Cristiane Regina Mariano

**ESTUDO E ANÁLISE DO DESEMPENHO DO MÉTODO
BARREIRA MODIFICADA**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Roberto Martins da Costa

São Carlos

2006

Aos meus pais Iracema Boreggio Mariano e
Valdemar Mariano pelo amor, incentivo e
dedicação.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Geraldo Roberto Martins da Costa pela excelente orientação, compreensão, amizade e paciência durante a elaboração desse trabalho.

A Dra. Vanusa Alves de Sousa pela excelente co-orientação, compreensão, amizade e colaboração durante a execução desse trabalho.

Ao meu namorado Rogério, pela compreensão, incentivo e carinho durante esse período, mantendo-se incondicionalmente ao meu lado, ajudando-me a buscar os meus sonhos.

Aos meus pais, Valdemar e Iracema, minha irmã e cunhado, Silvia e Tales, pelo incentivo, carinho e apoio durante este período.

Ao pessoal do LOSEP: Cristiane Lion, Edmarcio, Fernando e Marcus pelas trocas de idéias, pelo apoio e principalmente pela amizade.

Aos colegas Lizandra, Helmer, Madeleine, Fernando e Amanda pela colaboração nas disciplinas que realizamos juntos.

A direção, coordenação e professores do colégio Externato Santa Terezinha, pela compreensão e amizade durante a elaboração desse trabalho.

A **todos** os que conviveram comigo durante esse período, torcendo, apoiando, e me compreendendo.

RESUMO

MARIANO, C. R. (2006). *Estudo e Análise do Desempenho do Método Barreira Modificada*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

Este trabalho tem por objetivo estudar e analisar a influência do parâmetro de barreira e de seu fator de correção no processo de convergência dos métodos de Pontos Interiores Primal-Dual, Primal-Dual Barreira Modificada e Primal-Dual Barreira Modificada com as técnicas Preditor-Corretor e Newton Composto. A grande motivação para o desenvolvimento desta pesquisa está relacionada com a busca de métodos eficientes para resolver problemas de otimização de programação não-linear, existentes na área de engenharia elétrica mais especificamente na operação de sistemas elétricos de potência. Esses métodos foram aplicados a um problema de programação não-linear e aos sistemas elétricos de três e de trinta barras para analisar a sensibilidade em relação ao parâmetro de barreira e ao seu fator de correção.

Palavras-chave: programação não-linear, método de pontos interiores, método de barreira modificada, método de Newton, método Preditor-Corretor, método Newton Composto.

ABSTRACT

MARIANO, C. R. (2006). *Study and Analysis of Performance of Modified Barrier Method*. M.Sc. Dissertation – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

This work has for objective to study and to analyze the influence of the barrier parameter and its correction factor in the convergence process of the methods Primal-Dual Interior Point, Primal-Dual Modified Barrier and Primal-Dual Barrier Modified with the techniques Predictor-Corrector and Composed Newton. The great motivation for the development of this research is related with the search of efficient methods to solve nonlinear programming optimization problems, existent in the area of electric engineering more specifically in the operation of power systems. Those methods were applied to a nonlinear programming problem and the electric systems of three and thirty buses to analyze the sensibility in relation to the barrier parameter and its correction factor.

Keywords: nonlinear programming, Interior Point method, Modified Barrier method, Newton's Method, Predictor-Corrector method, Composed Newton method.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Representação geométrica da função penalidade	8
FIGURA 2 – Representação geométrica da atualização dos fatores de penalidade	8
FIGURA 3 – Comportamento da função barreira.....	12
FIGURA 4 – Resolução através da função barreira.....	13
FIGURA 5 – Ilustração dos métodos de pontos interiores e do Simplex	16
FIGURA 6 – Sistema elétrico de 3 barras.....	66
FIGURA 7 – Convergência das restrições de igualdade do sistema de 30 barras para o MPDBM.....	95
FIGURA 8 – Convergência das restrições de igualdade do sistema de 30 barras para o MPDBM-PC.....	96
FIGURA 9 – Convergência das restrições de igualdade do sistema de 30 barras para o MPDBM-NC.....	97
FIGURA 10 – Comparação da convergência da FO do sistema de 30 barras para os métodos apresentados	98

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Convergência do MPI Primal-Dual aplicado ao problema de PNL	57
TABELA 2 – Convergência do método PDBM aplicado ao problema de PNL com μ fixo .	61
TABELA 3 – Convergência do método PDBM aplicado ao problema de PNL.....	62
TABELA 4 – Convergência do método PDBM com predito-corretor aplicado ao problema de PNL com μ fixo.....	64
TABELA 5 – Convergência do método PDBM com Newton Composto aplicado ao problema de PNL com μ fixo.....	65
TABELA 6 – Convergência do método PDBM com μ fixo aplicado ao sistema de 3 barras	73
TABELA 7 – Convergência do método PDBM aplicado ao sistema de 3 barras	74
TABELA 8 – Convergência do método PDBM-PC com μ fixo aplicado ao sistema de 3 barras	81
TABELA 9 – Convergência do método PDBM-PC aplicado ao sistema de 3 barras ...	82
TABELA 10 – Convergência do método PDBM-NC com μ fixo aplicado ao sistema de 3 barras	88
TABELA 11 – Convergência do método PDBM-NC aplicado ao sistema de 3 barras.	90
TABELA 12 – Parâmetro g do sistema elétrico de 30 barras	91
TABELA 13 – Parâmetro b do sistema elétrico de 30 barras	92
TABELA 14 – Convergência do método PDBM aplicado ao sistema de 30 barras	94
TABELA 15 – Convergência do método PDBM-PC aplicado ao sistema de 30 barras	95
TABELA 16 – Convergência do método PDBM-NC aplicado ao sistema de 30 barras	97

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EESC – Escola de Engenharia Elétrica de São Carlos;
FBC – função barreira clássica;
FBM – função barreira modificada;
F. Ob. – função objetivo;
KKT – Karush-Kuhn-Tucker;
MFB – Método da Função Barreira;
MFP – Método da Função Penalidade;
MFBM – Método da Função Barreira Modificada;
PL – Programação Linear;
PLS – Programação Linear Sequencial;
PNL – Programação Não-Linear;
MPDBM – Método Primal-Dual Barreira Modificada;
MPDBM-NC – Método Primal-Dual Barreira Modificada Newton Composto;
MPDBM-PC – Método Primal-Dual Barreira Modificada Preditor-Corretor;
MPI – Métodos de Pontos Interiores;
MPINC – Método de Pontos Interiores de Newton Composto
PQS – Programação Quadrática Sequencial;
s.a – Sujeito a.

LISTA DE SÍMBOLOS

$f(x)$ – função objetivo;

$g(x)$ – vetor das restrições de igualdade;

x – vetor das variáveis primais;

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – vetor coluna;

$x^T = (x_1, \dots, x_n)$ – vetor linha;

$\mathbb{R}$ – conjunto dos números reais;

$\in$ – pertence a;

c – fator de penalidade;

$h(x)$ – vetor das restrições de desigualdade do tipo “maior ou igual”;

fp – função penalidade;

ω – parâmetro ou incremento de penalidade;

ξ – tolerância de convergência;

μ – parâmetro de barreira;

$B(x)$ – função barreira associada ao problema primal;

β – fator de correção;

$\overline{A}$ – limite máximo da grandeza A ;

$\underline{A}$ – limite mínimo da grandeza A ;

J – matriz Jacobiana;

s – vetor das variáveis de excesso;

L – função Lagrangiana;

λ – vetor dos multiplicadores de Lagrange para as restrições de igualdade;

π – vetor dos multiplicadores de Lagrange para as restrições de desigualdade;

y – vetor das variáveis do problema;

α_p – tamanho do passo primal;

α_D – tamanho do passo dual;

ρ – vetor das estimativas não-negativas dos multiplicadores de Lagrange associados a função barreira modificada;

SUMÁRIO

RESUMO	iv
ABSTRACT	v
LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE TABELAS	vii
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS.....	viii
LISTA DE SÍMBOLOS.....	ix

1 INTRODUÇÃO

1.1- Motivação	3
1.2- Objetivo	3
1.3- Organização do Trabalho.....	3

2 MÉTODO DA FUNÇÃO PENALIDADE E DA FUNÇÃO

BARREIRA

2.1- Apresentação do problema.....	5
2.2- Método da Função Penalidade.....	5
2.2.1- Algoritmo do Método da Função Penalidade	6
2.2.2- Interpretação geométrica.....	7
2.2.3- Dificuldades computacionais	9
2.3- O Método da Função Barreira	10
2.3.1- Algoritmo.....	11
2.3.2- Interpretação geométrica.....	12
2.3.3- Dificuldades computacionais	13

3 O MÉTODO DOS PONTOS INTERIORES

3.1- Introdução	15
3.2- O problema de programação não-linear.....	17
3.3- O problema de programação linear seqüencial.....	18
3.4- O Método de Pontos Interiores Primal-Dual para PNL.....	19

3.4.1- Problema modificado e condições de otimalidade	21
3.4.2- Calculo da direção de Newton	23
3.4.3- Atualização das variáveis.....	24
3.4.4- Redução do parâmetro de barreira	26
3.5- Os Métodos de Pontos Interiores Primal-Dual de Ordem Superior.....	26
3.5.1- O Método de Pontos Interiores Preditor-Corretor de Mehrotra.....	27
3.5.1.1- Algoritmo.....	31
3.5.2- O Método de Pontos Interiores de Newton Composto	31
3.5.2.1- Algoritmo.....	34
3.6- Dificuldades computacionais.....	34

4 O MÉTODO PRIMAL-DUAL BARREIRA MODIFICADA

4.1- Introdução	35
4.2- A Função Barreira Modificada	35
4.3- Método da Função Barreira Modificada.....	39
4.3.1- Algoritmo.....	40
4.3.2- Dificuldades computacionais.....	41
4.5- O Método Primal-Dual Barreira Modificada.....	41
4.5.1 - Algoritmo.....	45
4.5.2- Dificuldades computacionais.....	46
4.6- O Método Primal-Dual Barreira Modificada Preditor-Corretor	46
4.6.1 - Algoritmo.....	49
4.6.2- Dificuldades computacionais.....	50
4.7- O Método Primal-Dual Barreira Modificada Newton Composto.....	50
4.7.1 - Algoritmo.....	50
4.7.2- Dificuldades computacionais.....	51

5 RESULTADOS

5.1- Problema de Programação Não-Linear.....	52
5.1.1- Resolução pelo Método de Pontos Interiores Primal-Dual.....	53
5.1.2- Resolução pelos Métodos Primal-Dual Barreira Modificada e suas variantes....	57
5.1.2.1- Resolução pelo Método Primal-Dual Barreira Modificada	59

5.1.2.2- Resolução pelo Método Primal-Dual Barreira Modificada com Preditor Corretor	62
5.1.2.3- Resolução pelo Método Primal-Dual Barreira Modificada com Newton Composto	65
5.2- Sistema Elétrico de 3 Barras	66
5.2.1- Resolução pelo Método Primal-Dual Barreira Modificada	69
5.2.2- Resolução pelo Método Primal-Dual Barreira Modificada com Preditor Corretor	75
5.2.3- Resolução pelo Método Primal-Dual Barreira Modificada com Newton Composto	83
5.3- Sistema Elétrico de 30 Barras	91
5.3.1- Resolução pelo Método Primal-Dual Barreira Modificada	94
5.3.2- Resolução pelo Método Primal-Dual Barreira Modificada com Preditor Corretor	95
5.3.3- Resolução pelo Método Primal-Dual Barreira Modificada com Newton Composto	96
 6 CONCLUSÕES	 99
 REFERÊNCIAS	 101

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Os métodos de otimização têm como meta encontrar a melhor solução de um problema, entre todas as possíveis, para um desempenho desejado (função objetivo). Os matemáticos têm trabalhado no desenvolvimento de métodos de otimização desde Descartes e Fermat no século XVII, mesmo antes do desenvolvimento das bases do cálculo por Newton. As aplicações da otimização estendem-se a problemas de previsão e planejamento, programação de produção e estoque, automação, otimização de processos, entre outros. No entanto, antes de 40, desenvolveu-se pouco sobre métodos para otimização numérica de funções de muitas variáveis.

Na década de 40, após o surgimento do computador, vários métodos de otimização foram desenvolvidos. Por exemplo, em programação linear (PL), que tem como meta a otimização de funções lineares sujeitas a restrições lineares, destaca-se o método Simplex desenvolvido na década de 40, por Dantzig, com o objetivo de alocar recursos durante a Segunda Grande Guerra Mundial. Desde então, o desenvolvimento de algoritmos e programas altamente eficientes e robustos, o surgimento de computadores cada vez mais velozes, a percepção dos profissionais e pesquisadores em relação às vantagens e ao bom desempenho da modelagem matemática e análise de problemas por meio da PL, fazem da mesma uma ferramenta de extrema importância.

Entretanto, a maior parte dos problemas reais não podem ser representados ou aproximados adequadamente por um problema linear devido à natureza não-linear da função objetivo e/ou de qualquer das restrições. Tais problemas são tratados pela programação não-linear (PNL).

Uma das principais metas no desenvolvimento da PNL é a criação de algoritmos computacionais eficientes. A PNL pode ser aplicada, por exemplo, nos seguintes problemas: alocação de recursos escassos, operação e planejamento industrial, trajetória

ótima de foguetes, desenhos estruturais, desenhos mecânicos e demais problemas relacionados aos setores industriais, de negócios, militar e governamental. A PNL não possui um método geral de resolução de seus problemas. Suas técnicas para resolver um problema podem ser classificadas, basicamente, pelo tipo de problema abordado. Neste trabalho os problemas apresentam função objetivo não-linear e restrições não-lineares, estes são aproximados por uma sequência de problemas e, então, resolvidos. Assume-se que os problemas aproximados possuam a mesma solução do problema original. Nesses casos, os Métodos da Função Penalidade, Pontos Interiores e da Função Barreira Modificada podem ser aplicados.

Os Métodos de Pontos Interiores têm sido amplamente utilizados em PL e PNL principalmente na resolução de problemas de grande porte. Estes métodos foram introduzidos por Frisch (1955) e por Carrol (1961), e popularizados por Fiacco e McCormick (1968), através do uso do método da função barreira. O entusiasmo no uso da função barreira diminuiu, sensivelmente, na década de 70 devido a problemas como: o mal condicionamento da matriz Hessiana da função barreira quando seu parâmetro tende a zero; a dificuldade na escolha do parâmetro de barreira e na escolha de uma solução inicial; a não-existência da derivada na solução e o aumento ilimitado da função barreira na vizinhança da fronteira. O interesse por este método reapareceu somente após a proposta feita por Karmarkar (1984) do seu método projetivo para Programação Linear, que, também, ficou conhecido como método de pontos interiores.

Em virtude do interesse despertado por Karmarkar e seus seguidores na década de 80, a função barreira logarítmica passou novamente a ser usada como uma ferramenta alternativa de trabalho, e novos tipos de função barreira foram apresentadas. Polyak em 1992 propôs o Método da Função Barreira Modificada com o objetivo de combinar as melhores propriedades da função Lagrangiana clássica e da função barreira clássica. A qualidade mais importante da função barreira modificada é a representação explícita de seu multiplicador de Lagrange, pois esse auxilia no processo de convergência do método.

O Método Preditor-Corretor introduzido por Kojima et al. (1989) e desenvolvido por Mehrotra (1992) tem como objetivo melhorar o processo de convergência do Método de Newton, para isso obtém uma direção de busca mais bem sucedida através

da solução de dois sistemas de equações lineares em cada iteração, conhecidos como passos preditor e corretor envolvendo uma única matriz coeficiente com dois diferentes lados direito. Desse modo, uma única matriz de fatoração é requerida, tendo assim um pequeno trabalho adicional no passo corretor para calcular os termos não-lineares introduzidos no vetor do lado direito do sistema de Newton, os quais, em princípio, não são conhecidos.

O Método de Newton Composto apresentado por Zhang (1996) executa dois ou mais passos corretores a cada iteração com a intenção de realizar menos iterações que o Método Preditor-Corretor. Dessa maneira, os objetivos do Método de Newton Composto são: a exploração das derivadas e mais fatorações em uma sequência de soluções de sistemas com diferentes lados direitos.

1.1 – MOTIVAÇÃO

A grande motivação para o desenvolvimento desta pesquisa está relacionada com a busca de métodos eficientes para resolver problemas de otimização de programação não-linear, existentes na área de engenharia elétrica, especificamente, na operação de sistemas elétricos de potência.

1.2 – OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é estudar e analisar o Método Primal-Dual Barreira Modificada com os Métodos de Newton, Preditor-Corretor e Newton Composto e verificar o desempenho desses métodos na resolução de problemas de PNL.

1.3 – ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Primeiramente, apresentou-se a motivação para o desenvolvimento do trabalho, definiu-se o objetivo do mesmo, bem como sua organização. No capítulo 2, tem-se um estudo dos Métodos da Função Penalidade e da Função Barreira. No capítulo 3, apresenta-se um estudo do Método dos Pontos Interiores Primal-Dual para resolver problemas de programação não-linear, detalhando-se todos os passos para sua solução.

No capítulo 4, apresenta-se um estudo dos Métodos da Função Barreira, Primal-Dual Barreira Modificada com os Métodos de Newton, Preditor-Corretor e de Newton Composto. No capítulo 5, apresentam-se os resultados obtidos com a aplicação dos métodos Primal-Dual Barreira Modificada (PDBM), Primal-Dual Barreira Modificada com as técnicas Preditor-Corretor (PDBM-PC) e Newton Composto (PDBM-NC) a um problema de programação não-linear e aos sistemas elétricos de três e de trinta barras, além da aplicação do método primal-dual barreira logarítmica (PDBL) ao problema de programação não-linear. E, finalmente, no capítulo 6, são feitas as conclusões deste trabalho e descritas as perspectivas de continuidade do mesmo.

CAPÍTULO 2

MÉTODO DA FUNÇÃO PENALIDADE E DA FUNÇÃO BARREIRA

Neste capítulo são apresentados os métodos da função penalidade e da função barreira.

2.1 – APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Os métodos apresentados a seguir têm por objetivo resolver problemas de programação não-linear restritos da forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & g_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m < n \\ & d_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, r \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde: $x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) \in \mathbb{R}^m$, $d(x) \in \mathbb{R}^r$, e as funções são de classe C_2 .

2.2 – MÉTODO DA FUNÇÃO PENALIDADE

Seguindo a estratégia de associar ao problema (2.1) uma seqüência de problemas irrestritos, a estratégia do Método da Função Penalidade (MFP) é a utilização de uma função auxiliar onde as restrições são introduzidas na função objetivo através de um fator de penalidade, o qual penaliza alguma violação destas. Esse método gera uma seqüência de pontos infactíveis, cujo limite é a solução ótima do problema original.

A função auxiliar tem a forma $f(x) + cP(x)$, sendo c denominado fator de penalidade, e $P(x)$, função penalidade associada a (2.1), dada por:

$$P(x) = \sum_{j=1}^m \Theta(g_j(x)) + \sum_{i=1}^r \Lambda(d_i(x)), \quad (2.2)$$

onde Θ e Λ são funções contínuas de uma variável y , tais que:

$$\Theta(y) = 0, \text{ se } y = 0 \text{ e } \Theta(y) > 0, \text{ se } y \neq 0; \quad (2.3)$$

$$\Lambda(y) = 0, \text{ se } y \leq 0 \text{ e } \Lambda(y) > 0, \text{ se } y > 0. \quad (2.4)$$

As funções (2.3) e (2.4) podem assumir as seguintes formas:

$$\Theta(y) = |y|^p, \quad (2.5)$$

$$\Lambda(y) = [\max\{0, y\}]^p \quad (2.6)$$

onde p é um inteiro positivo. Para $p = 2$, em (2.5) e (2.6) a função $P(x)$ é denominada função penalidade quadrática.

O problema penalizado consiste em:

$$\text{Minimizar } f(x) + c P(x) \quad (2.7)$$

para $c > 0$. Temos que, à medida que $c \rightarrow \infty$ e $P(x) \rightarrow 0$, a solução do problema penalizado converge para a solução do problema original.

2.2.1 – Algoritmo do Método da Função Penalidade

Passo 0: Dado o problema (2.1), construa a função penalidade $P(x)$ dada em (2.2). Faça $k = 0$, estabeleça uma tolerância de convergência ($\xi > 0$), o ponto inicial x^0 , um fator de penalidade inicial $c^0 > 0$ e um parâmetro ou incremento de penalidade $\omega > 1$ e vá ao passo 1.

Passo 1: Resolver o seguinte problema iniciando com x^0 e utilizando técnicas já conhecidas como o método de Newton:

$$\min_x f(x) + c^k P(x)$$

Admita x^{k+1} como a solução e vá para o passo 2

Passo 2: Se $c^k \cdot P(x^{k+1}) < \xi$, **pare**. Caso contrário, $c^{k+1} = \omega \cdot c^k$. Faça $k = k + 1$ e volte ao passo 1.

2.2.2 - Interpretação geométrica

Seja o seguinte problema perturbado, somente com uma restrição de igualdade:

$$V(\varepsilon) = \begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.a } g(x) = \varepsilon \end{cases} \quad (2.8)$$

Define-se um conjunto S representado em um plano yz , tal que:

$$S = \{(y, z) / y = g(x), z = f(x), x \in \mathbb{R}^n\} \quad (2.9)$$

Considere $V(\varepsilon)$ como o contorno inferior deste conjunto, como pode ser visto na Figura 1. Para $c > 0$ fixo, temos o seguinte problema penalizado:

$$\min f(x) + c \cdot g^2(x) \quad (2.10)$$

Em que determinar o mínimo de (2.10) significa minimizar $z + cy^2$ sobre o conjunto S . Assim, têm-se as parábolas:

$$z + cy^2 = k_i; i = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

sendo $k_i \in \mathbb{R}$ é a intersecção da parábola com o eixo z (ver Figura 1 extraída de Bazaraa et al.).

Figura 1 - Representação geométrica da função penalidade.

No processo de minimização de (2.11), começa-se com um valor k_i correspondente a um ponto pertencente ao interior da região factível. A determinação da solução ótima de (2.10) consiste em mover as curvas de nível, isto é, as parábolas, na direção contrária à do gradiente, até o ponto onde a curva tangencia o conjunto S , como pode ser visto na Figura 1. Observa-se que a solução para o problema penalizado não é a mesma do problema original, pois $g \neq 0$ nesse ponto de tangência.

Na Figura 2 extraída de Bazaraa et al., pode ser visto que, para aproximar tal solução, aumenta-se o fator de penalidade $c' = \omega c$, diminuindo-se a abertura da parábola, representada por (2.11); assim o ponto de tangência dessas parábolas torna-se mais próximo da solução ótima do problema original. À medida que $c \rightarrow \infty$, o ponto de tangência aproxima-se da solução ótima do problema.

Figura 2 - Representação geométrica da atualização dos fatores de penalidade.

2.2.3- Dificuldades computacionais

Escolhendo-se c suficientemente grande, a solução do problema penalizado será próxima à solução do problema (2.1); porém, para valores muito grandes do fator de penalidade, teremos alguns problemas de mal condicionamento. Para valores grandes de c , há uma maior ênfase sobre a factibilidade; e a maioria dos métodos de otimização irrestrita move-se rapidamente na direção de um ponto factível. Esse ponto pode estar longe do ótimo, causando um término prematuro do método. Um outro problema é o mal condicionamento da matriz Lagrangiana devido à sua dependência de c . Assim, a análise de convergência do método pode ficar prejudicada. Ressaltamos que a escolha inicial do fator de penalidade e do parâmetro de penalidade afeta a convergência do método.

Em resumo o Método da Função Penalidade:

- Transforma um problema restrito em um problema irrestrito.
- A trajetória de convergência ocorre na região infactível do problema.
- A solução inicial pode partir de um ponto infactível.
- Resolve problemas com restrições de igualdade e desigualdade.
- As restrições são adicionadas à função objetivo através de um fator de penalidade de maneira a penalizar qualquer violação das restrições.

Vantagens:

- O método da Função Penalidade não é tão sensível à escolha do fator e do parâmetro de penalidade, possibilitando um ajuste mais flexível dos mesmos, porém um ajuste não adequado do fator de penalidade pode comprometer a convergência do método.
- O ponto inicial pode ser infactível ao problema.

Desvantagens:

- Como a penalização ocorre fora da região factível existirá um único ponto factível que será o ponto ótimo.

- Com o aumento do fator de penalidade pode ocorrer um mal condicionamento da matriz Lagrangiana da função penalidade.

Com o objetivo de superar as limitações do método da Função Penalidade, Frisch (1955) propôs o método da Função Barreira.

2.3 – O MÉTODO DA FUNÇÃO BARREIRA

Similar ao MFP, o Método da Função Barreira (MFB) também transforma um problema restrito em uma seqüência de problemas irrestritos. O MFB introduz as restrições na função objetivo através de um parâmetro de barreira que impede a aproximação de um ponto factível à fronteira da região factível. Trabalhando no interior dessa região, tais parâmetros geram barreiras que impedem as variáveis de violarem seus limites. Logo, parte-se de um ponto factível e geram-se novos pontos factíveis. Uma das vantagens desse método é a obtenção de, pelo menos, uma solução factível, caso ocorra uma parada prematura dele. Esse método trabalha somente com problemas de desigualdade cujo interior é não-vazio. Assim, assume-se o problema (2.1) obedecendo a essa condição.

Com o objetivo de garantir a permanência no interior da região factível, podemos gerar o seguinte problema de barreira:

$$\min_x \{f(x) + \mu.B(x) : d(x) < 0\} \quad (2.12)$$

onde $\mu \geq 0$ é denominado fator de barreira, e $B(x)$ é uma função barreira não-negativa e contínua no interior da região factível $\{x: d(x) < 0\}$, e tende ao infinito à medida que a solução se aproxima da fronteira pelo interior da região. Mais especificamente, a função barreira é definida por:

$$B(x) = \sum_{i=1}^r \phi[d_i(x)] \quad (2.13)$$

onde ϕ é uma função de uma variável y , contínua sobre $\{y; y < 0\}$, e satisfaz

$$\phi(y) \geq 0 \text{ se } y < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \phi(y) = \infty \quad (2.14)$$

Assim, a função $f(x) + \mu.B(x)$ é denominada função auxiliar. A função barreira pode assumir várias formas, como:

$$B(x) = \sum_{i=1}^r -\frac{1}{d_i(x)} \quad (2.15)$$

$$B(x) = -\sum_{i=1}^r \ln[-d_i(x)] \quad (2.16)$$

A função (2.15) é denominada barreira clássica ou inversa e foi estudada por Carrol (1961); (2.16) é denominada função barreira logarítmica e foi estudada por Frisch (1955).

Quando $\mu \rightarrow 0$ e $B(x) \rightarrow \infty$, temos que $\mu B(x)$ se aproxima da função barreira ideal, descrita anteriormente em (2.12), e a solução do problema de barreira converge para a solução do problema (2.1).

Observa-se que (2.12) é um problema restrito e pode ser tão complexo quanto (2.1). Como uma solução inicial interior à região factível é exigida e o método trabalha com pontos interiores a essa região, ao penalizar os pontos que se aproximam da fronteira impede-se que eles saiam da região e a restrição pode ser ignorada. Tem-se, realmente, um problema irrestrito, para o qual poderá ser utilizada uma técnica de otimização irrestrita.

2.3.1 - Algoritmo

Passo 0: Dado o problema (2.1), somente com restrições de desigualdade, construa a função (2.13). Faça $k = 0$, estabeleça uma tolerância de convergência ($\xi > 0$), o ponto inicial x^0 com $h(x^0) > 0$, o parâmetro de barreira $\mu^0 > 0$, o fator de correção $\beta \in (0,1)$ e vá ao passo 1.

Passo 1: Resolver o problema iniciando com x^0 , utilizando técnicas já conhecidas como o método de Newton:

$$\min_x \{f(x) + \mu.B(x) : d(x) < 0\}$$

Admita x^{k+1} como uma solução e vá para o passo 2.

Passo 2: Se $\mu^k B(x^{k+1}) < \xi$, **pare**. Caso contrário, $\mu^{k+1} = \beta \mu^k$. Faça $k = k + 1$ e volte ao passo 1.

2.3.2 - Interpretação geométrica

Considera-se o problema de barreira em (2.12) tal que a funções barreiras são definidas em (2.15). A Figura 3 extraída de Bazaraa et al. mostra o comportamento da função barreira $\mu B(x)$ para valores decrescentes de μ .

Figura 3 - Comportamento da função barreira.

Note que, à medida que μ decresce, $\mu.B(x)$ se aproxima de uma função que tem valor zero para $d(x) < 0$ e infinito para $d(x) = 0$.

Ao resolver o problema (2.12) utilizando a função (2.15), inicia-se o processo de solução com um ponto interior à região factível. Para cada valor de μ , tem-se uma solução que será o ponto inicial para o processo iterativo. À medida que μ decresce, aproxima-se da solução do problema original, ou seja, $\mu \rightarrow 0$, $x \rightarrow x^*$ e $\mu.B(x) \rightarrow f(x^*)$, como pode ser visto na Figura 4 extraída de Bazaraa et al.

Figura 4 - Resolução através da função barreira.

2.3.3 - Dificuldades computacionais

Uma das dificuldades encontradas no método de barreira é a seleção de um ponto inicial factível. Em muitos problemas, isso pode ser trabalhoso. Também, em virtude da estrutura da função barreira, para valores pequenos de μ , muitas técnicas apresentam sérios problemas de mal condicionamento e erros de arredondamento, quando o ótimo se aproxima. As escolhas do fator de barreira e do parâmetro de barreira podem comprometer o processo de otimização.

Em resumo, o Método da Função Barreira:

- Transforma um problema restrito em um problema modificado.
- Apresenta trajetória de convergência pelo interior da região factível.
- A solução inicial parte de um ponto factível.
- Trabalha só com problemas de desigualdade.
- As restrições são adicionadas a função objetivo através de um parâmetro de barreira, que impede a aproximação de um ponto factível à fronteira da região factível (segura o ponto na região).

Vantagens:

- Obtenção de, pelo menos, uma solução factível, caso o processo seja interrompido, pois caminha pelo interior. Por ser eficiente é o método mais utilizado atualmente.
- Para vários valores de μ têm-se diferentes pontos factíveis e quando $\mu \rightarrow 0$, $x^k \rightarrow x^*$.

Desvantagens:

- Uma das dificuldades é a seleção de um ponto inicial factível.
- O método é sensível a escolha do parâmetro de barreira e do fator de correção, ou seja, para cada valor de barreira apresenta um número diferente de iterações para o mesmo problema, tornando difícil o ajuste. Para valores do parâmetro de barreira não ajustados adequadamente, o método diverge.
- Longe da solução, μ não deve estar próximo de zero, pois causa problema numérico, ou seja, um mal condicionamento.

CAPÍTULO 3

O MÉTODO DOS PONTOS INTERIORES

Neste capítulo são apresentados os Métodos dos Pontos Interiores (MPI), MPI com as técnicas Preditor-Corretor e MPI com Newton Composto aplicados a um problema de programação não-linear.

3.1 – INTRODUÇÃO

Os primeiros Métodos de Pontos Interiores (MPI) surgiram a mais de 50 anos, desta forma a teoria dos MPI e a sua implementação computacional estão bem desenvolvidas e avançam rapidamente. Variantes dos MPI têm sido estendidos para resolver todos os tipos de problemas: de linear a não linear e de convexo a não convexo. No mesmo caminho, eles têm sido aplicados para resolver todos os tipos de problemas práticos. A otimização de operação de sistemas de potência é uma das áreas onde os MPI têm sido aplicados exhaustivamente. Devido às dimensões e características especiais desses problemas, os MPI têm provado computacionalmente ser uma alternativa eficiente para sua solução.

O primeiro MPI conhecido é o Método da Barreira Logarítmica atribuído a Frisch (1955), o qual foi posteriormente na década 60 estudado extensivamente por Fiacco e McCormick para resolver problemas não lineares com restrições de desigualdade. No entanto, a maior descoberta no campo da pesquisa de pontos interiores teve lugar apenas em 1984, quando Karmarkar (1984) apresentou um novo MPI para Programação Linear (PL), o qual alcançou a solução ótima até 50 vezes mais rápido que o Método Simplex (MS) de Dantzig. O algoritmo de Karmarkar é baseado em transformações projetivas não-lineares.

O algoritmo de Karmarkar é, significativamente, diferente do MS. A resolução de um problema de PL através do MS inicia em um ponto extremo ao longo da fronteira

complexidade computacional e simplicidade os tornaram muito populares. Os Métodos Primal-dual incluem Métodos *Path-Following* e Métodos de Redução Potencial. Os primeiros resultados teóricos para os Métodos *Path-Following* são devido a Megiddo (1986) que propôs a aplicação de um Método de Barreira Logarítmica para o problema primal e dual simultaneamente. Todos os métodos citados podem ser encontrados em Matumoto (1996).

O esforço computacional de cada iteração de um algoritmo do MPI é dominado pela solução de sistemas lineares. Por esse motivo, o desempenho de qualquer código de MPI é altamente dependente de uma boa álgebra linear central.

Neste capítulo é realizada uma descrição dos MPI aplicados à resolução dos problemas de Programação Não-linear (PNL) conforme Torres (1998) e é organizado da seguinte forma: inicialmente descreve-se o problema de PNL, esboça-se o Método da Programação Linear Sequencial (PLS), mostra-se em detalhes o desenvolvimento de um MPI Primal-Dual e finalmente apresenta-se uma breve abordagem dos MPI Primal-Dual de ordem-superior.

3.2 – O PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

Um típico problema de PNL que frequentemente surge em engenharia elétrica, tem a seguinte formulação matemática:

$$\begin{aligned}
 &\min f(x) \\
 \text{s.a } &g_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m < n \\
 &h_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, p \\
 &\underline{x}_r \leq x_r \leq \bar{x}_r, \quad r = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que:

- $x \in \mathbb{R}^n$ é um vetor das variáveis do problema.
- $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função objetivo a ser minimizada.
- $g \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um vetor das restrições de igualdade.
- $h \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é um vetor das restrições de desigualdade.

Deste ponto em diante assume-se que $f(x), g_j(x)$ e $h_i(x)$ possuem derivadas contínuas de segunda ordem.

Qualquer ponto $\hat{x}$ que satisfaça todas as restrições em (3.1) é dito ser factível. O conjunto de todos os pontos factíveis define a região factível, e um ponto factível x^* que atende as condições de mínimo desejado é chamado de ótimo local.

O problema não-linear (3.1) pode ser resolvido pelos MPI Primal-Dual de duas maneiras, (i) aplica-se os métodos diretamente ao problema não-linear, ou (ii) aplica-se os métodos para uma seqüência de aproximações (locais), como nas aproximações da Programação Linear Seqüencial (PLS) e uma abordagem de Programação Quadrática Seqüencial (PQS). Na sessão seguinte descrevem-se as idéias básicas que estão por trás da aproximação PLS.

3.3 – O PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR SEQÜENCIAL (PLS)

Na aproximação da PLS, o problema de PNL apresentado em (3.1) é resolvido linearizando sucessivamente a função objetivo não-linear e as restrições de desigualdade em torno do ponto de operação $\{x^k\}$ que são definidos pela solução das restrições de igualdade. A aproximação PLS envolve a solução seqüencial do problema PL dado por:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(x^k) + \nabla_x f(x^k)^t \Delta x \\
 \text{s.a} \quad & g(x^k) + J_g(x^k) \Delta x = 0 \\
 & h(x^k) + J_h(x^k) \Delta x \geq 0 \\
 & \underline{x}_r \leq x_r^k + \Delta x \leq \bar{x}_r
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

em que:

- $\nabla_x f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o gradiente de $f(x)$ (um vetor coluna);
- $J_g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ é a Jacobiana de $g(x)$;
- $J_h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p \times n}$ é a Jacobiana de $h(x)$;
- Δx é o vetor direção de busca.

Os passos básicos de uma aproximação PLS são os seguintes:

Passo 0: Obter uma solução inicial para as restrições de igualdade e iniciar k como $k = 0$;

Passo 1: Obter o subproblema de PL (3.2) utilizando a solução anterior para linearizar (3.1).

Passo 2: Resolver o subproblema de PL (3.2) para Δx e obter um novo ponto: $x^{k+1} = x^k + \Delta x$. Atualizar k , $k = k + 1$.

Passo 3: Obter a solução das restrições de igualdade para x^k e verificar se as variáveis canalizadas estão dentro dos respectivos limites. Se sim, ir para o passo 4. Caso contrário, voltar ao passo 1.

Passo 4: Verificar se é possível a redução do valor da função objetivo. Se sim, voltar ao passo 1. Caso contrário, parar com x^k como uma solução aproximada de (3.1).

Quando um problema PNL é resolvido pela abordagem PLS pode-se garantir a convergência se o problema for convexo.

3.4 – O MÉTODO DE PONTOS INTERIORES PRIMAL-DUAL PARA PNL

Frisch foi o primeiro a considerar o MPI num manuscrito não publicado em 1955. Esta abordagem da função barreira logarítmica foi mais tarde estudada extensivamente por Fiacco e McCormick (1968), na solução de problemas com restrições de desigualdade genéricos, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ \text{s.a} & h_i(x) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \tag{3.3}$$

Assume-se que, pelo menos, um ponto x^0 (inicial) exista, onde $h_i(x^0) > 0$, isto é, a região $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) \geq 0\}$ é não vazia.

A abordagem de Fiacco e McCormick para resolver (3.3) considera uma abordagem de função barreira logarítmica ponderada para incorporar as restrições de

desigualdade na função objetivo, transformando, assim, um problema com restrições de desigualdade (3.3) em uma seqüência de problemas modificados da forma:

$$\min \left\{ f_{\mu}(x, \mu^k) = f(x) - \mu^k \sum_{i=1}^p \ln(h_i(x)) \right\} \quad (3.4)$$

em que:

$\mu^k > 0$ é o parâmetro de barreira.

O parâmetro de barreira monotonicamente decresce até zero com o avanço das iterações. Sob certas condições e μ^k suficientemente pequeno, conduzindo μ^k para zero, a seqüência $\{x(\mu^k)\}$ de minimização de (3.4) forma um caminho diferenciável continuamente convergindo para x^* , chamado de “trajetória de barreira”, onde x^* é o minimizador de (3.3).

Várias dificuldades foram observadas com o uso do método de barreira logarítmica clássico para solução de (3.3), conforme segue abaixo:

- O primeiro problema foi a dificuldade de se determinar um ponto inicial factível, que pode ser tão difícil quanto resolver o problema propriamente dito.
- O segundo problema foram as várias dificuldades numéricas (com as técnicas numéricas disponíveis na época), até mesmo se o problema (3.3) fosse bem condicionado.
- Os multiplicadores de Lagrange estimados para as restrições ativas ($h_i(x) = 0$) são obtidos através das razões de duas quantidades tendendo a zero, o qual é instável.
- Ao longo da trajetória que aproxima-se da solução, a matriz Hessiana de $f_{\mu}(x, \mu^k)$ pode apresentar um mal condicionamento e, no limite ($\mu^k \rightarrow 0$), é singular.

- Outras dificuldades maiores são: a necessidade de um cuidadoso algoritmo de busca linear, a escolha do valor inicial μ^0 e da maneira subsequente de reduzir μ^k a cada iteração.

Embora os MPI tenham sido desenvolvidos para solucionar problemas de PL genéricos, um grande número de pesquisas com esses métodos para PNL, estão sendo motivadas, principalmente, pelo bom desempenho dos MPI para PL e Programação Quadrática (PQ). Estas áreas de pesquisa desfrutam de um assombroso progresso nos últimos 10 anos. Descreve-se, a seguir, o desenvolvimento matemático do MPI Primal-Dual apropriado para resolver o problema de PNL (3.1). O MPI para resolver o problema de PL (3.2) pode ser derivado de maneira similar.

3.4.1 – Problema Modificado e Condições de Otimalidade

O método de pontos interiores, descrito aqui, inicialmente transforma as restrições canalizadas de (3.1) em duas restrições de desigualdades. Para este fim padroniza-se o sinal ≥ 0 apenas por convenção e, em seguida, transformam-se todas as restrições de desigualdades em igualdades através da adição de vetores de excesso não negativos, como segue:

$$\begin{aligned}
 &\min f(x) \\
 &\text{s.a } g(x) = 0 \\
 &\quad h(x) - s_{li} = 0 \\
 &\quad -x_r - s_{2r} + \bar{x}_r = 0 \\
 &\quad x_r - s_{3r} - \underline{x}_r = 0 \\
 &\quad s_{li}, s_{2r}, s_{3r} \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

em que: $s_{li}^T = [s_{11}, s_{12}, \dots, s_{lp}] \in \mathbb{R}^p$, $s_{2r}^T = [s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2n}] \in \mathbb{R}^n$, $s_{3r}^T = [s_{31}, s_{32}, \dots, s_{3n}] \in \mathbb{R}^n$ são os vetores da variáveis de excesso.

Para garantir as condições estritamente positivas, $(s_{li}, s_{2r}, s_{3r}) > 0$, as variáveis de excesso são incorporadas à função objetivo através da função barreira logarítmica.

$$\begin{aligned}
\min \quad & f(x) - \mu \sum_{i=1}^p \ln(s_{1i}) - \mu \sum_{r=1}^n [\ln(s_{2r}) + \ln(s_{3r})] \\
\text{s.a} \quad & g_j(x) = 0 \\
& h_i(x) - s_{1i} = 0 \\
& -x_r - s_{2r} + \bar{x}_r = 0 \\
& x_r - s_{3r} - \underline{x}_r = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

em que μ tende a zero durante o processo iterativo.

Para resolver as restrições do problema (3.6), usa-se o método de Newton-Lagrange (LUEMBERGER, 1984). Associado ao problema (3.6) tem-se a função Lagrangiana que é dada por:

$$\begin{aligned}
L = f(x) - \mu \sum_{i=1}^p \ln(s_{1i}) - \mu \sum_{r=1}^n [\ln(s_{2r}) + \ln(s_{3r})] + \\
- \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) - \sum_{i=1}^p \pi_{1i} [h_i(x) - s_{1i}] + \\
- \sum_{r=1}^n [\pi_{2r} (-x_r - s_{2r} + \bar{x}_r) + \pi_{3r} (x_r - s_{3r} - \underline{x}_r)]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

em que:

$\lambda \in \mathbb{R}^m, \pi_{1i} \in \mathbb{R}^p, \pi_{2r} \in \mathbb{R}^n, \pi_{3r} \in \mathbb{R}^n$ são vetores dos multiplicadores de Lagrange, chamados de variáveis duais.

Quando o ponto factível $\bar{x}_r$ atinge o mínimo desejado x_r^* é chamado de mínimo local de (3.6), sendo expresso em termos de um ponto satisfatório de (3.7), e que precisa satisfazer as condições necessárias de primeira-ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) encontrando-se assim os pontos extremos para achar um candidato ao ótimo.

$$\nabla_y L = 0$$

sendo:

$$\nabla_y L = \begin{bmatrix} \nabla_x f(x)^T - J(x)^T \lambda - J_1(x)^T (\pi_{li}) + (\pi_{2r})^T I - (\pi_{3r})^T I \\ -\mu S_1^{-1} e + \pi_{li} \\ -\mu S_2^{-1} e + \pi_{2r} \\ -\mu S_3^{-1} e + \pi_{3r} \\ -g(x) \\ -(h(x) - s_{li}) \\ -(-x_r - s_{2r} + \bar{x}_r) \\ -(x_r - s_{3r} - \underline{x}_r) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

em que: $y = (x_r, s_{li}, s_{2r}, s_{3r}, \lambda_j, \pi_{li}, \pi_{2r}, \pi_{3r})$ é vetor das variáveis do problema, $J(x)^T = (\nabla_x g_1(x), \dots, \nabla_x g_m(x))$, $J_1(x)^T = (\nabla_x h_1(x), \nabla_x h_2(x), \dots, \nabla_x h_p(x))$ são denominadas matrizes Jacobianas, I é a matriz identidade, $e^T = [1, \dots, 1]$ e S_1, S_2, S_3 são matrizes diagonais cujos elementos são: s_{li}, s_{2r} e s_{3r} , respectivamente.

O algoritmo simplificado do MPI Primal-Dual é mostrado a seguir:

Passo 0: (Inicialização)

Faça $k = 0$, defina μ^k e escolha um ponto inicial y^k que satisfaça as condições de positividade estrita das variáveis de excesso.

Passo 1: (Cálculo da Direção de Newton)

Formule o sistema de Newton no ponto atual e resolva para a direção de Newton.

Passo 2: (Atualização das Variáveis)

Calcule o tamanho do passo (Δy) na direção de Newton e atualize as variáveis primais e duais.

Passo 3: (Teste de Convergência)

Se o novo ponto calculado satisfizer o critério de convergência, **pare**. Caso contrário, faça $k = k+1$, atualize o parâmetro de barreira μ^k , e retorne ao passo 1.

3.4.2 – Cálculo da Direção de Newton

O sistema de equações não-lineares (3.8) é resolvido pelo método de Newton. Esse método utiliza a expansão em série de Taylor até primeira-ordem das equações do

sistema, gerando um sistema do tipo $Ax = b$; a solução desse sistema é vetor das direções de busca (Δy) , o qual será utilizado na atualização das variáveis.

$$\nabla_{yy}^2 L \cdot \Delta y = -\nabla_y L$$

$$\begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L & 0 & 0 & 0 & -J(x)^T & -J_1(x)^T & I & -I \\ 0 & \mu S_1^{-2} & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu S_2^{-2} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu S_3^{-2} & 0 & 0 & 0 & I \\ -J(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_1(x) & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_r \\ \Delta s_{li} \\ \Delta s_{2r} \\ \Delta s_{3r} \\ \Delta \lambda_j \\ \Delta \pi_{li} \\ \Delta \pi_{2r} \\ \Delta \pi_{3r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{x_r} L \\ \nabla_{s_{li}} L \\ \nabla_{s_{2r}} L \\ \nabla_{s_{3r}} L \\ \nabla_{\lambda_j} L \\ \nabla_{\pi_{li}} L \\ \nabla_{\pi_{2r}} L \\ \nabla_{\pi_{3r}} L \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

em que $\nabla_{xx}^2 L = \nabla_{xx}^2 f(x) - \nabla_{xx}^2 J(x)^T \lambda_j - \nabla_{xx}^2 J_1(x)^T \pi_{li}$ é a matriz Hessiana.

3.4.3 – Atualização das Variáveis

A direção de busca Δy^k deve fornecer uma solução interior y^{k+1} para que y^{k+1} seja interior e o procedimento possa ser repetido.

Deve-se fazer uma escolha apropriada do tamanho do passo $\alpha^k > 0$, de forma que:

$$y^{k+1} = y^k + \alpha^k \Delta y \quad (3.10)$$

Assim, as variáveis primais e duais são atualizadas por:

$$\begin{aligned} x_r^{k+1} &= x_r^k + \alpha_p^k \Delta x & \lambda_j^{k+1} &= \lambda_j^k + \alpha_D^k \Delta \lambda \\ s_{li}^{k+1} &= s_{li}^k + \alpha_p^k \Delta s_{li} & \pi_{li}^{k+1} &= \pi_{li}^k + \alpha_D^k \Delta \pi_{li} \\ s_{2r}^{k+1} &= s_{2r}^k + \alpha_p^k \Delta s_{2r} & \pi_{2r}^{k+1} &= \pi_{2r}^k + \alpha_D^k \Delta \pi_{2r} \\ s_{3r}^{k+1} &= s_{3r}^k + \alpha_p^k \Delta s_{3r} & \pi_{3r}^{k+1} &= \pi_{3r}^k + \alpha_D^k \Delta \pi_{3r} \end{aligned} \quad (3.11)$$

em que os escalares $\alpha_p^k \in (0,1]$ e $\alpha_D^k \in (0,1]$ são os tamanhos dos passos primais e duais respectivamente, e k é a iteração atual.

Caso tenha-se $\Delta y^k \geq 0$ então α^k pode ser qualquer número positivo de forma que sempre a condição (3.10) seja satisfeita. Isto revela um ponto de descida e o problema não tem solução ótima finita. Portanto, o tamanho máximo do passo a ser tomado na direção de Newton é escolhido para preservar a positividade do vetor s e o sinal do vetor dos multiplicadores de Lagrange. Isto se traduz por:

$$\begin{aligned}\alpha_p^k &= \gamma * \min \left\{ 1, \min \left\{ \frac{s_{li}^k}{|\Delta s_{li}|} \mid \Delta s_{li} < 0, \frac{s_{2r}^k}{|\Delta s_{2r}|} \mid \Delta s_{2r} < 0, \frac{s_{3r}^k}{|\Delta s_{3r}|} \mid \Delta s_{3r} < 0 \right\} \right\}, \\ \alpha_D^k &= \gamma * \min \left\{ 1, \min \left\{ \frac{\pi_{li}^k}{|\Delta \pi_{li}|} \mid \Delta \pi_{li} < 0, \frac{\pi_{2r}^k}{|\Delta \pi_{2r}|} \mid \Delta \pi_{2r} < 0, \frac{\pi_{3r}^k}{|\Delta \pi_{3r}|} \mid \Delta \pi_{3r} < 0 \right\} \right\}\end{aligned}\tag{3.12}$$

em que $\gamma = 0,9995$ é um valor determinado empiricamente, ou que pode ser calculado a partir da fórmula $1 - 1/(9\sqrt{z})$, segundo Wright (1995), sendo z o número de restrições de desigualdade do problema. Este escalar é um fator para assegurar que o próximo ponto irá satisfazer as condições de positividade estrita.

A equação (3.12) apresenta o cálculo para o tamanho dos passos primal e dual de forma separada, o que é uma vantagem para o MPI Primal-Dual para resolver problemas de PL, e tem provado ser altamente eficiente na prática, pois acelera a convergência do método reduzindo o número de iterações de 10% a 20% em problemas típicos. Em geral, nos problemas de PNL a interdependência das variáveis primais e duais presentes nas condições de factibilidade dual, não permite a separação do tamanho do passo no espaço primal e dual. Neste caso, um único tamanho do passo α para atualizar as variáveis primais e duais pode ser calculado por:

$$\alpha = \min \{ \alpha_p^k, \alpha_D^k \}\tag{3.13}$$

3.4.4 – Redução do Parâmetro de Barreira

O MPI Primal-Dual é muito sensível quanto ao parâmetro de barreira μ . Para problemas de PL, a atualização deste parâmetro está geralmente baseada na redução do *gap* de dualidade. Dessa forma, Granville (1994) propõe a atualização de μ através da Equação (3.14), em que o numerador corresponde ao *gap* de dualidade.

$$\mu = \frac{s_{li}\pi_{li} + s_{2r}\pi_{2r} + s_{3r}\pi_{3r}}{2n\beta} \quad (3.14)$$

em que n é o número de variáveis tratadas por barreira e $\beta > 1$ é o fator de correção especificado pelo usuário.

Por se tratar de um dado empírico do método, uma forma mais simples de atualizar μ é realizada por meio da equação (3.15).

$$\mu^{k+1} = \frac{\mu^k}{\beta}, \quad (3.15)$$

em que $\beta > 1$ é o fator de correção definido pelo usuário.

Um ponto inicial estritamente factível não é obrigatório, mas as condições de positividade estrita ($s_{li} > 0, s_{2r} > 0, s_{3r} > 0, \pi_{li} > 0, \pi_{2r} > 0$ e $\pi_{3r} > 0$) devem ser satisfeitas em todos os pontos. O processo de otimização termina quando o valor da norma do vetor gradiente for menor do que uma tolerância de convergência ξ preestabelecida e as condições de KKT estiverem satisfeitas.

3.5 – OS MÉTODOS DE PONTOS INTERIORES PRIMAL-DUAL DE ORDEM-SUPERIOR

Com o objetivo de melhorar a ordem de precisão do vetor gradiente em (3.8) da qual a direção de Newton aproxima as equações de KKT, incorpora-se uma informação de ordem superior, reduzindo o número de matrizes de fatoração em (3.8) para um

mínimo desejado, melhorando, assim, o custo computacional de cada iteração. Esta é a idéia central do método de ordem superior, como o Método Preditor-Corretor introduzido por Kojima et al. (1989) e desenvolvido por Mehrotra (1992).

3.5.1 – O Método de Pontos Interiores Preditor-Corretor de Mehrotra

Este método obtém uma direção de busca (Δy) mais bem sucedida através da solução de dois sistemas de equações lineares em cada iteração, conhecidos como passos preditor e corretor envolvendo uma única matriz coeficiente com dois diferentes lados direito, tornando-o eficiente em termos computacionais. Desse modo, uma única matriz de fatoração é requerida, tendo assim um pequeno trabalho adicional para calcular o passo corretor, visto que a matriz de fatoração do passo preditor é aproveitada.

Multiplicando-se o segundo, terceiro e quarto termos de (3.8) por S_{li} , S_{2r} e S_{3r} respectivamente, tem-se:

$$\nabla_y L = \begin{bmatrix} \nabla_x f(x)^T - J(x)^T \lambda - J_1(x)^T (\pi_{li}) + (\pi_{2r})^T I - (\pi_{3r})^T I \\ S_{li} \pi_{li} - \mu^k e \\ S_{2r} \pi_{2r} - \mu^k e \\ S_{3r} \pi_{3r} - \mu^k e \\ -g(x) \\ -(h(x) - s_{li}) \\ -(-x_r - s_{2r} + \bar{x}_r) \\ -(x_r - s_{3r} - \underline{x}_r) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

No método preditor-corretor, não aplica-se o método de Newton em (3.16) para gerar os termos de correção para a estimativa atual, mas sim substitui-se o novo ponto $y^{k+1} = y^k + \Delta y$ diretamente em (3.16), para obter a seguinte aproximação:

$$\nabla_{yy}^2 L \cdot \Delta y = -\nabla_y L_{pc} \quad (3.17)$$

sendo:

$$\nabla_y L_{pc} = \begin{bmatrix} \nabla_x f(x)^t - J(x)^t \lambda - J_1(x)^t (\pi_{1i}) + (\pi_{2r})^t I - (\pi_{3r})^t I \\ S_{1i} \pi_{1i} \\ S_{2r} \pi_{2r} \\ S_{3r} \pi_{3r} \\ -g(x) \\ -(h(x) - s_{1i}) \\ -(-x_r - s_{2r} + \bar{x}_r) \\ -(x_r - s_{3r} - \underline{x}_r) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu^k e \\ -\mu^k e \\ -\mu^k e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta S_{1i} \Delta \pi_{1i} \\ \Delta S_{2r} \Delta \pi_{2r} \\ \Delta S_{3r} \Delta \pi_{3r} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

$\nabla_{yy}^2 L(y)$, é a matriz coeficiente em (3.9),

$$\Delta S_{1i} = \text{diag}(\Delta s_{11}, \dots, \Delta s_{1p}); \Delta S_{2r} = \text{diag}(\Delta s_{21}, \dots, \Delta s_{2n}); \Delta S_{3r} = \text{diag}(\Delta s_{31}, \dots, \Delta s_{3n}).$$

A maior diferença entre o sistema de Newton em (3.17) e o apresentado em (3.9) é que o lado direito de (3.17) não pode ser calculado antecipadamente devido aos termos delta não-lineares. Pode-se observar que a direção de busca Δy obtida de (3.17) consiste de três componentes de direção,

$$\Delta y = \Delta y_{af} + \Delta y_{ce} + \Delta y_{co} \quad (3.19)$$

em que, cada direção é definida por um dos vetores do lado direito de (3.18). As três componentes de direção podem ser interpretadas como segue:

- Δy_{af} é uma direção-afim, a direção de Newton pura que é obtida quando ajusta-se $\mu^k = 0$ em (3.9). Esta representada pelo primeiro vetor do lado direito de (3.18) e é responsável pela “otimização”, isto é, pela redução da infactibilidade dual e primal e pelo *gap* de complementaridade.
- Δy_{ce} é uma direção central, cujo tamanho é controlado pela escolha adaptativa do parâmetro de barreira μ^k . Essa direção está representada pelo segundo vetor do lado direito de (3.18), e é responsável em manter o ponto atual (y^k) longe da fronteira da região factível e idealmente próximo da trajetória de barreira. O objetivo é aumentar as chances de um grande passo ser realizado na próxima iteração.

- Δy_{co} é uma direção corretora que procura compensar alguma não linearidade na direção afim-escala. Essa direção está representada pelo último vetor do lado direito de (3.18).

Os primeiros dois componentes, Δy_{af} e Δy_{ce} , combinam para fazer a direção padrão calculada em (3.9). No algoritmo de Mehrotra, a direção Δy_{af} é calculada separadamente e anteriormente a direção Δy_{ce} . Esta organização no cálculo permite escolher μ^{k+1} adaptativamente em vez de antecipadamente e, também, aproximar os termos delta de segunda ordem, como descrito abaixo.

O Passo Preditor

Para determinar de forma aproximada um passo que satisfaça (3.18), inicia-se deixando de lado os termos μ e delta no lado direito de (3.18) e resolve-se para a direção afim como em (3.20):

$$\nabla_{yy}^2 L \begin{pmatrix} \Delta x^{af} \\ \Delta s_{li}^{af} \\ \Delta s_{2r}^{af} \\ \Delta s_{3r}^{af} \\ \Delta \lambda^{af} \\ \Delta \pi_{li}^{af} \\ \Delta \pi_{2r}^{af} \\ \Delta \pi_{3r}^{af} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_x f(x)^T + J(x)^T \lambda + J_1(x)^T (\pi_{li}) - (\pi_{2r})^T I + (\pi_{3r})^T I \\ -S_{li} \pi_{li} \\ -S_{2r} \pi_{2r} \\ -S_{3r} \pi_{3r} \\ g(x) \\ h(x) - s_{li} \\ -x_r - s_{2r} + \bar{x}_r \\ x_r - s_{3r} - \underline{x}_r \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

A direção Δy_{af} é usada de duas maneiras diferentes: (i) para aproximar os termos de delta no lado direito de (3.18), e (ii) para estimar dinamicamente o parâmetro de barreira μ .

Para estimar o parâmetro de barreira μ , primeiro considera-se a regra padrão dada em (3.14) utilizada para determinar o tamanho do passo que poderia ser dado se a

direção afim Δy_{af} fosse usada, segundo considera-se uma estimativa do *gap* de dualidade a qual é calculada através de:

$$\rho_{af} = s_{li}\pi_{li} + s_{2r}\pi_{2r} + s_{3r}\pi_{3r} \quad (3.21)$$

Finalmente, uma estimativa de μ pode ser obtido por:

$$\mu = \frac{\rho_{af}}{2n\beta} \quad (3.22)$$

sendo β o fator de correção definido pelo usuário.

O Passo Corretor

No lugar do cálculo de uma combinação entre a direção corretora e a central, $\Delta y_{ce} + \Delta y_{co}$, e depois adicioná-las a Δy_{af} , calcula-se a direção de Newton Δy completa:

$$\nabla_{yy}^2 L \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta s_{li} \\ \Delta s_{2r} \\ \Delta s_{3r} \\ \Delta \lambda \\ \Delta \pi_{li} \\ \Delta \pi_{2r} \\ \Delta \pi_{3r} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_x f(x)^T + J(x)^T \lambda + J_1(x)^T (\pi_{li}) - (\pi_{2r})^T I + (\pi_{3r})^T I \\ -s_{li}\pi_{li} + \mu^k e - \Delta s_{li} \Delta \pi_{li} \\ -s_{2r}\pi_{2r} + \mu^k e - \Delta s_{2r} \Delta \pi_{2r} \\ -s_{3r}\pi_{3r} + \mu^k e - \Delta s_{3r} \Delta \pi_{3r} \\ g(x) \\ h(x) - s_{li} \\ -x_r - s_{2r} + \bar{x}_r \\ x_r - s_{3r} - \underline{x}_r \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Em que, para cada iteração, executa-se apenas um passo corretor obtendo a direção de busca, e pelo fato de μ ter sido calculado adaptativamente, o problema converge mais rapidamente para o ótimo, diminuindo o número de iterações e o tempo computacional.

O esforço adicional do método preditor-corretor está na solução do sistema linear extra para calcular a direção afim e no teste de razão extra para calcular μ , uma vez que os passos preditor e corretor são baseados na mesma matriz de fatoração, o que, usualmente, ocasiona ganhos em número de iterações e de tempo.

3.5.1.1 – Algoritmo

Os passos do algoritmo do MPI Preditor-Corretor são apresentados a seguir.

Passo 0: Dado o problema (3.1), construa a função Lagrangiana (3.7), estabeleça uma tolerância de convergência ($\xi > 0$), faça $k=0$ e dê uma estimativa inicial para as variáveis e parâmetros do problema: $y^k = (x_r^k, s_{li}^k, s_{2r}^k, s_{3r}^k, \lambda_j^k, \pi_{li}^k, \pi_{2r}^k, \pi_{3r}^k)$, e $\mu^k > 0$.

Passo 1: Passo Preditor – faça $\mu = 0$, determine o sistema (3.20) e resolva-o;

Passo 2: Passo Corretor – calcule μ , utilizando (3.14) ou (3.15), determine o sistema (3.23) e resolva-o;

Passo 3: Atualize as variáveis do problema utilizando (3.11);

Passo 4: Se todos os elementos do vetor gradiente forem menores que uma tolerância ξ e as variáveis do problema satisfazem as condições de KKT, **pare**; senão, faça $k = k+1$ e volte ao passo 1.

3.5.2 – O Método de Pontos Interiores de Newton Composto

O MPI Preditor-Corretor de Mehrotra executa apenas um passo corretor para obter a direção de busca a cada iteração. O MPI de Newton Composto (MPINC), o qual é descrito nesta seção executa dois ou mais passos corretores a cada iteração com a intenção de realizar menos iterações que o MPI Preditor-Corretor. Dessa maneira, os objetivos do MPINC são: a exploração das derivadas e mais fatorações em uma seqüência de soluções de sistemas como (3.23) com diferentes lados direitos, conforme Zhang (1996).

Considere o método de Newton para resolver um sistema de equações não-lineares.

$$F(x) = 0 \quad (3.24)$$

sendo $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um vetor de funções continuamente diferenciáveis. O sistema (3.24) pode ser escrito como:

$$x^{k+1} = x^k - J_F(x^k)^{-1} F(x^k) \quad (3.25)$$

sendo $J_F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz Jacobiana de $F(x)$.

Sabe-se que o método de Newton tem uma excelente propriedade de convergência local. Mais especificamente, se a matriz Jacobiana J_F é não singular e contínua na solução x^* e o ponto inicial x^0 esteja na vizinhança de x^* , então a sequência de iterações $\{x^k\}$ converge para x^* quadraticamente. Por outro lado, o método de Newton geralmente não tem propriedades de convergência global muito boa.

Uma variação do método de Newton chamada de Newton Modificado é da seguinte forma:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k J_F(x^k)^{-1} F(x^k) \quad (3.26)$$

A qual introduz um fator modificador, o tamanho do passo, α^k , geralmente escolhido num intervalo de $(0, 1]$, para melhorar a convergência global.

Uma outra variação do método de Newton é conhecida como método de Newton Composto. Em cada iteração, este calcula um ponto intermediário $\hat{x}^k$ e usa a mesma matriz Jacobiana 2 vezes.

$$\begin{aligned} \hat{x}^k &= x^k - \alpha_k J_F(x^k)^{-1} F(x^k), \\ x^{k+1} &= \hat{x}^k - \alpha_k J_F(x^k)^{-1} F(\hat{x}^k) \end{aligned} \quad (3.27)$$

A idéia do MPINC é utilizar as mesmas derivadas e a mesma matriz de fatoração $J_F(x^k)$, pois estes cálculos demandam um grande esforço computacional. Na k -ésima

iteração, o nível de amortecimento, M , do método de Newton Composto primeiro resolve o sistema:

$$J_F(x^k)\Delta x^0 = -F(x^k) \quad (3.28)$$

para a direção Δx^0 . Considerando $l_k = 1, \dots, M$, o número de vezes que o sistema (3.28) será resolvido, tem-se:

$$J_F(x^k)\Delta x^{l_k} = -F(x^k + \sum_{j=0}^{l_k-1} \Delta x^j) \quad (3.29)$$

para a direção Δx^{l_k} . Finalmente, tem-se o passo:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k \sum_{j=0}^M \Delta x^j \quad (3.30)$$

Note que a Matriz Jacobiana $J_F(x^k)$ é empregada $M+1$ vezes para se obter iterativamente a direção de busca antes do passo ser de fato dado em (3.30).

O procedimento acima pode, facilmente, ser incorporado na solução das equações perturbadas de KKT em (3.17). Assume-se que a direção preditora Δy_{af} e a estimativa do parâmetro de barreira μ são calculadas como no Passo Preditor da técnica de Mehrotra. Então seja $\Delta y^0 = \Delta y_{af}$ e para $l_k = 1, \dots, M$, resolve-se o sistema:

$$\nabla_{yy}^2 L(y^k) \Delta y^{l_k} = -\nabla_y L(y^k + \sum_{j=0}^{l_k-1} \Delta y^j) + \mu_{af}^k u \quad (3.31)$$

para a direção Δy^{l_k} , sendo $u = (e, 0)$, com $e \in \mathbb{R}^{2n+p}$. Finalmente, define-se

$\Delta y = \sum_{j=0}^M \Delta y^j$ e move-se para um novo ponto através do cálculo do tamanho do passo e

da atualização das variáveis precisamente como nos MPI Primal-Dual e de Mehrotra.

Note que considerou-se o mesmo valor do parâmetro de barreira μ em todos os passos corretores. Alternativamente μ pode ser calculado a cada passo corretor.

3.5.2.1 – Algoritmo

Os passos do algoritmo do MPI Newton Composto são apresentados a seguir.

Passo 0: Dado o problema (3.1), construa a função Lagrangiana (3.7), estabeleça uma tolerância de convergência ($\xi > 0$) e o valor de $M > 1$, faça $k = 0$ e dê uma estimativa inicial para as variáveis e parâmetros do problema: $y^k = (x_r^k, s_{li}^k, s_{2r}^k, s_{3r}^k, \lambda_j^k, \pi_{li}^k, \pi_{2r}^k, \pi_{3r}^k)$, e $\mu^k > 0$.

Passo 1: Passo Preditor – faça $\mu = 0$, determine o sistema (3.20) e resolva-o;

Passo 2: Passo Corretor – calcule μ , utilizando (3.14) ou (3.15), determine o sistema (3.23) e resolva-o M vezes;

Passo 3: Atualize as variáveis do problema utilizando (3.11);

Passo 4: Se todos os elementos do vetor gradiente forem menores que uma tolerância ξ e as variáveis do problema satisfazem as condições de KKT, **pare**; senão, faça $k = k+1$ e volte ao passo 1.

3.6 – DIFICULDADES COMPUTACIONAIS

Uma das dificuldades encontradas nos MPI é que o ponto inicial deve ser factível. Para alguns problemas isso pode ser trabalhoso. Também, em virtude da estrutura da função barreira, μ tendendo a zero, e quando muitas restrições estão muito próximas aos seus limites, o método pode encontrar sérios problemas de mal condicionamento e erros de arredondamento, quando o ótimo se aproxima. Além disso, um ajuste inadequado do valor inicial do parâmetro de barreira pode comprometer a convergência do método.

CAPÍTULO 4

O MÉTODO PRIMAL-DUAL BARREIRA MODIFICADA

Neste capítulo são apresentados a Função Barreira Modificada (FBM), os Métodos da Função Barreira Modificada (MFBM), Primal-Dual Barreira Modificada (MPDBM), MPDBM Preditor-Corretor e MPDBM Newton Composto.

4.1 – INTRODUÇÃO

Em 1992, Polyak desenvolveu uma teoria variante da função barreira clássica (FBC) conhecida como MFBM. Estes métodos combinam as melhores propriedades da função Lagrangiana clássica e da FBC e busca explorar as melhores propriedades de cada uma dessas funções. A FBM é utilizada na resolução de problemas restritos, e pode ser considerada como uma função Lagrangiana aumentada interior. O MFBM transforma o problema restrito em um irrestrito equivalente, e resolve uma sequência de problemas irrestritos até atingir o ótimo. A propriedade de convergência do algoritmo da FBM é finita ao invés de assintótica como no Método da FBC, o qual possibilita que a solução ótima encontrada no MFBM possa estar na fronteira da região factível, o que não acontece com a FBC, onde a solução somente pode estar próxima à fronteira, mas nunca alcançá-la. Conseqüentemente, as restrições tratadas pela FBM podem ser nulas, diferentes da FBC. Uma característica notável dos métodos baseados na FBM é de não precisarem de uma solução inicial factível, ao contrário dos métodos baseados na FBC que possuem essa desvantagem.

4.2 – A FUNÇÃO BARREIRA MODIFICADA

Polyak (1992), em seu trabalho, apresenta três tipos de FBM: uma para a FBC de Carrol, outra para a FBC de Frisch, isto é, a logarítmica, e a Função Barreira *Shifted*.

As funções introduzidas por Frisch vistas em (2.22) e Carrol encontradas em (2.21) são as funções barreira mais conhecidas. No entanto, essas funções apresentam desvantagens. Elas, bem como suas derivadas, não existem em x^* e essas funções vão para o infinito quando $x \rightarrow x^*$. Considerando isto, Polyak definiu as funções barreira de Frisch e Carrol modificadas e *Shifted*, através da relaxação do conjunto de restrições factíveis do seguinte problema de programação não-linear.

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ \text{s.a } & h_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (4.1)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor das variáveis do problema e as funções f e h_i , $i = 1, \dots, p$, são diferenciáveis de 2ª ordem.

As funções barreira de Frisch e Carrol modificadas e *Shifted* associadas ao problema (4.1) são mostradas a seguir.

- Função barreira de Frisch modificada, $F(x, \rho, \mu)$:

$$F(x, \rho, \mu) = \begin{cases} f(x) - \mu \sum_{i=1}^p \rho_i \ln(\mu^{-1} h_i(x) + 1), & \text{se } x \in \text{int } \Omega_\mu \\ \infty, & \text{se } x \notin \text{int } \Omega_\mu, \end{cases} \quad (4.2)$$

- Função barreira de Carrol modificada, $C(x, \rho, \mu)$:

$$C(x, \rho, \mu) = \begin{cases} f(x) + \mu \sum_{i=1}^p \rho_i \left[(\mu^{-1} h_i(x) + 1)^{-1} - 1 \right], & \text{se } x \in \text{int } \Omega_\mu \\ \infty, & \text{se } x \notin \text{int } \Omega_\mu, \end{cases} \quad (4.3)$$

- Função barreira *Shifted*, $M(x, \mu)$:

$$M(x, \mu) = \begin{cases} F(x, \mu) = f(x) + \mu \sum_{i=1}^p \ln(\mu^{-1} h_i(x) + 1), & \text{se } x \in \text{int } \Omega_\mu \\ \infty, & \text{se } x \notin \text{int } \Omega_\mu, \end{cases} \quad (4.4)$$

sendo: ρ_i , $i = 1, \dots, p$, as estimativas não-negativas dos multiplicadores de Lagrange na solução ótima, μ é o parâmetro de barreira (ou relaxação) e Ω_μ para (4.2) o conjunto relaxado dado por: $\Omega_\mu = \{x : \mu^{-1} h_i(x) + 1 \geq 0, i = 1, \dots, p\}$.

A seguir apresenta-se o desenvolvimento da função barreira Frisch modificada:

- Adiciona-se μ na desigualdade do problema (4.1):

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ \text{s.a } & h_i(x) + \mu \geq \mu \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

- Dividi-se a desigualdade por μ :

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ \text{s.a } & \frac{h_i(x)}{\mu} + 1 \geq 1 \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

- Eleva-se os dois lados da desigualdade pelo valor μ :

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ \text{s.a } & (\mu^{-1} h_i(x) + 1)^\mu \geq (1)^\mu \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

- Aplica-se a função logarítmica nos dois lados da desigualdade:

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ \text{s.a} & \ln(\mu^{-1} h_i(x) + 1) \geq \ln(1) \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

- O problema anterior pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ \text{s.a} & \mu \ln(\mu^{-1} h_i(x) + 1) \geq 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (4.5)$$

- Ao problema modificado (4.5) associa-se uma função Lagrangiana:

$$L(x, \rho, \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^p \rho_i \ln(\mu^{-1} h_i(x) + 1), \quad (4.6)$$

A função Lagrangiana (4.6) é denominada **FBM**, ou função barreira de Frisch modificada (4.2). Em que x pertence ao interior da região factível relaxada, isto é:

$$\{x \in \mathbb{R}^n / h_i(x) \geq -\mu\}; \quad (4.7)$$

Com a adição de um fator de deslocamento (de valor 1) dentro do termo logarítmico das FBM a convergência finita nos métodos do tipo barreira foi alcançada, tais funções tornam explícito o uso do multiplicador de Lagrange, ρ_i . Uma propriedade significativa do método da FBM é que o parâmetro de barreira, μ , não precisa estar muito próximo de zero para alcançar a solução, desde que, os multiplicadores de Lagrange corretos, ρ_i , sejam atingidos.

O uso do termo de barreira $\ln(\mu^{-1} h_i(x) + 1)$ corresponde a relaxação das restrições de modo que tenham a forma $h_i(x) \geq -\mu$. Esta relaxação representa uma expansão da região factível. Conseqüentemente a “região factível” implícita para o subproblema de barreira modificada varia com o parâmetro de barreira μ .

Diferente da FBC, a FBM e suas derivadas existem na solução x^* para qualquer parâmetro de barreira, μ , positivo. Em particular, se ρ^* é vetor dos multiplicadores de

Lagrange correspondente a x^* , então a FBM tem as seguintes propriedades para qualquer $\mu > 0$:

$$P1. \quad L(x^*, \rho^*, \mu) = f(x^*)$$

$$P2. \quad \nabla_x L(x^*, \rho^*, \mu) = \nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^p \rho_i^* \nabla h_i(x^*) = 0$$

$$P3. \quad \nabla_x^2 L(x^*, \rho^*, \mu) = \nabla^2 f(x^*) - \sum_{i=1}^p \rho_i^* \nabla^2 h_i(x^*) + \mu^{-1} \nabla h(x^*) \text{diag}(\rho^*)^2 \nabla h(x^*)^T$$

Quando o problema é de programação convexa, segue de P2 que,

$$P4. \quad x^* = \arg \min \{L(x, \rho^*, \mu)\} \text{ para qualquer } \mu > 0.$$

Isso significa que se os multiplicadores de Lagrange ótimos ρ^* são conhecidos, logo pode-se resolver o problema restrito (4.1) usando um único problema de otimização irrestrito independente do valor do parâmetro de barreira. Polyak (1992) mostrou que se os multiplicadores de Lagrange iniciais são positivos, e os parâmetros de barreira são menores que um valor limite $\bar{\mu}$, o método converge.

4.3 – MÉTODO DA FUNÇÃO BARREIRA MODIFICADA

Os passos MFBM aplicados ao problema (4.1), conforme Polyak (1992) são apresentados a seguir.

Aplicando-se as condições necessárias de primeira ordem ($\nabla L = 0$) minimiza-se a função (4.6), em relação a x , com ρ_i , $i = 1, \dots, p$, e μ constantes e satisfaz-se a condição:

$$\nabla_x f(x) - \sum_{i=1}^p \frac{\rho_i}{(\mu^{-1} h_i(x) + 1)} \nabla_x h_i(x) = 0 \quad (4.8)$$

Aplica-se o método de Newton para resolver o sistema de equações não-lineares (4.8) e obtém-se:

$$\nabla_{xx}^2 f(x) - \sum_{i=1}^p \frac{\rho_i}{\mu^{-1} h_i(x) + 1} \nabla_{xx}^2 h_i(x) + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^p \nabla_x h_i(x) \frac{\rho_i}{(\mu^{-1} h_i(x) + 1)^2} \nabla_x h_i(x) = 0 \quad (4.9)$$

Reescrevendo (4.9), tem-se o seguinte sistema de forma simplificada:

$$\nabla_{xx}^2 L(x, \rho, \mu) \Delta x = -\nabla_x L(x, \mu, \rho) \quad (4.10)$$

em que Δx é o vetor de correção .

Atualiza-se o vetor x por:

$$x^{k+1} = x^k + \sigma \Delta x, \quad (4.11)$$

em que o tamanho do passo $\sigma > 0$ é encontrado através da regra de Goldstein-Armijo conforme Polyak (1992).

A equação (4.8) sugere a atualização das estimativas dos multiplicadores de Lagrange, por meio da seguinte regra:

$$\rho_i^{k+1} = \frac{\rho_i^k}{\mu^{k-1} h_i(x^{k+1}) + 1} = \frac{\mu^k \rho_i^k}{h_i(x^{k+1}) + \mu^k}, \quad i = 1, \dots, p. \quad (4.12)$$

4.3.1 – Algoritmo

Os passos do algoritmo do MFBM para a resolução do (4.1) é da forma:

Passo 0: Dado o problema (4.1), construa a função barreira modificada (4.6); Faça $k=0$, $\rho^0 = (1, \dots, 1)$ e dê uma estimativa inicial para x^0 , e $\mu^0 > 0$;

Passo 1: Construa o sistema (4.10) e resolva-o;

Passo 2: Se x^k satisfaz as condições de Goldstein-Armijo, atualize x^k utilizando (4.11) e vá para o passo 3. Caso contrário, retorne ao passo 1;

Passo 3: Se a norma do vetor gradiente for menor que uma tolerância de convergência ξ vá para o passo 4. Caso contrário volte para o passo 3;

Passo 4: Se x^{k+1} satisfaz KKT, **pare**. Caso contrário, vá para o passo 5;

Passo 5: Atualize μ utilizando uma heurística e o vetor das estimativas dos multiplicadores de Lagrange ρ usando (4.12). Faça $k = k + 1$ e retorne ao passo 1.

Observa-se que um ponto inicial factível não é obrigatório, mas a condição inicial $h_i(x^0) > -\mu$ deve ser satisfeita.

4.3.2 – Dificuldades Computacionais

Uma das dificuldades encontradas no MFBM é o cálculo do tamanho do passo para atualização das variáveis, pois caso o cálculo seja feito sem um critério de parada bem fundamentado, o processo computacional pode consumir tempo e, até, divergir. A escolha do parâmetro de barreira inicial e sua forma de atualização podem interferir no processo de otimização.

4.5 – O MÉTODO PRIMAL-DUAL BARREIRA MODIFICADA

O MPDBM foi desenvolvido por Sousa (2006). Essa abordagem trata as restrições de desigualdade pela associação dos MPI Primal-Dual e do MFBM e será apresentado neste item.

Considere o seguinte problema de PNL restrito:

$$\begin{aligned}
 &\min f(x) \\
 &\text{s.a } g_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m < n \\
 &\quad h_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, p \\
 &\quad \underline{x}_r \leq x_r \leq \bar{x}_r, \quad r = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

sendo: $x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) \in \mathbb{R}^m$, $h(x) \in \mathbb{R}^p$, e as funções são de classe C_2 , ou seja, contínuas e diferenciáveis até segunda ordem.

No problema (4.13) padroniza-se o sinal ≥ 0 apenas por convenção, acrescentam-se as variáveis de excesso positivas às restrições de desigualdade transformando-as em igualdade como no problema (4.14).

$$\begin{aligned}
 &\min f(x) \\
 &\text{s.a } g_j(x) = 0 \\
 &\quad h_i(x) - s_{li} = 0 \\
 &\quad -x_r - s_{2r} + \bar{x}_r = 0 \\
 &\quad x_r - s_{3r} - \underline{x}_r = 0 \\
 &\quad s_{li} \geq 0 \\
 &\quad s_{2r} \geq 0 \\
 &\quad s_{3r} \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Em seguida, as variáveis auxiliares são relaxadas usando o parâmetro de barreira μ e tratadas pela função barreira modificada, obtendo-se, assim, o seguinte problema modificado.

$$\begin{aligned}
 &\min f(x) \\
 &\text{s.a } g_j(x) = 0 \\
 &\quad h_i(x) - s_{li} = 0 \\
 &\quad -x_r - s_{2r} + \bar{x}_r = 0 \\
 &\quad x_r - s_{3r} - \underline{x}_r = 0 \\
 &\quad \mu \ln(\mu^{-1}s_{li} + 1) \geq 0 \\
 &\quad \mu \ln(\mu^{-1}s_{2r} + 1) \geq 0 \\
 &\quad \mu \ln(\mu^{-1}s_{3r} + 1) \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Associa-se ao problema (4.15) a seguinte função Lagrangiana:

$$\begin{aligned}
 L = & f(x) - \mu \left(\sum_{i=1}^p \rho_{li} \ln(\mu^{-1}s_{li} + 1) + \sum_{r=1}^n \rho_{2r} \ln(\mu^{-1}s_{2r} + 1) + \sum_{r=1}^n \rho_{3r} \ln(\mu^{-1}s_{3r} + 1) \right) + \\
 & - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) - \sum_{i=1}^p \pi_{li} (h_i(x) - s_{li}) - \sum_{r=1}^n \pi_{2r} (-x_r - s_{2r} + \bar{x}_r) - \sum_{r=1}^n \pi_{3r} (x_r - s_{3r} - \underline{x}_r)
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

sendo $\lambda_j, \pi_{li}, \pi_{2r}$ e π_{3r} os multiplicadores de Lagrange, $\rho_{li}, i = 1, \dots, p$, ρ_{2r} e $\rho_{3r}, r = 1, \dots, n$ as estimativas dos multiplicadores de Lagrange e μ é o parâmetro de barreira.

Aplicam-se às condições necessárias de primeira-ordem à função Lagrangiana (4.16) e obtém-se o sistema não linear:

$$\nabla_y L = 0 \quad (4.17)$$

sendo: $y^T = (x, s_{li}, s_{2r}, s_{3r}, \lambda, \pi_{li}, \pi_{2r}, \pi_{3r})$ o vetor das variáveis,

com,

$$\nabla_y L = \begin{bmatrix} \nabla_x f(x)^T - J(x)^T \lambda_j - J_1(x)^T (\pi_{li}) + (\pi_{2r})^T I - (\pi_{3r})^T I \\ -\frac{\rho_{li}}{\mu^{-1}s_{li} + 1} + \pi_{li} \\ -\frac{\rho_{2r}}{\mu^{-1}s_{2r} + 1} + \pi_{2r} \\ -\frac{\rho_{3r}}{\mu^{-1}s_{3r} + 1} + \pi_{3r} \\ -g_j(x) \\ -(h_i(x) - s_{li}) \\ -(-x_r - s_{2r} + \bar{x}_r) \\ -(x_r - s_{3r} - \underline{x}_r) \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

$J(x)^T = (\nabla_x g_1(x), \dots, \nabla_x g_m(x))$, $J_1(x)^T = (\nabla_x h_1(x), \nabla_x h_2(x), \dots, \nabla_x h_p(x))$ são denominadas matrizes Jacobiana e I é a matriz identidade.

Através do método de Newton, obtém-se a solução do sistema não-linear (4.17). A aplicação do método de Newton resulta no sistema matricial, que, em sua forma simplificada, é representada por:

$$\nabla_{yy}^2 L \cdot \Delta y = -\nabla_y L \quad (4.19)$$

sendo,

$$\nabla_{yy}^2 L = \begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L & 0 & 0 & 0 & -J(x)^t & -J_1(x)^t & I & -I \\ 0 & \frac{\mu \rho_{1i}}{(s_{1i} + \mu)^2} & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu \rho_{2k}}{(s_{2k} + \mu)^2} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu \rho_{3k}}{(s_{3k} + \mu)^2} & 0 & 0 & 0 & I \\ -J(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_1(x) & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

é a matriz Hessiana da função Lagrangiana, Δy é o vetor de correção, $\nabla_y L$ é o vetor dado em (4.18) e $\nabla_{xx}^2 L = \nabla_{xx}^2 f(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla_{xx}^2 g_j(x) - \sum_{i=1}^p \pi_i \nabla_{xx}^2 h_i(x)$.

Atualiza-se o vetor y por:

$$y^{k+1} = y^k + \alpha_{p,D} \Delta y^k \quad (4.21)$$

sendo α_p e α_D o tamanho do passo utilizado na atualização das variáveis primais e duais, respectivamente. As expressões para o cálculo do passo máximo são dadas por:

$$\alpha_p^k = \gamma * \min \left\{ 1, \min \left\{ \frac{s_{1i}^k}{|\Delta s_{1i}|} \mid \Delta s_{1i} < 0, \frac{s_{2r}^k}{|\Delta s_{2r}|} \mid \Delta s_{2r} < 0, \frac{s_{3r}^k}{|\Delta s_{3r}|} \mid \Delta s_{3r} < 0 \right\} \right\}, \quad (4.22)$$

$$\alpha_D^k = \gamma * \min \left\{ 1, \min \left\{ \frac{\pi_{1i}^k}{|\Delta \pi_{1i}|} \mid \Delta \pi_{1i} < 0, \frac{\pi_{2r}^k}{|\Delta \pi_{2r}|} \mid \Delta \pi_{2r} < 0, \frac{\pi_{3r}^k}{|\Delta \pi_{3r}|} \mid \Delta \pi_{3r} < 0 \right\} \right\} \quad (4.23)$$

sendo $\gamma=0,9995$ um valor determinado empiricamente. A finalidade do fator γ é evitar que as variáveis auxiliares aproximem-se demasiadamente da região de factibilidade.

Durante o processo iterativo o parâmetro de barreira μ deve decrescer. Granville (1994) propõe a atualização de μ através da Equação (4.24), em que o numerador corresponde ao *gap* de dualidade.

$$\mu = \frac{S_{li}\pi_{li} + S_{2r}\pi_{2r} + S_{3r}\pi_{3r}}{2n\beta} \quad (4.24)$$

sendo n o número de variáveis tratadas por barreira e $\beta > 1$ o fator de correção especificado pelo usuário.

Por se tratar de um dado empírico do método, uma forma mais simples de atualizar μ é dada por meio da equação (4.25).

$$\mu^{k+1} = \frac{\mu^k}{\beta}, \quad (4.25)$$

em que $\beta > 1$ é denominado fator de correção e é um parâmetro definido pelo usuário.

O vetor das estimativas dos multiplicadores de Lagrange ρ é atualizado pela regra de Polyak (1992), da seguinte forma:

$$\rho^{k+1} = \frac{\rho^k \mu^{k+1}}{s^{k+1} + \mu^{k+1}} \quad (4.26)$$

O critério de parada utilizado foi de todas as restrições de igualdade serem menores do que uma tolerância de convergência ξ pré-estabelecida e as condições de KKT estarem satisfeitas.

4.5.1 – Algoritmo

O problema (4.13) pode ser resolvido iterativamente através do algoritmo apresentado a seguir:

Passo 0: Faça $k=0$, dê uma estimativa inicial para $y^k = (x_r^k, s_{li}^k, s_{2r}^k, s_{3r}^k, \lambda_j^k, \pi_{li}^k, \pi_{2r}^k, \pi_{3r}^k)$, $\rho_1^k, \rho_2^k, \rho_3^k$ e μ^k que satisfaça as condições propostas;

Passo 1: Determine o sistema (4.19) e resolva-o;

Passo 2: Atualize y^k utilizando (4.21);

Passo 3: Se o critério de parada está satisfeito então **pare**. Caso contrário vá para o passo 4;

Passo 4: Atualize μ utilizando (4.24) ou (4.25) e os multiplicadores de Lagrange ρ usando (4.26). Faça $k = k+1$ e retorne ao passo 1.

Observa-se que um ponto inicial factível não é obrigatório, mas as condições $\pi_{li} > 0, \pi_{2r} > 0, \pi_{3r} > 0, s_{li} > 0, s_{2r} > 0$ e $s_{3r} > 0$ devem estar satisfeitas na solução do problema.

4.5.2 – Dificuldades Computacionais

As principais dificuldades encontradas no MPDBM são: o valor inicial do parâmetro de barreira, sua forma de atualização e os valores iniciais dos multiplicadores de Lagrange associados a função barreira modificada.

4.6 – O MÉTODO PRIMAL-DUAL BARREIRA MODIFICADA PREDITOR-CORRETOR

O Método Primal-Dual Barreira Modificada Preditor-Corretor (MPDBM-PC) foi desenvolvido por Sousa (2006). Esta abordagem associa o MPDBM com o Método Preditor-Corretor apresentado por Mehrotra (1992).

O método de Newton é amplamente estudado e conhecido para resolver sistemas de equações não-lineares. Sua aplicação é iterativa e requer a cada iteração a avaliação da matriz Jacobiana em um ponto e a resolução de um sistema linear. Existem muitas variações do método de Newton, as quais são caracterizadas pelo número de avaliações em um ponto da matriz Jacobiana.

Uma de suas variações consiste em resolver um sistema: $g(x) = 0$, onde $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\bar{x}^K &= x^K - \left(\nabla g(x^K)^t \right)^{-1} g(x^K) \\ x^{K+1} &= \bar{x}^K - \left(\nabla g(x^K)^t \right)^{-1} g(\bar{x}^K)\end{aligned}\tag{4.27}$$

onde x^K é uma solução aproximada de $g(x) = 0$.

O Método Preditor-Corretor apresentado por Mehrotra (1992) computa direções de buscas mais eficientes resolvendo dois sistemas de equações lineares em cada iteração como apresentado em (4.27). As duas soluções dos sistemas lineares, as quais são determinadas através de um passo preditor e um corretor, envolvem a mesma matriz dos coeficientes, porém o vetor que fica do lado direito do sistema é diferente. Logo, somente uma fatorização da matriz e um pequeno cálculo adicional são necessários no Passo Corretor. Na determinação do método preditor-corrector fatores não-lineares são introduzidos no vetor do lado direito do sistema de Newton, os quais, em princípio, não são conhecidos. Para determiná-los aproximadamente, Mehrotra (1992) sugere o cálculo de direções afins primais-duais, tornando o parâmetro de barreira igual a zero no passo preditor.

No método preditor-corrector, não aplica-se o método de Newton em (4.18) para gerar os termos de correção para a estimativa atual, mas sim substitui-se o novo ponto $\pi^{k+1} = \pi^k + \Delta\pi$ e $s^{k+1} = s^k + \Delta s$ diretamente em (4.18), para obter a seguinte aproximação:

$$\nabla_{yy}^2 L_{pc} \cdot \Delta y = -\nabla_y L_{pc}\tag{4.28}$$

sendo:

$$\nabla_y L_{pc} = \begin{bmatrix} \nabla_x f(x)^T - \lambda^T J(x) - (\pi_1)^T J_1(x) + (\pi_2)^T I - (\pi_3)^T I \\ \pi_{1i} \\ \pi_{2r} \\ \pi_{3r} \\ -g_j(x) \\ -(h_i(x) - s_{li}) \\ -(-x_r - s_{2r} + \bar{x}_r) \\ -(x_r - s_{3r} - \underline{x}_r) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\rho_{li}}{\mu^{-1}s_{li} + 1} \\ \rho_{2r} \\ -\frac{\rho_{2r}}{\mu^{-1}s_{2r} + 1} \\ \rho_{3r} \\ -\frac{\rho_{3r}}{\mu^{-1}s_{3r} + 1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mu^{-1}\Delta s_{li}\Delta\pi_{li}}{\mu^{-1}s_{li} + 1} \\ \frac{\mu^{-1}\Delta s_{2r}\Delta\pi_{2r}}{\mu^{-1}s_{2r} + 1} \\ \frac{\mu^{-1}\Delta s_{3r}\Delta\pi_{3r}}{\mu^{-1}s_{3r} + 1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

e

$$\nabla_{yy}^2 L_{pc} = \begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L & 0 & 0 & 0 & -J(x)^T & -J_1(x)^T & I & -I \\ 0 & \frac{(\rho_{li} - \pi_{li})\pi_{li}}{s_{li}\rho_{li}} & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\rho_{2r} - \pi_{2r})\pi_{2r}}{s_{2r}\rho_{2r}} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\rho_{3r} - \pi_{3r})\pi_{3r}}{s_{3r}\rho_{3r}} & 0 & 0 & 0 & I \\ -J(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_1(x) & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

$\nabla_{yy}^2 L_{pc}$ é a matriz Hessiana da Função Lagrangiana Preditor-Corretor com o parâmetro de barreira μ isolado utilizando-se as expressões do vetor gradiente (4.18) em função das demais variáveis $\left(\mu = \frac{\pi s}{\rho - \pi}\right)$. Desta forma a matriz $\nabla_{yy}^2 L_{pc}$ não depende de μ , podendo, assim, ser utilizada mais de uma vez.

Para resolver o sistema (4.28) utiliza-se a estratégia proposta por Mehrotra (1992), na qual resolve-se o sistema em dois passos. Primeiramente, no Passo Preditor ajusta-se $\mu = 0$ e resolve o sistema:

$$\nabla_{yy}^2 L_{pc} \cdot \tilde{\Delta} y = -\nabla_y L_{pc} \quad (4.31)$$

sendo o vetor $\tilde{\Delta} y$ os valores aproximados utilizados para o cálculo dos termos não-lineares em (4.31) e $\nabla_y L_{pc}$ dado pelo primeiro termo (4.29). No Passo Corretor, calcula-se o valor de μ e dos termos não-lineares e depois resolve-se o sistema:

$$\nabla_{yy}^2 L_{pc} \cdot \Delta y = -\nabla_y L_{pc} \quad (4.32)$$

sendo $\nabla_y L_{pc}$ dado por (4.29).

Após calcular a direção de busca Δy , atualizam-se as variáveis através de (4.21), μ utilizando (4.24) ou (4.25) e os multiplicadores de Lagrange ρ usando (4.26).

O critério de parada do método foi de todas as restrição de igualdade serem menores do que uma tolerância de convergência ξ pré-estabelecida e as condições de KKT estarem satisfeitas.

4.6.1 – Algoritmo

O problema (4.13) pode ser resolvido iterativamente através do algoritmo do MPDBM-PC apresentado a seguir.

Passo 0: Dado o problema (4.13), construa a função Lagrangiana (4.16); estabeleça ($\xi > 0$), Faça $k=0$; e dê uma estimativa inicial para as variáveis e parâmetros do problema: $y^k = (x_r^k, s_{li}^k, s_{2r}^k, s_{3r}^k, \lambda_j^k, \pi_{li}^k, \pi_{2r}^k, \pi_{3r}^k)$, $\rho_{li}^k > 0$, $\rho_{2r}^k > 0$, $\rho_{3r}^k > 0$ e $\mu^k > 0$.

Passo 1: Passo Preditor – faça $\mu = 0$, determine o sistema (4.30) e resolva-o;

Passo 2: Passo Corretor – calcule μ , utilizando (4.24) ou (4.25), determine o sistema (4.31) e resolva-o;

Passo 3: Atualize as variáveis do problema utilizando (4.21);

Passo 4: Se o critério de parada está satisfeito, **pare**; senão, faça $k = k+1$ e volte ao passo 1.

4.6.2 – Dificuldades Computacionais

O valor inicial do parâmetro de barreira, sua forma de atualização e os valores iniciais dos multiplicadores de Lagrange são as principais dificuldades encontradas no MPDBM-PC.

4.7 – O MÉTODO PRIMAL-DUAL BARREIRA MODIFICADA NEWTON COMPOSTO

Neste trabalho acrescenta-se ao Método Primal-Dual Barreira Modificada o Método de Newton Composto (MPDBM-NC). O MPDBM-NC executa dois ou mais passos corretores a cada iteração com a intenção de executar menos iterações que o MPDBM-PC. Dessa maneira, os objetivos do MPDBM-NC são: a exploração da matriz Hessiana da função Lagrangiana e mais fatorações em uma seqüência de soluções de sistemas como (4.30) com diferentes lados direitos, conforme Zhang (1996).

O critério de parada do método é de todas as restrição de igualdade serem menores do que uma tolerância de convergência ξ pré-estabelecida e as condições de KKT estarem satisfeitas.

4.7.1 – Algoritmo

Os passos do algoritmo do MPDBM-NC são apresentados a seguir.

Passo 0: Dado o problema (4.13), construa a função Lagrangiana (4.16); estabeleça $\xi > 0$ e o valor de $M > 1$, Faça $k=0$; e dê uma estimativa inicial para as variáveis e parâmetros do problema: $y^k = (x_r^k, s_{li}^k, s_{2r}^k, s_{3r}^k, \lambda_j^k, \pi_{li}^k, \pi_{2r}^k, \pi_{3r}^k)$, $\rho_{li}^k > 0$, $\rho_{2r}^k > 0$, $\rho_{3r}^k > 0$ e $\mu^k > 0$.

Passo 1: Passo Preditor – faça $\mu = 0$, determine o sistema (4.30) e resolva-o;

Passo 2: Passo Corretor – calcule μ , utilizando (4.24) ou (4.25), determine o sistema (4.31) e resolva-o M vezes;

Passo 3: Atualize as variáveis do problema utilizando (4.21);

Passo 4: Se o critério de parada está satisfeito, **pare**; senão, faça $k = k+1$ e volte ao passo 1.

4.7.2 – Dificuldades Computacionais

Uma das dificuldades encontradas no MPDBM Newton Composto é determinar o valor de M , ou seja, quantos passos corretores são necessários. Uma outra dificuldade é a escolha do parâmetro de barreira inicial, sua forma de atualização e os valores iniciais dos multiplicadores de Lagrange, pois todos interferem no processo de otimização.

CAPITULO 5

RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos da aplicação dos métodos Primal-Dual Barreira Modificada (MPDBM) e Primal-Dual Barreira Modificada com as técnicas Preditor-Corretor (MPDBM-PC) e Newton Composto (MPDBM-NC) a um problema de programação não-linear e aos sistemas elétricos de três e de trinta barras. Além da aplicação do MPI Primal-Dual ao problema de programação não-linear.

Todos os métodos apresentados neste capítulo foram implementados no aplicativo Matlab. Os programas foram desenvolvidos em um microcomputador Pentium IV – 2 GHz, com 256 Mbytes de memória RAM, do Laboratório de Otimização em Sistemas Elétricos de Potência (LOSEP), do Departamento de Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC – USP).

5.1 – PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR

Os MPI Primal-Dual, MPDBM, MPDBM-PC e MPDBM-NC serão utilizados para a resolução do problema de programação não-linear (PNL), encontrado em Baptista (2001).

$$\begin{aligned} \min & \quad (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \\ \text{s.a} & \quad x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ & \quad x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ & \quad 1,5 \leq x_2 \leq 2,0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Para a aplicação dos métodos estudados ao problema (5.1) transformam-se as restrições canalizadas em duas restrições de desigualdades, em seguida padroniza-se o sinal ≥ 0 apenas por convenção e, finalmente, incorporam-se as variáveis de excesso, transformando-as em igualdades.

$$\begin{aligned}
& \min (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \\
& \text{s.a } x_1 + x_2 - 3 = 0 \\
& \quad -x_1^2 + x_2 - s_1 = 0 \\
& \quad -x_2 - s_2 + 2 = 0 \\
& \quad x_2 - s_3 - 1,5 = 0 \\
& \quad s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned} \tag{5.2}$$

5.1.1 – Resolução pelo Método de Pontos Interiores Primal-Dual

Ao problema (5.2) incorporam-se as variáveis de excesso na função objetivo através da função barreira logarítmica, onde estas devem ser estritamente positivas.

$$\begin{aligned}
& \min (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 - \mu(\ln s_1 + \ln s_2 + \ln s_3) \\
& \text{s.a } x_1 + x_2 - 3 = 0 \\
& \quad -x_1^2 + x_2 - s_1 = 0 \\
& \quad -x_2 - s_2 + 2 = 0 \\
& \quad x_2 - s_3 - 1,5 = 0
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Associa-se a seguinte a função Lagrangiana ao problema (5.3).

$$\begin{aligned}
L = & (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 - \mu(\ln s_1 + \ln s_2 + \ln s_3) - \lambda(x_1 + x_2 - 3) + \\
& - \pi_1(-x_1^2 + x_2 - s_1) - \pi_2(-x_2 - s_2 + 2) - \pi_3(x_2 - s_3 - 1,5)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

As condições necessárias de primeira-ordem são aplicadas à função (5.4).

$$\nabla_y L = 0$$

sendo $y = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, \lambda, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$

ou,

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4(x_1 - 2)^3 + 2(x_1 - 2x_2) - \lambda + 2x_1\pi_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -4(x_1 - 2x_2) - \lambda - \pi_1 + \pi_2 - \pi_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1} = \pi_1 - \frac{\mu}{s_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_2} = \pi_2 - \frac{\mu}{s_2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_3} = \pi_3 - \frac{\mu}{s_3} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x_1 - x_2 + 3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_1} = x_1^2 - x_2 + s_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_2} = x_2 + s_2 - 2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_3} = -x_2 + s_3 + 1,5 = 0$$

Resolve-se o sistema pelo Método de Newton:

$$\begin{bmatrix} 12(x_1 - 2)^2 + 2 + 2\pi_1 & -4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2x_1 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{s_1^2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{s_2^2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{s_3^2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x_1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \\ \Delta s_3 \\ \Delta \lambda \\ \Delta \pi_1 \\ \Delta \pi_2 \\ \Delta \pi_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_{x_1} L \\ \nabla_{x_2} L \\ \nabla_{s_1} L \\ \nabla_{s_2} L \\ \nabla_{s_3} L \\ \nabla_{\lambda} L \\ \nabla_{\pi_1} L \\ \nabla_{\pi_2} L \\ \nabla_{\pi_3} L \end{bmatrix}$$

As estimativas iniciais para as variáveis, parâmetro de barreira e seu fator de correção foram $x_1 = 1,1$; $x_2 = 1,9$; $\mu = 0,01$; $\beta = 1,1$, respectivamente.

As variáveis s_1, s_2 e s_3 são calculadas por: $s_1 = -x_1^2 + x_2 = 0,69$;
 $s_2 = 2 - x_2 = 0,1$; $s_3 = x_2 - 1,5 = 0,4$.

Os multiplicadores de Lagrange são iniciados da seguinte forma:

$$\lambda = 0; \pi_1 = \frac{\mu}{s_1} = 0,0145; \pi_2 = \frac{\mu}{s_2} = 0,100, \pi_3 = \frac{\mu}{s_3} = 0,025.$$

Substituindo-se os valores acima no sistema de Newton, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 11,75 & -4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2,2 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0,02 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,06 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \\ \Delta s_3 \\ \Delta \lambda \\ \Delta \pi_1 \\ \Delta \pi_2 \\ \Delta \pi_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -8,2841 \\ 10,8605 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obtém-se o vetor de correção:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \\ \Delta s_3 \\ \Delta \lambda \\ \Delta \pi_1 \\ \Delta \pi_2 \\ \Delta \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6596 \\ -0,6596 \\ -2,1106 \\ 0,6596 \\ -0,6596 \\ 2,2007 \\ 0,0443 \\ -0,6596 \\ 0,0412 \end{bmatrix}$$

Conhecendo-se o vetor de correção, calcula-se o tamanho do passo.

Passo primal:

$$\alpha_p = \gamma * \min \left\{ 1, \min_i \left\{ \frac{s_i^K}{|\Delta s_i|} \mid \Delta s_i < 0 \right\} \right\}$$

$$\alpha_p = \gamma * \min \left\{ 1; \min_i \left\{ \frac{0,69}{2,1106}; \text{não entra}; \frac{0,4}{0,6596} \right\} \right\}$$

$$\alpha_p = \gamma * \min \{ 1; 0,3269; \text{não entra}; 0,6065 \}$$

$$\alpha_p = 0,99995 * 0,3269 = 0,3268$$

Passo Dual:

$$\alpha_p = \gamma * \min \left\{ 1, \min_i \left\{ \frac{\pi_i}{|\Delta \pi_i|} \mid \Delta \pi_i < 0 \right\} \right\}$$

$$\alpha_p = \gamma * \min \left\{ 1, \min_i \left\{ \text{não entra}; \frac{1}{0,6596}; \text{não entra} \right\} \right\}$$

$$\alpha_p = \gamma * \min \left\{ 1, \min_i \{ \text{não entra}; 0,1516; \text{não entra} \} \right\}$$

$$\alpha_p = 0,99995 * 0,1516 = 0,1515$$

Atualizam-se as variáveis e obtém-se a solução da primeira iteração:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \lambda \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1 \\ 1,9 \\ 0,69 \\ 0,1 \\ 0,4 \\ 0 \\ 0,0145 \\ 0,1 \\ 0,025 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,6596 * \alpha_p \\ -0,6596 * \alpha_p \\ -2,1106 * \alpha_p \\ 0,6596 * \alpha_p \\ -0,6596 * \alpha_p \\ 2,2007 * \alpha_d \\ 0,0443 * \alpha_d \\ -0,6596 * \alpha_d \\ 0,0412 * \alpha_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3155 \\ 1,6845 \\ 0,0003 \\ 0,3155 \\ 0,1845 \\ 0,3335 \\ 0,0212 \\ 0,0001 \\ 0,0312 \end{bmatrix}$$

O critério de parada utilizado foi a norma do vetor gradiente ser menor do que uma precisão $\xi \leq 0,009$ e as condições de KKT estarem satisfeitas.

A Tabela 1 apresenta o processo de convergência do MPI Primal-dual aplicado ao problema de PNL, sendo I_{te} o número da iteração, F.O. o valor da função objetivo, $Max(grad)$ a norma do vetor gradiente e y_1 é a restrição de igualdade.

Tabela 1 – Convergência do MPI Primal-Dual aplicado ao problema de PNL.

Ite	0	1	2	3
F.O.	7,9461	4,4362	4,6132	4,6156
x_1	1,1	1,3155	1,3027	1,3025
x_2	1,9	1,6845	1,6973	1,6975
s_1	0,6900	0,0003	0,0006	0,0011
s_2	0,1000	0,3155	0,3027	0,3025
s_3	0,4000	0,1845	0,1973	0,1975
λ	0	0,3335	4,5243	4,5004
π_1	0,0145	0,0212	3,8241	3,8554
π_2	0,1000	0,0001	0,0300	0,0273
π_3	0,0250	0,0312	0,0458	0,0418
μ	1,0100	0,0100	0,0091	0,0083
Max(grad)		10,8605	7,8279	0,0040
y_1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

5.1.2 – Resolução pelos Métodos Primal-Dual Barreira Modificada e suas Variantes

Para aplicar o MPDBM e suas variantes ao problema (5.2), as variáveis de excesso devem ser relaxadas pelo parâmetro de barreira e utilizando a função barreira modificada obtêm-se o seguinte problema modificado.

$$\begin{aligned}
 &\min (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \\
 &\text{s.a } x_1 + x_2 - 3 = 0 \\
 &\quad -x_1^2 + x_2 - s_1 = 0 \\
 &\quad -x_2 - s_2 + 2 = 0 \\
 &\quad x_2 - s_3 - 1,5 = 0 \\
 &\quad \mu \ln(\mu^{-1} s_1 + 1) \geq 0 \\
 &\quad \mu \ln(\mu^{-1} s_2 + 1) \geq 0 \\
 &\quad \mu \ln(\mu^{-1} s_3 + 1) \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Associa-se ao problema (5.5) a seguinte função Lagrangiana.

$$\begin{aligned}
 L = & (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 - \mu\rho_1 \ln(\mu^{-1}s_1 + 1) - \mu\rho_2 \ln(\mu^{-1}s_2 + 1) - \mu\rho_3 \ln(\mu^{-1}s_3 + 1) + \\
 & -\lambda(x_1 + x_2 - 3) - \pi_1(-x_1^2 + x_2 - s_1) - \pi_2(-x_2 - s_2 + 2) - \pi_3(x_2 - s_3 - 1,5)
 \end{aligned}$$

Aplicam-se as condições necessárias de primeira-ordem a função (5.5).

$$\nabla_y L = 0$$

ou,

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4(x_1 - 2)^3 + 2(x_1 - 2x_2) - \lambda + 2x_1\pi_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -4(x_1 - 2x_2) - \lambda - \pi_1 + \pi_2 - \pi_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1} = \pi_1 - \frac{\mu\rho_1}{s_1 + \mu} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_2} = \pi_2 - \frac{\mu\rho_{21}}{s_2 + \mu} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_3} = \pi_3 - \frac{\mu\rho_3}{s_3 + \mu} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x_1 - x_2 + 3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_1} = x_1^2 - x_2 + s_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_2} = x_2 + s_2 - 2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_3} = -x_2 + s_3 + 1,5 = 0$$

Resolve-se o sistema pelo Método de Newton:

$$\begin{bmatrix} 12(x_1 - 2)^2 + 2 + 2\pi_1 & -4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2x_1 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{(\rho_1 - \pi_1)\pi_1}{s_1\rho_1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\rho_2 - \pi_2)\pi_2}{s_2\rho_2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\rho_3 - \pi_3)\pi_3}{s_3\rho_3} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x_1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \\ \Delta s_3 \\ \Delta \lambda \\ \Delta \pi_1 \\ \Delta \pi_2 \\ \Delta \pi_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_{x_1} L \\ \nabla_{x_2} L \\ \nabla_{s_1} L \\ \nabla_{s_2} L \\ \nabla_{s_3} L \\ \nabla_{\lambda} L \\ \nabla_{\pi_1} L \\ \nabla_{\pi_2} L \\ \nabla_{\pi_3} L \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

As estimativas iniciais para as variáveis foram $x_1 = 1,1$, $x_2 = 1,9$. As variáveis s_1, s_2 e s_3 são calculadas por: $s_1 = -x_1^2 + x_2 = 0,69$; $s_2 = 2 - x_2 = 0,1$; $s_3 = x_2 - 1,5 = 0,4$.

Para o problema de PNL o critério de parada utilizado em todos os métodos foi a norma do vetor gradiente ser menor do que uma precisão $\xi \leq 0,0009$ e as condições de KKT estarem satisfeitas. O multiplicador de Lagrange ρ não foi atualizado durante as iterações, pois os métodos funcionam melhor mantendo-o fixo.

5.1.2.1 – Resolução pelo Método Primal-Dual Barreira Modificada

As estimativas iniciais do parâmetro de barreira e de seu fator de correção foram $\mu = 0,56$ e $\beta = 1,05$, respectivamente. Os multiplicadores de Lagrange são definidos por:

$$\lambda = 0; \rho_1 = 3,1; \rho_2 = 1,0; \rho_3 = 4,8;$$

$$\pi_1 = \frac{\mu \rho_1}{s_1 + \mu} = 1,3888; \pi_2 = \frac{\mu \rho_2}{s_2 + \mu} = 0,8485; \pi_3 = \frac{\mu \rho_3}{s_3 + \mu} = 2,8.$$

Substituindo-se os valores das variáveis e o parâmetro de barreira no sistema de Newton, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 14,50 & -4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2,2 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1,11 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,28 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,92 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \\ \Delta s_3 \\ \Delta \lambda \\ \Delta \pi_1 \\ \Delta \pi_2 \\ \Delta \pi_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -5,2606 \\ 7,4597 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução do sistema de Newton é o vetor de correção ou direção de busca.

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \\ \Delta s_3 \\ \Delta \lambda \\ \Delta \pi_1 \\ \Delta \pi_2 \\ \Delta \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2761 \\ -0,2761 \\ -0,8834 \\ 0,2761 \\ -0,2761 \\ 2,0053 \\ 0,9815 \\ -0,3549 \\ 0,8052 \end{bmatrix}$$

Conhecendo-se as direções de busca, calcula-se o tamanho do passo.

Passo primal:

$$\alpha_p = \gamma * \min \left\{ 1, \min_i \left\{ \frac{s_i^K}{|\Delta s_i|} \mid \Delta s_i < 0 \right\} \right\}$$

$$\alpha_p = \gamma * \min \left\{ 1; \min_i \left\{ \frac{0,69}{|-0,8834|}; \text{não entra}; \frac{0,4}{|-0,2761|} \right\} \right\}$$

$$\alpha_p = \gamma * \min \{1; 0,7811; \text{não entra}; 1,4489\}$$

$$\alpha_p = 0,99995 * 0,7811 = 0,7807$$

Passo Dual:

$$\alpha_p = \gamma * \min \left\{ 1, \min_i \left\{ \frac{\pi_i}{|\Delta \pi_i|} \mid \Delta \pi_i < 0 \right\} \right\}$$

$$\alpha_p = \gamma * \min \left\{ 1, \min_i \left\{ \text{não entra}; \frac{0,8485}{|-0,3549|}; \text{não entra} \right\} \right\}$$

$$\alpha_p = \gamma * \min \left\{ 1, \min_i \left\{ \text{não entra}; 2,3907; \text{não entra} \right\} \right\}$$

$$\alpha_p = 0,99995 * 1 = 0,9995$$

Atualizam-se as variáveis e obtém-se a solução da primeira iteração:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \lambda \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1 \\ 1,9 \\ 0,69 \\ 0,1 \\ 0,4 \\ 0 \\ 1,3888 \\ 0,8485 \\ 2,8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,2761 * \alpha_p \\ -0,2761 * \alpha_p \\ -0,8834 * \alpha_p \\ 0,2761 * \alpha_p \\ -0,2761 * \alpha_p \\ 2,0053 * \alpha_d \\ 0,9815 * \alpha_d \\ -0,3549 * \alpha_d \\ 0,8052 * \alpha_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3155 \\ 1,6845 \\ 0,0003 \\ 0,3155 \\ 0,1845 \\ 2,0043 \\ 2,3698 \\ 0,4938 \\ 3,6048 \end{bmatrix}$$

a) Solução do problema sem a atualização do parâmetro de barreira

A Tabela 2 apresenta o processo de convergência do método PDBM aplicado ao problema de PNL com μ fixo.

Tabela 2 – Convergência do método PDBM aplicado ao problema de PNL com μ fixo.

Ite	0	1,0000	2,0000	3,0000
F.O.	7,9461	4,4362	4,6358	4,6339
x_1	1,1000	1,3155	1,3010	1,3012
x_2	1,9000	1,6845	1,6990	1,6988
s_1	0,6900	0,0003	0,0065	0,0058
s_2	0,1000	0,3155	0,3010	0,3012
s_3	0,4000	0,1845	0,1990	0,1988
λ	0	2,0043	2,4338	2,4260
π_1	1,3888	2,3698	3,0634	3,0681
π_2	0,8485	0,4938	0,6501	0,6503
π_3	2,8000	3,6048	3,5403	3,5423
ρ_1	3,1000	3,1000	3,1000	3,1000
ρ_2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
ρ_3	4,8000	4,8000	4,8000	4,8000
μ	0,5600	0,5600	0,5600	0,5600
Max (grad)	-	7,4597	0,7287	0,0004
y_1	0	0	0	0
α_p	0	0,7807	0,9995	0,9995
α_d	0	0,9995	0,9995	0,9995

b) Solução do problema com a atualização do parâmetro de barreira através do *gap* de dualidade

A Tabela 3 apresenta o processo de convergência do método PDBM aplicado ao problema de PNL

Tabela 3 – Convergência do método PDBM aplicado ao problema de PNL.

Ite	0	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000
F.O.	7,9461	4,4362	4,6155	4,6114	4,6139
x_1	1,1000	1,3155	1,3025	1,3028	1,3026
x_2	1,9000	1,6845	1,6975	1,6972	1,6974
s_1	0,6900	0,0003	0,0013	0,0002	0,0002
s_2	0,1000	0,3155	0,3025	0,3028	0,3026
s_3	0,4000	0,1845	0,1975	0,1972	0,1974
λ	0	0,3087	4,4429	4,4853	4,4587
π_1	0,0643	0,0966	3,7947	3,8471	3,8385
π_2	0,3091	0,0002	0,0820	0,0211	0,0449
π_3	0,1415	0,1794	0,2109	0,0550	0,1166
ρ_1	4,5000	4,5000	4,5000	4,5000	4,5000
ρ_2	3,4000	3,4000	3,4000	3,4000	3,4000
ρ_3	5,8000	5,8000	5,8000	5,8000	5,8000
μ	0,0100	0,0075	0,0019	0,0040	0,0010
max (grad)		10,9033	7,6293	1,1019	0,0002
y_1	0	0	0	0	0
α_p	0	0,3609	0,9995	0,9363	0,9995
α_d	0	0,1841	0,9995	0,9995	0,9995

Observa-se nas Tabelas 2 e 3 que o método PDBM convergiu com três e quatro iterações, portanto, para esse exemplo a atualização do parâmetro de barreira não melhorou o desempenho do método.

5.1.2.2 – Resolução pelo Método Primal-Dual Barreira Modificada com Preditor-Corretor

Passo Preditor: faz-se $\mu = 0$ e obtém-se o novo vetor gradiente independente do parâmetro de barreira

$$\nabla_y L_{pc} = 0$$

ou,

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4(x_1 - 2)^3 + 2(x_1 - 2x_2) - \lambda + 2x_1\pi_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -4(x_1 - 2x_2) - \lambda - \pi_1 + \pi_2 - \pi_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1} = \pi_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_2} = \pi_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_3} = \pi_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x_1 - x_2 + 3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_1} = x_1^2 - x_2 + s_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_2} = x_2 + s_2 - 2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_3} = -x_2 + s_3 + 1,5 = 0$$

Resolve-se o sistema pelo Método de Newton em que a Hessiana da Lagrangiana é a mesma que em (5.6), obtém-se assim o vetor de correção Δy .

Passo corretor: Resolve-se novamente o sistema de Newton com $\mu \neq 0$. Nesse passo, o vetor gradiente é modificado com o acréscimo de termos não lineares, resultando no novo vetor gradiente, dado por:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4(x_1 - 2)^3 + 2(x_1 - 2x_2) - \lambda + 2x_1\pi_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -4(x_1 - 2x_2) - \lambda - \pi_1 + \pi_2 - \pi_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1} = \pi_1 - \frac{\mu \rho_1}{s_1 + \mu} + \frac{\Delta s_1 \Delta \pi_1}{s_1 + \mu} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_2} = \pi_2 - \frac{\mu \rho_2}{s_2 + \mu} + \frac{\Delta s_2 \Delta \pi_2}{s_2 + \mu} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_3} = \pi_3 - \frac{\mu \rho_3}{s_3 + \mu} + \frac{\Delta s_3 \Delta \pi_3}{s_3 + \mu} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x_1 - x_2 + 3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_1} = x_1^2 - x_2 + s_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_2} = x_2 + s_2 - 2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_3} = -x_2 + s_3 + 1,5 = 0$$

Na sequência, calculam-se os passos primais e duais e atualizam-se as variáveis e os parâmetros do problema até que o critério de parada esteja satisfeito.

a) Solução do problema sem a atualização do parâmetro de barreira

A Tabela 4 apresenta o processo de convergência do método PDBM com preditor- corretor aplicado ao problema de PNL com μ fixo.

Tabela 4 – Convergência do método PDBM com preditor-corretor aplicado ao problema de PNL com μ fixo.

Ite	0	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000
F.O.	7,9461	4,4362	4,6107	4,6115	4,6117
x_1	1,1000	1,3155	1,3028	1,3028	1,3028
x_2	1,9000	1,6845	1,6972	1,6972	1,6972
s_1	0,6900	0,0003	0,0000	0,0000	0,0001
s_2	0,1000	0,3155	0,3028	0,3028	0,3028
s_3	0,4000	0,1845	0,1972	0,1972	0,1972
λ	0	8,9757	3,8480	4,1660	4,1664
π_1	1,7500	4,9173	3,5454	3,7248	3,7251
π_2	0,9000	7,5211	0,0038	0,3481	0,3484
π_3	1,2000	0,3833	0,8041	0,8240	0,8238
ρ_1	6,7000	6,7000	6,7000	6,7000	6,7000
Ite	0	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000
ρ_2	1,9000	1,9000	1,9000	1,9000	1,9000
ρ_3	2,3100	2,3100	2,3100	2,3100	2,3100

Tabela 4 – Convergência do método PDBM com preditor-corretor aplicado ao problema de PNL com μ fixo.

μ	0,7400	0,7400	0,7400	0,7400	0,7400
max(grad)		8,7500	7,5228	0,1724	0,0002
y_1	0	0	0	0	0
α_p	0	0,6398	0,9995	0,9995	0,9995
α_d	0	0,9995	0,8930	0,9995	0,9995

b) Solução do problema com a atualização do parâmetro de barreira

Estimando o parâmetro de barreira, o menor valor do gradiente encontrado foi 5,8299 que comparado com o valor do gradiente obtido na Tabela 4 é maior, logo, para esse exemplo, não convém realizar a estimação.

5.1.2.3 – Resolução pelo Método Primal-Dual Barreira Modificada com Newton Composto

Na resolução do problema de PNL pelo método PDBM-NC executou-se dois passos corretores por iteração ($M = 2$).

a) Solução do problema sem a atualização do parâmetro de barreira

A Tabela 5 apresenta o processo de convergência do método PDBM com Newton composto aplicado ao problema de PNL com μ fixo.

Tabela 5 – Convergência do método PDBM com Newton composto aplicado ao problema de PNL com μ fixo.

Ite	0	1,0000	2,0000	3,0000
F.O.	7,9461	4,4362	4,6122	4,6130
x_1	1,1000	1,3155	1,3027	1,3027
x_2	1,9000	1,6845	1,6973	1,6973
s_1	0,6900	0,0003	0,0004	0,0004
s_2	0,1000	0,3155	0,3027	0,3027
s_3	0,4000	0,1845	0,1973	0,1973
λ	0	-0,1596	2,3702	2,3698
π_1	3,1000	2,9746	3,0353	3,0362
Ite	0	1,0000	2,0000	3,0000
π_2	0,2500	0,0001	0,5797	0,5902

Tabela 5 – Convergência do método PDBM com Newton composto aplicado ao problema de PNL com μ fixo.

π_3	3,7600	3,7669	3,5407	3,5523
ρ_1	4,1000	4,1000	4,1000	4,1000
ρ_2	3,2500	3,2500	3,2500	3,2500
ρ_3	7,6500	7,6500	7,6500	7,6500
μ	0,2900	0,2900	0,2900	0,2900
max		22,4557	2,5964	0,0008
y_1	0	0	0	0
α_p	0	0,3765	0,9995	0,9995
α_d	0	0,0105	0,9995	0,9995

b) Solução do problema com a atualização do parâmetro de barreira

Estimando o parâmetro de barreira, o menor valor do gradiente encontrado foi 2,1588 que comparado com o valor do gradiente obtido na Tabela 5 é maior, logo, para esse exemplo, não convém realizar a estimação.

5.2 – SISTEMA ELÉTRICO DE 3 BARRAS

Apresenta-se a resolução do sistema elétrico de 3 barras proposto por Dommel e Tinney (1968), pelos métodos PDBM, PDBM-PC e PDBM-NC.

A Figura 6 apresenta os dados do sistema.

Figura 6 – Sistema elétrico de 3 barras.

A formulação do problema de programação não-linear associado ao sistema elétrico de 3 barras é dada por:

$$\begin{aligned}
\min \quad & g_{23}(V_2^2 + V_3^2 - 2V_2V_3 \cos \theta_{23}) + g_{31}(V_3^2 + V_1^2 - 2V_3V_1 \cos \theta_{31}) \\
\text{s.a} \quad & P_2^{\text{esp}} - V_2 \sum_{i=1}^3 V_i (g_{2i} \cos \theta_{2i} + b_{2i} \sin \theta_{2i}) = 0 \\
& P_3^{\text{esp}} - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (g_{3i} \cos \theta_{3i} + b_{3i} \sin \theta_{3i}) = 0 \\
& Q_3^{\text{esp}} - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (g_{3i} \sin \theta_{3i} - b_{3i} \cos \theta_{3i}) = 0 \\
& \underline{V}_1 \leq V_1 \leq \overline{V}_1 \\
& \underline{V}_2 \leq V_2 \leq \overline{V}_2 \\
& \underline{V}_3 \leq V_3 \leq \overline{V}_3
\end{aligned}$$

Primeiramente, transformam-se as restrições canalizadas em duas restrições de desigualdades, padroniza-se o sinal ≥ 0 apenas por convenção e, depois, incorporam-se as variáveis de excesso, transformando-as em igualdades. Em seguida, as variáveis de excesso são relaxadas usando o parâmetro de barreira μ e tratadas pela função barreira modificada, obtendo-se, assim, o seguinte problema modificado:

$$\begin{aligned}
\min \quad & g_{23}(V_2^2 + V_3^2 - 2V_2V_3 \cos \theta_{23}) + g_{31}(V_3^2 + V_1^2 - 2V_3V_1 \cos \theta_{31}) \\
\text{s.a} \quad & P_2^{\text{esp}} - V_2 \sum_{i=1}^3 V_i (g_{2i} \cos \theta_{2i} + b_{2i} \sin \theta_{2i}) = 0 \\
& P_3^{\text{esp}} - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (g_{3i} \cos \theta_{3i} + b_{3i} \sin \theta_{3i}) = 0 \\
& Q_3^{\text{esp}} - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (g_{3i} \sin \theta_{3i} - b_{3i} \cos \theta_{3i}) = 0 \\
& \bar{V}_1 - V_1 - s_1 = 0 \\
& V_1 - \underline{V}_1 - s_2 = 0 \\
& \bar{V}_2 - V_2 - s_3 = 0 \\
& V_2 - \underline{V}_2 - s_4 = 0 \\
& \bar{V}_3 - V_3 - s_5 = 0 \\
& V_3 - \underline{V}_3 - s_6 = 0 \\
& \mu \ln(\mu^{-1}s_1 + 1) \geq 0 \\
& \mu \ln(\mu^{-1}s_2 + 1) \geq 0 \\
& \mu \ln(\mu^{-1}s_3 + 1) \geq 0 \\
& \mu \ln(\mu^{-1}s_4 + 1) \geq 0 \\
& \mu \ln(\mu^{-1}s_5 + 1) \geq 0 \\
& \mu \ln(\mu^{-1}s_6 + 1) \geq 0
\end{aligned}$$

Associa-se a função Lagrangiana Barreira Modificada ao problema:

$$\begin{aligned}
L = \quad & g_{23}(V_2^2 + V_3^2 - 2V_2V_3 \cos \theta_{23}) + g_{31}(V_3^2 + V_1^2 - 2V_3V_1 \cos \theta_{31}) + \\
& -\mu\rho_1 \ln(\mu^{-1}s_1 + 1) - \mu\rho_2 \ln(\mu^{-1}s_2 + 1) + \\
& -\mu\rho_3 \ln(\mu^{-1}s_3 + 1) - \mu\rho_4 \ln(\mu^{-1}s_4 + 1) + \\
& -\mu\rho_5 \ln(\mu^{-1}s_5 + 1) - \mu\rho_6 \ln(\mu^{-1}s_6 + 1) + \\
& -\lambda_1(P_2^{\text{esp}} - V_2 \sum_{i=1}^3 V_i (g_{2i} \cos \theta_{2i} + b_{2i} \sin \theta_{2i})) + \\
& -\lambda_2(P_3^{\text{esp}} - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (g_{3i} \cos \theta_{3i} + b_{3i} \sin \theta_{3i})) + \\
& -\lambda_3(Q_3^{\text{esp}} - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (g_{3i} \sin \theta_{3i} - b_{3i} \cos \theta_{3i})) + \\
& -\pi_1(\bar{V}_1 - V_1 - s_1) - \pi_2(V_1 - \underline{V}_1 - s_2) + \\
& -\pi_3(\bar{V}_2 - V_2 - s_3) - \pi_4(V_2 - \underline{V}_2 - s_4) + \\
& -\pi_5(\bar{V}_3 - V_3 - s_5) - \pi_6(V_3 - \underline{V}_3 - s_6).
\end{aligned}$$

Definem-se os limites e os parâmetros do sistema: $\bar{V}_1 = 1,1$; $\underline{V}_1 = 0,9$; $\bar{V}_2 = 1,1$;

$$\underline{V}_2 = 0,9; \overline{V}_3 = 1,1 \quad \underline{V}_3 = 0,9.$$

$$b = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 0 & -10 & 10 \\ 5 & 10 & -15 \end{bmatrix}; g = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \end{bmatrix}; \theta_1 = 0; P_2^{\text{esp}} = 1,7; P_3^{\text{esp}} = -2,0 \text{ e } Q_3^{\text{esp}} = -1$$

As estimativas iniciais para as variáveis são: $V_1 = 1,0; V_2 = 1,0; V_3 = 1,0; \lambda = 0$.

Calculam-se as variáveis s_1, s_2 e s_3 : $s_1 = -V_1 + \overline{V}_1 = 0,1; s_2 = V_1 - \underline{V}_1 = 0,1;$
 $s_3 = -V_2 + \overline{V}_2 = 0,1; s_4 = V_2 - \underline{V}_2 = 0,1; \quad s_5 = -V_3 + \overline{V}_3 = 0,1; s_6 = V_3 - \underline{V}_3 = 0,1;$
 $\theta_1 = 0; \theta_2 = 0 \text{ e } \theta_3 = 0.$

Para o sistema elétrico de 3 barras o critério de parada do método PDBM e suas variantes foram todas as restrição de igualdade serem menores do que uma precisão $\xi \leq 0,0009$ e as condições de KKT estarem satisfeitas. O multiplicador de Lagrange ρ não foi atualizado durante as iterações, pois os métodos funcionam melhor mantendo-o fixo.

5.2.1 – Resolução pelo Método Primal-Dual Barreira Modificada

Definem-se os valores iniciais dos multiplicadores de Lagrange e do parâmetro de barreira.

$$\rho_1 = 1,65; \rho_2 = 1,80; \rho_3 = 2,42; \rho_4 = 2,42; \rho_5 = 2,46; \rho_6 = 2,46; \mu = 0,65$$

$$\pi_1 = \rho_1 / ((s_1 / \mu) + 1) = 1,4300; \pi_2 = \rho_2 / ((s_2 / \mu) + 1) = 1,5600; \pi_3 = \rho_3 / ((s_3 / \mu) + 1) = 2,0973;$$

$$\pi_4 = \rho_4 / ((s_4 / \mu) + 1) = 2,0973; \pi_5 = \rho_5 / ((s_5 / \mu) + 1) = 2,1320; \pi_6 = \rho_6 / ((s_6 / \mu) + 1) = 2,1320.$$

Na sequência, os valores iniciais de todas as variáveis e parâmetros do problema são utilizados para calcular o vetor gradiente e a matriz Hessiana da Lagrangiana, respectivamente.

$$\mathbf{y}^T = [\mathbf{V}_1 \ \mathbf{V}_2 \ \mathbf{V}_3 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4 \ \pi_5 \ \pi_6 \ s_1 \ s_2 \ s_3 \ s_4 \ s_5 \ s_6]$$

$$\nabla_y \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0,1300 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1,7000 \\ 2,0000 \\ 1,0000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2,8600 \\ -3,1200 \\ -4,1947 \\ -4,1947 \\ -4,2640 \\ -4,2640 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_y^2 L = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & -4 & -5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 0 & 0 & 4 & -4 & -10 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 16 & 0 & 0 & -4 & 8 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -8 & 10 & -10 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 16 & -10 & 15 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 10 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 8 & -10 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -10 & 15 & 4 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,91 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,08 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,79 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,79 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,84 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,84 \end{pmatrix}$$

O vetor de correção (Δy) é obtido da solução do Sistema de Newton.

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 0,0240 \\ 0,0593 \\ -0,0523 \\ 0,1264 \\ 0,0010 \\ -0,0735 \\ 0,0552 \\ 0,0710 \\ -2,9057 \\ -3,0701 \\ -4,3605 \\ -4,0288 \\ -4,1153 \\ -4,4127 \\ -0,0240 \\ 0,0240 \\ -0,0593 \\ 0,0593 \\ 0,0523 \\ -0,0523 \end{bmatrix}$$

Conhecendo-se o vetor de correção, calcula-se o tamanho do passo.

Passo primal: $\alpha_p = 0,9995$

Passo Dual: $\alpha_d = 0,4807$

Atualizam-se as variáveis e obtém-se a solução da primeira iteração:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 1,0000 \\ 1,0000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,4300 \\ 1,5600 \\ 2,0973 \\ 2,0973 \\ 2,1320 \\ 2,1320 \\ 0,1000 \\ 0,1000 \\ 0,1000 \\ 0,1000 \\ 0,1000 \\ 0,1000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0240 * \alpha_p \\ 0,0593 * \alpha_p \\ -0,0523 * \alpha_p \\ 0,1264 * \alpha_p \\ 0,0010 * \alpha_p \\ -0,0735 * \alpha_d \\ 0,0552 * \alpha_d \\ 0,0710 * \alpha_d \\ -2,9057 * \alpha_d \\ -3,0701 * \alpha_d \\ -4,3605 * \alpha_d \\ -4,0288 * \alpha_d \\ -4,1153 * \alpha_d \\ -4,4127 * \alpha_d \\ -0,0240 * \alpha_p \\ 0,0240 * \alpha_p \\ -0,0593 * \alpha_p \\ 0,0593 * \alpha_p \\ 0,0523 * \alpha_p \\ -0,0523 * \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0240 \\ 1,0593 \\ 0,9477 \\ 0,1263 \\ 0,0010 \\ -0,0353 \\ 0,0265 \\ 0,0341 \\ 0,0331 \\ 0,0841 \\ 0,0010 \\ 0,1605 \\ 0,1536 \\ 0,0107 \\ 0,0760 \\ 0,1240 \\ 0,0407 \\ 0,1593 \\ 0,1523 \\ 0,0477 \end{bmatrix}$$

a) Solução do problema sem a atualização do parâmetro de barreira

A Tabela 6 apresenta o processo de convergência do método PDBM com μ fixo aplicado ao sistema de 3 barras, na qual y_1, y_2 e y_3 são as restrições de igualdade.

$$y_1 = P_2^{\text{esp}} - V_2 \sum_{i=1}^3 V_i (g_{2i} \cos \theta_{2i} + b_{2i} \sin \theta_{2i}) = 0$$

$$y_2 = P_3^{\text{esp}} - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (g_{3i} \cos \theta_{3i} + b_{3i} \sin \theta_{3i}) = 0$$

$$y_3 = Q_3^{\text{esp}} - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (g_{3i} \sin \theta_{3i} - b_{3i} \cos \theta_{3i}) = 0$$

Tabela 6 - Convergência do método PDBM com μ fixo aplicado ao sistema de 3 barras.

Ite	0	1,0000	2,0000	3,0000
FO	0	0,1360	0,1396	0,1403
V1	1,0000	1,0240	1,0516	1,0519
V2	1,0000	1,0593	1,0858	1,0847
V3	1,0000	0,9477	0,9649	0,9643
θ_2	0	0,1263	0,0941	0,0963
θ_3	0	0,0010	-0,0153	-0,0141
s_1	0,1000	0,0760	0,0484	0,0481
s_2	0,1000	0,1240	0,1516	0,1519
s_3	0,1000	0,0407	0,0142	0,0153
s_4	0,1000	0,1593	0,1858	0,1847
s_5	0,1000	0,1523	0,1351	0,1357
s_6	0,1000	0,0477	0,0649	0,0643
λ_1	0	-0,0353	-0,0353	-0,0353
λ_2	0	0,0265	0,0266	0,0266
λ_3	0	0,0341	0,0342	0,0342
π_1	1,4300	0,0331	0,0324	0,0324
π_2	1,5600	0,0841	0,0834	0,0834
π_3	2,0973	0,0010	0,0000	0,0000
π_4	2,0973	0,1605	0,1596	0,1596
π_5	2,1320	0,1536	0,1526	0,1526
π_6	2,1320	0,0107	0,0097	0,0097
ρ_1	1,6500	1,6500	1,6500	1,6500
ρ_2	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000
ρ_3	2,4200	2,4200	2,4200	2,4200
ρ_4	2,4200	2,4200	2,4200	2,4200
ρ_5	2,4600	2,4600	2,4600	2,4600
ρ_6	2,4600	2,4600	2,4600	2,4600
μ	0,6500	0,6500	0,6500	0,6500
Max(grad)		0,5618	0,5212	0,5176
y_1	1,7000	0,0587	0,0053	0,0000

Tabela 6 - Convergência do método PDBM com μ fixo aplicado ao sistema de 3 barras.

y_2	-2,0000	-0,0700	-0,0023	-0,0000
y_3	-1,0000	-0,1582	0,0010	-0,0000
α_p	0	0,9995	0,9995	0,9995
α_d	0	0,4807	0,0004	0,0000

b) Solução do problema com a atualização do parâmetro de barreira através do *gap* de dualidade

A Tabela 7 apresenta o processo de convergência do método PDBM utilizando o *gap* de dualidade aplicado ao sistema de 3 barras.

Tabela 7 - Convergência do método PDBM aplicado ao sistema de 3 barras.

Ite	0	1,0000	2,0000	3,0000
FO	0	0,1420	0,1377	0,1364
V1	1,0000	0,9940	1,0455	1,0550
V2	1,0000	1,0987	1,0946	1,0973
V3	1,0000	0,9584	0,9680	0,9743
θ_2	0	0,0823	0,0843	0,0880
θ_3	0	-0,0315	-0,0218	-0,0185
s_1	0,1000	0,1060	0,0545	0,0450
s_2	0,1000	0,0940	0,1455	0,1550
s_3	0,1000	0,0013	0,0054	0,0027
s_4	0,1000	0,1987	0,1946	0,1973
s_5	0,1000	0,1416	0,1320	0,1257
s_6	0,1000	0,0584	0,0680	0,0743
λ_1	0	0,0027	0,0026	0,0026
λ_2	0	0,0582	0,0582	0,0582
λ_3	0	0,0475	0,0475	0,0475
π_1	1,4450	0,3039	0,3035	0,3035
π_2	0,5000	0,0932	0,0931	0,0931
π_3	0,6000	0,0003	0,0000	0,0000
π_4	0,5550	0,2199	0,2197	0,2197
π_5	0,0100	0,0028	0,0028	0,0028
π_6	1,2500	0,1437	0,1434	0,1434
ρ_1	2,8900	2,8900	2,8900	2,8900
ρ_2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
ρ_3	1,2000	1,2000	1,2000	1,2000
ρ_4	1,1100	1,1100	1,1100	1,1100

Tabela 7 - Convergência do método PDBM aplicado ao sistema de 3 barras.

ρ_5	0,0200	0,0200	0,0200	0,0200
ρ_6	2,5000	2,5000	2,5000	2,5000
μ	0,1000	0,0055	0,0012	0,0010
max(grad)		0,6913	0,5928	0,6015
y_1	1,7000	-0,1395	0,0002	-0,0000
y_2	-2,0000	-0,0091	-0,0025	-0,0002
y_3	-1,0000	-0,1538	0,0027	0,0000
α_p	0	0,9995	0,9995	0,9995
α_d	0	0,4008	0,0008	0,0000

Observa-se das Tabelas 6 e 7 que o sistema converge com o mesmo número de iterações.

5.2.2 – Resolução pelo Método Primal-Dual Barreira Modificada com Preditor-Corretor

a) Solução do problema com o parâmetro de barreira não estimado

Os valores iniciais dos multiplicadores de Lagrange são definidos por:

$$\rho_1 = 2,0; \rho_2 = 1,9; \rho_3 = 1,59; \rho_4 = 2,1; \rho_5 = 2,0; \rho_6 = 2,0; \mu = 0,96; \beta = 1,05 \quad \pi_1 = 0,8; \\ \pi_2 = 0,5; \pi_3 = 0,2; \pi_4 = 0,5; \pi_5 = 0,3; \pi_6 = 0,7 .$$

Passo preditor: faz-se $\mu = 0$, desta forma a matriz Hessiana não depende do fator de barreira, podendo, assim, ser utilizada mais de uma vez.

Substituindo-se os valores iniciais no Sistema de Newton, tem-se:

O vetor das variáveis do problema.

$$y^T = [V_1 \ V_2 \ V_3 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4 \ \pi_5 \ \pi_6 \ s_1 \ s_2 \ s_3 \ s_4 \ s_5 \ s_6]$$

O vetor gradiente:

$$\nabla_y L_{pc} = \begin{bmatrix} -0,3000 \\ 0,3000 \\ 0,4000 \\ 0 \\ 0 \\ -1,7000 \\ 2,0000 \\ 1,0000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,8000 \\ 0,5000 \\ 0,2000 \\ 0,5000 \\ 0,3000 \\ 0,7000 \end{bmatrix}$$

A matriz Hessiana da Lagrangiana,

$$\nabla_y^2 L_{pc} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & -4 & -5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 0 & 0 & 4 & -4 & -10 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 16 & 0 & 0 & -4 & 8 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -8 & 10 & -10 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 16 & -10 & 15 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 10 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 8 & -10 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -10 & 15 & 4 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,68 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,55 \end{pmatrix}$$

O vetor direção de busca:

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 0,0062 \\ -0,0188 \\ -0,1054 \\ 0,1647 \\ 0,0293 \\ -0,1292 \\ 0,0052 \\ 0,0651 \\ 0,7700 \\ 0,5230 \\ 0,2329 \\ 0,4283 \\ 0,5688 \\ 0,2204 \\ -0,0062 \\ 0,0062 \\ 0,0188 \\ -0,0188 \\ 0,1054 \\ -0,1054 \end{bmatrix}$$

Passo corretor: Resolve-se novamente o sistema de Newton com $\mu \neq 0$. Nesse passo, o vetor gradiente é modificado. Termos não lineares são acrescentados resultando no novo vetor dado por:

$$\nabla_y L_{pc} = \begin{bmatrix} -0,3000 \\ 0,3000 \\ 0,4000 \\ 0 \\ 0 \\ -1,7000 \\ 2,0000 \\ 1,0000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,0594 \\ -0,1881 \\ -0,1962 \\ -0,4825 \\ 0,0882 \\ -0,3436 \end{bmatrix}$$

Utiliza-se a mesma matriz de fatoração e obtém-se o novo vetor de correção.

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 0,0413 \\ 0,0683 \\ -0,0399 \\ 0,1317 \\ 0,0049 \\ -0,0799 \\ 0,0509 \\ 0,0735 \\ -0,2577 \\ -0,0359 \\ -0,3156 \\ -0,2224 \\ 0,1899 \\ -0,5250 \\ -0,0413 \\ 0,0413 \\ -0,0683 \\ 0,0683 \\ 0,0399 \\ -0,0399 \end{bmatrix}$$

Conhecendo-se o vetor de correção, calcula-se o tamanho do passo.

Passo primal: $\alpha_p = 0,9995$

Passo dual: $\alpha_d = 0,6335$

Atualizam-se as variáveis e obtém-se a solução da primeira iteração:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 1,0000 \\ 1,0000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,8000 \\ 0,5000 \\ 0,2000 \\ 0,5000 \\ 0,3000 \\ 0,7000 \\ 0,1000 \\ 0,1000 \\ 0,1000 \\ 0,1000 \\ 0,1000 \\ 0,1000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0413 * \alpha_p \\ 0,0683 * \alpha_p \\ -0,0399 * \alpha_p \\ 0,1317 * \alpha_p \\ 0,0049 * \alpha_p \\ -0,0799 * \alpha_d \\ 0,0509 * \alpha_d \\ 0,0735 * \alpha_d \\ -0,2577 * \alpha_d \\ -0,0359 * \alpha_d \\ -0,3156 * \alpha_d \\ -0,2224 * \alpha_d \\ 0,1899 * \alpha_d \\ -0,5250 * \alpha_d \\ -0,0413 * \alpha_p \\ 0,0413 * \alpha_p \\ -0,0683 * \alpha_p \\ 0,0683 * \alpha_p \\ 0,0399 * \alpha_p \\ -0,0399 * \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0413 \\ 1,0682 \\ 0,9602 \\ 0,1316 \\ 0,0049 \\ -0,0506 \\ 0,0322 \\ 0,0466 \\ 0,6368 \\ 0,4772 \\ 0,0001 \\ 0,3591 \\ 0,4203 \\ 0,3674 \\ 0,0587 \\ 0,1413 \\ 0,0318 \\ 0,1682 \\ 0,1398 \\ 0,0602 \end{bmatrix}$$

A Tabela 8 apresenta o processo de convergência do método PDBM com Preditor-Corretor com μ fixo aplicado ao sistema de 3 barras.

Tabela 8 - Convergência do método PDBM-PC com μ fixo aplicado ao sistema de 3 barras.

Ite	0	1,0000	2,0000	3,0000
FO	0	0,1389	0,1384	0,1391
V1	1,0000	1,0413	1,0462	1,0487
V2	1,0000	1,0682	1,0891	1,0886
V3	1,0000	0,9602	0,9649	0,9655
θ_2	0	0,1316	0,0890	0,0909
θ_3	0	0,0049	-0,0189	-0,0177
s_1	0,1000	0,0587	0,0538	0,0513
s_2	0,1000	0,1413	0,1462	0,1487
s_3	0,1000	0,0318	0,0109	0,0114

Tabela 8 - Convergência do método PDBM-PC com μ fixo aplicado ao sistema de 3 barras.

s_4	0,1000	0,1682	0,1891	0,1886
s_5	0,1000	0,1398	0,1351	0,1345
s_6	0,1000	0,0602	0,0649	0,0655
λ_1	0	-0,0506	-0,0506	-0,0506
λ_2	0	0,0322	0,0323	0,0323
λ_3	0	0,0466	0,0466	0,0466
π_1	0,8000	0,6368	0,6367	0,6367
π_2	0,5000	0,4772	0,4772	0,4772
π_3	0,2000	0,0001	0,0000	0,0000
π_4	0,5000	0,3591	0,3590	0,3590
π_5	0,3000	0,4203	0,4202	0,4202
π_6	0,7000	0,3674	0,3673	0,3673
ρ_1	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000
ρ_2	1,9000	1,9000	1,9000	1,9000
ρ_3	1,5900	1,5900	1,5900	1,5900
ρ_4	2,1000	2,1000	2,1000	2,1000
ρ_5	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000
ρ_6	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000
μ	0,9600	0,9600	0,9600	0,9600
Max(grad)	100,00	0,4340	0,5132	0,5047
y_1	1,7000	-0,0906	0,0029	-0,0000
y_2	-2,0000	-0,0350	-0,0050	-0,0000
y_3	-1,0000	-0,1536	-0,0010	0,0000
α_p	0	0,9995	0,9995	0,9995
α_d	0	0,6335	0,0002	0,0000

b) Solução do problema com parâmetro de barreira estimado através do *gap* de dualidade

A Tabela 9 apresenta o processo de convergência do método PDBM com Preditor-Corretor aplicado ao sistema de 3 barras.

Tabela 9 - Convergência do método PDBM-PC aplicado ao sistema de 3 barras.

Ite	0	1,0000	2,0000	3,0000
FO	0	0,1406	0,1378	0,1384
V1	1,0000	1,0506	1,0498	1,0500
V2	1,0000	1,0735	1,0906	1,0907
V3	1,0000	0,9671	0,9677	0,9675

Tabela 9 - Convergência do método PDBM-PC aplicado ao sistema de 3 barras.

θ_2	0	0,1342	0,0906	0,0901
θ_3	0	0,0069	-0,0174	-0,0180
s_1	0,1000	0,0494	0,0502	0,0500
s_2	0,1000	0,1506	0,1498	0,1500
s_3	0,1000	0,0265	0,0094	0,0093
s_4	0,1000	0,1735	0,1906	0,1907
s_5	0,1000	0,1329	0,1323	0,1325
s_6	0,1000	0,0671	0,0677	0,0675
λ_1	0	-0,1222	-0,1216	-0,2312
λ_2	0	-0,0995	-0,1874	-0,5015
λ_3	0	-0,1151	-0,2669	-0,6398
π_1	1,5000	3,6421	7,6797	16,4942
π_2	0,9000	2,0222	5,0056	10,7983
π_3	0,8000	1,3365	4,6115	10,7348
π_4	1,7200	0,0009	0,9315	2,7325
π_5	1,5500	2,6097	6,2017	13,1632
π_6	2,5000	5,9784	12,0942	25,4983
ρ_1	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
ρ_2	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
ρ_3	0,3000	0,3000	0,3000	0,3000
ρ_4	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
ρ_5	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
ρ_6	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
μ	0,0200	0,0200	0,0282	0,0667
max(grad)	100,00	2,6430	6,7118	12,8155
y_1	1,7000	-0,1090	0,0017	0,0000
y_2	-2,0000	-0,0153	-0,0053	-0,0000
y_3	-1,0000	-0,1510	-0,0016	-0,0000
α_p	0	0,9995	0,9995	0,9995
α_d	0	0,6747	0,9995	0,9995

5.2.3 – Resolução pelo Método Primal-Dual Barreira Modificada com Newton composto

a) Solução do problema o parâmetro de barreira não estimado

Os valores iniciais dos multiplicadores de Lagrange são definidos por:

$$\rho_1 = 2,1; \rho_2 = 1,9; \quad \rho_3 = 1,4; \rho_4 = 2,0; \rho_5 = 1,8; \quad \rho_6 = 2,1; \mu = 0,46; \beta = 1,05; \quad \pi_1 = 0,8;$$

$$\pi_1 = 0,8; \quad \pi_2 = 0,4; \quad \pi_3 = 0,45; \quad \pi_4 = 0,4; \quad \pi_5 = 0,2; \quad \pi_6 = 0,8.$$

Substituindo-se os valores iniciais no Sistema de Newton, tem-se:

O vetor das variáveis do problema.

$$y^T = [V_1 \ V_2 \ V_3 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4 \ \pi_5 \ \pi_6 \ s_1 \ s_2 \ s_3 \ s_4 \ s_5 \ s_6]$$

Passo preditor: faz-se $\mu = 0$, como a matriz Hessiana da Lagrangiana não depende do fator de barreira, pode ser utilizada mais de uma vez. Nos próximos passos calculam-se $\nabla_y L_{pc}$, $\nabla_y^2 L_{pc}$ e obtém-se Δy .

$$\nabla_y L_{pc} = \begin{bmatrix} -0,4000 \\ -0,0500 \\ 0,6000 \\ 0 \\ 0 \\ -1,7000 \\ 2,0000 \\ 1,0000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,8000 \\ 0,4000 \\ 0,4500 \\ 0,4000 \\ 0,2000 \\ 0,8000 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_y^2 L_{\text{pc}} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & -4 & -5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 0 & 0 & 4 & -4 & -10 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 16 & 0 & 0 & -4 & 8 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -8 & 10 & -10 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 16 & -10 & 15 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 10 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 8 & -10 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -10 & 15 & 4 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,95 \end{pmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 0,0176 \\ 0,0158 \\ -0,0804 \\ 0,1500 \\ 0,0184 \\ -0,1228 \\ -0,0056 \\ 0,0299 \\ 0,7128 \\ 0,4556 \\ 0,4019 \\ 0,4504 \\ 0,3430 \\ 0,4016 \\ -0,0176 \\ 0,0176 \\ -0,0158 \\ 0,0158 \\ 0,0804 \\ -0,0804 \end{bmatrix}$$

Passo corretor: Resolve-se, novamente, o sistema de Newton com $\mu \neq 0$. Nesse passo, o vetor gradiente é modificado, termos não lineares são acrescentados. Realizaram-se testes com mais de dois passos corretores e observou-se que os melhores resultados foram obtidos com duas correções. O novo vetor gradiente é dado por:

$$\Delta_y \mathbf{L}_{pc} = \begin{bmatrix} -0,4000 \\ -0,0500 \\ 0,6000 \\ 0 \\ 0 \\ -1,7000 \\ 2,0000 \\ 1,0000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0678 \\ -0,1786 \\ 0,2244 \\ -0,2489 \\ -0,3664 \\ 0,1023 \end{bmatrix}$$

Utiliza-se a mesma matriz de fatoração e obtém-se o vetor de correção:

$$\Delta y_{pc} = \begin{bmatrix} 0,0214 \\ 0,0510 \\ -0,0582 \\ 0,1300 \\ 0,0037 \\ -0,0978 \\ 0,0124 \\ 0,0229 \\ -0,0382 \\ -0,1110 \\ 0,0686 \\ -0,0856 \\ -0,2629 \\ -0,1859 \\ -0,0214 \\ 0,0214 \\ -0,0510 \\ 0,0510 \\ 0,0582 \\ -0,0582 \end{bmatrix}$$

Conhecendo-se o vetor de correção calcula-se o tamanho do passo.

Passo primal: $\alpha_p = 0,9995$

Passo dual: $\alpha_d = 0,7602$

Atualizam-se as variáveis e obtém-se a solução da primeira iteração:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 1,0000 \\ 1,0000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,8000 \\ 0,4000 \\ 0,4500 \\ 0,4000 \\ 0,2000 \\ 0,8000 \\ 0,1000 \\ 0,1000 \\ 0,1000 \\ 0,1000 \\ 0,1000 \\ 0,1000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0214 * \alpha_p \\ 0,0510 * \alpha_p \\ -0,0582 * \alpha_p \\ 0,1300 * \alpha_p \\ 0,0037 * \alpha_p \\ -0,0978 * \alpha_d \\ 0,0124 * \alpha_d \\ 0,0229 * \alpha_d \\ -0,0382 * \alpha_d \\ -0,1110 * \alpha_d \\ 0,0686 * \alpha_d \\ -0,0856 * \alpha_d \\ -0,2629 * \alpha_d \\ -0,1859 * \alpha_d \\ -0,0214 * \alpha_p \\ 0,0214 * \alpha_p \\ -0,0510 * \alpha_p \\ 0,0510 * \alpha_p \\ 0,0582 * \alpha_p \\ -0,0582 * \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0214 \\ 1,0510 \\ 0,9418 \\ 0,1299 \\ 0,0037 \\ -0,0743 \\ 0,0094 \\ 0,0174 \\ 0,7709 \\ 0,3156 \\ 0,5021 \\ 0,3349 \\ 0,0001 \\ 0,6587 \\ 0,0786 \\ 0,1214 \\ 0,0490 \\ 0,1510 \\ 0,1582 \\ 0,0418 \end{bmatrix}$$

A Tabela 10 apresenta o processo de convergência do método PDBM com Newton Composto sem atualização de μ aplicado ao sistema de 3 barras. Testes com mais de dois passos corretores foram realizados e observou-se que os melhores resultados foram obtidos com três correções.

Tabela 10 - Convergência do método PDBM-NC com μ fixo aplicado ao sistema de 3 barras.

Ite	0	1,0000	2,0000	3,0000
FO	0	0,1361	0,1383	0,1380
V1	1,0000	1,0214	1,0545	1,0546
V2	1,0000	1,0510	1,0893	1,0919
V3	1,0000	0,9418	0,9686	0,9704
θ_2	0	0,1299	0,0926	0,0922
θ_3	0	0,0037	-0,0157	-0,0161
s_1	0,1000	0,0786	0,0455	0,0454

Tabela 10 - Convergência do método PDBM-NC com μ fixo aplicado ao sistema de 3 barras.

s_2	0,1000	0,1214	0,1545	0,1546
s_3	0,1000	0,0490	0,0107	0,0081
s_4	0,1000	0,1510	0,1893	0,1919
s_5	0,1000	0,1582	0,1314	0,1296
s_6	0,1000	0,0418	0,0686	0,0704
λ_1	0	-0,0743	-0,0743	-0,0743
λ_2	0	0,0094	0,0094	0,0094
λ_3	0	0,0174	0,0174	0,0174
π_1	0,8000	0,7709	0,7709	0,7709
π_2	0,4000	0,3156	0,3155	0,3155
π_3	0,4500	0,5021	0,5021	0,5021
π_4	0,4000	0,3349	0,3349	0,3349
π_5	0,2000	0,0001	0,0000	0,0000
π_6	0,8000	0,6587	0,6586	0,6586
ρ_1	2,1000	2,1000	2,1000	2,1000
ρ_2	1,9000	1,9000	1,9000	1,9000
ρ_3	1,4000	1,4000	1,4000	1,4000
ρ_4	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000
ρ_5	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000
ρ_6	2,1000	2,1000	2,1000	2,1000
μ	0,4600	0,4600	0,4600	0,4600
max(grad)		0,2320	0,2494	0,2021
y_1	1,7000	-0,0368	0,0086	-0,0000
y_2	-2,0000	-0,0919	-0,0038	-0,0000
y_3	-1,0000	-0,1601	0,0022	-0,0000
α_p	0	0,9995	0,9995	0,9995
α_d	0	0,7602	0,0003	0,0000

b) Solução do problema com parâmetro de barreira estimado através do *gap* de dualidade

A Tabela 11 apresenta o processo de convergência do método PDBM com Newton Composto aplicado ao sistema de 3 barras. Utilizaram-se dois passos corretores e verificou-se que o aumento desses passos não altera a convergência.

Tabela 11 - Convergência do método PDBM-NC aplicado ao sistema de 3 barras.

Ite	0	1,0000	2,0000	3,0000	4.0000
FO	0	0,0473	0,0517	0,1287	0.1363
V1	1,0000	0,9795	0,9851	1,0461	1.0481
V2	1,0000	1,0999	1,1000	1,1000	1.1000
V3	1,0000	1,0149	1,0076	0,9764	0.9729
θ_2	0	-0,0225	-0,0094	0,0853	0.0811
θ_3	0	-0,0501	-0,0477	-0,0189	-0.0235
s_1	0,1000	0,1205	0,1149	0,0539	0.0519
s_2	0,1000	0,0795	0,0851	0,1461	0.1481
s_3	0,1000	0,0000	0,0000	0,0000	0.0000
s_4	0,1000	0,1999	0,2000	0,2000	0.2000
s_5	0,1000	0,0851	0,0924	0,1236	0.1271
s_6	0,1000	0,1149	0,1076	0,0764	0.0729
λ_1	0	0,1814	-0,0625	-0,0354	-0.0472
λ_2	0	0,3439	-0,0639	0,0398	0.0135
λ_3	0	0,3770	-0,0980	0,0024	-0.0293
π_1	1,9000	2,2844	3,1148	6,5710	8.7807
π_2	6,5000	9,4155	4,5456	6,2177	8.1448
π_3	2,9000	4,5385	13,8432	25,4016	32.9868
π_4	4,3000	9,7326	12,9030	24,8441	32.0516
π_5	8,1000	11,1946	0,0056	0,0412	0.0000
π_6	3,5000	0,0017	0,1961	0,9591	1.5531
ρ_1	1,5500	1,5500	1,5500	1,5500	1.5500
ρ_2	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000	2.0000
ρ_3	1,2000	1,2000	1,2000	1,2000	1.2000
ρ_4	7,1100	7,1100	7,1100	7,1100	7.1100
ρ_5	2,1800	2,1800	2,1800	2,1800	2.1800
ρ_6	0,2100	0,2100	0,2100	0,2100	0.2100
μ	0,0617	0,0617	0,0890	0,0759	0.1431
max(grad)		23,7512	8,5497	13,8026	25.2532
y_1	1,7000	1,0158	0,8662	0,0155	0.0000
y_2	-2,0000	-1,2481	-1,0652	-0,0552	-0.0003
y_3	-1,0000	-0,6494	-0,5547	-0,0354	-0.0002
α_p	0	0,3626	0,1479	0,9995	0.9995
α_d	0	0,1910	0,3711	0,9995	0.3150

Nota-se das Tabelas 10 e 11 que a atualização do parâmetro de barreira não alterou a convergência do método PDBM com Newton Composto.

5.3 – SISTEMA ELÉTRICO DE 30 BARRAS

O problema de PNL associado ao sistema elétrico de 30 barras é composto por uma função objetivo, 53 restrições de igualdade, 30 restrições de desigualdade, 204 variáveis e a ordem do vetor gradiente é de 172. As variáveis são: 30 do tipo V, 29 do tipo θ , 53 λ , 30 π , 30 ρ , 1 μ e 1 β . Devido às dimensões desse sistema não será apresentada à formulação do problema. Definem-se os limites: $\bar{V}_i = 1,1$; $\underline{V}_i = 0,95$ $i = 1,2,\dots,30$ e os parâmetros g e b do sistema são apresentados nas Tabelas 12 e 13, respectivamente. Os elementos das matrizes g e b que não aparecem nas tabelas são nulos.

Tabela 12 – Parâmetro g do sistema elétrico de 30 barras.

$g_{11}=6,469$	$g_{76}=3,590$	$g_{1415}=2,491$	$g_{2323}=3,429$
$g_{12}=5,225$	$g_{77}=6,544$	$g_{1514}=2,491$	$g_{2324}=1,461$
$g_{13}=1,244$	$g_{86}=6,289$	$g_{1515}=8,758$	$g_{2422}=2,541$
$g_{21}=5,225$	$g_{88}=7,733$	$g_{1518}=1,808$	$g_{2423}=1,461$
$g_{22}=9,754$	$g_{828}=1,444$	$g_{1523}=1,968$	$g_{2424}=5,312$
$g_{24}=1,706$	$g_{96}=0$	$g_{1612}=1,952$	$g_{2425}=1,310$
$g_{25}=1,686$	$g_{99}=0,0012$	$g_{1616}=3,835$	$g_{2524}=1,310$
$g_{26}=1,136$	$g_{910}=0,001$	$g_{1617}=1,883$	$g_{2525}=4,497$
$g_{31}=1,244$	$g_{911}=0,0002$	$g_{1710}=3,956$	$g_{2526}=1,217$
$g_{33}=9,439$	$g_{106}=0$	$g_{1716}=1,883$	$g_{2527}=1,970$
$g_{34}=8,195$	$g_{109}=0,001$	$g_{1717}=5,839$	$g_{2625}=1,217$
$g_{42}=1,706$	$g_{1010}=13,464$	$g_{1815}=1,808$	$g_{2626}=1,217$
$g_{43}=8,195$	$g_{1017}=3,956$	$g_{1818}=4,884$	$g_{2725}=1,970$
$g_{44}=16,314$	$g_{1020}=1,785$	$g_{1819}=3,076$	$g_{2727}=3,654$
$g_{46}=6,413$	$g_{1021}=5,102$	$g_{1918}=3,076$	$g_{2728}=0$
$g_{412}=0$	$g_{1022}=2,620$	$g_{1919}=5,882$	$g_{2729}=0,996$
$g_{52}=1,686$	$g_{119}=0,0002$	$g_{1920}=8,958$	$g_{2730}=0,688$
$g_{55}=4,640$	$g_{1111}=0,0002$	$g_{2010}=1,785$	$g_{286}=4,363$
$g_{57}=2,954$	$g_{124}=0$	$g_{2019}=5,882$	$g_{288}=1,444$
$g_{62}=1,136$	$g_{1212}=6,574$	$g_{2020}=10,743$	$g_{2827}=0$
$g_{64}=6,413$	$g_{1213}=0$	$g_{2110}=5,102$	$g_{2828}=5,807$
$g_{66}=22,705$	$g_{1214}=1,527$	$g_{2121}=21,877$	$g_{2927}=0,996$
$g_{67}=3,590$	$g_{1215}=3,095$	$g_{2122}=16,775$	$g_{2929}=1,908$
$g_{68}=6,289$	$g_{1216}=1,952$	$g_{2210}=2,620$	$g_{2930}=0,912$
$g_{69}=0$	$g_{1312}=0$	$g_{2221}=16,775$	$g_{3027}=0,688$
$g_{610}=0$	$g_{1313}=0$	$g_{2222}=21,936$	$g_{3029}=0,912$
$g_{628}=4,363$	$g_{1412}=1,527$	$g_{2224}=2,541$	$g_{3030}=1,600$
$g_{75}=2,954$	$g_{1414}=0$	$g_{2315}=1,968$	

Tabela 13 – Parâmetro b do sistema elétrico de 30 barras.

b ₁₁ = -20,743	b ₇₆ = -11,026	b ₁₄₁₅ = -2,251	b ₂₃₂₃ = -6,965
b ₁₂ = -15,647	b ₇₇ = -18,475	b ₁₅₁₄ = -2,251	b ₂₃₂₄ = -2,989
b ₁₃ = -5,096	b ₈₆ = -22,013	b ₁₅₁₅ = -9,918	b ₂₄₂₂ = -3,954
b ₂₁ = -15,647	b ₈₈ = -26,554	b ₁₅₁₈ = -3,691	b ₂₄₂₃ = -2,989
b ₂₂ = -30,732	b ₈₂₈ = -4,541	b ₁₅₂₃ = -3,976	b ₂₄₂₄ = -9,231
b ₂₄ = -5,197	b ₉₆ = -4,807	b ₁₆₁₂ = -4,104	b ₂₄₂₅ = -2,288
b ₂₅ = -4,772	b ₉₉ = -18,706	b ₁₆₁₆ = -8,497	b ₂₅₂₄ = -2,288
b ₂₆ = -5,116	b ₉₁₀ = -9,091	b ₁₆₁₇ = -4,393	b ₂₅₂₅ = -7,865
b ₃₁ = -5,096	b ₉₁₁ = -4,808	b ₁₇₁₀ = -10,317	b ₂₅₂₆ = -1,817
b ₃₃ = -28,627	b ₁₀₆ = -1,799	b ₁₇₁₆ = -4,393	b ₂₅₂₇ = -3,760
b ₃₄ = -23,531	b ₁₀₉ = -9,091	b ₁₇₁₇ = -14,710	b ₂₆₂₅ = -1,817
b ₄₂ = -5,197	b ₁₀₁₀ = -41,574	b ₁₈₁₅ = -3,691	b ₂₆₂₆ = -1,817
b ₄₃ = -23,531	b ₁₀₁₇ = -10,317	b ₁₈₁₈ = -9,910	b ₂₇₂₅ = -3,760
b ₄₄ = -54,945	b ₁₀₂₀ = -3,985	b ₁₈₁₉ = -6,219	b ₂₇₂₇ = -9,460
b ₄₆ = -22,311	b ₁₀₂₁ = -10,981	b ₁₉₁₈ = -6,219	b ₂₇₂₈ = -2,525
b ₄₁₂ = -3,906	b ₁₀₂₂ = -5,401	b ₁₉₁₉ = -17,984	b ₂₇₂₉ = -1,881
b ₅₂ = -4,772	b ₁₁₉ = -4,808	b ₁₉₂₀ = -11,765	b ₂₇₃₀ = -1,294
b ₅₅ = -12,221	b ₁₁₁₁ = -4,808	b ₂₀₁₀ = -3,985	b ₂₈₆ = -15,463
b ₅₇ = -7,449	b ₁₂₄ = -3,906	b ₂₀₁₉ = -11,765	b ₂₈₈ = -4,541
b ₆₂ = -5,116	b ₁₂₁₂ = -24,708	b ₂₀₂₀ = -15,750	b ₂₈₂₇ = -2,525
b ₆₄ = -22,311	b ₁₂₁₃ = -7,428	b ₂₁₁₀ = -10,981	b ₂₈₂₈ = -22,529
b ₆₆ = -82,535	b ₁₂₁₄ = -3,173	b ₂₁₂₁ = -45,109	b ₂₉₂₇ = -1,881
b ₆₇ = -11,026	b ₁₂₁₅ = -6,097	b ₂₁₂₂ = -34,128	b ₂₉₂₉ = -3,604
b ₆₈ = -22,013	b ₁₂₁₆ = -4,104	b ₂₂₁₀ = -5,401	b ₂₉₃₀ = -1,723
b ₆₉ = -4,807	b ₁₃₁₂ = -7,428	b ₂₂₂₁ = -34,128	b ₃₀₂₇ = -1,294
b ₆₁₀ = -1,799	b ₁₃₁₃ = -7,428	b ₂₂₂₂ = -43,483	b ₃₀₂₉ = -1,723
b ₆₂₈ = -15,463	b ₁₄₁₂ = -3,173	b ₂₂₂₄ = -3,954	b ₃₀₃₀ = -3,017
b ₇₅ = -7,449	b ₁₄₁₄ = -5,424	b ₂₃₁₅ = -3,976	

As estimativas iniciais para V e θ , e os parâmetros P^{esp} e Q^{esp} do sistema são:

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{c} V = \\ \left[\begin{array}{c} 1,053 \\ 1,032 \\ 1,018 \\ 1,010 \\ 1,010 \\ 1,004 \\ 0,998 \\ 1,010 \\ 1,017 \\ 1,015 \\ 1,072 \\ 1,019 \\ 1,057 \\ 1,005 \\ 1,001 \\ 1,010 \\ 1,008 \\ 0,994 \\ 0,992 \\ 0,997 \\ 1,003 \\ 1,004 \\ 0,994 \\ 0,994 \\ 1,001 \\ 0,983 \\ 1,013 \\ 0,997 \\ 0,993 \\ 0,982 \end{array} \right] \end{array} & ; \quad \theta = & \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 0,0 \\ -0,09 \\ -0,14 \\ -0,17 \\ -0,25 \\ -0,20 \\ -0,23 \\ -0,21 \\ -0,26 \\ -0,29 \\ -0,26 \\ -0,27 \\ -0,27 \\ -0,29 \\ -0,29 \\ -0,29 \\ -0,29 \\ -0,30 \\ -0,31 \\ -0,30 \\ -0,30 \\ -0,29 \\ -0,30 \\ -0,30 \\ -0,29 \\ -0,30 \\ -0,28 \\ -0,21 \\ -0,31 \\ -0,32 \end{array} \right] \end{array} & ; \quad P^{\text{esp}} = & \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 0,000 \\ 0,183 \\ -0,024 \\ -0,076 \\ -0,942 \\ 0,000 \\ -0,228 \\ -0,300 \\ 0,000 \\ -0,058 \\ 0,000 \\ -0,112 \\ 0,000 \\ -0,062 \\ -0,082 \\ -0,035 \\ -0,090 \\ -0,032 \\ -0,095 \\ -0,022 \\ -0,175 \\ 0,000 \\ -0,032 \\ -0,087 \\ 0,000 \\ -0,035 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ -0,024 \\ -0,106 \end{array} \right] \end{array} & \text{e} \quad Q^{\text{esp}} = & \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 0,000 \\ 0,000 \\ -0,012 \\ -0,016 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ -0,109 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ -0,020 \\ 0,000 \\ -0,075 \\ 0,000 \\ -0,016 \\ -0,025 \\ -0,018 \\ -0,058 \\ -0,090 \\ -0,034 \\ -0,007 \\ -0,112 \\ 0,000 \\ -0,016 \\ -0,067 \\ 0,000 \\ -0,023 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ -0,009 \\ -0,020 \end{array} \right] \end{array}
\end{array}$$

As variáveis de excesso associadas ao limite superior (s_s) e inferior (s_i) são calculadas por: $s_{si} = -V_i + 1,1$; $s_{fi} = V_i - 0,95$; $i = 1,2,\dots,30$.

Para o sistema elétrico de 30 barras o critério de parada do MPDBM e de suas variantes foram todas as restrições de igualdade serem menores do que uma precisão

$\xi \leq 0,0009$ e as condições de KKT estarem satisfeitas. O multiplicador de Lagrange ρ não foi atualizado durante as iterações, pois os métodos funcionam melhor mantendo-o fixo.

5.3.1 – Resolução pelo Método Primal-Dual Barreira Modificada

Os valores iniciais dos multiplicadores de Lagrange relacionados com as restrições de igualdade e desigualdade foram, respectivamente, $\lambda = 0$, $\pi = 1,0$. As estimativas dos multiplicadores de Lagrange relacionados com a função barreira modificada $\rho = 5$. O parâmetro de barreira inicial foi definido como $\mu = 0,1$ e seu fator de correção como $\beta = 5,5$.

O processo de otimização convergiu em 6 iterações e o valor da função objetivo foi de 0,1668. O processo de otimização está resumido na Tabela 14, na qual y_1 representa a restrição de igualdade com maior erro na iteração.

Tabela 14 - Convergência do método PDBM aplicado ao sistema de 30 barras.

Ite	0	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000	5,0000	6,0000
FO	0,0144	0,1105	0,1124	0,1674	0,1681	0,1672	0,1668
y_1	0,4191	0,0362	0,0349	0,0030	0,0011	0,0002	0,0000
α_p	0	0,7600	0,0400	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995
α_d	0	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995	0,5000

A Figura 7 apresenta o processo de convergência das restrições de igualdade do problema associado ao sistema elétrico de 30 barras.

Figura 7 – Convergência das restrições de igualdade do sistema de 30 barras para o MPDBM.

5.3.2 – Resolução pelo Método Primal-Dual Barreira Modificada com Preditor-Corretor

Os valores iniciais dos multiplicadores de Lagrange relacionados com as restrições de igualdade e desigualdade foram, respectivamente, $\lambda = 0$, $\pi = 1,0$. As estimativas dos multiplicadores de Lagrange relacionados com a função barreira modificada $\rho = 5$. O parâmetro de barreira inicial foi definido como $\mu = 0,1$ e seu fator de correção como $\beta = 5,5$.

O processo de otimização convergiu em 4 iterações e o valor da função objetivo foi de 0,1669. O processo de otimização está resumido na Tabela 15.

Tabela 15 - Convergência do método PDBM-PC aplicado ao sistema de 30 barras.

Ite	0	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000
FO	0,0144	0,1027	0,1661	0,1679	0,1669
y_1	0,4191	0,0490	0,0040	0,0003	0,0002
α_p	0	0,7300	0,9995	0,9995	0,9995
α_d	0	0,9995	0,9995	0,9995	0,5600

A Figura 8 apresenta os valores da restrição de igualdade com maior erro durante o processo de convergência do problema associado ao sistema elétrico de 30 barras.

Figura 8 – Convergência das restrições de igualdade do sistema de 30 barras para o MPDBM-PC.

5.3.3 – Resolução pelo Método Primal-Dual Barreira Modificada com Newton composto

Os valores iniciais dos multiplicadores de Lagrange relacionados com as restrições de igualdade e desigualdade foram, respectivamente, $\lambda = 0$, $\pi = 2,5$. As estimativas dos multiplicadores de Lagrange relacionados com a função barreira modificada $\rho = 5$. O parâmetro de barreira inicial foi definido como $\mu = 0,05$ e seu fator de correção como $\beta = 7,0$.

O processo de otimização convergiu em 4 iterações e o valor da função objetivo foi de 0,1668. O processo de otimização está resumido na Tabela 16.

Tabela 16 - Convergência do método PDBM-NC aplicado ao sistema de 30 barras.

Ite	0	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000
FO	0,0144	0,0174	0,1729	0,1668	0,1668
y_1	0,9360	0,8150	0,0444	0,0016	0,0000
α_p	0	0,1296	0,9995	0,9995	0,9995
α_d	0	0,9993	0,9995	0,9995	0,9995

A Figura 9 mostra os valores da restrição de igualdade com maior erro durante o processo de convergência do sistema elétrico de 30 barras.

Figura 9 – Convergência das restrições de igualdade do sistema de 30 barras para o MPDBM-NC.

A Figura 10 apresenta os valores da FO durante o processo de convergência do problema associado ao sistema elétrico de 30 barras para os MPDBM, MPDBM-PC e MPDBM-NC.

Figura 10 – Comparação da convergência da FO do sistema de 30 barras para os métodos apresentados.

Em todos os exemplos apresentados, os métodos estudados tiveram um bom desempenho computacional, convergindo com poucas iterações e para valores da função objetivo coerentes aos problemas. Assim, com base nos resultados obtidos, pode-se afirmar que os MPDBM, MPDBM-PC e MPDBM-NC são eficientes na solução de problemas de PNL.

CONCLUSÕES

Neste trabalho estudou-se o Método Primal-Dual Barreira Modificada com os Métodos de Newton, Preditor-Corretor e Newton Composto e verificou-se o desempenho desses métodos aplicados a problemas de programação não-linear.

Inicialmente, os Métodos da Função Penalidade, da Função Barreira e dos Pontos Interiores Primal-Dual para resolver problemas de PNL foram apresentados. Na seqüência foi realizado um estudo dos Métodos da Função Barreira e Primal-Dual Barreira Modificada com os Métodos de Newton, Preditor-Corretor e de Newton Composto.

Para a resolução dos problemas de PNL estudados, as restrições canalizadas foram transformadas em igualdades através da adição de variáveis de excesso. No MPI Primal-Dual estas variáveis de excesso foram acrescentadas à função objetivo através da função barreira logarítmica. As restrições de igualdade foram incorporadas à função Lagrangiana através dos multiplicadores de Lagrange. No MPDBM as variáveis auxiliares são relaxadas usando o parâmetro de barreira μ , conforme Polyak (1992) e obtém-se o problema modificado, associa-se, a este, uma função Lagrangiana denominada função Lagrangiana barreira modificada. Para os dois métodos aplicam-se as condições necessárias de primeira-ordem à função Lagrangiana, resultando em um sistema não-linear resolvido pelos Métodos de Newton, Preditor-Corretor e Newton Composto.

No Método Preditor-Corretor calculam-se direções de buscas mais eficientes, resolvendo dois sistemas de equações lineares em cada iteração. As duas soluções dos sistemas lineares, as quais são determinadas através de um passo preditor e um corretor, envolvem a mesma matriz dos coeficientes, porém o vetor que fica do lado direito do sistema é diferente. Logo, somente uma fatorização da matriz e um pequeno cálculo

adicional são necessários no passo corretor. No Método de Newton Composto executam-se dois ou mais passos corretores a cada iteração com a intenção de realizar menos iterações que o Método Preditor-Corretor.

Os MPDBM, MPDBM-PC, MPDBM-NC foram aplicados a um problema de PNL e aos sistemas elétricos de três e de trinta barras apresentando um bom desempenho computacional.

Todos os métodos estudados exigem que o usuário forneça estimativas iniciais para o parâmetro de barreira, seu fator de correção e para as estimativas dos multiplicadores de Lagrange. Verificou-se que os algoritmos são muito sensíveis quanto à escolha destes parâmetros e multiplicadores, podendo não satisfazer todas as restrições do problema ou, até, divergir para valores não adequados ao problema.

Como perspectivas para continuidade deste trabalho sugerem-se alguns estudos:

- Regras especiais para a inicialização e outras para a correção do parâmetro de barreira;
- Proposta de novas regras de ajuste nos passos primais e duais utilizados;
- Regras especiais para a inicialização e a atualização dos multiplicadores de Lagrange associados à função barreira modificada;
- Realização de testes mais elaborados com outros problemas de PNL.

REFERÊNCIAS

BAPTISTA, E.C. (2001). Método da Função Lagrangiana Aumentada-Barreira Logarítmica Para Solução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo. São Carlos. 175p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo.

BAZARAA, M.S.; SHERALI, H.D.; SHETTY, C.M. (1993). Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. 2.ed. New York, John Wiley.

CARROL, C.W. (1961). The Created Response Surface Thecnique for Optimizing Nonlinear Restrained Systems. *Operations Research*, v. 9, p. 169-184.

DOMMEL, H.W.; TINNEY, W.F. (1968). Optimal Power Flow Solutions. *IEEE Trans. on PAS.*, v. 87, p. 1866-1876, October.

FIACCO, A.V.; McCORMICK, G.P. (1968). *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. New York, John Wiley & Sons.

FRISCH, K.R. (1955). The logarithmic Potential Method of Convex Programming, Memorandum, University Institute of Economics, Oslo, Norway.

GRANVILLE, S. (1994). Optimal Reactive Dispatch through Interior Point Method. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 9, nº 1, p. 136-146, February.

KARMARKAR, N. (1984). A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming. *Combinatorica* 4, v. 4, p. 373-395.

KOJIMA, M.; MIZUNO, S.; YOSHISE, A. (1989). A primal-dual interior point method for linear programming. In Progress in Mathematical Programming, Interior Point and Related Methods, N. Megiddo, ed. Springer-Verlag, New York, p.29-47.

LUENBERGER D.G. (1984). Linear and Nonlinear Programming. 2 ed. California. Addison-Wesley Publishing Company.

MATUMOTO, L.T.(1996). Algoritmos de Pontos Interiores Para Programação Linear e uma Extensão para a Programação Linear Por Partes. São Carlos. 56p. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – Universidade de São Paulo.

MEGIDDO, N. (1986). Pathways to the optimal set in linear programming. Technical Report RJ 5295, IBM Almaden Research Center, San Jose, CA.

MEHROTRA, S. (1992). On implementation of a primal-dual interior point method. *SIAM Journal on Optimization*, v.2, p. 575-601.

POLYAK, R.A. (1992). Modified barrier functions. *Mathematical Programming*, v. 54, n. 2, p. 177-222.

SOUSA, V.A. (2006). Resolução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo Via Método da Função Lagrangiana Barreira Modificada. São Carlos. 126p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo.

TORRES, G.L. (1998). Nonlinear Optimal Power Flow by Interior and Non-Interior Point Methods. Waterloo, Canada. 140p. Thesis (PhD) – University of Waterloo.

TORRES, G.L.; QUINTANA, V.H. (1998). An Interior Point Method for Nonlinear Optimal Power Flow Using Voltage Rectangular Coordinates. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 13, n° 4, p. 1211-1218, November.

WRIGHT, M.H. (1995). Why a pure primal Newton barrier step may be infeasible. *SIAM Journal on Optimization*, v. 5, n° 1, p. 1-12.

ZHANG, Y. (1996). Solving large-scale linear programs by interior-point methods under the MATLAB environment. Technical Report TR96-01, Department of Mathematics and Statistics, University of Maryland Baltimore County, Maryland, February.