \rightarrow \infty$. Uma vez que $\omega(x_0)$ é um conjunto

invariante de (2.2), tem-se que $V \equiv v$ em $\omega(x_0)$ e, portanto, $\dot{V} \equiv 0$ em $\omega(x_0)$. Assim, $\omega(x_0) \subset \Omega_L - C$. Logo, conclui-se que $\varphi(t, x_0) \rightarrow \omega(x_0)$, quando $t \rightarrow \infty$.

Admita agora que $x_0 \in \overline{\Omega}_l$. Então $V(x_0) \leq l$. Afirma-se que a solução $\varphi(t, x_0)$ permanece em $\overline{\Omega}_l$ para todo $t \in [0, t_+)$. Para provar isto, admita que exista um tempo $t^* > 0$ tal que $V(\varphi(t^*, x_0)) > l$. Então, existe um $s \in [0, t^*)$ tal que $V(\varphi(s, x_0)) = l$ e $V(\varphi(t, x_0)) > l$ para $t \in (s, t^*)$. Portanto, existe $\tilde{t} \in (s, t^*)$, tal que $\dot{V}(\tilde{t}) > 0$, o que contradiz o fato de que $\dot{V} \leq 0$ fora de $\overline{\Omega}_l \supset C$. Como antes, $t_+ = \infty$ e a solução permanece dentro de $\overline{\Omega}_l$ para $t \geq 0$. Portanto, o conjunto ω -limite é não vazio e a solução aproxima-se dele quando $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, o conjunto $\omega(x_0)$ é um subconjunto invariante que está contido em $\overline{\Omega}_l$. Portanto, a solução aproxima-se do maior conjunto invariante contido em $\overline{\Omega}_l$ quando $t \rightarrow \infty$. ■

Para interpretar geometricamente este teorema, observe a Figura 2.2. O conjunto Ω_L é limitado de acordo com as hipóteses do Teorema 2.13. Dentro de Ω_L , a derivada de V é não positiva ao longo das soluções, exceto dentro do conjunto C onde a mesma é positiva. Observe que por hipótese este conjunto nunca atinge a fronteira de Ω_L , uma vez que $l < L$. O Teorema 2.13 garante que todas as soluções de (2.2) iniciando dentro de Ω_L tendem para o maior conjunto invariante contido em E . Se em particular, o maior conjunto invariante contido em E estiver contido em $\overline{\Omega}_l$, então todas as soluções com condição inicial em Ω_L tendem para o maior conjunto invariante contido em $\overline{\Omega}_l$. Uma vez dentro de $\overline{\Omega}_l$, as soluções não saem deste conjunto o qual é uma estimativa do atrator. Dentro de $\overline{\Omega}_l$, dois comportamentos distintos podem ocorrer, ou as soluções

tendem para o conjunto $E := \{x \in \bar{\Omega}_l : \dot{V}(x) = 0\}$, ou as soluções permanecem entrando e saindo do conjunto C indefinidamente.

Figura 2.2. Interpretação geométrica da Extensão do Princípio de Invariância.

Ainda para sistemas autônomos, o caso onde se desejam tratar sistemas que possuam incertezas nos parâmetros foi considerado.

Considere o seguinte sistema autônomo:

$$\dot{x} = f(x, \lambda) \quad (2.8)$$

onde $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$ é um vetor de parâmetros do sistema e $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.14. (Princípio de Invariância Uniforme). *Suponha que $f: \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $V: \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ sejam funções de classe C^1 e que $a, b, c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sejam funções contínuas. Admita que para qualquer $x \in \mathbb{R}^n \times \Lambda$, tem-se:*

$$a(x) \leq V(x, \lambda) \leq b(x) \quad e \quad -\dot{V}(x, \lambda) \leq c(x)$$

Para $L \in \mathbb{R}$ seja $A_L := \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) < L\}$. Admita que A_L seja não-vazio e

limitado. Considere os conjuntos $B_L := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) < L\}$, $C := \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) < 0\}$ e $E_L := \{x \in A_L : c(x) = 0\}$.

Suponha agora que $\sup_{x \in C} b(x) \leq l < L$ e defina os conjuntos $A_l := \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \leq l\}$ e

$$B_l := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) \leq l\}.$$

Se λ é um parâmetro fixo em Λ e todas as condições anteriores são satisfeitas, então para $x_o \in B_L$ a solução $\varphi(t, x_o, \lambda)$ está definida no intervalo $[0, \infty)$ e as seguintes conclusões são obtidas:

- 1) Se $x_o \in B_l$ então $\varphi(t, x_o, \lambda) \in A_l$ para $t \geq 0$ e $\varphi(t, x_o, \lambda)$ tende para o maior conjunto invariante de (2.8) contido em A_l , quando $t \rightarrow \infty$.
- 2) Se $x_o \in B_L - B_l$, então $\varphi(t, x_o, \lambda)$ tende para o maior conjunto invariante de (2.8) contido em $A_l \cup E_L$.

Observe que a uniformidade é garantida pela existência das funções a , b e c , as quais são independentes dos parâmetros do sistema.

A demonstração do Teorema 2.14 pode ser encontrada em detalhes em RODRIGUES, ALBERTO e BRETAS (2001).

Para interpretar geometricamente este resultado, observe a Figura 2.3 onde estão ilustradas as relações entre funções a , b e c , e as estimativas obtidas com o Teorema 2.14.

Figura 2.3. Funções a , b e c do Teorema 2.14.

Observe que o conjunto C contém o conjunto onde $\dot{V}$ é positiva independentemente do parâmetro $\lambda \in \Lambda$. Portanto, ao calcular o $\sup_{x \in C} b(x)$, obtém-se um número l que é sempre maior que $\sup_{(x, \lambda) \in \{(x, \lambda) \in R^n \times \Lambda \mid \dot{V}(x, \lambda) > 0\}} (V(x, \lambda))$. De posse deste número, utiliza-se a curva de nível l da função a para obter-se uma estimativa do atrator.

A Figura 2.4 ilustra a aplicação do Princípio de Invariância Uniforme. Observe que $B_l \subset A_l$ e $B_L \subset A_L$. A noção de invariância, neste caso, é um pouco diferente. Nesta ilustração, x_1 e x_3 pertencem à B_L . O conjunto B_L , por sua vez, não é positivamente invariante, entretanto, pode-se afirmar que as soluções iniciando dentro de B_L não saem de A_L . Este é o caso das soluções iniciando em x_1 e x_3 mostrados na Figura 2.4. No entanto, nada se pode afirmar a respeito das soluções iniciando em $A_L - B_L$. A solução iniciando em x_2 , por exemplo, abandona A_L e não retorna mais.

Figura 2.4. Interpretação geométrica do Princípio de Invariância Uniforme.

Todas as soluções iniciando em B_L garantidamente tendem para o maior conjunto invariante contido em $A_L \cup E_L$. Se por ventura alguma destas soluções entrar em B_1 , então pode-se afirmar que esta nunca mais sairá de $A_1 \supset B_1$, embora B_1 não seja positivamente invariante, como o caso da solução com condição inicial em x_3 . É importante salientar que a ilustração da Figura 2.4 não apresenta o caso mais geral. Neste exemplo o conjunto $A_1 \subset B_L$, entretanto, esta não é uma condição necessária. De qualquer maneira, o conjunto A_1 é uma estimativa do atrator e B_L uma estimativa da bacia de atração, ou seja, A_1 contém o atrator independentemente dos parâmetros do sistema e B_L está contido dentro da bacia de atração independentemente dos parâmetros do sistema. Os Teoremas 2.12 e 2.13 são casos particulares deste último. Maiores informações a respeito deste teorema podem ser encontradas em ALBERTO (2000), RODRIGUES, ALBERTO e BRETAS (2001).

2.4 Estimativas Uniformes de Atratores para Sistemas Não-Autônomos

Uma vez exibidos os principais resultados de estabilidade de Lyapunov e os resultados de LaSalle, apresentar-se-á um resultado sobre estimativas uniformes com relação à um conjunto de variáveis para sistemas não-autônomos. Este resultado será útil na Seção 4.1 para estimar a região de sincronização de sistemas acoplados que não sincronizam globalmente. Embora os resultados de invariância para sistemas autônomos apresentados na Seção anterior sejam bastante conhecidos e úteis em diversos problemas, estes resultados não puderam ser utilizados nos nossos exemplos não autônomos. Daí a necessidade dos resultados que serão apresentados a seguir.

Considere a seguir o sistema dinâmico não-linear:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, z) \\ \dot{z} = g(x, z) \end{cases} \quad (2.9)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de variáveis de interesse $z \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de variáveis auxiliares[‡]. Os estados auxiliares de (2.9) foram tratados como incertezas, isto é, admitiu-se a existência dos conjuntos Γ_1 e Γ_2 tais que $z(t) \in \Gamma_1$ e $\dot{z}(t) \in \Gamma_2$ para qualquer $t \geq 0$. Então, foi estudado o comportamento assintótico da variável de interesse x uniformemente com respeito à variável z . Mais precisamente, foi considerado o seguinte sistema não-linear não-autônomo:

$$\dot{x} = f(x, z(t)) \quad (2.10)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$.

A seguir, será apresentado um resultado que fornece condições suficientes que a existência de atratores uniformes do sistema de interesse de (2.10). Uma vez que a

[‡] Embora o sistema seja representado pelas variáveis x e z , muitas vezes há interesse em estudar apenas o comportamento da variável x e por isso é conveniente, geralmente, tratarmos a variável z como incertezas, ao invés de tentarmos resolver o sistema com todas as variáveis.

variável z é incerta e pode variar continuamente, os conceitos de ponto de equilíbrio e atratores globais não podem ser aplicados. Entretanto, pode-se garantir que trajetórias começando próximas de um determinado conjunto, permanecem próximas deste conjunto para um tempo positivo.

Teorema 2.15. ALBERTO e CHIANG (2007) *Considere o sistema (2.9) e suponha a existência dos conjuntos Γ_1 e Γ_2 tais que $z(t) \in \Gamma_1$ e $\dot{z}(t) \in \Gamma_2$ para qualquer $t \geq 0$. Se as seguintes condições são satisfeitas:*

(S1) *Existem funções contínuas $a, b, c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e uma função C^1 $V: \mathbb{R}^n \times \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $a(x) \leq V(x, z) \leq b(x)$ para todo $z(t) \in \Gamma_1$ e*

$$-\dot{V}(x, z) := -\frac{\partial V}{\partial z} \dot{z} - \frac{\partial V}{\partial x} f(x, z) \geq c(x) \text{ para todo } z(t) \in \Gamma_1 \text{ e } \dot{z}(t) \in \Gamma_2$$

(S2) *Existe um nível de valor $L \in \mathbb{R}$ tal que os conjuntos de nível $B_L := \{x \in \mathbb{R}^n \mid b(x) < L\} \subset A_L := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a(x) < L\}$ são limitados;*

(S3) $\sup_{x \in C} b(x) < l < L$, onde $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid c(x) \leq 0\}$

Então:

(i) *toda trajetória de (2.9) iniciando em B_L não sai do conjunto $\overline{A_L}$, o fecho[§] do conjunto A_L , para $t > 0$. Isto equivale a dizer que o conjunto $\overline{A_L}$ é um conjunto positivamente invariante do conjunto B_L com respeito à (2.9).*

(ii) *toda trajetória de B_L entra no conjunto $B_l := \{x \in \mathbb{R}^n \mid b(x) < l\}$*

[§] $\overline{A_L}$ significa o “fecho” do conjunto A . Ou seja, o conjunto formado pelos pontos aderentes de A .

(iii) toda trajetória de (2.9) iniciando em B_l não sai do conjunto $\overline{A_l}$ para $t > 0$. Isto equivale a dizer que o conjunto $\overline{A_l}$ é um conjunto positivamente invariante do conjunto B_l com respeito à (2.9).

Demonstração: Esta prova é uma adaptação de alguns resultados apresentados em GAMEIRO e RODRIGUES (2001). Considere uma condição inicial $(t_0, x_0) \in B_l$. Pode-se afirmar que a trajetória $x(t) := \varphi(t, z(t), t_0, x_0)$ de (2.9) não abandona o conjunto $\overline{A_l}$ para $t \geq t_0$ enquanto $z(t) \in \Gamma_1$ e $\dot{z}(t) \in \Gamma_2$. Com $z(t) \in \Gamma_1$ e $\dot{z}(t) \in \Gamma_2$ para $t \geq t_0$, suponha a existência de um tempo $t^* \geq t_0$ tal que $x(t^*) := \varphi(t^*, z(t^*), t_0, x_0) \notin A_l$. Então, pela hipótese (S1), $V(t^*) \geq a(t^*) > l$. Seja $t_1 := \inf \{t_a \in \mathbb{R} \mid x(t) \notin B_l \text{ para todo } t \in [t_a, t^*]\}$. Pela definição de t_1 , sabe-se que $x(t) \notin C \subset B_l$ para todo $t \in [t_1, t^*]$ e pela continuidade de b , sabe-se que $V(t_1) \leq b(t_1) = l$. Portanto, no intervalo (t_1, t^*) , existe um tempo t_2 tal que $\dot{V} > 0$. Mas isto é contraditório, uma vez que $x(t) \notin C$ para todo $t \in (t_1, t^*)$ e C é a única região onde a função energia V não é necessariamente decrescente. Isto prova (iii).

Seguindo argumentos similares e usando o fato de que $L > l$, prova-se (i). Para provar (ii), considerar-se uma condição inicial $(t_0, x_0) \in B_L$. De (i), sabe-se que $x(t)$ não sai do conjunto A_L para $t \geq t_0$. Portanto, pela hipótese (S2), $x(t)$ é limitada e, como consequência da hipótese (S1), $V(t)$ é limitada para $t \geq t_0$. Admita, por contradição, a existência de uma função $z(t) \in \Gamma_1$ com $\dot{z}(t) \in \Gamma_2$ para $t \geq t_0$ tal que $x(t) := \varphi(t, z(t), t_0, x_0) \notin C \subset B_l$ para todo $t \geq t_0$. Como $C \subset B_l$, a partir da hipótese (S3), tem-se a existência de um número real positivo α tal que $\dot{V}(t) < -\alpha < 0$ para $t \geq t_0$. Então,

$$V(t) = \int_0^t \dot{V}(s) ds \leq V(t_0) - \alpha(t - t_0).$$
 Mas isso é contraditório, já que $V(t)$ eventualmente

será menor que l . Isto prova (ii). ■

A existência das funções a , b e c satisfazendo as condições do Teorema 2.15 garante a uniformidade com respeito à incerteza z . A Figura 2.5 ilustra a relação entre as funções a , b e V . Os conjuntos A_l e B_l fazem o papel de “atrator” estável no sentido que as trajetórias que alcançam B_l não deixarão A_l . Por outro lado, o conjunto B_L faz o papel da bacia de atração, já que toda trajetória iniciando em B_L alcança B_l . Do ponto de vista prático, se $B_l \subset A_l$ são conjuntos suficientemente pequenos, então o sistema é considerado praticamente estável. A Figura 2.6 ilustra o Teorema 2.15. Em muitas aplicações, o conjunto A_L não é limitado ou conexo, entretanto os resultados do Teorema 2.15 ainda são válidos para cada componente conexa de A_L .

Figura 2.5. Relação entre as funções a , b e V do Teorema 2.15. B_l é um subconjunto de A_l enquanto B_L é um subconjunto de A_L .

Figura 2.6. Ilustração do Teorema 2.15. O conjunto B_L é um conjunto invariante de A_L . Além disso, trajetórias começando em B_L alcançam o conjunto B_I e depois não deixam o conjunto A_I . O conjunto B_L faz o papel de uma região de estabilidade enquanto A_I é uma estimativa do atrator.

A seguir, apresenta-se uma versão mais fraca do resultado apresentado pelo Teorema 2.15. Neste resultado não foi considerado a existência das funções a e b que delimitam a função energia $V(x,z)$, conforme mostrado na Figura 2.5. Esta versão será importante para aplicações deste trabalho, cujo interesse está em estimar a região de sincronização de um sistema formado por dois pêndulos acoplados. A aplicabilidade do Corolário 2.16 será vista na Seção 4.1 do Capítulo 4. Segundo nosso conhecimento, este resultado é inédito na literatura de sistemas não-lineares.

Corolário 2.16. MIJOLARO, ALBERTO e BRETAS (2008) *Considere o sistema (2.10) e suponha a existência do conjunto Γ_1 tal que $z(t) \in \Gamma_1$ para qualquer $t \geq 0$. Se as seguintes condições são satisfeitas:*

(S1) *Existe uma função contínua $c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e uma função C^1 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$-\dot{V}(x, z) := -\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, z) \geq c(x) \text{ para todo } z \in \Gamma_1$$

(S2) Existe um nível de valor $L \in \mathbb{R}$ tal que o conjunto $S_c(L) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) < L\}$ é limitado;

(S3) $\sup_{x \in C} V(x) < l < L$, onde $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid c(x) \leq 0\}$

Então:

(i) $S_c(L)$ é um conjunto positivamente invariante com respeito à (2.10)

(ii) toda trajetória começando em $S_c(L)$ entra no conjunto $S_c(l) := \{x \in S_c(L) : V(x) < l\}$

(iii) $S_c(l)$ é um conjunto positivamente invariante com respeito à (2.10).

Demonstração: Escolhendo-se $a(x) = V(x) = b(x)$ e $\Gamma_2 = \mathbb{R}^n$, seguindo a terminologia do Teorema 2.15, tem-se $A_L = B_L = S_c(L)$ e $A_l = B_l = S_c(l)$. Verifica-se, com estas escolhas, que as condições (S1-S3) do Teorema 2.15 são satisfeitas. Portanto, prova-se (i)-(iii) do Corolário 2.16. ■

3. Resultados de Sincronização de Sistemas Dinâmicos

Considere o sistema formado por duas equações diferenciais não-lineares acopladas com a seguinte forma geral:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = f(t, \xi_1, \xi_2, \chi_1, \chi_C) \\ \dot{\xi}_2 = f(t, \xi_1, \xi_2, \chi_2, \chi_C) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde χ_1 e χ_2 são vetores de parâmetros dos subsistemas 1 e 2, respectivamente, χ_C é um vetor de parâmetros de acoplamento entre os subsistemas e o par $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. A solução do sistema (3.1) iniciando em (ξ_{10}, ξ_{20}) no tempo t_0 será denotada por $(\xi_1(t, t_0, \xi_{10}, \xi_{20}, \chi_1, \chi_C), \xi_2(t, t_0, \xi_{10}, \xi_{20}, \chi_2, \chi_C))$.

As próximas definições expressam o significado de sincronização que será usado ao longo do texto. A Definição 1, a seguir, expressa a sincronização de soluções começando em uma condição inicial particular enquanto a Definição 2 diz respeito a sincronização de soluções para um certo conjunto de condições iniciais.

Definição 3.1: A solução de (3.1) dada por $(\xi_1(t, t_0, \xi_{10}, \xi_{20}, \chi_1, \chi_C), \xi_2(t, t_0, \xi_{10}, \xi_{20}, \chi_2, \chi_C))$ sincroniza para um determinado parâmetro de acoplamento χ_C se

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\xi_2(t, t_0, \xi_{10}, \xi_{20}, \chi_2, \chi_C) - \xi_1(t, t_0, \xi_{10}, \xi_{20}, \chi_1, \chi_C)\| \leq O(\|\chi_2 - \chi_1\|)^{**}$$

^{**} A função $O(\|\chi_2 - \chi_1\|)$ significa “ordem das diferenças dos parâmetros”. Ou seja, quanto menor a diferença $\|\chi_2 - \chi_1\|$ entre os parâmetros, mais próximas estarão as trajetórias dos dois sistemas.

Definição 3.2: O sistema (3.1) sincroniza com respeito a um subconjunto não-vazio A de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, para um parâmetro χ_C , se:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\xi_2(t, t_0, \xi_{10}, \xi_{20}, \chi_1, \chi_C) - \xi_1(t, t_0, \xi_{10}, \xi_{20}, \chi_2, \chi_C)\| \leq O(\|\chi_2 - \chi_1\|)$$

para toda condição inicial $(\xi_{10}, \xi_{20}) \in A$ e para qualquer $t_0 \in \mathbb{R}$.

Em outras palavras, o sistema (3.1) sincroniza se a diferença entre as soluções dos subsistemas 1 e 2 torna-se pequena quando o tempo tende ao infinito. Além disso, o erro tem a ordem da diferença entre os parâmetros, isto é, a diferença é tão pequena quanto a diferença entre os parâmetros dos subsistemas 1 e 2.

Se $A = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, é dito que o sistema (3.1) sincroniza globalmente. O maior conjunto A que satisfaz a Definição 3.2 é chamado de *região de sincronização do sistema (3.1)*.

3.1. Os Principais Resultados de Sincronização

Neste trabalho, estudou-se a seguinte classe de sistemas não-lineares de segunda ordem:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = h(t, x, \eta) - Dy \end{cases} \quad (3.2)$$

onde η é o vetor de parâmetros, e $D > 0$ é o coeficiente de amortecimento. Em particular, será estudado dois sistemas acoplados (uma subclasse do sistema (3.1)) de acordo com as seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = h(t, x_1, \eta_1) - D_1 y_1 - K_1 g(x_1, x_2) - K_2 (y_1 - y_2) \\ \dot{x}_2 = y_2 \\ \dot{y}_2 = h(t, x_2, \eta_2) - D_2 y_2 + K_1 g(x_1, x_2) - K_2 (y_2 - y_1) \end{cases} \quad (3.3)$$

onde η_i e $D_i > 0$ são os parâmetros do sistema i ($i=1,2$), K_1 e K_2 são os parâmetros de acoplamento e g é uma função de acoplamento que depende das posições x_1 e x_2 .

Impondo algumas condições sobre as funções h e g , o próximo teorema prova que os subsistemas 1 e 2 de (3.3) sincronizam se os seus parâmetros forem suficientemente próximos e se os parâmetros de acoplamento K_1 e K_2 são suficientemente grandes. Segundo nosso conhecimento, este resultado é inédito na literatura de sincronização de sistemas não-lineares. Além de provar sincronização, o teorema oferece estimativas dos menores valores dos parâmetros de acoplamento que garantem sincronização, quando são dados os parâmetros dos dois sistemas.

Teorema 3.3: MIJOLARO, ALBERTO e BRETAS (2008) Considere o sistema (3.3), e suponha a existência de um conjunto aberto $\Lambda \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ com intersecção não-vazia com o conjunto diagonal $D_g := \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2, y_1 = y_2\}$. Se as seguintes hipóteses são satisfeitas:

- (i) Existe uma função contínua H tal que $h(t, x_1, \eta) - h(t, x_2, \eta) = -H(t, x_1, x_2, \eta) \cdot (x_1 - x_2)$;
- (ii) Existe uma função contínua $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(x_1, x_2) = G(x_1, x_2)(x_1 - x_2)$;
- (iii) $h(t, x^*, \eta_1) - h(t, x^*, \eta_2) \leq O(\|\eta_1 - \eta_2\|) \quad \forall x^* \in \mathbb{R}$;
- (iv) $|y_2(t)| < \mathcal{V} < \infty$, onde $\mathcal{V} \in \mathbb{R} \quad \forall t \geq 0$;
- (v) Existem números positivos m , M e s tais que $0 < m < -\alpha(t, x_1, x_2, \eta_1) < M$ para

qualquer $K_1 > s$ e qualquer $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \Lambda$, onde

$$-\alpha(t, x_1, x_2, \eta_1) := \frac{H(t, x_1, x_2, \eta_1)}{K_1} + 2G(x_1, x_2);$$

Então, toda solução que permanece em Λ para $t \geq 0$ sincroniza no sentido da

Definição 3.1 se $K_1 > s$ e $K_2 > -D_1/2 + 1/2 \left[\max \left(2\sqrt{K_1\mu}, \sqrt{K_1(M+m+2\mu)} \right) \right]$, onde $0 < \mu < m$.

Demonstração: Defina $x := x_1 - x_2$ e $y := y_1 - y_2$ e suponha que as hipóteses (i)–(v) são satisfeitas. Subtraindo as equações do subsistema 2 do subsistema 1 de (3.3), tem-se:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -[H(t, x_1, x_2, \eta_1) + 2K_1 G(x_1, x_2)]x - (D_1 + 2K_2)y + O(\|x_1 - x_2\|) \end{cases}$$

onde $O(\|x_1 - x_2\|) = h(t, x_2, \eta_1) - h(t, x_2, \eta_2) - (D_1 - D_2)y_2$.

O sistema anterior pode ser reescrito como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K_1\alpha(t, x_1, x_2, \eta_1) & -K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ O(\|x_1 - x_2\|) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

onde $K = D_1 + 2K_2$.

Defina uma função $\beta(t, x_1, x_2, \eta_1)$ como

$$\beta(t, x_1, x_2, \eta_1) := \alpha(x_1, x_2, \chi_1) + \mu \quad (3.5)$$

onde $0 < \mu < m$.

Então:

$$0 < m - \mu < -\beta(x_1, x_2, \chi_1) < M \quad (3.6)$$

para todo $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \Lambda$ e $K_1 > s$.

Com esta escolha de β , o sistema (3.4) pode ser dividido em uma soma de uma parte linear invariante no tempo e uma parte não-linear como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1\mu & -K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ K_1\beta(t, x_1, x_2, \eta_1)x \end{pmatrix} + O(\|x_1 - x_2\|)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ K_1 \beta(t, x_1, x_2, \eta_1) x \end{pmatrix} + O(\|x_1 - x_2\|) \quad (3.7)$$

Usando uma transformação linear equivalente CHEN (1999) dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-K + \sqrt{K^2 - 4K_1\mu}}{2} & \frac{-K - \sqrt{K^2 - 4K_1\mu}}{2} \end{pmatrix}, \text{ uma matriz autobase de } A, \text{ define-se a nova variável}$$

$\tilde{x} = P^{-1}x$. Nesta nova variável, o sistema (3.7) toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \left(\frac{K_1 \beta(t, x_1, x_2, \lambda_1)}{\gamma} + \lambda_1 \right) \tilde{x} + \left(\frac{K_1 \beta(t, x_1, x_2, \lambda_1)}{\gamma} \right) \tilde{y} + O(\|x_1 - x_2\|) \\ \dot{\tilde{y}} &= \left(-\frac{K_1 \beta(t, x_1, x_2, \lambda_1)}{\gamma} + \lambda_2 \right) \tilde{y} - \left(\frac{K_1 \beta(t, x_1, x_2, \lambda_1)}{\gamma} \right) \tilde{x} + O(\|x_1 - x_2\|) \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde $\gamma := \sqrt{K^2 - 4K_1\mu}$ e λ_1, λ_2 são os autovalores da matriz A dados por $\lambda_1 := \frac{-K + \gamma}{2}$ e

$$\lambda_2 := \frac{-K - \gamma}{2}.$$

Aplicando a *Fórmula da Variação das Constantes*, apresentada na Seção 2.1.1

em cada uma das equações do sistema (3.8), obtém-se:

$$\begin{cases} x(t) = e^{\int_{t_0}^t \left[\lambda_1 + \frac{K_1 \beta}{\gamma} \right] du} x_0 + \frac{1}{\gamma} \int_{t_0}^t e^{-\int_t^s \left[\lambda_1 + \frac{K_1 \beta}{\gamma} \right] du} K_1 \beta y(s) ds + O(\|x_1 - x_2\|) \\ y(t) = e^{\int_{t_0}^t \left[\lambda_2 - \frac{K_1 \beta}{\gamma} \right] du} y_0 - \frac{1}{\gamma} \int_{t_0}^t e^{-\int_t^s \left[\lambda_2 - \frac{K_1 \beta}{\gamma} \right] du} K_1 \beta x(s) ds + O(\|x_1 - x_2\|) \end{cases} \quad (3.9)$$

O símbolo “ $\sim$ ” colocado abaixo das variáveis em (3.8) e a dependência sobre (t, x_1, x_2, η_1) da função β são omitidos em (3.9) para simplificar a notação.

Aplicando a desigualdade triangular $|u + v| \leq |u| + |v|$ em (3.9), tem-se a estimativa:

$$|x(t)| \leq e^{\int_{t_0}^t \left[\lambda_1 + \frac{K_1 \beta}{\gamma} \right] du} \|x_0\| + \left| \frac{1}{\gamma} \right| \int_{t_0}^t e^{-\int_t^s \left[\lambda_1 + \frac{K_1 \beta}{\gamma} \right] du} |K_1 \beta y(s)| ds + O(\|x_1 - x_2\|) \quad (3.10)$$

$$|y(t)| \leq e^{\int_{t_0}^t \left[\lambda_2 - \frac{K_1 \beta}{\gamma} \right] du} \|y_0\| + \left| -\frac{1}{\gamma} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s \left[\lambda_2 - \frac{K_1 \beta}{\gamma} \right] du} |K_1 \beta y(s)| ds + O(\|\chi_1 - \chi_2\|) \right| \quad (3.11)$$

De (3.6), obtêm-se as seguintes estimativas:

$$\lambda_1 - \frac{K_1 M}{\gamma} < \lambda_1 + \frac{K_1 \beta}{\gamma} < \lambda_1 + \frac{(\mu - m) K_1}{\gamma} < 0 \quad (3.12)$$

$$\lambda_2 < \lambda_2 + \frac{K_1(m - \mu)}{\gamma} < \lambda_2 - \frac{\beta K_1}{\gamma} < \lambda_2 + \frac{MK_1}{\gamma} \quad (3.13)$$

Usando as estimativas (3.12) e (3.13), é correto afirmar:

$$|x(t)| \leq e^{\left(\lambda_1 + \frac{K_1(\mu - m)}{\gamma} \right)(t - t_0)} |x_0| + \frac{1}{\gamma} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s \left[\lambda_1 + \frac{K_1 \beta}{\gamma} \right] du} |K_1 \beta y(s)| ds + O(\|\chi_1 - \chi_2\|)$$

e já que $|\beta(t, x_1, x_2, \chi_1)| < M - \mu$, encontram-se:

$$|x(t)| \leq e^{\alpha_1(t - t_0)} |x_0| + \frac{K_1(M - \mu)}{\gamma} \int_{t_0}^t e^{\alpha_1(t - s)} |y(s)| ds + O(\|\chi_1 - \chi_2\|) \quad (3.14)$$

$$|y(t)| \leq e^{\alpha_2(t - t_0)} |y_0| + \frac{K_1(M - \mu)}{\gamma} \int_{t_0}^t e^{\alpha_2(t - s)} |x(s)| ds + O(\|\lambda_1 - \lambda_2\|) \quad (3.15)$$

onde $\alpha_1 = \lambda_1 + \frac{K_1(\mu - m)}{\gamma}$ e $\alpha_2 = \lambda_2 + \frac{K_1(M - \mu)}{\gamma}$

Substituindo a equação (3.15) em (3.14) a seguinte estimativa é obtida:

$$|x(t)| \leq e^{\alpha_1(t - t_0)} |x_0| + \frac{K_1(M - \mu)}{\gamma} \int_{t_0}^t e^{\alpha_1(t - s)} \left\{ e^{\alpha_2(t - t_0)} |y_0| + \frac{K_1(M - \mu)}{\gamma} \int_{t_0}^t e^{\alpha_2(t - u)} |x(u)| du \right\} ds + O(\|\chi_1 - \chi_2\|)$$

Resolvendo as integrais e depois de algumas manipulações algébricas, obtêm-se:

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq e^{\alpha_1(t - t_0)} |x_0| + \frac{K_1(M - \mu)}{\gamma(\alpha_2 - \alpha_1)} |y_0| e^{\alpha_2(t - t_0)} - \frac{K_1(M - \mu)}{\gamma(\alpha_2 - \alpha_1)} |y_0| e^{\alpha_1(t - t_0)} \\ &+ \frac{[K_1(M - \mu)]^2}{\gamma^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left(\int_{t_0}^t e^{\alpha_2(t - s)} |x(s)| ds \right) - \frac{[K_1(M - \mu)]^2}{\gamma^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left(\int_{t_0}^t e^{\alpha_1(t - s)} |x(s)| ds \right) + O(\|\chi_1 - \chi_2\|) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Uma vez que $t > t_0$ e $e^{\alpha_{1,2}(t-s)} > 0$, as últimas integrais são números positivos.

$$|x(t)| \leq e^{\alpha_1(t-t_0)} \zeta_1 + e^{\alpha_2(t-t_0)} \zeta_2 + \frac{K_1^2(M-\mu)^2}{\gamma^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[e^{\alpha_2 t} \int_{t_0}^t e^{-\alpha_2 s} |x(s)| ds - e^{\alpha_1 t} \int_{t_0}^t e^{-\alpha_1 s} |x(s)| ds \right] + O(\|\chi_1 - \chi_2\|) \quad (3.17)$$

onde $\zeta_1 = |x_0| - \frac{K_1(M-\mu)}{\gamma(\alpha_2 - \alpha_1)} |y_0|$ e $\zeta_2 = \frac{K_1(M-\mu)}{\gamma(\alpha_2 - \alpha_1)} |y_0| = |x_0| - \zeta_1$.

Considerando $\alpha_1 > \alpha_2$, a seguinte estimativa é obtida:

$$|x(t)| \leq \zeta_1 e^{\alpha_1(t-t_0)} + \zeta_2 e^{\alpha_2(t-t_0)} + 2\zeta_3 e^{\alpha_1 t} \int_{t_0}^t e^{-\alpha_1 s} |x(s)| ds + O(\|\chi_1 - \chi_2\|) \quad (3.18)$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade (3.18) por $e^{-\alpha_1 t}$ e utilizando a desigualdade de Gronwall generalizada apresentada na Seção 2.1.2, tem-se:

$$e^{-\alpha_1 t} |x(t)| \leq \zeta_1 e^{-\alpha_1 t + \alpha_1(t-t_0)} + \zeta_2 e^{-\alpha_1 t + \alpha_2(t-t_0)} + 2\zeta_1 \zeta_3 \int_{t_0}^t e^{-\alpha_1 t_0 + \zeta_3(t-s)} ds + 2\zeta_2 \zeta_3 \int_{t_0}^t e^{\zeta_3(t-s) - \alpha_1 s + \alpha_2(s-t_0)} ds + O(\|\chi_1 - \chi_2\|)$$

onde $\zeta_3 := \frac{K_1^2(M-\mu)^2}{\gamma^2(\alpha_2 - \alpha_1)}$.

Resolvendo as integrais e depois de algumas manipulações algébricas, não é difícil chegar a:

$$|x(t)| \leq \zeta_1 e^{(\alpha_1 + \zeta_3)(t-t_0)} + \zeta_2 e^{\alpha_2(t-t_0)} + \frac{2\zeta_2 \zeta_3}{\alpha_2 - \alpha_1 - \eta} e^{\alpha_2(t-t_0)} + \frac{2\zeta_2 \zeta_3}{\alpha_2 - \alpha_1 - \eta} e^{(\alpha_1 + \zeta_3)(t-t_0)} + O(\|\chi_1 - \chi_2\|) \quad (3.19)$$

Portanto, se $\alpha_2 < \alpha_1 < 0$ e $\alpha_1 + \zeta_3 < 0$, então o $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = O(\|\chi_1 - \chi_2\|)$ para toda solução começando em Λ . Em outras palavras, toda solução que se encontra em Λ , para todo $t \geq 0$, sincroniza no senso da Definição 3.1 se as seguintes condições são satisfeitas:

$$\alpha_1 + \zeta_3 := \frac{-K + \sqrt{K^2 - 4K_1\mu}}{2} + \frac{K_1(\mu - m)}{\sqrt{K^2 - 4K_1\mu}} + \frac{[K_1(M-\mu)]^2}{\gamma^2(\alpha_2 - \alpha_1)} < 0 \quad (3.20)$$

$$\alpha_2 < \alpha_1 < 0 \quad (3.21)$$

Resolvendo as desigualdades (3.20) e (3.21), conclui-se que toda solução que se encontra em Λ sincroniza no senso da Definição 3.1 se:

$$K_1 > s \quad \text{e} \quad K_2 > -\frac{D_1}{2} + \frac{1}{2} \left[\max \left(2\sqrt{K_1\mu}, \sqrt{K_1(M+m+2\mu)} \right) \right] \quad (3.22)$$

■

Apesar da aparente complexidade do Teorema 3.3, a sincronização é provada usando condições suaves que podem ser facilmente aplicadas em muitos sistemas físicos. Se a função $G(x, x) > 0$ para qualquer x , então a função de acoplamento g atua como uma força sincronizante na vizinhança do conjunto diagonal $D \cap \Lambda$.

Assim, para valores de $K_1 > 0$ suficientemente grandes, a força sincronizante da função de acoplamento g ganha da possível força assíncrona devido a função h .

Esta observação mostra que a hipótese (v) do Teorema 3.3 será satisfeita em um grande número de sistemas práticos. A terceira condição requer similaridade entre os parâmetros dos subsistemas 1 e 2 e a quarta condição impõe que as velocidades sejam limitadas. É também possível verificar que as condições (i) e (ii) são satisfeitas em um grande número de sistemas físicos.

Observações:

- (i) Há uma negociação entre a escolha de Λ e os parâmetros de acoplamento K_1 e K_2 que garantem sincronização. Grandes conjuntos Λ requerem, em geral, K_1 e K_2 maiores. Estimativas numéricas destes parâmetros serão dadas na Seção 4.2.
- (ii) O Teorema 3.3 supõe a existência de um subconjunto aberto Λ com intersecção não vazia com a diagonal. Entretanto, ele não fornece um método unificado para a escolha deste conjunto. Por outro lado, este tratamento geral de Λ permite lidar com um grande número de

problemas e a escolha de Λ dependerá das características particulares do problema. Por exemplo, quando se estudou sincronização de sistemas instáveis ou sistemas cujas soluções não são *ultimately bounded*, Λ é geralmente escolhido com um conjunto não limitado contendo a diagonal. Mas, quando o sistema tem um atrator limitado, a dissipatividade uniforme é geralmente explorada para fornecer um conjunto *ultimately bounded* Λ . Estes dois casos serão explorados nos exemplos da Seção 4.

(iii) O Teorema 3.3 fornece condições suficientes que garantem a sincronização de soluções que ficam dentro do conjunto Λ para todo $t \geq 0$. Entretanto, o Teorema 3.3 não fornece condições que garantam que as soluções ficam em Λ para todo $t \geq 0$. Utilizando o resultado do Corolário 2.16 da Seção 2.4, será provada na próxima Seção a existência de soluções que ficam em Λ para todo $t \geq 0$. Além disso, estimativas da região de sincronização serão obtidas.

Neste momento, será apresentada uma versão do Teorema 3.3, onde se estudou não mais sistemas de segunda ordem, mas sim de primeira ordem. Primeiramente, considere o sistema dinâmico não-linear de primeira ordem dado pela expressão a seguir:

$$\dot{x} = h(t, x, \eta) \quad (3.23)$$

onde η é o vetor de parâmetros.

Em particular, foram criadas duas réplicas do sistema (3.23) que foram acopladas através da constante K_1 , conforme as equações dadas em (3.24):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = h(t, x_1, \eta_1) - K_1 g(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = h(t, x_2, \eta_2) + K_1 g(x_1, x_2) \end{cases} \quad (3.24)$$

onde η_i são os parâmetros do subsistema i ($i=1,2$) e g é uma função de acoplamento que depende das posições x_1 e x_2 .

De maneira similar ao que foi apresentado no Teorema 3.3, impõem-se algumas condições sobre as funções h e g , e provou-se que os subsistemas 1 e 2 de (3.24) sincronizam se os seus parâmetros forem suficientemente próximos e se o parâmetro de acoplamento K_I é suficientemente grande.

Teorema 3.4: Considere o sistema (3.23) e suponha a existência de um conjunto aberto $\Lambda \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ com intersecção não-vazia com o conjunto diagonal $D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x_1 = x_2\}$. Suponha que as seguintes hipóteses são satisfeitas:

- (i) Existe uma função contínua H tal que $h(t, x_1, \eta) - h(t, x_2, \eta) = -H(t, x_1, x_2, \eta) \cdot (x_1 - x_2)$;
- (ii) Existe uma função contínua $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(x_1, x_2) = G(x_1, x_2)(x_1 - x_2)$;
- (iii) $h(t, x^*, \eta_1) - h(t, x^*, \eta_2) \leq O(\|\eta_1 - \eta_2\|) \quad \forall x^* \in \mathbb{R}^2$;
- (iv) Existem números positivos m , M e s tais que $0 < m < -\alpha(t, x_1, x_2, \eta_1) < M$ para qualquer $K_1 > s$ e qualquer $(x_1, x_2) \in \Lambda$, onde $-\alpha(t, x_1, x_2, \eta_1) := \frac{H(t, x_1, x_2, \eta_1)}{K_1} + 2G(x_1, x_2)$;

Então, toda solução que permanece em Λ para $t \geq 0$ sincroniza no sentido da Definição 3.1 se $K_1 > s$.

Demonstração: A demonstração deste resultado é similar à demonstração do Teorema 3.3:

Defina $x := x_1 - x_2$ e suponha que as hipóteses (i)–(iv) são satisfeitas. Subtraindo as equações do subsistema 2 do subsistema 1 de (3.24), tem-se:

$$\dot{x} = -[H(t, x_1, x_2, \eta_1) + 2K_1 G(x_1, x_2)]x + O(\|x_1 - x_2\|) \quad (3.25)$$

onde $O(\|x_1 - x_2\|) = h(t, x_2, \eta_1) - h(t, x_2, \eta_2)$.

O sistema (3.25) pode ser reescrito como:

$$\dot{x} = K_1 \alpha(t, x_1, x_2, \eta_1) x + O(\|x_1 - x_2\|) \quad (3.26)$$

onde $-\alpha(t, x_1, x_2, \eta_1) := \frac{H(t, x_1, x_2, \eta_1)}{K_1} + 2G(x_1, x_2)$.

Pela Fórmula da Variação das Constantes (ver Seção 2.1.1), pode-se escrever:

$$x(t) = e^{\int_0^t K_1 \alpha(u) du} x_0 + O(\|x_1 - x_2\|) \quad (3.27)$$

Pela hipótese (iv), se $K_1 > s$ para qualquer $(x_1, x_2) \in \Lambda$, então $0 < m < -\alpha(t, x_1, x_2, \eta_1) < M$. Logo, a solução $x(t) := x_1(t) - x_2(t)$ de (3.27) tende à ordem da diferença entre os parâmetros, quando $t \rightarrow \infty$. ■

Para conferir a aplicabilidade do resultado, consulte a Seção 4.3.

4. Aplicações dos Resultados de Sincronização

Nesta Seção os resultados de sincronização e de estimativas uniformes apresentados nos Capítulos 2 e 3 serão aplicados em alguns exemplos. O primeiro deles é um sistema “instável” composto por dois pêndulos acoplados. Segundo nosso conhecimento, é a primeira vez que sincronização de um sistema “instável” é demonstrada na literatura. Neste exemplo, a sincronização não é global e uma estimativa da região de sincronização é fornecida. O segundo exemplo é constituído por dois sistemas de Duffing acoplados. Neste caso, demonstra-se sincronização global. Estes dois exemplos mostram a versatilidade dos resultados de sincronização propostos nesta tese. Com escolhas apropriadas do conjunto Λ do Teorema 3.3, pode-se provar sincronização de sistemas com características bem distintas, ou seja, em um caso prova-se sincronização não-global de um sistema “instável” e em outro caso prova-se sincronização global de um sistema cujas trajetórias são *ultimately bounded*. Por fim, estuda-se sincronização de uma classe de sistemas de primeira ordem acoplados. Em todos os casos, uma estimativa suficiente dos parâmetros de acoplamento que garante sincronização é encontrada.

4.1. Pêndulos Acoplados

Considere o sistema composto por 2 pêndulos acoplados, conforme MIJOLARO, ALBERTO e BRETAS (2007):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= P_1 - C_1 \sin x_1 - K_1 \sin(x_1 - x_2) - D_1 y_1 - K_2 (y_1 - y_2)\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= P_2 - C_2 \sin x_2 - K_1 \sin(x_2 - x_1) - D_2 y_2 - K_2 (y_2 - y_1)\end{aligned}\tag{4.2}$$

Estas equações têm origem nos estudos dinâmicos de sistemas elétricos de potência BRETAS e ALBERTO (2000). Fisicamente, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ representam os ângulos dos pêndulos 1 e 2, respectivamente, e $y_1(t)$ e $y_2(t)$ representam suas velocidades angulares.

Considere o conjunto $\Lambda := \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : |x_1 - x_2| < a\}$ com $a > 0$. Uma ilustração deste conjunto é mostrada na Figura 4.1. Claramente, o conjunto diagonal $D := \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2, y_1 = y_2\}$ está contido em Λ . A seguir, será mostrado que os sistemas (4.1) e (4.2) satisfazem as hipóteses do Teorema 3.3 do Capítulo 3, para esta escolha de Λ , e fornecer estimativas suficientes dos parâmetros de acoplamento que propiciam sincronização.

Figura 4.1. Ilustração do conjunto Λ no plano $\mathbb{R}^2$. Verifica-se que a diagonal $D := \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2, y_1 = y_2\}$ está contida no conjunto Λ .

Primeiramente, será provado que a hipótese (iv) do Teorema 3.3 é satisfeita, ou seja, $|y_2(t)| < \mathcal{V} < \infty$, $\forall t \geq 0$. Para este propósito, $\dot{y}_1$ e $\dot{y}_2$ são reescritas como:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_1 - K_2 & K_2 \\ K_2 & -D_2 - K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

onde u_1, u_2 são funções limitadas dadas por:

$$u_1(x_1, x_2) = P - C_1 \sin x_1 - K_1 \sin(x_1 - x_2)$$

$$u_2(x_1, x_2) = P_2 - C_2 \sin x_2 - K_1 \sin(x_2 - x_1)$$

Os autovalores da matriz da parte linear de (4.3) têm parte real negativa. Assim, aplicando a *Fórmula da Variação das Constantes*, (veja Seção 2.1.1) prova-se que $y_1(t), y_2(t)$ são limitadas para $t > 0$. Portanto, a hipótese (iv) do Teorema 3.3 é satisfeita.

Identificando $h(t, x_1, \eta_1) = -P_1 - C_1 \sin x_1$ e $h(t, x_2, \eta_1) = -P_1 - C_1 \sin x_2$, obtém-se:

$$H(x_1, x_2, \eta_1) = -2C_1 \frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2}}{x}$$

Assim, a hipótese (i) do Teorema 3.3 é satisfeita, onde $x := x_1 - x_2$.

A hipótese (ii) do Teorema 3.3 também é satisfeita escolhendo-se

$$G(x_1, x_2) = \frac{\sin(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sin x}{x}.$$

Como $h(t, x, \eta_1) - h(t, x, \eta_2) = \|(P_1 - P_2) - (C_1 - C_2) \sin x\| \leq \|(P_1 - P_2) + (C_1 - C_2)\| \leq O(\|x_1 - x_2\|)$, então, a hipótese (iii) também é assegurada.

Com H e G definidas anteriormente, obtém-se:

$$-\alpha(x_1, x_2, \eta_1) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{x/2} \left(2 \cos \frac{x}{2} + \frac{C_1}{K_1} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right).$$

Se $a < \pi$ e $K_1 > s := C_1 L / 2$, então não é difícil mostrar que:

$$0 < 2 < w \left(2 - \frac{C_1 L}{K_1} \right) < -\alpha(t, x_1, x_2, \eta_1) < 2 + \frac{C_1 L}{K_1} < 4$$

$$\text{onde } w = \min_{-a < x < a} \left(\frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{x/2} \right) \text{ e } L = \max_{-a < x < a} \left(\frac{1}{\cos \frac{x}{2}} \right).$$

Portanto, a hipótese (v) é satisfeita para $s = C_1 L / 2$, $m = 2$ e $M = 4$.

Assim, de acordo com o Teorema 3.3, toda solução que permanece em

$$\Lambda := \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : |x_1 - x_2| < a\} \quad \text{para } t \geq 0 \quad \text{sincroniza se } K_1 > C_1 L / 2 \text{ e}$$

$$K_2 > -D_1/2 + 1/2 \left[\max \left(2\sqrt{K_1\mu}, \sqrt{K_1(M+m+2\mu)} \right) \right].$$

A seguir, os valores numéricos dos parâmetros serão explorados para obter uma estimativa numérica de a , K_I e K_2 . Para isto, considera-se que $C_1 = C_2 = 2$, $D := D_1 = D_2 = 1$ e $P := P_1 = P_2 = 3$.

Escolhendo $a = \frac{2\pi}{3}$ e $\mu = 1$, toda solução de (4.1)–(4.2) $(x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t))$ que permanece no conjunto $\Lambda := \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : |x_1 - x_2| < 2\pi/3\}$ sincroniza, no sentido da Definição 3.1, se $K_1 > 2$ e $K_2 > -1/2 + \sqrt{2K_1}$. A região de parâmetros K_2 e K_I , onde o Teorema 3.3 garante que toda a solução que permanece no conjunto Λ , para $t > 0$ sincroniza é mostrada na Figura 4.1 para $a = \frac{2\pi}{3}$.

Uma das hipóteses usadas para demonstrar o Teorema 3.3 foi que $(x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t)) \in \Lambda$ para todo $t \geq 0$. Neste exemplo particular, será mostrada a existência de um conjunto grande de soluções que permanece dentro de Λ , para $t > 0$. Para isto, exibir-se-á um conjunto positivamente invariante $S_c(L)$ contido em Λ . Já que $S_c(L)$ é um subconjunto positivamente invariante de Λ , o conjunto $S_c(L)$ está contido na região de sincronização e o sistema (4.1)–(4.2) sincroniza com respeito a A , no sentido da Definição 3.2. Em outras palavras, o conjunto A é uma estimativa da região de sincronização.

Figura 4.2. A região em cinza é o conjunto dos parâmetros K_2 e K_1 , onde o Teorema 3.3 garante sincronização do sistema (4.1)–(4.2). Neste caso, $m=2$, $M=4$ e $\mu=1$.

Para encontrar o conjunto $S_c(L)$, o Corolário 2.16 apresentado na Seção 2.4 será utilizado. Em (4.1)–(4.2) o vetor $(x, y)^T$ faz o papel da variável de interesse x de (2.7) enquanto o vetor (x_1, x_2) faz o papel da variável z da mesma equação, que neste caso será tratado como incerteza.

Considere a seguinte candidata a função energia:

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} - 2K_1 \cos x - 4C_1 \cos \frac{x}{2} - \tau \left(-2C_1 \sin \frac{x}{2} - 2K_1 \sin x \right) y \quad (4.4)$$

É fácil verificar que

$$\begin{aligned} -\dot{V} = & \begin{bmatrix} y & P_l \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K - \tau \left[C_1 \cos \frac{x}{2} + 2K_1 \cos x \right] & -\frac{\tau K}{2} \\ -\frac{\tau K}{2} & \tau \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y \\ P_l \end{bmatrix} + 2C_1 P_l \tau \sin \frac{x}{2} \left(1 - \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \\ & - 2C_1 \sin \frac{x}{2} \left(1 - \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right) y \geq c(x, y) \end{aligned}$$

onde $P_l := -2C_1 \sin \frac{x}{2} - 2K_1 \sin x$, e

$$c(x, y) = \begin{cases} \left[K - \tau \left(C_1 \cos \frac{x}{2} + 2K_1 \cos x \right) \right] y^2 - \tau K P_l y + \tau P_l^2 - 2C_1 (\tau P_l - y) & \text{se } (\tau P_l - y) > 0 \\ \left[K - \tau \left(C_1 \cos \frac{x}{2} + 2K_1 \cos x \right) \right] y^2 - \tau K P_l y + \tau P_l^2 + 2C_1 (\tau P_l - y) & \text{se } (\tau P_l - y) < 0 \end{cases}.$$

Desta maneira, a hipótese (S1) do Corolário 2.16 é satisfeita.

Como uma consequência do critério de Sylvester, o termo quadrático

$$\begin{bmatrix} y & P_l \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K - \tau \left[C_1 \cos \frac{x}{2} + 2K_1 \cos x \right] & -\frac{\tau K}{2} \\ -\frac{\tau K}{2} & \tau \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y \\ P_l \end{bmatrix} \text{ é definido positivo se } \tau \leq \frac{K}{C_1 + 2K_1 + \frac{K^2}{4}}.$$

As curvas de nível de V são mostradas na Figura 4.3. O maior conjunto positivamente invariante $S_c(L)$ contido em Λ é mostrado em verde. Portanto, o sistema (4.1)-(4.2) sincroniza com respeito a $S_c(L)$ no sentido da Definição 3.2. Na mesma figura projetam-se duas trajetórias do sistema cujas condições iniciais são: T1: $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (6.0, 5.5, 3.5, -2.5)$ e T2: $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (-5.5, -3.5, -3.5, -2.5)$. A Trajetória Projetada 1 (de cor azul) começa fora do conjunto positivamente invariante $S_c(L)$, mas uma vez que entra nele, não deixa mais o conjunto e tende à origem indicando sincronização. Esta trajetória mostra que a estimativa da região de sincronização é conservadora. A Trajetória Projetada 2 (de cor vermelha) possui condição inicial no interior do conjunto positivamente invariante e, pela figura, nota-se que a trajetória não sai do conjunto e também tende ao ponto $(x, y) = (0, 0)$ quando o tempo cresce, indicando sincronização.

Figura 4.3. Curvas de nível da função V dada pela expressão (4.4) para o exemplo dos pêndulos acoplados, com $C_I=2$; $P=3$, $D_I=1$, $K_I=2.1$, $K_2=2.55$ e $\tau=0.06$. As projeções das duas trajetórias no plano $\mathbb{R}^2$ do sistema (4.1)–(4.2) são mostradas na figura. Ambas sincronizam quando $t \rightarrow \infty$. A curva de nível verde representa o maior conjunto invariante contido no conjunto $\Lambda := \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : |x_1 - x_2| < 2\pi/3\}$ que é a estimativa do atrator.

A Figura 4.4 mostra a evolução no tempo das trajetórias que foram projetadas na Figura 4.3. Note que as soluções sincronizam quando $t \rightarrow \infty$.

Figura 4.4. Ilustração no domínio do tempo das duas soluções do sistema (4.1)–(4.2) que foram projetadas na Fig.4.3. Em ambos os casos, sincronização é observada.

Na Figura 4.5 mostra-se uma situação em que não existe simetria nos parâmetros dos subsistemas acoplados. Usa-se para este caso $P_1=3.3$, $P_2=3.9$, $C_1=2.3$, $C_2=1.93$, $D_1=1.0$, e $D_2=0.8$. Os parâmetros de acoplamento são: $K_1=2.1$, $K_2=2.55$. Verifica-se, conforme concluído no Teorema 3.3, que as soluções ficam próximas quando o tempo tende ao infinito.

A)

B)

Figura 4.5. A) Trajetória projetada quando o sistema não possui parâmetros idênticos: A órbita tende a um ponto próximo da origem. A sincronização não é perfeita, conforme verificado na ampliação desta figura no retângulo próximo à origem. B) Trajetória de (4.1)-(4.2) para os parâmetros: $K_1=2.1$, $K_2=2.55$, $P_1=3.3$, $P_2=3.9$, $C_1=2.3$, $C_2=1.93$, $D_1=1.0$, e $D_2=0.8$. Na parte ampliada pode ser visto que as trajetórias ficam próximas quando o tempo cresce. A sincronização não é perfeita, pois os parâmetros dos subsistemas 1 e 2 são próximos, mas não idênticos. A condição inicial para a trajetória 3 é $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (2.0, 5.5, 3.5, -2.5)$.

4.2. Equação de Duffing Forçada

Considere o seguinte sistema dinâmico não linear composto por dois sistemas de Duffing forçados e linearmente acoplados, conforme MIJOLARO, ALBERTO e BRETAS (2007):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= x_1 - x_1^3 + B \cos \omega t - D_1 y_1 - K_1(x_1 - x_2) - K_2(y_1 - y_2)\end{aligned}\tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= x_2 - x_2^3 + B \cos \omega t - D_2 y_2 - K_1(x_2 - x_1) - K_2(y_2 - y_1)\end{aligned}\tag{4.6}$$

Será mostrado que os sistemas (4.5) e (4.6) sincronizam globalmente se os parâmetros dos subsistemas 1 e 2 possuem valores parecidos e os parâmetros de acoplamento são suficientemente grandes.

Identificando $h(t, x_1, \eta) = x_1 - x_1^3 + B \cos \omega t$ e $h(t, x_2, \eta) = x_2 - x_2^3 + B \cos \omega t$, obtém-se

$$h(t, x_1, \eta) - h(t, x_2, \eta) = -H(x_1, x_2, \eta) (x_1 - x_2) \quad \text{com} \quad H(t, x_1, x_2, \eta) = -1 + x_1 x_2 + x_1^2 + x_2^2.$$

Portanto, a hipótese (i) do Teorema 3.3 é satisfeita.

A hipótese (ii) do Teorema 3.3 é satisfeita escolhendo-se $G(x_1, x_2) = 1$. A hipótese (iii) é também verificada porque $h(t, x^*, \eta_1) - h(t, x^*, \eta_2) \leq \|(B_1 - B_2) \cos \omega t\| \leq \|B_1 - B_2\| \leq O(\|\chi_1 - \chi_2\|)$.

Usando os resultados de AFRAIMOVICH e RODRIGUES (1998), demonstra-se que as soluções deste sistema são *ultimately bounded*. Assim, a hipótese (iv) do Teorema 3.3 é também verificada. Em particular, usando o Corolário 2.16, apresentado no Capítulo 2, mostra-se que toda solução de (4.5)-(4.6) entra em um conjunto limitado Λ , com $\Lambda \cap D \neq \emptyset$. Portanto, a hipótese (v) é também verificada para qualquer $s > 0$.

A seguir, os valores dos parâmetros serão explorados para se obter estimativas numéricas de s, K_1, K_2, m, M e μ .

Escolhendo-se $D_1 = D_2 = 1$ e $s = 1$ e usando os resultados de AFRAIMOVICH e RODRIGUES (1998), é possível provar que se $(x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t))$ é uma solução de (4.5)-(4.6) para $t \geq t_0$, então existe $t_1 \geq t_0$ tal que $(x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t)) \in \Lambda$ para todo $t \geq t_1$, onde $\Lambda = \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : -3.5 \leq x_1, x_2 \leq 3.5, -10 \leq y_1, y_2 \leq 10\}$.

Para esta escolha de Λ , a hipótese (v) do Teorema 3.3 é satisfeita com $m=2$ e $M=46$, para todo $K_1 > s=1$.

Escolhendo $\mu=1$, o Teorema 3.3 garante que toda solução sincroniza, no senso da Definição 3.1, se:

$$K_1 > 1 \text{ e } K_2 > -\frac{1}{2} + 3.54\sqrt{K_1} \quad (4.7)$$

Portanto, (4.5)–(4.6) sincroniza globalmente se (4.7) é satisfeita.

A Figura 4.6 apresenta algumas simulações mostrando sincronização. Nestas simulações, foram usados os seguintes parâmetros: $K_1=2$, $K_2=16$, $D_1=1$, $D_2=1$, $B=700$, $\omega=12$ e condições iniciais: $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (3.4, -9.0, -2.5, 9.5)$.

A)

B)

C)

Figura 4.6. Sincronização do Sistema de Duffing. Em A) mostra-se a sincronização na evolução temporal das trajetórias. Em B) verifica-se que a diferença entre o subsistema 1 e 2 decresce quando $t \rightarrow \infty$. Em C) apresenta-se o comportamento complexo de duas trajetórias sincronizadas no plano $x(t), y(t)$.

4.3. Sistemas de Primeira Ordem Acoplados

Suponha o seguinte sistema dinâmico acoplado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= P_1 - C_1 \sin x_1 - K_1 \sin(x_1 - x_2) \\ \dot{x}_2 &= P_2 - C_2 \sin x_2 - K_1 \sin(x_2 - x_1)\end{aligned}\tag{4.8}$$

É possível provar que o sistema (4.8) satisfaz as hipóteses do Teorema 3.4. Então, os subsistemas de (4.8) irão sincronizar se os parâmetros dos subsistemas 1 e 2 forem próximos e o parâmetro de acoplamento K_1 for suficientemente grande.

A seguir, trabalhar-se-á com o sistema (4.8) para encontrar estimativas do menor parâmetro de acoplamento que garante sincronização para um dado conjunto Λ definido no Teorema 3.4.

Identificando $h(t, x_1, \eta_1) = -P_1 - C_1 \sin x_1$ e $h(t, x_2, \eta_1) = -P_1 - C_1 \sin x_2$, obtém-se:

$$H(x_1, x_2, \eta_1) = -2C_1 \frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2}}{x}$$

Assim, a hipótese (i) do Teorema 3.4 é satisfeita, onde $x := x_1 - x_2$.

A hipótese (ii) do Teorema 3.4 é satisfeita escolhendo

$$G(x_1, x_2) = \frac{\sin(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sin x}{x}.$$

Como $h(t, x, \eta_1) - h(t, x, \eta_2) = \|(P_1 - P_2) - (C_1 - C_2) \sin x\| \leq \|(P_1 - P_2) + (C_1 - C_2)\| \leq O(\|\chi_1 - \chi_2\|)$, então, a hipótese (iii) também é assegurada.

Com H e G definidas anteriormente, obtém-se:

$$-\alpha(x_1, x_2, \eta_1) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{x/2} \left(2 \cos \frac{x}{2} + \frac{C_1}{K_1} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$$

Se $a < \pi$ e $K_1 > s := CL/2$, então não é difícil mostrar que:

$$0 < 2 < w \left(2 - \frac{CL}{K_1} \right) < -\alpha(t, x_1, x_2, \eta_1) < 2 + \frac{CL}{K_1} < 4$$

$$\text{onde } w = \min_{-a < x < a} \left(\frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{x/2} \right) \text{ e } L = \max_{-a < x < a} \left(\frac{1}{\cos \frac{x}{2}} \right).$$

Portanto, a hipótese (iv) é satisfeita para $s = CL/2$, $m = 2$ e $M = 4$.

Assim, de acordo com o Teorema 3.4, toda solução que permanece em

$\Lambda := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x_1 - x_2| < a\}$ para $t \geq 0$ sincroniza se $K_I > CL/2$.

Podem-se utilizar alguns valores numéricos para se obter estimativas numéricas de a , K_I e K_2 . Neste exemplo, escolhe-se $C := C_1 = C_2 = 2$, e $P := P_1 = P_2 = 3$.

Escolhendo $a = \frac{\pi}{2}$ toda solução de (4.8) $(x_1(t), x_2(t))$ que permanece no conjunto $\Lambda := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x_1 - x_2| < \pi/2\}$ para todo $t \geq 0$ sincroniza, no sentido da Definição 3.1, se $K_I > \frac{CL}{2} = \sqrt{2}$.

A Figura 4.7 mostra duas trajetórias do sistema (4.8), com diferentes valores de parâmetros dos subsistemas e mesma constante de acoplamento $K_I = 2$. Em A) os parâmetros são idênticos e iguais. Em B) não há simetria entre os parâmetros. Verifica-se que no primeiro caso sincronização perfeita, enquanto no segundo caso, as trajetórias ficam separadas por uma pequena distância, devido à diferença entre os parâmetros dos subsistemas (1) e (2).

A)

B)

Figura 4.7. Soluções do Sistema (4.8). Em A) os parâmetros do sistema são idênticos $C := C_1 = C_2 = 2$, e $P := P_1 = P_2 = 3$. Em B), tem-se $C_1 = 2$, $C_2 = 1.4$, $P_1 = 2.6$ e $P_2 = 3$. Nos dois casos, a constante de acoplamento é $K_1 = 2$. Verifica-se sincronização perfeita em A) e em B) a diferença entre as trajetórias é da ordem da diferença dos parâmetros dos sistemas.

5. Sincronização e Coerência de Geradores em Sistemas Elétricos de Potência

Até o presente momento, apresentam-se resultados gerais sobre estudos de estabilidade e sincronização que, a princípio, podem ser aplicados em diversos tipos de sistemas dinâmicos. Estes resultados foram mostrados nos Capítulos 2 e 3. Aplicações destes resultados foram apresentadas no Capítulo 4.

Neste Capítulo, os resultados de sincronização apresentados no Capítulo 3 são aplicados ao estudo de sincronização e coerência de geradores em sistemas elétricos de potência. A análise de coerência realizada nesta tese difere bastante da análise de coerência convencionalmente utilizada em sistemas elétricos de potência. Usualmente, as análises de coerência procuram identificar geradores que possuem comportamento similar, ou seja, seus ângulos de rotor se comportam de maneira muito similar quando o sistema é submetido a uma perturbação. Esta é uma exigência muito forte para os objetivos da análise de coerência deste trabalho.

O principal objetivo da análise de coerência realizada nesta tese é a identificação de acoplamentos fortes entre geradores. Acoplamentos fortes podem não ser suficientes para garantir a coerência de geradores no sentido usual, mas são um indicativo da existência de modos de instabilidade combinados CHIANG, *et al.* (1993) e podem fornecer informações importantes a respeito da localização dos pontos de equilíbrio instáveis de controle CHIANG, *et al.* (1994) nas análises de estabilidade transitória via métodos diretos.

Para estudar a existência de acoplamentos fortes entre geradores, utiliza-se o conceito de coerência fraca introduzido em ALBERTO (2000). A coerência fraca deriva do estudo de

coerência em um sistema gradiente reduzido associado ao sistema original. Em particular, estuda-se a relação entre coerência fraca e a localização, no espaço de estados, dos pontos de equilíbrio instáveis de controle. As informações obtidas com a análise de coerência fraca poderão ser utilizadas em futuros trabalhos no desenvolvimento de algoritmos mais eficientes e mais rápidos para o cálculo dos pontos de equilíbrio instáveis de controle.

Este Capítulo começa com uma breve revisão dos estudos de estabilidade e sincronização em Sistemas Elétricos de Potência. Esta revisão tem base no trabalho de ALBERTO (2000), onde se introduziu o conceito de coerência fraca para estes sistemas. Em seguida, apresentam-se os novos resultados e avanços nestes estudos que tiveram como base os resultados teóricos propostos no Capítulo 3. Por fim, um índice que detecta agrupamentos de geradores fracamente coerentes, os chamados *clusters*, em sistemas de potência com diversos geradores e interligações, é proposto. Este índice é uma evolução do algoritmo proposto em ALBERTO (2000). Ele é menos conservador que o algoritmo proposto naquele trabalho na medida em que este índice detecta grupos coerentes que não eram detectados pelo algoritmo de ALBERTO (2000). A grande vantagem deste índice, quando comparado às técnicas existentes de análise de coerência, é que não requer cálculos complexos para a identificação de grupos de geradores coerentes. Os grupos de geradores coerentes são determinados sem a necessidade de simulações numéricas de integração de equações diferenciais e não requerem cálculos de autovalores e autovetores. Determinam-se os geradores coerentes utilizando-se apenas os parâmetros do sistema. Para encerrar o Capítulo, o índice é testado em 2 sistemas elétricos de potência. Em particular, verificam-se a correlação entre a informação de coerência fraca obtida pelo índice e a localização dos pontos de equilíbrio instáveis de controle nestes dois sistemas.

5.1. Introdução ao Estudo de Estabilidade Transitória em Sistemas Elétricos de Potência

Devido ao aumento da demanda de energia elétrica observada nos últimos anos, verificou-se um crescimento dos Sistemas Elétricos de Potência (SEP's) e com isso vários fatores foram decisivos para tornar a operação destes sistemas mais complexa.

As interligações entre os sistemas vieram como consequência da necessidade de redução de custos e maior confiabilidade dos sistemas. Sistemas interligados são vantajosos na medida em que permitem menores reservas energéticas, para, por exemplo: atendimento em horário de pico, atender cargas súbitas, socorrer outros sistemas. Entretanto, as interligações aumentam as correntes de curto-circuito e o problema de estabilidade fica mais complexo.

Fatores ambientais e escassez de recursos financeiros fizeram com que os sistemas passassem a operar mais próximos dos seus limites. Neste cenário, as não-linearidades, intrínsecas ao sistema, tornaram-se mais evidentes e efeitos nunca antes observados passaram a se manifestar.

Além disto, a desregulamentação do setor trouxe consigo um maior grau de incerteza com relação aos pontos de operação destes sistemas. Em função de todos estes fatores, necessitam-se cada vez mais de ferramentas que possam avaliar a segurança destes sistemas em tempo real.

Dentre as análises geralmente realizadas, o estudo de estabilidade transitória é fundamental para que, na presença de perturbações ou defeitos, ações emergenciais possam ser tomadas de maneira a se evitar a interrupção do fornecimento de energia ou blecautes na rede.

Um sistema elétrico é composto, basicamente, de geradores síncronos, linhas de transmissão, cargas e elementos de controle. A operação do sistema em regime permanente é aquela em que suas grandezas não variam com o tempo, o que implica que não existe desbalanço energético, ou seja, a potência gerada é igual à potência consumida mais as perdas inerentes ao sistema.

Perturbações no sistema tais como curtos-circuitos e variações de carga quebram o balanço de potência excitando uma ou mais dinâmicas no sistema. Os estudos de estabilidade têm por objetivo a análise do comportamento dinâmico do sistema, bem como a determinação de ações de controle necessárias à estabilização do mesmo.

Em sistemas de potência, os estudos de estabilidade dividem-se basicamente, segundo a intensidade da perturbação, em dois tipos: estabilidade a grandes perturbações, ou estabilidade transitória, e estabilidade a pequenas perturbações. Esta divisão refere-se à diferença de objetivos de estudo, fatos que levam a diferentes modelagens dos sistemas elétricos de potência sob análise.

No estudo de estabilidade transitória, o sistema está sujeito a grandes distúrbios. Neste tipo de estudo, como as perturbações são grandes, as não-linearidades inerentes ao sistema elétrico não podem ser desprezadas e o problema é modelado por um conjunto de equações diferenciais ordinárias não-lineares e autônomas.

A análise de estabilidade a grandes perturbações está primariamente preocupada com a manutenção do “sincronismo” entre as máquinas síncronas do sistema. Como o mecanismo de instabilidade devido à perda de sincronismo entre as máquinas ocorre num intervalo de no máximo alguns segundos, a atuação de controladores pode, em alguns casos, ser desprezada.

A ocorrência de uma falta (perturbação), como por exemplo, um curto-circuito,

proporciona um desbalanço de energia no sistema e as máquinas começam a acelerar ou desacelerar. Na grande maioria dos casos, o sistema na configuração *falta* não é estável e uma intervenção é necessária para evitar o desligamento de geradores.

Após a intervenção, como, por exemplo, a atuação do sistema de proteção, o sistema adquire uma nova configuração, e nesta nova configuração o sistema deve atingir um novo ponto de operação estável.

Se a trajetória do sistema convergir para um ponto de operação estável após a intervenção, o sistema é dito transitoriamente estável. O tempo máximo em que a intervenção tem de ocorrer para que o sistema permaneça estável é dito tempo crítico de abertura (t_{cr}). Logo, se a intervenção ocorrer após o tempo crítico de abertura, o sistema é transitoriamente instável, e caso contrário, transitoriamente estável. A determinação do tempo crítico de abertura é, portanto, o que se deseja encontrar em estudos de estabilidade transitória.

O método clássico para estudos de estabilidade transitória, que se utiliza de inúmeras integrações numéricas no domínio do tempo para simular o sistema, é inadequado para aplicação em tempo real. Com o intuito de obter técnicas adequadas para estudos de estabilidade em tempo real, desenvolveram-se os chamados métodos diretos, uma vez que eles fornecem informações a respeito da estabilidade diretamente, ou seja, sem a necessidade da solução explícita das equações diferenciais.

O critério das áreas iguais foi o primeiro método direto proposto na literatura para o estudo da estabilidade de sistemas de uma máquina versus barramento infinito. Posteriormente, várias metodologias de análise foram propostas para sistemas multimáquinas gerais. Inicialmente as idéias de Lyapunov associadas ao Princípio de Invariância de LaSalle eram utilizadas para estimar a bacia de atração dos sistemas

elétricos de potência. Tomava-se, dentre todos os pontos de equilíbrio instáveis na fronteira da bacia de energia potencial, aquele que possuía a menor energia. Este valor de energia era então utilizado para obter uma estimativa da área de atração. Logo, percebeu-se que esta técnica levava a resultados muito conservadores, ou seja, estimava-se um tempo de abertura que poderia ser muito inferior ao tempo crítico verdadeiro. Este conservadorismo é uma consequência natural do Princípio de Invariância de LaSalle, o qual fornece condições suficientes de estabilidade, porém não necessárias. Além disso, o número de pontos de equilíbrio em um sistema de grande porte é muito grande, tornando este procedimento proibitivo para aplicação em tempo real.

Com o intuito de obter estimativas menos conservadoras do tempo crítico de abertura, o conceito do ponto de equilíbrio de controle foi criado. Com este conceito, em vez de utilizar-se o ponto de equilíbrio instável de menor energia, passa-se a utilizar o ponto de equilíbrio que está mais “próximo” da trajetória do sistema em falta. Muitas técnicas de determinação do ponto de equilíbrio de controle foram propostas e os estudos, nesta direção, culminaram com o desenvolvimento do método BCU, resultado de vários estudos teóricos feitos por CHIANG *et al.* (1988-a,1994).

Embora os avanços obtidos em estudos de estabilidade transitória tenham sido significativos, existem alguns obstáculos que dificultam a aplicação destes métodos a análises de sistemas reais. Um destes obstáculos é o cálculo dos pontos de equilíbrio de controle que demanda um grande esforço computacional. Uma das motivações desta pesquisa é que a análise de coerência de geradores pode trazer informações importantes a respeito da localização dos pontos de equilíbrio assim como dos modos de instabilidade. Com esta informação, algoritmos mais eficientes podem ser projetados para o cálculo dos pontos de equilíbrio de controle.

5.2. Coerência de Geradores

Na literatura de sistemas elétricos de potência, duas máquinas são ditas coerentes se, após uma certa perturbação, elas apresentam um comportamento dinâmico similar.

Na literatura, existem diversas definições de coerência. Neste trabalho, o conceito de coerência pode ser traduzido matematicamente por:

Definição 5.1: *Duas máquinas são ditas ε -coerentes ou coerentes com precisão ε se*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\delta_i(t) - \delta_j(t)| \leq \varepsilon$$

Em outras palavras, as máquinas são ε -coerentes se e só se seus ângulos de rotores sincronizam com precisão ε .

Como um caso limite da definição anterior, pode-se definir o conceito de coerência perfeita entre duas máquinas. Obviamente isto é algo muito difícil de ocorrer em sistemas reais, entretanto, estes casos limites são úteis para entender o comportamento dos sistemas.

Definição 5.2: *Duas máquinas são ditas perfeitamente coerentes se atender à Definição 5.1 e adicionalmente:*

$$|\delta_i(t) - \delta_j(t)| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty$$

Ou seja, as máquinas são perfeitamente coerentes se e somente se os ângulos de seus rotores sincronizam absolutamente quando o tempo tende ao infinito.

Como citado na Seção 1.3, existem vários métodos para identificação de geradores coerentes em sistemas de potência. Classicamente, os geradores coerentes são identificados através de simulações no domínio do tempo para uma contingência específica. Então, os ângulos dos rotores são comparados diretamente e aqueles que apresentam um comportamento muito similar são classificados como coerentes.

Uma outra abordagem de identificação de geradores coerentes é aquela que analisa diretamente a matriz de estados do sistema linearizado TROULINOS e DORSEY (1989) e DE TUGLIE, *et al.* (2008). Em CHOW (1982) e YOU, *et al.* (2004) é feita uma análise dos autovetores associados com os modos de oscilação do sistema para identificação de geradores coerentes. Esta última alternativa possui um embasamento teórico mais refinado do que as outras abordagens. Entretanto, muitos pesquisadores afirmam que os três métodos apresentam resultados semelhantes.

A principal desvantagem do método clássico é que ele exige um grande esforço computacional que o torna inapropriado para aplicações em tempo real. Além disso, a informação de coerência é garantida apenas para configurações e contingências específicas. Por outro lado, o principal problema das outras duas metodologias é que ambas linearizam as equações para realizar os estudos de coerência, o que pode levar a resultados não muito confiáveis e requerem esforço computacional elevado na medida em que requerem, em geral, o cálculo de autovalores e autovetores da matriz jacobiana do sistema linearizado.

Neste trabalho desenvolver-se-á um método de análise de coerência que possui as seguintes características:

- i. É aplicado diretamente ao modelo não linear do sistema de potência
- ii. Não requer integração numérica para obtenção das soluções do sistema

- iii. Não depende da contingência mas apenas da configuração pós-falta
- iv. Não requer esforço computacional elevado

Estas características permitem que a análise de coerência possa ser utilizada como ferramenta auxiliar em aplicações em tempo real. Será visto ao final deste Capítulo como esta ferramenta pode ser utilizada para obter informações importantes sobre a localização dos pontos de equilíbrio instáveis de controle nas análises de estabilidade transitória via métodos diretos.

5.3. Análise de Coerência e Estudos dos Pontos de Equilíbrio num Sistema de Duas Máquinas versus um Barramento Infinito

Nesta Seção estudou-se o caso mais simples de análise de coerência, que é o estudo de sincronismo em um sistema de duas máquinas versus um barramento infinito.

Considere o sistema composto por duas máquinas e um barramento infinito mostrado na Figura 5.1.

Figura 5.1. Sistema de duas máquinas versus Barramento Infinito.

Segundo a modelagem apresentada na Seção 4 do Apêndice A, este sistema é representado matematicamente pelo seguinte conjunto de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_1 = \omega_1 \\ M_1 \dot{\omega}_1 = P_1 - C_1 \sin(\delta_1) - K_1 \sin(\delta_1 - \delta_2) - D_1 \omega_1 - K_2 (\delta_1 - \delta_2) \\ \dot{\delta}_2 = \omega_2 \\ M_2 \dot{\omega}_2 = P_2 - C_2 \sin(\delta_2) - K_1 \sin(\delta_2 - \delta_1) - D_2 \omega_2 - K_2 (\delta_2 - \delta_1) \end{cases} \quad (5.1)$$

onde P_1 , P_2 , C_1 , C_2 , D_1 e D_2 são constantes do subsistema 1 e 2 enquanto K_1 e K_2 são constantes de acoplamento.

O sistema (5.1) pode ser visto como sendo constituído por dois sistemas, cada um representando uma máquina do sistema. Estas máquinas são acopladas por um termo não-linear que é função do parâmetro K_1 da linha de transmissão equivalente que conecta ambas as máquinas.

Quando as máquinas 1 e 2 são fracamente acopladas, ou seja, K_1 é pequeno, existem pontos de equilíbrio instáveis que podem ser associados aos modos instáveis de cada máquina individualmente. Esta situação é ilustrada na Figura 5.2a). Por outro lado, quando as máquinas são fortemente acopladas, ou seja, K_1 é suficientemente grande, então as máquinas tendem a se comportar similarmente e os pontos de equilíbrio instáveis bifurcam, restando apenas um único ponto de equilíbrio muito perto da diagonal e consequentemente um único modo de instabilidade combinado. Esta situação é mostrada na Figura 5.2b).

Figura 5.2. Curvas de nível da energia potencial^{††} para o sistema de duas máquinas e um barramento infinito, $P_1=0.8$, $P_2=1.5$, $C_1=1.7$, $C_2=2.0$ e $M_1=M_2=1$. Pontos extremos da função energia potencial correspondem a equilíbrios do sistema (5.1).

O Lema a seguir apresenta, a partir dos resultados teóricos demonstrados no Capítulo 3, uma estimativa suficiente dos parâmetros de acoplamento que garantem sincronização no sistema de duas máquinas versus um barramento infinito.

Lema 5.3. *Considere o sistema de potência formado por duas máquinas versus um barramento infinito (5.1). Dado $0 < a < \pi$ e o conjunto*

$$\Lambda := \{(\delta_1, \omega_1, \delta_2, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : |\delta_1 - \delta_2| < a\},$$

existem constantes positivas s e S tais que as máquinas 1 e 2 sincronizam no sentido da Definição 3.2 se $K_1 > s$ e $K_2 > S$, isto é, dado

$$\text{um } \varepsilon > 0, \text{ arbitrariamente pequeno, existe um } \gamma > 0 \text{ tal que } [|P_1 - P_2| + |C_1 - C_2| + |D_1 - D_2|] < \gamma$$

implica que toda trajetória que permanece em Λ para $t > 0$ é ε -coerente no sentido da

Definição 5.1.

^{††} A função energia potencial para o sistema de duas máquinas versus um barramento infinito é dada por $V_p(\delta_1, \delta_2) = -P_1\delta_1 - C_1 \cos \delta_1 + D_1 \sin \delta_1 - P_2\delta_2 - C_2 \cos \delta_2 + D_2 \sin \delta_2 - K_1 \cos(\delta_1 - \delta_2) + cte$. A constante de integração neste caso foi considerada igual a zero.

Demonstração: Identificando-se $h(t, \delta_1, \eta_1) = -P_1 - C_1 \sin \delta_1$, $h(t, \delta_2, \eta_1) = -P_1 - C_1 \sin \delta_2$ e

$$H(\delta_1, \delta_2, \eta_1) = -2C_1 \frac{\sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}}{x}, \text{ onde } \delta := \delta_1 - \delta_2 \text{ e escolhendo-se } G(\delta_1, \delta_2) = \frac{\sin(\delta_1 - \delta_2)}{\delta_1 - \delta_2} =$$

$\sin \delta / \delta$, pode-se mostrar que as condições (i), (ii) e (iii) do Teorema 3.3 do Capítulo 3 são satisfeitas. Como consequência direta da fórmula da variação das constantes, prova-se que as velocidades das máquinas são limitadas e, portanto, a hipótese (iv) do Teorema 3.3 é satisfeita. Por fim, como $a < \pi$, $K_1 > s$, tem-se que a hipótese (v) também é satisfeita. Portanto, existe constante S dependendo de s tal que dado $\varepsilon > 0$, existe $\gamma > 0$ tal que $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\delta_2(t) - \delta_1(t)\| \leq O(|P_1 - P_2| + |C_1 - C_2|) < \varepsilon$ e portanto, as máquinas são ε -coerentes no sentido da Definição 5.1.

Do ponto de vista prático, o Lema 5.3 exige que a constante de acoplamento K_2 , que representa a constante de amortecimento devido a torques assíncronos, seja muito grande quando comparada aos valores típicos de K_2 em SEP's. No exemplo estudado na Seção 4.1, por exemplo, o modelo dos pêndulos surge do estudo de estabilidade transitória em Sistemas de Potência. Naquele exemplo, o modelo representava duas máquinas versus um barramento infinito. Para aquele caso, verificou-se que torques assíncronos maiores que 1.5 p.u. são estimados para garantir coerência entre as máquinas, quando se consideram os parâmetros $C_1 = C_2 = 2$, $D_1 = D_2 = 1$ e $P_1 = P_2 = 3$. Apesar de sua elegância teórica, o resultado não traz informações importantes sobre coerência em sistemas reais.

De fato, a coerência no sentido usualmente empregado em sistemas elétricos de potência é muito exigente para os objetivos deste trabalho. Na próxima Seção, utilizando um sistema exemplo e simulações computacionais, será mostrado que a análise de coerência em um sentido mais fraco será mais adequada para os nossos objetivos. Na Seção 5.5, uma

alternativa para estudos de sincronização de tais sistemas, que é o estudo da coerência do sistema gradiente reduzido associado ao sistema original será apresentada. A este tipo de coerência, dá-se o nome de *coerência fraca*.

5.4. Coerência Fraca, Equilíbrios e Modos Combinados de Instabilidade

Nosso objetivo principal ao estudar coerência em sistemas de potência é o estudo da localização dos pontos de equilíbrio instáveis e dos modos de instabilidade do sistema, informações estas que poderão contribuir futuramente para agilizar a análise de estabilidade transitória via métodos diretos.

Entretanto, será mostrado neste Capítulo que o conceito tradicional de coerência não é adequado para os objetivos deste trabalho. Para entender estes conceitos, considere o seguinte exemplo:

Exemplo 1:

Utilizando simulações no domínio do tempo, estudou-se a coerência dos geradores num sistema teste de 7 geradores e 10 barras do CIGRÉ (*International Council on Large Electric Systems*), para uma determinada contingência. O diagrama deste sistema está apresentado na Figura 5.3.

TABELA 5.1. Dados do Sistema.

Barra	Tipo (^{††})	Tensão (p.u.)	Ângulo (°)	Carga (MVA) (MVar)		Reatância Transitória x'_d (p.u.)	Constante de Inércia (s ²)
1	S	1.000	0.0	0	0	0.07	0.060
2	G	1.000	-8.3	200.0	120.0	0.12	0.041
3	G	1.000	-1.8	0	0	0.06	0.076
4	G	1.000	-4.5	650.0	405.0	0.05	0.095
5	G	1.000	-1.8	0	0	0.07	0.060
6	G	1.000	-3.4	80.0	30.0	0.07	0.067
7	G	1.000	-0.9	90.0	40.0	0.08	0.056
8	C	0.965	-4.6	100.0	50.0	—	—
9	C	0.918	-7.2	230.0	140.0	—	—
10	C	0.977	-7.9	90.0	45.0	—	—

TABELA 5.2. Dados da Linha de Transmissão.

Linha	Barra Origem	Barra Destino	$R^{§§}$ (p.u)	X (p.u)	C_{shunt} (p.u)
1	1	3	0.00988	0.04839	0.20251
2	1	4	0.00988	0.04839	0.10125
3	2	3	0.04503	0.12366	0.20251
4	2	10	0.01630	0.06380	0.30376
5	3	4	0.01185	0.07803	0.30376
6	3	9	0.01135	0.05531	0.20251
7	4	5	0.00395	0.01975	0.20251
8	4	6	0.00741	0.04888	1.21506
9	4	9	0.04879	0.19161	0.20251
10	4	10	0.01629	0.06518	0.30376
11	6	8	0.01876	0.06282	0.20251
12	7	8	0.01185	0.07803	0.30376
13	8	9	0.04879	0.19161	0.20251

A potência base utilizada é de 100MVA.

Integrando-se numericamente as equações diferenciais que modelam o sistema multimáquinas da Figura 5.3 (vide Seção A.5 do apêndice A para maiores detalhes de modelagem), obtêm-se os ângulos e as velocidades dos rotores em função do tempo conforme mostrado na Figura 5.4.

^{††} **S** indica a barra usada como referência, **G** indica qual barra contém um gerador e **C** é uma barra de carga.

^{§§} **R** é a resistência da linha, enquanto **X** é sua reatância indutiva e **Cshunt** é a reatância capacitiva da linha em p.u..

Figura 5.4. Simulações dos ângulos dos rotores no domínio do tempo, para o Sistema CIGRÉ 7 geradores e 10 barras da Figura 5.3. *a)* Tempo de abertura = 0.2s *b)* Tempo de abertura = 0.5s. Neste caso, os ângulos dos rotores são medidos com relação a referência síncrona. A contingência é um curto-circuito trifásico que ocorre nas vizinhanças da barra 6 e o defeito é isolado pela eliminação da linha 4-6.

A Figura 5.4.a) mostra os ângulos dos rotores das máquinas do sistema para um tempo de abertura de 0.2s. Observe que, para este tempo de abertura, todas as máquinas continuam oscilando “juntas”. A análise visual da dinâmica não permite a obtenção de informações muito claras a respeito da existência de acoplamentos fortes entre geradores. A única evidência que é observada a partir desta figura é que a falta excitou os geradores 6 e 7 de forma mais significativa que os demais.

Entretanto, a Figura 5.4.b) mostra os ângulos dos rotores para um tempo de abertura de 0.5s. Embora o curto-circuito tenha acelerado com maior intensidade a máquina 6, após a eliminação do defeito, a máquina 7 também perde o sincronismo com as demais máquinas do sistema, sugerindo um acoplamento fraco dos geradores 6 e 7 com relação às demais máquinas do sistema e a existência de um modo combinado de instabilidade. De fato, ao se utilizar o método BCU proposto em CHIANG, *et al.* (1994),

para o sistema representado pela Figura 5.3, encontra-se o seguinte ponto de equilíbrio instável de controle:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -0.7171 & \delta_2 &= -0.9222 & \delta_3 &= -0.7365 & \delta_4 &= 0.8492 & \delta_5 &= 0.7551 \\ \delta_6 &= 2.0846 & \delta_7 &= 2.1986 \end{aligned}$$

Pela análise do ponto de equilíbrio, verifica-se que ambos δ_6 e δ_7 são grandes e próximos, reforçando a hipótese de que as máquinas 6 e 7 estão fortemente acopladas e possuem um modo de instabilidade combinado.

Apesar da evidência de acoplamentos fortes entre os geradores 6 e 7 e que as máquinas 6 e 7 estão fracamente acopladas com o restante do sistema na condição pós-falta, o comportamento angular apresentado nas simulações da Figura 5.4 não estão de acordo com a Definição 5.1 de coerência. Por exemplo, na Figura 5.4 (b) quando $t=2s$, $\delta_6 - \delta_7 \approx 10 \text{ rad}$, ou seja, as máquinas 6 e 7 perdem o sincronismo entre elas.

Por isso, essa definição não é adequada para o nosso objetivo, que seria estudar os acoplamentos fortes e suas conseqüências em termos dos pontos de equilíbrio instáveis e dos modos de instabilidade.

Para tentar identificar a existência de acoplamentos fortes entre geradores, propõe-se o seguinte teste numérico. Suponha que se queira saber se a máquina i possui acoplamento forte com outros geradores. Aplica-se uma perturbação **fictícia** na potência mecânica deste gerador e verifica-se o comportamento dinâmico do sistema. Espera-se que máquinas fortemente acopladas com a máquina i sejam mais afetadas pela perturbação na máquina i do que as demais.

Inicialmente, verificar-se-á o comportamento do sistema da Figura 5.3. em regime permanente, ou seja, numa situação de equilíbrio. Isto é apresentado na Figura 5.5. Nesta simulação ao invés de verificar diretamente os ângulos dos geradores com

relação à referência síncrona, consideram-se agora as diferenças angulares dos geradores com relação à máquina 1. Assim, o gráfico mostra $\Delta\delta_i = \delta_i - \delta_1$, onde $i=1,\dots,7$ (número dos geradores) e δ_i é o ângulo do gerador i .

Figura 5.5. Comportamento das diferenças angulares dos geradores do sistema em regime permanente do Sistema CIGRÉ de 7 geradores e 10 barras da Figura 5.3.

Perceba que como se considerou a máquina 1 como referência, a diferença angular com relação a ela é zero. As demais diferenças dos ângulos dos geradores quase não variam no tempo, o que caracteriza o comportamento do sistema em regime permanente.

A seguir, adicionar-se-á uma perturbação **fictícia** na potência mecânica em um dos geradores deste sistema causando uma variação desta potência no tempo.

No primeiro teste realizado, à potência mecânica da máquina 7, adicionou-se uma perturbação **fictícia** de tal maneira que a sua expressão fica:

$$\text{TESTE 1: } P_{m_7} = P_{m_{70}} (1 + \sin \omega_p t) \quad (5.2)$$

onde $P_{m_{70}}$ é a potência mecânica constante injetada no gerador 7;

- ω_p é a frequência angular correspondente à 5Hz, ou seja $\omega_p \approx 31,42$ rad/s.

Num segundo teste, adicionou-se uma outra perturbação **fictícia**, incluindo um ruído aleatório^{***} que modifica o valor de ω_p . Assim, a expressão da potência mecânica do gerador 7 é representada matematicamente por:

$$\text{TESTE 2: } P_{m_7} = P_{m_{7_0}} (1 + \sin(\omega_p \times rand)t) \quad (5.3)$$

onde *rand* é uma variável aleatória que assume valores entre zero e um, para cada tempo *t*. As demais variáveis de (5.3) são as mesmas descritas em (5.1).

Embora as perturbações sejam apenas fictícias, elas têm objetivo principal de tentar evidenciar a existência de acoplamentos fortes entre geradores, independentemente da contingência.

As simulações do sistema, para estes dois testes são apresentadas na Figura 5.6.

Figura 5.6. Comportamento das diferenças angulares dos geradores do sistema da Fig. 5.3, para condições pré-falta, com uma alteração **fictícia** da potência mecânica injetada do gerador 7. A expressão da potência mecânica do gerador em questão é dada por (5.2).

^{***} Neste caso, considera-se apenas uma amostra da variável aleatória *rand*.

Embora as diferenças angulares oscilem, não se consegue obter qualquer informação sobre geradores em particular quanto à sua sincronia ou coerência, segundo a definição usual (Definição 5.1).

Percebe-se que as diferenças angulares oscilam e embora as oscilações dos geradores 6 e 7 tenham maior amplitude, fica difícil, visualmente, obter-se qualquer informação sobre geradores fortemente acoplados.

Outros testes foram propostos, simulando o sistema anterior com amortecimento uniforme e assíncrono, porém, através dos gráficos, nenhuma informação de coerência foi adquirida.

A seguir mostrar-se-á que a informação do acoplamento forte entre geradores e dos respectivos modos de instabilidade pode ser obtida a partir de um sistema fictício que é o sistema gradiente reduzido. Para maiores detalhes sobre a modelagem do sistema em termos do gradiente reduzido, vide a Seção A.6 do Apêndice. A análise de sincronização ou coerência neste sistema fictício associado será denominada coerência fraca e será visto que ela é mais adequada para os nossos objetivos.

O conceito de coerência fraca foi apresentado pela primeira vez em RODRIGUES, ALBERTO e BRETAS (2000). Reproduz-se esta definição a seguir:

Definição 5.4: *Duas máquinas são ditas fracamente coerentes se elas forem coerentes com relação ao sistema gradiente reduzido.*

Análises experimentais mostram que informações importantes sobre o sistema original podem ser extraídas a partir da análise da coerência fraca.

A seguir, apresentam-se os resultados de testes 1 e 2 apresentados na Seção anterior, porém para o sistema gradiente reduzido associado ao sistema original da Figura 5.3.

TESTE 3:

Neste teste, adiciona-se ao sistema um curto-circuito sólido trifásico na vizinhança do gerador 6 e o defeito é eliminado depois de 0.1s pela remoção da linha 4-6. A Figura 5.7a) mostra o comportamento do sistema gradiente reduzido pós-falta, quando se aplica uma perturbação fictícia na potência mecânica do gerador 7, a partir do tempo $t=0.8s$, de modo que a potência mecânica injetada seja representada matematicamente por $P_{m7} = P_{m70}(1 + 0.5 \sin \omega_p t)$, onde $\omega_p \approx 31.42$ rad/s e P_{m70} é a potência inicial da máquina 7. Já na Figura 5.7b) uma perturbação semelhante é aplicada no gerador 6, também a partir de $t=0.8s$, de modo que a potência da máquina seja dada por:

$$P_{m6} = P_{m60}(1 + 0.5 \sin \omega_p t).$$

Figura 5.7. Simulação do comportamento dos ângulos no sistema gradiente reduzido associado ao sistema original da Figura 5.3, considerando o TESTE 3. a) perturbação fictícia no gerador 7. b) perturbação fictícia no gerador 6.

Verifica-se que para estas perturbações, excitou-se um modo estável, fazendo com que as máquinas 6 e 7 oscilem juntas enquanto os ângulos das outras máquinas permanecem praticamente inalterados conforme o tempo varia. Verifica-se também que elas estão em fase.

Estes testes confirmam que as análises do sistema gradiente reduzido trazem de maneira mais clara a informação de acoplamento forte entre os geradores.

5.5. Coerência Fraca e Equilíbrios em um Sistema de Duas Máquinas

Versus um Barramento Infinito

RODRIGUES, ALBERTO e BRETAS (2000) estudaram, do ponto de vista teórico, o problema de localização de pontos de equilíbrios em um sistema de duas máquinas versus um barramento infinito mostrado na Figura 5.1. A seguir, serão mostrados os principais resultados daquele trabalho.

Considere as equações diferenciais que modelam um sistema de duas máquinas versus barramento infinito:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_1 = \omega_1 \\ M_1 \dot{\omega}_1 = P_1 - C_1 \sin \delta_1 - K_1 \sin(\delta_1 - \delta_2) \\ \dot{\delta}_2 = \omega_2 \\ M_2 \dot{\omega}_2 = P_2 - C_2 \sin \delta_2 - K_1 \sin(\delta_2 - \delta_1) \end{cases} \quad (5.4)$$

onde as condutâncias de transferência foram desprezadas.

O sistema gradiente reduzido associado ao sistema original (5.4) é dado pelo sistema a seguir:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_1 = P_1 - C_1 \sin(\delta_1) - K_1 \sin(\delta_1 - \delta_2) \\ \dot{\delta}_2 = P_2 - C_2 \sin(\delta_2) - K_1 \sin(\delta_2 - \delta_1) \end{cases} \quad (5.5)$$

É fácil verificar que (δ_1, δ_2) é um ponto de equilíbrio de (5.5) se e somente se $(\delta_1, 0, \delta_2, 0)$ é um ponto de equilíbrio de (5.4). Portanto, para estudar pontos de equilíbrio do sistema original, é suficiente estudar a localização dos pontos de equilíbrio do sistema gradiente reduzido. Outras relações mais complexas entre o sistema original e o sistema gradiente reduzido são vistas em CHIANG, *et al* (1988-b).

Com o intuito de simplificar as análises, observe que o campo vetorial de (5.4) é 2π -periódico tanto em δ_1 como em δ_2 . Sendo assim, as soluções $(\delta_1(t, \delta_{10}, \delta_{20}), \delta_2(t, \delta_{10}, \delta_{20}))$ das equações diferenciais (5.4) satisfazem a seguinte propriedade:

$$(\delta_1(t, \delta_{10} + 2\pi, \delta_{20} + 2\pi), \delta_2(t, \delta_{10} + 2\pi, \delta_{20} + 2\pi)) = (\delta_1(t, \delta_{10}, \delta_{20}) + 2\pi, \delta_2(t, \delta_{10}, \delta_{20}) + 2\pi)$$

Portanto, podem-se estabelecer as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} \delta_1 &\equiv \delta_1 + 2\pi \\ \delta_2 &\equiv \delta_2 + 2\pi \end{aligned}$$

e as soluções podem ser representadas num toro T^2 . Considerar-se-á, portanto, que δ_1 e $\delta_2 \in [-\pi, \pi]$, e o toro será representado por um quadrado de lado 2π centrado na origem de $\mathbb{R}^2$. Devido à equivalência estabelecida anteriormente, tem-se que $-\pi \equiv \pi$, isto é equivalente a curvar o quadrado e unir o lado $-\pi$ com o lado π . Fazendo-se isso na direção de δ_1 e δ_2 , obtém-se o toro T^2 . Tudo se passa como se as soluções estivessem girando neste toro. A razão para representar as soluções num toróide é que todas as

soluções, mesmo em condições instáveis, com saltos de pólos, são limitadas e o número de equilíbrios é finito.

O seguinte Lema estuda a localização de pontos de equilíbrio de (5.5) e fornece uma condição sobre o parâmetro de acoplamento que garante que os pontos de equilíbrio pertencem à diagonal 1-2 quando os parâmetros de ambas as máquinas são numericamente idênticos. Este Lema foi apresentado em ALBERTO (2000).

Lema 5.5: *Considere o sistema gradiente reduzido (5.5) associado ao sistema de duas máquinas e um barramento infinito (5.4) com $P = P_1 = P_2$, $C_1 = C_2$. Se $K_1 > \frac{C_1^2}{4P}$ então todo ponto de equilíbrio $(\delta_{1eq}, \delta_{2eq})$ pertencerá à diagonal, isto é $\delta_{1eq} = \delta_{2eq}$.*

Demonstração:

Nos pontos de equilíbrio de (5.5), as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{cases} P_1 - C_1 \sin(\delta_1) = K_1 \sin(\delta_1 - \delta_2) \\ P_2 - C_2 \sin(\delta_2) = K_1 \sin(\delta_2 - \delta_1) \end{cases} \quad (5.6)$$

O objetivo, então, é estabelecer condições que garantam que todos os pontos de equilíbrio estejam localizados na diagonal do plano $\mathbb{R}^2$, ou seja, $\delta_{1eq} = \delta_{2eq}$. Por hipótese $P = P_1 = P_2$ e $C_1 = C_2$. Logo, o sistema de equações (5.6) torna-se:

$$\begin{cases} \frac{P}{C_1} - \sin(\delta_1) = \frac{K_1}{C_1} \sin(\delta_1 - \delta_2) \\ \frac{P}{C_1} - \sin(\delta_2) = \frac{K_1}{C_1} \sin(\delta_2 - \delta_1) \end{cases}$$

De agora em diante, serão feitas algumas operações com o sistema de equações anterior com o objetivo de escrevê-lo numa forma conveniente.

Para simplificar a notação, define-se $h := \frac{P}{C_1}$ e $g := \frac{K_1}{C_1}$. Com estes novos parâmetros obtém-se:

$$\begin{cases} h - \sin(\delta_1) = g \sin(\delta_1 - \delta_2) \\ h - \sin(\delta_2) = g \sin(\delta_2 - \delta_1) \end{cases} \quad (5.7)$$

Somando e subtraindo as expressões anteriores, obtém-se o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} \sin(\delta_1) + \sin(\delta_2) = 2h \\ \sin(\delta_1) - \sin(\delta_2) = -2g \sin(\delta_1 - \delta_2) \end{cases}$$

que por sua vez é equivalente a:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) = h \\ \sin\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) + 2g \sin\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Colocando em evidência o termo $\sin\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right)$, obtém-se o seguinte sistema de igual valor:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) = h \\ \sin\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) \left[\sin\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) + 2g \sin\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) \right] = 0 \end{cases}$$

portanto,

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) = h \\ \sin\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) [\sin(\delta_1 + \delta_2) + 4gh] = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

Usando o fato que $|\sin(\delta_1 + \delta_2) + 4gh| \geq 4gh - 1$, e admitindo que $g > 1/4h$, ou equivalentemente, $K_1 > C_1^2/4P$, obtém-se da segunda equação de (5.8) que $\sin\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) = 0$, e, portanto, $\delta_1 = \delta_2$ ■

O Lema seguinte estuda a localização dos pontos de equilíbrio quando uma pequena perturbação quebra a similaridade entre os parâmetros. Isto prova que os pontos de equilíbrio tenderão à diagonal 1-2 quando os parâmetros tendem a se tornarem similares.

Lema 5.6. *Considere o sistema gradiente reduzido (5.5) associado ao sistema de duas máquinas versus um barramento infinito (5.4). Se $\left[|P_1 - P_2| + |C_1 - C_2|\right]$ é suficientemente pequeno e K_1 é suficientemente grande, então os pontos de equilíbrio estão muito próximos da diagonal $\delta_{1eq} \approx \delta_{2eq}$. Mais precisamente, têm-se:*

$$\delta_{2eq} - \delta_{1eq} = O\left[|P_1 - P_2| + |C_1 - C_2|\right]$$

A demonstração foi realizada em ALBERTO (2000) e requer conhecimentos do Teorema da Função Implícita.

Outras informações podem ser extraídas a partir do sistema (5.5). O resultado seguinte afirma que muitas soluções de (5.5) tendem a um conjunto próximo à diagonal quando os parâmetros das máquinas são numericamente similares e o parâmetro de acoplamento é suficientemente grande. Em outras palavras, as máquinas serão perfeitamente fracamente coerentes quando os parâmetros das máquinas são similares e o parâmetro de acoplamento é suficientemente grande.

Lema 5.7. *Considere o sistema gradiente reduzido (5.5) associado ao sistema de duas máquinas versus um barramento infinito. Dado $0 < a < \pi$ e o conjunto $\Lambda := \{(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |\delta_1 - \delta_2| < a\}$, existe uma constante s tal que as máquinas 1 e 2 sincronizam no sentido da Definição 3.2 se $K_1 > s$, isto é, dado um $\varepsilon > 0$, arbitrariamente*

pequeno, existe um $\gamma > 0$ tal que $[|P_1 - P_2| + |C_1 - C_2|] < \gamma$ implica que toda trajetória que permanece em Λ para $t > 0$ é fracamente coerentes no sentido da Definição 5.4.

Demonstração: Identificando-se $h(t, \delta_1, \eta_1) = -P_1 - C_1 \sin \delta_1$, $h(t, \delta_2, \eta_1) = -P_1 - C_1 \sin \delta_2$,

$$H(\delta_1, \delta_2, \eta_1) = -2C_1 \frac{\sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}}{x} \quad \text{e} \quad \text{escolhendo-se} \quad G(\delta_1, \delta_2) = \frac{\sin(\delta_1 - \delta_2)}{\delta_1 - \delta_2} = \sin \delta / \delta, \quad \text{onde}$$

$\delta := \delta_1 - \delta_2$, pode-se verificar que as hipóteses (i), (ii) e (ii) do Teorema 3.4 são satisfeitas. Enfim, como $a < \pi$ e $K_1 > s$, tem-se que a hipótese (iv) do Teorema 3.4 também é verificada. Portanto, existe uma constante s tal que dado um $\varepsilon > 0$, existe um $\gamma > 0$ tal que $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\delta_2(t) - \delta_1(t)\| \leq O(|P_1 - P_2| + |C_1 - C_2|) < \varepsilon$ e, portanto, as máquinas são ε -coerentes no sentido da Definição 5.1. ■

5.6. Detecção de Grupos de Geradores Coerentes

Nesta Seção, serão utilizados os resultados apresentados em ALBERTO (2000) relacionados à identificação de geradores coerentes em sistemas multimáquinas, reunir os resultados obtidos até agora e propor um índice capaz de identificar grupos de geradores coerentes num sistema de potência de maior porte.

Os Lemas 5.5, 5.6 e 5.7 apresentados no Capítulo 5 levam em consideração sistemas formados por apenas dois geradores. Deseja-se obter resultados para sistemas multimáquinas onde se pretende identificar dentro de um conjunto de n máquinas, um subconjunto de máquinas que sejam coerentes entre si.

Para efeito de análise de estabilidade transitória, um sistema multimáquinas é descrito pelo seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i = \omega_i \\ M_i \omega_i = P_i - C_i \sin \delta_i - D_i \cos \delta_i - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n C_{ij} \sin(\delta_i - \delta_l) - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n D_{ij} \cos(\delta_i - \delta_l) - D_i \omega_i \end{cases} \quad (5.9)$$

com $i = 1, \dots, n$. O significado das constantes P_i, C_i, D_i e C_{mn}, D_{mn} é encontrado na Seção A.4 do apêndice.

O sistema gradiente reduzido associado ao sistema anterior é composto por:

$$\dot{\delta}_i = P_i - C_i \sin \delta_i - D_i \cos \delta_i - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n C_{ij} \sin(\delta_i - \delta_l) - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n D_{ij} \cos(\delta_i - \delta_l) \quad (5.10)$$

com $i = 1, \dots, n$.

É fácil verificar que se o vetor δ é um ponto de equilíbrio do sistema (5.10), então, $(\delta, 0)$ é um equilíbrio de (5.9). Portanto, para estudar os pontos de equilíbrio de (5.9) é suficiente estudar os pontos de equilíbrio de (5.10).

O Lema a seguir refere-se ao estudo de coerência fraca entre os geradores i e j dentro de um sistema composto por vários geradores. Ele mostra que os pontos de equilíbrio deste sistema estarão localizados em uma região muito próxima da diagonal i - j , se os parâmetros das máquinas i e j forem similares e se o parâmetro de acoplamento C_{ij} entre estas máquinas for suficientemente grande.

Lema 5.8: Considere o sistema gradiente reduzido (5.10) associado ao sistema multimáquinas (5.9).

Se $I(i, j) = \left[|P_i - P_j| + |C_i - C_j| + \sum_{l=1, l \neq i, l \neq j}^n |C_{il} - C_{jl}| + |D_i - D_j| + \sum_{l=1, l \neq i, l \neq j}^n |D_{il} - D_{jl}| \right]$ é

suficientemente pequeno e C_{ij} é suficientemente grande, então todos os pontos de

equilíbrio $(\delta_{1eq}, \dots, \delta_{ieq}, \dots, \delta_{jeq}, \dots, \delta_{neq})$ estão muito próximos à diagonal i - j , ou mais precisamente:

$$\delta_{ieq} - \delta_{jeq} = O|I(i, j)|$$

A demonstração deste resultado é feita em detalhes em ALBERTO (2000) e não será apresentada aqui.

Com base no Lema 5.8 e também nos resultados de sincronização apresentados no Capítulo 3, propõe-se um índice, que mesmo sendo por ora heurístico, é inspirado nestes resultados. Este índice indicará geradores fracamente coerentes (dois a dois) num sistema composto por vários geradores interconectados entre si. Este índice depende apenas dos parâmetros do sistema de potência, bem como dos parâmetros de acoplamento entre os geradores que foram o sistema.

Dado um sistema multimáquinas, considere o seguinte índice:

$$I^*(i, j) = \frac{\left[|P_i - P_j| + |C_i - C_j| + \sum_{l=1, l \neq i, l \neq j}^n |C_{il} - C_{jl}| + |D_i - D_j| + \sum_{l=1, l \neq i, l \neq j}^n |D_{il} - D_{jl}| \right]}{C_{ij}} \quad (5.11)$$

Este índice é tão menor quanto mais próximos forem os parâmetros das máquinas i e j , quanto maior o acoplamento entre as máquinas i e j , e quanto mais similares forem os acoplamentos com as demais máquinas. É importante salientar que embora a constante de inércia seja um parâmetro importante na dinâmica do sistema original, (5.11) não depende deste parâmetro pois o objetivo da análise é a detecção de geradores fracamente coerentes, ou seja, coerentes com relação ao sistema gradiente reduzido associado ao original e, para este sistema reduzido, a inércia das máquinas não influencia a dinâmica, como pode ser visto em (5.10).

Considerou-se este índice para analisar a coerência fraca entre as máquinas i e j

num sistema multimáquinas. Uma vez que os parâmetros deste sistema são conhecidos, os valores que compõem o índice (5.11) são facilmente calculados, ou seja, o esforço computacional para calcular $I^*(i, j)$ para todos os pares de máquinas i e j neste sistema é pequeno e viável para aplicações em tempo real.

Verificar-se-á que o índice $I^*(i, j)$ contém informações importantes sobre a localização dos pontos de equilíbrio instáveis, e consequentemente dos modos de instabilidade combinados existentes. Para ilustrar a aplicabilidade do índice $I^*(i, j)$, realizam-se testes em dois sistemas de potência. O primeiro deles é o sistema de 7 geradores e 10 barras do CIGRÉ, já discutido na Seção 5.4 e o segundo é um sistema formado por 10 geradores e 39 barras do IEEE.

Exemplo 2:

Neste exemplo calcula-se o índice $I^*(i, j)$ para o sistema teste de 7 geradores e 10 barras do CIGRÉ, apresentado na Seção 5.4. O diagrama deste sistema está apresentado na Figura 5.3. Neste caso, considerou-se um curto-circuito trifásico próximo à barra 4 com duração de 0,5s e a eliminação da falta é feita removendo-se a linha de transmissão 4-6 da Figura 5.3. Os valores de C_{ij} e D_{ij} são mostrados na tabela a seguir para o sistema pós-falta.

TABELA 5.3. Matrizes C_{ij} e D_{ij} do sistema pós-falta do sistema de 7 geradores e 10 barras do CIGRÉ.

C'_{ij}							
	1	2	3	4	5	6	7
1	-8.5438	0.8920	2.787	3.2373	1.4402	0.2395	0.2116
2	0.8920	-7.6671	1.6493	1.8773	0.8376	0.1414	0.01247
3	2.787	1.6493	-11.3620	3.5136	1.5648	0.5246	0.4617
4	3.2373	1.8773	3.5136	-20.0252	4.5876	0.3907	0.3437
5	1.4402	0.8376	1.5648	1.5648	-8.5887	0.1737	0.1533
6	0.2395	0.1414	0.5246	0.3907	0.1737	-4.5292	2.6756
7	0.2116	0.01247	0.4617	0.3437	0.1533	2.6756	-4.7797
D'_{ij}							
	1	2	3	4	5	6	7
1	0.6167	0.0814	0.2634	0.4078	0.1177	0.0119	0.0263
2	0.0814	1.1746	0.1741	0.3598	0.1228	0.0100	0.0182
3	0.2634	0.1741	0.9949	0.5294	0.1662	0.0522	0.0809
4	0.4078	0.3598	0.5294	1.9838	0.6786	0.0414	0.0625
5	0.1177	0.1228	0.1662	0.6786	0.6810	0.0108	0.0210
6	0.0119	0.0100	0.0522	0.0414	0.0108	1.2081	0.1918
7	0.0263	0.0182	0.0809	0.0625	0.0210	0.1918	1.1028

A tabela a seguir mostra os valores de $I^*(i, j)$ para a configuração pós-falta do Exemplo 2,.

TABELA 5.4. Índice $I^*(i, j)$ dado em (5.11) para o sistema teste do CIGRÉ (Figura 5.3) na configuração pós-falta. Considerou-se um curto-circuito trifásico ocorrendo nas vizinhanças da barra 6 e o defeito é isolado pela eliminação da linha 4-6.

$I(i, j)$	1	2	3	4	5	6	7
1	0.0000	6.5825	2.0289	6.1507	2.3512	65.4722	72.1810
2	6.5825	0.0000	6.5239	13.1345	7.5161	76.9920	87.1233
3	2.0289	6.5239	0.0000	4.2176	4.9360	38.0652	42.275
4	6.1507	13.1345	4.2176	0.0000	4.2581	87.1988	98.4724
5	2.3512	7.5161	4.9360	4.2581	0.0000	92.4389	102.113
6	65.4722	76.9920	38.0652	87.1988	92.4389	0.0000	0.27293
7	72.1810	87.1233	42.275	98.4724	102.113	0.27293	0.0000

A matriz $I^*(i, j)$ é simétrica, ou seja, $I^*(i, j) = I^*(j, i)$ e os elementos da diagonal são nulos. Analisando-a, verifica-se que o par que possui o menor índice não nulo é aquele formado pelas máquinas 6 e 7, ou equivalentemente, 7 e 6. Este valor $I^*(6, 7) = I^*(7, 6) = 0.27293$ é muito menor quando comparado com os demais elementos

da matriz. Segundo o critério de análise proposto, os geradores 6 e 7 são fracamente coerentes e fortemente acoplados.

Para confirmar que nossa metodologia está correta, analisa-se o ponto de equilíbrio de controle obtido pelo método BCU, conforme apresentado na Seção 5.4.

Ponto de equilíbrio instável de controle referido ao COA:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -0.7171 & \delta_2 &= -0.9222 & \delta_3 &= -0.7365 & \delta_4 &= 0.8492 & \delta_5 &= 0.7551 \\ \delta_6 &= 2.0846 & \delta_7 &= 2.1986 \end{aligned}$$

Pela análise do ponto de equilíbrio de controle, verifica-se que ambos δ_6 e δ_7 são grandes e próximos, reforçando a hipótese de que as máquinas 6 e 7 estão fortemente acopladas.

Como se mostrou na Seção 5.4 através das simulações do sistema gradiente reduzido, as máquinas 6 e 7 são fracamente coerentes (Figura 5.6) e possuem modos de instabilidade combinados (Figura 5.4).

Então, pela metodologia adotada, os geradores 6 e 7 formam um *cluster* conforme Figura a seguir.

Figura 5.8. *Cluster* identificado pelo índice de coerência $I^*(i, j)$ de (5.11) para o sistema da Figura 5.3.

Exemplo 3:

Cálculo do índice $I^*(i, j)$ para o sistema teste de 10 geradores e 39 barras do IEEE. O diagrama deste sistema está apresentado na Figura 5.9.

Figura 5.9. Sistema teste de 10 geradores e 39 barras do IEEE (*Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.*). As letras de (a) a (g) indicam os curtos-circuitos aplicados no sistema para realizar os testes da metodologia do índice de detecção de coerência, conforme serão mostrados pelas Figuras 5.10 à Figura 5.18.

Um curto-circuito trifásico ocorre nas vizinhanças da barra 22, e a falta dura 2.0s. O defeito é retirado eliminando a linha 21-22 do sistema. Novamente, o objetivo é verificar a coerência fraca entre as máquinas para a configuração pós-falta através do índice $I^*(i, j)$ de (5.11). A Tabela 5.5 apresenta os dados dos geradores e as condições pré-falta para certa condição de carga específica. A Tabela 5.6, por sua vez, os dados de linha também para o sistema pré-falta.

TABELA 5.5. Dados do Sistema Teste 2.

Barra	Tipo	Tensão (p.u.)	Ângulo (°)	Carga (MVA) (MVar)		Reatância Transitória x_d' (p.u.)	Constante de Inércia (s ²)
1	C	1.046	-9.1	0.	0.	0.	0.
2	C	1.046	-6.4	0.	0.	0.	0.
3	C	1.024	-9.3	322.	2.4	0.	0.
4	C	0.998	-10.2	500.	184.	0.	0.
5	C	1.001	-9.1	0.	0.	0.	0.
6	C	1.004	-8.4	0.	0.	0.	0.
7	C	0.993	-10.6	233.8	84.	0.	0.
8	C	0.992	-11.1	522.	176.	0.	0.
9	C	1.027	-10.9	0.	0.	0.	0.
10	C	1.013	-5.9	0.	0.	0.	0.
11	C	1.009	-6.8	0.	0.	0.	0.
12	C	0.996	-6.8	7.5	88.	0.	0.
13	C	1.010	-6.6	0.	0.	0.	0.
14	C	1.005	-8.3	0.	0.	0.	0.
15	C	1.003	-8.5	320.	153.	0.	0.
16	C	1.017	-7.0	329.	32.3	0.	0.
17	C	1.023	-8.1	0.	0.	0.	0.
18	C	1.022	-9.0	158.	30.	0.	0.
19	C	1.044	-1.7	0.	0.	0.	0.
20	C	0.998	-2.7	628.	103.	0.	0.
21	C	1.021	-4.6	274.	115.	0.	0.
22	C	1.043	-0.2	0.	0.	0.	0.
23	C	1.037	-0.5	274.5	84.6	0.	0.
24	C	1.015	-6.9	308.6	-92.2	0.	0.
25	C	1.055	-5.1	224.	47.2	0.	0.
26	C	1.047	-6.3	139.	17.	0.	0.
27	C	1.030	-8.3	281.	75.5	0.	0.
28	C	1.048	-2.7	206.	27.6	0.	0.
29	C	1.048	0.0	283.5	26.9	0.	0.
30	G	1.047	-4.0	0.	0.	0.006	2.650
31	S	0.982	0.0	9.2	4.6	0.0697	0.161
32	G	0.983	2.1	0.	0.	0.0531	0.190
33	G	0.997	3.5	0.	0.	0.0436	0.205
34	G	1.012	2.4	0.	0.	0.132	0.138
35	G	1.049	4.8	0.	0.	0.050	0.185
36	G	1.064	7.4	0.	0.	0.049	0.140
37	G	1.028	1.7	0.	0.	0.057	0.129
38	G	1.027	7.1	0.	0.	0.057	0.183
39	G	1.030	-10.7	1104.	250.	0.031	0.223

TABELA 5.6. Dados da Linha de Transmissão.

Linha	Barra Origem	Barra Destino	R^{+++} (p.u)	X (p.u)	C_{shunt} (p.u)
1	1	2	0.0035	0.0411	0.6987
2	1	39	0.0010	0.0250	0.7500
3	2	3	0.0013	0.0151	0.2572
4	2	25	0.0070	0.0086	0.1460
5	3	4	0.0013	0.0213	0.2214

⁺⁺⁺ R é a resistência da linha, enquanto X é sua reatância indutiva e C_{shunt} é a reatância capacitiva da linha em p.u..

6	3	18	0.0011	0.0133	0.2138
7	4	5	0.0008	0.0128	0.1342
8	4	14	0.0008	0.0129	0.1382
9	5	6	0.0002	0.0026	0.0434
10	5	8	0.0008	0.0112	0.1476
11	6	7	0.0006	0.0092	0.1130
12	6	11	0.0007	0.0082	0.1389
13	7	8	0.0004	0.0046	0.0780
14	8	9	0.0023	0.0363	0.3804
15	9	39	0.0010	0.0250	1.2000
16	10	11	0.0004	0.0043	0.0729
17	10	13	0.0004	0.0043	0.0729
18	13	14	0.0009	0.0101	0.1723
19	14	15	0.0018	0.0217	0.3660
20	15	16	0.0009	0.0094	0.1710
21	16	17	0.0007	0.0089	0.1342
22	16	19	0.0016	0.0195	0.3040
23	16	21	0.0008	0.0135	0.2548
24	16	24	0.0003	0.0059	0.0680
25	17	18	0.0007	0.0082	0.1319
26	17	27	0.0013	0.0173	0.3216
27	21	22	0.0008	0.0140	0.2565
28	22	23	0.0006	0.0096	0.1846
29	23	24	0.0022	0.0350	0.3610
30	25	26	0.0032	0.0323	0.5130
31	26	27	0.0014	0.0147	0.2396
32	26	28	0.0043	0.0474	0.7802
33	26	29	0.0057	0.0625	1.0290
34	28	29	0.0014	0.0151	0.2490
35	12	11	0.0016	0.0435	0
36	12	13	0.0016	0.0435	0
37	06	31	0.0000	0.0250	0
38	10	32	0.0000	0.0200	0
39	19	33	0.0007	0.0142	0
40	20	34	0.0009	0.0180	0
41	22	35	0.0000	0.0143	0
42	23	36	0.0005	0.0272	0
43	25	37	0.0006	0.0232	0
44	2	30	0.0000	0.0181	0
45	29	38	0.0008	0.0156	0
46	19	20	0.0007	0.0138	0

A potência base utilizada é de 100MVA.

A seguir mostra-se as matrizes C_{ij} e D_{ij} da configuração pós-falta para este sistema.

TABELA 5.7. Matrizes C_{ij} e D_{ij} do Sistema Teste de 10 geradores e 39 barras.

C'_{ps}										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-12.9172	1.88002	2.2265	0.7224	0.30442	0.45038	0.42300	0.52303	0.43970	1.77829
2	1.88002	-25.7750	2.2942	2.0689	0.87904	1.28986	1.21159	5.15459	2.84199	5.13560
3	2.2265	2.2942	-14.4186	1.0064	0.42646	0.62746	0.58936	0.64540	0.57160	1.83169
4	0.7224	2.0689	1.0064	-14.4600	2.75866	1.27145	1.19443	0.64610	0.79533	0.82308
5	0.30442	0.87904	0.42646	2.75866	-10.94804	0.54468	0.51163	0.27364	0.33421	0.34139
6	0.45038	1.28986	0.62746	1.27145	0.54468	-14.15089	5.52013	0.40281	0.49584	0.51311
7	0.42300	1.21159	0.58936	1.19443	0.51163	5.52013	-12.31224	0.37835	0.46568	0.48182

8	0.52303	5.15459	0.64540	0.64610	0.27364	0.40281	0.37835	-11.91532	1.20907	1.33461
9	0.43970	2.84199	0.57160	0.79533	0.33421	0.49584	0.46568	1.20907	-10.38359	0.80158
10	1.77829	5.13560	1.83169	0.82308	0.34139	0.51311	0.48182	1.33461	0.80158	-17.7322
D'_{is}										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.61851	0.90774	0.63764	0.43966	0.22121	0.27421	0.25822	0.24221	0.30888	0.90490
2	0.90774	3.50142	1.05610	1.06004	0.54522	0.66116	0.62283	0.44300	0.92903	2.05666
3	0.63764	1.05610	0.81961	0.54751	0.27934	0.34148	0.32164	0.28832	0.37930	0.96286
4	0.43966	1.06004	0.54751	1.53046	0.79673	0.52822	0.49787	0.35504	0.50966	0.65074
5	0.22121	0.54522	0.27934	0.79673	0.65521	0.28041	0.26416	0.18091	0.25490	0.31847
6	0.27421	0.66116	0.34148	0.52822	0.28041	0.83497	0.64464	0.22144	0.31786	0.40583
7	0.25822	0.62283	0.32164	0.49787	0.26416	0.64464	0.72681	0.20857	0.29930	0.38200
8	0.24221	0.44300	0.28832	0.35504	0.18091	0.22144	0.20857	0.89723	0.58521	0.44669
9	0.30888	0.92903	0.37930	0.50966	0.25490	0.31786	0.29930	0.58521	1.86535	0.52034
10	0.90490	2.05666	0.96286	0.65074	0.31847	0.40583	0.38200	0.44669	0.52034	5.15757

TABELA 5.8. Índice $I^*(i, j)$ dado em (5.11) para o sistema teste do IEEE (Figura 3.4). Considerou-se um curto-circuito trifásico ocorrendo nas vizinhanças da barra 22 e o defeito é isolado eliminando a linha 21-22 do sistema.

$I^*(i, j)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.0000	17.9968	1.70304	15.5364	34.8526	27.9164	28.0699	17.8282	21.4841	9.49842
2	17.9968	0.0000	13.3968	15.4245	46.1563	30.3882	34.2185	6.58849	12.7688	4.09938
3	1.70304	13.3968	0.0000	8.83207	30.8452	18.8063	23.5743	17.7894	19.0164	7.74501
4	15.5364	15.4245	8.83207	0.0000	4.18465	9.30508	11.7869	22.4178	15.2848	23.2374
5	34.8526	46.1563	30.8452	4.18465	0.0000	22.3423	19.3922	41.3867	26.9558	27.4163
6	27.9164	30.3882	18.8063	9.30508	22.3423	0.0000	0.44610	37.6021	29.1632	48.1524
7	28.0699	34.2185	23.5743	11.7869	19.3922	0.44610	0.0000	35.4047	27.4022	55.7048
8	17.8282	6.58849	17.7894	22.4178	41.3867	37.6021	35.4047	0.0000	5.81094	12.8956
9	21.4841	12.7688	19.0164	15.2848	26.9558	29.1632	27.4022	5.81094	0.0000	23.1393
10	9.49842	4.09938	7.74501	23.2374	27.4163	48.1524	55.7048	12.8956	23.1393	0.0000

Analisando a Tabela 5.8 verifica-se que os pares $(i, j) = (1, 3)$ e $(i, j) = (6, 7)$ possuem os menores índices $I^*(i, j)$ quando comparados com os demais. Segundo nossa metodologia, estes índices caracterizam que as máquinas 1 e 3 são fortemente acopladas entre si e o mesmo acontece para as máquinas 6 e 7. Implementando-se o método BCU para encontrar o ponto de equilíbrio de controle para este caso, verifica-se que a proposta de análise está correta.

a) Curto-circuito na barra 22 e eliminação da linha 21-22 após 2s.

Ponto de equilíbrio instável de controle referido ao COA:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.5391 & \delta_2 &= -0.5468 & \delta_3 &= 0.5821 & \delta_4 &= 0.8610 & \delta_5 &= 1.1431 \\ \delta_6 &= 2.2138 & \delta_7 &= 2.1725 & \delta_8 &= 0.2780 & \delta_9 &= 0.7711 & \delta_{10} &= 0.1190 \end{aligned}$$

Mais uma vez, é verificado que para aqueles pares onde ocorrem os menores índices, os ângulos do ponto de equilíbrio instável para estas máquinas estão próximos.

A seguir, simula-se o sistema de 10 geradores e 39 barras para o caso de um curto-circuito trifásico sólido de duração de 2.0s e a eliminação do defeito é feita retirando-se a linha 21-22 do sistema.

Figura 5.10. Simulações no domínio do tempo do sistema teste de 10 geradores e 39 barras. *À esquerda:* ângulos de todos geradores de 0 a 5s. *À direita:* ângulos dos gerados fortemente acoplados, ou seja, pares de máquinas (1,3) e (6,7). Falta de 2s de duração na barra 22 do sistema da Figura 5.9 e eliminação do defeito através da eliminação da linha 21-22.

Todas as máquinas do sistema, com exceção da máquina 2 (por possuir constante de inércia muito maior que as demais) aceleram devido à natureza e duração da falta. Porém, as máquinas (1,3) e (6,7) aceleram juntas, indicando coerência também no sistema original. Portanto, o índice além de detectar geradores fortemente acoplados, fornece informações sobre a localização dos pontos de equilíbrio instáveis de controle.

O resultado obtido com este nosso índice não foi alcançado neste exemplo 2

quando se aplica o algoritmo de análise de coerência proposto por ALBERTO (2000). Isto ocorre porque aquele método era conservador, sendo necessários acoplamentos muito fortes para que a identificação fosse bem sucedida.

A seguir, realizar-se-ão novos testes para o sistema de 10 geradores e 39 barras, para ilustrar alguns casos onde a metodologia de utilização do índice (5.11) nesta tese para identificação de geradores fracamente coerentes pôde ser aplicada com sucesso. Para este sistema, consideraram-se faltas em diversas barras e o sistema pós-falta será considerado o mesmo do pré-falta, ou seja, após o término do tempo de falta, não se elimina nenhuma linha do sistema. Em todos os casos, consideram-se curtos-circuitos trifásicos sólidos nas barras e a duração de cada falta é igual a 2s. Ressalta-se que a duração excessiva da falta igual a 2 segundos tem por objetivo evidenciar os modos combinados de instabilidade e mostrar que ainda assim, a metodologia é eficaz.

Uma vez que o sistema pós-falta é igual ao pré-falta, a matriz $I^*(i, j)$ é igual para todas as contingências. Os valores dos índices são apresentados na tabela a seguir.

TABELA 5.9. Índice $I^*(i, j)$ dado em (5.11) para o sistema teste do IEEE (Figura 3.4) para o caso em que o sistema pós-falta é igual ao pré-falta.

$I^*(i, j)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.00000	18.613	1.74223	17.4799	37.3495	20.6357	17.4765	18.3931	22.3359	9.60836
2	18.6130	0.0000	13.9259	16.5182	49.8021	15.6023	22.6757	6.71595	13.1210	4.25722
3	1.74223	13.9259	0.0000	10.2345	33.0316	12.4531	13.8632	18.6541	19.9459	7.89763
4	17.4799	16.5182	10.2345	0.0000	4.38154	3.91673	5.40932	25.1548	17.2898	25.8176
5	37.3495	49.8021	33.0316	4.38154	0.0000	19.0579	15.7587	44.7288	28.8900	80.0048
6	20.6357	15.6023	12.4531	3.91673	19.0579	0.0000	1.49838	28.5832	21.0930	24.0153
7	17.4765	22.6757	13.8632	5.40932	15.7587	1.49838	0.0000	25.9684	19.2017	36.3566
8	18.3931	6.71595	18.6541	25.1548	44.7288	28.5832	25.9684	0.0000	5.93793	13.1178
9	22.3359	13.1210	19.9459	17.2898	28.8900	21.0930	19.2017	5.93793	0.0000	23.6290
10	9.60836	4.25722	7.89763	25.8176	80.0048	24.0153	36.3566	13.1178	23.6290	0.0000

b) Curto-circuito na barra 34

Ponto de equilíbrio instável de controle referido ao COA:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.3288 & \delta_2 &= -0.3335 & \delta_3 &= 0.3551 & \delta_4 &= 0.6471 & \delta_5 &= 2.4680 \\ \delta_6 &= 0.4819 & \delta_7 &= 0.4989 & \delta_8 &= 0.2216 & \delta_9 &= 0.5339 & \delta_{10} &= 0.0215 \end{aligned}$$

Figura 5.11 Simulações no domínio do tempo do sistema teste de 10 geradores e 39 barras. *À esquerda:* ângulos de todos os geradores de 0 a 5s. *À direita:* ângulos dos gerados fortemente acoplados, ou seja, os pares de máquinas (1,3) e (6,7). Falta de 2s de duração na barra 34 e configuração do pós-falta igual a do pré-falta.

c) Curto-circuito na barra 25

Ponto de equilíbrio instável de controle referido ao COA:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.6181 & \delta_2 &= -0.5470 & \delta_3 &= 0.6433 & \delta_4 &= 0.6845 & \delta_5 &= 0.9036 \\ \delta_6 &= 0.7363 & \delta_7 &= 0.7558 & \delta_8 &= 2.6000 & \delta_9 &= 1.7999 & \delta_{10} &= 0.2509 \end{aligned}$$

Figura 5.12. Simulações no domínio do tempo do sistema teste de 10 geradores e 39 barras. *À esquerda:* Simulação dos ângulos de todos os geradores de 0 a 5s. *À direita:* ângulos dos gerados apenas para os pares de máquinas (1,3) e (6,7). Falta de 2s de duração na barra 25 e configuração do pós-falta igual a do pré-falta.

d) **Curto-circuito na barra 29**

Ponto de equilíbrio instável de controle referido ao COA:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.3220 & \delta_2 &= -0.3121 & \delta_3 &= 0.3418 & \delta_4 &= 0.3546 & \delta_5 &= 0.5610 \\ \delta_6 &= 0.3964 & \delta_7 &= 0.4124 & \delta_8 &= 0.3277 & \delta_9 &= 2.0631 & \delta_{10} &= 0.0414 \end{aligned}$$

Figura 5.13. Simulações no domínio do tempo do sistema teste de 10 geradores e 39 barras. *À Esquerda:* Simulação dos ângulos de todos os geradores de 0 a 5s. *À direita:* Simulação dos ângulos dos gerados apenas para os pares de máquinas (1,3) e (6,7). Falta de 2s de duração na barra 29 e configuração do pós-falta igual a do pré-falta.

e) **Curto-circuito na barra 20**

Ponto de equilíbrio instável de controle referido ao COA:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.3288 & \delta_2 &= -0.3335 & \delta_3 &= 0.3551 & \delta_4 &= 0.6471 & \delta_5 &= 2.4680 \\ \delta_6 &= 0.4819 & \delta_7 &= 0.4989 & \delta_8 &= 0.2216 & \delta_9 &= 0.5339 & \delta_{10} &= 0.0215 \end{aligned}$$

Figura 5.14. Simulações no domínio do tempo do sistema teste de 10 geradores e 39 barras. *À Esquerda:* Simulação dos ângulos de todos os geradores de 0 a 5s. *À direita:* Simulação dos ângulos dos gerados apenas para os pares de máquinas (1,3) e (6,7). Falta de 2s de duração na barra 20 e configuração do pós-falta igual a do pré-falta.

f) **Curto-circuito na barra 6**

Ponto de equilíbrio instável de controle referido ao COA:

$$\delta_1 = 3.0602 \quad \delta_2 = -0.8328 \quad \delta_3 = 1.7283 \quad \delta_4 = 1.2250 \quad \delta_5 = 1.4525$$

$$\delta_6 = 1.2960 \quad \delta_7 = 1.3209 \quad \delta_8 = 0.6246 \quad \delta_9 = 1.3835 \quad \delta_{10} = 0.7881$$

Figura 5.15. Simulações no domínio do tempo do sistema teste de 10 geradores e 39 barras. *À Esquerda:* Simulação dos ângulos de todos os geradores de 0 a 5s. *À direita:* Simulação dos ângulos dos gerados apenas para os pares de máquinas (1,3) e (6,7). Falta de 2s de duração na barra 6 e configuração do pós-falta igual a do pré-falta.

Independentemente do local onde a falta é aplicada, os pares de geradores (1,3) e (6,7) tem comportamento semelhante na configuração pós-falta. Considerando o método de análise de coerência proposto, conclui-se que as máquinas 1 e 3 formam um *cluster* e as máquinas 6 e 7 outro *cluster*, conforme mostrado na figura a seguir.

Figura 5.16. Clusters identificados no sistema teste de 10 geradores e 39 barras do IEEE através da análise do índice $I^*(i, j)$ de (5.11).

g) Curto-circuito na barra 35 ou 36

Nestes dois casos o método BCU não converge, e por isso, o algoritmo não consegue encontrar o ponto de equilíbrio instável de controle do sistema. A Figura 5.17 mostra os ângulos das máquinas 6 e 7 da trajetória em falta. Nota-se que a trajetória em falta se afasta muito da diagonal (6-7). O ponto de saída, ou *exit point*^{***} CHIANG *et al.* (1994) é corretamente calculado e o algoritmo BCU encontra uma aproximação do ponto de equilíbrio de controle está muito distante da diagonal. Devido a esta aproximação ruim do ponto de equilíbrio de controle, o último estágio do algoritmo BCU que utiliza o método de Newton-Raphson para o cálculo do ponto de equilíbrio de controle não converge. O *Shadowing*

^{***} Ponto na trajetória em falta que cruza a fronteira região de estabilidade do ponto de equilíbrio estável do sistema gradiente reduzido da configuração pós-falta.

Method, TREINEN, *et al.* (1996) é um algoritmo que quando aplicado ao método BCU corrige problemas de convergência como este. Porém, o esforço computacional que ele demanda é alto.

Figura 5.17. Projeção (δ_6, δ_7) da trajetória em falta do sistema representado pela Figura 5.9. Considera-se a falta na barra 35 (teste g). É verificado que o algoritmo BCU não converge e por isso o ponto de equilíbrio instável de controle do sistema não é encontrado.

A seguir é apresentado um gráfico similar ao da Figura 5.17 quando um curto-circuito sólido é aplicado na barra 22 e eliminação do defeito é feito através da eliminação da linha 21-22. Verifica-se que, comparado com a figura anterior, o *exit point* está próximo à diagonal. O método BCU converge e o ponto de equilíbrio instável de controle é encontrado, conforme pode ser visto na Figura 5.17.

Figura 5.18. Projeção (δ_6, δ_7) da trajetória em falta do sistema representado pela Figura 5.9. Considera-se um curto-circuito na barra 22 e a eliminação do defeito é feito através da eliminação da linha 21-22 (teste **a**). Verifica-se que o *exit point* obtido pelo algoritmo BCU está localizada junto à diagonal e o método converge. Assim, o ponto de equilíbrio instável de controle é encontrado.

Se, a priori, a informação que as máquinas 6 e 7 estão fortemente acopladas fosse conhecida e sabendo que este tipo de acoplamento implica na localização do ponto de equilíbrio de controle próxima à diagonal 6-7, seria possível modificar o algoritmo para que a busca do ponto de equilíbrio de controle fosse restrita à região próxima da diagonal 6-7. Portanto, ao utilizar o índice $I^*(i, j)$, problemas de convergência mostrados na Figura 5.17 poderiam ser solucionados.

6. Conclusões e Perspectivas Futuras

Nesta pesquisa, estudou-se a sincronização de sistemas não-lineares acoplados e suas aplicações no problema de coerência de geradores em sistemas elétricos de potência. As contribuições do trabalho são relevantes na literatura de sincronização tanto do ponto de vista teórico como aplicado.

Os resultados teóricos de sincronização obtidos neste trabalho são, segundo nosso conhecimento, inéditos e possuem aplicações em diversas áreas do conhecimento. Estudou-se a sincronização de uma classe de sistemas não-lineares acoplados. As condições exigidas pelos resultados de sincronização enunciados e demonstrados nesta tese são satisfeitas para uma grande quantidade de sistemas físicos. Estes resultados possuem as seguintes características:

1. A sincronização é provada sem a integração numérica das equações diferenciais,
2. Os resultados oferecem uma estimativa suficiente dos valores das constantes de acoplamento que certifica a sincronização;
3. Diferentemente da grande maioria dos resultados teóricos de sincronização que trabalham apenas com sistemas que possuem atratores globais, os resultados apresentados neste trabalho podem ser aplicados também em sistemas onde existem atratores não-globais, incluindo casos “instáveis”, casos estes em que as soluções das equações diferenciais são não-limitadas. Para este tipo de sistemas, encontram-se estimativas uniformes de conjuntos positivamente invariantes contidos na região de sincronização, com relação às variáveis auxiliares destes

casos. Estas estimativas puderam ser encontradas através de um resultado que, de acordo com nosso conhecimento, também é original.

A versatilidade dos resultados de sincronização foi verificada ao serem aplicados com sucesso para demonstrar a sincronização de dois sistemas com características distintas, são eles dois pêndulos não-lineares acoplados “instáveis”^{§§§}, que não sincronizam globalmente, e dois sistemas de Duffing acoplados que sincronizam globalmente.

Do ponto de vista aplicado, estudou-se o problema de coerência entre geradores em sistemas elétricos de potência. Verificou-se que os resultados teóricos de sincronização apresentados neste trabalho, quando aplicados a sistemas de potência simples, mostrou-se muito conservador, uma vez que exigia grandes acoplamentos devido a torques assíncronos, que não são atingidos na prática.

Por outro lado, verificou-se que o conceito de coerência fraca, muito menos restritivo que o conceito de coerência tradicional, fornece informações importantes sobre a localização dos pontos de equilíbrio instáveis de controle, a existência de acoplamentos fortes entre máquinas e também a presença de modos de instabilidade combinados.

Para a detecção de coerência fraca em sistemas multimáquinas, um índice foi proposto, utilizando as idéias apresentadas nos resultados teóricos de sincronização. Este índice, segundo nosso conhecimento, é inédito na literatura de sistemas elétricos de potência. A metodologia de detecção e identificação de geradores coerentes proposta nesta tese não depende da integração das equações diferenciais do sistema. A análise de coerência é feita a partir de cálculos simples a partir de parâmetros conhecidos do sistema

^{§§§} Novamente, o termo “instável” neste caso, refere-se às soluções não-limitadas do sistema.

e não demandam grande esforço computacional quando comparado a metodologias existentes que requerem, por exemplo, cálculos de autovetores do sistema. Esta característica faz com que a metodologia possa ser utilizada em aplicações em tempo real. Como os estudos são feitos através da análise não-linear do sistema, as informações do sistema original ficam resguardadas, o que não ocorre em análises linearizadas.

A metodologia foi aplicada em sistemas de potência teste e mostrou-se que geradores fracamente coerentes possuem, em geral, um único modo de instabilidade combinado associado a um ponto de equilíbrio instável próximo a diagonal.

Embora estes avanços tenham sido importantes existem ainda muitos problemas a serem estudados. Do ponto de vista teórico, pretende-se aplicar os resultados de sincronização provados neste trabalho em outros sistemas. Outra possibilidade seria estender os resultados para casos onde existam incertezas nos parâmetros dos sistemas. Desenvolver versões destes resultados para sistemas discretos é outro objetivo futuro a ser alcançado.

Do ponto de vista prático, o índice de análise de coerência proposto neste trabalho poderia ser testado em sistemas de maior porte e técnicas de análise de coerência preservando a estrutura da rede precisariam ser desenvolvidas. As informações obtidas através deste índice poderiam ser utilizadas em futuros trabalhos no desenvolvimento de algoritmos mais eficientes e mais rápidos de cálculo de pontos de equilíbrio instáveis de controle nas análises de estabilidade transitória via métodos diretos. Em particular, considerando o método BCU, o índice proposto poderia ser utilizado para restringir a busca, através de métodos iterativos como o Newton-Raphson, do ponto de equilíbrio instável de controle, pois uma vez sabido, a priori, que as máquinas possuem acoplamento forte e são fracamente coerentes, o ponto de equilíbrio instável de controle estaria

próximo à diagonal. Esta informação poderia até evitar problemas de convergência, conforme descrito nos testes apresentados no Capítulo 5.

APÊNDICE:

A - MODELAGEM EM SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA

A.1. Introdução

No estudo de estabilidade transitória são utilizados modelos que descrevem o *comportamento dinâmico* do sistema de potência através de *equações diferenciais*. Estes modelos são implementados em programas computacionais, que integram sistemas de equações diferenciais ordinárias não-lineares e, assim, simulam o comportamento do sistema elétrico, num determinado intervalo de tempo.

Neste apêndice, será apresentado na Seção A.2 a dedução da equação de “swing”, que é a equação diferencial geralmente utilizada para representar a dinâmica mecânica (ou característica mecânica) da máquina associada a um sistema elétrico. A seguir, será apresentado o modelo clássico de máquinas síncronas, onde se busca uma representação das grandezas envolvidas na operação do gerador, sendo este o elemento mais importante para o estudo de estabilidade em sistemas elétricos de potência. As Seções A.3 e A.4 são destinadas à descrição da modelagem dos sistemas de duas máquinas versus um barramento infinito e um sistema multimáquinas genérico.

A.2. Dinâmica do Gerador

Para o estudo de estabilidade é necessário um modelo matemático que represente o comportamento do sistema elétrico. No caso de estabilidade transitória, um modelo matemático que descreve o comportamento dinâmico do sistema pode ser obtido aplicando

um balanço de potência em cada máquina do sistema. Com este procedimento obtém-se a tão conhecida equação de “swing”.

Como pode ser visto em PAI (1981), em um gerador, a potência mecânica é fornecida por um elemento primário e então é transformada em potência elétrica, deixando o sistema em equilíbrio. Quando o sistema se desequilibra, parte da energia que sobra ou falta é transformada em potência acelerante ou desacelerante do rotor da máquina. Da mecânica, tem-se a equação:

$$J\ddot{\theta} = T_r \quad (\text{A.2.1})$$

- J – momento de inércia do conjunto rotor-turbina do gerador [kg.m^2];
- θ – ângulo mecânico do rotor com relação ao eixo de referência fixa [rad];
- T_r – torque resultante [N.m];

onde T_r é o torque resultante da diferença entre torque mecânico, proveniente do agente motor, e o torque elétrico, que advém da potência elétrica, através de campos magnéticos.

Logo:

$$T_r = T_m - T_e \quad (\text{A.2.2})$$

O ângulo mecânico do rotor θ , formado com relação a um eixo fixo, transforma-se em um problema quando do estudo de sistemas elétricos, pelo fato de o mesmo ser uma função do tempo quando o sistema opera em regime permanente. Para solucionar este problema escolhe-se o sistema referencial angular rotativo e síncrono (referência girante), que no caso do Brasil, é de 60 Hz (frequência elétrica de operação). Para isso tem-se:

$$\theta(t) = (\omega_s t + \alpha) + \delta_m(t) \quad (\text{A.2.3})$$

onde:

- $(\omega_s t + \alpha)$ – referência girante à velocidade síncrona;
- α – ângulo de defasagem entre a referência fixa e a referência girante no tempo $t=0$;

- $\delta_m(t)$ – ângulo mecânico formado entre o rotor e a referência girante.

Derivando-se duas vezes a equação (A.2.3) com relação ao tempo, tem-se:

$$\ddot{\theta}(t) = \ddot{\delta}_m(t) \quad (\text{A.2.4})$$

Apesar da mudança de referência pode-se observar que a aceleração angular é independente da referência utilizada, logo a equação que descreve o comportamento dinâmico ao longo do tempo na referência estática é a mesma que descreve o comportamento dinâmico ao longo do tempo na referência girante. Portanto, substituindo (A.2.2) em (A.2.1), tem-se:

$$J\ddot{\delta} = T_r = T_m - T_e \quad (\text{A.2.5})$$

É conveniente escrever a equação (A.2.5) em termos do ângulo δ_e , que é o ângulo formado entre a referência girante e o eixo do campo magnético que envolve o rotor, pois o torque elétrico T_e será uma função deste ângulo. O ângulo mecânico δ_m e o ângulo elétrico δ_e estão relacionados por:

$$\delta_e = \frac{p}{2} \delta_m \quad (\text{A.2.6})$$

onde:

- p – número de pares de pólos da máquina;

Da mesma maneira, pode-se relacionar a velocidade mecânica com a elétrica, através da equação:

$$\omega_e = \frac{p}{2} \omega_m \quad (\text{A.2.7})$$

Nestas novas variáveis a equação (A.2.5) pode ser escrita como:

$$\frac{2}{p} J \ddot{\delta}_e = T_m - T_e \quad (\text{A.2.8})$$

Como o momento de inércia J de uma máquina não é comumente fornecido pelos fabricantes, mas sim a constante de inércia H , pode-se escrever:

$$J = \frac{2HS_B}{\omega_{0m}^2} \quad (\text{A.2.9})$$

- S_B – potência aparente trifásica base da máquina;
- ω_{0m} – velocidade mecânica síncrona do sistema;
- $\frac{S_B}{\omega_{0m}}$ – torque base T_B ;

Pode-se reescrever (A.2.8), utilizando-se (A.2.7) e (A.2.9), resultando em:

$$\frac{2H}{\omega_{0e}} \dot{\omega}_e = \frac{T_m - T_e}{T_B} \quad (\text{A.2.11})$$

onde:

- ω_{0e} – velocidade elétrica síncrona do sistema;

Passando a equação (A.2.11) para valores por unidade, obtém-se a equação (A.2.12):

$$2H \dot{\omega}_u = T_{mu} - T_{eu} \quad (\text{A.2.12})$$

onde:

- $\dot{\omega}_u = \frac{\omega_e}{\omega_{0e}}$ – valor em p.u. da velocidade angular do campo (em relação à referência girante);
- $T_{mu} = \frac{T_m}{T_B}$ – valor em p.u. do torque mecânico;
- $T_{eu} = \frac{T_e}{T_B}$ – valor em p.u. do torque elétrico.

Outra forma de apresentar a equação de “swing” é comumente utilizada em estudos de estabilidade transitória, nela considera-se que a velocidade angular ω_m tem uma variação muito pequena durante o período transitório, pois caso contrário ocorreria a perda de

sincronismo rapidamente, e o sistema tornar-se-ia instável. Com isso, pode-se considerar que o momento angular do rotor $M_m = J\omega_m$ é constante.

Multiplicando ambos os lados de (A.2.6) por ω_m , pode-se obter uma nova equação de “swing” que tem como parâmetro o momento angular M_m , constante por hipótese. Obviamente, um erro decorrente desta hipótese estará presente neste equacionamento, e alguns artigos da literatura sugerem que um termo de amortecimento pode ser incluído na nova equação para compensar este erro.

Escrevendo a equação (A.2.12) em relação ao ângulo elétrico δ_e , em valores p.u. e com a aproximação discutida, tem-se:

$$M\ddot{\delta}_e + D\dot{\delta}_e = P_{mu} - P_{eu} \quad (\text{A.2.13})$$

onde $M = \frac{2M_m}{pS_B} = \frac{2J\omega_m}{pS_B}$.

A equação de segunda ordem (A.2.13) pode ser escrita por um sistema de equações diferenciais de primeira ordem da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega \\ M\dot{\omega} = P_m - P_e - D\omega \end{cases} \quad (\text{A.2.14})$$

Não existe nenhum procedimento padronizado para se encontrar um valor apropriado para a constante de amortecimento D neste caso. Alguns indicativos para o cálculo desta constante podem ser encontrados em ANDERSON e FOUAD (1977).

A.2.1 Modelo Clássico

A representação das máquinas síncronas consiste em um problema no estudo de engenharia elétrica. Esta representação é feita através de modelos de máquinas, que são gerados, por sua vez, a partir de hipóteses simplificadoras. Estas hipóteses simplificadoras são

soluções de compromisso em relação ao objetivo do estudo, e por isso, alguns modelos apesar de simples, escondem muitos detalhes e aproximações.

Na modelagem de máquinas síncronas, quando uma referência é fixada ao estator, as grandezas eletromagnéticas, medidas através da referência fixa, apresentam variações no tempo devido ao movimento do rotor. Estas variações serão funções do ângulo θ , como mostrado na Figura A.1.

Uma simplificação do modelo pode ser feita através do uso de uma referência girante que acompanhe o movimento do rotor, criando novas variáveis para o estator que são independentes do tempo. Esta simplificação pode ser feita com uma mudança de variáveis, chamada “Transformada de Park”.

A Transformada de Park gera três novas correntes i_0 , i_d e i_q , onde i_d corresponde à “projeção” das correntes de fase ao longo de um eixo paralelo ao eixo magnético do enrolamento de campo, denominado de eixo direto (eixo d), e i_q corresponde à “projeção” das correntes de fase ao longo de um eixo atrasado de 90° em relação ao eixo direto, chamado de eixo em quadratura (eixo q). A variável i_0 é uma corrente estacionária proporcional à corrente de sequência zero.

Alguns modelos simplificados têm sido largamente usados no estudo de estabilidade transitória, devido as suas simplicidades e eficiências, como os modelos: clássico, de um eixo e de dois eixos.

Figura A.1. Transformada de Park.

Em muitas análises, utiliza-se o modelo clássico para a análise de estabilidade transitória, pois este modelo simplificado do gerador consiste apenas em uma máquina como uma fonte de tensão atrás de uma impedância. As principais simplificações deste modelo são:

- Reguladores de Tensão não estão presentes. Isto implica que em regime de operação, a magnitude da tensão da fonte do modelo é mantida constante;
- Circuitos amortecedores são desconsiderados (subtransitórios desprezados);
- Decaimento do fluxo do circuito de campo é desprezado;
- A potência mecânica injetada pelo elemento primário é considerada constante;
- A saliência tem efeito pequeno e é desprezada para estudo da estabilidade transitória;

Considere a Figura A.2, onde o gerador G representa uma usina elétrica composta de vários geradores. O gerador está conectado a uma linha de transmissão (LINHA) em circuito duplo através de um transformador (T). A máquina está conectada ao sistema elétrico através da impedância equivalente (Z_T).

Figura A.2. Uma máquina ligada um sistema elétrico.

Baseado no modelo clássico, o circuito equivalente fica:

Figura A.3. Circuito equivalente à Figura A.2 com gerador representado pelo modelo clássico, onde:

- x_g é igual a reatância síncrona x_d para análise em regime permanente e igual a x'_d para análise transitória;
- E_g é proporcional ao fluxo de campo concatenado, que é suposto constante;

Portanto, para o modelo clássico de gerador, apenas as dinâmicas mecânicas do rotor são consideradas, ou seja, apenas a equação de “swing” da Seção A.2 será utilizada para modelar a máquina.

A.3. Sistema de Duas Máquinas Versus Barramento Infinito

Antes de apresentar as equações que descrevem o caso mais geral de um sistema multimáquinas, considera-se o sistema composto por duas máquinas e um barramento infinito**** mostrado na Figura A.4. As máquinas estão conectadas pela constante de acoplamento C_{12} . Cada máquina se interconecta ao barramento infinito pelas constantes C_i .

Figura A.4. Sistema de duas máquinas versus Barramento Infinito.

Para efeito de análise transitória, a partir das orientações dispostas nas Seções A.2–A.4, o comportamento dinâmico deste sistema é descrito pela equação de “swing”:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\delta}_1 = \omega_1 \\ M_1 \dot{\omega}_1 = P_{m1} - E_1^2 G_{11} + (E_1 E_\infty B_1) \sin(\delta_1) + (E_1 E_\infty G_1) \cos(\delta_1) \\ \quad - (E_1 E_2 B_{12}) \sin(\delta_1 - \delta_2) - (E_1 E_2 G_{12}) \cos(\delta_1 - \delta_2) - D_1 \omega_1 - T(\omega_1 - \omega_2) \\ \dot{\delta}_2 = \omega_2 \\ M_2 \dot{\omega}_2 = P_{m2} - E_2^2 G_{22} + (E_2 E_\infty B_2) \sin(\delta_2) + (E_2 E_\infty G_2) \cos(\delta_2) \\ \quad - (E_1 E_2 B_{12}) \sin(\delta_2 - \delta_1) - (E_1 E_2 G_{12}) \cos(\delta_2 - \delta_1) - D_2 \omega_2 - T(\omega_2 - \omega_1) \end{array} \right. \quad (\text{A.3.1})$$

onde

- δ_i e ω_i são respectivamente o ângulo do rotor e o desvio de frequência da máquina i com relação à velocidade síncrona;

**** Entende-se por barramento infinito neste contexto, a porção do sistema que não sofre nenhuma influência quando ocorrem variações dinâmicas em outras porções do sistema. Diz-se, então, que a dinâmica do barramento infinito é nula. Neste caso, quaisquer que sejam as variações ocorridas nas máquinas 1 ou 2, como também nas constantes C_{12} , C_1 e C_2 , em nada alterarão a dinâmica do barramento infinito.

- P_{mi} é a potência mecânica injetada no gerador;
- D_i é a constante de amortecimento do gerador i ;
- T é a chamada constante de amortecimento assíncrono, que só atuará quando houver diferença entre as velocidades angulares das máquinas 1 e 2.
- E_i é o módulo da força eletromotriz na máquina i ,
- E_∞ é o módulo da tensão no barramento infinito,
- $G_i + jB_i$ é a admitância da linha que interliga a máquina i com o barramento infinito e
- $G_{ij} + jB_{ij}$ é a admitância da linha que interliga as duas máquinas ou admitância de transição.

Por razões de simplicidade, as equações (A.3.1) serão reescritas como:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_1 = \omega_1 \\ M_1 \dot{\omega}_1 = P_1 - C_1 \sin(\delta_1) - C_{12} \sin(\delta_1 - \delta_2) - D_{12} \cos(\delta_1 - \delta_2) - D_1 \omega_1 - T(\omega_1 - \omega_2) \\ \dot{\delta}_2 = \omega_2 \\ M_2 \dot{\omega}_2 = P_2 - C_2 \sin(\delta_2) - C_{12} \sin(\delta_2 - \delta_1) - D_{12} \cos(\delta_2 - \delta_1) - D_2 \omega_2 - T(\omega_2 - \omega_1) \end{cases} \quad (\text{A.4.2})$$

onde:

$P_1 = P_{m1} - E_1^2 G_{11}$, $P_2 = P_{m2} - E_2^2 G_{22}$, $C_1 = E_1 E_\infty B_1$, $C_2 = E_2 E_\infty B_2$, $C_{12} = E_1 E_2 B_{12}$ e as condutâncias de transferências *não* são consideradas.

A.4. Sistemas Multimáquinas

Esta Seção será dedicada à modelagem de sistemas multimáquinas para o estudo de estabilidade transitória.

O estudo começa pela divisão do problema no tempo: sistema pré-falta, falta e pós falta. Isso se deve à diferença das equações diferenciais e dos parâmetros em cada uma das situações citadas. Uma contingência (ou defeito) muda a topologia da rede pré-falta, quando o

defeito é eliminado, a topologia é modificada novamente, ou seja, aparecerão três conjuntos de equações diferenciais diferentes representando três intervalos de tempo.

O sistema pré-falta representa a operação do sistema elétrico antes da contingência, ou seja, o sistema está em regime permanente: as condições iniciais e os estados não variam e são dados pelo fluxo de carga.

O sistema em falta é aquele que representa o período no qual o sistema sofre um defeito, um curto-circuito, por exemplo. A condição inicial das equações diferenciais ordinárias do sistema em falta é o ponto final do estudo do sistema pré-falta, analogamente, o ponto inicial do sistema pós-falta será obtido do ponto final do sistema em falta.

O sistema pós-falta é representa a operação do sistema após a ação de eliminação da falta. Dependendo da medida tomada e do tempo que esta ação demorou a ser tomada, o sistema pós-falta será estável ou instável.

O conjunto de equações diferenciais que representa o sistema é dado por:

- Sistema Pré-falta:

$$M\ddot{\delta} + D\dot{\delta} = P_{mu} - P_{eu}^{prf} = 0 \quad \begin{cases} t \leq 0 \\ \delta(t) = \delta^0, \dot{\delta}(t) = 0 \\ i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{A.4.1})$$

- Sistema em Falta:

$$M\ddot{\delta} + D\dot{\delta} = P_{mu} - P_{eu}^f \quad \begin{cases} 0 \leq t \leq t_a \\ \delta(t) = \delta^0, \dot{\delta}(0) = 0 \\ i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{A.4.2})$$

- Sistema Pós-falta:

$$M\ddot{\delta} + D\dot{\delta} = P_{mu} - P_{eu}^{pf} = 0 \quad \begin{cases} t \geq t_a \\ \delta^{pf}(t_a) = \delta^f(t_a) \\ i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{A.4.3})$$

A solução dos conjuntos de equações (A.4.1)-(A.4.3) é dada por métodos de integração numérica, tais como o método trapezoidal implícito. Esses métodos são, às vezes, chamados de *passo a passo*, pois são iterativos, ou seja, o estado no tempo t_{i+1} depende do estado no tempo t_i . Maiores detalhes da técnica são apresentados em RUGGIERO (1997).

Utilizam-se as seguintes hipóteses simplificadoras para nossos estudos de estabilidade transitória em sistemas multimáquinas:

- A rede elétrica opera em regime permanente senoidal e é considerada estática diante da dinâmica eletromecânica dos geradores;
- O modelo clássico de máquina síncrona é utilizado;
- As cargas são consideradas impedâncias constantes e obtidas do fluxo de carga não-linear, bem como o módulo e ângulo das tensões das barras;
- A potência mecânica é considerada constante.

A Figura A.5 representa o sistema equivalente a um sistema multimáquinas. Os geradores são considerados fontes de tensão ligados a rede elétrica através de uma reatância de eixo direto x'_d . Estas condições iniciais são consideradas como sendo as do sistema pré-falta.

Figura A.5. Sistema Multimáquinas

Onde a matriz de admitâncias Y_{bus} que representa a topologia do sistema de transmissão e é dado pela equação:

$$\underline{Y}_{bus} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & \underline{Y}_2 \\ \underline{Y}_3 & \underline{Y}_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \quad (\text{A.4.4})$$

onde:

- $\underline{Y}_1$ representa a matriz de admitâncias nodal $n \times n$ que contém dados do sistema referentes às n barras dos geradores conectadas entre si;
- $\underline{Y}_2$ representa a matriz de admitâncias $n \times m$ referentes às n barras dos geradores às m barras das cargas do sistema;
- $\underline{Y}_3$ representa a matriz de admitâncias $m \times n$ referentes às n barras dos geradores às m barras das cargas do sistema;
- $\underline{Y}_4$ representa a matriz de admitâncias $m \times m$ que contém dados do sistema das m barras de carga conectadas entre si.

As cargas do sistema que estão conectadas as m últimas barras do sistema da Figura A.5 são transformadas em admitâncias constantes de carga, uma vez que uma das suposições do modelo é a de que as impedâncias permaneceriam constantes durante o fenômeno transitório. As cargas, que são geralmente dadas em potências ativa e reativa, são transformadas em admitâncias através da equação:

$$Y_{l_i} = \frac{P_{l_i} - jQ_{l_i}}{|V_i|^2} \quad i = n+1, \dots, 2n+m \quad (\text{A.4.5})$$

onde:

- P_{l_i} é a potência ativa que representa a carga ativa da barra i (pré-falta);
- Q_{l_i} é a potência reativa que representa a carga reativa da barra i ;
- V_i é a tensão da barra i .

É possível que existam cargas nas barras que conectam os geradores ao sistema elétrico, neste caso, estas cargas também devem ser transformadas através de (A.4.5).

Para as n primeiras barras do sistema descrito na Figura A.5, que representam os nós internos (fictícios) dos geradores, é possível montar uma matriz admitância diagonal $n \times n$, cujas entradas são as reatâncias convertidas em admitâncias, como na equação (A.4.6):

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{G_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{G_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Y_{G_n} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.6})$$

A matriz Y_L é a matriz $(m+n) \times (m+n)$ que representa as cargas do sistema, já transformadas em admitâncias de carga por (A.4.5):

$$\underline{Y}_L = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{LG} & 0 \\ 0 & \underline{Y}_{ll} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} = \begin{bmatrix} Y_{l_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & Y_{l_{m+n}} \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} + \quad (\text{A.4.7})$$

Finalmente, encontra-se a matriz $\tilde{\underline{Y}}_{bus}$ formada por (A.4.6) e (A.4.7), que representa o sistema como um todo: nó interno das forças eletromotrizes dos geradores, cargas constantes do sistema e rede elétrica. A matriz $\tilde{\underline{Y}}_{bus}$ é dada como segue:

$$\tilde{\underline{Y}}_{bus} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} n & n & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underline{Y}_G & \underline{Y}_G & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -\underline{Y}_G & \underline{Y}_1 + \underline{Y}_G + \underline{Y}_{lG} & \underline{Y}_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \underline{Y}_3 & \underline{Y}_4 + \underline{Y}_{ll} \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ n \\ m \end{matrix} \quad (A.4.8)$$

As equações algébricas da rede são eliminadas para encontrar uma equação de “swing” em sistemas multimáquinas. Assim, efetua-se uma redução na matriz somente em relação aos nós das forças eletromotrizes (FEM’s) e para isto a matriz (A.4.8) é dividida como a equação (A.4.9):

$$\tilde{\underline{Y}}_{bus} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} n & n+m \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underline{Y}_A & \underline{Y}_B \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underline{Y}_C & \underline{Y}_D \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ n+m \end{matrix} \quad (A.4.9)$$

Ao considerar-se todas as admitâncias de cargas constantes, as injeções de corrente em cada barra de carga tornam-se nulas, uma vez que toda corrente que chega a barra de carga atende a carga. Portanto, apenas as barras de geração têm injeção de corrente, logo se tem:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{G_{inj}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_A & \underline{Y}_B \\ \underline{Y}_C & \underline{Y}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{E}_G \\ \underline{E}_l \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ n+m \end{matrix} \quad (A.4.10)$$

Expandindo a equação (A.4.10), tem-se:

$$\begin{cases} \underline{I}_{G_{inj}} = \underline{Y}_A \underline{E}_G + \underline{Y}_B \underline{E}_l \\ 0 = \underline{Y}_C \underline{E}_G + \underline{Y}_D \underline{E}_l \end{cases} \quad (A.4.11)$$

Isolando a variável $\underline{E}_l$ do sistema de equações (A.4.11), tem-se:

$$\underline{I}_{G_{inj}} = \left[\underline{Y}_A + \underline{Y}_B \underline{Y}_D^{-1} \underline{Y}_C \right] \underline{E}_G = \tilde{\underline{Y}}_{red} \underline{E}_G \quad (A.4.12)$$

Evidentemente, o cálculo matemático da inversa da matriz admitância nodal em um processo é algo que demanda muito tempo e esforço computacional, tornando-se algo

proibitivo em sistemas de grande porte. Neste sentido, implementa-se o processo de redução de Gauss para redução da matriz $\tilde{Y}_{bus}$.

Uma vez obtidas as expressões das injeções de correntes no sistema reduzido aos nós das FEM's, é possível verificar a injeção do fluxo de potência ativa nestes nós através da equação a seguir:

$$P_{e_i} = \text{Re} \left[E_i I_i^* \right] \quad (\text{A.4.13})$$

onde:

- i é um dos nós das FEM's dos geradores;
- $E_i = |E_i| \angle \delta_i$

Logo, de (A.5.13) e (A.5.12), escreve-se:

$$P_{e_i} = \text{Re} \left[E_i \sum_{j=1}^{j=n} Y_{ij}^* E_j^* \right] \quad (\text{A.4.14})$$

onde:

- $Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij} = |Y_{ij}| \angle \phi_{ij}$ são os elementos da matriz $\tilde{Y}_{red}$.

Substituindo os valores de Y_{ij} e E_j em (A.5.14), tem-se:

$$P_{e_i} = |E_i|^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |E_i| |E_j| |Y_{ij}| \left\{ \cos \left[\phi_{ij} (\delta_i - \delta_j) \right] \right\} \quad (\text{A.4.15})$$

Utilizando identidades trigonométricas, escreve-se:

$$P_{e_i} = |E_i|^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |E_i| |E_j| |Y_{ij}| \left[\cos \phi_{ij} \cos (\delta_i - \delta_j) + \sin \phi_{ij} \sin (\delta_i - \delta_j) \right] \quad (\text{A.4.16})$$

Para simplificar a notação, serão definidas duas constantes:

$$\begin{cases} D_{ij} \stackrel{\Delta}{=} |E_i| |E_j| |Y_{ij}| \cos \phi_{ij} = |E_i| |E_j| |G_{ij}| \\ C_{ij} \stackrel{\Delta}{=} |E_i| |E_j| |Y_{ij}| \sin \phi_{ij} = |E_i| |E_j| |B_{ij}| \end{cases} \quad (\text{A.4.17})$$

Logo, a equação (A.4.16) fica:

$$P_{e_i} = |E_i|^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[D_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + C_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) \right] \quad (\text{A.4.18})$$

Finalmente, substituindo (A.4.18) na equação de “swing”, tem-se a equação de uma máquina num sistema multimáquinas:

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega \\ M \ddot{\delta} + D \dot{\delta} = P_{mu} - \left\{ |E_i|^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[D_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + C_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) \right] \right\} \end{cases} \quad (\text{A.4.19})$$

A.5. Gradiente Reduzido

Durante o desenvolvimento dos métodos diretos PEBS (*Potential Energy Boundary Surface*) e BCU (*Boundary Controlling Unstable Equilibrium Point*) para estudar estabilidade de sistemas de potência, CHIANG *et al.* (1988-a; 1994) definiu um sistema gradiente reduzido associado ao sistema de potência original e estudou as relações entre eles.

Uma das vantagens em se utilizar o sistema gradiente associado é que ele possui a metade da dimensão do problema original.

Para o sistema original dado por:

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega \\ M \dot{\omega} = -\frac{\partial V_p(\delta)}{\partial \delta} - D\omega \end{cases} \quad (\text{A.56.1})$$

O sistema gradiente reduzido associado ao sistema original é dado:

$$\dot{\delta} = -\frac{\partial V_p(\delta)}{\partial \delta} \quad (\text{A.5.2})$$

Algumas relações entre os sistemas gradiente reduzido e original são de especial importância.

Um fato a ser considerado é que o sistema gradiente reduzido (A.5.1) possui os mesmos

pontos δ de equilíbrio do sistema original (A.5.2). Para outros resultados e maiores detalhes, vide CHIANG, *et al.* (1988-a, 1994).

Referências

- ABARBANEL, H.D.I.; RULKOV, N.F.; SUSHCHIK (1996). *Generalized Synchronization of Chaos: The Auxiliary Approach*, Phys. Rev. E **(53)**, 4528-4535.
- AFRAIMOVICH, V.S.; VERICHEV, N.N.; RABINOVICH, M.I. (1986). *Stochastic synchronization of oscillation in dissipative systems*, Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Radiofizika **29**(9):1050-1060.
- AFRAIMOVICH, V.S.; CHOW, S.N.; HALE, J.K. (1997). *Synchronization in lattices of coupled oscillators*, Physica D **(103)**:442-451.
- AFRAIMOVICH, V.S.; RODRIGUES, H.M. (1998). *Uniform dissipativeness and synchronization on nonautonomous equations.*, Equadiff95, International Conference on Differential Equations, Word Scientific, pp. 3-17.
- ALBERTO, L.F.C.; CHIANG, H.D.(2007). *Uniform Approach for Stability Analysis of Fast Subsystem of two-time scale nonlinear systems*, International Journal of Bifurcation and Chaos **17**(11):4195-4203.
- ALBERTO, L.F.C. (2000). *O princípio de invariância de LaSalle aplicado ao estudo de coerência de geradores e à análise de estabilidade transitória multi-“swing”*, Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- ANDERSON, P. M.; FOUAD, A. A. (1977). *Power system control and stability*, IEEE Press, New York.

- APPLETON, E.V. (1922). *Automatic synchronisation of triode oscillators*. Proc. Cambridge Phil. Soc.) (Math. Phys. Sci.), **21**, 231.
- BAKER, G.L.; BLACKBURN J.A.; SMITH, H.J.T. (1999). *A stochastic model of synchronization for chaotic pendulums*, Physics Letters A, **(252)**: 191-197.
- BRAUER, F.; NOHEL, J. A. (1969). *The qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*. W.A.Benjamin Inc., New York, Amsterdam.
- BRETAS, N.G.; ALBERTO L.F.C. (2000). *Coherency on Electrical Systems*, Proceedings of PowerCon 2000 **1**(4-7)157-162.
- BOWONG, S, KAKMENI, FMM, FOTSIN, H (2006) *A new adaptive observer-based synchronization scheme for private communication* Phys Lett A 355 (3): 193-201.
- CARI, E.P.T.; ALBERTO, L.F.C, BRETAS, N.G. (2006) *A Methodology for Parameter Estimation of Synchronous Generator Based on Trajectory Sensitivity and Synchronization*, Proceedings of the 2006 IEEE Power Engineering Society General Meeting.
- CARVALHO, A.N.; DLOTKO, T.; RODRIGUES, H.M. (1998). *Upper semicontinuity of attractors and synchronization*, J. of Math Anal. and Applications **220**: 13-41.
- CHEN, C-T. (1999). *Linear System Theory and Design*, 3rd edition, Oxford University Press.
- CHIANG, H. D.; M. HIRSCH;; F. F. WU. (1988-a). *Stability regions of nonlinear*

autonomous dynamical systems. IEEE Transactions on Automatic Control **33**:16-27.

CHIANG, H.D.; WU, F.F.; VARAIYA, P.P. (1988-b). *Foundations of the potential energy boundary surface method for power system transient stability analysis*, IEEE Transactions on Circuits and Systems **35**(6).

CHIANG, H.D.; WU, F.F.; VARAIYA, P.P. (1994). *A BCU Method for Direct Analysis of Power-System Transient Stability*, IEEE Transactions on Power Systems **9**(3): 1194-1200.

CHIANG, H.D.; TONG, J. MIU, K.N. (1993) *Predicting Unstable Modes in Power Systems:Theory and Computations*, IEEE Transactions on Power Systems **8**(4):1429-1437.

CHOW, J. H.(1982) *Time-Scale Modeling of Dynamic Networks with Applications to Power Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

CUOMO, K.M.; OPPENHEIM, A.V. (1993). *Chaotic signals and systems for communications*, ICASSP.

DE TUGLIE, E.; IANNONE, S.M.; TORELLI, F. (2008) *A Coherency Recognition Base don Structural Decomposition Procedure*, IEEE Transactions on Power Systems **23**(2):555-563.

DRAGOMIR, S. S. (2003). *Some Gronwall Type Inequalities and Applications*, Nova Science Publishers.

- FABINY, L.; COLET P.; ROY, R. (1993). *Coherence and phase dynamics of spatially coupled solid-states lasers*, Phys. Re. A **47**(5).
- FERREIRA, AURÉLIO B. DE HOLLANDA (1999) *Novo Dicionário da Língua Portuguesa*. 3. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira.
- FUJISAKA, H.; YAMADA, T. (1983) Stability Theory Of Synchronized Motion In Coupled-Oscillator Systems, Progress Of Theoretical Physics 69 (1): 32-47 1983.
- GAMEIRO, M.F. (1999). *Comportamento assintótico e sincronização de equações diferenciais não-lineares*, Tese de Mestrado, Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- GAMEIRO, M.F.; RODRIGUES, H.M. (2001). *Application of Robust Synchronization to Communication Systems*, Applicable Analysis, **79** (1–2), 21–45.
- GRONWALL, T.H. (1919). *Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations*, Ann. Math., **20**(2), 293-296.
- HALE, J.K. (1997). *Attracting manifolds for evolutionary equations*, Resenhas IME-USP **3**(1):55-72.
- HALE, J.K. (n.d.) *Diffusive coupling, dissipation and synchronization*, Technical Reports “CDSNS96-238”.
- HUANG, D.; GUO, R. (2004) *Identifying parameter by identical synchronization between*

different systems, *Chaos* **14**, pp. 152-159.

KHALIL, H. K. (1996) . *Nonlinear Systems*, second edn, Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, NJ.

KYRIAKIDES, E.; HEYDT GI, VITTAL V. (2004). *On-line estimation of synchronous generator parameters using a damper current observer and a Graphic User Interface* IEEE Transactions on Energy Conversion, **(19)**3.

KOCAREV, L.; PARLITZ, U. (1996). *Generalized Synchronization, Predictability, and Equivalence of Unidirectionally coupled dynamical systems*, Physical Review Letters. **(76)**, 1816-1819.

LABOURIAU, I.S.; RODRIGUES, H.M. (2003). *Synchronization of coupled equations of Hodgkin-Huxley type*. Dynamics of continuous discrete and impulsive systems-series a-mathematical analysis **10**(1-3):463-476.

LASALLE, J.P. (1960a). *The extent of asymptotic stability*, Proceedings of the National Academy of Sciences **46**(3): 363-365.

LASALLE, J.P. (1960b). *Some extensions of Lyapunov's second method*, IEE Transactions on Circuit Theory **CT-7**: 520-527.

LORENZ, E.N. (1963). *Deterministic nonperiodic flow*. Journal of the atmospheric sciences **(20)**:130.

MIJOLARO, A. P.; ALBERTO, L. F. C.; BRETAS, N. G. (2007). *Studies of Synchronization in Nonlinear Systems Using The Gronwall Inequality*. In: SSSC07 - 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control, 2007, Foz do Iguaçu - PR. Proceedings in SSSC07 - 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control.

MIJOLARO, A. P.; ALBERTO, L. F. C. ; BRETAS, N. G. (2008) *Synchronization of a Class of Second-Order Nonlinear Systems*. Aceito para publicação no International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering.

PAI, M.A. (1989) *Energy Function Analysis for Power System Stability*, Kluwer Academic Publishers.

PECORA, L.M.; CARROLL, T.L.; JONSON, G.A.; MAR, D.J. (1997). *Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts and applications*, Chaos **7**(4):520-543.

PIKOVSKY, A.S.; ROSENBLUM, M.G.; KURTHS, J. (2001). *Synchronization: A Universal concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge: Cambridge Press, England).

PONOMARENKO, V.P. (2007) *Synchronization and complex oscillations in a two-ring system with phase control*, J Commun Technol El. **52** (2): 153-163, 2007

PROKHOROV M. D.; PONOMARENKO, V.I.; GRIDNEV V.I.; BODROV M.B.; BESPATOV A.B. (2003). *Synchronization between main rhythmic processes in the human cardiovascular system*. Physical Review E, **68**(4): Art.n.º 041913 Part 1.

QIU, W.; VITTAL V.; KHAMMASH, M. (2004). *Decentralized Power System Stabilizer*

Design Using Linear Parameter Varying Approach, IEEE Transactions on Power Systems, **19**(4): 1951-1960.

RAMOS, R.A.; ALBERTO, L.F.C.; BRETAS, N.G. (2004-a). *A new methodology for the coordinated design of robust decentralized power system damping controllers*, IEEE Transactions on Power Systems, **19**(1).

RAMOS, R. A.; ALBERTO, L. F. C.; BRETAS, N. G. (2004-b). *Decentralized Output Feedback Controller Design for the Damping of Electromechanical Oscillations*. International Journal of Electrical Power Energy Systems, **26**(3): 207–219.

RAMOS, R. A.; ALBERTO, L. F. C.; BRETAS, N. G. (2003). *Linear Matrix Inequality Based Controller Design with Feedback Linearization: Application to Power Systems*. IEE Proceedings-Control Theory and Applications, **150**(5): 551 – 556.

RAYLEIGH, J. (1945). *The Theory of the sound* (New York: Dover Publ.)

REUSS, S. (1996) *Components and connections of the circadian timing system in mammals*. CELL TISSUE RES **285** (3): 353-378.

RODRIGUES, H.M. (1996). *Abstract methods for synchronization and applications*, Applicable Analysis **62**:263-296.

RODRIGUES, H.M.; ALBERTO, L.F.C.; BRETAS, N.G. (2000). *On the Invariance Principle. Generalization and Applications to Synchronism*, IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications **47**(5).

- RODRIGUES, H.M.; ALBERTO, L.F.C.; BRETAS, N.G. (2001). *Uniform Invariance Principle and Synchronization. Robustness with Respect to Parameter Variation*, J. of Differential Equations **169**: 228-254.
- ROSENBLUM, M.; PIKOVSKY, A. (2003). *Synchronization: from pendulum clocks to chaotic lasers and chemical oscillators*. Contemporary Physics (**44**)5.
- RUGGIERO, M.A.G.; LOPES, V.L.R. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*, Makron Books, 2.^a Edição, 1997.
- SKANDHAN, K.P.; PANDYA, A.K.; SKANDHAN, S.; MEHTA, Y.B. (1979) *Synchronization of Menstruation among Intimates And Kindreds*, Panminerva Medica **21** (3): 131-134.
- TORRE, V. (1976). *A theory of synchronization of heart pace-maker cells*, J. theor. Biol. **61**: 55-71.
- TREINEN, R.T; VITTAL, V.; KLIENMAN, W. (1996). *An improved technique to determine the controlling unstable equilibrium point in a power system*, IEEE Transactions on Circuits and Systems I, **43**(4): 313-323;
- TRESSER, C.; WORFOLK, P. (1995). *Master-slave synchronization from the point of view of global dynamics*, Chaos **5**(4):693-699.
- TROULINOS G. e DORSEY, J. (1989) *Coherency and model reduction: State space point of view*, IEEE Transactions on Power Systems **4**(3): 988–995.

- USHIO, T (1995). *Chaotic Synchronization and Controlling Chaos Based on Contraction Mappings*, Phys. Lett. A **(198)**, 14-22.
- VAN DER POL, B. (1927). *Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance (reception with reactive triode)*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, **3**, 65-80.
- WU, F.F.; TSAI, Y-K.(1983). *Identification of groups of ε -coherent generators*, IEE Trans. On Circuits and Systems **CAS-30**(4): 234-241.
- YANG, T.; CHUA, L.O. (1997). *Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic systems: theory and application to secure communication*, IEE Trans. On Circuits and Systems **44**(10): 976-988.
- YOU, H.; VITTAL, V.; WANG, X. (2004). *Slow coherency-based islanding*; IEEE Trans. on Power Systems **19**(1): 483-491.
- YPEY, D.L.; VANMEERWIJK, W.P.M.; INCE, C.; GROOS, G. (1980). *Mutual entrainment of two pacemakers cells. A study with an electronic parallel conductance model*, J. theor. Biol. **86**, 731-755
- YU, W.; CHEN, G.; CAO, J.; LU J.; PARLITZ, U. (2007). *Parameter identification of dynamical systems from time series*, Physical, Review E, **75**(6).
- ZHANG, Y.; HU, S.Q.; DU, G.H. (1999). *Chaos synchronization of two parametrically excited pendulums*, Journal of Sound and Vibration **223**(2): 247-254.

ZHAO, L. (2003). *Chaotic synchronization for scene segmentation*, International Journal of Modern Physics B, **17**(22-24):4387-4394.

ZHU, S.Z.; VITTAL, V.; KLIEMANN, W. (2001). *Analyzing dynamic performance of power systems over parameter space using normal forms of vector fields - Part I: Identification of vulnerable regions (Republished)*, IEEE Transactions on Power Systems, **16**(4).