SCHEILA VALECHENSKI BIEHL

Uma Nova Abordagem para Resolução de Problemas de Fluxo de Carga com Variáveis Discretas

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
2012

SCHEILA VALECHENSKI BIEHL

Uma Nova Abordagem para Resolução de Problemas de Fluxo de Carga com Variáveis Discretas

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências, Programa de Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Sistemas Elétricos de Potência.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Roberto Martins da Costa.

São Carlos

2012

Trata-se da versão original.

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

B587n

Biehl, Scheila Valechenski
Uma nova abordagem para resolução de problemas de fluxo de carga com variáveis discretas / Scheila Valechenski Biehl ; orientador Geraldo Roberto Martins da Costa. -- São Carlos, 2012.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Elétrica e Área de Concentração em Sistemas Elétricos de Potência) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2012.

1. Fluxo de carga. 2. Restrições de complementaridade. 3. Mínimos quadrados não lineares. 4. Método de região de confiança. 5. Método do gradiente conjugado de Steihaug. 6. Técnica de filtros multidimensionais. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Licenciada **SCHEILA VALECHENSKI BIEHL.**

Título da tese: "Uma nova abordagem para resolução de problemas de fluxo de carga com variáveis discretas".

Data da defesa: 07/05/2012

Comissão Julgadora:	**Resultado:**
Prof. Titular **Geraldo Roberto Martins da Costa (Orientador)** (Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)	APROVADA
Prof. Titular **Nelson Kagan** (Escola Politécnica/EP-USP)	APROVADA
Profª. Drª. **Marina Andretta** (Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação/ICMC-USP)	Aprovada
Prof. Dr. **Eduardo Nobuhiro Asada** (Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)	APROVADA
Prof. Dr. **José Carlos de Melo Vieira Júnior** (Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)	APROVADA

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica:
Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Paulo Cesar Lima Segantine**

"*A educação é a arma mais poderosa que você pode usar para mudar o mundo*".

(Nelson Mandela)

Agradecimentos

À Deus por me permitir chegar até aqui e sempre me guiar pelo caminho da educação, pelo caminho do bem.

Aos meus pais Claudio Scheifer Biehl e Regina Maria Valechenski Biehl, à minha avó e às minhas queridas irmãs, que mesmo distantes me deram força e sempre me apoiaram nesta caminhada. À toda minha família o meu muito obrigado.

Ao meu noivo Juari Junior, que sempre me incentivou e esteve ao meu lado em momentos difíceis, pelo amor incondicional.

Ao professor Dr. Geraldo Roberto Martins da Costa, pela orientação, compreensão e ensinamentos, e principalmente pela confiança e oportunidade de realizar este trabalho.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica da EESC/USP pela colaboração.

A todos os amigos do Laboratório de Análise de Sistemas de Energia Elétrica (LASEE) que conviveram comigo durante esse período, pela amizade, apoio e momentos de descontração.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Resumo

Biehl, S.V. (*2012*) **Uma Nova Abordagem para Resolução de Problemas de Fluxo de Carga com Variáveis Discretas**. Tese (Doutorado em Ciências, Programa de Engenharia Elétrica) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

Este trabalho apresenta uma nova abordagem para a modelagem e resolução de problemas de fluxo de carga em sistemas elétricos de potência. O modelo proposto é formado simultaneamente pelo conjunto de equações não lineares que representam as restrições de carga do problema e por restrições de complementaridade associadas com as restrições de operação da rede, as quais propiciam o controle implícito das tensões nas barras com controle de geração. Também é proposta uma técnica para a obtenção dos valores discretos dos taps de tranformadores, de maneira que o ajuste dessas variáveis possa ser realizado em passos discretos. A metodologia desenvolvida consiste em tratar o sistema misto de equações e inequações não lineares como um problema de factibilidade não linear e transformá-lo em um problema de mínimos quadrados não lineares, o qual é resolvido por uma sequência de subproblemas linearizados dentro de uma região de confiança. Para a obtenção de soluções aproximadas desse subproblema foi adotado o método do gradiente conjugado de Steihaug, combinando estratégias de região de confiança e filtros multidimensionais para analisar a qualidade das soluções fornecidas. Foram realizados testes numéricos com os sistemas de 14, 30, 57, 118 e 300 barras do IEEE, e com um sistema brasileiro equivalente CESP 53 barras, os quais indicaram boa flexibilidade e robustez do método proposto.

Palavras-chave: *fluxo de carga, restrições de complementaridade, mínimos quadrados não lineares, método de região de confiança, método do gradiente conjugado de Steihaug, técnica de filtros multidimensionais.*

Abstract

Biehl, S.V.. **A New Approach for Solving Load Flow Problems with Discrete Variables**. (*2012*). Tese (Doutorado em Ciências, Programa de Engenharia Elétrica) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

This work presents a new approach to the load flow problem in electrical power systems and develops a methodology for its resolution. The proposed model is simultaneously composed by nonlinear equations and inequations which represent the load and operational restrictions of the system, where a set of complementarity constraints model the relationship between voltage and reactive power generation in controled buses. It is also proposed a new technique to obtaining a discrete solution for the transformer taps, allowing their discrete adjustment. The method developed treats the mixed system of equations and inequations of the load flow problem as a nonlinear feasibility problem and converts it in a nonlinear least squares problem, which is solved by minimizing a sequence of linearized subproblems, whitin a trust region. To obtain approximate solutions at every iteration, we use the Steihaug conjugate gradient method, combining trust region and multidimensional filters techniques to analyse the quality of the provided solution. Numerical results using 14, 30, 57, 118 and 300-bus IEEE power systems, and a real brazilian equivalent system CESP 53-bus, indicate the flexibility and robustness of the proposed method.

Keywords: *load flow problem, complementarity constraints, nonlinear least squares, trust region method, Steihaug conjugate gradient method, multidimensional filter technique.*

Lista de Figuras

Figura 1.1 - Geração, transmissão e distribuição em um sistema elétrico de potência. 21
Figura 1.2 - Transições entre os estados de operação de um sistema elétrico. 25

Figura 3.1 - Gráficos da função (3.17) para os intervalos $\mu = 0,05$ e $\mu = 0,02$ 52
Figura 3.2 - Gráfico da função (3.17) para $\alpha = 1$ (em azul) e $\alpha = 0,1$ (em vermelho). 52

Figura 5.1 - Direções dos métodos de busca linear e região de confiança. 66
Figura 5.2 - Ponto de Cauchy. 70

Figura 6.1 - Ilustração gráfica de um filtro com 4 pares. 77
Figura 6.2 - Margem reta para o filtro. 78
Figura 6.3 - Filtro associado com a resolução do problema (6.7). 80
Figura 6.4 - Convergência da função residual do exemplo (6.16). 84

Figura 8.1 - Convergência da função residual $F(x)$ do sistema de 14 barras (caso I). 96
Figura 8.2 - Magnitude de tensão do sistema de 14 barras (caso I). 96
Figura 8.3 - Taps discretos do sistema de 14 barras (caso I). 98
Figura 8.4 - Convergência da função residual $F(x)$ do sistema de 14 barras (caso II). 100
Figura 8.5 - Magnitude de tensão do sistema de 14 barras (caso II). 100
Figura 8.6 - Taps discretos do sistema de 14 barras (caso II). 101
Figura 8.7 - Convergência da função residual $F(x)$ do sistema de 14 barras (caso III).103
Figura 8.8 - Magnitude de tensão do sistema de 14 barras (caso III). 103
Figura 8.9 - Convergência da função residual $F(x)$ do sistema de 30 barras. 104
Figura 8.10 - Magnitude de tensão do sistema de 30 barras. 105
Figura 8.11 - Taps discretos do sistema de 30 barras. 105
Figura 8.12 - Convergência da função residual $F(x)$ do sistema de 57 barras. 107
Figura 8.13 - Magnitude de tensão do sistema de 57 barras. 108
Figura 8.14 - Taps discretos do sistema de 57 barras. 109
Figura 8.15 - Magnitude de tensão do sistema de 57 barras com a variação de τ. . . 110
Figura 8.16 - Taps discretos do sistema de 57 barras com a variação de τ. 110

Figura 8.17 - Convergência da função residual $F(x)$ do sistema de 118 barras. 112
Figura 8.18 - Magnitude de tensão do sistema de 118 barras. 113
Figura 8.19 - Taps discretos do sistema de 118 barras. 113
Figura 8.20 - Convergência da função residual $F(x)$ do sistema de 300 barras. 115
Figura 8.21 - Magnitude de tensão do sistema de 300 barras. 115
Figura 8.22 - Taps discretos do sistema de 300 barras. 116
Figura 8.23 - Convergência da função residual $F(x)$ do sistema Cesp 53 barras. . . . 118
Figura 8.24 - Magnitude de tensão do sistema Cesp 53 barras. 119
Figura 8.25 - Taps discretos do sistema Cesp 53 barras. 119

Figura C.1 - Diagrama Unifilar: 14 barras 146
Figura C.2 - Diagrama Unifilar: 30 barras 147
Figura C.3 - Diagrama Unifilar: 57 barras 148
Figura C.4 - Diagrama Unifilar: 118 barras 149
Figura C.5 - Diagrama Unifilar: 300 barras 150
Figura C.6 - Diagrama Unifilar: 53 barras 151

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 - Tipos de barras - FC convencional. 41
Tabela 3.2 - Tipos de barras - FC modificado. 48

Tabela 6.1 - Processo de convergência do problema (6.7). 80
Tabela 6.2 - Solução do sistema (6.16) com ponto inicial $x^{(0)} = (-10 \ -10)^T$. 83

Tabela 8.1 - Número dos tipos de barras dos sistemas testados. 89
Tabela 8.2 - Número de restrições dos sistemas testados. 90
Tabela 8.3 - Número de variáveis dos sistemas testados. 90
Tabela 8.4 - Dimensão geral dos sistemas testados. 91
Tabela 8.5 - Solução do sistema de 14 barras usando o algoritmo RCGC e o UWPFLOW. 92
Tabela 8.6 - Perdas no sistema de 14 barras usando o algoritmo RCGC e o UWPFLOW. 93
Tabela 8.7 - Geração de potência reativa no sistema de 14 barras usando RCGC e UWPFLOW. 93
Tabela 8.8 - Processo de convergência do sistema de 14 barras. 94
Tabela 8.9 - Injeções de potência reativa nas barras PV (14 barras - caso Ia). . . . 97
Tabela 8.10 - Injeções de potência reativa nas barras PV (14 barras - caso Ib). . . . 97
Tabela 8.11 - Convergência dos *taps* (14 barras - caso Ia). 98
Tabela 8.12 - Convergência dos *taps* (14 barras - caso Ib). 99
Tabela 8.13 - Injeções de potência reativa nas barras PV (14 barras - 10%). 102
Tabela 8.14 - Injeções de potência reativa nas barras PV (14 barras - 40%). 102
Tabela 8.15 - Injeções de potência reativa nas barras PV (30 Barras). 106
Tabela 8.16 - Geração de reativos - Caso Base x Caso Flat Start (57 Barras). 108
Tabela 8.17 - Convegência do sistema de 57 barras sem fixar o limite máximo de iterações no algoritmo GCS. 111
Tabela 8.18 - Geração de potência reativa nas barras PV (118 Barras). 114
Tabela 8.19 - Geração de potência reativa nas barras PV (300 Barras). 117

Tabela C.1 - Dados de Barras - Cesp 53 Barras 143
Tabela C.2 - Dados de Linhas - Cesp 53 Barras 144

Lista de Siglas

CAPES Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

EESC Escola de Engenharia de São Carlos

USP Universidade de São Paulo

SEP sistema elétrico de potência

COS Centro de Operação de Sistemas

CESP companhia energética de São Paulo

IEEE Institute of Electrical and Electronics Engineers

PFNL problema de factibilidade não linear

MQNL mínimos quadrados não lineares

MQL mínimos quadrados lineares

PQS programação quadrática sequencial

GC gradiente conjugado

GCP gradiente conjugado pré-condicionado

GCS gradiente conjugado de Steihaug

LU fatoração LU

ILU fatoração incompleta LU

GMRES do inglês *Generalized Minimum Residual*

FC fluxo de carga

GN Gauss-Newton

LM Levenberg-Marquardt

RC região de confiança

RCGC regiões de confiança e gradiente conjugado

Lista de Símbolos

MVAR	Mega Volt-Ampère Reativo
MW	Mega Watt
NPV	número de barras do tipo PV
NPQ	número de barras do tipo PQ
NT	número de transformadores com *tap* variável
NB	número de barras do sistema
NG	número de barras do tipo PV incluindo a barra *slack*
p.u.	por unidade
V_k	tensão na barra k
θ_k	ângulo da tensão na barra k
t_{km}	*tap* de transformador variável na linha $k-m$
ω_k	conjunto das barras vizinhas à barra k, incluindo k
P_k^{cal}	potência ativa calculada na barra k
Q_k^{cal}	potência reativa calculada na barra k
P_k^{esp}	potência ativa especificada na barra k
Q_k^{esp}	potência reativa especificada na barra k
Q_k^G	total de potência reativa gerada na barra k
$\gamma(t)$	função seno associada com o cálculo dos *taps* discretos
α	parâmetro de amplitude da função $\gamma(t)$

μ	intervalo para a discretização da função $\gamma(t)$
$f(x)$	função objetivo do problema MQNL
$F(x)$	vetor de funções não lineares (função residual)
$J(x)$	matriz jacobiana da função residual
$\nabla f(x)$	gradiente de $f(x)$
$m(d)$	modelo quadrático aproximado de $f(x)$
Δ	raio da região de confiança
ρ	relação entre a redução verdadeira e a redução predita
Γ	filtro com uma lista de vetores m-dimensionais
γ_m	parâmetro usado para adicionar margem ao filtro

Sumário

Capítulo 1

Introdução **21**

1.1 Motivação e Objetivos do Trabalho 24

1.2 Organização do Trabalho 26

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica **29**

2.1 Problemas de Factibilidade e Mínimos Quadrados 29

2.2 Subproblemas Quadráticos 32

2.3 Métodos de Filtro Bidimensional e Multidimensional 37

Capítulo 3

Problema de Fluxo de Carga **39**

3.1 Introdução 39

3.2 Formulação Básica do Fluxo de Carga 40

3.2.1 Modelagem Convencional do Problema 43

3.3 Métodos de Solução do Fluxo de Carga 45

3.4 Modelo Proposto para o Problema de Fluxo de Carga 48

3.4.1 Modelo com Restrições de Complementaridade 48

3.4.2 Modelo com Ajuste Discreto dos *Taps* de Transformadores 51

Capítulo 4

Mínimos Quadrados Não Lineares **55**

4.1 Problema MQNL-Irrestrito 56

4.2 Problema MQNL-Restrito 57

4.3 Aproximações para o Problema MQNL 59

4.3.1 Gauss-Newton 60

4.3.2 Levenberg-Marquardt (LM) 61

Capítulo 5
Método de Região de Confiança **65**
5.1 Algoritmo Padrão do Método de Região de Confiança 66
5.2 Algoritmo Relacionado: Gradiente Conjugado de Steihaug 72

Capítulo 6
Método de Filtros **75**
6.1 Filtro Bidimensional 75
6.1.1 Conceitos 76
6.1.2 Margens para o Filtro 77
6.1.3 Exemplo Ilustrativo da Dinâmica do Filtro 78
6.2 Filtro Multidimensional 80
6.2.1 Exemplo Numérico 82

Capítulo 7
Algoritmo de Solução RCGC **85**

Capítulo 8
Resultados Numéricos **89**
8.1 Validação do Modelo de Fluxo de Carga Proposto 92
8.2 Sistemas IEEE 14, 30, 57, 118 e 300 Barras 95
8.2.1 14 Barras 95
8.2.2 30 Barras 104
8.2.3 57 Barras 106
8.2.4 118 Barras 112
8.2.5 300 Barras 114
8.3 Sistema Brasileiro Reduzido 53 Barras 117

Capítulo 9
Conclusões e Trabalhos Futuros **121**

Referências Bibliográficas **125**

Apêndice A
Expressões dos Fluxos de Potência **131**
A.1 Cálculo dos Fluxos de Potências Ativa e Reativa 131

Apêndice B
Método do Gradiente Conjugado **133**

B.1 Funções Quadráticas 134
B.2 Método do Gradiente 135
B.3 Método do Gradiente Conjugado 136
B.3.1 Direções Conjugadas 136
B.3.2 Forma Prática do Método do Gradiente Conjugado 138

Apêndice C
Dados dos Sistemas e Diagramas Unifilares **143**

Capítulo 1

Introdução

Um sistema elétrico de potência (SEP) tem por finalidade gerar e fornecer energia elétrica aos consumidores, com determinados padrões de segurança e qualidade e no instante em que for solicitada. A estrutura de um SEP compreende os sistemas de geração, transmissão e distribuição, mostrados na Figura 1.1.

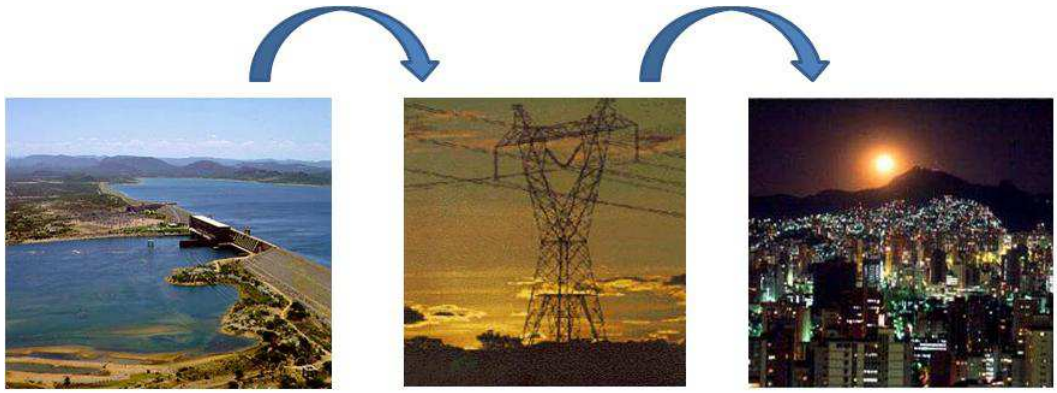

Figura 1.1 – Geração, transmissão e distribuição em um sistema elétrico de potência.

A energia elétrica é gerada e transportada por linhas de transmissão até os centros de distribuição ou subestações. As linhas de transmissão podem estar interligadas por várias subestações, as quais podem conectar diversas cidades ou bairros. O estudo de sistemas de potência compreende a análise desses sistemas de maneira a obter eficiência na geração e consumo da energia elétrica, bem como garantir os padrões de qualidade e confiabilidade.

A seguir apresentamos uma breve descrição dos principais segmentos dos SEPs, os quais geralmente são gerenciados e estudados de forma independente[1]:

- Geração: constituído por usinas ou centrais geradoras, as quais podem ser do tipo

[1]http://www.dee.ufc.br/ rleao/GTD/I Introducao.pdf

hidrelétrica ou térmica. Em geral os centros consumidores (cidades, bairros) estão localizados a longas distâncias das grandes centrais de geração, exigindo sistemas de transmissão de alta tensão bem planejados.

- Transmissão: é o conjunto de linhas, subestações e equipamentos auxiliares que transmitem a energia produzida nas usinas até as subestações das companhias distribuidoras. Um dos aspectos mais importantes para as redes de transmissão é a segurança, pois qualquer falha pode causar a interrupção de suprimento para um grande número de consumidores.

- Distribuição: são redes que interligam as redes de transmissão aos consumidores comerciais, residenciais e industriais de pequeno e médio porte.

Outra questão que emerge nesse contexto é o planejamento e operação dos SEPs, objetivando determinar uma política de operação que atenda a demanda de energia elétrica do sistema de forma confiável e econômica. Essas políticas podem ser divididas em três categorias, conforme os horizontes de tomada de decisão considerados:

- Planejamento da Expansão: com horizonte de planejamento a longo prazo, de até 30 anos, essa etapa envolve políticas de desenvolvimento de estratégias da expansão do sistema elétrico, como por exemplo a instalação de novos equipamentos visando atender um aumento previsto da demanda de energia elétrica e programas de construção de novas unidades de geração, transmissão e controle do sistema.

- Planejamento da Operação: com horizontes de planejamento a médio prazo, de até 5 anos, estabelece estratégias de operação e planos de emergência. Essa etapa é subdividida em planejamento da operação energética, o qual engloba o desenvolvimento de estratégias para utilização dos recursos energéticos, e o planejamento da operação elétrica, o qual envolve a análise dos impactos das decisões energéticas, tais como as perdas e o congestionamento do sistema de transmissão.

- Operação em Tempo-Real: consiste em atender instantaneamente a demanda de energia solicitada pelos usuários, por meio de funções que avaliam em tempo real a segurança do sistema. A coordenação destas funções é realizada nos Centros de Operação de Sistemas (COS), onde são implementados sistemas computacionais de apoio à operação em tempo real.

Naturalmente, com o crescimento do setor elétrico, aumenta também a necessidade de manutenção e reparos de equipamentos e linhas de transmissão. Para realizar tais ações, os operadores necessitam do apoio de ferramentas computacionais para análise, simulação

e controle dos sistemas. Essas ferramentas auxiliam os engenheiros em tomadas de decisões com relação ao planejamento da operação e da expansão, como por exemplo, se a geração vai suprir a demanda dos usuários - cidades ou bairros - ou se as linhas de transmissão são capazes de transportar a energia solicitada pelos usuários.

Em particular, uma ferramenta bastante utilizada no estudo de sistemas de potência é o cálculo das condições de operação do sistema em regime permanente, também conhecido como "cálculo do fluxo de carga", para uma dada condição de carga e geração (MONTICELLI, 1983). A obtenção do estado do sistema pode ainda auxiliar em estudos de curto-circuito, análise de estabilidade, confiabilidade, entre outros. A determinação do estado operativo de um sistema elétrico está associada com a análise das seguintes restrições:

- RESTRIÇÕES DE CARGA: são restrições do tipo $g(x) = 0$ e representam as restrições de atendimento à demanda de carga;
- RESTRIÇÕES DE OPERAÇÃO: são restrições do tipo $h(x) \leq 0$ e representam os limites físicos de operação dos equipamentos do SEP;
- RESTRIÇÕES DE SEGURANÇA: são restrições do tipo $s(x) \leq 0$ que consistem de um conjunto preestabelecido de contingências possíveis de equipamentos do SEP e seu atendimento significa que o sistema continuará operando de forma adequada mesmo que alguma dessas contingências prevista ocorra.

Baseando-se nas definições dessas restrições, as condições de operação são conceitualmente classificadas em quatro estados (MONTICELLI, 1983):

- NORMAL SEGURO: atende às restrições de carga, operação e segurança. Neste estado, o sistema pode sofrer qualquer contingência prevista e ainda assim operar de forma segura.
- NORMAL ALERTA: atende às restrições de carga e de operação, sem violar os limites dos equipamentos. Porém, a ocorrência de uma contingência poderá levar o sistema à violação das restrições de carga e/ou de operação.
- EMERGÊNCIA: neste estado toda a carga está sendo atendida mas o sistema não atende à todas as restrições de operação.
- RESTAURATIVO: neste estado toda ou parte da carga não está sendo atendida, e assim todos os tipos de restrições estão sendo violados.

1.1 Motivação e Objetivos do Trabalho

O aumento de demanda por energia elétrica nas últimas décadas e as exigências atuais do setor elétrico vem impulsionando os investimentos em pesquisas e o desenvolvimento de novas metodologias e técnicas computacionais, que possam auxiliar na operação segura e eficiente dos sistemas elétricos e fornecer ao consumidor energia com qualidade, segurança e sem interrupções.

O cálculo do fluxo de carga (ou fluxo de potência) em regime permanente é feito através da resolução de um conjunto de equações e inequações algébricas não lineares, cuja solução possibilita avaliar o desempenho da rede com relação a níveis de tensão, fluxos nas linhas e outras grandezas de interesse (MONTICELLI, 1983). Tipicamente, a técnica mais empregada no cálculo do fluxo de carga é o método de Newton-Rhapson, baseado em soluções sucessivas de aproximações lineares das equações da rede. Uma vez obtida essa solução, verifica-se se todas as restrições operacionais da rede estão satisfeitas em tal ponto, e no caso de haver alguma violação nos limites operacionais, é feita uma modificação nos tipos de barras da rede de modo que um novo sistema de equações seja gerado e resolvido, para a obtenção de uma nova solução. Esse processo é repetido até que se encontre uma solução satisfazendo todas as restrições do sistema.

Quando as restrições de operação estão violadas o sistema é dito estar no estado de *emergência* e quando isso ocorre, o sistema precisa sair desse estado, pela atuação do controle de emergência no modo *corretivo*, para um estado *normal-alerta*, em que as restrições de carga e de operação sejam todas obedecidas. Há situações em que essa transição não é possível, requerendo então uma atuação do controle de emergência no modo *crise*, através do desligamento de cargas ou circuitos, para que se tenha um estado *restaurativo*.

A Figura 1.2 mostra as transições que podem ocorrer entre os quatro estados de operação do sistema, devido a perturbações, que são ditas transições involuntárias, ou ainda, devido a ações de controle, que são ditas transições voluntárias. Essas ações de controle são comandadas pelo operador que pode dispor de programas computacionais, como o fluxo de carga, por exemplo, para testar estratégias alternativas de controle sobre o estado atual do sistema (MONTICELLI, 1983).

Figura 1.2 – Transições entre os estados de operação de um sistema elétrico.

A estrutura da formulação proposta neste trabalho apresenta a possibilidade de auxiliar no controle de emergência no modo *corretivo*, pois matematicamente a transição *emergência* $\rightarrow$ *normal-alerta* corresponde à obtenção de uma solução factível para o conjunto de restrições de carga e de operação, sem que haja corte de carga (se possível), a partir de ações corretivas. Essas ações podem ser, por exemplo, a variação de tensões controladas ou de *taps* de transformadores.

Nesta nova formulação, o problema de fluxo de carga é tratado como um problema de factibilidade não linear, para o qual se procura obter uma solução factível e portanto um ponto de operação para o sistema no estado *normal-alerta*. As principais características presentes nessa abordagem são:

- o tratamento simultâneo das equações da rede elétrica e das restrições que representam os limites operativos do sistema, por meio da inclusão de restrições de complementaridade que modelam a relação e o comportamento entre a geração de potência reativa e o ajuste das tensões em barras com controle de geração;

- as variáveis associadas com as magnitudes de tensão nas barras com controle de geração podem ser ajustadas implicitamente durante o procedimento de resolução, se necessário, o que pode definir a solução em uma situação de emergência;

- o ajuste discreto das variáveis de controle associadas com os *taps* de transformadores, simultaneamente com a determinação do estado da rede, com a vantagem de manusear o modelo com variáveis contínuas.

O processo de resolução do problema consiste em minimizar um modelo aproximado de *Gauss-Newton*, o qual é associado com as equações e inequações do problema de fluxo

de carga. O método de *Gauss-Newton* é geralmente utilizado na resolução de problemas de mínimos quadrados não lineares e pode ser visto como uma modificação do método de Newton para encontrar o mínimo de uma função. Possui uma característica atrativa pois explora uma estrutura particular da matriz Hessiana, desconsiderando os termos de segunda ordem (GILL; MURRAY; WRIGHT, 1981; BJÖRCK, 1996).

O modelo de Gauss-Newton representa uma função quadrática que é minimizada em torno de uma região de confiança estabelecida, resultando em um subproblema quadrático. Métodos de região de confiança (NOCEDAL; WRIGHT, 1999; CONN; GOULD; TOINT, 2000) definem esse modelo quadrático da função objetivo e uma região em torno do ponto corrente na qual confia-se que o modelo seja uma boa representenção de $f(x)$. Uma das características interessantes desse método é que apenas soluções aproximadas do subproblema quadrático são requeridas para propósitos de convergência.

Para obter as soluções aproximadas do subproblema quadrático foi utilizado o método do gradiente conjugado de Steihaug (STEIHAUG, 1983). Esse método é uma modificação do método do gradiente conjugado (apêndice B), o qual é usado geralmente para encontrar a solução da minimização irretrita de uma função quadrática do tipo $f(x) = x^T Ax - b^T x + c$, ou equivalentemente, do sistema $Ax = b$. O método de Steihaug é aplicado para a minimização do modelo de Gauss-Newton em torno de uma região de confiança, determinando dois critérios de parada adicionais para tratar situações em que a matriz Hessiana da função quadrática não seja definida positiva e quando a solução obtida extrapola o tamanho da região de confiança estabelecida.

Para medir a qualidade das soluções fornecidas e decidir se a solução obtida deve ser aceita, foi utilizada a técnica de filtros como uma alternativa às funções de mérito (FLETCHER; LEYFFER, 2002; GOULD; LEYFFER; TOINT, 2004). A metodologia dos filtros é baseada no conceito de dominância, emprestado da otimização multiobjetivo, consistindo basicamente em um mecanismo de aceitação de um passo, se ele reduz o valor da função objetivo ou de uma medida de violação das restrições (infactibilidade), em vez da combinação dessas duas medidas definida por alguma função mérito. No contexto do sistema de equações do problema de fluxo de carga, as entradas do filtro representam uma medida de infactibilidade multidimensional, forçando o residual das restrições para zero, encontrando assim um ponto de operação viável para o sistema.

1.2 Organização do Trabalho

No Capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica que aborda métodos relacionados com a metodologia desenvolvida neste trabalho, principalmente com relação a problemas de mínimos quadrados não lineares, método de região de confiança, métodos

do tipo gradiente conjugado e métodos de filtros para programação não linear e sistemas de equações não lineares.

No Capítulo 3 é introduzido o problema de fluxo de carga e sua formulação básica, bem como suas principais características e métodos comumente empregados para resolução. Em seguida é apresentado um novo modelo para a representação do problema, o qual trata simultaneamente as restrições de carga e de operação do sistema, via restrições de complementaridade. Também é proposta uma metodologia para a obtenção dos valores dos *taps* de tranformadores, os quais devem assumir valores discretos na representação de um sistema real.

O Capítulo 4 apresenta a estruturação teórica de problemas de mínimos quadrados não lineares, adaptada na formulação proposta para o problema de fluxo de carga.

Em seguida, os capítulos 5 e 6 apresentam os métodos que foram aplicados no procedimento de resolução do problema de fluxo de carga. Mais especificamente, o método de região de confiança, um algoritmo relacionado do tipo gradiente conjugado e o método de filtros multidimensionais.

No Capítulo 7 é apresentado o algoritmo geral para a resolução do fluxo de carga com variáveis discretas, denominado de regiões de confiança e gradiente conjugado (RCGC), combinado com a técnica de filtros multidimensionais.

O Capítulo 8 mostra os resultados numéricos obtidos com a resolução dos sistemas elétricos de 14, 57, 118 e 300 barras do Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) e do sistema elétrico brasileiro equivalente da companhia energética de São Paulo (CESP) com 53 barras. O Capítulo 9 finaliza com as conclusões e perspectivas para investigações futuras.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Este capítulo apresenta uma revisão bibliográfica de alguns trabalhos relacionados com a resolução de problemas de factibilidade não linear, associados com problemas de mínimos quadrados não lineares irrestritos e com restrições de caixa. Também são mostradas algumas referências de trabalhos que usam métodos de regiões de confiança e de gradiente conjugado para a resolução do subproblema quadrático que surge da linearização do problema de mínimos quadrados não linear. Por fim, alguns trabalhos na literatura que adotam o método de filtros como uma ferramenta para a resolução de sistemas não lineares e problemas de mínimos quadrados não lineares.

2.1 Problemas de Factibilidade e Mínimos Quadrados

O problema de factibilidade não linear (PFNL) pode ser visto como um problema de encontrar uma solução factível para sistemas não lineares, que assumem a seguinte forma geral

$$\begin{cases} c_E(x) = 0, & E = \{1, ..., m_E\}, \\ c_I(x) \leq 0, & I = \{1, ..., m_I\}, \\ x^l \leq x \leq x^u, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde as funções $c_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_E}$ e $c_I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_I}$ são continuamente diferenciáveis, E e I são os conjuntos de índices das restrições de igualdade e desigualdade respectivamente, e x^l, x^u são vetores n-dimensionais. Este tipo de problema surge frequentemente em muitos contextos, como por exemplo, em problemas de identificação de parâmetros (WANG; YUAN, 2002) e na fase de restauração em métodos de filtros para problemas de programação não linear (FLETCHER et al., 2002).

Em geral, os algoritmos desenvolvidos para a resolução do problema geral (2.1) ou problemas relacionados, consideram uma transformação alternativa para as inequações

do sistema, de modo a trabalhar no contexto de sistemas de equações não lineares com restrições de caixa, estruturados da seguinte forma

$$F(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \text{com } F(x) = \begin{bmatrix} c_E(x) \\ [c_I(x)]_+ \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

onde $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^n | x^l \leq x \leq x^u\right\}$ e $[c_I(x)]_+ = \max\{0, c_I(x)\}$. Dessa maneira, a estrutura de (2.2) requer técnicas específicas para sua resolução, ou seja, técnicas diferentes das usualmente empregadas para a resolução do problema irrestrito ($\Omega = \mathbb{R}^n$). O método de Newton para o problema irrestrito $F(x) = 0$, por exemplo, pode não ser adequado para o problema com restrições (2.2) pois pode encontrar soluções infactíveis, isto é, uma solução que satisfaz $F(x) = 0$ mas não pertence à Ω.

Uma estratégia bastante utilizada é baseada na redução de $\|F(x)\|_2$ para zero, se possível, convertendo (2.2) para o seguinte problema de mínimos quadrados não lineares (MQNL) com restrições de caixa

$$\text{Min}_{x\in\Omega} f(x) = \frac{1}{2}\|F(x)\|_2^2, \tag{2.3}$$

e embora nem toda solução de (2.3) seja solução de (2.2), a ideia é adaptar um método de minimização para resolver o sistema não linear com restrições. Pode-se notar que se o problema MQNL com restrições de caixa tem uma solução em que $F(x)$ se anula, ou equivalentemente $f(x) = 0$, então tal solução resolve o sistema não linear com restrições dado em (2.2).

Em Fletcher e Leyffer (2003) o problema de resolver o sistema não linear (2.1), sem restrições de caixa, é transformado em um problema de programação não linear bi-objetivo, o qual é resolvido por um método de programação quadrática sequencial (PQS) com regiões de confiança e filtros. Nesse procedimento, as equações do problema $c_E(x) = 0$ são formuladas como duas desigualdades do tipo $c_E(x) \leq 0$ e $-c_E(x) \leq 0$, resultando em um problema de factibilidade não linear, posto na forma de minimização da infactibilidade das restrições em J:

$$\begin{array}{ll} \text{Min}_{x\in\mathbb{R}^n} & \sum_{i\in J} c_i(x)^+ \\ \text{sujeito a:} & c_i(x) \leq 0, \ i \in J^\perp, \end{array} \tag{2.4}$$

onde $c^+ = \max\{c(x), 0\}$ denota o vetor de infactibilidades e J e $J^\perp$ representam os conjuntos de índices das restrições violadas e das próximas de serem satisfeitas, respectivamente, e portanto são atualizados em cada passo do algoritmo. A resolução do problema (2.4) é baseada em um método PQS, para encontrar um vetor d que resolva

o subproblema quadrático da forma

$$\begin{array}{ll} \text{Min}_{d\in\mathbb{R}^n} & \frac{1}{2}d^T Bd + \sum_{i\in J}(c_i(x) + \nabla c_i(x)^T d) \\ \text{sujeito a:} & c_i(x) + \nabla c_i(x)^T d \leq 0, \quad i \in J^{\perp}, \\ & \|d\|_\infty \leq \Delta, \end{array} \tag{2.5}$$

onde a matriz simétrica B é a Hessiana exata da função Lagrangiana ou uma aproximação, as restrições $c_i(x)$ são linearizadas e a restrição $\|d\|_\infty \leq \Delta_k$ denota uma região em torno da qual é realizada a minimização. Pode-se notar que o problema de otimização em (2.5) possui dois objetivos conflitantes: minimizar uma função objetivo $f(x)$ e ao mesmo tempo satisfazer um conjunto de restrições. O método de filtros consiste de um mecanismo para decidir se uma determinada solução é aceita ou não, tratando esses objetivos separadamente como

$$f_J(c) = \sum_{i\in J} c_i(x)^+, \quad h_J(c) = \sum_{i\in J^\perp} c_i(x)^+, \tag{2.6}$$

os quais são calculados a cada iteração e formam o par $(f_J(c), h_J(c))$ que é utilizado no procedimento para aceitar ou rejeitar uma solução.

Em Bellavia, Macconi e Morini (2003) foi apresentado um método para a resolução de sistemas de equações não lineares com restrições de caixa, com o número de restrições igual ao número de variáveis. Tal método combina as ideias do método de Newton com regiões de confiança para sistemas de equações não lineares irrestritos, com uma abordagem chamada *afim-escala* (do inglês *affine scaling*) para problemas de otimização restritos desenvolvida em Coleman e Li (1996). O uso da abordagem afim-escala transforma a restrição de região de confiança euclidiana para elipsoidal, cuja forma depende dos limitantes das variáveis, ou seja, passos maiores podem ser tomados em direções menos sensíveis enquanto que passos menores são tomados nas direções mais sensíveis ao problema. O algoritmo manusea os limitantes das variáveis implicitamente e gera soluções estritamente factíveis realizando ajustes nas direções obtidas, se necessário.

A resolução de sistemas de equações não lineares com restrições de caixa, onde o número de restrições é menor ou igual ao número de variáveis ($m \leq n$), foi abordada em Francisco, Krejic e Martínez (2005). O método baseia-se no cálculo de soluções estritamente factíveis, motivado pela aplicação na fase de restauração que pode ocorrer em alguns algoritmos de programação não linear. Para resolução do sistema linear resultante foi utilizada a fatoração QR e a estratégia de globalização adotada foi baseada em Bellavia, Macconi e Morini (2003) e Coleman e Li (1996), com adaptações do método de regiões de confiança e da abordagem afim-escala para os casos em que as soluções geradas devem ser estritamente factíveis (interiores ao conjunto Ω) e $m \leq n$.

O trabalho apresentado em Gould e Toint (2007) transforma todas as desigualdades do sistema (2.1) para restrições de igualdade, inclusive as restrições de caixa, obtendo o problema de encontrar um minimizador local da função

$$\mathrm{Min}_{x\in\mathbb{R}^n} \ \frac{1}{2}\left\|\theta(x)\right\|^2 \tag{2.7}$$

para o qual foi desenvolvido um pacote em Fortran chamado FILTRANE que combina a estratégia de regiões de confiança com uma técnica de filtros multidimensionais para a resolução de dois modelos quadráticos associados com (2.7): um modelo de *Gauss-Newton* e um modelo de *Newton* completo de segunda ordem. Ambos os modelos são resolvidos usando o método de região de confiança e de Lanczos generalizado (GOULD et al., 1999). Foram realizados diversos testes numéricos que indicaram confiabilidade e eficiência do método.

2.2 Subproblemas Quadráticos

Em geral, para a resolução de um problema de factibilidade não linear ou do problema de mínimos quadrados não lineares, é construída uma aproximação local da função objetivo $f(x)$, na vizinhança de uma solução corrente x_k, que possui a seguinte estrutura:

$$m_k(d) = f_k + \nabla f_k^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d \tag{2.8}$$

onde $f_k = f(x_k)$ e B_k é a Hessina exata ou uma aproximação da Hessiana da função objetivo. Por simplicidade, denominaremos o modelo (2.8) de "subproblema quadrático".

- **Métodos de Região de Confiança**

A classe de algoritmos de globalização conhecida como métodos de região de confiança tem se mostrado nas últimas décadas como uma poderosa ferramenta teórica e prática para tratar de problemas de otimização com uma função objetivo qualquer, que não apresente estruturas e propriedades especiais a serem exploradas.

A estrutura básica de um método de região de confiança é definir a cada iteração k, um modelo quadrático para a função objetivo $f(x)$ e uma região em torno da solução corrente x_k dentro da qual se "confia" que o modelo seja uma boa representação de $f(x)$. A direção d é então calculada, exata ou aproximadamente, minimizando esse modelo quadrático dentro da região de confiança, originando o subproblema quadrático com região

de confiança a seguir:

$$\begin{array}{ll} \text{Min}_{d\in\mathbb{R}^n}\ m_k(d) = & f_k + \nabla f_k^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d \\ \text{sujeito a:} & \|d\| \leq \Delta_k, \end{array} \tag{2.9}$$

sendo $\|.\|$ a norma Euclidiana e Δ_k o raio que define o tamanho da região de confiança.

O desenvolvimento de métodos de região de confiança, ainda sem essa denominação formal, iniciou-se com os trabalhos de Levenberg (1944) e Marquardt (1963) no contexto de problemas de mínimos quadrados não lineares. Mais tarde, Powell (1970b) iniciou o uso dos conceitos desse método para garantir a convergência de problemas de otimização irrestrita, desencadeando o interesse pelo método nos mais diferentes tipos de problemas, como otimização com restrições, problemas de complementaridade, sistemas de equações não lineares, entre outros. Somente com o trabalho desenvolvido por Moré (1983) surge a terminologia região de confiança (do inglês *trust region*). Em Conn, Gould e Toint (2000) é referenciada uma vasta área de aplicações do método de região de confiança.

A metodologia proposta nesse trabalho para a resolução do problema de fluxo de carga recai em um subproblema da forma (2.9). O sistema modificado de equações não lineares $F(x) = 0$, representando o problema de fluxo de carga, é considerado como um problema de mínimos quadrados não lineares, o qual em seguida é linearizado pelo método de Gauss-Newton e minimizado dentro de uma região de confiança, resultando então no subproblema (2.9). Em geral, as técnicas utilizadas para obter soluções exatas ou aproximadas para o subproblema podem variar dependendo do tamanho ou estrutura do problema.

A minimização de funções quadráticas foi abordada em Bellavia, Macconi e Morini (2003), onde a forma elíptica da restrição de região de confiança é determinada pela proximidade da solução atual x_k em relação aos limites mínimos e máximos das respectivas variáveis. A solução do subproblema quadrático a cada iteração é obtida inicialmente com a resolução do sistema resultante das condições de otimalidade aplicadas ao modelo quadrático, pelo método de Eliminação de Gauss. Se tal direção estiver dentro da região de confiança ela é escolhida, caso contrário o método Dogleg é usado para determinar a solução aproximada do subproblema quadrático.

Em Mael (2006) foram desenvolvidos dois métodos de região de confiança para resolução de sistemas de equações não lineares com restrições de caixa, no contexto da resolução das "equações" de uma rede elétrica, sem considerar nenhuma restrição de operação do problema. Os métodos são baseados nos métodos Dogleg (POWELL, 1970a) e gradiente conjugado truncado (STEIHAUG, 1983), adaptados para sistemas não lineares com restrições de caixa, usando uma mudança de escala das variáveis que permite obter passos robustos. Nosso trabalho foi motivado inicialmente por parte dessa metodologia,

considerando a aplicação do método do gradiente conjugado truncado e diferindo na formulação adotada para o problema de fluxo de carga.

O trabalho em Shan (2008) apresentou uma extensão do método de Levenberg-Marquardt (LM) para problemas de mínimos quadrados não lineares de grande porte. O algoritmo denominado BCNLS (do inglês *bound constrained nonlinear least-squares*) resolve uma sequência de subproblemas de mínimos quadrados lineares com restrições de caixa sobre as variáveis, por meio do pacote BCLS[1] (*bound constrained linear least-squares*). Os subproblemas são formados usando uma técnica para problemas de mínimos quadrados lineares, mal condicionados, denominada de regularização norma-2, onde o raio da região de confiança é ajustado implicitamente através de um parâmetro não negativo, também denominado de parâmetro de regularização de *Tikhonov*. Foram realizados testes numéricos e também uma aplicação a um problema prático na montagem da curva de fluorescência de imagem óptica.

Em Macconi, Morini e Porcelli (2009) foram apresentados dois métodos de região de confiança para resolução de sistemas mistos de igualdades e desigualdades, baseados em um modelo de Gauss-Newton e em um modelo de Gauss-Newton regularizado (este último resulta em um método de Levenberg-Marquardt). Para obter a solução aproximada dos subproblemas foi utilizada a solução de norma mínima do problema de mínimos quadrados e o método Dogleg. Os autores sugerem mais pesquisas no desenvolvimento de técnicas de globalização, citando a combinação da técnica de filtros com os mecanismos dos métodos de região de confiança.

Posteriormente em Morini e Porcelli (2010) foi desenvolvido o *solver* chamado TRESNEI[2] (do inglês *trust-region solver for systems of nonlinear equalities and inequalities*) baseado em um método de Gauss-Newton com regiões de confiança para resolução de problemas de mínimos quadrados não lineares com restrições de caixa. Assim como em Macconi, Morini e Porcelli (2009) a solução aproximada dos subproblemas é dada pela solução de norma mínima do problema de mínimos quadrados, calculada usando decomposição QR, e, se essa solução não pertence à região de confiança do problema, é usado o método Dogleg.

- **Método do Gradiente Conjugado**

A resolução do problema de minimização da função quadrática (2.8) pelo método do gradiente conjugado (GC) é detalhada no Apêndice B. Em resumo, o método GC é um método iterativo para resolver um sistema linear do tipo $Ax = b$, em que A é uma

[1] http://www.cs.ubc.ca/ mpf/bcls/index.html
[2] http://TRESNEI.de.unifi.it

matriz simétrica definida positiva. Esse sistema é derivado justamente pelas condições de otimalidade de primeira ordem aplicadas ao modelo quadrático (2.8).

Devido ao bom desempenho do método do gradiente conjugado para resolução de funções quadráticas como em (2.8), o trabalho desenvolvido em Steihaug (1983) introduziu uma modificação do método GC para trabalhar com o subproblema de região de confiança dado em (2.9), resultando no método do gradiente conjugado de *Steihaug*. Seguindo os princípios básicos do método de região de confiança, se a solução calculada $x_k + d_k$ está fora da região de confiança ou se a matriz Hessiana do sistema não é definida positiva ($d^T B_k d \leq 0$), o método é truncado e o maior passo, de modo que a solução permaneça sobre a fronteira da região de confiança, é tomado. Se nenhuma dessas situações ocorrer, a solução do modelo é obtida pelo método do gradiente conjugado convencional.

Em Tang e Yuan (2010) foi apresentado um método de região de confiança com dois subproblemas e estratégias de busca linear para resolução de problemas de otimização irrestritos. O algoritmo inicia resolvendo o subproblema quadrático irrestrito, isto é, sem a restrição de região de confiança, e caso o modelo aproximado não seja uma boa representação da função objetivo ou a Hessiana não seja definida positiva, o modelo de minimização adotado na próxima iteração é o subproblema com região de confiança. Em ambos os modelos é usado o método do gradiente conjugado truncado e no *loop* externo é realizada uma busca linear.

No contexto do problema de fluxo de carga, existem trabalhos na literatura que tratam especificamente da resolução das equações da rede elétrica por métodos iterativos não estacionários, como o método do gradiente conjugado e suas variantes. A principal vantagem dessa abordagem é a não necessidade da fatoração de matrizes, pois somente o produto de matriz por vetor ou o cálculo de residuais são utilizados.

O uso do método iterativo não-estacionário gradiente conjugado pré-condicionado (GCP) na análise de problemas de fluxo de carga foi apresentado inicialmente em Galiana, Javidi e McFee (1994). O algoritmo é aplicado para resolver o sistema de equações lineares esparso e de grande porte presente nos métodos do fluxo de carga linearizado e do fluxo de carga desacoplado rápido, os quais satisfazem o requerimento que a matriz do sistema seja simétrica e definida positiva. Os resultados mostraram que o algoritmo GCP é mais eficiente na resolução de tais problemas em relação ao método direto empregado, especialmente com o aumento do número de variáveis e de ligações do sistema elétrico.

Em Borges, Coutinho e Falcao (1996) foi apresentado um método de solução para o problema de fluxo de carga em ambiente vetorial, onde o sistema linearizado do método de Newton é resolvido pelo método do Gradiente Bi-Conjugado Estabilizado Precondicionado (Bi-CGSTAB), em substituição ao método direto do tipo LU comumente empregado na resolução de tal sistema. Algumas matrizes pré-condicionadoras foram testadas e os

resultados numéricos mostraram que o método Bi-CGSTAB foi mais eficiente do que o método direto aplicado na solução do sistema linearizado, e ao se trabalhar em ambiente vetorial de alto desempenho, esta eficiência se torna mais notável quanto maior for a dimensão do sistema.

O desempenho de métodos iterativos e das técnicas de pré-condicionamento aplicados em estudos de fluxo de carga também são investigados em Flueck e Chiang (1998). Dispositivos de controles foram considerados fixos no processo de resolução e a capacidade de geração de potência reativa em barras com controle de geração foi definida como ilimitada. O subproblema linear derivado do método de Newton foi resolvido usando um método iterativo do subespaço de *Krylov*: o método GMRES. Algumas matrizes de pré-condicionamento foram testadas e os resultados foram comparados com o método direto LU aplicado na resolução do suproblema linear, indicando superioridade do método de Newton-GMRES.

Em Dag e Semlyen (2003) foi apresentado um método do tipo gradiente conjugado para resolver problemas de fluxo de carga de pequeno e grande porte, os quais apresentam uma matriz simétrica e definida positiva, que é calculada e fatorada somente uma vez, na abordagem do fluxo de carga desacoplado. Para melhorar a eficiência do método do gradiente conjugado o pré-condicionador de Chebyshev é usado, o qual consiste de uma aproximação da inversa da matriz dos coeficientes do sistema linear. O pré-condicionamento de Chebyshev objetiva melhorar o número de condição do sistema linear de maneira que o algoritmo do gradiente conjugado tenha convergência mais rápida e, além disso, também é usado para obter uma distribuição ótima dos autovalores da matriz do sistema linear.

Em Pessanha, Portugal e Saavedra (2009) foi realizada uma investigação sobre o desempenho do método iterativo GMRES pré-condicionado via fatoração incompleta LU (ILU) em estudos de fluxo de carga, incluindo casos de carga pesada e de difícil convergência. Os autores propõem uma metodologia para melhorar a precisão e estabilidade numérica do pré-condicionador ILU, baseada no reordenamento da matriz Jacobiana, e sempre que possível o pré-condicionador é mantido fixo a fim de amenizar o custo computacional associado com sua construção. Tal metodologia melhorou a performance computacional do método GMRES e indicou robustez do método para solucionar problemas de difícil convergência, principalmente em cenários com carga pesada.

2.3 Métodos de Filtro Bidimensional e Multidimensional

Nesta seção apresentamos uma revisão de alguns trabalhos que utilizam o método de filtros, principalmente no contexto de métodos de regiões de confiança. O método de filtros bidimensional foi introduzido por Fletcher e Leyffer (2002) para a globalização de um algoritmo de programação quadrática sequencial com a técnica de regiões de confiança e, devido à sua robustez e eficiência, tem se tornado uma metodologia aplicável em diversas áreas. Uma revisão mais completa pode ser encontrada em Fletcher, Leyffer e Toint (2007), onde os autores apresentam um histórico do método de filtros, descrevendo as principais ideias e resultados de convergência e indicando muitos contextos onde os filtros têm obtido bom desempenho.

O método de filtros foi apresentado em Fletcher e Leyffer (2002) com o objetivo de interferir o mínimo possível nas iterações do método SQP (do inglês, *Sequential Quadratic Programming*), mas de modo a induzir a convergência e evitar o uso do parâmetro de penalidade, sendo assim menos restritivo que os métodos que utilizam funções de mérito. O procedimento consiste da resolução de uma sequência de subproblemas de programação quadrática com regiões de confiança, o qual gera uma sequência de novas aproximações à solução do problema de programação não linear, sendo que esses novos pontos são aceitos pelo algoritmo se eles produzem um decréscimo suficiente na função objetivo ou na função da violação das restrições. Os resultados computacionais foram bastante promissores, resultando em outros trabalhos dos autores.

Em Gonzaga, Karas e Vanti (2003) foi apresentado um algoritmo de filtros para programação não linear bem como a teoria de convergência global para pontos estacionários. Cada iteração é composta de uma fase de factibilidade, que reduz uma medida de infactibilidade associada com as restrições do problema, e de uma fase de otimalidade que reduz o valor da função objetivo do problema usando o método de região de confiança. Essas fases são totalmente independentes, somente conectadas pelo filtro, e podem ser resolvidas por qualquer algoritmo que satisfaça certas hipóteses.

O trabalho desenvolvido em Gould, Leyffer e Toint (2004) apresenta um algoritmo de filtro multidimensional para a resolução de sistemas de equações não lineares e problemas de mínimos quadrados não lineares, em que a dimensão do filtro está relacionada com o número de equações do sistema. O algoritmo permite qualquer relação entre m e n (número de equações e variáveis, respectivamente) e combina o método de filtros com a robustez dos métodos de regiões de confiança, convergindo globalmente para zeros do sistema sob certas suposições. As experiências numéricas preliminares indicaram considerável eficiência do método, porém os autores afirmaram que esta análise representa

ainda apenas os primeiros passos nessa linha de pesquisa, sendo possível extensões numéricas e crescimento em ambas teoria e prática.

Gould, Sainvitu e Toint (2006) estenderam as ideias de filtro multidimensional para problemas de otimização irrestrita e mostraram sob certas hipóteses, que o algoritmo converge globalmente para, no mínimo, um ponto crítico de primeira-ordem, independentemente da estimativa inicial. O método combina o mecanismo clássico do método de região de confiança com o método de filtro multidimensional para determinar se um passo gerado é aceito ou não, e assim promover convergência global ao algoritmo. Os resultados preliminares indicaram ganhos significativos em tempo de processamento, número de iterações e avaliação de funções com relação aos métodos de região de confiança clássicos.

Em Sainvitu e Toint (2007) foi apresentada uma extensão do método apresentado em Gould, Sainvitu e Toint (2006) para minimização irrestrita, objetivando a resolução de problemas de otimização não linear com restrições de caixa. Para trabalhar com tais restrições foi adaptado um método de projeção do gradiente com a técnica de filtro multidimensional, a fim de caracterizar os pontos críticos de primeira-ordem levando cada componente do gradiente projetado para zero. A resolução do subproblema quadrático é feita em 2 estágios: no primeiro, é usado o método do gradiente projetado para identificar as variáveis que serão fixadas em seus limites e, então, no segundo estágio, o modelo quadrático é reduzido e o método do gradiente conjugado é usado para obter uma solução aproximada.

Recentemente, a técnica dos filtros tem sido adaptada em vários contextos, em ambas estruturas de busca linear e regiões de confiança. De modo geral, o bom desempenho desta nova estratégia de globalização de algoritmos motivou inúmeros trabalhos nas mais diversas áreas de aplicação, tais como otimização sem derivadas (AUDET; DENNIS, 2004), métodos de pontos interiores (WÄCHTER; BIEGLER, 2006), métodos de Lagrangiano aumentado (FRIEDLANDER; LEYFFER, 2007), entre outros.

Capítulo 3

Problema de Fluxo de Carga

3.1 Introdução

O desenvolvimento de metodologias para o cálculo do fluxo de carga (FC) é fundamental na análise de sistemas elétricos de potência, desde o nível de operação até o nível de planejamento de expansão das redes elétricas. As informações obtidas pelo estudo do fluxo de carga em redes de transmissão são necessárias, por exemplo, para o operador analisar e viabilizar solicitações de manutenções, reparos e substituições de linhas de transmissão e de equipamentos que fazem parte do sistema elétrico.

Um sistema de energia elétrica, operando em regime estacionário, deve obedecer a dois tipos de restrições:

$$\begin{array}{ll} \text{restrições de carga:} & c_E(x) = 0, \\ \text{restrições de operação:} & c_I(x) \leq 0. \end{array} \tag{3.1}$$

As restrições de carga respresentam o balanço do fluxo de potência em cada barra e as restrições de operação representam os limites de operação e de capacidade dos equipamentos do sistema elétrico. Tem-se ainda as restrições de segurança do tipo $s(x) \leq 0$, associadas a um conjunto predeterminado de contingências possíveis no sistema. Baseados nessas definições de restrições de carga, operação e segurança são definidos quatro estados de operação do sistema: seguro, alerta (normal-alerta), emergência e restaurativo (MONTICELLI, 1983).

As transições entre estes estados podem ocorrer devido a alterações no sistema, como, por exemplo, perturbações e ações de controle no modo preventivo, corretivo ou restaurativo. Em específico, a formulação desenvolvida neste trabalho para o problema de fluxo de carga com controles, se enquadra na transição *emergência* $\rightarrow$ *normal-alerta* já que, matematicamente, tal transição corresponde à obtenção de uma solução factível para

o conjunto das restrições de carga e de operação do sistema. Nesta transição, podem ser realizadas ações de controle de emergência no modo corretivo, para eliminar a violação nos limites de operação e manter a integridade do sistema.

O objetivo deste capítulo é explorar o problema de fluxo de carga como um problema de factibilidade não linear, o qual procura obter um ponto de operação factível para o conjunto de restrições do problema, resultando em um estado de operação normal-alerta para o sistema, onde as restrições de carga e de operação são obedecidas, ou seja, toda a demanda é suprida sem haver violações nos limites operativos.

Nas próximas seções, primeiramente é apresentada a formulação convencional do problema de fluxo de carga, onde o número de equações do modelo é igual ao número de variáveis de estado do sistema, bem como uma breve abordagem dos métodos mais usuais para sua resolução. Em seguida, é apresentada uma nova abordagem para a formulação e resolução do fluxo de carga em que o número de variáveis de estado é maior que o número de equações do modelo, devido a uma diferente associação com os tipos de barras do sistema. Essa associação está relacionada com a inclusão de condições de complementaridade à formulação do problema, designadas para representar o controle da magnitude de tensão das barras com controle de geração de potência reativa. E, finalizando a seção, é proposta uma metodologia que possibilita a obtenção dos valores discretos para os *taps* de tranformadores na solução final do problema.

3.2 Formulação Básica do Fluxo de Carga

O problema de fluxo de carga consiste na obtenção das condições de operação em regime permanente de uma rede de energia elétrica com topologia e níveis de geração e consumo conhecidos. Neste tipo de problema, a modelagem do sistema é estática, ou seja, o problema pode ser representado matematicamente por um sistema de equações e inequações algébricas não lineares, nas quais as variações com o tempo são suficientemente lentas para que se possa ignorar os efeitos transitórios. Em geral, esses sistemas apresentam matrizes de coeficientes altamente esparsas.

Os componentes de um sistema de energia elétrica podem ser classificados em dois grupos:

- **barras** - geradores, cargas, reatores e capacitores;
- **circuitos** - elementos que interligam as barras, como por exemplo linhas de transmissão, transformadores e defasadores.

Na formulação básica do problema, para cada barra da rede - a qual representa um

nó do circuito elétrico equivalente - são associadas quatro variáveis, sendo que duas delas são dadas e duas são tratadas como incógnitas (MONTICELLI, 1983):

- V_k - magnitude da tensão na k-ésima barra;
- θ_k - ângulo da tensão na k-ésima barra;
- P_k - injeção de potência ativa na k-ésima barra;
- Q_k - injeção de potência reativa na k-ésima barra.

Dependendo de quais variáveis entram como dados e quais são consideradas como incógnitas, definem-se três tipos de barras, como pode ser visto na Tabela 3.1. As barras de carga representam as subestações de energia elétrica nas quais estão conectadas as cargas do sistema elétrico. As barras de geração ou de carga com tensão controlada representam as instalações que possuem geradores que podem realizar o controle da sua tensão por intermédio da injeção de potência reativa. A barra de referência é única e importante para a formulação do problema em função de duas características: fornecer um ângulo de referência (geralmente igualado a zero) e fechar o balanço de potência do sistema, pois as perdas na transmissão não são conhecidas antes de se ter a solução final do problema.

Tabela 3.1 – Tipos de barras - FC convencional.

Tipo de Barra	Notação	Dados	Incógnitas
Barras de Carga	PQ	P_k e Q_k	V_k e θ_k
Barras de Geração	PV	P_k e V_k	Q_k e θ_k
Referência/Folga	$V\theta$	V_k e θ_k	P_k e Q_k

As equações de potência ativa e reativa para o problema de fluxo de carga são deduzidas aplicando as leis de Kirchhoff para uma barra qualquer do sistema, sendo que a potência líquida (geração menos carga) injetada nesta barra é igual à soma dos fluxos de potência que deixam esta barra. Assim, tem-se duas equações para cada barra presente na rede, uma que expressa potência ativa e outra que expressa potência reativa, representadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} P_k^{cal} &= \sum_{m \in \omega_k} P_{km}(V_k, V_m, \theta_{km}, t_{km}) \\ Q_k^{cal} + Q_k^{sh}(V_k) &= \sum_{m \in \omega_k} Q_{km}(V_k, V_m, \theta_{km}, t_{km}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

em que $k = 1, ..., NB$, sendo NB o número de barras do sistema e ω_k o conjunto das barras m vizinhas à barra k, incluindo a própria barra k. Em geral adota-se $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$ e o ângulo θ da barra de referência igual a zero. Os *taps* de transformadores variáveis da linha

k para linha m são representadas por t_{km}. A componente $Q_k^{sh}(V_k)$ representa a injeção de potência reativa devida ao elemento *shunt* da barra k.

Considere I_{km} a corrente em uma linha de transmissão, que liga a barra k à barra m. A injeção líquida de corrente na barra k é obtida aplicando-se a primeira lei de Kirchhoff:

$$I_k = \sum_{m \in \omega_k} I_{km}, \quad k = 1, ..., NB, \tag{3.3}$$

sendo a corrente I_{km} dada por $I_{km} = Y_{km}(E_k - E_m)$.

Utilizando as equações nodais da rede elétrica, e lembrando que as variáveis deste problema são complexas e os valores são fornecidos em p.u. (por unidade), esta expressão pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$I = Y * E, \tag{3.4}$$

onde:

- I: vetor de correntes injetadas nas barras, cujas componentes são $I_k,\ k = 1, ..., NB$;
- E: vetor de tensões nodais nas barras dado por $E = V_i e^{j\theta_i}$;
- $Y = G + jB$: matriz de admitância nodal, sendo G e B as matrizes de condutância e de susceptância, respectivamente.

Os elementos da matriz Y são representados por:

$$Y_{km} = -t_{km} y_{km} \quad \text{e} \quad Y_{kk} = jb_k^{sh} + \sum_{m \in \omega_k} (t_{km}^2 y_{km} + jb_{km}^{sh}), \tag{3.5}$$

sendo b_k^{sh} a susceptância *shunt* de equipamentos reativos conectados à barra k, b_{km}^{sh} é a metade da susceptância *shunt* do circuito conectando as barras k e m, y_{km} é a admitância série do circuito conectando as barras k e m e t_{km} representa o tap do transformador existente entre a barra k e m. Vale observar que, em geral, a matriz Y é esparsa pois $Y_{km} = 0$ sempre que não existirem circuitos conectando as barras k e m. Ainda a admitância série y_{km} é definida como

$$y_{km} = g_{km} + jb_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} - j\frac{x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}, \tag{3.6}$$

onde r_{km} e x_{km} são, respectivamente, a resistência série e a reatância série existentes entre a barra k e a barra m.

Assim, pela equação (3.4) pode-se observar que a corrente I_k que é injetada na

barra k é dada por:

$$I_k = \sum_{m \in \omega_k} Y_{km} E_m, \tag{3.7}$$

sendo Y_{km} o elemento (k, m) da matriz de admitância nodal, $E_m = V_m e^{j\theta_m}$ a tensão na barra m.

O fluxo de potência complexo que sai da barra k em direção à barra m, é dado por

$$S_{km}^* = P_{km} - jQ_{km} = E_k^* I_{km} \tag{3.8}$$

e os valores para P_{km} e Q_{km} são calculados identificando as partes reais e imaginárias da equação (3.8). Assim, as expressões para o cálculo de P_{km} e Q_{km} são dadas por (ver Apêndice A):

$$\begin{aligned} P_{km} = & \ (t_{km}V_k)^2 g_{km} - t_{km}V_kV_m \left[g_{km}\cos\theta_{km} + b_{km}\text{sen}\theta_{km}\right], \text{ e} \\ Q_{km} = & \ -V_k^2(t_{km}^2 b_{km} + b_{km}^{sh}) + t_{km}V_kV_m \left[b_{km}\cos\theta_{km} - g_{km}\text{sen}\theta_{km}\right], \end{aligned} \tag{3.9}$$

sendo que se o elemento existente entre as barras k e m for uma linha de transmissão tem-se $t_{km} = 1$ e se for um transformador tem-se $b_{km}^{sh} = 0$.

De maneira análoga, as expressões para o cálculo de P_{mk} e Q_{mk} são dadas por:

$$\begin{aligned} P_{mk} = & \ V_m^2 g_{km} - t_{km}V_kV_m \left[g_{km}\cos\theta_{km} - b_{km}\text{sen}\theta_{km}\right], \text{ e} \\ Q_{mk} = & \ -V_m^2(b_{km} + b_{km}^{sh}) + t_{km}V_kV_m \left[b_{km}\cos\theta_{km} + g_{km}\text{sen}\theta_{km}\right]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.2.1 Modelagem Convencional do Problema

Considere o problema em que são dados P_k e Q_k para as barras PQ (de carga), P_k e V_k para as barras PV (de geração), e V_k e θ_k para a barra de referência. Sejam NPQ e NPV o número de barras do tipo PQ e PV da rede, respectivamente (será considerada a existência de apenas uma barra de referência).

- **Conjunto de Equações Não Lineares**

As equações básicas do problema de fluxo de carga formam um sistema com as seguintes características:

$$\begin{aligned} \Delta P_k = 0, \quad k = 1, ..., NPQ + NPV, \\ \Delta Q_k = 0, \quad k = 1, ..., NPQ, \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta P_k &= P_k^{esp} - P_k^{cal}(V,\theta), \quad k = 1, ..., NPQ + NPV, \\ \Delta Q_k &= Q_k^{esp} - Q_k^{cal}(V,\theta), \quad k = 1, ..., NPQ, \end{aligned} \tag{3.12}$$

sendo P_k^{esp} e Q_k^{esp} as potências ativa e reativa especificadas para a k-ésima barra considerada. As equações $\Delta P_k = 0$ e $\Delta Q_k = 0$ representam os balanços de potência ativa e reativa em cada barra k, respectivamente. Como pretende-se calcular V_k e θ_k nas barras do tipo PQ e θ_k nas barras do tipo PV, tem-se um sistema de $(2NPQ + NPV)$ equações algébricas não lineares com o mesmo número de incógnitas. Nesse caso base não está sendo considerado o controle dos *taps* de transformadores.

Dessa maneira, a solução do fluxo de carga consiste de duas fases:

- Solução do sistema de equações em (3.11) por algum processo iterativo visando determinar o estado (V, θ) para todas as barras requeridas;
- Com a solução (V, θ), calcula-se P e Q na barra de referência, e Q nas barras de geração. Neste caso, o sistema tem $NPV + 2$ equações algébricas não lineares com o mesmo número de incógnitas, as quais aparecem de forma explícita e o processo de resolução é direto.

As equações dadas em (3.11) representam os componentes mais importantes de um sistema de energia elétrica, o qual também possui uma série de dispositivos de controle que influenciam diretamente nas condições de operação do sistema. A inclusão de restrições que representem esses dispositivos de controle e das inequações associadas aos limites de operação do sistema à formulação básica do problema de fluxo de carga, é o caso ideal para que se possa simular corretamente o desempenho do sistema.

- **Conjunto Adicional de Inequações: Limites e Restrições de Operação**

O conjunto de inequações que faz parte do problema de fluxo de carga representa as restrições de operação do tipo $c_I(x) \leq 0$ e é formado, entre outras, pelas restrições de limites para a injeção de potência reativa para barras PV, limites de tensões para as barras PQ e limites dos *taps* dos transformadores, representadas respectivamente no seguinte sistema:

$$\begin{aligned} Q_k^{min} \leq Q_k^{ger} \leq Q_k^{max}, &\quad k = 1, ..., NPV, \\ V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max}, &\quad k = 1, ..., NB, \\ t_k^{min} \leq t_k \leq t_k^{max}, &\quad k = 1, ..., NT, \end{aligned} \tag{3.13}$$

em que $Q_k^{ger} = Q_k^{carga} + Q_k^{cal}$ representa o total de geração de potência reativa e não deve ultrapassar os limites mínimo e máximo estabelecidos, e NT é o número de *taps* de transformadores variáveis do sistema.

3.3 Métodos de Solução do Fluxo de Carga

O cálculo do fluxo de carga em redes de transmissão e distribuição de energia elétrica, assim como muitos problemas em engenharia e outras ciências, requer o uso de métodos computacionais específicos, os quais são desenvolvidos para a resolução desses sistemas de equações e inequações que constituem o modelo da rede. Esses métodos buscam a solução do sistema de equações para a determinação de um ponto de operação factível, o qual pode também ser usado como o estado inicial quando o comportamento de transição do sistema está sendo estudado.

Em geral, as variáveis de estado de um sistema elétrico são obtidas a partir de um modelo linearizado das equações da rede elétrica. Para a resolução de sistemas de equações algébricas lineares, os métodos de solução são divididos em duas grandes classes:

- **Diretos**: fornecem uma solução exata após um número finito de operações e em geral utilizam técnicas de pivoteamento para suavizar problemas de arredondamento e são mais eficientes para sistemas pequenos. Dentre os mais utilizados na resolução do fluxo de carga e em outras aplicações na análise de sistemas de potência, podemos citar a fatoração LDU (MONTICELLI, 1983) e a Bifatoração (BORGES; COUTINHO; FALCAO, 1996), devido a sua confiabilidade e rapidez.

- **Iterativos**: a partir de uma estimativa inicial $x^{(0)}$ geram uma sequência de soluções $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ que, sob determinadas condições, converge para uma solução aproximada do sistema ou termina o processo de busca se não há mais progresso suficiente. Os métodos mais utilizados para o cálculo do fluxo de carga são os métodos de Gauss-Seidel, Sobre-relaxação Sucessiva, Newton-Raphson e suas variantes (MONTICELLI, 1983; GRAINGER; STEVENSON, 1994; STOTT, 1974).

Em geral, a aplicação desses métodos para a resolução do fluxo de carga concentram seus esforços em duas fases: na fase I, o sistema de equações não lineares da rede elétrica dado em (3.11) é resolvido, e, em seguida, na fase II, é feita a verificação do conjunto adicional de inequações que representam as restrições de operação da rede. Dessa maneira, na fase II podem ocorrer os seguintes casos:

- Violação em $Q_i^{min} \leq Q_i^{ger} \leq Q_i^{max}$, para as barras PV.
  Nesse caso, Q_i^{ger} é fixado no valor do limite violado (superior ou inferior) e a barra i será tratada como barra de carga (tipo PQ) na próxima iteração, incluindo V_i^{esp} como variável no sistema. Para que o sistema continue com o mesmo número de equações e incógnitas, a equação $\Delta Q_i = 0$ é adicionada ao sistema (3.11). Depois que ocorrer essa transformação da barra PV para barra PQ, deve-se testar a cada

iteração subsequente, a possibilidade de que esta barra volte a assumir seu tipo original, da seguinte maneira:

- Se Q_i^{ger} atingiu Q_i^{max} e a variável V_i correspondente, recalculada na próxima iteração, satisfazer $V_i^{cal} > V_i^{esp}$, a barra volta a ser do tipo PV. Isso porque, para se diminuir a magnitude de tensão V_i^{cal}, basta que a injeção de reativos na barra seja diminuída, o que é possível visto que $Q_i^{esp} = Q_i^{max}$.
- Se Q_i^{ger} atingiu Q_i^{min} e a variável V_i correspondente, recalculada na próxima iteração, satisfazer $V_i^{cal} < V_i^{esp}$, a barra volta a ser do tipo PV. De maneira análoga, isso se justifica porque, para aumentar a magnitude de tensão V_i^{cal}, basta que a injeção de reativos na barra seja aumentada, o que também é possível visto que $Q_i^{esp} = Q_i^{min}$.

• Violação em $V_i^{min} \leq V_i \leq V_i^{max}$, para as barras PQ.
Se o limite inferior ou superior de tensão na barra PQ for violado, a variável V_i correspondente é fixada no valor do limite violado ($V_i^{esp} = V_i^{min}$ ou $V_i^{esp} = V_i^{max}$), removida do vetor das variáveis do sistema e a barra i será tratada como barra do tipo PV na próxima iteração. Para continuar com um sistema de ordem quadrada, a equação correspondente $\Delta Q_i = 0$ é excluída do sistema (3.11). De maneira análoga, após a barra PQ ter sido transformada em PV, testa-se nas próximas iterações a possibilidade de ela assumir seu tipo original, assim:

- Se V_i atingiu V_i^{max} e a variável Q_i correspondente, recalculada na próxima iteração, satisfazer $Q_i^{cal} > Q_i^{esp}$, ou seja, $\Delta Q_i = Q_i^{cal} - Q_i^{esp} > 0$, a barra i volta a ser do tipo PQ.
- Se V_i atingiu V_i^{min} e a variável Q_i correspondente, recalculada na próxima iteração, satisfazer $Q_i^{cal} < Q_i^{esp}$, ou seja, $\Delta Q_i = Q_i^{cal} - Q_i^{esp} < 0$, a barra é reconvertida para PQ. Nos dois casos acima, V_i volta a ser variável e a restrição $\Delta Q_i = 0$ volta a compor o sistema de equações.

O método de *Gauss-Seidel* é baseado na resolução do sistema de equações lineares $I = YE$ dado em (3.4), em que Y é a matriz dos coeficientes. Sua implementação é bastante simples, requer pouco espaço de armazenamento e não depende do valor inicial. Também requer que a matriz do sistema seja uma matriz diagonalmente dominante para ter convergência garantida. No caso de sistemas elétricos, existem alguns fatores que podem afetar essa propriedade da matriz Y (ser diagonalmente dominante) e o número de iterações para a convergência depende do tamanho do sistema.

Para acelerar a convergência do método de Gauss-Seidel, foi desenvolvido o chamado método *SOR* (do inglês *Sucessive Over-Relaxation*), o qual introduz um parâmetro de

aceleração $w \in (0, 2)$ sobre a fórmula $x^{k+1} = x^k + w\Delta x$ para gerar as soluções (se $w = 1$ o método se reduz ao método de Gauss-Seidel). Em geral, o esforço para a obtenção de um w ótimo não é viável e assim o valor de w é determinado de forma empírica, podendo acelerar a convergência para alguns problemas e falhar para outros.

O método de *Newton-Raphson*, ou simplesmente *método de Newton*, foi desenvolvido na década de 60 para encontrar soluções aproximadas de sistemas de equações não lineares do tipo $g(x) = 0$. É o método mais utilizado na prática para o cálculo do fluxo de carga devido a sua eficiência computacional e boa convergência, independentemente da dimensão do problema (taxa de convergência quadrática quando a solução inicial está próxima da solução). Entretanto, cenários com condições de operações muito carregadas podem dificultar a solução do fluxo de carga através do método de Newton, devido a fatores como mau condicionamento da matriz Jacobiana, singularidade e instabilidade numérica. Algumas características inerentes a este método são:

- necessidade do cálculo e inversão da matriz Jacobiana a cada iteração, ou seja, resolução do sistema linear do tipo $Ax = b$, embora em geral, os métodos para o cálculo do fluxo de carga não realizem explicitamente essa inversão;

- ser sensível à escolha do ponto inicial.

Para amenizar essas dificuldades, algumas medidas podem ser adotadas. A exploração da estrutura esparsa da matriz dos coeficientes pode reduzir o espaço de memória necessário e o esforço computacional. Além disso, a escolha da estimativa inicial no método de Gauss-Seidel não é crítica para o desempenho do algoritmo, por isso é comum que o método de *Newton* utilize, como solução inicial, a solução gerada pelo método de *Gauss-Seidel* em algumas poucas iterações.

Atualmente na literatura, existem muitas linhas de pesquisa voltadas ao desenvolvimento de técnicas inovadoras que visam o aperfeiçoamento do processo de resolução do fluxo de carga, principalmente relacionadas com Algoritmos Evolutivos, também denominados Algoritmos Genéticos (OZDEMIR; LIM; SINGH, 2005; TALIB et al., 2007), Redes Neurais Artificiais (KRISHNA; SRIVASTAVA, 2006; KARAMI; MOHAMMADI, 2008) e técnicas chamadas Nuvens de Partículas, do inglês *Particle Swarm* (EL-DIB et al., 2004). Bons resultados também são obtidos com métodos iterativos do tipo Gradiente Conjugado e suas variantes, os quais resolvem iterativamente o sistema linear $Ax = b$ usando somente produtos de matriz por vetor (GALIANA; JAVIDI; MCFEE, 1994; FLUECK; CHIANG, 1998; DAG; SEMLYEN, 2003). Os métodos iterativos são usados principalmente no caso de sistemas de grandes dimensões e quando a matriz é esparsa.

Portanto, pode-se ver que o desenvolvimento de métodos de solução para o problema de fluxo de carga é objeto de pesquisas até os dias atuais, cada um com

suas particularidades mas sempre procurando robustez, confiabilidade na solução obtida e redução de tempo computacional.

3.4 Modelo Proposto para o Problema de Fluxo de Carga

3.4.1 Modelo com Restrições de Complementaridade

Na formulação básica do problema, as variáveis de tensão das barras do tipo PV e de referência são fixadas em algum valor específico e consideradas como dados do problema, gerando um conjunto de equações da rede elétrica igual ao número de incógnitas, o qual pode ser resolvido por um método clássico para resolução de equações não lineares como o método de *Newton*. Essas barras também recebem a denominação de barras de tensão controlada, pois são associadas com equipamentos com capacidade de regulação de tensão.

O modelo proposto neste trabalho para o cálculo do fluxo de carga permite o ajuste das magnitudes de tensão de barras com controle de geração de potência reativa durante o processo de resolução, sendo que tais variáveis permanecem em seus valores especificados se as barras com geração de potência reativa não estão próximas de operar nos limites máximos ou mínimos estabelecidos.

A reformulação para o problema de fluxo de carga considera uma nova associação para as barra de geração e de referência em função dos dados fornecidos e das incógnitas, como mostra a Tabela a seguir:

Tabela 3.2 – Tipos de barras - FC modificado.

Tipo de Barra	Notação	Dados	Incógnitas
Barras de Carga	PQ	P_k e Q_k	V_k e θ_k
Barras de Geração	PV	P_k	V_k, Q_k e θ_k
Referência/*Slack*	θV	θ_k	V_k, P_k e Q_k

Pode-se notar que nesta formulação as variáveis de tensão não são mais consideradas como dados do problema e sim como incógnitas. A fundamentação para esta nova associação se justifica mediante a adição de restrições de complementaridade, as quais possibilitam a variação da magnitude de tensão das barras com controle de geração de potência reativa em casos nos quais os limites de geração de potência reativa estão relativamente próximos de serem violados. Sob outro ponto de vista, o ajuste dessas variáveis pode ser tomado como ações de controle no modo corretivo, onde tal correção auxilia a prevenir a violação das restrições de operação e manter o sistema operando no estado “normal-alerta”.

As equações de balanço de fluxo de potência nesta nova formulação continuam com o mesmo número de equações, formando um sistema de $(2NPQ + NPV)$ equações não lineares:

$$\begin{aligned} \Delta P_k &= 0, \quad k = 1, ..., NPQ + NPV, \\ \Delta Q_k &= 0, \quad k = 1, ..., NPQ, \end{aligned} \tag{3.14}$$

porém, com um número maior de incógnitas. No sistema (3.14) o número de incógnitas é considerado como $(2NB - 1)$, que é o número de variáveis de magnitude e ângulo das tensões para cada barra do sistema menos um (pois o ângulo da barra de referência é zero). No caso em que os *taps* dos transformadores são considerados como variáveis, tem-se o total de $(2NB + NT - 1)$ variáveis.

Para manusear simultaneamente as restrições de carga e de operação do problema de fluxo de carga e possibilitar o ajuste das variáveis de tensão referentes às barras de geração e de referência, um conjunto de restrições de complementaridade foi adicionado ao sistema (3.14). Essas restrições de complementaridade foram apresentadas em Rosehart, Roman e Schellenberg (2005), para modelar a relação entre as tensões e a geração de potência reativa nas barras com controle de geração, para problemas de máximo carregamento em sistemas de energia elétrica. Neste trabalho, empregamos tais restrições para o problema do cálculo do fluxo de carga, de modo a construir um modelo geral para a representação do problema. Considerando NG o conjunto das barras do tipo PV mais a barra *slack* $(NG = NPV + 1)$, tais condições de complementaridade são definidas como:

$$0 \leq \left(Q_k^{ger} - Q_k^{min}\right) \perp V_k^a \geq 0, \quad k = 1, ..., NG, \tag{3.15a}$$

$$0 \leq \left(Q_k^{max} - Q_k^{ger}\right) \perp V_k^b \geq 0, \quad k = 1, ..., NG, \tag{3.15b}$$

onde o operador $\perp$ denota o seguinte:

$$\left(Q_k^{ger} - Q_k^{min}\right) \geq 0, \quad V_k^a \geq 0 \text{ e } \left(Q_k^{ger} - Q_k^{min}\right) V_k^a = 0, \quad k = 1, ..., NG, \tag{3.16a}$$

$$\left(Q_k^{max} - Q_k^{ger}\right) \geq 0, \quad V_k^b \geq 0 \text{ e } \left(Q_k^{max} - Q_k^{ger}\right) V_k^b = 0, \quad k = 1, ..., NG. \tag{3.16b}$$

Para que essas restrições representem adequadamente a relação entre a geração de potência reativa Q^{ger} e a magnitude de tensão V especificada em cada barra de geração, considera-se a seguinte restrição (ROSEHART; ROMAN; SCHELLENBERG, 2005):

$$V_k = V_k^{esp} + V_k^a - V_k^b, \quad k = 1, ..., NG. \tag{3.17}$$

Dessa maneira, a magnitude de tensão para as barras definidas no conjunto de barras com controle de geração é dada pela soma de três termos: V^{esp}, V^a e V^b. A inclusão das restrições apresentadas em (3.16) e (3.17) no sistema de equações (3.14)

permite ajustar as variáveis de tensão das barras com controle de geração e definir três situações em que o sistema pode operar:

1. **Estritamente dentro dos limites de geração**: este é o modo de operação em que a potência reativa gerada está estritamente dentro do intervalo de operação definido, ou seja, o limite inferior ou superior não está próximo de ser violado. Nesse caso, as restrições de complementaridade forçam $V^a = 0$ e $V^b = 0$, já que $(Q^{ger} - Q^{min}) > 0$ e $(Q^{max} - Q^{ger}) > 0$, respectivamente;

2. **Limite mínimo alcançado**: o limite mínimo de geração de potência reativa na barra k é alcançado, ou seja, $Q_k^{ger} = Q_k^{min}$. Visto que $(Q_k^{ger} - Q_k^{min}) = 0$, as condições de complementaridade em (3.16) resultam em $V^a > 0$ e consequentemente $V^b = 0$, o que implica que a tensão vai aumentar na barra k $(V_k > V_k^{esp})$;

3. **Limite máximo alcançado**: o limite máximo de geração de potência reativa na barra k é alcançado, ou seja, $Q_k^{ger} = Q_k^{max}$. Visto que $(Q_k^{max} - Q_k^{ger}) = 0$, as condições de complementaridade em (3.16) resultam em $V^b > 0$ e consequentemente $V^a = 0$, o que implica que a tensão vai diminuir na barra k $(V_k < V_k^{esp})$;

Assim, o ajuste dessas variáveis é feito implicitamente durante a resolução do cálculo do fluxo de carga, pois tal processo está definido no próprio modelo por meio das restrições de complementaridade definidas em (3.16) e da restrição adicional (3.17). Esse procedimento evita a resolução do problema de fluxo de carga em dois estágios, com mudanças da dimensão da matriz do sistema, como é feito, por exemplo, no método de *Newton*. Essa formulação propicia a atuação do controle de emergência no modo corretivo, por meio da variação das tensões controladas e dos *taps* de transformadores e possibilita a obtenção de uma solução que satisfaça simultaneamente as restrições de carga e de operação do sistema.

Dessa maneira, considerando inicialmente que todas as variáveis do problema assumem valores contínuos, o modelo proposto para a resolução do problema de fluxo de carga é representado pelo conjunto de equações da rede elétrica dado em (3.14) e pelas restrições de complementaridade apresentadas em (3.16) e (3.17), formando o seguinte sistema não linear:

$$P_i^{esp} - P_i^{cal} = 0, \quad i = 1, ..., NPQ + NPV, \tag{3.18a}$$
$$Q_j^{esp} - Q_j^{cal} = 0, \quad j = 1, ..., NPQ, \tag{3.18b}$$
$$\left(Q_k^{ger} - Q_k^{min}\right) \geq 0, \quad k = 1, ..., NG, \tag{3.18c}$$
$$\left(Q_k^{max} - Q_k^{ger}\right) \geq 0, \quad k = 1, ..., NG, \tag{3.18d}$$
$$\left(Q_k^{ger} - Q_k^{min}\right) V_k^a = 0, \quad k = 1, ..., NG, \tag{3.18e}$$
$$\left(Q_k^{max} - Q_k^{ger}\right) V_k^b = 0, \quad k = 1, ..., NG, \tag{3.18f}$$
$$V_k - V_k^{esp} - V_k^a + V_k^b = 0, \quad k = 1, ..., NG, \tag{3.18g}$$
$$V_k^a \geq 0, \; V_k^b \geq 0, \quad k = 1, ..., NG, \tag{3.18h}$$
$$V_l^{min} \leq V_l \leq V_l^{max}, \quad l = 1, ..., NB, \tag{3.18i}$$
$$t_m^{min} \leq t_m \leq t_m^{max}, \quad m = 1, ..., NT. \tag{3.18j}$$

3.4.2 Modelo com Ajuste Discreto dos *Taps* de Transformadores

A abordagem utilizada para o tratamento dos *taps* dos transformadores como variáveis discretas é realizado de forma implícita durante o processo de resolução do problema, por meio de uma restrição adicional ao sistema para cada transformador com *tap* variável.

Motivados pelo trabalho desenvolvido em Soler (2011), para considerar os *taps* dos transformadores como variáveis discretas, a seguinte restrição de igualdade foi adicionada ao sistema (3.18):

$$\alpha\gamma(t) = 0, \tag{3.19}$$

com

$$\gamma(t_i) = \left[\text{sen}\left(\frac{t_i}{\mu}.\pi\right)\right]^2, \quad i = 1, ..., NT, \tag{3.20}$$

onde α é um parâmetro que influencia na amplitude da função γ e μ é um parâmetro que especifica o intervalo desejado entre os valores discretos para as variáveis t.

Em Soler (2011), uma função similar à função $\gamma(t)$ é adicionada na função objetivo do problema de fluxo de potência ótimo, como uma função penalidade diferenciável, visando a obtenção de uma solução com variáveis contínuas e discretas para tal problema. Neste trabalho, essa função é adicionada ao conjunto de restrições do problema de fluxo de carga por meio de uma restrição de igualdade.

Se considerarmos, por exemplo, $\mu = 0,05$, $t^{min} = 0,90$ e $t^{max} = 1,1$, os valores

discretos que a variável t pode assumir dentro deste intervalo são

$$\{0,90;\ 0,95;\ 1,0;\ 1,05;\ 1,1\}, \tag{3.21}$$

de modo que a função $\gamma(t)$ se anule em tais pontos.

A Figura 3.1 ilustra o comportamento da função (3.19) considerando os valores de $\mu = 0,05$ e $\mu = 0,02$, e os limites mínimo e máximo para as variáveis t como $t^{min} = 0,9$ e $t^{max} = 1,1$, respectivamente.

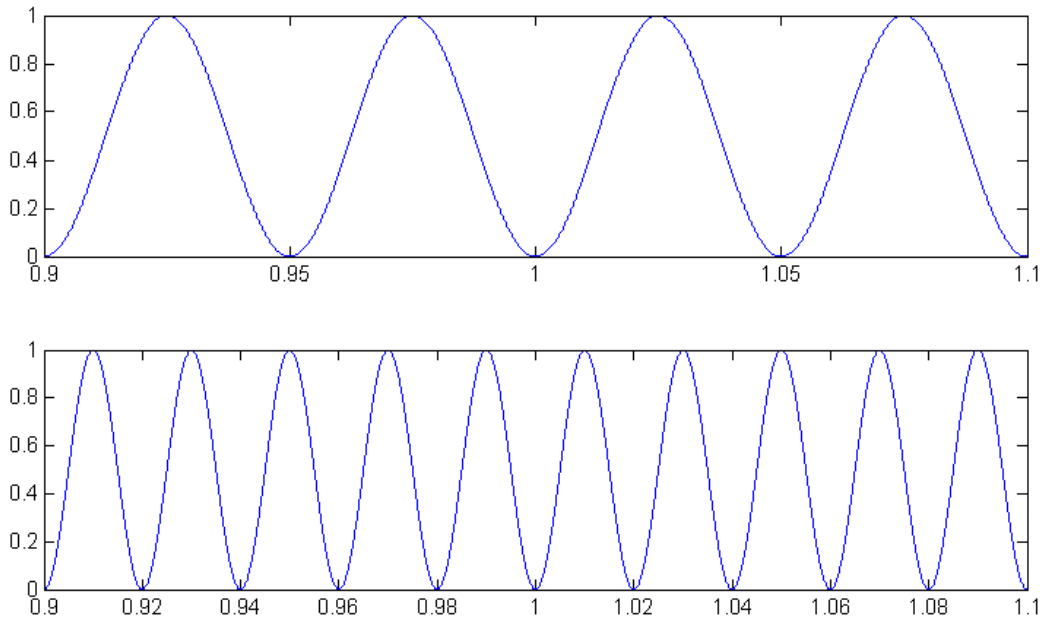

Figura 3.1 – Gráficos da função (3.17) para os intervalos $\mu = 0,05$ e $\mu = 0,02$

A Figura 3.2 mostra a influência do parâmetro α sobre a função $\gamma(t)$. Considerando o exemplo anterior com $\mu = 0,05$ e $\alpha = 0,1$, pode ser visto que a amplitude da função $\gamma(t)$ é reduzida para $0,1$.

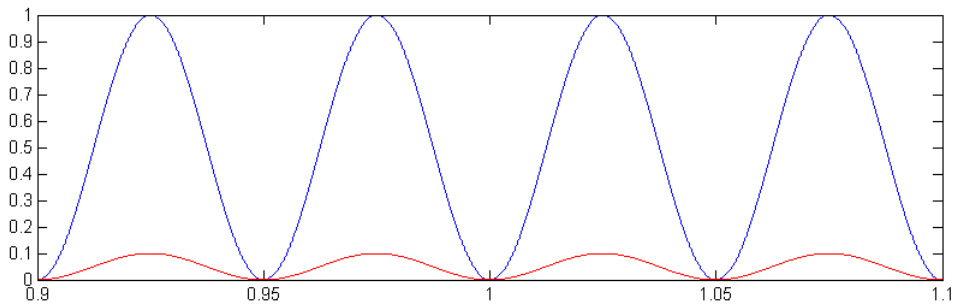

Figura 3.2 – Gráfico da função (3.17) para $\alpha = 1$ (em azul) e $\alpha = 0,1$ (em vermelho).

A inclusão da restrição de igualdade (3.19) no sistema (3.18) força a convergência dos valores dos *taps* para valores discretos. Durante o processo de resolução, esses valores podem ser contínuos, pois as restrições do problema ainda não estão todas satisfeitas, mas na solução final, caso exista, a solução é factível, pois todas as restrições foram satisfeitas e isso significa que os *taps* assumiram valores discretos.

Portanto, a formulação geral para o modelo proposto é dada pelo seguinte sistema

$$P_i^{esp} - P_i^{cal} = 0, \quad i = 1, ..., NPQ + NPV, \tag{3.22a}$$
$$Q_j^{esp} - Q_j^{cal} = 0, \quad j = 1, ..., NPQ, \tag{3.22b}$$
$$\left(Q_k^{min} - Q_k^{ger}\right) \leq 0, \quad k = 1, ..., NG, \tag{3.22c}$$
$$\left(Q_k^{ger} - Q_k^{max}\right) \leq 0, \quad k = 1, ..., NG, \tag{3.22d}$$
$$\left(Q_k^{ger} - Q_k^{min}\right) V_k^a = 0, \quad k = 1, ..., NG, \tag{3.22e}$$
$$\left(Q_k^{max} - Q_k^{ger}\right) V_k^b = 0, \quad k = 1, ..., NG, \tag{3.22f}$$
$$V_k - V_k^{esp} - V_k^a + V_k^b = 0, \quad k = 1, ..., NG, \tag{3.22g}$$
$$\alpha \left[\text{sen}\left((t_l/\mu)\pi\right)\right]^2 = 0, \quad l = 1, ..., NT, \tag{3.22h}$$

adotando as restrições (3.22c) e (3.22d) como do tipo $c_I(x) \leq 0$.

As restrições de complementaridade são adicionadas ao sistema para modelar a relação entre a variação das tensões e a geração de potência reativa, constituindo então um sistema misto de equações não lineares com restrições de complementaridade. O procedimento de resolução abrange diretamente satisfazer as equações da rede e minimizar o *gap* das condições de complementaridade (relacionado com as restrições operacionais do sistema) dentro de uma tolerância especificada.

As variáveis do problema de fluxo de carga expresso em (3.22a)-(3.22h) que possuem limites inferiores e/ou superiores são designadas nos seguintes conjuntos:

$$\Omega_1 = \left\{V : V^{min} \leq V \leq V^{max}\right\}, \tag{3.23}$$
$$\Omega_2 = \left\{t : t^{min} \leq t \leq t^{max}\right\}, \tag{3.24}$$
$$\Omega_3 = \left\{V^a : V^a \geq 0\right\}, \tag{3.25}$$
$$\Omega_4 = \left\{V^b : V^b \geq 0\right\}. \tag{3.26}$$

Enfim, podemos considerar que o problema de factibilidade não linear associado ao problema de fluxo de carga apresentado em (3.22) tem a seguinte estrutura

$$\begin{aligned} c_E(x) = 0; \quad E = \{1, ..., m_E\}, \\ c_I(x) \leq 0; \quad I = \{1, ..., m_I\}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

com vetores de funções $c_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_E}$ e $c_I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_I}$, $x \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | l \leq x \leq u\}$ e os vetores l e u definindo os limites inferiores e superiores sobre as variáveis do problema. Por questões de simplicidade, o desenvolvimento da metodologia adotada para a resolução do problema de fluxo de carga definido em (3.22)-(3.23), apresentada nos próximos capítulos, será baseada no sistema genérico (3.27).

Capítulo 4

Mínimos Quadrados Não Lineares

Frequentemente, o problema de mínimos quadrados não lineares é encontrado no contexto de ajuste de curvas, mas pode também ser adotado no contexto de resolução de sistemas de equações não lineares onde o número de equações é maior que o número de incógnitas.

A resolução do problema de factibilidade em (3.27) consiste em encontrar um vetor $x \in \Omega$ que satisfaça as restrições de igualdade e desigualdade. Caso esta solução não exista, o objetivo é, então, minimizar a soma da violação das restrições desse problema. Neste trabalho é considerada a norma Euclidiana da violação das restrições, de maneira a encontrar um minimizador local do seguinte problema

$$\mathrm{Min}_{x\in\Omega} \quad f(x) = \tfrac{1}{2}\left\|F(x)\right\|^2 \tag{4.1}$$

com

$$F(x) = \begin{bmatrix} c_E(x) \\ [c_I(x)]_+ \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

onde $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a função objetivo, $F(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é a função residual do problema calculada em x e a transformação alternativa $[c_I(x)]_+ = \max\{0, c_I(x)\}$ denota o vetor de infactibilidades em x.

O problema apresentado em (4.1) será denominado problema de mínimos quadrados não lineares restrito (MQNL-Restrito), pois $x \in \Omega$, e, no caso em que $x \in \mathbb{R}^n$, será denominado problema de mínimos quadrados não lineares irrestrito (MQNL-Irrestrito). A seguir são apresentadas as principais propriedades dos casos MQNL restrito e irrestrito.

4.1 Problema MQNL-Irrestrito

A classe de problemas de mínimos quadrados não lineares irrestrito é uma classe especial de problemas de minimização irrestrita com a função objetivo dada pela soma dos quadrados de funções não lineares

$$\text{Min}_{x\in\mathbb{R}^n} \quad f(x) = \tfrac{1}{2}\left\|F(x)\right\|^2, \tag{4.3}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m=m_E+m_I}$ é chamada de função residual, definida pelo vetor

$$F(x) \quad = (F_1(x), F_2(x), ..., F_m(x))^T, \tag{4.4}$$

sendo que neste trabalho as funções componentes $F_i,\ i = 1, ..., m$, estão associadas com as restrições de carga e de operação do problema de fluxo de carga. Claramente, se $F_i,\ i = 1, ..., m$, fosse linear em x, então (4.3) seria um problema de mínimos quadrados lineares (MQL).

Quando $m > n$ o sistema $Ax = b$ é dito ser sobredeterminado (do inglês *overdetermined*) e, em geral, não há solução exata. Assim, procura-se a solução de mínimos quadrados $\tilde{x}$ que minimiza o erro $\|b - A\tilde{x}\|_2$ (se posto$(A) = n$ a solução é única). Quando $m < n$ o sistema é dito ser sobdeterminado (do inglês *underdetermined*) e há infinitas soluções que satisfazem $Ax = b$ e, então, procura-se a solução $\tilde{x}$ de menor comprimento dado por $\|\tilde{x}\|_2$, chamada solução de norma mínima.

A minimização do problema (4.3) pode ser feita por métodos clássicos de minimização irrestrita, mas em alguns casos pode ser interessante considerar as propriedades da função f. As derivadas de $f(x)$ podem ser expressas em termos da Jacobiana $J(x) \in \mathbb{R}^{mxn}$ da função residual $F(x)$, definida por

$$J(x) = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right]_{i=1,...,m;\ j=1,...,n} = \begin{bmatrix} \nabla_1 F(x)^T \\ \nabla_2 F(x)^T \\ ... \\ \nabla_m F(x)^T \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Dessa maneira, o gradiente e a matriz Hessiana de $f(x)$ podem ser escritos como

$$\nabla f(x) = \qquad J(x)^T F(x) \qquad , \tag{4.6}$$

$$\nabla^2 f(x) = \quad J(x)^T J(x) + S(x), \quad S(x) = \sum_{i=1}^{m} F_i(x)\nabla^2 F_i(x). \tag{4.7}$$

Pode-se notar que a derivada primeira da função residual, e por consequência, a matriz Jacobiana $J(x)$ são relativamente fáceis e baratas de calcular. Uma das características dos algoritmos para mínimos quadrados não lineares é explorar uma estrutura particular da matriz Hessiana, calculando apenas o termo $J(x)^T J(x)$ e ignorando o termo $S(x)$ que contém as derivadas de segunda ordem. Isso porque, para o resíduo $F_i(x)$ pequeno, o termo $J(x)^T J(x)$ dominará $S(x)$.

Um minimizador local x^* para o problema (4.3) tal que $f(x^*) = 0$ é um minimizador global de f visto que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, denotado por solução zero-residual e o problema (4.3) pode ser chamado de problema zero-residual. Para reconhecer um mínimo local do problema (4.3) é necessário analisar as condições de otimalidade apresentadas a seguir (NOCEDAL; WRIGHT, 1999).

Teorema 4.1 ***(Condições Necessárias de 1ª Ordem)*** *Se x^* é um minimizador local de f e f é continuamente diferenciável em uma vizinhança aberta de x^*, então*

$$\nabla f(x^*) = J(x^*)^T F(x^*) = 0. \tag{4.8}$$

Se x^* satisfaz a equação (4.8) ele é dito ser um ponto estacionário[1] para o problema (4.3). Pelo Teorema 4.1 qualquer minimizador local deve ser um ponto estacionário, mas em geral, o contrário não é válido. São necessárias condições mais fortes sobre a função f.

Teorema 4.2 ***(Condições Necessárias de 2ª Ordem)*** *Se x^* é um minimizador local de f e $\nabla^2 f$ existe e é contínua em uma vizinhança aberta de x^*, então x^* satisfaz a equação (4.8) e $\nabla^2 f(x^*)$ é semidefinida positiva.*

O teorema a seguir garante que x^* é um minimizador local estrito de f.

Teorema 4.3 ***(Condições Suficientes de 2ª Ordem)*** *Suponha que $\nabla^2 f$ é contínua em uma vizinhança aberta de x^*, x^* satisfaz a equação (4.8) e $\nabla^2 f(x^*)$ é definida positiva. Então x^* é um minimizador local estrito de f.*

Portanto, as condições de otimalidade sugerem encontrar um minimizador local do problema (4.3) pela resolução da equação (4.8).

4.2 Problema MQNL-Restrito

Será considerado agora o seguinte problema

$$\text{Min}_{x \in \Omega} \quad f(x) = \tfrac{1}{2} \left\| F(x) \right\|^2, \tag{4.9}$$

[1] ponto que satisfaz as condições necessárias de 1ª ordem

em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e Ω é uma caixa n-dimensional $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | l \leq x \leq u\}$. Considerando $\{l_i\}_{i=1}^n$ e $\{u_i\}_{i=1}^n$ sequências de números reais tal que

$$-\infty < l_i < u_i < +\infty \tag{4.10}$$

tem-se que a i-ésima restrição é dita ser "ativa" em Ω se $(x)_i = l_i$ ou $(x)_i = u_i$, caso contrário é dita ser "inativa".

O problema de minimização com restrições de caixa dado em (4.9) restringe o domínio de f a um intervalo $[l, u]$, e, neste caso, as condições necessárias de otimalidade devem ser modificadas para admitir a possibilidade de que o minimizador esteja sobre a fronteira de Ω. A seguir, são apresentadas as condições de otimalidade para o problema MQNL restrito (KELLEY, 1999).

Teorema 4.4 ***(Condições Necessárias de 1ª Ordem)*** *Seja f continuamente diferenciável sobre o intervalo Ω. Se x^* é uma solução para o problema (4.9), então x^* é tal que*

$$\nabla f(x^*)^T (x - x^*) \geq 0, \quad \forall\ x \in \Omega \tag{4.11}$$

Similar ao caso irrestrito, um ponto satisfazendo (4.11) é um ponto estacionário para o problema restrito.

Por simplicidade de análise, considere o problema (4.9) em uma variável e seja $f'(x)$ a derivada de primeira ordem de f em x. As três possibilidades que podem ocorrer para a solução do problema são $x^* = l$, $x^* = u$ ou $l < x^* < u$. Se $x^* = l$ é um minimizador local então $f(l) \leq f(x)$ para todo $l \leq x$ e como a condição $f'(x^*)^T d \geq 0$ deve ser satisfeita para que x^* seja solução ótima, tem-se $f'(x^*)^T (x - l) \geq 0$ e consequentemente $f'(x^*) \geq 0$. A mesma análise é feita se $x^* = u$ o que resulta em $f'(x^*) \leq 0$. Se $l < x^* < u$ tem-se o caso de minimização irrestrita e assim se x^* é um mínimo local então $f'(x^*) = 0$.

Dessa maneira, as condições necessárias de primeira ordem dadas em (4.11) para x^* ser um mínimo local podem ser formuladas como

$$(\nabla f(x^*))_i = \begin{cases} = 0, & \text{se} \quad l_i < x_i^* < u_i, \\ \geq 0, & \text{se} \quad x_i^* = l_i, \\ \leq 0, & \text{se} \quad x_i^* = u_i. \end{cases} \tag{4.12}$$

Se x^* é uma solução de (4.9) e nenhuma restrição de limitante é ativa, então $\nabla^2 f(x^*)$ é semidefinida positiva. Porém, quando uma ou mais restrições são ativas, não é possível tirar conclusões sobre a positividade de $\nabla^2 f(x^*)$. Por questões de complementação, seja $I^* = \{i | l_i < x_i^* < u_i\}$ o conjunto de índices correspondentes às componentes estritamente factíveis de x^* e seja $(\nabla^2 f(x^*))_{I^*}$ a submatriz de $\nabla^2 f(x^*)$ com índices em I^*.

Teorema 4.5 ***(Condições Necessárias de 2ª Ordem)*** *Se x^* é uma solução do problema (4.9) e $f \in C^2$ em uma vizinhança aberta de x^*, então $(\nabla^2 f(x^*))_{I^*}$ é semidefinida positiva.*

O conceito seguinte é usado na formulação das condições suficientes para o problema (4.9).

Definição 4.1 *Um ponto $x^* \in \Omega$ é um ponto estacionário não degenerado para (4.9) se x^* é estacionário e*

$$(\nabla f(x^*))_i \neq 0, \ \ se \ x_i^* = l_i \ ou \ x_i^* = u_i, \ \ i = 1, ..., n. \tag{4.13}$$

Teorema 4.6 ***(Condições Suficientes de 2ª Ordem)*** *Seja $x^* \in \Omega$ um ponto estacionário não degenerado para o problema (4.9), $f \in C^2$ em uma vizinhança aberta de x^* e suponha que a matriz $(\nabla^2 f(x^*))_{I^*}$ é definida positiva. Então x^* é uma solução para o problema (4.9).*

4.3 Aproximações para o Problema MQNL

Problemas de mínimos quadrados não lineares podem ser vistos como uma classe intermediária entre o problema de resolver um sistema de equações não lineares e um caso especial do problema de minimização irrestrita, sendo que os métodos para sua resolução refletem essa característica (BJÖRCK, 1996). Assim, há duas maneiras diferentes de abordar o problema irrestrito em (4.3):

(i) **Como um sistema de equações não lineares** $F(x) = 0$.
Nesse caso é natural aproximar $F(x)$ por um modelo linear em uma vizinhança de um ponto dado x_l,

$$\widetilde{F}_l(x) = F(x_l) + J(x_l)d, \tag{4.14}$$

em que $d = x - x_l$ é o vetor de correção dos parâmetros aproximados, $F(x_l)$ é a função residual calculada no ponto x_l e $J(x_l)$ é a matriz jacobiana da função residual. E assim, usar o problema MQL

$$\text{Min}_{d \in \mathbb{R}^n} \quad \tfrac{1}{2} \left\| J(x_l)d + F(x_l) \right\|^2 \tag{4.15}$$

para encontrar uma solução aproximada de (4.3). Esta aproximação usa somente informações das derivadas de 1ª ordem de $F(x)$ e resulta nos métodos de *Gauss-Newton* (BJÖRCK, 1996; NOCEDAL; WRIGHT, 1999) e de *Levenberg-Marquardt* (LEVENBERG, 1944; NOCEDAL; WRIGHT, 1999).

(ii) **Como um caso especial de um problema de otimização**.
Neste caso, um modelo quadrático de $f(x)$ é construído

$$\widetilde{f_l}(x_l + d) = f(x_l) + \nabla f(x_l)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x_l) d \tag{4.16}$$

e o minimizador de $\widetilde{f_l}(x)$ é dado por

$$x_N = x_l - \left(J(x_l)^T J(x_l) + S(x_l)\right)^{-1} J(x_l)^T F(x_l) \tag{4.17}$$

onde $S(x)$ é como em (4.7). Logo, essa aproximação usa informações das derivadas de segunda ordem de $F(x)$ e resulta em métodos de *Newton* e *Quasi-Newton* (DENNIS; MORÉ, 1977; NOCEDAL; WRIGHT, 1999).

Neste trabalho foi adotada a primeira abordagem, em que somente informações das derivadas de primeira ordem de $F(x)$ são computadas. A seguir é apresentado como explorar a estrutura do gradiente e da Hessiana em (4.6) e (4.7).

4.3.1 Gauss-Newton

O método de *Gauss-Newton* (GN) pode ser visto como uma modificação do método de Newton para minimização irrestrita de $f(x)$ com busca linear, baseado em uma sequência de aproximações lineares de $F(x)$. Assim, o termo $S(x)$ da Hessiana em (4.7) é excluído e a direção de busca d_k^{GN} é obtida resolvendo o sistema

$$J(x_k)^T J(x_k) d_k^{GN} = -J(x_k)^T F(x_k) \tag{4.18}$$

que representa justamente as equações normais do problema

$$\text{Min}_{d \in \mathbb{R}^n} \quad \tfrac{1}{2} \left\| J(x_k) d + F(x_k) \right\|^2 \tag{4.19}$$

A solução de (4.18) corresponde a uma solução do problema de mínimos quadrados lineares (4.19) e é única se $J(x_k)$ tem posto completo[2]. A desvantagem da resolução direta de (4.18) com a matriz explícita $J_k^T J_k$ é que o número de condição de $J_k^T J_k$ é o quadrado do número de condição de J_k, ou seja, piora o condicionamento da matriz e pode afetar as direções de buscas.

Para contornar esta dificuldade, a direção d_k^{GN} pode ser obtida com a resolução do subproblema (4.19), aplicando algoritmos para problemas de mínimos quadrados lineares,

[2]Dado $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ existe uma solução x para $Ax = b$, para qualquer b, se e somente se posto(A)=min{m,n}. Posto: número de linhas/colunas linearmente independentes de A.

como por exemplo *Fatoração QR* ou *Decomposição em Valores Singulares* (BJÖRCK, 1996; DEMMEL, 1997), aplicados sobre $J(x_k)$, pois $d_k^{GN} = -(J(x_k))^{-1}F(x_k)$.

De maneira resumida, algumas vantagens do método de Gauss-Newton sobre o método de Newton são:

1. A aproximação $\nabla^2 f(x) = J(x)^T J(x)$ reduz o trabalho de calcular m Hessianas individuais $\nabla^2 F_j(x),\ j = 1, ..., m$;

2. Em algumas situações o termo $J(x)^T J(x)$ domina $S(x)$ e assim o método GN tem desempenho similar ao método de Newton. Isso ocorre quando os residuais $F_j(x)$ são pequenos ou $F_j(x)$ é próximo de ser linear com $\|\nabla^2 F_j(x)\|$ pequeno;

3. Quando $J(x_k)$ tem posto completo e $\nabla f(x_k) \neq 0$, a direção d_k^{GN} é uma direção de descida para f e portanto apropriada para uma busca linear.

4. A matriz $J_k^T J_k$ é sempre, no mínimo, semidefinida positiva[3].

Implementações do método de Gauss-Newton usualmente adotam estratégias de busca linear para a atualização $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k^{GN}$, exigindo que o tamanho do passo α_k satisfaça condições de decréscimo suficiente, como por exemplo as condições de Armijo (BAZARAA; SHERALI; SHETTY, 1993; NOCEDAL; WRIGHT, 1999).

Essa aproximação sugere utilizar um modelo linear para a função residual $F(x_k+d)$, da seguinte maneira:

$$F(x_k + d) \approx F(x_k) + J(x_k)d \tag{4.20}$$

e, assim, o problema de mínimos quadrados não lineares pode ser aproximado por

$$\frac{1}{2}\|F(x_k + d)\|_2^2 \approx \frac{1}{2}\|F(x_k) + J(x_k)d\|_2^2 \tag{4.21}$$

4.3.2 Levenberg-Marquardt (LM)

O método de *Levenberg-Marquardt* (LEVENBERG, 1944) é uma modificação do método GN em que a estratégia de busca linear é substituída pela estratégia de regiões de confiança, o que justifica ser considerado como o precussor do método de região de confiança, o qual será apresentado detalhadamente no Capítulo 5. O uso de regiões de confiança é empregado para evitar instabilidades do método de Gauss-Newton quando a matriz Jacobiana não tem posto completo e, portanto, $J(x)^T J(x)$ singular, remediando casos em que a minimização não é limitada inferiormente, ou seja, quando $f(x) \to -\infty$.

[3]Se A é uma matriz real, então AA^T é semidefinida positiva

Portanto, para uma região de confiança esférica, a aproximação passa a ser dada por

$$\begin{array}{ll} \text{Min}_{d\in\mathbb{R}^n} & m_k(d) = \frac{1}{2}\left\|J(x_k)d + F(x_k)\right\|_2^2 \\ \text{sujeito a} & \|d\|_2 \leq \Delta_k, \end{array} \tag{4.22}$$

onde Δ_k é o raio da região de confiança, ou seja, a solução d_k minimiza (4.22) em uma bola de raio Δ_k. Desenvolvendo a expressão em (4.22), obtém-se a seguinte função quadrática:

$$m_k(d) \;\; = \underbrace{\frac{1}{2}\|F_k\|^2}_{f_k} + \underbrace{F_k^T J_k d}_{\nabla f_k^T d} + \underbrace{\frac{1}{2} d^T J_k^T J_k d}_{\frac{1}{2} d^T B_k d}. \tag{4.23}$$

Se o passo d_k^{GN} está no interior da região de confiança, ou seja, $\left\|d_k^{GN}\right\| < \Delta_k$, então d_k^{GN} também resolve o subproblema (4.22) e assim $d_k^{LM} = d_k^{GN}$. Caso contrário, existe um parâmetro de regularização $\lambda > 0$ tal que $\left\|d_k^{LM}\right\| = \Delta_k$ e satisfaz

$$\left(J(x_k)^T J(x_k) + \lambda I\right) d_k^{LM} = -J(x_k)^T F(x_k). \tag{4.24}$$

Essas afirmações são verificadas como consequência direta do seguinte teorema (NOCEDAL; WRIGHT, 1999):

Teorema 4.7 *O vetor d^* é uma solução global do problema de região de confiança*

$$\begin{array}{ll} \textit{Min}_{d\in\mathbb{R}^n} & f + \nabla f^T d + \frac{1}{2} d^T B d \\ \textit{sujeito a} & \|d\| \leq \Delta \end{array} \tag{4.25}$$

se e somente se d^* é factível e existe um escalar $\lambda \geq 0$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{array}{ll} (B + \lambda I)d^* = & -\nabla f, \\ \lambda(\Delta - \|d^*\|) = & 0, \\ (B + \lambda I) & \textit{é semidefinida positiva.} \end{array} \tag{4.26}$$

O sistema em (4.24) pode ser interpretado como as equações normais para o seguinte problema de mínimos quadrados lineares:

$$\text{Min}_{d\in\mathbb{R}^n} \; \frac{1}{2}\left\| \begin{bmatrix} J(x_k) \\ \sqrt{\lambda} I \end{bmatrix} d + \begin{bmatrix} F(x_k) \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2, \tag{4.27}$$

que também pode ser escrito como

$$\text{Min}_{d\in\mathbb{R}^n} \; \frac{1}{2}\left\{\|J(x_k)d + F(x_k)\|^2 + \lambda_k \|d\|^2\right\}. \tag{4.28}$$

A principal diferença entre o método de *Levenberg-Marquardt* e o método de região de confiança está na atualização do raio Δ_k. Neste último o raio é atualizado diretamente a cada iteração, enquanto que no primeiro o parâmetro λ é atualizado, alterando implicitamente o valor de Δ_k. A questão fundamental do método LM é a escolha e a atualização do parâmetro λ, que influencia na direção e no tamanho do passo a serem tomados. Em Moré (1977) é apresentada a implementação do algoritmo e a descrição teórica do método de Levenberg-Marquardt.

Analisando e considerando as características mais atrativas dos métodos de Gauss-Newton e de Levenberg-Marquardt, a abordagem desenvolvida neste trabalho visa a resolução de um subproblema quadrático da forma

$$\begin{array}{ll} \text{Min}_{d\in\mathbb{R}^n}\ m_k(d) = & \frac{1}{2}\left\|J(x_k)d + F(x_k)\right\|^2 \\ \text{sujeito a} & \|d\| \leq \Delta_k \end{array} \tag{4.29}$$

em que $F(x_k)$ é o vetor residual de funções não lineares formado pelas restrições de carga e de operação do problema de fluxo de carga e $J(x_k)$ é a matriz Jacobiana de $F(x)$ no ponto x_k. Portanto, o sistema apresentado em (3.22a)-(3.22h) será resolvido pela estrutura de um problema de otimização, mais especificamente por uma sequência de subproblemas linearizados, sujeito a uma restrição de região de confiança.

O próximo capítulo apresenta o método baseado em regiões de confiança e o algoritmo relacionado para encontrar uma solução aproximada do subproblema (4.29): Gradiente Conjugado de Steihaug (steihaug, 1983).

Capítulo 5

Método de Região de Confiança

Em geral, no contexto de problemas de miminização irrestrita da forma

$$\text{Minimizar}_{x\in\mathbb{R}^n} \quad f(x) \tag{5.1}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável, os algoritmos clássicos geram uma sequência de soluções $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, buscando a cada iteração uma direção de descida d_k que reduza o valor da função objetivo, sendo $x_{k+1} = x_k + d_k$ a regra de atualização, e terminam quando não há mais progresso ou quando uma solução foi obtida com precisão suficiente.

Existem duas estratégias principais para decidir como mover-se do ponto atual x_k para uma nova solução x_{k+1}: busca linear e regiões de confiança. Ambas geram direções baseadas em um modelo quadrático da função objetivo, mas se diferenciam na maneira em que combinam o uso do modelo quadrático com a escolha do tamanho do passo naquela direção.

- Busca Linear: A estratégia de busca linear usa o modelo quadrático para gerar uma direção d_k e, então, o algoritmo procura ao longo dessa direção um comprimento de passo α_k a ser tomado tal que ocorra um decréscimo suficiente no valor de f e assegure um progresso razoável do algoritmo. Isso é feito com a resolução do seguinte problema de minimização unidimensional:

$$\text{Minimizar}_{\alpha>0} \quad f(x_k + \alpha d_k). \tag{5.2}$$

  Na busca exata, o tamanho do passo é encontrado minimizando exatamente (5.2) na direção obtida, mas, em geral, esse processo é custoso e desnecessário. Com a busca inexata, é calculada apenas uma solução aproximada que forneça uma boa redução da função (5.2) na direção d_k, satisfazendo, por exemplo, as condições de Armijo.

- Região de Confiança: Na estratégia de regiões de confiança é definida uma região de confiança em torno da solução atual x_k, dentro da qual confia-se que o modelo seja uma boa representação da função objetivo, e então calcula-se o minimizador do modelo dentro desta região. Dessa maneira, ao contrário da busca linear, a direção e o comprimento do passo são obtidos simultaneamente.

A Figura 5.1 ilustra as direções dos métodos de região de confiança e de busca linear para uma dada função f, onde o ponto atual x_k é o centro da região de confiança e o minimizador x^* se encontra no lado oposto em um vale com curvas. No método de busca linear procura-se ao longo da direção o minimizador do modelo m_k, porém em alguns casos esta direção pode fornecer pouca redução em f, mesmo se o tamanho do passo ótimo for usado. No método de região de confiança procura-se o minimizador de m_k dentro da região de confiança estabelecida, produzindo uma redução mais significativa em f e um bom progresso em direção à solução (NOCEDAL; WRIGHT, 1999).

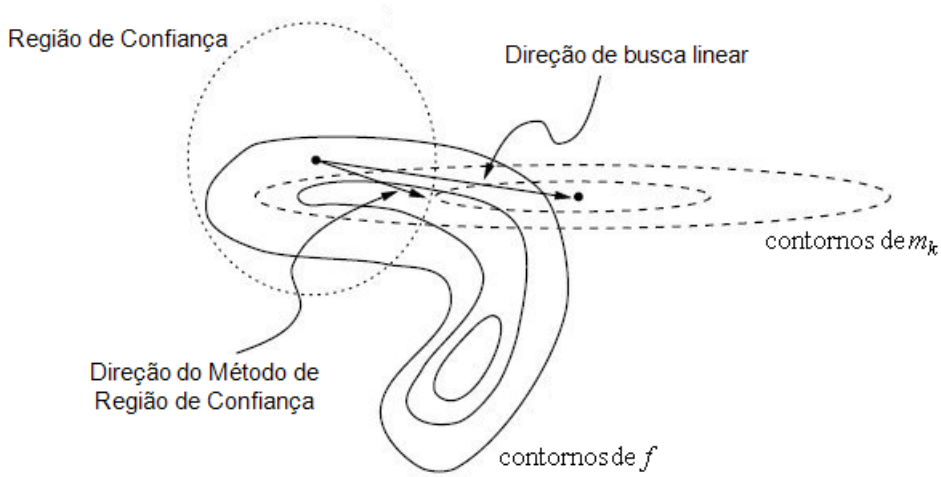

Figura 5.1 – Direções dos métodos de busca linear e região de confiança.

5.1 Algoritmo Padrão do Método de Região de Confiança

No método de região de confiança (RC), em cada iteração é construído um modelo quadrático da função objetivo f e uma região em torno da solução atual x_k de modo que dentro desta região procura-se confiar que o modelo seja uma representação adequada de f. Em seguida, realiza-se uma minimização aproximada deste modelo dentro da região de confiança e, dependendo da solução obtida, pode-se aceitar ou rejeitar o novo ponto

$x^+ = x_k + d_k$, o qual será denominado de ponto "teste". Também é possível analisar se é conveniente aumentar, reduzir ou deixar inalterado o tamanho da região de confiança para a próxima iteração.

O tamanho da região de confiança em cada iteração é fundamental para o desempenho do algoritmo, no seguinte sentido:

- Se a região for muito pequena, pode impedir o algoritmo de fornecer uma direção que permitiria chegar mais próximo do minimizador de f;
- Se a região for muito grande, o minimizador do modelo quadrático pode estar muito longe do minimizador de f e um decréscimo suficiente de f não é obtido, indicando que o tamanho da região pode ser reduzido e o processo de minimização é repetido.

Considerando o problema irrestrito em (5.1), o modelo quadrático de f em torno do ponto corrente x_k é dado por:

$$m_k(d) \quad = f_k + \nabla f_k^T d + \tfrac{1}{2} d^T B_k d, \tag{5.3}$$

em que o vetor $d \in \mathbb{R}^n$ é a direção a ser tomada simultaneamente com o tamanho do passo, $f_k = f(x_k)$, $\nabla f_k = \nabla f(x_k)$ e B_k é alguma matriz simétrica, podendo ser uma aproximação da Hessiana ou a Hessiana exata $\nabla^2 f(x_k)$. Quando o método é baseado em $B_k = \nabla^2 f(x_k)$, é denominado de método de Newton com regiões de confiança.

Para a obtenção de cada direção d_k, procura-se uma solução do seguinte subproblema:

$$\begin{array}{ll} \text{Min}_{d \in \mathbb{R}^n} & m_k(d) \\ \text{s.a.} & \|d\| \leq \Delta_k, \end{array} \tag{5.4}$$

onde $\Delta_k > 0$ é o raio da região de confiança e $\|.\|$ indica uma norma arbitrária em $\mathbb{R}^n$, considerada aqui como a norma Euclidiana, ou seja, uma região esférica ao redor da estimativa corrente, representada pelo conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_k\| \leq \Delta_k\}$.

Analisando o gradiente do modelo m_k, para o caso em que B_k é uma matriz definida positiva, tem-se:

$$\nabla m_k(d) = \nabla f_k + B_k d = 0 \Rightarrow d = d_k^I = -B_k^{-1} \nabla f_k \tag{5.5}$$

e a solução de (5.4) é o minimizador irrestrito d_k^I se $\left\| B_k^{-1} \nabla f_k \right\| \leq \Delta_k$, denominado de "passo completo". Em outros casos, a solução de (5.4) não é tão fácil de se obter, mas, apesar disso, em termos de convergência global, é suficiente encontrar uma solução aproximada para o problema (5.4). Essa questão será abordada na seção 5.2.

Tipicamente, o critério utilizado para escolher o tamanho do raio Δ_k da região de confiança para a próxima iteração é baseado na concordância entre o modelo m_k e a função

objetivo f na iteração anterior, dada pela razão:

$$\rho_k = \frac{f(x_k) - f(x_k + d_k)}{m_k(0) - m_k(d_k)}, \tag{5.6}$$

onde o numerador é a redução "verdadeira" na função objetivo e o denominador é a redução "predita" pelo modelo quadrático. Pode-se notar que a redução predita será sempre não negativa, pois a direção d_k é obtida minimizando m_k em uma região que inclui $d = 0$. Dessa forma, são estabelecidos os seguintes critérios:

- Se ρ_k for negativo, significa que $f(x_k + d_k) > f(x_k)$, ou seja, o valor da função objetivo aumentou, e então a concordância entre o modelo m_k e f não está muito boa. Assim, a direção d_k não é aceita e o raio da região de confiança é reduzido.
- Se ρ_k for positivo, ou seja, houve uma redução na função objetivo, a direção d_k é aceita. Nesse caso, há duas possibilidades:
  - Se ρ_k estiver próximo de 1, a direção é aceita e o raio da região de confiança pode ser aumentado, pois a redução efetiva em f foi tão boa quanto a redução no modelo;
  - Se ρ_k for positivo mas não estiver suficientemente próximo de 1, a direção é aceita e o tamanho da região de confiança não é alterado.

Baseado nesses critérios, é adotada a seguinte atualização para o raio da região de confiança (NOCEDAL; WRIGHT, 1999; CONN; GOULD; TOINT, 2000):

$$\Delta_{k+1} \in \begin{cases} [\gamma_0\Delta_k, \gamma_1\Delta_k], & \text{se} \quad \rho_k < \eta_1, \\ [\gamma_1\Delta_k, \Delta_k], & \text{se} \quad \rho_k \in [\eta_1, \eta_2), \\ [\Delta_k, \gamma_2\Delta_k], & \text{se} \quad \rho_k \geq \eta_2. \end{cases} \tag{5.7}$$

Em geral, tem-se os seguintes valores para os parâmetros em (5.7): $\eta_1 = 0,01$, $\eta_2 = 0,9$, $\gamma_0 = 0,25$, $\gamma_1 = 0,5$ e $\gamma_2 = 2,0$. Esses valores são determinados experimentalmente, de modo que satisfaçam as restrições $0 < \eta_1 \leq \eta_2 < 1$ e $0 < \gamma_0 \leq \gamma_1 < 1 < \gamma_2$. O valor de η_1 é estritamente positivo, mas próximo de zero, de modo que se $\rho_k < \eta_1$, a direção não é aceita. O valor de η_2 é próximo de 1, de modo que, se $\rho_k \geq \eta_2$, a direção é aceita.

Outra questão envolvendo parâmetros é a escolha do valor inicial Δ_0, sendo que tipicamente assume-se $\Delta_0 = 1,0$ ou $\Delta_0 = 0,1\,\|\nabla f_0\|$. Outra técnica para determinar Δ_0 consiste em determinar o raio máximo que garante uma boa concordância entre o modelo e a função objetivo na direção -$\|\nabla f(x_0)\|$, usando um processo iterativo e monitorando a concordância entre o modelo e a função objetivo ao longo da direção de máxima descida (SARTENAER, 1997).

Alguns algoritmos também utilizam o fato que se d_k está estritamente no interior da região de confiança, o valor atual de Δ_k não está interferindo no progresso do algoritmo e assim Δ_{k+1} não precisa ser alterado. A seguir é apresentado o algoritmo básico do método de região de confiança para problemas de minimização irrestritos (NOCEDAL; WRIGHT, 1999).

Algoritmo 1: Método de Região de Confiança (MRC)

Dado o valor inicial x_0, o raio inicial $\Delta_0 \in (0, \Delta_{max})$, uma tolerância $\epsilon > 0$ e as constantes satisfazendo $0 < \gamma_0 \leq \gamma_1 < 1 \leq \gamma_2$, $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$.
Calcule $f(x_0)$ e faça $k = 0$.
repita
  Obtenha d_k resolvendo "aproximadamente" (5.4);
  Calcule ρ_k conforme (5.6);
  se $\rho_k \geq \eta_1$ **então**
    Faça $x_{k+1} = x_k + d_k$;
  senão
    Faça $x_{k+1} = x_k$;
  fim se
  Atualize o raio de região de confiança conforme (5.7);
  $k = k + 1$
até $\|\nabla f(x_k)\| \leq \epsilon$;

A estrutura do algoritmo 1 mostra que em cada iteração é definido um modelo m_k, o qual espera-se que tenha um comportamento similar ao da função objetivo dentro de uma vizinhança de x_k, denominada de região de confiança. A minimização desse modelo dentro da região de confiança fornece a solução d_k, denominada de "direção teste". Depois de obtido d_k, a função objetivo é calculada no ponto teste $x_k + d_k$ e comparada com o valor predito pelo modelo nesse ponto. Como já referido, ocorrem os seguintes casos:

- O ponto $x_k + d_k$ é aceito e o raio da região de confiança pode ser expandido ou permanecer inalterado;
- O ponto $x_k + d_k$ é rejeitado e o raio é reduzido, para que o modelo forneça uma melhor predição nessa região menor.

A solução do subproblema (5.4) pode ser obtida com alta precisão ou apenas aproximadamente. O primeiro caso é baseado na escolha ótima d e λ de modo a satisfazer as condições do teorema 4.7 apresentado no capítulo 4. Considerando que B_k é definida

positiva, se $\left\|B_k^{-1}\nabla f_k\right\| \leq \Delta_k$ tem-se $\lambda = 0$ e a solução é definida como $\bar{d} = B_k^{-1}\nabla f_k$. Caso contrário, $\bar{d} = d(\lambda)$, com $d(\lambda) = -(B_k + \lambda I)^{-1}\nabla f_k$ e o valor de λ deve ser obtido tal que $\|d(\lambda)\| = \Delta_k$. Por outro lado, se B_k é indefinida, recai-se em um chamado "caso difícil" (em inglês, *hard case*) e o método de Newton falha na obteção da solução de $\|d(\lambda)\| = \Delta_k$, necessitando de modificações.

Encontrar uma solução exata do subproblema (5.4) nem sempre é possível, mas para propósitos de convergência é suficiente encontrar uma solução aproximada para o subproblema. Isso significa encontrar uma solução que forneça no mínimo tanta redução no modelo m_k quanto a redução obtida pelo ponto de *Cauchy*. O passo de *Cauchy*, denotado por d_k^C, é o minimizador de m_k ao longo da direção de máxima descida $-\nabla f(x_k)$, limitada pela região de confiança.

A Figura 5.2 ilustra um ponto de *Cauchy* estritamente interior à região de confiança. As elipses representam as curvas de nível de m_k e a área hachurada em vermelho representa o conjunto de pontos que são melhores que o ponto de *Cauchy*. A demonstração da convergência global do método de região de confiança pode ser encontrada em Nocedal e Wright (1999), Conn, Gould e Toint (2000).

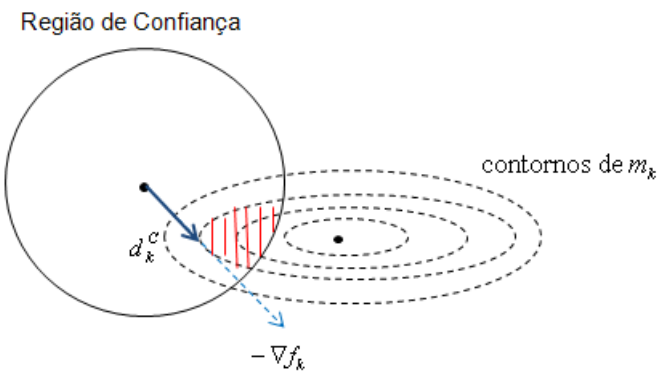

Figura 5.2 – Ponto de Cauchy.

A obtenção do ponto de *Cauchy* tem baixo custo computacional e importância fundamental na decisão de aceitar ou não uma solução aproximada do subproblema de região de confiança, pois o método será globalmente convergente se fornecer, a cada iteração, direções que obtenham uma redução no modelo quadrático m_k de, no mínimo, um múltiplo do decréscimo obtido pelo ponto de Cauchy. A área hachurada da Figura 5.2 corresponde ao conjunto de pontos que fornecem esse decréscimo e satisfazem a seguinte relação:

$$pred \geq m_k(0) - m_k(d_k^C), \tag{5.8}$$

onde $pred = m_k(0) - m_k(d_k)$. O ponto de *Cauchy* satisfaz a condição

$$m_k(0) - m_k(d_k^C) \geq c_1 \|\nabla f_k\| \min\left\{\Delta_k, \frac{\|\nabla f_k\|}{\|B_k\|}\right\}, \tag{5.9}$$

para alguma constante $c_1 \in (0, 1]$ e assim, as soluções aproximadas d_k devem satisfazer a condição de decréscimo dada por

$$m_k(0) - m_k(d_k) \geq c_1 \|\nabla f_k\| \min\left\{\Delta_k, \frac{\|\nabla f_k\|}{\|B_k\|}\right\}. \tag{5.10}$$

A razão para se obter soluções melhores que a solução dada pelo ponto de *Cauchy* é que, ao se adotar apenas o ponto de Cauchy como a direção, simplesmente está se considerando o método do Gradiente com um escolha particular do tamanho do passo. Porém, este método pode ter um desempenho insatisfatório e convergência lenta mesmo se os passos ótimos forem usados a cada iteração.

O passo de *Cauchy* pode ser calculado por

$$d_k^C = \nu_k d_k^s, \quad \text{com} \quad d_k^s = -\tfrac{\Delta_k}{\|\nabla f_k\|}\nabla f_k \tag{5.11}$$

sendo que o vetor d_k^s é obtido ao minimizar a aproximação linear de f dentro da região de confiança dado por

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & m_k(d) = f_k + \nabla f_k^T d \\ \text{s.a.} & \|d\| \leq \Delta_k \end{array} \tag{5.12}$$

e o escalar $\nu_k > 0$ é obtido explicitamente considerando os seguintes casos:

- Se $\nabla f_k^T B_k \nabla f_k \leq 0$, a função $m_k(\nu d_k^s)$ decresce conforme ν cresce, para $\nabla f_k \neq 0$. Logo, ν_k é o maior escalar tal que νd_k^S permaneça na região de confiança, ou seja, $\nu_k = 1$;

- Se $\nabla f_k^T B_k \nabla f_k > 0$, a função $m_k(\nu d_k^s)$ é uma quadrática convexa em ν, então ou ν_k é o minimizador irrestrito desta quadrática, $\nu_k = \|\nabla f_k\|^3 / \Delta_k \nabla f_k^T B_k \nabla f_k$, ou o valor limite $\nu_k = 1$ (d_k^C está na fronteira da região).

Definindo a expressão para o ponto de Cauchy como a direção obtida com a minimização do modelo quadrático ao longo da direção de máxima descida tem-se

$$d_k^C = -\alpha_k \nabla f_k = -\frac{\nabla f_k^T \nabla f_k}{\nabla f_k^T B_k \nabla f_k} \nabla f_k \tag{5.13}$$

Na próxima seção é apresentado o método utilizado para se obter soluções aproximadas do subproblema (5.4). Este método começa calculando o ponto de *Cauchy* e

então tenta melhorá-lo durante o processo de resolução. Grande parte da fundamentação teórica do método de região de confiança apresentada neste capítulo foi baseada em Nocedal e Wright (1999). As relações em (5.8)-(5.10) são usadas na análise de convergência do método apresentada nessa mesma referência.

5.2 Algoritmo Relacionado: Gradiente Conjugado de Steihaug

O método do gradiente conjugado de Steihaug (GCS) é um método bastante utilizado para encontrar uma solução aproximada de subproblemas de região de confiança como em (5.4) e é baseado em uma modificação do método do gradiente conjugado (GC), apresentado no Apêndice B, um algoritmo iterativo para resolver sistemas lineares com matrizes simétricas definidas positivas.

O algoritmo 2 (NOCEDAL; WRIGHT, 1999) apresenta o método GCS para encontrar uma solução aproximada do subproblema de região de confiança dado por

$$\begin{array}{ll} \text{Min}_{d\in\mathbb{R}^n}\ m_k(d) & = f_k + \nabla f_k^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d \\ \text{sujeito a} & \|d\| \leq \Delta_k \end{array} \tag{5.14}$$

O método de Steihaug (STEIHAUG, 1983) é baseado no método do gradiente conjugado para resolver o subproblema (5.14), mesmo sem supor que a matriz B_k seja definida positiva, ao contrário do método GC que requer a matriz simétrica definida positiva. Dessa maneira, o método GCS difere do método gradiente conjugado em dois critérios de parada adicionais, podendo ocorrer as seguintes situações:

(i) $p_j^T B p_j > 0$ em cada iteração. Neste caso, o modelo quadrático é convexo e o método pode ser continuado normalmente.

(ii) $p_j^T B p_j \leq 0$. Isso significa que o modelo não é estritamente convexo e m_k é ilimitado inferiormente ao longo da linha $z_j + \sigma p_j$. Logo, é necessário a minimização de m_k ao longo de $z_j + \sigma p_j$ o máximo possível de maneira que se permaneça na região de confiança. Nesse caso, obtem-se a solução final intersectando a direção corrente com a fronteira da região de confiança: $\|z_j + \sigma p_j\| = \Delta_k$.

(iii) $\|z_{j+1}\| \geq \Delta_k$. Neste caso, o ponto z_{j+1} violou a fronteira da região de confiança e, da mesma maneira que em (ii), a solução final será obtida intersectando a direção corrente com a fronteira da região de confiança.

Algoritmo 2: Gradiente Conjugado de Steihaug (GCS)

Dada uma tolerância $\epsilon_{gcs} > 0$, as inicializações x_k, ∇f_k e B_k.
$z_0 = 0$;
$r_0 = \nabla f_k$; (resíduo inicial)
$p_0 = -r_0$; (direção de busca inicial)
$j = 0$; (iteração interna do GCS)
se $\|r_0\| < \epsilon_{gcs}$ **então**
  $d_k = z_0 = 0$;
fim se
enquanto $\|r_j\| > \epsilon_{gcs}$ **faça**
  $\kappa_j = p_j^T B_k p_j$;
  se $\kappa_j \leq 0$ **então**
    Encontre $\sigma \geq 0$ tal que $d_k = z_j + \sigma p_j$ satisfaça $\|d_k\| = \Delta_k$;
    Retorne d_k;
  fim se
  $\alpha_j = \frac{r_j^T r_j}{p_j^T B_k p_j}$
  $z_{j+1} = z_j + \alpha_j p_j$
  se $\|z_{j+1}\| \geq \Delta_k$ **então**
    Encontre $\sigma \geq 0$ tal que $d_k = z_j + \sigma p_j$ satisfaça $\|d_k\| = \Delta_k$;
    Retorne d_k;
  fim se
  $r_{j+1} = r_j + \alpha_j B_k p_j$
  se $\|r_{j+1}\| < \epsilon_{gcs} \|r_0\|$ **então**
    Retorne $d_k = z_{j+1}$;
  fim se
  $\beta_{j+1} = \frac{r_{j+1}^T r_{j+1}}{r_j^T r_j}$
  $p_{j+1} = -r_{j+1} + \beta_{j+1} p_j$
fim enqto

Para evitar iterações que fazem pouco progresso na redução da função modelo quadrática, o algoritmo termina se $\|r_{j+1}\| < \epsilon_{gcs} \|r_0\|$. Outra condição de parada que pode ser adotada é o número máximo de iterações para o algoritmo.

Nas situações (ii) e (iii), para obter σ tal que satisfaça $\|d_k\| = \Delta_k$, é escolhida a

raiz positiva da equação quadrática em σ:

$$\begin{aligned} \|z_j + \sigma p_j\| &= \Delta_k \Rightarrow \\ \|z_j + \sigma p_j\|^2 &= \Delta_k^2 \Rightarrow \\ \underbrace{\|p_j\|^2}_{a} \sigma^2 + \underbrace{2p_j^T z_j}_{b} \sigma + \underbrace{\|z_j\|^2 - \Delta_k^2}_{c} &= 0 \Rightarrow \\ a\sigma^2 + b\sigma + c &= 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Uma característica essencial desse método é a inicialização $z_0 = d_0 = 0$. Após a primeira iteração, assumindo que $\|r_0\| \geq \epsilon_k$ e $p_0^T B_k p_0 = \nabla f_k^T B_k \nabla f_k > 0$, tem-se

$$z_1 = \alpha_0 p_0 = \frac{r_0^T r_0}{p_0^T B_k p_0} p_0 = -\frac{(\nabla f_k)^T \nabla f_k}{(\nabla f_k)^T B_k \nabla f_k} \nabla f_k, \tag{5.16}$$

que é exatamente o ponto de *Cauchy*, se $\|z_1\| < \Delta_k$. Caso contrário, se $p_0^T B_k p_0 \leq 0$, a condição (ii) ocorre e o algoritmo retorna o ponto de Cauchy $d = \rho p_0 = -\Delta_k (\nabla f_k) / \|\nabla f_k\|$. Em ambos os casos, o algoritmo termina em um ponto d_k para o qual $m_k(d_k) \leq m_k(d_k^C)$.

Os passos subsequentes asseguram que o ponto final d_k satisfaz $m_k(d_k) \leq m_k(z_1)$. No caso em que $\|z_1\| \geq \Delta_k$, a condição (iii) é ativada e, assim, o algoritmo termina em um ponto de Cauchy. Visto que cada ponto é no mínimo tão bom quanto o ponto de Cauchy na redução do modelo m_k, o algoritmo de Steihaug é globalmente convergente.

Outra propriedade importante em razão da inicialização $z_0 = 0$ é que cada estimativa z_k tem norma maior que a estimativa anterior. Isso implica que o método deve ser interrompido assim que a fronteira da região de confiança for atingida, pois nenhuma outra iteração que reduza o modelo m_k estará dentro desta região. Essa propriedade é declarada no seguinte teorema.

Teorema 5.1 *A sequência de vetores gerada pelo Algoritmo GC-Steihaug satisfaz*

$$0 = \|z_0\|_2 < ... < \|z_j\|_2 < \|z_{j+1}\|_2 < ... < \|d_k\|_2 \leq \Delta_k \tag{5.17}$$

Prova: ver Nocedal e Wright (1999), Teorema 7.3.

Depois de obtida a solução aproximada d_k do subproblema quadrático com região de confiança, por meio do algoritmo do gradiente conjugado de Steihaug, a solução x_k é atualizada para $x_{k+1} = x_k + d_k$ e, para analisar a qualidade desta solução (se ela está fornecendo progresso em direção à solução ótima do problema original), foi aplicado o método de filtros multidimensionais como uma alternativa às funções de mérito, o qual será abordado no próximo capítulo.

Capítulo 6

Método de Filtros

6.1 Filtro Bidimensional

Neste capítulo serão apresentados os principais conceitos do método de filtros, usado como parte da metodologia desenvolvida neste trabalho. O método de filtros foi apresentado em Fletcher e Leyffer (2002) e aplicado para a globalização de métodos de programação quadrática sequencial, mas devido ao seu bom desempenho e robustez tornou-se uma metodologia aplicável em muitas outras áreas.

Considerando o seguinte problema de otimização

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a:} & \begin{array}{rll} c_i(x) = & 0; & i \in E = \{1, ..., m_E\}, \\ c_i(x) \leq & 0; & i \in I = \{1, ..., m_I\}, , \end{array} \end{array} \tag{6.1}$$

pode ser observado que há dois objetivos diferentes - e possivelmente conflitantes - em questão: minimizar a função objetivo e, ao mesmo tempo, satisfazer as restrições, ou seja, minimizar a violação nas restrições do problema de modo que a solução seja factível. No caso da abordagem tradicional com o uso das funções de mérito, como por exemplo, uma função penalidade do tipo

$$\phi_1(x, \mu) = f(x) + \mu \sum_{i \in E} |c_i(x)| + \mu \sum_{i \in I} [c_i(x)]_+ , \tag{6.2}$$

onde $[z]_+ = \max\{0, z\}$ e o escalar positivo μ é o parâmetro de penalidade, esses objetivos conflitantes são combinados em uma única função, na tentativa de forçar progresso em direção à solução. Contudo, isto pode comprometer o processo de convergência se a escolha do parâmetro de penalidade não for adequada.

A principal motivação do trabalho desenvolvido em Fletcher e Leyffer (2002) foi

dispensar o uso da função de mérito, procurando tornar o algoritmo mais robusto e com rápida convergência. A técnica dos filtros utiliza conceitos de dominância "emprestados" da otimização multiobjetivo, e, ao contrário das funções de mérito, trata os dois objetivos conflitantes em (6.1) de forma separada. Assim, são redefinidos dois problemas de minimização da seguinte forma:

$$\text{Min}_{x\in\mathbb{R}} \quad f(x) \quad e \quad \text{Min}_{x\in\mathbb{R}} \quad h(c(x)). \tag{6.3}$$

A otimalidade é medida pela função objetivo f e a factibilidade é medida pela violação das restrições, neste caso pela função $h(c(x)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, que é dada por:

$$h(c(x)) = \left\|c^+(x)\right\|_1 = \sum_{j=1}^{J} c_j^+(x), \tag{6.4}$$

com

$$c_j^+(x) = \begin{cases} |c_j(x)|, & \text{se } j \in E, \\ \max\{0, c_j(x)\}, & \text{se } j \in I, \end{cases} \tag{6.5}$$

o que representa a soma da violação das restrições, com $J = E \cup I$. Contudo, essa situação difere da otimização multiobjetivo no sentido que é essencial encontrar, se possível, um ponto para o qual $h(c(x)) = 0$, tornando o segundo objetivo mais importante, ou seja, a minimização de $h(c(x))$ tem prioridade.

6.1.1 Conceitos

A seguir são apresentadas duas definições, segundo Nocedal e Wright (1999), com relação à estrutura do filtro e ao conceito de dominância da otimização multiobjetivo. Considere o par (f_k, h_k) que denota os valores de $f(x)$ e $h(c(x))$ no ponto x_k.

Definição 6.1 *Um par (f_k, h_k) é dito dominar outro par (f_l, h_l) se, e somente se, $f_k \leq f_l$ e $h_k \leq h_l$.*

No contexto da programação não-linear, a definição 6.1 significa que o ponto x_k é no mínimo tão bom quanto x_l em relação a ambas as medidas, otimalidade e factibilidade.

Definição 6.2 *Um filtro é uma lista de pares (f_l, h_l) tal que nenhum par seja dominado por qualquer outro. Um par (f_k, h_k) é dito ser aceito para inclusão no filtro se este não for dominado por nenhum outro par do filtro.*

A partir destes conceitos é então possível definir o filtro como um mecanismo para a aceitação de um passo, ou seja, para aceitar ou rejeitar um ponto "teste". Quando

$(f(x^+), h(x^+))$ é aceito para o filtro, significa que houve uma melhora na função objetivo ou uma redução na violação das restrições, ou seja, ocorreu uma das seguintes condições:

$$f(x^+) < f(x_j) \;\; \textbf{ou} \;\; h(x^+) < h(c(x_j)), \; \forall j \in \Gamma^{(k)}, \tag{6.6}$$

em que $\Gamma^{(k)}$ denota o filtro com as entradas $(f(x_j), h(c(x_j)))$ das iterações de índice j, com $j \leq k$.

Depois que um par (f_k, h_k) é aceito para inclusão no filtro, ele é adicionado ao filtro e então são removidos do filtro todos os pares dominados por (f_k, h_k), tornando o filtro uma estrutura bastante dinâmica. Um filtro pode ser representando graficamente no plano (f, h), como mostra a Figura 6.1.

Pode-se notar que cada ponto (f_l, h_l) no filtro cria uma região retangular (infinita) e a união desses blocos representa o conjunto de todos os pontos que não são aceitáveis para o filtro. Mais especificamente, os pontos aceitos para o filtro são aqueles que estão abaixo e à esquerda da linha sólida na Figura 6.1, como representa o ponto em vermelho.

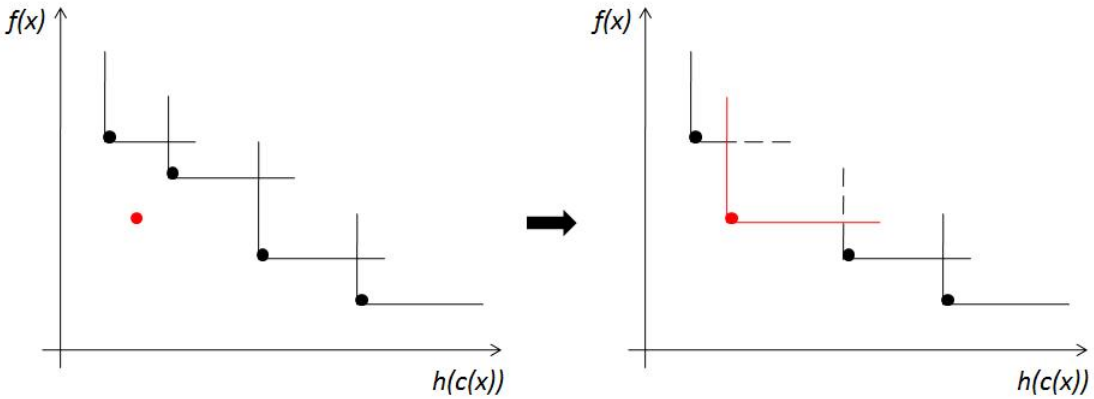

Figura 6.1 – Ilustração gráfica de um filtro com 4 pares.

Dessa maneira, podemos definir o conjunto dos pontos x que pertencem à região proibida do filtro como:

$$\widehat{\Gamma} = \{x \in \mathbb{R}^n : (f(x), h(x)) \text{ é dominado por algum } (f_l, h_l) \in \Gamma\}.$$

6.1.2 Margens para o Filtro

Para exigir uma redução suficiente nas componentes f e h do filtro, é definida uma margem para o filtro, ou seja, é produzido um envelope abaixo do filtro para prevenir que pontos arbitrariamente próximos ao filtro sejam aceitos. Esta ideia é ilustrada na Figura 6.2 onde o envelope é representado pela linha tracejada.

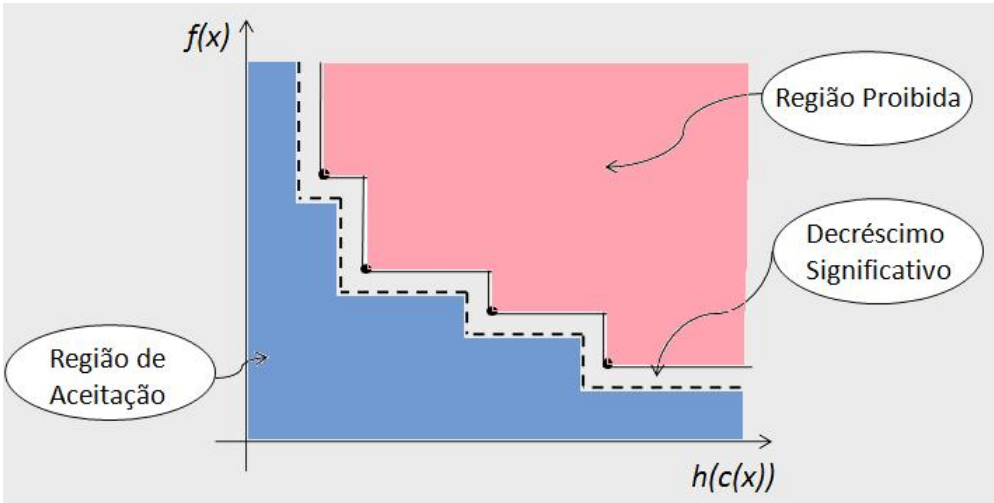

Figura 6.2 – Margem reta para o filtro.

Essa margem para o filtro é denominada de "margem reta", definindo então um conceito de dominância similar à definição 6.1, da seguinte maneira (NOCEDAL; WRIGHT, 1999):

Definição 6.3 *Dado $0 < \beta < 1$, um par (f_k, h_k) é dito dominar outro par (f_l, h_l) se, e somente se, $f_k \leq f_l - \beta h_l$ e $h_k \leq (1-\beta)h_l$.*

6.1.3 Exemplo Ilustrativo da Dinâmica do Filtro

Para observar o funcionamento da técnica dos filtros, considere o seguinte exemplo numérico (BAZARAA; SHERALI; SHETTY, 1993):

$$\begin{array}{lll} \text{Min}_x & f(x) = (x_1-2)^4 + (x_1-2x_2)^2 & \\ \text{sujeito a:} & c_1(x) = x_1 + x_2 - 3 & = 0 \\ & c_2(x) = x_1^2 - x_2 & \leq 0. \end{array} \tag{6.7}$$

A solução ótima desse problema, usando o solver do software LINGO, é dada por $x_1^* = 1,3028$, $x_2^* = 1,6972$ e $f(x_1^*, x_2^*) = 4,6114$.

As componentes do filtro bidimensional para o problema de otimização (6.7) são as medidas de otimalidade e factibilidade, dadas respectivamente por:

$$\begin{array}{ll} f^+ & = (x_1-2)^4 + (x_1-2x_2)^2, \\ h^+ & = |x_1 + x_2 - 3| + \max\{0, x_1^2 - x_2\}. \end{array} \tag{6.8}$$

Como o interesse aqui é apenas ilustrar a atuação do filtro no processo de resolução de um problema de otimização, o problema em (6.7) foi resolvido pelo método de regiões

de confiança com o auxílio da função *quadprog* do Matlab. O processo consistiu de uma sequência de minimizações do seguinte subproblema quadrático, associado com (6.7):

$$\begin{array}{lll} \text{Min}_d & \nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x) d & \\ & c_1(x) + \nabla c_1(x)^T d & = 0, \\ \text{sujeito a:} & c_2(x) + \nabla c_2(x)^T d & \leq 0, \\ & \|d\| & \leq \Delta, \end{array} \tag{6.9}$$

em que $d = [d_1 \; d_2]^T$ é o vetor solução e Δ é o raio da região de confiança. Os gradientes da função objetivo $f(x)$ e das restrições $c_1(x)$ e $c_2(x)$ são dados por:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4(x_1 - 2)^3 + 2(x_1 - 2x_2) \\ -4(x_1 - 2x_2) \end{bmatrix}, \nabla c_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \nabla c_2(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{6.10}$$

e a matriz Hessiana exata $\nabla^2 f(x)$ é dada por

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 12(x_1 - 2)^2 + 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}. \tag{6.11}$$

As estimativas iniciais utilizadas foram $x^{(0)} = [1,0 \; 1,0]^T$ e $\Delta^{(0)} = 1,0$. A entrada inicial do filtro foi dada por $\Gamma^{(0)} = (-\infty, \text{u}) = (-\infty, 100)$, sendo que para problemas de minimização a medida de otimalidade é fixada em $-\infty$ ou em um número grande negativo, e $u = \max\{100; tt * h(c(x^{(0)}))\}$ denota um limite superior sobre a violação das restrições, com $tt = 1,25$. Essa é uma condição inicial para que um ponto seja aceito e eventualmente pode prevenir situações (pouco prováveis) em que uma sequência de pontos com $f^{(k+1)} < f^{(k)}$ e $h^{(k+1)} > h^{(k)}$ $(h^{(k)} \to \infty)$ seja aceita (FLETCHER; LEYFFER, 2002).

A Tabela 6.1 mostra o processo de convergência do método aplicado para a resolução do problema (6.7). A coluna $d^{(k)}$ mostra a solução do subproblema quadrático obtida na iteração k, a coluna x^+ representa o ponto teste dado por $x^+ = x^{(k-1)} + d^{(k)}$ e a coluna (f^+, h^+) a entrada do filtro associada ao ponto x^+. A coluna Teste indica se o ponto x^+ foi aceito ou não para inclusão no filtro e a coluna Raio indica o tamanho de do raio da região de confiança.

Assim, o filtro é composto de 4 entradas, considerando a entrada inicial $\Gamma^{(0)}$, cada qual com as medidas de otimalidade e infactibilidade associadas ao ponto teste x^+. Na Figura 6.3 pode ser observada a convergência da violação das restrições h^+ para próximo de zero, o que significa que as restrições são satisfeitas dentro da tolerância especificada de 10^{-4}, e o valor da função objetivo na solução final é representada pela otimalidade $f^+ = 4,6114$.

Tabela 6.1 – Processo de convergência do problema (6.7).

It.	$d^{(k)}$	x^+	(f^+, h^+)	Teste	Decisão	Raio
$k=1$	$\begin{pmatrix} 0,3333 \\ 0,6667 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,3333 \\ 1,6667 \end{pmatrix}$	$(4,1975;\ 0,1111)$	Sim	$x^{(1)} \leftarrow x^+$	$\Delta^{(1)} = 1,0$
$k=2$	$\begin{pmatrix} -0,0303 \\ 0,0303 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,3030 \\ 1,6970 \end{pmatrix}$	$(4,6079;\ 0,0009)$	Sim	$x^{(2)} \leftarrow x^+$	$\Delta^{(2)} = 1,0$
$k=3$	$\begin{pmatrix} -0,0002 \\ 0,0002 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,3028 \\ 1,6972 \end{pmatrix}$	$(4,6114;\ 6,48.10^{-8})$	Sim	$x^{(3)} \leftarrow x^+$	$\Delta^{(3)} = 1,0$

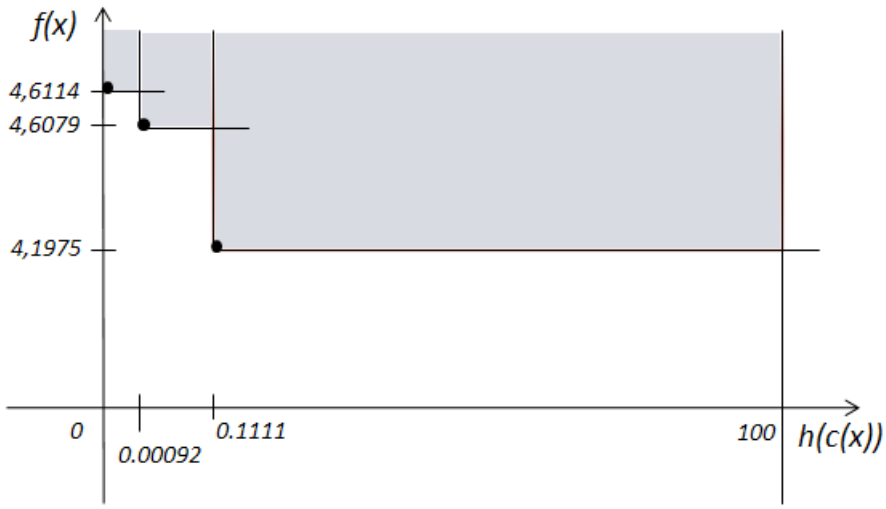

Figura 6.3 – Filtro associado com a resolução do problema (6.7).

6.2 Filtro Multidimensional

Os trabalhos relacionados com filtros multidimensionais em geral são voltados para resolução de problemas de mínimos quadrados não lineares e sistemas de equações não lineares, em que a dimensão do vetor de entrada do filtro é igual ao número de restrições do problema. Alternativamente, as restrições podem ser agrupadas em subsistemas para os quais a violação das restrições pode ser calculada como um todo, usando a norma do vetor contendo as violações das restrições de cada grupo.

Seguindo a filosofia do caso bidimensional, o vetor correspondente às entradas do filtro fornece uma medida de infactibilidade multidimensional, usada para avaliar se uma solução x^+ fornecida é apropriada e então decidir se é aceita ou não. De fato, no contexto de sistemas de equações não lineares, não há mais uma função objetivo, mas ainda existem objetivos conflitantes: levar cada violação das restrições para zero como uma questão independente.

A seguir, baseado em Gould, Leyffer e Toint (2004), são apresentados alguns conceitos e definições que auxiliam a estruturar a metodologia do algoritmo de filtros

multidimensionais. A noção do filtro baseada no conceito de dominância é que um ponto x_1 (considerado aqui como o vetor solução x_1) domina um ponto x_2 se

$$|c_j(x_1)| \leq |c_j(x_2)| \ ; \quad j = 1, ..., m \tag{6.12}$$

em que m é o número de restrições do problema para o caso geral. Portanto, se x_1 domina x_2 e estamos interessados em convergência para pontos críticos de primeira ordem, x_2 é descartado visto que x_1 é, no mínimo, tão bom quanto ele, para cada componente da entrada do filtro. Assim, o filtro é uma lista Γ de vetores m-dimensionais da forma $\{c_{1,k}, c_{2,k}, ..., c_{m,k}\}$ tal que, para cada componente $c_{j,k}$, $c_{j,l} \in \Gamma$ com $k \neq l$

$$|c_{j,k}| < |c_{j,l}| \quad \text{para no mínimo um} \quad j \in \{1, ..., m\}, \tag{6.13}$$

e $c_{j,k}$ é a j-ésima componente de c_k. Assim, uma nova solução x_k^+ é aceita se ela não é dominada por nenhum outro ponto do filtro.

Similar ao caso bidimensional, para evitar a situação de aceitar um ponto x_k^+ que tenha $c(x_k^+)$ arbitrariamente próximo de ser dominado por outro ponto já incluso no filtro, é adicionada uma margem para o filtro tal que um novo ponto teste x_k^+ é aceito, se e somente se,

$$\forall \ c_l \in \Gamma, \quad \exists j \in \{1, ..., m\} : \quad \left|c_j(x_k^+)\right| \leq |c_{j,l}| - \gamma_m \left\|c_k^+\right\|, \tag{6.14}$$

onde $\gamma_m \in (0, 1/\sqrt{m})$. Esta fórmula adiciona a margem para o filtro em função da violação das restrições no ponto teste x_k^+. Para evitar ciclos e assumindo que o ponto teste x_k^+ satisfaz (6.14), ele é adicionado ao filtro e pode-se remover do filtro todos os pontos que são dominados por este último adicionado. O critério para remover uma entrada c_l do filtro é definido como

$$\exists \ c_q \in \Gamma, \quad \forall j \in \{1, ..., m\}, \quad |c_{j,l}| \geq |c_{j,q}| \, . \tag{6.15}$$

Se o ponto teste x_k^+ não é aceito para o filtro, ele pode ainda ser aceito pelo mecanismo usual do método de região de confiança para decidir se um ponto é aceito ou não. Isto requer $\|d_k\| \leq \Delta_k$ e ρ_k suficientemente positivo, onde ρ_k é a razão obtida com relação à aproximação do modelo m_k para com a função objetivo, definida em (5.6).

Nesse sentido, o algoritmo desenvolvido no capítulo 7 combina os critérios dos métodos de filtro multidimensional e de região de confiança para testar a qualidade da solução obtida, permitindo que um maior número de "pontos" testes sejam analisados e eventualmente aceitos.

6.2.1 Exemplo Numérico

Para ilustrar o uso do filtro multidimensional, consideramos um exemplo simples de um sistema de equações não lineares dado por (BIAZAR; GHANBARY, 2008)

$$\begin{cases} c_1(x) = x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 & = 0 \\ c_2(x) = x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 & = 0 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{bmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{bmatrix} = 0, \tag{6.16}$$

o qual pode ser visto como um problema de factibilidade não linear, em que se procura obter uma solução factível para o conjunto de restrições. O sistema em (6.16) apresenta a solução exata $x^* = (1,0 \quad 1,0)^T$.

Para a resolução desse sistema, utilizamos o algoritmo geral RCGC, o qual será apresentado no próximo capítulo. Contudo, visto que o objetivo deste exemplo numérico é ilustrar o funcionamento do filtro multidimensional, o algoritmo geral não será detalhado nesta seção, ficando a resolução de (6.16) definida pelo seguinte problema de minimização

$$\text{Min}_{x\in\mathbb{R}^n} \quad f(x) = \tfrac{1}{2}\left\|F(x)\right\|^2, \tag{6.17}$$

com $F(x)$ dado em (6.16). Além disso, a resolução do problema (6.17) é baseada na minimização de uma sequência de subproblemas linearizados, dentro de uma região de confiança de raio Δ, representados por:

$$\begin{array}{ll} \text{Min}_{d\in\mathbb{R}^n} & \frac{1}{2}\left\|J(x)d + F(x)\right\|_2^2 \\ \text{sujeito a} & \|d\| \leq \Delta. \end{array} \tag{6.18}$$

A seguir são apresentados os resultados obtidos, de maneira a exemplificar os conceitos e o processo de convergência do método de filtros multidimensionais.

- **Solução Inicial:** $x^{(0)} = (-10 \quad -10)^T$

Os parâmetros utilizados no *loop* externo foram $\Delta^{(0)} = 1,0$ e $\epsilon = 10^{-4}$. No loop interno, ou seja, no algoritmo GCS foram utilizados $\epsilon_{gc} = 10^{-3}$ e número máximo de iterações igual ao número de variáveis do problema mais uma tolerância de 2 iterações. O algoritmo realizou 12 iterações externas e a Tabela 6.2 mostra as entradas do filtro para cada iteração e a solução obtida. Com esse ponto inicial a entrada inicial do filtro é dada por

$$\Gamma^{(0)} = (\underbrace{c_{j,0}}_{j=1}, \underbrace{c_{j,0}}_{j=2}) = (308 \quad -902), \tag{6.19}$$

onde j representa a j-ésima componente da entrada do filtro.

Analisando a condição (6.14) para decidir se na iteração $k = 1$ a solução $x^+ = (-9,5080 \quad -9,1294)^T$ é aceita, cuja entrada associada ao filtro é dada por

Tabela 6.2 – Solução do sistema (6.16) com ponto inicial $x^{(0)} = (-10 \;\; -10)^T$.

It.	$\Gamma^{(k)} = (c_{1k}, c_{2k})$	$x^{(k)}$
$k = 0$	$(308,000 \;\; -902,000)$	$(-10,0000 \;\; -10,0000)^T$
$k = 1$	$(276,8275 \;\; -702,6683)$	$(-9,5080 \;\; -9,1294)^T$
$k = 2$	$(220,5919 \;\; -391,8746)$	$(-8,5297 \;\; -7,3850)^T$
$k = 3$	$(172,1441 \;\; -183,5120)$	$(-7,5402 \;\; -5,6469)^T$
$k = 4$	$(129,5050 \;\; -60,5076)$	$(-6,4410 \;\; -3,9761)^T$
$k = 5$	$(51,8600 \; 9,3805)$	$(-2,4547 \;\; -3,6453)^T$
$k = 6$	não foi aceita: $(90,9427 \; 347,4922)$	não foi aceita: $(2,3459 \;\; -10,0448)^T$
$k = 7$	não foi aceita: $(134,0913 \;\; -130,0101)$	não foi aceita: $(-5,9200 \;\; -5,6431)^T$
$k = 8$	$(22,6771 \; 29,5086)$	$(-0,6800 \;\; -2,7231)^T$
$k = 9$	$(15,5376 \;\; -6,2215)$	$(-0,5598 \; 1,2751)^T$
$k = 10$	$(1,8599 \;\; -0,7641)$	$(0,7834 \; 1,0394)^T$
$k = 11$	$(0,0460 \;\; -0,0155)$	$(0,9944 \; 1,0005)^T$
$k = 12$	$(0,0000 \;\; -0,0000)$	$(1,0000 \; 1,0000)^T$

$\Gamma^{(1)} = (276,8275 \;\; -702,6683)$, com o parâmetro $\gamma_m = 0,001$ e a medida da violação das restrições no ponto teste dada por $\|c^+\| = 449,6960$, tem-se:

$$\begin{aligned} j = 1: \quad & |276,8275| \leq |308| - 0,001(449,6960) \quad \rightarrow 276,8275 \leq 307.5503, \\ j = 2: \quad & |-702,6683| \leq |902| - 0,001(449,6960) \quad \rightarrow 702,6683 \leq 901.5503. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Para que o ponto seja aceito, ao menos uma das condições para j em (6.20) deve ser satisfeita, ou seja, pelo menos uma das equações do sistema (6.16) tem que ter a infactibilidade reduzida. Logo, como isso ocorreu para $j = 1$ e $j = 2$, o ponto teste foi aceito e, assim, $x^{(1)} \leftarrow x^+$.

Na iteração 6, por exemplo, comparando com as iterações precedentes, a solução obtida $x^+ = (2,3459 \;\; -10,0448)^T$ não foi aceita pois:

$$\begin{aligned} j = 1: \quad & |90,9427| \leq |51,8600| - 0,001(359,1955) \quad \rightarrow 90,9427 > 51,5008, \\ j = 2: \quad & |347,4922| \leq |9,3805| - 0,001(359,1955) \quad \rightarrow 347,4922 > 9,0213. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Neste caso, as componentes da entrada $\Gamma^{(6)}$ do filtro não indicaram redução de infactibilidade com relação ao ponto já obtido na iteração 5 (nenhuma condição para j foi satisfeita). Para ser aceita, a entrada do filtro deve fornecer redução de pelo menos uma componente em relação às outras entradas já adicionadas ao filtro, para que não seja uma entrada dominada por qualquer outra já existente no filtro.

O gráfico (6.4) ilustra o processo de convergência da função residual $F(x)$ no plano bidimensional.

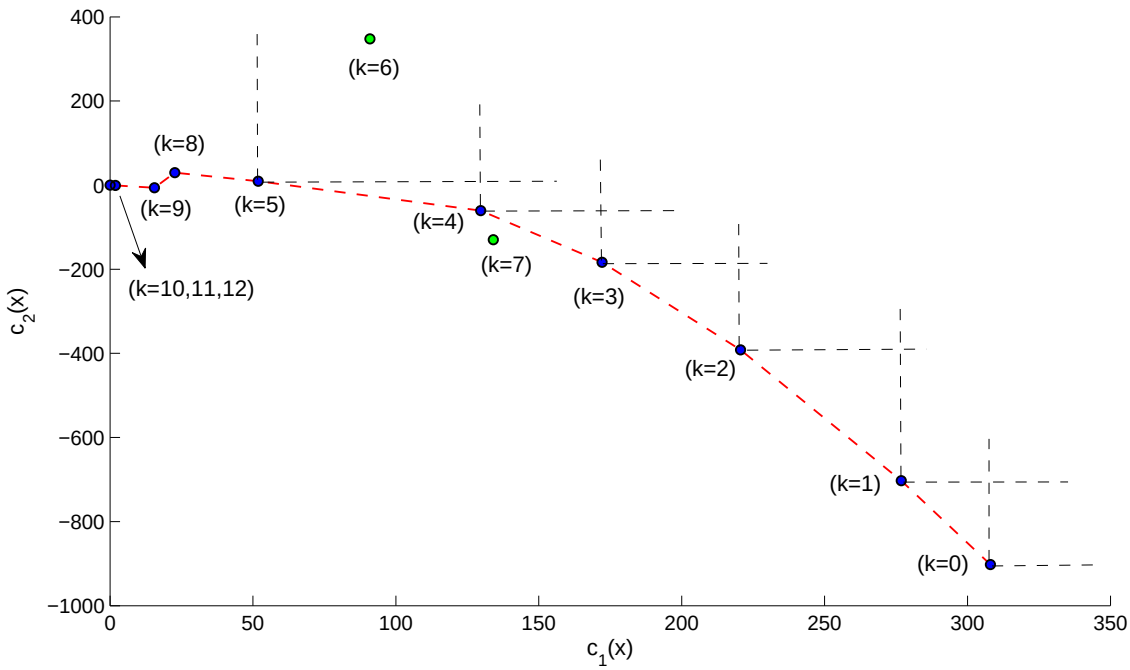

Figura 6.4 – Convergência da função residual do exemplo (6.16).

Nas iterações 6 e 7, a solução obtida (ponto "teste" x^+) não foi aceita pois não houve redução na infactibilidade de nenhuma das componentes da função residual (na iteração 6, por exemplo, a entrada do filtro já está situada na região proibida do método) e, então, o raio da região de confiança foi reduzido, enquanto que nas iterações onde a solução foi aceita, o raio foi aumentado se $\rho_k > \eta_2$, com $\eta_2 = 0,9$. Mesmo não sendo aceita pela técnica de filtros, a solução obtida poderia ainda ser aceita pelo mecanismo usual do método de região de confiança, porém isso não ocorreu pois a condição de que $\|d\| \leq \Delta_k$ e $\rho_k \geq \eta_1$ não foi satisfeita.

Ao considerar o raio inicial $\Delta^{(0)} = 10$ a convergência é alcançada em 7 iterações pois o tamanho do raio permite adotar um tamanho do passo maior na direção obtida (fornecidos simultaneamente). Por exemplo, a primeira iteração resulta em $x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + d_1^{(0)} = -10 + 9,9851 = -0,0149$, que já está bem mais próximo da solução exata $x_1^* = 1,0$.

As componentes do filtro convergem para zero, com tolerância de 10^{-4}, indicando que as equações do sistema foram satisfeitas. Nesse caso, a solução para o problema de minimização (6.17) é também a solução para o sistema de equações em (6.16).

O próximo capítulo apresenta o algoritmo aplicado para resolução do modelo de fluxo de carga proposto no Capítulo 3, o qual é construído com base no problema de mínimos quadrados não lineares e nos métodos de região de confiança, gradiente conjugado de Steihaug e filtros multidimensionais, apresentados nos Capítulos 4, 5 e 6.

Capítulo 7

Algoritmo de Solução RCGC

Neste capítulo é apresentada a estrutura geral do algoritmo utilizado para a resolução do problema de fluxo de carga proposto no capítulo 3. O algoritmo é baseado nos métodos de região de confiança e do gradiente conjugado (algoritmo RCGC), os quais têm sido amplamente usados em otimização não linear devido à sua robustez e eficiência.

Os métodos que incorporam estratégias de região de confiança normalmente se baseiam na minimização de problemas irrestritos, mas podem ser adaptados para sistemas de equações não lineares que eventualmente apresentem limitantes sobre as variáveis. Especificamente, o problema de fluxo de carga modificado apresentado em (3.22), inserido no contexto de minimização do residual $F(x)$, pode ser representado por este tipo de sistema, para o qual buscamos um ponto de operação factível.

Uma alternativa para resolver sistemas de equações não lineares com restrições de caixa, como o sistema em (3.22) que representa o modelo discreto do problema de fluxo de carga, é transformar $F(x) = 0, x \in \Omega$, em um problema de minimização não linear usando a norma Euclidiana de F como função objetivo

$$\mathrm{Min}_{x\in\Omega} \quad f(x) = \tfrac{1}{2}\left\|F(x)\right\|^2, \tag{7.1}$$

onde

$$F(x) = \begin{bmatrix} c_E(x) \\ [c_I(x)]_+ \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

é a função residual $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ associada com o conjunto de equações e inequações do problema de fluxo de carga e $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | l \leq x \leq u\}$ é o conjunto dos limitantes sobre as variáveis do problema.

A partir do problema de mínimos quadrados não lineares em (7.1) é construído um modelo quadrático local de $f(x)$ na vizinhança de um ponto dado x_k, chamado de modelo

de *Gauss-Newton*, dado por

$$m_k(d) \quad = \tfrac{1}{2} \left\| F(x_k) + J(x_k)d \right\|^2, \tag{7.3}$$

onde $J(x_k)$ é a matriz Jacobiana de $F(x)$ em x_k. Desenvolvendo a função $m_k(d)$, tem-se uma função quadrática da forma

$$m_k(d) = \frac{1}{2} \left\| F_k \right\|^2 + F_k^T J_k d + \frac{1}{2} d^T J_k^T J_k d, \tag{7.4}$$

onde a matriz Hessiana $J_k^T J_k$ é, no mínimo, semidefinida positiva. Essa aproximação quadrática procura fazer com que o comportamento da função m_k próximo de x_k seja similar ao da função original. Porém, quando a solução x está muito longe de x_k, essa aproximação pode não ser apropriada e, então, a busca do mínimo de m_k é restringida em uma região em torno de x_k, a qual é chamada região de confiança. Portanto, o subproblema quadrático com região de confiança é dado por

$$\begin{array}{ll} \text{Min}_{d \in \mathbb{R}^n} \; m_k(d) = & \tfrac{1}{2} \left\| F(x_k) + J(x_k)d \right\|^2 \\ \text{sujeito a:} & \|d\| \leq \Delta_k \end{array} \tag{7.5}$$

Métodos de região de confiança são atrativos quando a matriz Hessiana da função objetivo, ou mesmo uma aproximação da Hessiana, é indefinida, mal-condicionada ou singular. Em particular essa situação pode surgir em conexão com o método de *Gauss-Newton* para problemas de mínimos quadrados não lineares onde a matriz está próxima da singularidade.

A ideia é então aplicar um método eficiente para resolução de funções quadráticas, ou, equivalentemente, de sistemas lineares do tipo $Ax = b$, com matrizes esparsas e de grande porte, e não exigindo que a matriz Hessiana seja definida positiva. O método aplicado neste trabalho foi o método do gradiente conjugado de Steihaug, que é uma modificação do método do gradiente conjugado para adaptar a minimização do subproblema quadrático (7.5) dentro da região de confiança.

O algoritmo completo RCGC associa os métodos de região de confiança e do gradiente conjugado de Steihaug apresentados no capítulo 5, pelos algoritmos 1 e 2 respectivamente. O processo de resolução do método RCGC é composto de dois estágios: *loop* interno e *loop* externo. No *loop* externo, o modelo m_k é definido a cada iteração e o método de região de confiança fornece a base do algoritmo. O *loop* interno está relacionado com o método truncado do gradiente conjugado, para gerar soluções aproximadas para o subproblema quadrático (7.5).

Algoritmo 3: Regiões de Confiança e Gradiente Conjugado (RCGC)

1 Dados a solução inicial x_0 e o raio inicial $\Delta_0 > 0$, $\Delta_0 \in (\Delta_{min}, \Delta_{max})$, bem como as constantes $0 < \gamma_0 \leq \gamma_1 < 1 \leq \gamma_2$, $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$.

2 Calcule o residual inicial F_0, inicialize Γ e faça $k = 0$.

3 **para** $k = 0, 1, 2, ...$ **faça**

4 **se** $\|F_k\|_\infty \leq \epsilon_1$ *ou* $\|D_k \nabla f_k\| \leq \epsilon_2$ *ou* $Itout > ItoutMax$ **então**

5 Pare.

6 **fim se**

- Encontre uma solução aproximada d_k do subproblema de região de confiança (7.5) usando o algoritmo GCS;
- Calcule o ponto "teste" $x_k^+ = x_k + d_k$;
- Faça $\tilde{d} = P_\Omega(x_k + d_k) - x_k$ e recalcule $x_k^+ = x_k + \tilde{d}$;
- Calcule o residual F_k^+;
- Defina ρ_k de acordo com (5.6);
- Critério para aceitar o ponto "teste"
  - * Se x_k^+ é aceito para o filtro: faça $x_{k+1} = x_k^+$ e adicione $\Gamma^{(k)}$ para Γ;
  - * Se x_k^+ não é aceito para o filtro: se $\|d\| \leq \Delta_k$ e $\rho_k \geq \eta_1$, faça $x_{k+1} = x_k^+$. Senão, faça $x_{k+1} = x_k$.
- Atualize o raio da região de confiança conforme (5.7);

Faça $k = k + 1$.

7 **fim para**

No *loop* interno, além das condições de parada do método do gradiente conjugado de Steihaug apresentadas no algoritmo 2 do capítulo 5, é permitido interromper o processo quando um número máximo de iterações for atingido. Isso é justificado pelo fato que somente uma solução aproximada para o subproblema de região de confiança é requerida para propósitos de convergência.

Uma observação sobre a atualização do raio da região de confiança é que, se o passo fornecido pela resolução do subproblema quadrático estiver estritamente dentro dessa região, ou seja, $\|d\| < \Delta_k$, supõe-se que o raio atual Δ_k não está interferindo no progresso do algoritmo e então seu valor não é alterado para a próxima iteração. A inicialização

do raio é fixado em $\Delta_0 = 1,0$ devido ao conhecimento prévio dos valores que as variáveis do problema de fluxo de carga podem assumir, como, por exemplo, as tensões e *taps* de transformadores que estão definidos no intervalo $[0,9\ 1,1]$ e, portanto, podem variar com folga dentro dessa região de confiança.

Depois de calculada a solução aproximada d_k do subproblema quadrático, é feita a projeção de $x_k + d_k$ na caixa de restrições Ω, por meio da projeção ortogonal de um ponto x no conjunto factível Ω, expressa como

$$P_\Omega(x) = \begin{cases} x_i, & \text{se} \quad l_i \leq x_i \leq u_i, \\ l_i, & \text{se} \quad x_i < l_i, \\ u_i, & \text{se} \quad x_i > u_i, \end{cases} \tag{7.6}$$

e, caso necessário, uma nova direção $\tilde{d} = P_\Omega(x_k + \tilde{d}_k) - x_k$ pode ser definida tal que $x_k + \tilde{d}_k$ seja factível. Essa projeção também pode ser definida como $P_\Omega(x_i) = \max\{l_i, \min\{x_i, u_i\}\}$.

No *loop* externo do algoritmo RCGC, o critério de parada dado por $\|C_k \nabla f_k\| \leq \epsilon_2$ envolve uma medida de otimalidade do gradiente escalado. A matriz diagonal $C(x)$ é construída com base no intervalo de valores que a variável pode assumir durante a minimização, expressa por

$$C(x) = diag\left(|v_1(x)|, |v_2(x)|, ..., |v_n(x)|\right), \tag{7.7}$$

onde

$$v_i(x) = \begin{cases} x_i - u_i, & \text{se } (\nabla f(x))_i < 0,\ u_i < \infty, \\ x_i - l_i, & \text{se } (\nabla f(x))_i \geq 0,\ l_i > -\infty, \\ 1, & \text{se } (\nabla f(x))_i \geq 0,\ l_i = -\infty \text{ ou } (\nabla f(x))_i < 0,\ u_i = \infty, \end{cases} \tag{7.8}$$

para $i = 1, ..., n$. Tal matriz surge examinando as condições de otimalidade para o problema (COLEMAN; LI, 1996)

$$\text{Min}_{x \in \Omega} \quad f(x) = \tfrac{1}{2} \|F(x)\|^2, \tag{7.9}$$

com $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | l \leq x \leq u\}$.

Com a introdução da matriz $C(x)$, a condição de otimalidade para o problema de mínimos quadrados não lineares com restrições de caixa definido em (7.9) pode então ser escrita como

$$C(x^*) \nabla f(x^*) = 0. \tag{7.10}$$

Capítulo 8

Resultados Numéricos

Este capítulo apresenta os resultados obtidos para a resolução do modelo do fluxo de carga proposto na seção 3.4, usando o algoritmo geral RCGC apresentado no capítulo 7. Os sistemas estudados são os sistemas-testes do IEEE de 14, 30, 57, 118 e 300 barras, e o sistema brasileiro reduzido Cesp com 53 barras. A referência dos arquivos de dados dos sistemas testados, bem como seus respectivos diagramas unifilares, estão indicados no Apêndice C.

A implementação do algoritmo foi desenvolvida na linguagem Matlab, e por essa razão, análise crítica e comparações de tempo de processamento não serão detalhadas.

A Tabela 8.1 indica o número de barras de referência, carga e geração, indicadas respectivamente, pelas colunas $N\theta V$, NPQ e NPV, para todos os sistemas testados.

Tabela 8.1 – Número dos tipos de barras dos sistemas testados.

Sistema	$N\theta V$	NPQ	NPV
14 Barras	1	9	4
30 Barras	1	24	5
57 Barras	1	50	6
118 Barras	1	64	53
300 Barras	1	231	68
CESP 53 Barras	1	44	8

A Tabela 8.2 mostra o número de restrições de igualdades e desigualdades dos sistemas testados, associadas com as restrições de carga e de operação do problema de fluxo de carga. As seguintes siglas indicam:

- RI: número de restrições de igualdade relacionadas com o balanço do fluxo de potência ($2NPQ + NPV$);
- RD: número de restrições de desigualdade canalizadas ($NPV + V\theta$);

- RC: número de restrições de igualdade associadas com as restrições de complementaridade dadas em (3.22e), (3.22f) e (3.22g) ($3NPV + 3V\theta$);
- RT: número de restrições de igualdade associadas com a função dada em (3.20) para a determinação dos valores discretos dos *taps* (NT);
- Total: indica o número total de restrições do sistema a ser testado, depois de separar as restrições canalizadas e convertê-las em restrições de igualdade;

Tabela 8.2 – Número de restrições dos sistemas testados.

Sistema	RI	RD	RC	RT	Total
14 Barras	22	5	15	3	50
30 Barras	53	6	18	4	87
57 Barras	106	7	21	15	158
118 Barras	181	54	162	9	460
300 Barras	530	69	207	50	925
CESP 53 Barras	96	9	27	30	171

A Tabela 8.3 mostra o número de variáveis dos sistemas testados, onde as colunas V, θ, tap, V^a e V^b indicam o número de variáveis representando, respectivamente, a magnitude de tensão, ângulos das tensões, *taps* e variáveis auxiliares das restrições de complementaridade. A variável θ_1 é fixada em zero (ângulo de referência) e as unidades das variáveis V, tap, V^a e V^b são dadas em p.u., os ângulos em graus, a geração de potência ativa em MW e a geração de potência reativa em MVAr.

Tabela 8.3 – Número de variáveis dos sistemas testados.

Sistema	V	θ	tap	V^a	V^b	Total
14 Barras	14	13	3	5	5	40
30 Barras	30	29	4	6	6	75
57 Barras	57	56	17	7	7	144
118 Barras	118	117	9	54	54	352
300 Barras	300	299	50	69	69	787
CESP 53 Barras	53	52	30	9	9	153

Na Tabela 8.4 é apresentada a dimensão geral dos sistemas. Pode ser observado que não há necessidade de que o número de variáveis (n) seja igual ao número de restrições (m) e para os sistemas considerados, tem-se $m > n$, ou seja, o número de restrições é maior que o número de variáveis.

Tabela 8.4 – Dimensão geral dos sistemas testados.

Sistema	m x n
14 Barras	50 x 40
30 Barras	87 x 75
57 Barras	158 x 144
118 Barras	460 x 352
300 Barras	925 x 787
CESP 53 Barras	171 x 153

Os parâmetros usados nas iterações externas do Algoritmo RCGC foram: raio inicial $\Delta_0 = 1,0$, $\eta_1 = 0,01$, $\eta_2 = 0,9$, $\gamma_0 = 0,25$, $\gamma_1 = 0,5$ e $\gamma_2 = 2$, os quais são valores tipicamente empregados em métodos de região de confiança (CONN; GOULD; TOINT, 2000). Os raios mínimo e máximo foram estabelecidos como $\Delta_{min} = 10^{-6}$ e $\Delta_{max} = 10$, respectivamente.

O número máximo de iterações externas foi fixado em 300 e as tolerâncias usadas no critério de parada foram $\epsilon_1 = 5.10^{-4}$ para os sistemas de 14, 30, 53, 57 e 118 barras, $\epsilon_1 = 10^{-3}$ para o sistema de 300 barras e ainda $\epsilon_1 = 10^{-5}$ como tolerância para as restrições de complementaridade, visando uma solução mais precisa de tais restrições. Para o critério de parada usando a norma do gradiente escalado foi usado $\epsilon_2 = 10^{-6}$. Portanto, o método converge para uma solução factível do problema se a norma da função residual ou a norma do gradiente escalado são menores que a tolerância requerida, satisfazendo todas as restrições físicas e operacionais do sistema.

Nas iterações internas os parâmetros utilizados foram $\epsilon_{gcs} = 10^{-3}$ e o número máximo de iterações igual ao número de variáveis do sistema mais uma tolerância τ, que pode ser adaptada conforme as características de cada sistema. Os limites para as tensões e para os *taps* dos transformadores foram estabelecidos pelo intervalo $[0,9;\ 1,1]$. O ponto inicial adotado para os testes considera todas as magnitudes e ângulos de tensões fornecidos pelo banco de dados (valores em p.u.). Os valores iniciais para os *taps* variáveis dos sistemas foram considerados como 1,0 p.u e também em alguns casos os valores adotados foram os fornecidos pelo banco de dados.

O parâmetro μ definido em (3.20) foi fixado em 0,005, o que significa que os *taps* podem assumir os seguintes valores discretos, no intervalo [0,9; 1,1]:

$$\{0,9;\ 0,905;\ 0,91;\ 0,915;\ 0,92; ...;\ 1,98;\ 1,985;\ 1,99;\ 1,995;\ 1,1\}. \tag{8.1}$$

Para reduzir a amplitude da função definida em (3.19) o valor inicial $\alpha^{(0)}$ foi definido em valores específicos para cada caso, em geral 10^{-3}, sendo que a cada iteração do método

tal parâmetro é atualizado por $\alpha^{(k+1)} = 1,1\alpha^{(k)}$.

Os principais objetivos destes testes foram avaliar a robustez e a flexibilidade do método proposto para obtenção de soluções factíveis para o problema de fluxo de carga, satisfazendo simultaneamente as restrições de carga e de operação do sistema, de modo a modelar adequadamente o comportamento existente entre as tensões e a geração de reativos nas barras com controle de geração e, além disso, fornecer a solução discreta para os *taps* de transformadores variáveis.

8.1 Validação do Modelo de Fluxo de Carga Proposto

Para propósito de verificação e validação do modelo de fluxo de carga proposto no capítulo 3, foi testado o sistema IEEE de 14 barras, comparando a solução obtida pelo algoritmo RCGC com a solução obtida pelo software UWPFLOW[1], ambos submetidos aos mesmos dados de entrada, referentes ao banco de dados desse sistema. Em particular, neste caso os valores dos taps são considerados como dados e não como incógnitas (são fixos).

A Tabela 8.5 mostra os valores obtidos para as magnitudes e ângulos das tensões do sistema de 14 barras usando o algoritmo RCGC e o software UWPFLOW. Os resultados mostram a coerência do modelo proposto com relação à modelagem do problema de fluxo de carga e também a confiabilidade da solução obtida.

Tabela 8.5 – Solução do sistema de 14 barras usando o algoritmo RCGC e o UWPFLOW.

Tensões (p.u.)		**Ângulos (graus)**	
RCGC	UWPFLOW	RCGC	UWPFLOW
$V_1 = 1,0600$	$V_1 = 1,0598$	$\theta_1 = 0,0000$	$\theta_1 = 0,0000$
$V_2 = 1,0450$	$V_2 = 1,0450$	$\theta_2 = -4,9840$	$\theta_2 = -4,9900$
$V_3 = 1,0100$	$V_3 = 1,0100$	$\theta_3 = -12,7240$	$\theta_3 = -12,7300$
$V_4 = 1,0177$	$V_4 = 1,0177$	$\theta_4 = -10,3130$	$\theta_4 = -10,3200$
$V_5 = 1,0196$	$V_5 = 1,0195$	$\theta_5 = -8,7740$	$\theta_5 = -8,7770$
$V_6 = 1,0700$	$V_6 = 1,0700$	$\theta_6 = -14,2200$	$\theta_6 = -14,2200$
$V_7 = 1,0616$	$V_7 = 1,0615$	$\theta_7 = -13,3590$	$\theta_7 = -13,3600$
$V_8 = 1,0900$	$V_8 = 1,0900$	$\theta_8 = -13,3590$	$\theta_8 = -13,3600$
$V_9 = 1,0560$	$V_9 = 1,0559$	$\theta_9 = -14,9380$	$\theta_9 = -14,9400$
$V_{10} = 1,0510$	$V_{10} = 1,0510$	$\theta_{10} = -15,0970$	$\theta_{10} = -15,1000$
$V_{11} = 1,0570$	$V_{11} = 1,0569$	$\theta_{11} = -14,7900$	$\theta_{11} = -14,7900$
$V_{12} = 1,0552$	$V_{12} = 1,0552$	$\theta_{12} = -15,0750$	$\theta_{12} = -15,0800$
$V_{13} = 1,0504$	$V_{13} = 1,0504$	$\theta_{13} = -15,1560$	$\theta_{13} = -15,1600$
$V_{14} = 1,0356$	$V_{14} = 1,0355$	$\theta_{14} = -16,0330$	$\theta_{14} = -16,0400$

[1]https://ece.uwaterloo.ca/ ccanizar/software/pflow.htm

A Tabela 8.6 mostra as perdas de potência ativa nas linhas do sistema, usando o algoritmo RCGC e o software UWPFLOW. As perdas totais de potência ativa pelo algoritmo RCGC foram 13,393 MW e no UWPFLOW foram 13,38 MW.

Tabela 8.6 – Perdas no sistema de 14 barras usando o algoritmo RCGC e o UWPFLOW.

Linhas		**Perdas (MW)**	
Da barra	Para barra	RCGC	UWPFLOW
1	2	4,299	4,300
1	5	2,763	2,760
2	3	2,323	2,320
2	4	1,676	1,680
2	5	0,904	0,900
3	4	0,373	0,370
4	5	0,514	0,510
4	7	0,000	0,000
4	9	0,000	0,000
5	6	0,000	0,000
6	11	0,055	0,060
6	12	0,072	0,070
6	13	0,212	0,210
7	8	0,000	0,000
7	9	0,000	0,000
9	10	0,013	0,010
9	14	0,116	0,120
10	11	0,013	0,010
12	13	0,006	0,010
13	14	0,054	0,050
		$\sum \text{Perdas} = 13,393$	$\sum \text{Perdas} = 13,38$

Também pela Tabela 8.7 pode ser visto que a geração de potência reativa nas barras com controle de geração, em MVAR, obtidas pelo algoritmo RCGC estão bem próximas da solução fornecida pelo UWPFLOW.

Tabela 8.7 – Geração de potência reativa no sistema de 14 barras usando RCGC e UWPFLOW.

Barra (nº)	Q^{min}	Q^{ger} (RGCG)	Q^{ger} (UWPFLOW)	Q^{max}
1	-999,0	-16,75	-16,90	999,0
2	-40,0	43,82	43,89	50,0
3	0	25,02	25,09	40,0
6	-6,0	12,72	12,75	24,0
8	-6,0	17,63	17,63	24,0

A Tabela 8.8 mostra o processo de convergência do sistema de 14 barras. A coluna Erro mostra a norma do residual $\|F\|_\infty$ obtida a cada iteração. A coluna $\|d\|$ indica a norma da solução (direção d) obtida na resolução do subproblema quadrático pelo algoritmo GCS e a coluna ρ indica a razão entre a redução verdadeira (associada com a função objetivo do problema) e a redução predita (associada ao modelo aproximado m_k). O critério definido para a atualização do raio de região de confiança Δ somente é utilizado se $\|d\| > \Delta$ (pois, caso contrário, supõe-se que o tamanho da região não está interferindo no progresso do algoritmo) e assim observa-se pela Tabela 8.8 que o raio se mantém em $\Delta = 1,0$ para toda iteração.

Tabela 8.8 – Processo de convergência do sistema de 14 barras.

Iteração Externa	Erro	Iteração Interna	$\|d\|$	ρ
0	0,04218	16	0,00145	0,9999
1	0,00042	64	0,00052	0,6932
2	0,00027	61	0,00027	0,6638
3	0,00016	62	0,00016	0,6116
4	0,00010	-	-	-

Foi estabelecido $\epsilon_1 = 10^{-4}$ no critério de parada e o limite máximo de 74 iterações no algoritmo GCS ($n = 37$ e $\tau = n = 37$), e assim a convergência foi obtida em 4 iterações, como mostra a Tabela 8.8. No caso de fixar o número máximo de iterações internas igual ao número de variáveis do problema ($n = 37$ e $\tau = 0$), a convergência é obtida em 11 iterações. E no caso de não fixar esse limite máximo ($n = 37$ e τ suficientemente grande) o processo de convergência é o mesmo da Tabela 8.8 pois como pode ser observado, nenhum loop interno ultrapassou o limite máximo de 74 iterações.

Com relação à técnica dos filtros multimensionais, para todas as iterações apresentadas na Tabela 8.8 a solução obtida foi aceita, combinando os critérios de aceitabilidade de ambos os métodos de filtro multidimensional e de região de confiança. Essa característica resulta em uma maior flexibilidade do método para analisar e aceitar um conjunto maior de pontos, tornando-o menos restritivo nesse sentindo.

8.2 Sistemas IEEE 14, 30, 57, 118 e 300 Barras

8.2.1 14 Barras

O sistema de 14 barras possui as seguintes características:

- Uma barra de geração (*slack*);
- 4 barras de controle de reativo;
- 9 barras de carga;
- 20 linhas de transmissão;
- 3 transformadores com *tap* variável.

Para verificar a flexibilidade e robustez do algoritmo RCGC na obtenção de soluções factíveis para o problema de fluxo de carga, realizamos algumas simulações com o sistema de 14 barras. Os testes simulam diferentes cenários que eventualmente podem ocorrer na operação de um sistema elétrico, como, por exemplo, um aumento na demanda de energia pelos consumidores. Para todos os casos testados usando o sistema de 14 barras foi adotado o parâmetro inicial $\alpha^{(0)} = 0,1$ e $\tau = 100$ no algoritmo interno GCS.

- CASO I: simulação do caso base, com a obtenção dos *taps* discretos.

Para o caso base foram realizados dois testes com diferentes inicializações dos *taps*, a fim de verificar o comportamento da convergência de tais variáveis para uma solução discreta.

- Caso Ia: inicialização dos *taps* com os valores fornecidos pelo banco de dados;
- Caso Ib: inicialização dos *taps* em 1,0 p.u;

Os gráficos 8.1, 8.2 e 8.3 mostram, respectivamente, a convergência da função residual $F(x)$, as magnitudes das tensões para cada barra do sistema e os valores discretos dos *taps* dos transformadores.

Pode ser observado na Figura 8.1 que a convergência da função residual apresenta oscilações e isso se deve ao fato de que a solução obtida em cada iteração é analisada pelo método do filtro multidimensional e, eventualmente, uma iteração com sucesso, isto é, em que a solução obtida é aceita, pode resultar em um maior erro para a função residual. O erro é contabilizado por $\|F(x)\|_\infty$ e a técnica do filtro se baseia na análise dos objetivos conflitantes em questão, onde, em uma determinada iteração, uma solução pode elevar a infactibilidade de algumas equações do sistema considerado, e reduzir outras para zero.

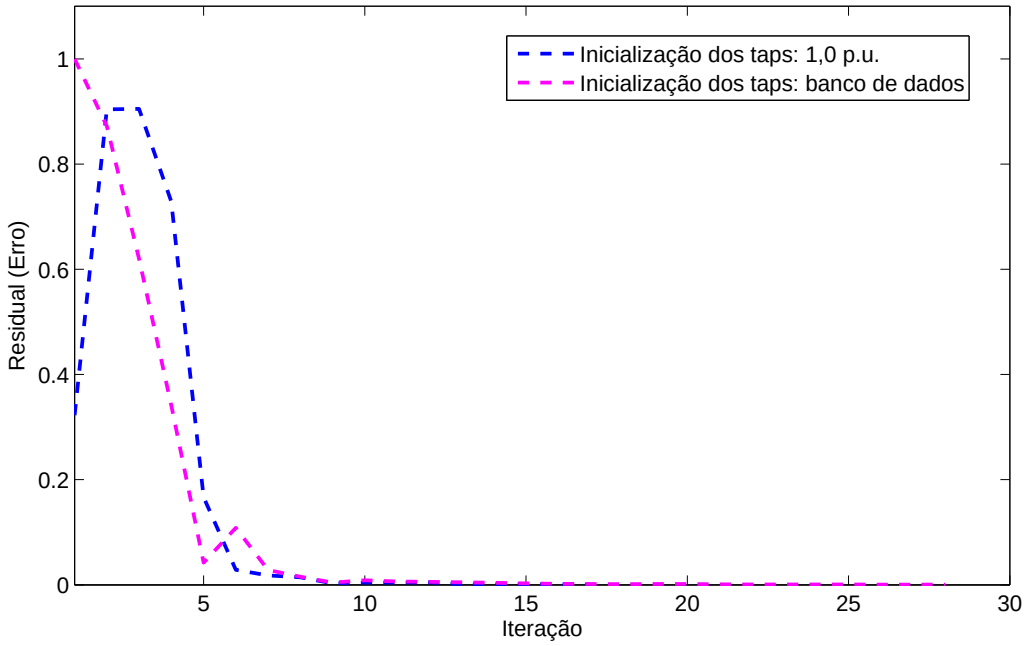

Figura 8.1 – Convergência da função residual $F(x)$ do sistema de 14 barras (caso I).

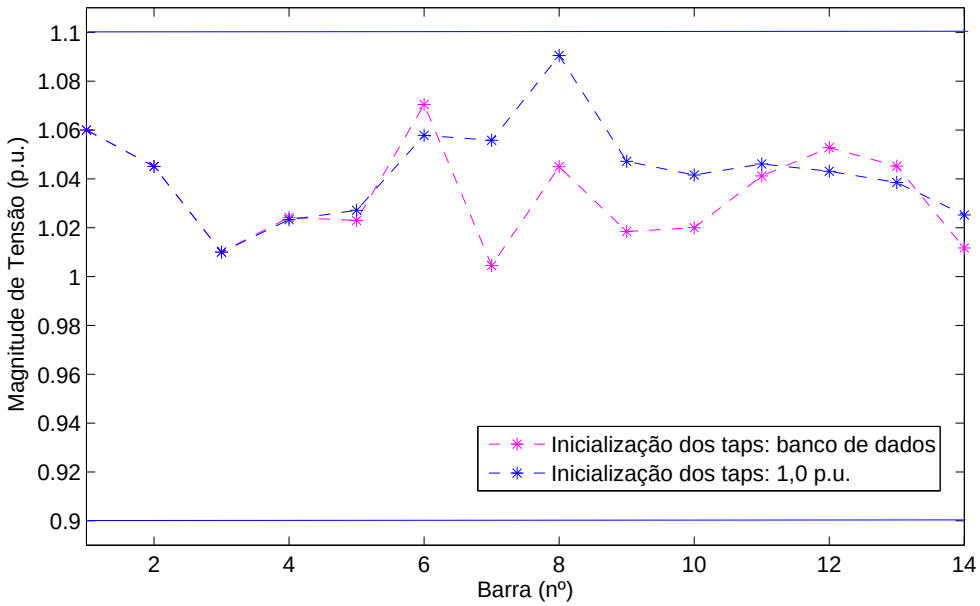

Figura 8.2 – Magnitude de tensão do sistema de 14 barras (caso I).

A Figura 8.2 mostra os valores das tensões em cada barra do sistema de 14 barras. Nas Tabelas 8.9 e 8.10 são apresentados os valores das tensões especificadas nas barras

com controle de geração de reativos, os valores das variáveis auxiliares V^a e V^b para tais tensões e a geração de reativos em tais barras.

A análise das Tabelas 8.9 e 8.10 mostra a efetividade das restrições de complementaridade no ajuste das tensões quando a geração de reativos atinge seu limite mínimo ou máximo. No caso Ia, a geração de reativos na barra 8 atingiu seu limite máximo de 24 MVAR e ativou a variável V^b, a qual assumiu o valor positivo de $0,045$. Pela restrição apresentada em (3.17), a tensão nessa barra que era especificada em 1,090 vai reduzir em 0,045 e, portanto, a solução final na barra é de 1,045 p.u. No caso Ib, o limite máximo de geração de reativos foi obtido na barra 6, reduzindo a tensão nessa barra para 1,058 p.u.

Tabela 8.9 – Injeções de potência reativa nas barras PV (14 barras - caso Ia).

Barra	V^{esp}	V^{final}	V^a	V^b	Q^{min}	Q^{ger}	Q^{max}
2	1,045	1,045	0	0	-40,0	37,852	50,0
3	1,010	1,010	0	0	0	21,207	40,0
6	1,070	1,070	0	0	-6,0	23,428	24,0
8	1,090	1,045	0	0,045	-6,0	24,0	24,0

Tabela 8.10 – Injeções de potência reativa nas barras PV (14 barras - caso Ib).

Barra (nº)	V^{esp}	V^{final}	V^a	V^b	Q^{min}	Q^{ger}	Q^{max}
2	1,045	1,045	0	0	-40,0	36,009	50,0
3	1,010	1,010	0	0	0	21,654	40,0
6	1,070	1,058	0	0,012	-6,0	24,0	24,0
8	1,090	1,090	0	0	-6,0	21,426	24,0

A Figura 8.3 mostra os valores discretos dos *taps* na solução final do problema, em ambos os casos. Com relaçao às inicializações dos *taps* nos casos Ia e Ib, pode-se notar a capacidade do algoritmo em encontrar diferentes soluções factíveis para o problema e em se ajustar para a obtenção dessa solução discreta. Em particular, para o caso Ib, onde os taps são inicializados em 1,0 p.u., verifica-se um menor número de iterações (são 16 contra 27 no caso Ia) e uma pequena diminuição das perdas de potência ativa nas linhas do sistema (13,343 MW contra 13,709 MW no caso Ia).

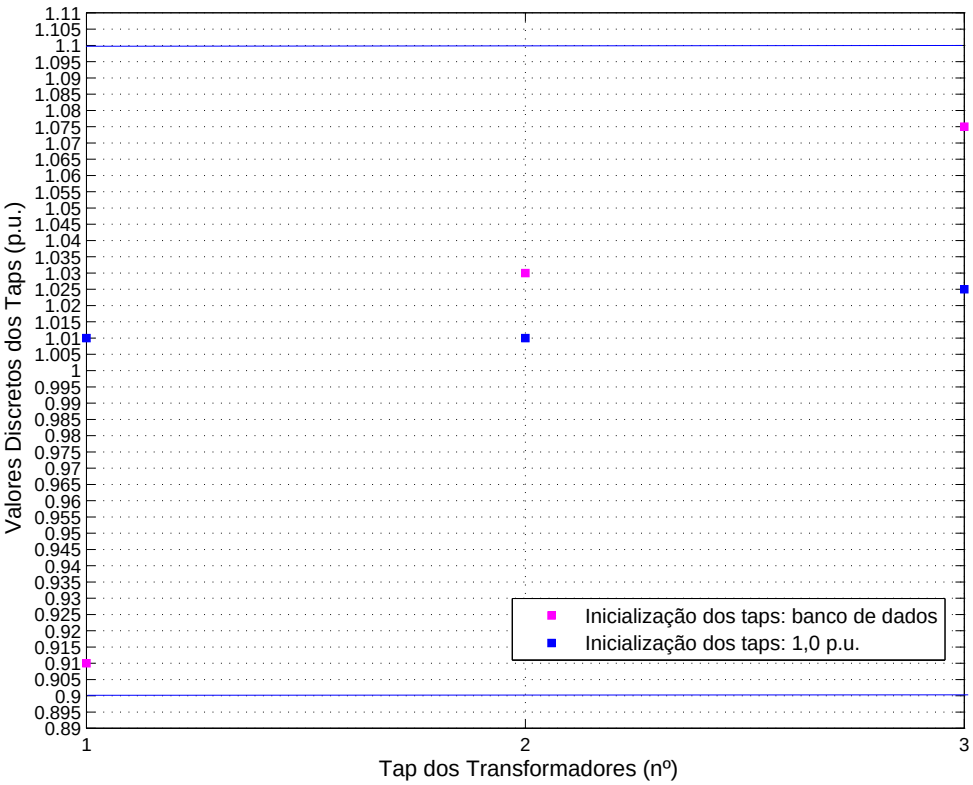

Figura 8.3 – Taps discretos do sistema de 14 barras (caso I).

Os valores dos *taps* nas duas primeiras iterações e na solução final do caso Ia são apresentados na Tabela 8.11. O tap da linha 4-7 é inicializado em $1,0225$ e na 2ª iteração assume o valor 0,9, obtido pela projeção da solução sobre os limites da variável.

Tabela 8.11 – Convergência dos *taps* (14 barras - caso Ia).

Tap	Inicialização	1ª iteração	2ª iteração	...	27ª iteração (Solução Final)
linha 4-7	1,0225	0,9000	0,9088	...	0,9100
linha 4-9	1,0320	1,0296	1,0298	...	1,0300
linha 5-6	1,0730	1,0756	1,0753	...	1,0750

A Tabela 8.12 mostra a convergência dos *taps* para os valores discretos considerando a inicialização em 1,0 p.u. É possível observar que, para alcançar os valores discretos, as atualizações em cada iteração são feitas com valores bastante pequenos e simultaneamente devem satisfazer as outras restrições, gerando um processo iterativo mais sensível quando comparado com a resolução do problema somente com variáveis contínuas. De fato, considerando os *taps* como variáveis contínuas nos casos Ia e Ib, a convergência é alcançada

em 2 e 8 iterações respectivamente.

Tabela 8.12 – Convergência dos *taps* (14 barras - caso Ib).

Iteração	tap linha 4-7	tap linha 4-9	tap linha 5-6
0	1,00000	1,00000	1,00000
1	1,00843	1,00738	1,02330
2	1,00953	0,99761	1,02462
3	1,00975	1,00823	1,02480
4	1,00987	1,00969	1,02489
5	1,00983	1,00983	1,02494
6	1,00996	1,00991	1,02497
7	1,00998	1,00995	1,02498
8	1,00999	1,00997	1,02499
9	1,00999	1,00999	1,02500
10	1,01000	1,00999	1,02505
11	1,01000	1,01000	1,02504
12	1,00999	1,01000	1,02503
13	1,00999	1,01000	1,02502
14	1,01001	1,01001	1,02501
15	1,01001	1,01001	1,02501
16	1,01000	1,01000	1,02500

- CASO II: simulação de caso com o aumento da carga (potência ativa e reativa) em 10% e 40%;

Para simular um aumento na demanda de energia elétrica, aumentamos em 10% e em 40% os valores de carga de potência ativa (Pc) e reativa (Qc) no banco de dados. Neste tipo de situação, o sistema de transmissão pode ficar sobrecarregado e com baixas tensões, configurando uma situação onde o sistema está em uma condição operacional estressada. Em situações práticas e em casos severos, o aumento de carga pode afetar a operação estável do sistema de potência, pois os geradores não conseguem suprir a carga elétrica demandada.

Esse teste é realizado para avaliar a performance do método proposto em identificar situações de emergência (onde os limites de operação do sistema estão violados ou próximo de serem violados) e de realizar uma ação de controle de caráter corretivo, através do ajuste das tensões em barras com controle de geração e dos *taps* de tranformadores.

A Figura 8.4 mostra o gráfico da convergência dos cenários considerados no caso II, comparando com o caso base (Ib). Com o aumento de 10% o processo iterativo convergiu em 18 iterações e, com o aumento de 40%, convergiu em 22 iterações.

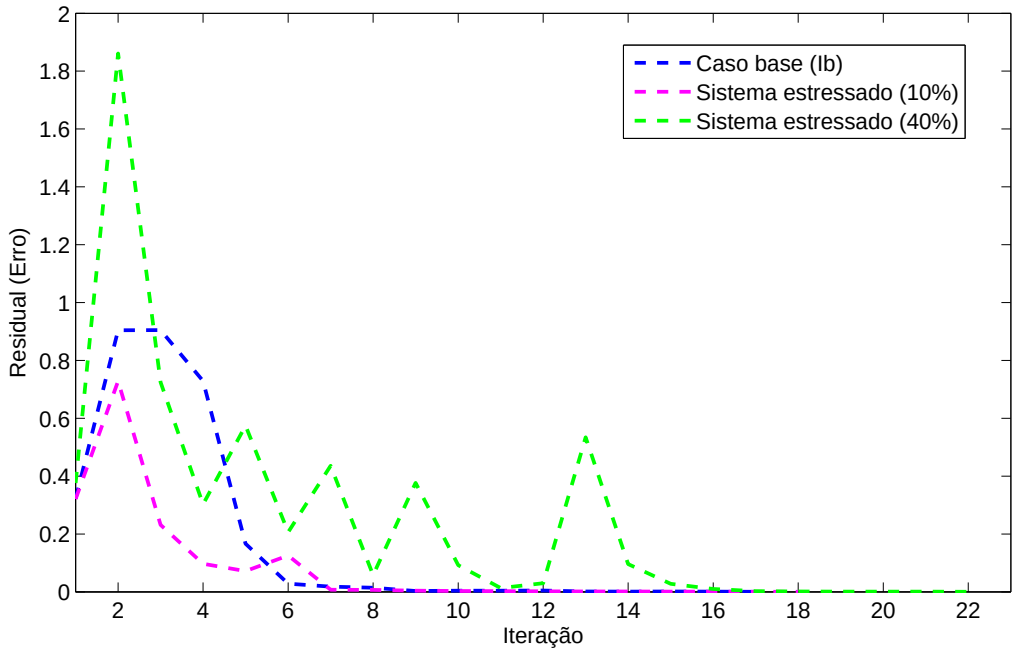

Figura 8.4 – Convergência da função residual $F(x)$ do sistema de 14 barras (caso II).

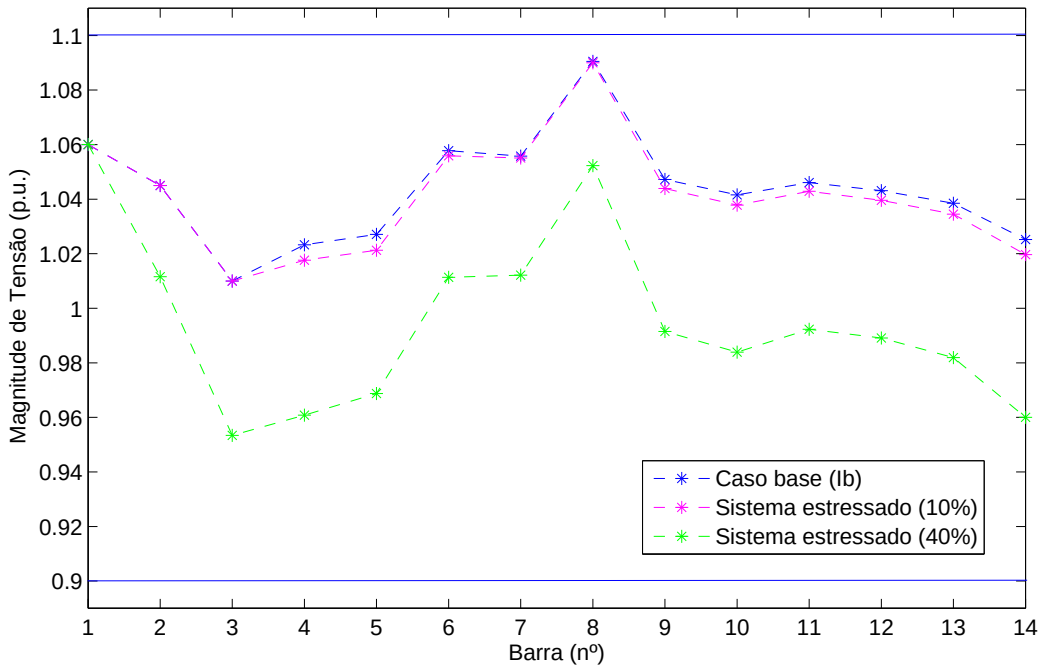

Figura 8.5 – Magnitude de tensão do sistema de 14 barras (caso II).

Pela Figura 8.5, pode ser observado que o aumento da demanda de carga em 10% no sistema não teve grande impacto na queda das tensões, porém, com o aumento de 40%, as tensões sofreram uma significativa redução.

Os ângulos das tensões ficaram dentro dos intervalos [-16,297; 0], [-18,067; 0] e [-24,441; 0] para os casos base, sistema estressado em 10% e em 40%, respectivamente. As perdas totais de potência ativa para os casos nessa ordem foram 13,343 MW, 16,588 MW e 30,310 MW.

A Figura 8.6 apresenta os valores discretos dos *taps* na solução final para os casos Ib, sistema estressado em 10% e em 40%. Observa-se que com o aumento de 40% na carga os *taps* se elevaram para 1,05, 1,03 e 1,07, mesmo com a inicialização em 1,0 p.u., o que mostra a versatilidade do algoritmo em fazer o ajuste dessas variáveis diante de condições de operação próximas do estado de emergência.

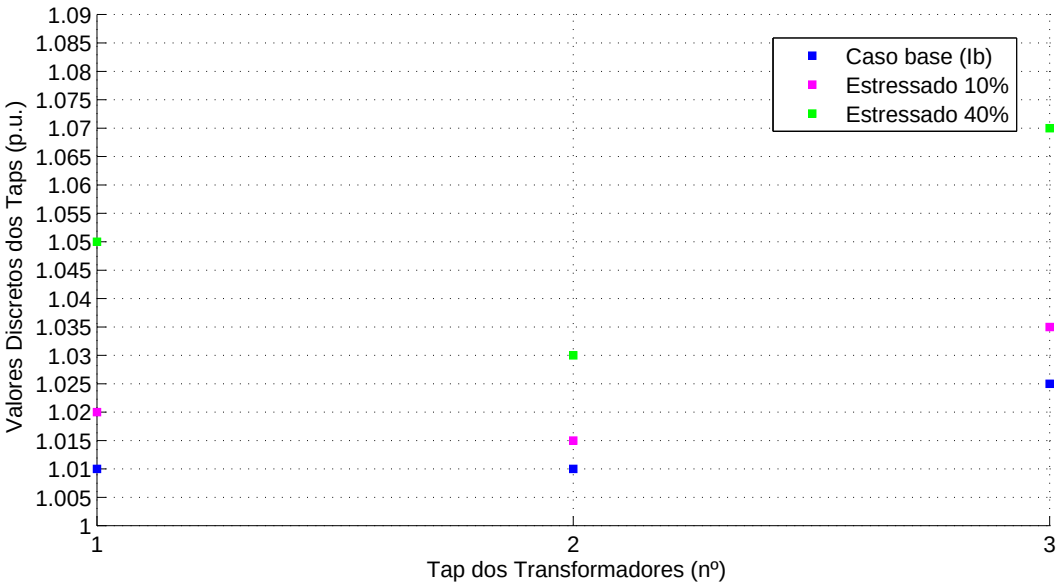

Figura 8.6 – Taps discretos do sistema de 14 barras (caso II).

As Tabelas 8.13 e 8.14 mostram a geração de potência reativa para os casos testados. Pode ser observado que o aumento de 10% na carga fez com que a barra 6 atingisse seu limite superior de 24 MVAR, reduzindo a tensão da barra 6 de 1,070 p.u. para 1,056 p.u. Já com o aumento de 40%, todas as barras atingiram seus limites superiores, fazendo com que as tensões nas barras 2, 3, 6 e 8 fossem reduzidas.

Tabela 8.13 – Injeções de potência reativa nas barras PV (14 barras - 10%).

Barra (nº)	V^{esp}	V^{final}	V^a	V^b	Q^{min}	Q^{ger} (10%)	Q^{max}
2	1,045	1,045	0	0	-40,0	49,490	50,0
3	1,010	1,010	0	0	0	30,798	40,0
6	1,070	1,056	0	0,014	-6,0	24,0	24,0
8	1,090	1,090	0	0	-6,0	21,652	24,0

Tabela 8.14 – Injeções de potência reativa nas barras PV (14 barras - 40%).

Barra (nº)	V^{esp}	V^{final}	V^a	V^b	Q^{min}	Q^{ger} (40%)	Q^{max}
2	1,045	1,011	0	0,034	-40,0	50,0	50,0
3	1,010	0,953	0	0,057	0	40,0	40,0
6	1,070	1,011	0	0,059	-6,0	24,0	24,0
8	1,090	1,052	0	0,038	-6,0	24,0	24,0

- CASO III: simulação com a retirada de uma linha de transmissão;

O caso III apresenta os resultados obtidos com a simulação da retirada da linha 6-11 do sistema. Situações como essa requerem a análise do estado de operação do sistema, a fim de verificar se ele tem recursos para continuar operando no estado normal (sem violar nenhum dos limites operacionais do sistema) ou se tal cenário levaria o sistema a operar no estado de emergência.

A Figura 8.7 mostra a convergência da função residual do problema em 22 iterações, o que significa que todas as restrições do problema de fluxo de carga (restrições de carga e de operação) foram satisfeitas, atendendo todas os limites sobre as tensões, *taps* e geração de reativos.

As tensões em cada barra do sistema, com o caso base (Ib) como referência, são mostradas na Figura 8.8. Pode ser visto que a retirada da linha 6-11 causou uma queda das tensões nas barras 9, 10 e 11.

A geração de potência reativa atingiu o limite máximo de 24 MVAR na barra 6 e os *taps* assumiram os valores 1,015, 1,010 e 1,015.

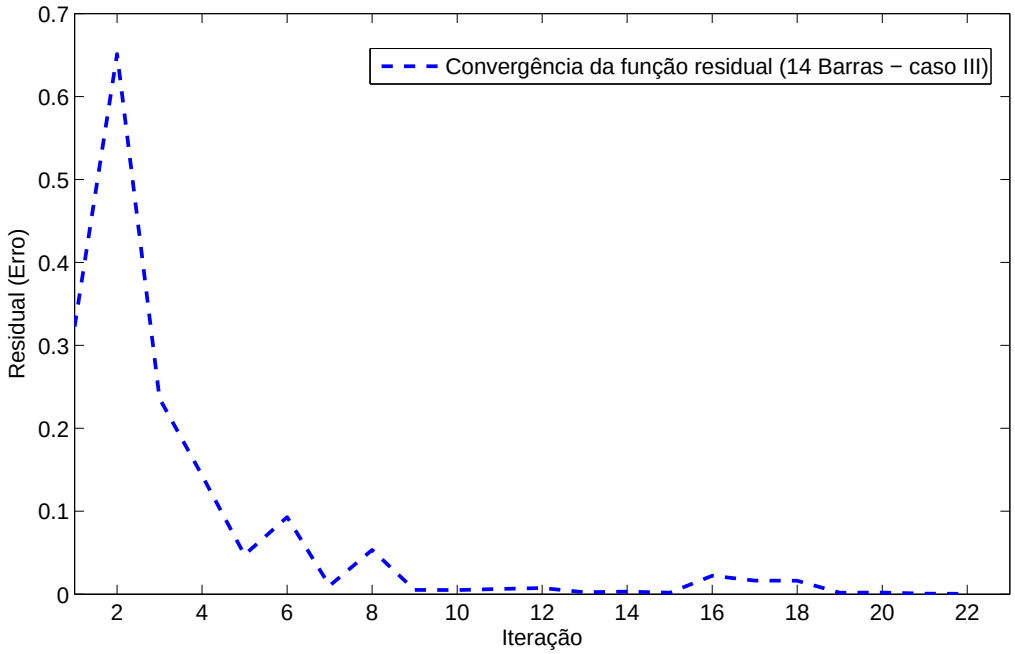

Figura 8.7 – Convergência da função residual $F(x)$ do sistema de 14 barras (caso III).

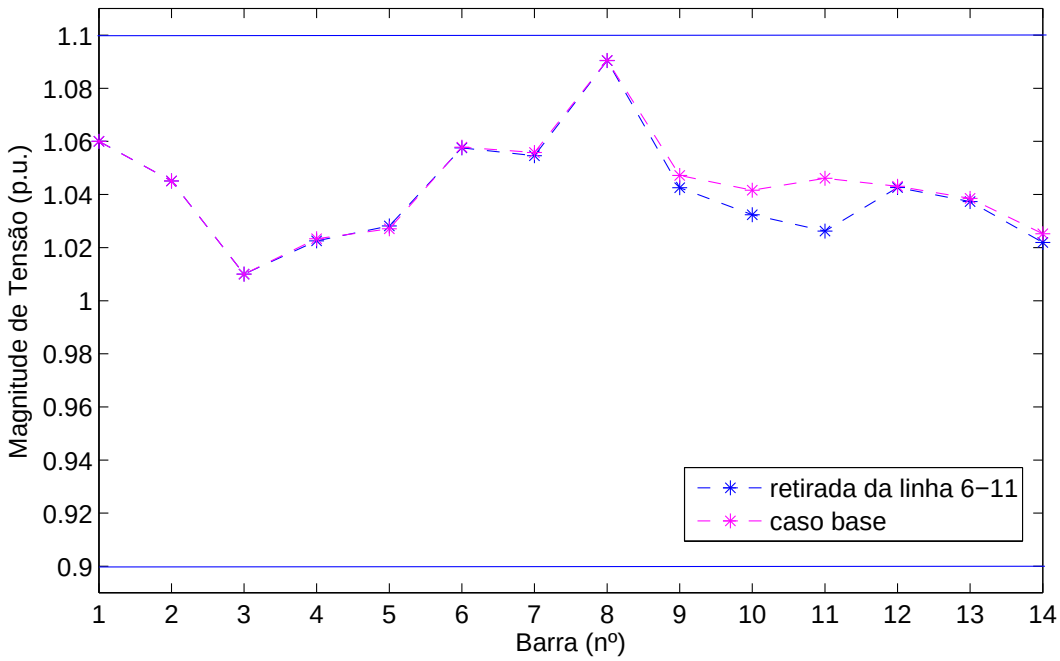

Figura 8.8 – Magnitude de tensão do sistema de 14 barras (caso III).

8.2.2 30 Barras

O sistema de 30 barras possui as seguintes características:

- Uma barra de geração (*slack*);
- 5 barras de controle de reativo;
- 24 barras de carga;
- 41 linhas de transmissão;
- 4 transformadores com *tap* variável.

Os parâmetros iniciais utilizados foram $\alpha^{(0)} = 10^{-3}$ para reduzir a amplitude da função senoidal associada com a obtenção dos valores discretos dos *taps* e $\tau = 100$ no algoritmo interno GCS. A inicialização dos *taps* foi considerada como 1,0 p.u.

Os gráficos 8.9, 8.10 e 8.11 mostram respectivamente a convergência da função residual $F(x)$, as magnitudes das tensões e os valores discretos dos *taps* dos transformadores, para o sistema de 30 barras. A perda total de potência ativa nas linhas do sistema foi 17,499 MW.

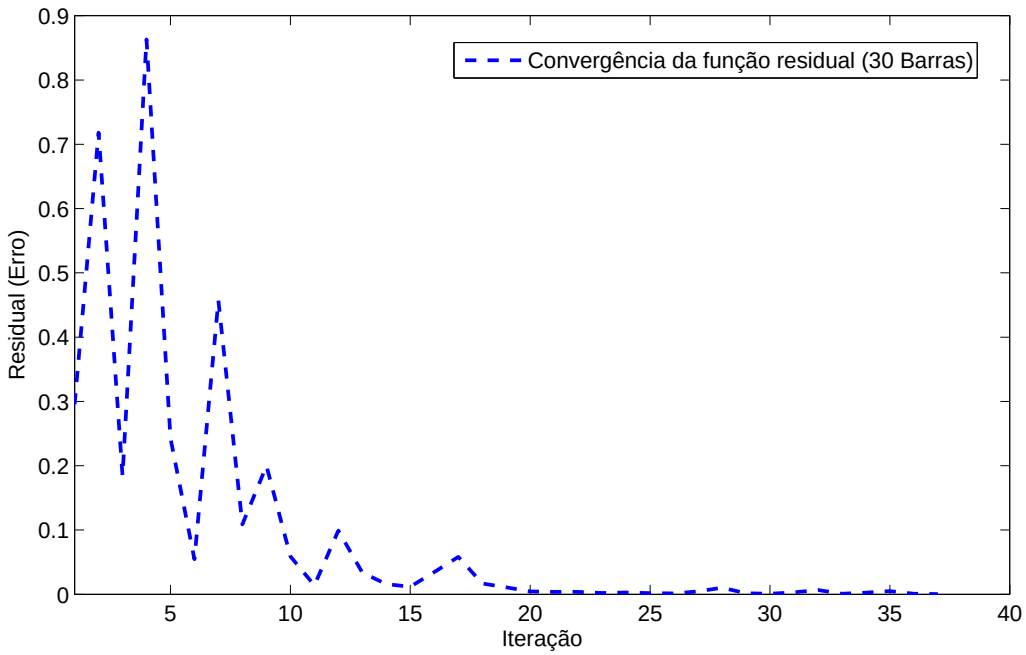

Figura 8.9 – Convergência da função residual $F(x)$ do sistema de 30 barras.

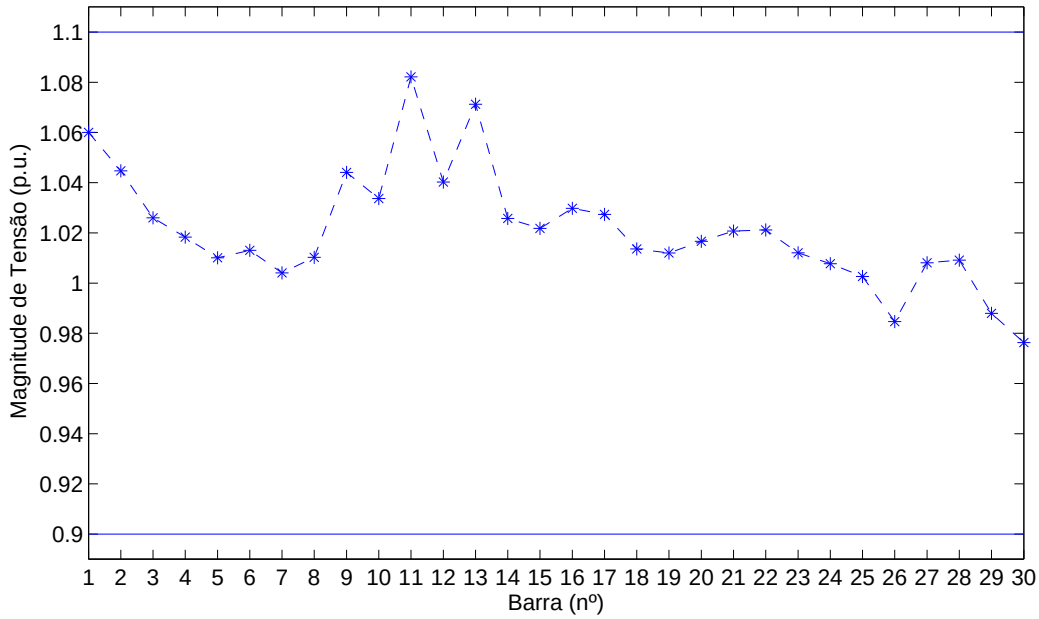

Figura 8.10 – Magnitude de tensão do sistema de 30 barras.

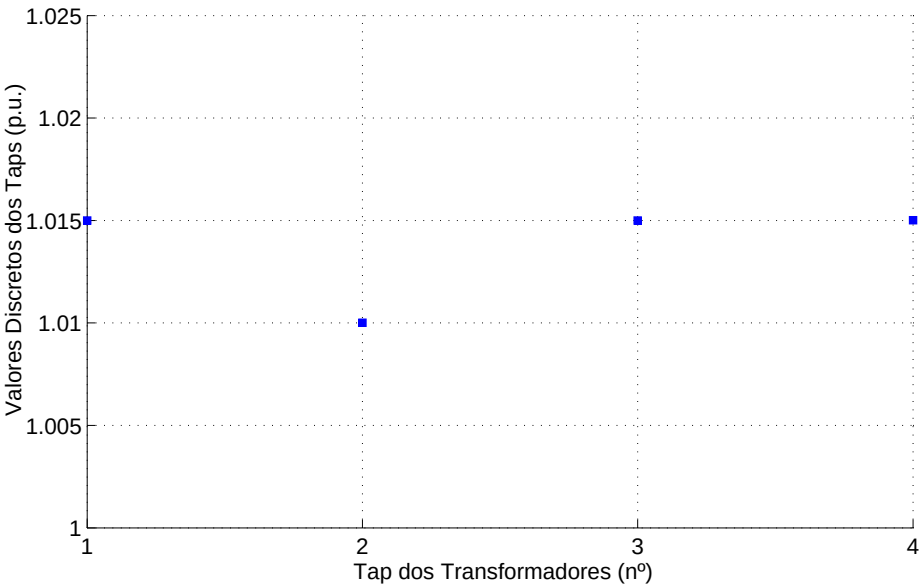

Figura 8.11 – Taps discretos do sistema de 30 barras.

A Tabela 8.15 mostra a geração de potência reativa em todas as barras do tipo PV na resolução do sistema de 30 barras. Também são mostrados os valores das variáveis auxiliares V^a e V^b associadas com as restrições de complementaridade, usadas para fazer

os ajustes necessários nas tensões das barras com controle de geração. Pode-se notar que, neste caso, somente a barra 2 atingiu o limite máximo de geração de potência reativa e, portanto, a variável V_2^b assume um valor positivo, fazendo com que a tensão especificada na barra 2 seja reduzida conforme designam as restrições apresentadas em (3.16a),(3.16b) e (3.17).

Tabela 8.15 – Injeções de potência reativa nas barras PV (30 Barras).

Barra (nº)	V^{esp}	V^{final}	V^a	V^b	Q^{min}	Q^{ger}	Q^{max}
2	1,045	1,044	0	0,001	-40,0	50,0	50,0
5	1,010	1,010	0	0	-10,0	34,611	40,0
8	1,010	1,010	0	0	-10,0	29,891	40,0
11	1,082	1,082	0	0	-6,0	19,789	24,0
13	1,071	1,071	0	0	-6,0	23,710	24,0

8.2.3 57 Barras

O sistema de 57 barras apresenta as seguintes características:

- Uma barra de geração (*slack*);
- 6 barras de controle de reativo;
- 50 barras de carga;
- 80 linhas de transmissão;
- 17 transformadores com *tap* variável.

Para realizar os testes com este sistema, considerando os limites para as tensões, para os *taps* de transformadores e para a geração de potência reativa, foram adotados dois casos:

- Caso Base: inicialização dos *taps* em 1,0 p.u., ângulos e tensões fornecidos pelo banco de dados;
- Flat Start: inicialização dos *taps* e das tensões em 1,0 p.u., e ângulos das tensões nulos.

O parâmetro α define a amplitude da função senoidal definida em (3.19) e influencia no ajuste das variáveis discretas. O parâmetro inicial mais reduzido, $\alpha^{(0)} = 10^{-3}$, foi usado para se obter a convergência em menos iterações e no *loop* interno foi utilizado o parâmetro $\tau = 500$ para o número máximo de iterações.

A Figura 8.12 mostra que a função residual do caso base converge em 59 iterações e para a caso *flat start* converge em 19 iterações.

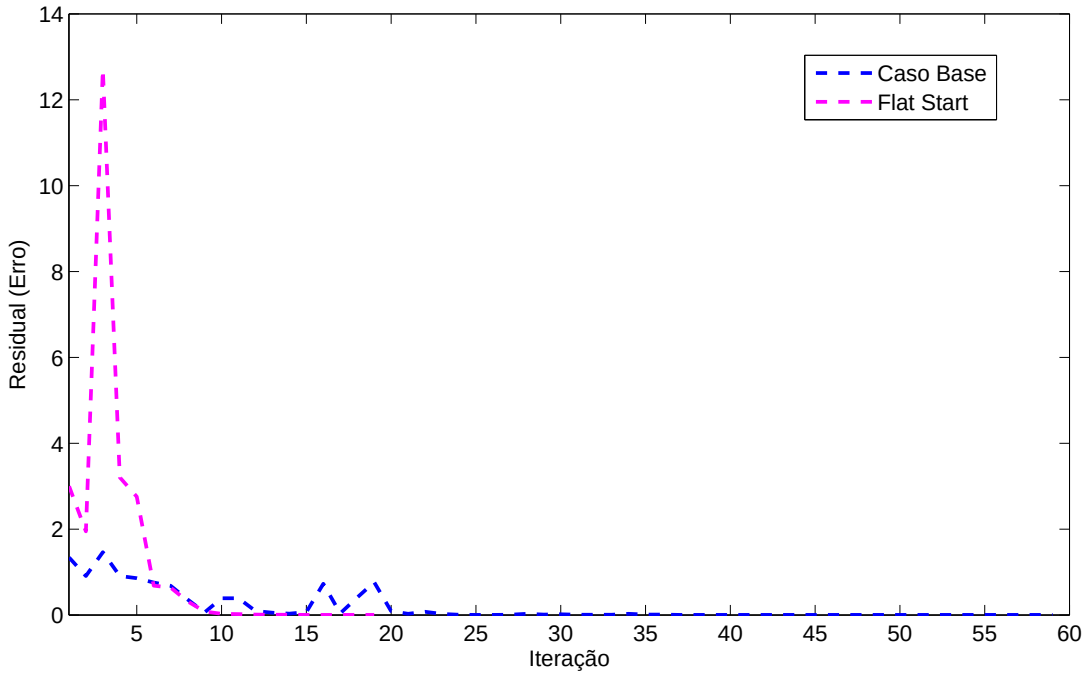

Figura 8.12 – Convergência da função residual $F(x)$ do sistema de 57 barras.

Pode ser observado pela Figura 8.13 que as tensões das barra 31, 32 e 33 do caso base ficaram bem próximas de seus limites inferiores ($V_{31} = 0,903$, $V_{32} = 0,919$ e $V_{33} = 0,916$). Por outro lado, usando a inicialização *flat start*, o nível das tensões a partir da barra 18 foi elevado, sendo que nas barras 31, 32 e 33 os valores das tensões foram $V_{31} = 0,950$, $V_{32} = 0,955$ e $V_{33} = 0,953$, respectivamente.

A Tabela 8.16 mostra os valores da geração de potência reativa nas barras com controle de geração em ambos os casos. A coluna Q_{base}^{ger} mostra o resultado do caso base e a coluna Q_{flat}^{ger} mostra o resultado da inicialização *flat start*. Pode ser visto que, com a inicialização *flat start*, a barra 9 atinge o limite mínimo de geração de reativos e, no caso base, nenhum dos limites é alcançado. O total das perdas de potência ativa no caso base foi 27,966 MW e no caso *flat start* foi 28,278 MW.

Tabela 8.16 – Geração de reativos - Caso Base x Caso Flat Start (57 Barras).

Barra (nº)	Q^{min}	Q^{ger}_{base}	Q^{ger}_{flat}	Q^{max}
2	-17,0	-0,756	-0,675	50,0
3	-10,0	1,203	4,279	60,0
6	-8,0	3,241	2,205	25,0
8	-140,0	64,859	62,963	200,0
9	-3,0	-1,485	-3,0	9,0
12	-150,0	124,715	121,936	155,0

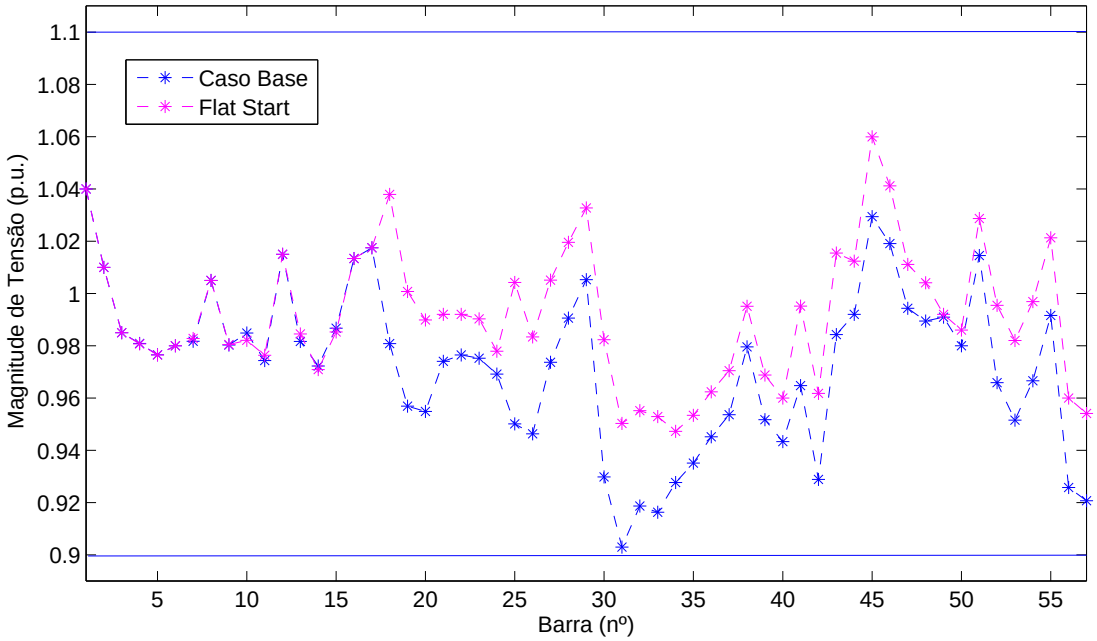

Figura 8.13 – Magnitude de tensão do sistema de 57 barras.

Na Figura 8.14 estão indicados os valores discretos assumidos pelos *taps* no caso base e no caso *flat start*. A análise desta figura mostra que os valores dos *taps* do caso *flat start* são maiores com relação aos respectivos valores do caso base. O ajuste discreto dos *taps*, os quais são variáveis de controle do sistema, é tomado como uma ação corretiva em casos em que o sistema está operando em condições sobrecarregadas, influenciando na mudança do perfil de tensão do sistema, na potência reativa gerada e na perda total do sistema.

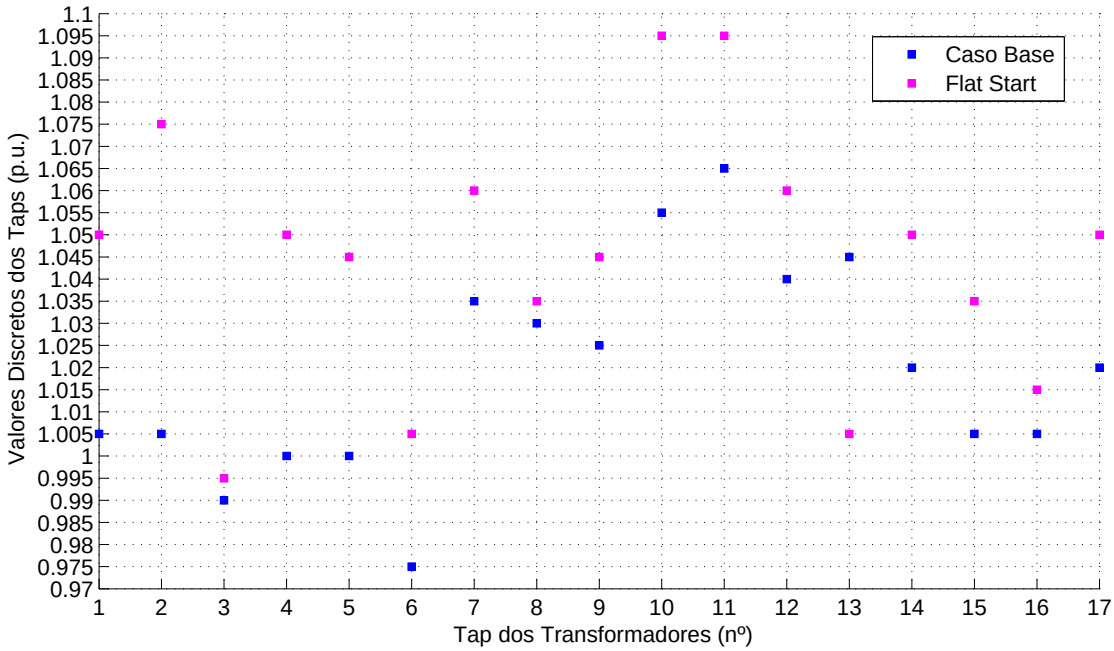

Figura 8.14 – Taps discretos do sistema de 57 barras.

As Figuras 8.15 e 8.16 mostram respectivamente as tensões e os *taps* discretos para o sistema de 57 barras, considerando o caso base e a variação do parâmetro τ, o qual define o número máximo de iterações do algoritmo do gradiente conjugado de Steihaug (*loop* interno). No caso base já apresentado tem-se $\tau = 500$ e a convergência é obtida em 59 iterações. Considerando $\tau = 300$, a convergência é obtida com 119 iterações, aumentando para $\tau = 600$ a convergência é obtida em 46 iterações e para τ suficientemente grande (tal que não seja fixado o número máximo de iterações internas) a convergência é alcançada em 18 iterações. Em todos esses casos, a tolerância no critério de parada definida para a norma do resíduo foi $\epsilon_{gcs} = 10^{-3}$.

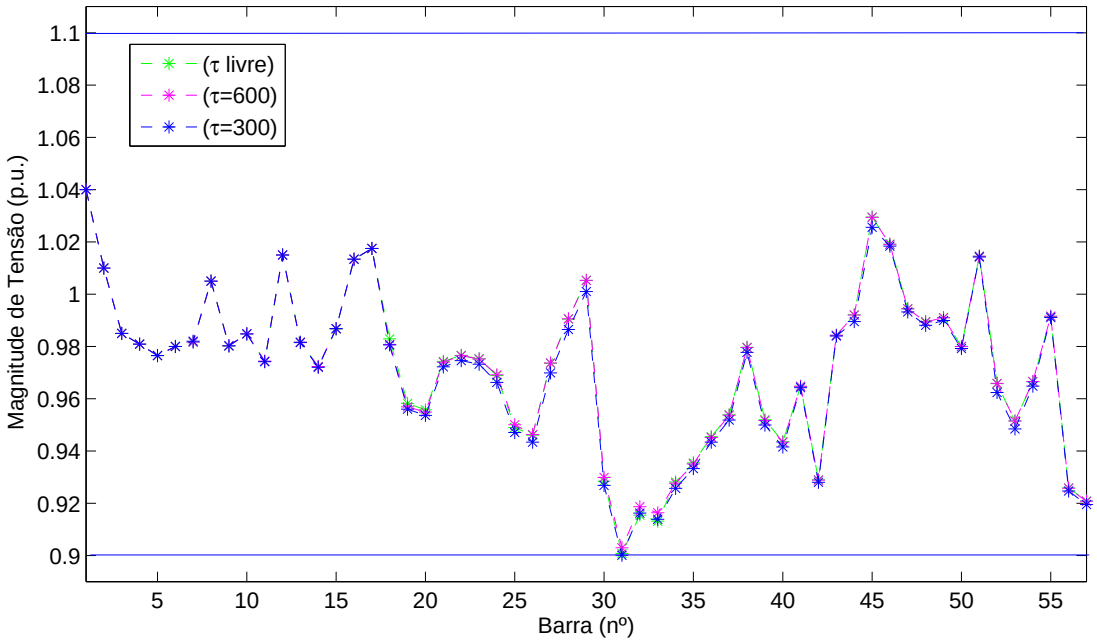

Figura 8.15 – Magnitude de tensão do sistema de 57 barras com a variação de τ.

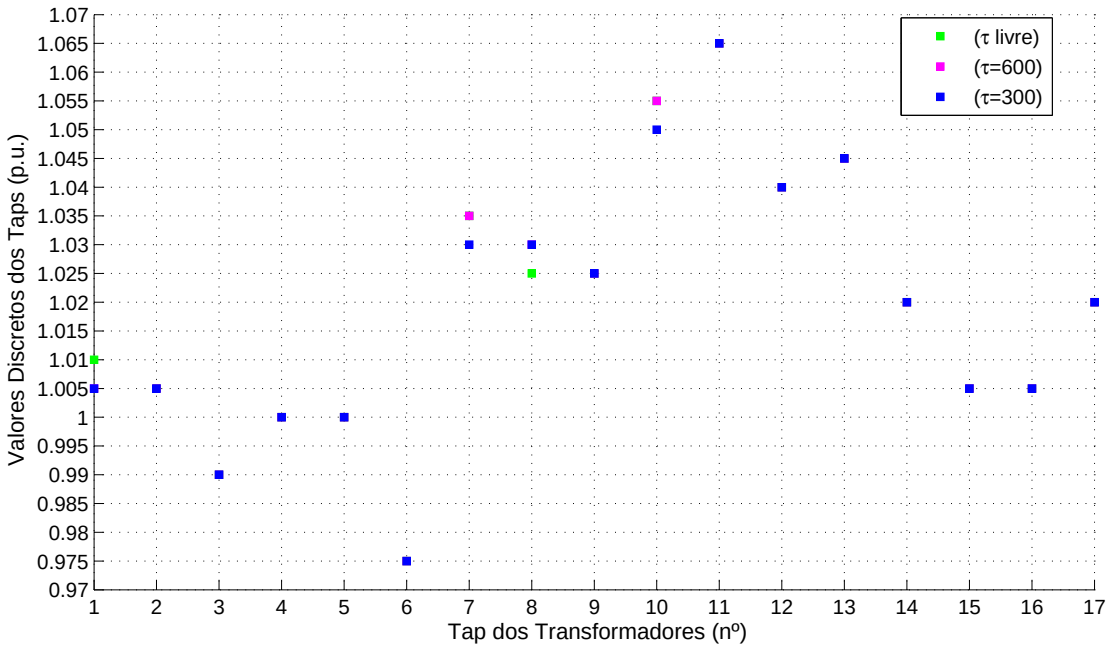

Figura 8.16 – Taps discretos do sistema de 57 barras com a variação de τ.

Observa-se que o perfil das tensões não teve alteração significativa e os *taps* assumiram os mesmos valores discretos para a maioria das variáveis e ficaram com valores discretos bem próximos nas restantes. No caso do sistema de 57 barras, o aumento do parâmetro τ influenciou na redução das iterações externas mas, por outro lado, causou um aumento do número de iterações internas, como mostra a Tabela 8.17. Embora gere um número elevado de iterações, o algoritmo GCS realiza somente operações com multiplicação de matriz por vetor e produto interno e, em particular, para o sistema de 57 barras, a relaxação do parâmetro τ não influenciou significativamente no tempo de convergência do problema.

Tabela 8.17 – Convegência do sistema de 57 barras sem fixar o limite máximo de iterações no algoritmo GCS.

Iteração Externa	Erro ($\|F\|$)	Iteração Interna	$\|d\|$	ρ
0	1,34056	79	0,13264	0,9954
1	0,90707	272	0,07908	-8,1747
2	1,46106	97	0,03170	0,9856
3	0,90907	310	0,04598	-3,0780
4	0,85692	119	0,02408	0,7598
5	0,75617	178	0,02276	0,9286
6	0,67865	1656	0,06323	0,1747
7	0,08226	750	0,01934	0,2472
8	0,02393	858	0,01705	0,1691
9	0,01354	1572	0,04270	0,9408
10	0,41258	578	0,00339	0,4919
11	0,09241	796	0,00257	0,2884
12	0,02660	777	0,00207	0,3648
13	0,00777	800	0,00169	0,4136
14	0,00365	1265	0,00445	0,9717
15	0,00104	464	0,00018	0,9165
16	0,00063	1678	0,00051	0,8830
17	0,00154	887	0,00009	0,9622
18	0,00047	-	-	-

8.2.4 118 Barras

O sistema de 118 barras apresenta as seguintes características:

- Uma barra de geração (*slack*);
- 53 barras de controle de reativo;
- 64 barras de carga;
- 186 linhas de transmissão;
- 9 transformadores com *tap* variável.

Para o sistema de 118 barras foram utilizados os parâmetros $\alpha^{(0)} = 10^{-2}$, $\tau = 500$ e os valores iniciais fornecidos pelo banco de dados. A convergência foi obtida em 22 iterações (Figura 8.17). As perdas totais de potência ativa nas linhas desse sistema foram 132,467 MW.

As Figuras 8.18 e 8.19 mostram as tensões obtidas para cada barra do sistema e a solução discreta para os *taps* dos transformadores.

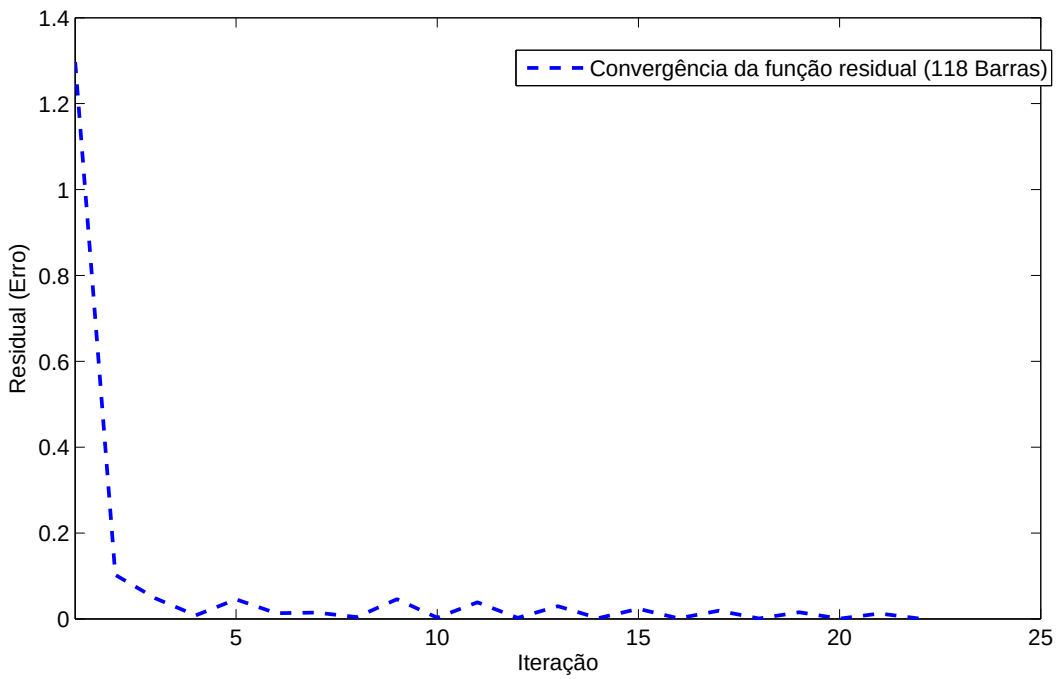

Figura 8.17 – Convergência da função residual $F(x)$ do sistema de 118 barras.

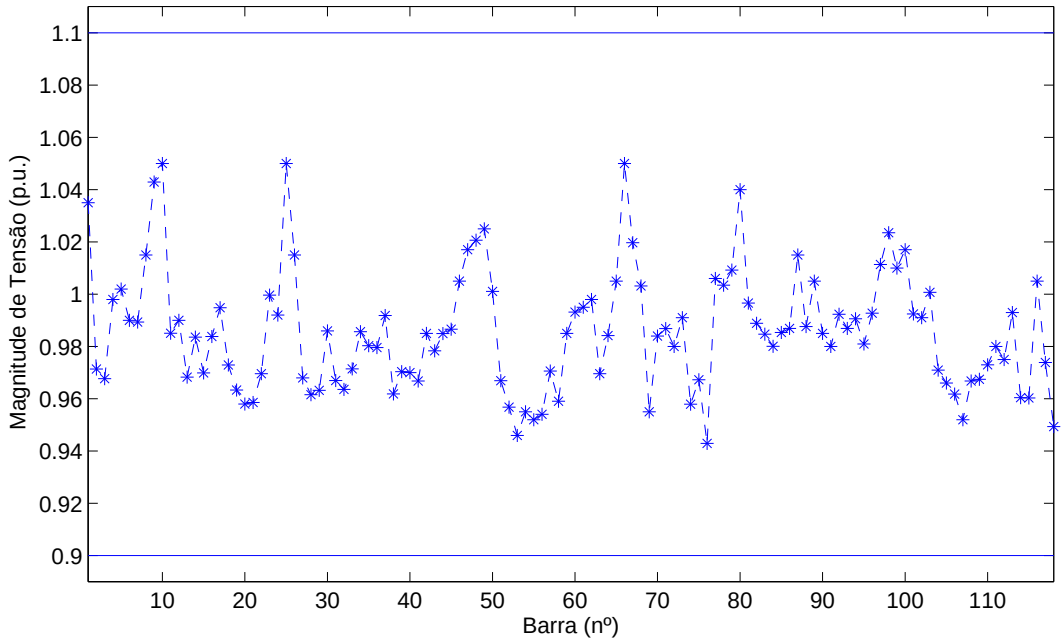

Figura 8.18 – Magnitude de tensão do sistema de 118 barras.

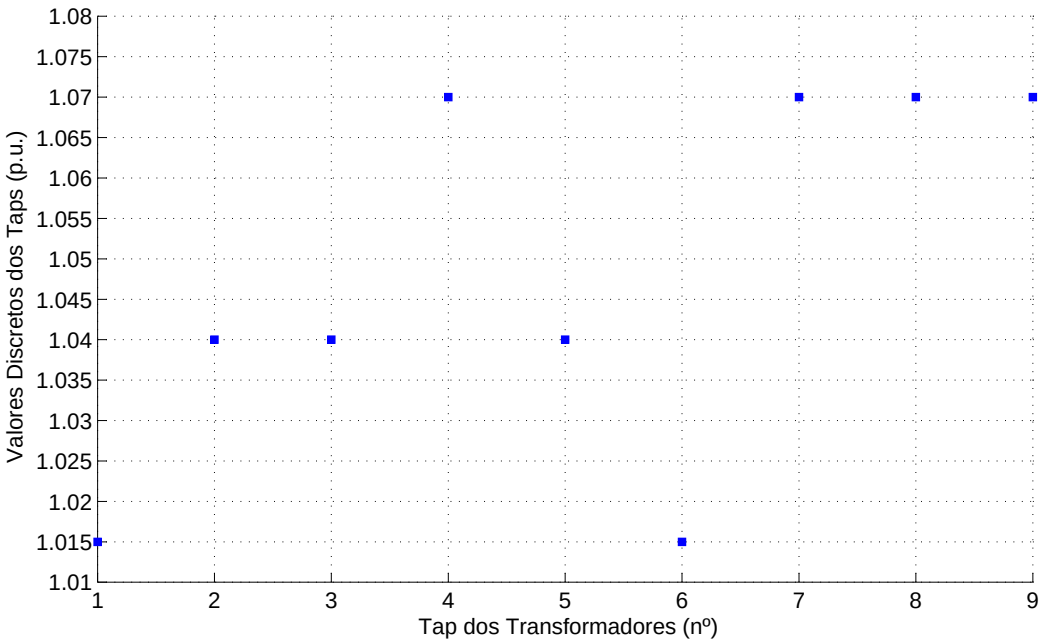

Figura 8.19 – Taps discretos do sistema de 118 barras.

Pela Tabela 8.18 pode ser visto que a geração de potência reativa atingiu seu limite mínimo nas barras 19, 32, 34, 92 e 105, enquanto que na barra 103 o limite máximo de geração foi alcançado. Logo, as tensões nas barras 19, 32, 34, 92 e 105 foram elevadas em relação aos seus valores especificados e a tensão na barra 103 foi reduzida também em relação ao valor especificado em tal barra.

Tabela 8.18 – Geração de potência reativa nas barras PV (118 Barras).

Barra (nº)	V^{esp}	V^{final}	V^a	V^b	Q^{min}	Q^{ger}	Q^{max}
19	0,962	0,963	0,001	0	-8,0	-8,0	24,0
32	0,963	0,964	0,001	0	-14,0	-14,0	42,0
34	0,984	0,986	0,002	0	-8,0	-8,0	24,0
92	0,990	0,992	0,002	0	-3,0	-3,0	9,0
103	1,010	1,001	0	0,009	-15,0	40,0	40,0
105	0,965	0,966	0,001	0	-8,0	-8,0	23,0

8.2.5 300 Barras

O sistema de 300 barras apresenta as seguintes características:

- Uma barra de geração (*slack*);
- 68 barras de controle de reativo;
- 231 barras de carga;
- 411 linhas de transmissão;
- 50 transformadores com *tap* variável.

Os parâmetros utilizados para o sistema de 300 barras foram $\alpha^{(0)} = 10^{-4}$ e o limite máximo de iterações internas foi relaxado com $\tau = 5.000$. Os valores iniciais utilizados para os *taps* variáveis do sistema foram 1,0 p.u. A Figura 8.20 mostra a convergência da função residual $F(x)$ do problema, atingindo a tolerância requerida em 63 iterações.

A Figura 8.21 mostra o perfil das tensões para o sistema de 300 barras, onde pode ser observado que as tensões permaneceram dentro do intervalo especificado [0,9 1,1].

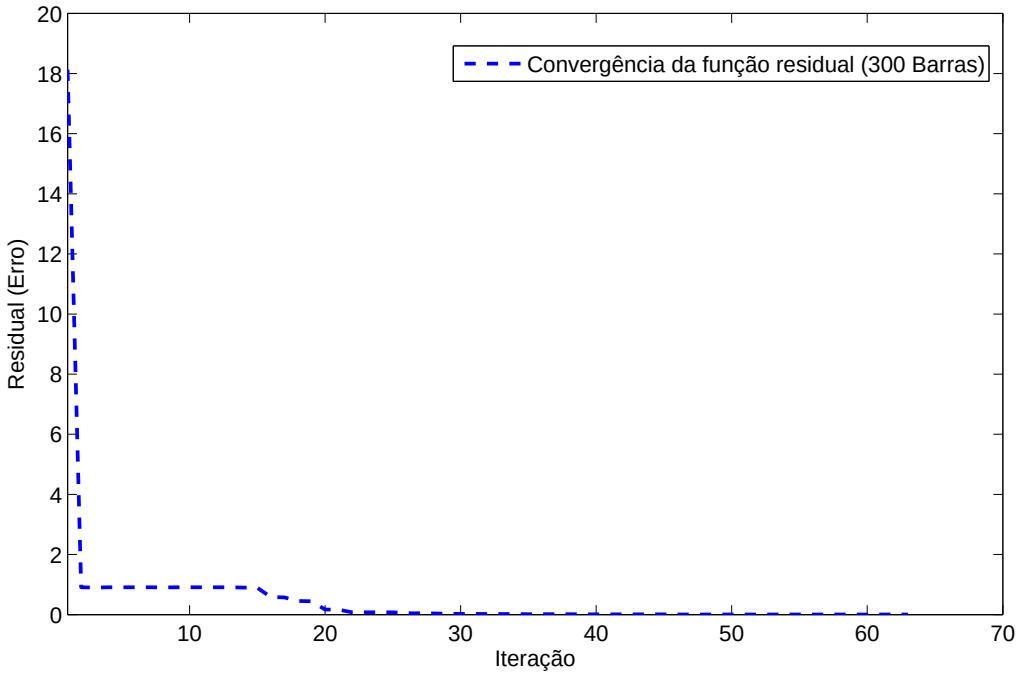

Figura 8.20 – Convergência da função residual $F(x)$ do sistema de 300 barras.

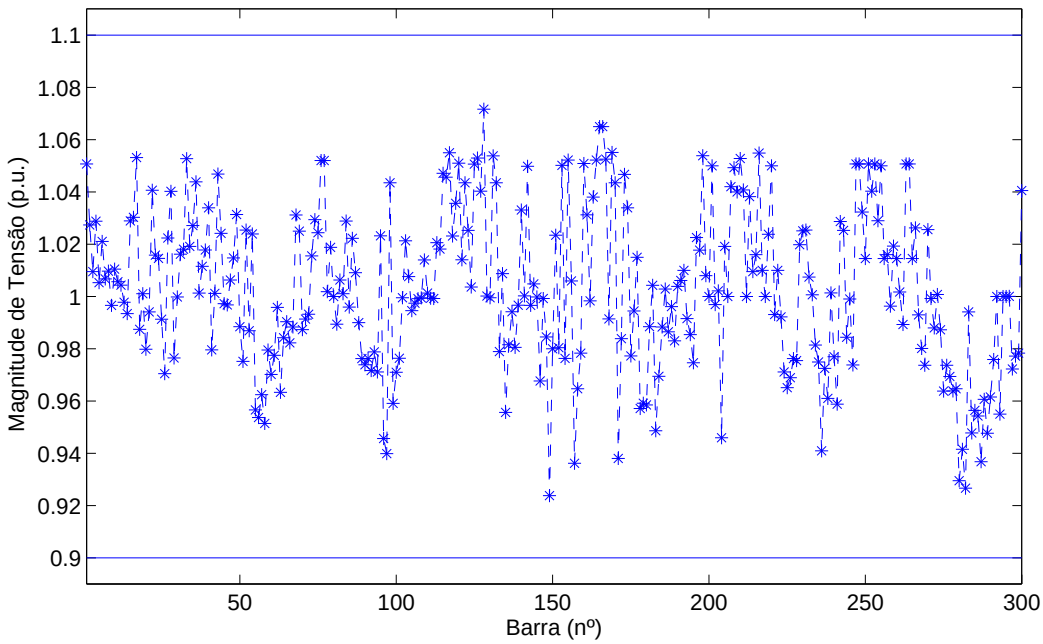

Figura 8.21 – Magnitude de tensão do sistema de 300 barras.

Os valores discretos assumidos pelos 50 *taps* variáveis do sistema são apresentados na Figura 8.22. Observa-se todos os valores estritamente dentro do intervalo [0,9; 1,1], sendo que a maioria das variáveis assumiram valores pertencentes ao conjunto: $\{0,985;\ 0,99;\ 0,995;\ 1,0;\ 1,005;\ 1,01;\ 1,015\}$.

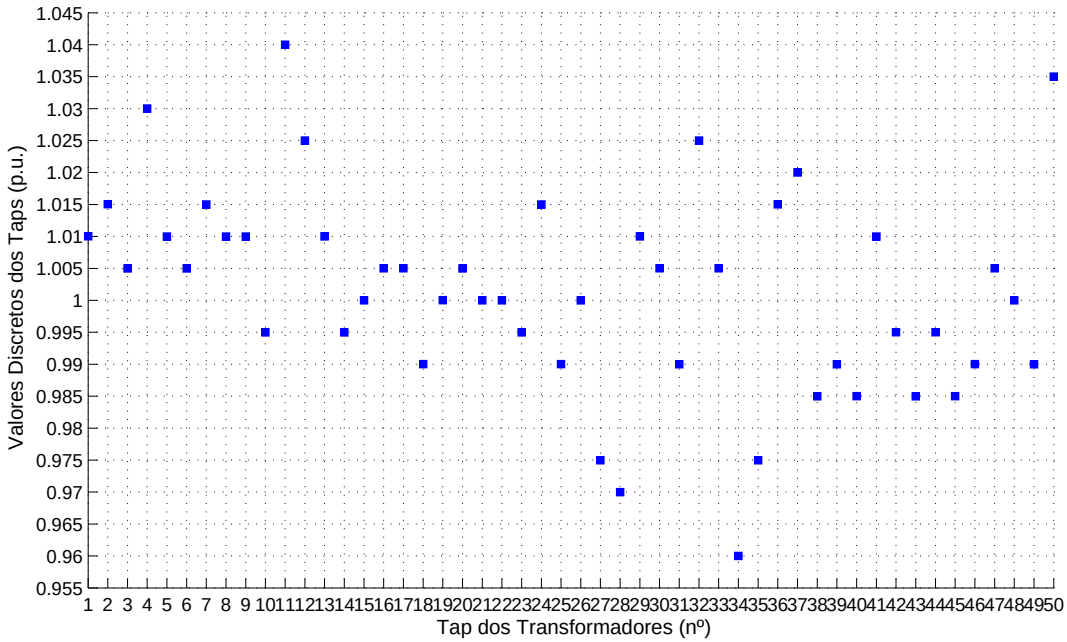

Figura 8.22 – Taps discretos do sistema de 300 barras.

A Tabela 8.19 mostra as barras que atingiram os limites máximo ou mínimo de geração de potência reativa para o sistema de 300 barras. Esse sistema apresenta 68 barras do tipo PV, sendo que destas, 16 atingiram os limites máximo de geração especificados para a barra. Pode ser observado que somente os limites máximos de geração foram atingidos e, portanto, as variáveis auxiliares V^b assumiram valores positivos, fazendo com que as tensões em tais barras fossem reduzidas em relação aos seus valores especificados.

Tabela 8.19 – Geração de potência reativa nas barras PV (300 Barras).

Barra (nº)	V^{esp}	V^{final}	V^a	V^b	Q^{min}	Q^{ger}	Q^{max}
8	1,015	1,010	0	0,005	-10,0	10,0	10,0
10	1,021	1,010	0	0,011	-20,0	20,0	20,0
124	1,023	1,021	0	0,002	-60,0	120,0	120,0
125	1,010	1,008	0	0,002	-25,0	200,0	200,0
146	1,053	1,051	0	0,002	-15,0	35,0	35,0
149	1,073	1,072	0	0,001	-25,0	50,0	50,0
156	0,963	0,956	0	0,007	-10,0	15,0	15,0
170	0,929	0,924	0	0,005	-40,0	90,0	90,0
171	0,983	0,980	0	0,003	-50,0	150,0	150,0
177	1,008	1,006	0	0,002	-15,0	35,0	35,0
236	1,017	1,016	0	0,001	-300,0	300,0	300,0
7017	1,051	1,040	0	0,011	0,0	350,0	350,0
7055	0,997	0,996	0	0,001	0,0	25,0	25,0
7057	1,021	1,019	0	0,002	-90,0	90,0	90,0
7071	0,989	0,988	0	0,001	0,0	87,0	87,0
9002	0,995	0,993	0	0,002	-2,0	2,0	2,0

No caso de não considerar o limite máximo de iterações no algoritmo GCS, a convergência do sistema de 300 barras seria obtida em 43 iterações. Porém, o número de iterações no *loop* interno aumenta consideravelmente e eleva o tempo de convergência do problema, inviabilizando essa opção.

8.3 Sistema Brasileiro Reduzido 53 Barras

O sistema elétrico brasileiro equivalente CESP 440 kV de geração e transmissão com 53 barras possui as seguintes características:

- Uma barra de geração (*slack*);
- 8 barras de controle de reativo;
- 44 barras de carga;
- 85 linhas de transmissão;
- 30 transformadores com *tap* variável.

Para a resolução desse sistema foi utilizado $\alpha^{(0)} = 10^{-3}$ e, para o limite máximo das iterações internas do algoritmo GCS, foi adotado $\tau = 500$. Foram adotados os valores

iniciais do banco de dados para as tensões e ângulos e os *taps* foram inicializados em 1,0 p.u. A Figura 8.23 mostra a convergência do problema, obtida em 113 iterações externas.

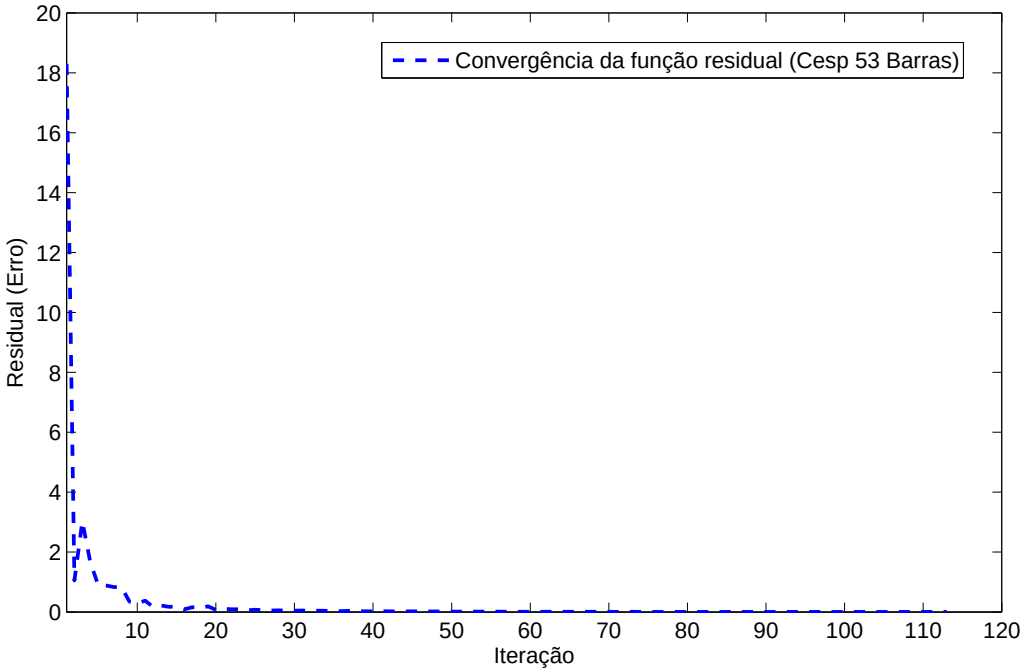

Figura 8.23 – Convergência da função residual $F(x)$ do sistema Cesp 53 barras.

Foi realizado também o teste com o sistema de 53 barras, fixando os *taps* nos valores discretos obtidos e resolvendo novamente o problema, resultando então na convergência em 64 iterações. Isto indica que a presença da função associada à obtenção dos valores discretos dos *taps*, no modelo do problema de fluxo de carga, naturalmente eleva o número de iterações necessárias para a convergência do problema. Contudo, mesmo com esse aumento a compensação é válida por se ter disponível uma solução discreta que modela mais adequadamente cenários da operação dos sistemas elétricas, em nível de planejamento.

As Figuras 8.24 e 8.25 apresentam, respectivamente, as tensões em cada barra do sistema e os valores discretos para os *taps* de transformadores. Observa-se que todas as variáveis ficaram dentro dos limites estabelecidos. A geração de potência reativa não atingiu nenhum dos limites superiores ou inferiores estabelecidos, e assim, todas as variáveis auxiliares V^a e V^b são nulas.

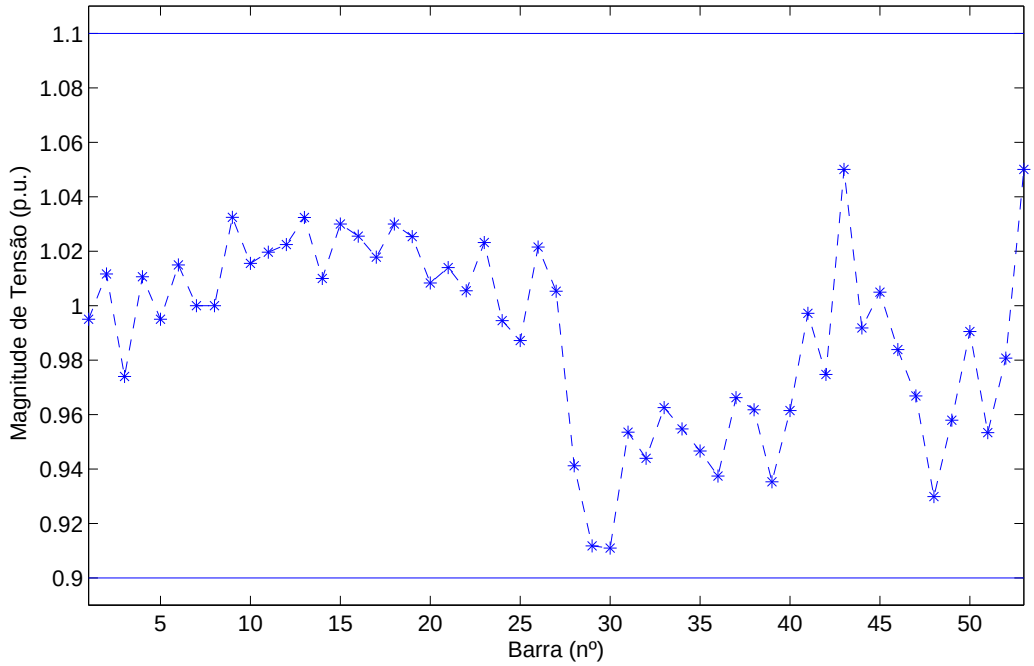

Figura 8.24 – Magnitude de tensão do sistema Cesp 53 barras.

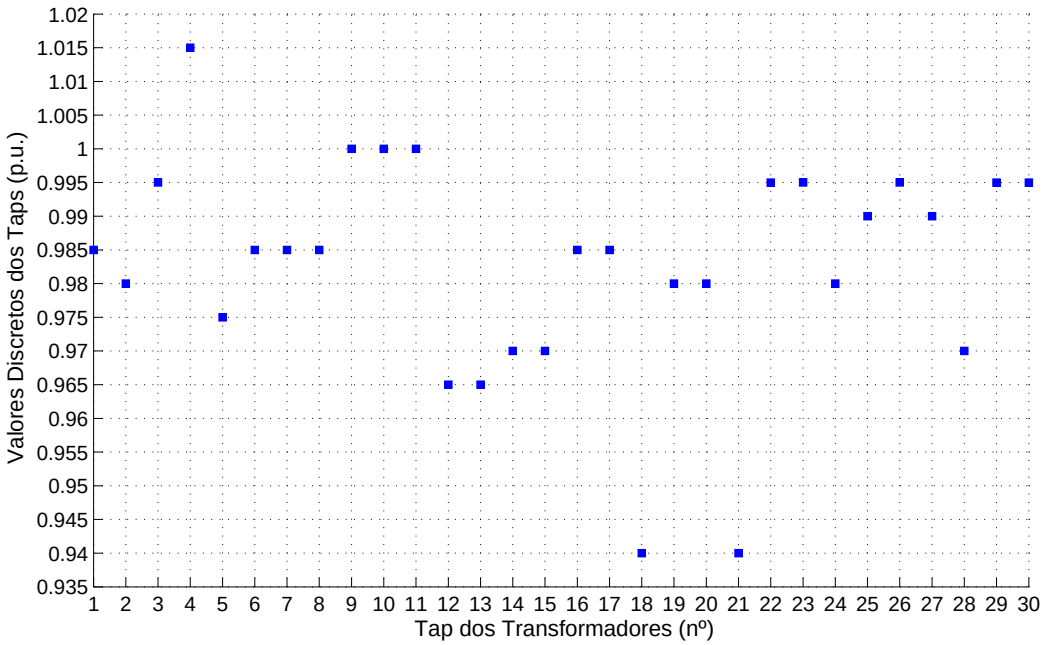

Figura 8.25 – Taps discretos do sistema Cesp 53 barras.

Capítulo 9

Conclusões e Trabalhos Futuros

O estudo do problema fluxo de carga é fundamental na análise de sistemas elétricos de potência, tanto na área de planejamento como na área de operação. As informações obtidas no cálculo do fluxo de carga podem simular o comportamento do sistema em diferentes situações, viabilizando, então, intervenções na rede elétrica.

Sistemas de equações e inequações não lineares surgem em uma ampla variedade de problemas práticos, para os quais se deseja a obtenção de uma solução que satisfaça todas as restrições do sistema. Em particular, o problema de fluxo de carga em regime permanente é representado por um conjunto de equações e inequações algébricas não lineares e consiste, essencialmente, na determinação do estado da rede e da distribuição de seus fluxos nas linhas do sistema. Esse conjunto de restrições foi tratado como um problema de factibilidade não linear e sua estrutura propiciou o uso de um modelo aproximado de Gauss-Newton, usado regularmente para resolução de problemas de mínimos quadrados não lineares. Portanto, a resolução de um sistema de equações e inequações não lineares foi tratada como um problema de otimização (minimização) com restrições de caixa.

Em cada iteração do algoritmo é realizada a minimização do residual do problema de fluxo de carga, por meio do modelo aproximado de Gauss-Newton (linearização desse residual) em torno de uma região de confiança estabelecida. Para a obtenção de uma solução aproximada desse subproblema quadrático com região de confiança foi utilizado o método do gradiente conjugado de Steihaug. A técnica de filtros multidimensionais foi combinada com o mecanismo usual do método de região de confiança para decidir quando uma solução deve ser aceita ou não.

Naturalmente, o objetivo de um sistema de energia elétrica é sempre operar em um estado seguro, ou seja, operar com folga nos controles para uma eventual manobra de correção devido a uma contigência. Porém, isso nem sempre é possível devido ao grande aumento da demanda de energia e de interconexões na rede, associado com problemas ambientais e falta de investimentos em geração e transmissão de energia elétrica. Em

algumas situações, uma ou mais restrições de operação do sistema podem estar violadas para uma dada configuração e, neste caso, é desejável o desenvolvimento de ferramentas computacionais que

- sejam capazes de encontrar um ponto de operação na região factível do conjunto de restrições de carga e de operação, se este existir, para uma determinada configuração;
- melhorem as características de convergência da rede caso ela seja mal-condicionada;
- possam identificar múltiplas soluções dentro da região de operação factível;
- executem ações de controle para restabelecer a normalidade operativa da rede (estado normal-seguro) quando esta se encontra no estado operativo de emergência;
- permitam simulações futuras com a inclusão de outras restrições ao sistema, por exemplo com restrições de segurança, a fim de executar a análise de contingências para determinar o grau de segurança do sistema elétrico.

Quando um sistema de energia elétrica se encontra no estado de emergência, significa que a carga ainda é atendida, mas há violação em uma ou mais restrições de operação do sistema. Nesse caso, é comum a execução de ações de controle no modo corretivo e, em casos mais severos, no modo crise. As medidas corretivas para eliminar as violações identificadas podem ser, por exemplo, a variação de tensões controladas e a mudança de *taps* dos transformadores.

O método desenvolvido neste trabalho visa fundamentalmente a obtenção de uma solução factível para o problema de fluxo de carga em sistemas elétricos de potência, satisfazendo simultaneamente as restrições de carga e operação do sistema, bem como a obtenção da solução discreta para os *taps* de transformadores. Para modelar a relação existente entre as tensões e a geração de potência reativa nas barras com controle de geração, foram adotadas restrições de complementaridade, as quais mostraram ser efetivas no ajuste das tensões em barras onde os limites mínimo ou máximo de geração foram alcançados.

A análise dos resultados numéricos mostra a robustez do algoritmo na resolução de sistemas operando em condições sobrecarregadas, como, por exemplo, o cenário do aumento da demanda de carga com o sistema de 14 barras. Com a simulação de tais condições, foi possível executar ações de controle de caráter corretivo, através do ajuste das tensões em barras com controle de geração e dos *taps* de transformadores, levando o sistema a operar dentro da normalidade.

Também pode ser observado que é possível obter múltiplas soluções dentro da região de operação do sistema, já que dispositivos de controle estão inclusos na modelagem do

problema. A ocorrência de tais soluções podem ser associadas com diferentes inicializações das variavéis do problema e, eventualmente, da inicialização e atualização de alguns parâmetros. Para o sistema de 57 barras, por exemplo, a inicilização com a chamada solução *flat start* forneceu uma solução com características particulares, aumentando o nível das tensões em barras críticas, diferentemente da solução obtida com a simulação do caso base.

Os testes realizados mostraram que o algoritmo GCS é sensível em relação ao parâmetro associado com o número máximo de iterações. Ao considerar esse limite máximo, tem-se um método truncado onde uma solução aproximada é obtida e, na medida em que esse limite vai sendo relaxado, o critério de parada vai se tornando mais restrito, pois se baseia, principalmente, no tamanho do vetor resíduo. Por outro lado, o aumento do número de iterações internas pode afetar o tempo de convergência do problema e com relação a esse aspecto ainda são necessárias mais investigações. O uso de pré-condicionadores adequados no algoritmo GCS pode acelerar o processo de convergência do método, pois este é construído visando melhorar o condicionamento do sistema.

O parâmetro α que define a amplitude da função senoidal, modelada para a obtenção dos valores discretos dos *taps*, também influencia o processo de convergência dos sistemas. Contudo, valores iniciais como $\alpha = 10^{-3}$ ou $\alpha = 10^{-4}$ parecem ser razoáveis para a convergência dos sistemas testados, não existindo ainda um critério ótimo para a determinação de tais valores. A adição dessa função no modelo de fluxo de carga torna o processo de resolução mais criterioso, elevando naturalmente o número de iterações necessárias para a convergência.

É importante ainda destacar que a estrutura do método proposto possibilita a adaptação de outras restrições na modelagem do problema de fluxo de carga, como, por exemplo, restrições de limites sobre os fluxos de potência nas linhas, visto que o procedimento de resolução é designado para obter a solução de um sistema misto de equações e inequações não lineares com restrições de caixa.

Podemos enfatizar que as características mais relevantes presentes na abordagem desenvolvida, representada no algoritmo RCGC, são:

- resolução simultânea das restrições de carga e de operação do sistema, de maneira que ao terminar o processo de convergência, já se tem disponível os valores das variáveis de todas as barras do sistema;

- fornecer um ponto de operação factível para ser utilizado por métodos que necessitem de uma solução inicial factível para resolução do problema de fluxo de potência ótimo;

- flexibilidade para o ajuste de variáveis de controle, auxiliando em ações corretivas para levar o sistema a operar no estado normal;

- tratamento discreto dos *taps* de transformadores;
- não necessidade do cálculo de segundas derivadas;
- o método do gradiente conjugado usado no *loop* interno é computacionalmente barato para problemas de grande porte, constituindo uma alternativa aos métodos diretos de fatoração;
- robustez do método, devido à capacidade de se obter uma solução para sistemas em condições estressadas (sobrecarregados).

De forma geral, a análise dos resultados apresentados indica flexibilidade do algoritmo para obtenção de soluções factíveis para os sitemas testados do problema de fluxo de carga. A obtenção de uma solução discreta para os *taps* de tranformadores necessita de um método específico, pois somente o arredondamento da solução contínua para o valor discreto mais próximo não garante que a solução permaneça factível. Ressaltamos também que o interesse do trabalho proposto foi o desenvolvimento de um método robusto e com estrutura passível para inclusão de futuras restrições, e não o tempo de processamento.

Em linhas gerais, algumas sugestões de propostas futuras que podem ser incorporadas e aplicadas ao método desenvolvido, se resumem principalmente em:

- refinamento do processo computacional para a redução do tempo de processamento;
- tratar as componentes b^{sh} (susceptância *shunt* de equipamentos) como variáveis discretas no modelo do fluxo de carga;
- efetuar um controle do tamanho do residual no critério de parada do algoritmo GCS, procurando estabelecer um equilíbrio entre a exatidão com que o subproblema quadrático é resolvido e o número de iterações internas que algoritmo realiza;
- analisar a viabilidade de usar um pré-condicionador no método do gradiente conjugado de Steihaug para acelerar a convergência do método, a qual é fortemente dependente do condicionamento da matriz Hessiana (essa viabilidade depende da compensação entre o ganho de velocidade na convergência e o custo por iteração da construção e aplicação do pré-condicionador);
- associar ao método RCGC um método do tipo secante para problemas de mínimos quadrados não lineares, com o intuito de aproximar os termos de segunda ordem de $S(x)$, dado em (4.17), para melhorar a convergência de problemas com "grandes residuais". Esse termo se referente ao valor de $F(x)$ ou, equivalentemente, de $f(x)$ no ponto minimizador x^* do problema (4.3).

Referências Bibliográficas

AUDET, C.; DENNIS, J. E. A pattern search filter method for nonlinear programming without derivatives. *SIAM Journal on Optimization*, v. 14, p. 980–1010, 2004.

BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. *Nonlinear programming: theory and algorithms*. 2. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1993.

BELLAVIA, S.; MACCONI, M.; MORINI, B. An affine scaling trust-region approach to bound-constrained nonlinear systems. *Applied Numerical Mathematics*, v. 44, p. 257–280, 2003.

BIAZAR, J.; GHANBARY, B. A new approach for solving systems of non-linear equations. *International Mathematical Forum*, v. 3, n. 38, p. 1885–1889, 2008.

BJÖRCK, A. *Numerical methods for least squares problems*. Philadelphia, USA: SIAM Publications, 1996.

BORGES, C. L.; COUTINHO, A. L. G. A.; FALCAO, D. M. Solução do fluxo de potência em ambiente vetorial usando o método do gradiente biconjugado estabilizado. In: XI CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - ANAIS VOL 1, SÃO PAULO. São Paulo, SP, 1996. p. 1–6.

COLEMAN, T. F.; LI, Y. An interior trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds. *SIAM Journal on Optimization*, v. 6, p. 418–445, 1996.

CONN, A. R.; GOULD, N. I. M.; TOINT, P. L. *Trust-region methods*. 1. ed. Philadelphia, USA: MPS-SIAM Series on Optimization, 2000.

DAG, H.; SEMLYEN, A. A new preconditioned conjugate gradient power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 18, n. 4, p. 1248 – 1255, 2003.

DEMMEL, J. W. *Applied numerical linear algebra*. 1. ed. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.

DENNIS, J. E.; MORÉ, J. Quasi-newton methods, motivation and theory. *SIAM Review*, v. 19, n. 1, p. 46–89, 1977.

EL-DIB, A. A. et al. Load flow solution using hybrid particle swarm optimization. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ELECTRICAL, ELECTRONIC AND COMPUTER ENGINEERING. Cairo, Egypt, 2004. p. 742–746.

FLETCHER, R. et al. Global convergence of a trust-region sqp-filter algorithm for general nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, v. 13, p. 635–659, 2002.

FLETCHER, R.; LEYFFER, S. Nonlinear programming without a penalty function. *Mathematical Programming*, v. 91, n. 2, p. 239–269, 2002.

FLETCHER, R.; LEYFFER, S. Filter-type algorithms for solving systems of algebraic equations ans inequalities. *High Performance Algorithms and Software for Nonlinear Optimization, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*, p. 259–278, 2003.

FLETCHER, R.; LEYFFER, S.; TOINT, P. L. A brief history of filter method. *SIAG/ Optimization Views-and-News*, v. 18, p. 2–12, 2007.

FLUECK, A. J.; CHIANG, H. D. Solving the nonlinear power flow equations with an inexact newton method using gmres. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 13, n. 2, p. 267–273, 1998.

FRANCISCO, J. B.; KREJIC, N.; MARTÍNEZ, J. M. An interior-point method for solving box-constrained underdetermined nonlinear systems. *Computational Applied Mathematics*, v. 177, p. 67–88, 2005.

FRIEDLANDER, M. P.; LEYFFER, S. Global and finite termination of a two-phase augmented lagrangian filter method for general quadratic programs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 30, n. 4, p. 1706–1729, 2007.

GALIANA, F. D.; JAVIDI, H.; MCFEE, S. On the application of a pre-conditioned conjugate gradient algorithm to power network analysis. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 9, n. 2, p. 629–636, 1994.

GILL, P. E.; MURRAY, W.; WRIGHT, M. H. *Practical optimization*. [S.l.]: Academic Press, 1981.

GONZAGA, C. C.; KARAS, E.; VANTI, M. A globally convergent filter method for nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, v. 14, p. 646–669, 2003.

GOULD, N. I. M.; LEYFFER, S.; TOINT, P. L. A multidimensional filter algorithm for nonlinear equations and nonlinear least-squares. *SIAM Journal on Optimization*, v. 15, p. 17–38, 2004.

GOULD, N. I. M. et al. Solving the trust-region subproblem using the lanczos method. *SIAM Journal on Optimization*, v. 9, n. 2, p. 504–525, 1999.

GOULD, N. I. M.; SAINVITU, C.; TOINT, P. L. A filter-trust-region method for unconstrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, v. 16, p. 341–357, 2006.

GOULD, N. I. M.; TOINT, P. L. Filtrane, a fortran 95 filter-trust-region package for solving nonlinear least-squares and nonlinear feasibility problems. *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 33, p. 3–25, 2007.

GRAINGER, J. J.; STEVENSON, W. D. *Power system analysis*. 1. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Science, 1994.

HAGER, W. W.; ZHANG, H. A survey of nonlinear conjugate gradient methods. *Pacific Journal of Optimization*, v. 2, p. 35–58, 2006.

HESTENES, M. R.; STIEFEL, E. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, v. 49, p. 409–436, 1952.

KARAMI, A.; MOHAMMADI, M. S. Radial basis function neural network for power system load-flow. *Electrical Power and Energy Systems*, v. 30, p. 60–66, 2008.

KELLEY, C. T. *Iterative methods for optimization*. Philadelphia, USA: SIAM Frontiers in Applied Mathematics, 1999.

KRISHNA, J.; SRIVASTAVA, L. Counterpropagation neural network for solving power flow problem. *International Journal of Computer Systems Science and Engineering*, p. 57–62, 2006.

LEVENBERG, K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 2, p. 164–168, 1944.

MACCONI, M.; MORINI, B.; PORCELLI, M. Trust-region quadratic methods for nonlinear systems of mixed equalities and inequalities. *Applied Numerical Mathematics*, v. 59, p. 859–876, 2009.

MAEL, S. *Métodos de região de confiança para sistemas de equações não lineares com restrições de caixa*. 2006. Dissertação — Universidade Federal de Santa Catarina, 2006.

MARQUARDT, D. An algorithm for least squares estimation on nonlinear parameters. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 11, p. 431–441, 1963.

MONTICELLI, A. J. *Fluxo de carga em redes de energia elétrica.* 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 1983.

MORÉ, J. J. The levenberg-marquardt algorithm: implementation and theory. *in: Numerical Analysis, G. Warson ed., Lecture Notes in Mathematics*, Springer, Berlin, v. 630, p. 105–116, 1977.

MORÉ, J. J. Recent developments in algorithms and software for trust region methods. *Mathematical Programming: The State of the Art*, p. 258–287, 1983.

MORINI, B.; PORCELLI, M. Tresnei, a matlab trust-region solver for systems of nonlinear equalities and inequalities. *Computational Optimization and Applications*, p. 859–876, 2010.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical optimization.* 2. ed. New York, USA: Springer, 1999.

OZDEMIR, A.; LIM, J. Y.; SINGH, C. Post-outage reactive power flow calculations by genetic algorithms: constrained optimization approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 20, n. 3, p. 1266–1272, 2005.

PESSANHA, J. E. O.; PORTUGAL, C.; SAAVEDRA, O. Investigação crítica do desempenho do GMRES pré-condicionado via fatoração incompleta LU em estudos de fluxo de carga. *Sba: Controle e Automação Sociedade Brasileira de Automática*, scielo, v. 20, p. 564 – 572, 2009.

POWELL, M. J. D. A hybrid method for nonlinear equations. *in: Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations, P. Rabinowitz, ed., Gordon and Breach, London*, p. 87–114, 1970.

POWELL, M. J. D. A new algorithm for unconstrained optimization. *in: Nonlinear Programming, eds., J.D. Rosen, O.L. Mangasarian and K. Ritter, Academic Press*, 1970.

ROSEHART, W.; ROMAN, C.; SCHELLENBERG, A. Optimal power flow with complementarity constraints. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 20, n. 2, p. 813–822, 2005.

SAINVITU, C.; TOINT, P. L. A filter-trust-region method for simple-bound constrained optimization. *Optimization Methods Software*, v. 22, n. 5, p. 835–848, 2007.

SARTENAER, A. Automatic determination of an initial trust region in nonlinear programming. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 18, n. 6, p. 1788–1803, 1997.

SHAN, S. *A Levenberg-Marquardt method for large-scale bound-constrained nonlinear least-squares*. 2008. Dissertação — University of British Columbia, Vancouver, 2008.

SOLER, E. M. *Resolução do problema de fluxo de potência ótimo com variáveis de controle discretas*. 2011. 108 f. Tese (Doutorado em Ciências, Programa de Engenharia Elétrica) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

STEIHAUG, T. The conjugate gradient method and trust regions in large scale optimization. *Journal on Numerical Analysis*, v. 20, n. 3, p. 626–637, 1983.

STOTT, B. Review of load-flow calculation methods. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, p. 916–921, 1974.

TALIB, K. M. et al. Power flow solvability identification and calculation algorithm using evolutionary programming technique. *Research and Development, SCOReD 2007. 5th Student Conference on*, p. 1–5, 2007.

TANG, M.; YUAN, Y. Using truncated conjugate gradient method in trust-region method with two subproblems and backtracking line search. *Computational and Applied Mathematics*, v. 29, n. 2, p. 89–106, 2010.

WÄCHTER, A.; BIEGLER, L. T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*, v. 106, p. 25–57, 2006.

WANG, Y.; YUAN, Y. A trust region method for solving distributed parameter identification problems. *Journal of Computational Mathematics*, v. 20, n. 1, p. 575–582, 2002.

Apêndice A

Expressões dos Fluxos de Potência

A.1 Cálculo dos Fluxos de Potências Ativa e Reativa

O desenvolvimento das expressões gerais para o cálculo dos fluxos de potências ativa e reativa é baseado na identificação das partes reais e imaginárias da equação que determina o fluxo de potência complexo que sai da barra k em direção à barra m (MONTICELLI, 1983; GRAINGER; STEVENSON, 1994):

$$S_{km}^{*} = P_{km} - jQ_{km} = E_k^{*} I_{km}. \tag{A.1}$$

A equação geral da corrente I_{km} tanto para modelagem de linhas de transmissão quanto para transformadores em-fase pode ser escrita como:

$$I_{km} = (a_{km}^2 y_{km} + jb_{km}^{sh})E_k + (-a_{km}y_{km})E_m. \tag{A.2}$$

Substituindo a equação geral para I_{km} na expressão de fluxo de potência em (A.1) e fazendo $E_k^{*} = V_k e^{-j\theta_k}$, $E_k = V_k e^{j\theta_k}$ e $E_m = V_m e^{j\theta_m}$ ($e^{j\theta_i} = cos\theta_i - jsen\theta_i$), obtem-se:

$$\begin{aligned}
P_{km} - jQ_{km} &= E_k^{*}[(a_{km}^2 y_{km} + jb_{km}^{sh})E_k + (-a_{km}y_{km})E_m] \\
&= V_k e^{-j\theta_k}[(a_{km}^2 y_{km} + jb_{km}^{sh})V_k e^{j\theta_k} + (-a_{km}y_{km})V_m e^{j\theta_m}] \\
&= (a_{km}^2 y_{km} + jb_{km}^{sh})V_k e^{j\theta_k} V_k e^{-j\theta_k} + (-a_{km}y_{km})V_m e^{j\theta_m} V_k e^{-j\theta_k} \\
&= (a_{km}^2 y_{km} + jb_{km}^{sh})V_k^2 e^{j(\theta_k - \theta_k)} + (-a_{km}y_{km})V_k V_m e^{j(\theta_k - \theta_m)} \quad (\theta_{km} = \theta_k - \theta_m) \\
&= [a_{km}^2(g_{km} - jb_{km}) + jb_{km}^{sh}]V_k^2 - a_{km}V_k V_m(g_{km} - jb_{km})e^{j(\theta_{km})}.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Como $e^{j(\theta_{km})} = cos\theta_{km} - jsen\theta_{km}$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
P_{km} - jQ_{km} &= [a_{km}^2(g_{km} - jb_{km}) + jb_{km}^{sh}]V_k^2 + \\
&\quad -a_{km}V_kV_m(g_{km} - jb_{km})cos\theta_{km} - jsen\theta_{km} \\
&= (a_{km}V_k)^2 g_{km} + j(a_{km}^2 b_{km} + b_{km}^{sh})V_k^2 - a_{km}V_kV_m g_{km}cos\theta_{km} + \\
&\quad -ja_{km}V_kV_m b_{km}cos\theta_{km} + ja_{km}V_kV_m g_{km}sen\theta_{km} - a_{km}V_kV_m b_{km}sen\theta_{km} \\
&= (a_{km}V_k)^2 g_{km} - a_{km}V_kV_m g_{km}cos\theta_{km} - a_{km}V_kV_m b_{km}sen\theta_{km} + \\
&\quad +j[V_k^2(a_{km}^2 b_{km} + b_{km}^{sh}) - a_{km}V_kV_m b_{km}cos\theta_{km} + a_{km}V_kV_m g_{km}sen\theta_{km}].
\end{aligned} \tag{A.4}$$

E assim, as expressões para P_{km} e Q_{km} são determinadas identificando as partes reais e imaginárias de (A.4):

$$\boxed{P_{km} = (a_{km}V_k)^2 g_{km} - a_{km}V_kV_m[g_{km}cos\theta_{km} + b_{km}sen\theta_{km}]} \tag{A.5}$$

$$\boxed{Q_{km} = -V_k^2(a_{km}^2 b_{km} + b_{km}^{sh}) + a_{km}V_kV_m[b_{km}cos\theta_{km} - g_{km}sen\theta_{km}]} \tag{A.6}$$

O desenvolvimento das expressões para P_{mk} e Q_{mk} é feito de maneira análoga, identificando as partes reais e imaginárias da equação que determina o fluxo de potência que sai da barra m em direção à barra k, dada por:

$$S_{mk}^* = P_{mk} - jQ_{mk} = E_m^* I_{mk} \tag{A.7}$$

e usando a equação geral da corrente I_{mk} definida por:

$$I_{mk} = (y_{km} + jb_{km}^{sh})E_m + (-a_{km}y_{km})E_k. \tag{A.8}$$

Assim,

$$\boxed{P_{mk} = V_m^2 g_{km} - a_{km}V_kV_m[g_{km}cos\theta_{km} - b_{km}sen\theta_{km}]} \tag{A.9}$$

$$\boxed{Q_{mk} = -V_m^2(b_{km} + b_{km}^{sh}) + a_{km}V_kV_m[b_{km}cos\theta_{km} + g_{km}sen\theta_{km}]} \tag{A.10}$$

Apêndice B

Método do Gradiente Conjugado

O método do gradiente conjugado (GC) é um procedimento intermediário entre o método do gradiente (ou método de máxima descida) e o método de Newton, desenvolvido para acelerar a convergência lenta típica do método do gradiente e ao mesmo tempo evitar o cálculo, armazenamento e inversão da matriz Hessiana requerido pelo método de Newton.

O método GC foi originalmente proposto em Hestenes e Stiefel (1952) para resolver sistemas de equações lineares de grande porte, cuja matriz dos coeficientes é esparsa, simétrica e definida positiva, constituindo, portanto, uma alternativa para a eliminação de Gauss. Além disso, pode ser adaptado para resolver problemas de otimização não lineares. Teoricamente, para funções quadráticas, o método GC converge para a solução exata em n iterações, sendo n a dimensão do problema. Contudo, na prática isso não ocorre devido aos erros de arredondamento e cancelamento que fazem com que o vetor resíduo perca precisão e os vetores direção deixem de ser A-conjugados, principalmente quando a matriz A é mal condicionada.

Os métodos iterativos são muito utilizados na resolução de sistemas lineares esparsos e de grande porte, pois requerem pouco espaço de armazenamento e apresentam grande eficiência computacional. Esses métodos podem ser classificados em duas classes:

- Estacionários: não envolvem informações das iterações anteriores e manipulam as variáveis através de operações elementares entre linhas e colunas da matriz do sistema, chamada matriz de iteração. Os métodos de Jacobi, Gauss-Seidel e SOR (Succesive Over Relaxation) são alguns dos métodos iterativos estacionários mais conhecidos.

- Não estacionários: caracterizam-se por utilizar informações das iterações anteriores e trabalham com a manipulação de vetores e matrizes, em geral calculando um resíduo que é usado na iteração subsequente. A classe mais promissora é a dos métodos do tipo gradiente conjugado e suas variantes.

B.1 Funções Quadráticas

O método do gradiente conjugado é um método iterativo para resolver um sistema linear do tipo

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{nxn}, \; x \in \mathbb{R}^n, \; b \in \mathbb{R}^n \tag{B.1}$$

em que A é uma matriz simétrica definida positiva, com a seguinte definição:

Definição B.1 *Uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{nx\ n}$ é dita ser definida positiva se $x^T Ax > 0$, para todo vetor não-nulo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Resolver o sistema em (B.1) é equivalente a resolver o seguinte problema de minimização:

$$\text{Min} \;\; \phi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c, \tag{B.2}$$

visto que

$$\begin{aligned} \nabla\phi(x) = Ax - b \Rightarrow \\ \nabla\phi(x) = 0 \Rightarrow \qquad Ax = b \end{aligned} \tag{B.3}$$

e ainda

$$-\nabla\phi(x) = b - Ax = r(x) \tag{B.4}$$

em que $r(x)$ é chamado resíduo ou residual do sistema. Podemos notar que se x^* é a solução de $Ax = b$, então $r(x^*) = 0$, ou seja, o resíduo é uma medida de erro indicando se estamos perto ou longe de uma solução do sistema. Assim, $\nabla\phi(x^*) = 0$ implica $Ax^* = b$, ou seja, a solução do sistema de equações lineares minimiza a função quadrática, e vice-versa. Essa equivalência permite interpretar o método do gradiente conjugado como um algoritmo para resolver sistemas lineares bem como para a minimização de funções quadráticas convexas.

Para o caso não quadrático e até mesmo para funções não lineares em geral, variantes do método GC podem ser projetadas, baseadas no argumento que próximo à solução o problema é aproximadamente quadrático. A ideia básica do método do gradiente conjugado não linear é aplicar eficientemente o método GC, onde o residual é substituído pelo gradiente da função objetivo não linear e o tamanho do passo é determinado por meio de uma busca linear que identifica um mínimo aproximado da função não linear f ao longo da direção d_k. Uma revisão mais recente sobre tais métodos é apresentada em Hager e Zhang (2006).

Existem muitos métodos iterativos de otimização para resolver o problema (B.2). Em geral, nesses métodos as aproximações sucessivas x_k são calculadas recursivamente por:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \tag{B.5}$$

onde p_k é a direção de busca em $\mathbb{R}^n$ e o escalar α_k é o tamanho do passo, escolhido de maneira a minimizar $\phi(x)$ na direção d_k. Nas próximas seções são apresentados os métodos do gradiente e do gradiente conjugado.

B.2 Método do Gradiente

No método do gradiente ou de máxima descida, a direção escolhida é

$$p = -\nabla\phi(x) = b - Ax \tag{B.6}$$

em que p é a direção oposta do gradiente e também o resíduo do sistema, ou seja, o resíduo irá fornecer a direção a ser seguida.

Para encontrar o tamanho do passo que minimiza $\phi(x_k + \alpha r_k)$, de forma que $\phi(x_{k+1}) < \phi(x_k)$, a função ϕ é derivada com relação à variável α:

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{d\alpha}\phi(x_k + \alpha r_k) &= \tfrac{d}{d\alpha}\left(\tfrac{1}{2}(x_k + \alpha r_k)^T A(x_k + \alpha r_k) - b^T(x_k + \alpha r_k) + c\right) \\
&= \tfrac{1}{2}x_k^T A r_k + \tfrac{1}{2}r_k^T A x_k + \alpha r_k^T A r_k - b^T r_k \\
&= r_k^T A x_k - r_k^T b + \alpha r_k^T A r_k \\
&= r_k^T(Ax_k - b) + \alpha r_k^T A r_k \\
&= -r_k^T r_k + \alpha r_k^T A r_k
\end{aligned} \tag{B.7}$$

e $\frac{d}{d\alpha}\phi(x_k + \alpha r_k) = 0$ fornece o valor mínimo de α:

$$-r_k^T r_k + \alpha r_k^T A r_k = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{r_k^T r_k}{r_k^T A r_k}. \tag{B.8}$$

Portanto, dado o minimizador exato α_k como o tamanho do passo e um valor inicial x_0, o método do gradiente se resume à iteração

$$x_{k+1} = x_k + \left(\frac{r_k^T r_k}{r_k^T A r_k}\right) r_k, \quad \text{com} \quad r_k = -\nabla\phi(x_k) = b - Ax_k \tag{B.9}$$

Uma das deficiências do método do gradiente é que ele pode ter a convergência lenta mesmo quando uma busca linear exata é usada e a Hessiana da função objetivo é bem-condicionada (NOCEDAL; WRIGHT, 1999).

B.3 Método do Gradiente Conjugado

O método do gradiente conjugado para resolver o problema em (B.2), ou equivalentemente o sistema $Ax = b$, é um método iterativo que usa a mesma fórmula recursiva do método do gradiente, mas não usa o resíduo no ponto x_k como vetor direção. Assim:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \tag{B.10}$$

com

$$p_k = \begin{cases} r_k, & \text{para } k = 0, \\ r_k + \beta_k p_{k-1}, & \text{para } k \geq 1, \end{cases} \tag{B.11}$$

sendo p_k as direções de busca do método do gradiente conjugado e r_0 o resíduo na primeira iteração. Veremos a seguir as propriedades básicas e a forma prática de considerar o algoritmo do método do grandiente conjugado (NOCEDAL; WRIGHT, 1999).

B.3.1 Direções Conjugadas

A ideia básica do método GC é tentar mover-se em direções que não interfiram no progresso já obtido por direções anteriores, visto que no método do gradiente isso pode ocorrer ao se repetir direções já tomadas anteriormente, pois os resíduos são ortogonais. Dessa maneira, procura-se encontrar a cada iteração k um vetor p_k que satisfaça as seguintes condições:

1. seja linearmente independente dos anteriores $p_1, ..., p_{k-1}$;
2. determine a solução x_{k+1} que minimiza $\phi(x)$ no espaço gerado pelos vetores p já definidos.

Uma das propriedades interessantes do método GC é a habilidade de gerar de forma econômica esse conjunto de vetores, definidos da seguinte maneira.

Definição B.2 *Um conjunto de vetores não nulos $\{p_0, p_1, ..., p_{n-1}\}$ é dito ser conjugado em relação a matriz A simétrica e definida positiva (A-conjugados), se*

$$p_i^T A p_j = 0, \quad \forall\ i \neq j. \tag{B.12}$$

Teorema B.1 *Se A é uma matriz definida positiva e $p_0, p_1, ..., p_{n-1}$ é um conjunto de vetores não nulos conjugados com relação a A, então esse conjunto é linearmente independente.*

Assim, dada uma matriz A simétrica, dois vetores p_i e p_j são chamados *A-ortogonais* ou *conjugados* se $p_i^T A p_j = 0$, $\forall\, i \neq j$ (ou seja, não interferem entre si no contexto da matriz A). Ainda, se $A = I$, conjugacidade é equivalente à noção usual de ortogonalidade.

Pelo teorema B.1, qualquer conjunto de vetores conjugados é também linearmente independente, ou seja, formam uma base para $\mathbb{R}^n$. Isto implica que a diferença entre x_0 e a solução x^* do sistema $Ax = b$ pode ser escrita como uma combinação linear desses vetores

$$x^* - x_0 = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + ... + \alpha_{n-1} p_{n-1}, \tag{B.13}$$

para algum conjunto de coeficientes α_k. Multiplicando por A e tomando o produto escalar com p_k resulta

$$\alpha_k = \frac{p_k^T A(x^* - x_0)}{p_k^T A p_k}. \tag{B.14}$$

Pelo processo iterativo (B.10), de x_0 até x_k obtém-se

$$x_k - x_0 = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + ... + \alpha_{k-1} p_{k-1} \tag{B.15}$$

e, multiplicando a expressão (B.15) por $p_k^T A$ e usando a propriedade de conjugacidade, segue que

$$p_k^T A(x_k - x_0) = 0 \tag{B.16}$$

Portanto,

$$p_k^T A(x^* - x_0) = p_k^T A(x^* - x_k) = p_k^T (b - Ax_k) = p_k^T r_k = r_k^T p_k \tag{B.17}$$

que, substituindo em (B.14), resulta em

$$\alpha_k = \frac{r_k^T p_k}{p_k^T A p_k}. \tag{B.18}$$

Essa propriedade de conjugacidade é importante pois permite fazer a minimização sucessiva da função $\phi(.)$ em n passos ao longo de direções individuais em um conjunto conjugado. Isso é afirmado pelo seguinte teorema do método das direções conjugadas (NOCEDAL; WRIGHT, 1999):

Teorema B.2 *Para qualquer ponto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a sequência $\{x_k\}$ gerada usando a fórmula de recorrência* (B.10) *e o tamanho do passo dado em* (B.18)*, converge para a solução do sistema linear* (B.3) *em no máximo n iterações.*

Uma das maneiras de se escolher o conjunto de direções conjugadas é o processo de conjugação de *Gram-Schmidt*. No entanto, esta abordagem tem um alto custo

computacional pois armazena o conjunto de todas as direções anteriores a k, para obter p_k. Dessa forma, foi desenvolvido o método do gradiente conjugado, que simplifica o processo de conjugação de Gram-Schmidt.

B.3.2 Forma Prática do Método do Gradiente Conjugado

O método do gradiente conjugado é um método das direções conjugadas com uma característica particular para gerar o conjunto de vetores conjugados: utiliza apenas o vetor anterior p_{k-1} para calcular um novo vetor p_k. Logo, não é necessário conhecer todas as direções anteriores $p_0, p_1, ..., p_{k-2}$ do conjunto conjugado que p_k será automaticamente conjugado a estes vetores. Assim, lembrando que

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \tag{B.19}$$

pode-se obter um conjunto de direções A-conjugadas da seguinte maneira:

- Iniciar a busca na direção oposta ao gradiente, fazendo $p_0 = r_0$.
- Em seguida, cada direção p_k é definida como uma combinação linear do residual r_k e a direção anterior p_{k-1}, dada implicitamente por:

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_{k+1} p_k. \tag{B.20}$$

O escalar β_k é determinado pela exigência de que as direções p_k e p_{k+1} devem ser conjugadas em relação à matriz A. Pré-multiplicando (B.20) por $p_k^T A$ e impondo a condição $p_k^T A p_{k+1} = 0$, tem-se que

$$\beta_{k+1} = \frac{r_{k+1}^T A p_k}{p_k^T A p_k}. \tag{B.21}$$

Assim, são realizadas sucessivas minimizações unidimensionais ao longo de cada direção para obter α_k. O algoritmo é definido formalmente como:

Algoritmo 4: Versão Preliminar

1 Dado as entradas A, b e o valor inicial x_0;
2 Faça $r_0 = b - Ax_0$, $p_0 = r_0$, $k = 0$
3 **enquanto** $\|r_k\| > \epsilon$ **faça**
4 $\quad \alpha_k = \frac{r_k^T p_k}{p_k^T A p_k}$
5 $\quad x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$
6 $\quad r_{k+1} = b - Ax_{k+1}$
7 $\quad \beta_{k+1} = \frac{r_{k+1}^T A p_k}{p_k^T A p_k}$
8 $\quad p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_{k+1} p_k$
9 $\quad k = k + 1$
10 **fim enqto**

O algoritmo 4 usa como primeira direção de busca a mesma direção do método do gradiente, ou seja, $p_0 = r_0$. Em seguida, todas as direções são modificações do gradiente na iteração corrente (adiciona a ele uma combinação linear das direções anteriores) de maneira que as direções sejam sempre conjugadas com todas as direções anteriores em relação à matriz A. Os escalares α e β são definidos de maneira que satisfaçam essas condições de $A-$ortogonalidade.

O que foi apresentado é essencial para entender as propriedades do método do gradiente conjugado, mas para questões práticas, existe uma versão mais eficiente e econômica do método do gradiente conjugado. O algoritmo é desenvolvido baseado nos seguintes fatos:

1. Os vetores residuais são ortogonais: $r_k^T r_j = 0,\ k \neq j$;
2. Os vetores direção são A-conjugados: $p_k^T A p_j = 0,\ k \neq j$.

- **Determinar α_k.**

Usando $r_k = b - Ax_k$ e $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ da versão preliminar do GC, a atualização do resíduo pode ser dada por

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= b - Ax_{k+1} \\ &= b - A(x_k + \alpha_k p_k) \\ &= (b - Ax_k) - \alpha_k A p_k \\ &= r_k - \alpha_k A p_k. \end{aligned} \tag{B.22}$$

Pela propriedade dos residuais ortogonais tem-se $r_k^T r_{k+1} = 0$. Definindo r_{k+1} como em (B.22), obtem-se

$$\begin{aligned} r_k^T r_{k+1} &= 0 \Rightarrow \\ r_k^T (r_k - \alpha_k A p_k) &= 0 \Rightarrow \\ r_k^T r_k - \alpha_k r_k^T A p_k &= 0 \Rightarrow \alpha_k = \tfrac{r_k^T r_k}{r_k^T A p_k}, \end{aligned} \tag{B.23}$$

e, usando (B.20), segue que

$$\begin{aligned} r_k^T A p_k &= (p_k - \beta_k p_{k-1})^T A p_k \\ &= p_k^T A p_k - \beta_k p_{k-1}^T A p_k \\ &= p_k^T A p_k \qquad\qquad \text{(visto que } p_{k-1}^T A p_k = 0). \end{aligned} \tag{B.24}$$

Portanto,

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}. \tag{B.25}$$

- **Determinar β_k.**

De (B.22), tem-se $-\alpha_k A p_k = r_{k+1} - r_k$ e, usando (B.20), e a propriedade que p_{k+1} é ortogonal a $A p_k$ e $r_k^T r_{k+1} = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= r_{k+1} + \beta_{k+1} p_k \Rightarrow \\ \tfrac{(Ap_k)^T (p_{k+1} - r_{k+1})}{(Ap_k)^T p_k} &= \beta_{k+1} \Rightarrow \\ \beta_{k+1} &= \frac{\overbrace{p_k^T A p_{k+1}}^{=0} - p_k A^T r_{k+1}}{p_k^T A p_k} \Rightarrow \\ &= \left[\tfrac{1}{\alpha_k}(r_{k+1} - r_k)\right]^T r_{k+1} / (Ap_k)^T p_k \Rightarrow \\ &= \tfrac{1}{\alpha_k} r_{k+1}^T r_{k+1} - \tfrac{1}{\alpha_k} \overbrace{r_k^T r_{k+1}}^{=0} / (Ap_k)^T p_k \Rightarrow \\ &= \tfrac{p_k^T A p_k}{r_k^T r_k} r_{k+1}^T r_{k+1} / p_k^T A p_k \Rightarrow \\ &= \tfrac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}. \end{aligned} \tag{B.26}$$

Ou seja,

$$\beta_{k+1} = \frac{\|r_{k+1}\|^2}{\|r_k\|^2}. \tag{B.27}$$

A seguir, é apresentado o algoritmo para o método do gradiente conjugado.

Algoritmo 5: Gradiente Conjugado

1 Dado as entradas A, b e o valor inicial x_0;
2 Faça $r_0 = b - Ax_0$, $p_0 = r_0$, $k = 0$
3 **enquanto** $\|r_k\| > \epsilon$ **faça**
4 $\quad \alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}$
5 $\quad x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$
6 $\quad r_{k+1} = r_k + \alpha_k A p_k$
7 $\quad \beta_{k+1} = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$
8 $\quad p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_{k+1} p_k$
9 $\quad k = k + 1$
10 **fim enqto**

O algoritmo 5 consiste em gerar uma sequência de soluções, os residuais relacionados com as mesmas e as direções de busca usadas para atualizar a solução e o residual. Em cada iteração são realizados dois produtos internos a fim de calcular os escalares, os quais são definidos de maneira a fornecer soluções que satisfaçam determinadas condições de A-ortogonalidade.

A escolha particular das direções em (B.11) tem algumas vantagens no uso do método do gradiente conjugado:

- Fórmulas simples para determinar um novo vetor direção;
- Um número pequeno de vetores precisam ser guardados na memória;
- Bom progresso em direção à solução, pois as direções são baseadas em gradientes;
- Não requer explicitamente as segundas derivadas;

Apêndice C

Dados dos Sistemas e Diagramas Unifilares

Os dados dos sistemas teste IEEE de 14, 30, 57, 118 e 300 barras estão disponíveis no site www.ee.washington.edu/research/pstca.

A Tabela (C.1) apresenta os dados de barras do sistema Cesp de 53 barras. Os tipos de barras são definidos como 3 (barra *slack*), 2 (barra de geração) e 1 (barra de carga). As colunas Pc e Pg (MW) indicam as cargas de potência ativa e reativa respectivamente, as colunas Qc e Qg (MVAR) indicam as gerações de potência de ativa e reativa respectivamente, e as colunas Qg^{min} e Qg^{max} indicam respectivamente os limites mínimo e máximo para geração de potência reativa.

Tabela C.1 – Dados de Barras - Cesp 53 Barras

Barra	Tipo	Nome da Barra	Tensão	Ângulo	Pg	Qg	Qg^{min}	Qg^{max}	Pc	Qc	Shunt
502	2	JUPIA—11GR	1,000	-2,3	770,0	-218,0	-528,0	528,0			
536	1	AVERMELHA440	1,013	-14,0							
535	1	AVERMELHA500	1,079	-16,0					433,3	-176,0	
537	1	AVERMELHA138	1,050	-18,0					153,4	28,8	
500	2	A.VERMEL-6GR	0,995	-11,0	900,0	-237,0	-540,0	540,0			
538	1	ISOLTEIRA440	1,013	-5,6							
501	3	I.SOLTE-19GR	0,995	0			-950,0	950,0			
520	2	T.IRMAOS-4GR	1,000	-0,27	520,0	-67,4	-200,0	200,0			
541	1	JUPIA—-138	1,045	-9,2					67,7	-7,8	
542	1	3IRMAOS–440	1,015	-5,1							
543	1	3IRMAOS–138	1,048	-9,2					165,3	30,6	
539	1	JUPIA—-440	1,021	-6,1							
547	1	TAQUARUCU440	1,033	-1,9							
510	2	P.PRIMA-12GR	1,010	8,55	1.000	-129,0	-540,0	540,0			
513	2	TAQUARUC-4GR	1,030	2,8	310,0	1.596	-192,0	192,0			
544	1	PPRIMAV–440	1,026	3,44							
548	1	TAQUARUCU138	1,010	-4,5					106,4	-4,0	
507	2	CAPIVARA-4GR	1,030	2,62	575,0	51,11	-308,0	308,0			
549	1	CAPIVARA-440	1,026	-4,1							
550	1	CAPIVARA-138	1,040	-9,5					88,8	34,3	
552	1	ASSIS—-440	1,015	-13,0							-90,0
553	1	ASSIS–A-230	1,041	-15,0					59,0	30,5	
561	1	BAURU—-440	1,017	-22,0							
577	1	TOESTE-1Y440	1,001	-34,0					625,2	90,6	
562	1	BAURU—-138	1,035	-28,0					241,8	100,7	
559	1	ARARAQUA-440	1,014	-26,0							
560	1	ARARAQUA-138	1,030	-31,0					403,0	90,2	
563	1	RIBPRETO-440	0,966	-31,0							

564	1	RIBPRETO-138	1,030	-36,0				340,7	214,7	
568	1	SBARBARA-138	1,013	-42,0				504,5	237,9	
567	1	SBARBARA-440	0,972	-34,0						
576	1	B.JARDIM-088	0,999	-42,0				419,4	110,0	
574	1	BOMJARDIM440	0,987	-36,0						
570	1	SUMARE—440	0,976	-35,0						
575	1	BOMJARDIM138	1,035	-42,0				94,2	62,0	
571	1	SUMARE—138	1,013	-41,0				413,0	115,4	
598	1	TAUBATE–500	1,056	-39,0				138,4	-223,0	
599	1	TAUBATE–440	1,013	-40,0						
600	1	TAUBATE–230	1,030	-45,0				167,0	144,3	
601	1	TAUBATE–138	1,020	-43,0				243,0	13,7	
593	1	STOANGELO440	1,008	-34,0						
594	1	STOANGELO345	1,016	-33,0				-231,0	215,9	
533	2	S.ANGELO-1CS	1,050	-34,0		-175,0	250,0			
595	1	STOANGELO138	1,049	-38,0				214,8	61,3	
565	1	MMIRIM-3-440	1,014	-33,0						
566	1	MMIRIM-3-138	1,019	-39,0				443,4	99,7	
584	1	CABREUVA-440	0,986	-35,0						-90,0
590	1	CABREUVA-230	1,008	-38,0				1.035	212,9	
591	1	CABREUVA-138	1,029	-41,0				117,9	35,9	
581	1	EMBUGUACU440	1,002	-34,0						
582	1	EMBUGUACU345	1,023	-34,0				-28,3	234,7	
583	1	EMBUGUACU138	1,029	-38,0				305,7	50,6	
532	2	EMBU-GUA-1CS	1,050	-34,0		-175,0	250,0			

A tabela (C.2) apresenta os dados de linhas do sistema Cesp de 53 barras. A coluna tipo indica a linha de transmissão onde o *tap* de transformador é fixo (tipo 0) e variável (tipo 1). As colunas r, x e b^{sh} indicam respectivamente os valores da resistência série, reatância série e susceptância *shunt* de equipamentos.

Tabela C.2 – Dados de Linhas - Cesp 53 Barras

Da Barra	Para Barra	Tipo	r	x	b^{sh}	tap
536	500	0		0,6833		1,000
536	535	0		1,533		0,9504
536	535	0		1,42		0,95
536	538		0,19	2,52	136,89	
536	559		0,40	5,36	290,92	
536	563		0,41	5,64	304,12	
537	536	1		4,7		1,048
538	501	0		0,3463		1,000
538	542		0,06	0,81	48,63	
559	538		0,48	5,97	384,96	
559	538		0,48	5,97	384,96	
561	538		0,41	5,09	327,9	
561	538		0,41	5,09	327,9	
542	520			1,645		1,000
543	542	1		4,45		1,044
539	542		0,06	0,73	43,83	
539	502	0		0,8754		1,000
541	539	1		8,33		1,015
547	539		0,27	3,6	197,09	
561	539		0,39	4,96	319,72	
561	539		0,39	4,96	319,72	
544	510	0		0,9225		1,000
544	547		0,15	1,94	108,73	
544	547		0,15	1,94	108,73	
547	513	0		2,7875		1,000
547	549		0,09	1,2	66,94	
547	552		0,24	3,14	175,77	
548	547	1		4,66		0,975
549	552		0,14	1,82	102,2	
550	549	1		10,78		1,046
549	507	0		2,1625		1,000
552	561		0,18	2,37	132,67	
552	570		0,43	5,69	318,89	
553	552	1	0,07	7,237		1,048
559	561		0,13	1,71	102,88	
561	577		0,28	3,54	228,28	
561	581		0,39	4,86	313,39	

561	584		0,30	3,76	242,06	
561	584		0,30	3,76	242,06	
562	561	1		8,27		1,057
562	561	1		9,19		1,057
559	565		0,21	2,65	170,71	
559	567		0,18	2,38	134,8	
559	593		0,38	4,7	303,36	
560	559	1		4,82		1,033
560	559	1		4,65		1,033
560	559	1		4,82		1,033
563	567		0,22	3,03	163,37	
564	563	1		4,71		1,123
564	563	1		4,63		1,123
568	567	1		4,65		1,096
568	567	1		4,43		1,096
567	570		0,03	0,34	19,21	
576	574	1		4,666		1,034
576	574	1		4,53		1,034
574	599		0,20	2,56	151,95	
575	574	1		9,66		1,112
574	570		0,06	0,8	45,81	
574	584		0,03	0,38	23,71	
574	593		0,15	1,98	118,81	
571	570	1		4,78		1,063
571	570	1		4,78		1,063
599	598	0		1,03		0,98
600	599	1		4,77		1,086
601	599	1		4,646		1,008
601	599	1		4,616		1,008
565	593		0,23	2,88	185,57	
581	593		0,09	1,22	73,61	
593	533	0		3,76		1,000
594	593	0		,716		1,015
594	593	0		,714		1,015
595	593	1		4,69		1,058
595	593	1		9,19		1,058
566	565	1		4,63		1,023
566	565	1		4,45		1,023
584	581		0,09	1,22	73,5	
590	584	0		0,746		1,03
590	584	0		0,74		1,03
591	584	1		8,27		1,07
577	581		0,11	1,32	85,11	
581	532	0		3,76		1,000
582	581	0		0,71		1,03
582	581	0		0,717		1,03
583	581	1		4,666		1,037
583	581	1		4,603		1,037

As figuras (C.1), (C.2), (C.3), (C.4), (C.5) e (C.6) mostram respectivamente os diagramas unifilares dos sistemas IEEE de 14, 30, 57, 118 e 300 barras, e do Cesp de 53 barras.

- Sistema IEEE 14 Barras

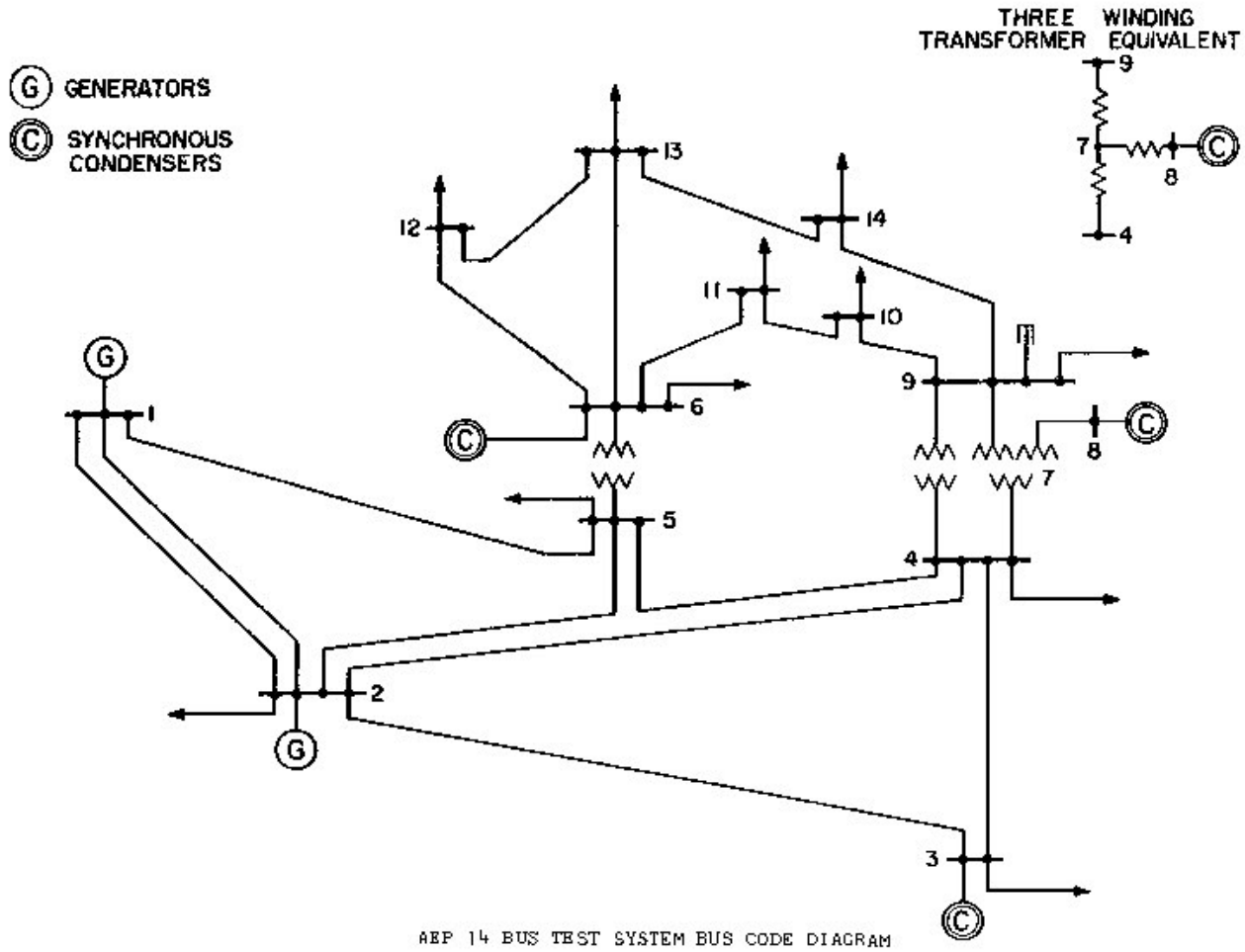

Figura C.1 – Diagrama Unifilar: 14 barras

- Sistema IEEE 30 Barras

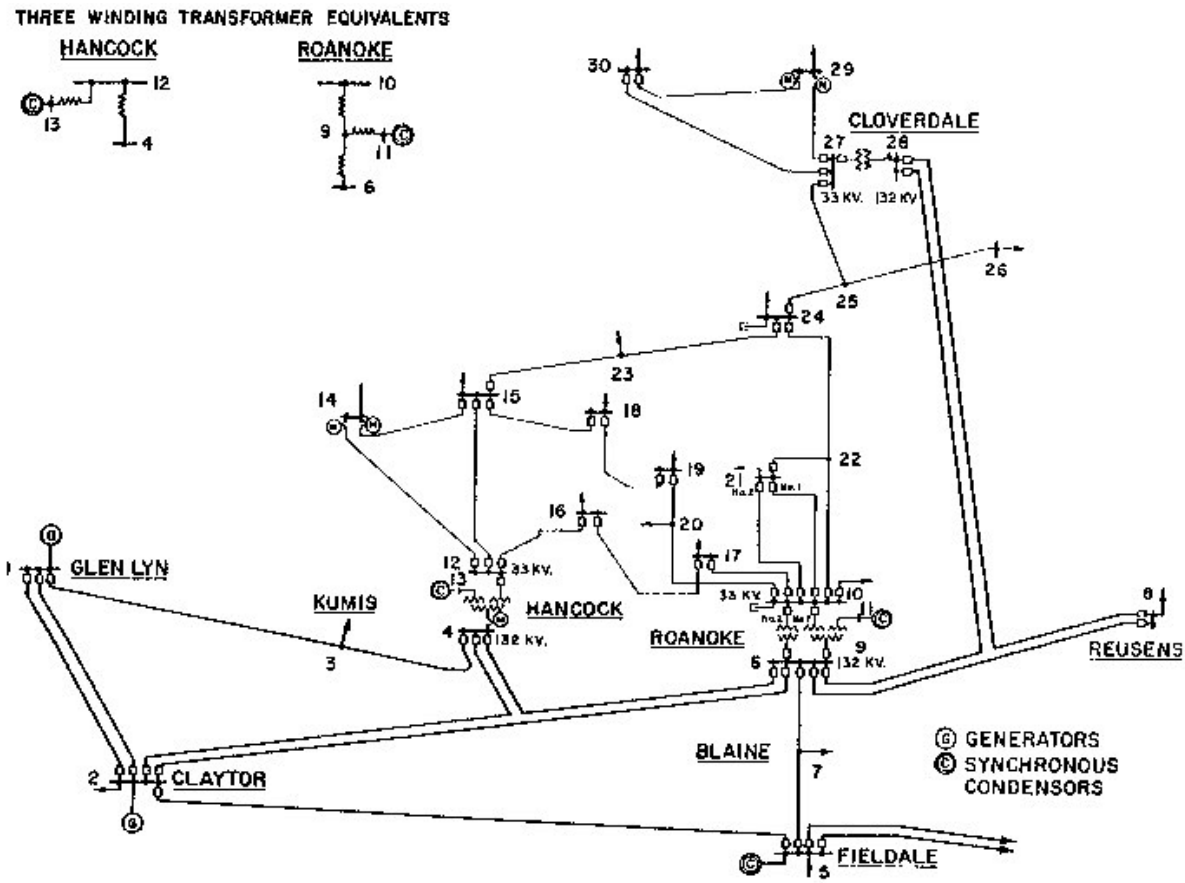

Figura C.2 – Diagrama Unifilar: 30 barras

- Sistema IEEE 57 Barras

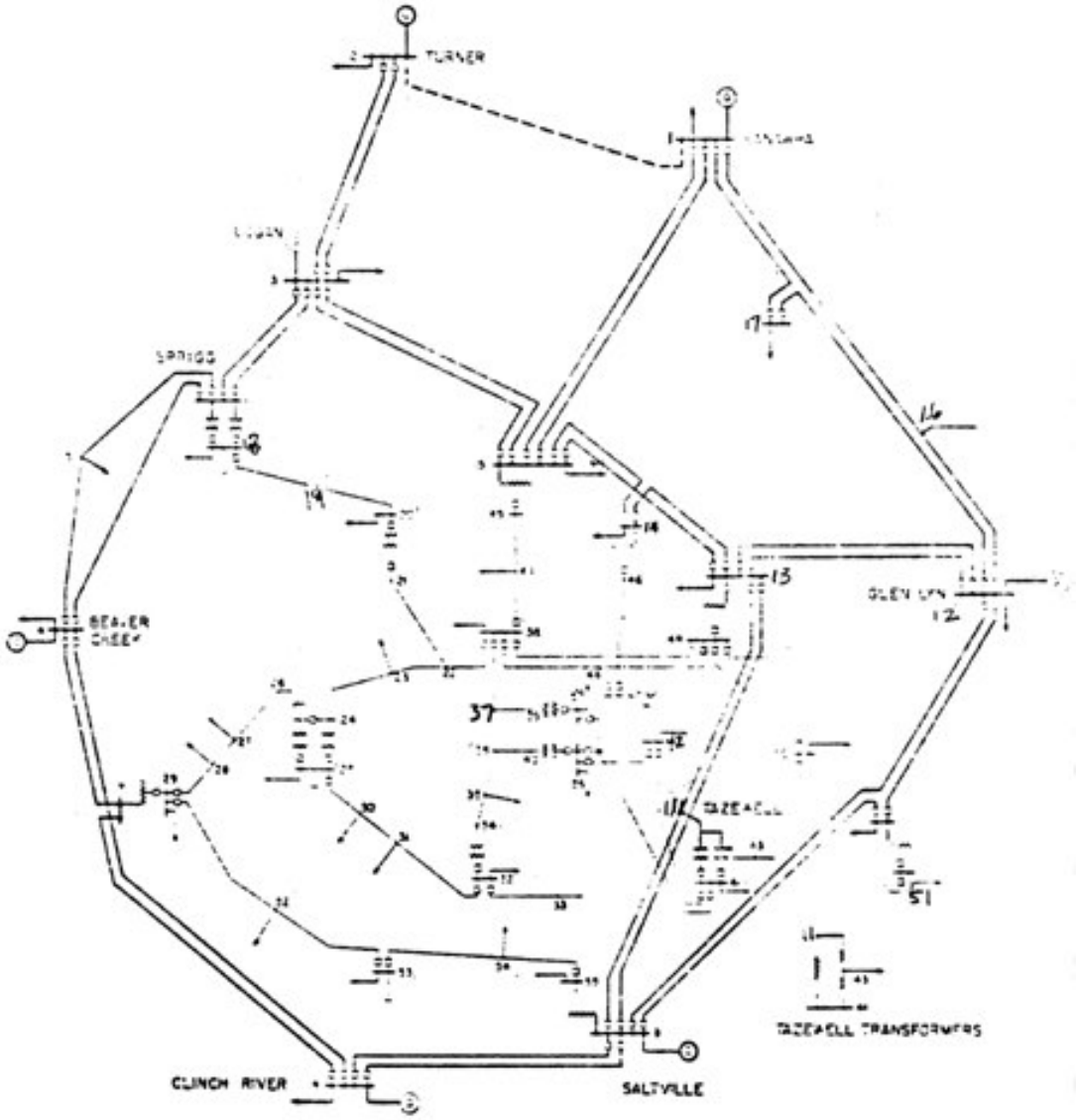

Figura C.3 – Diagrama Unifilar: 57 barras

- Sistema IEEE 118 Barras

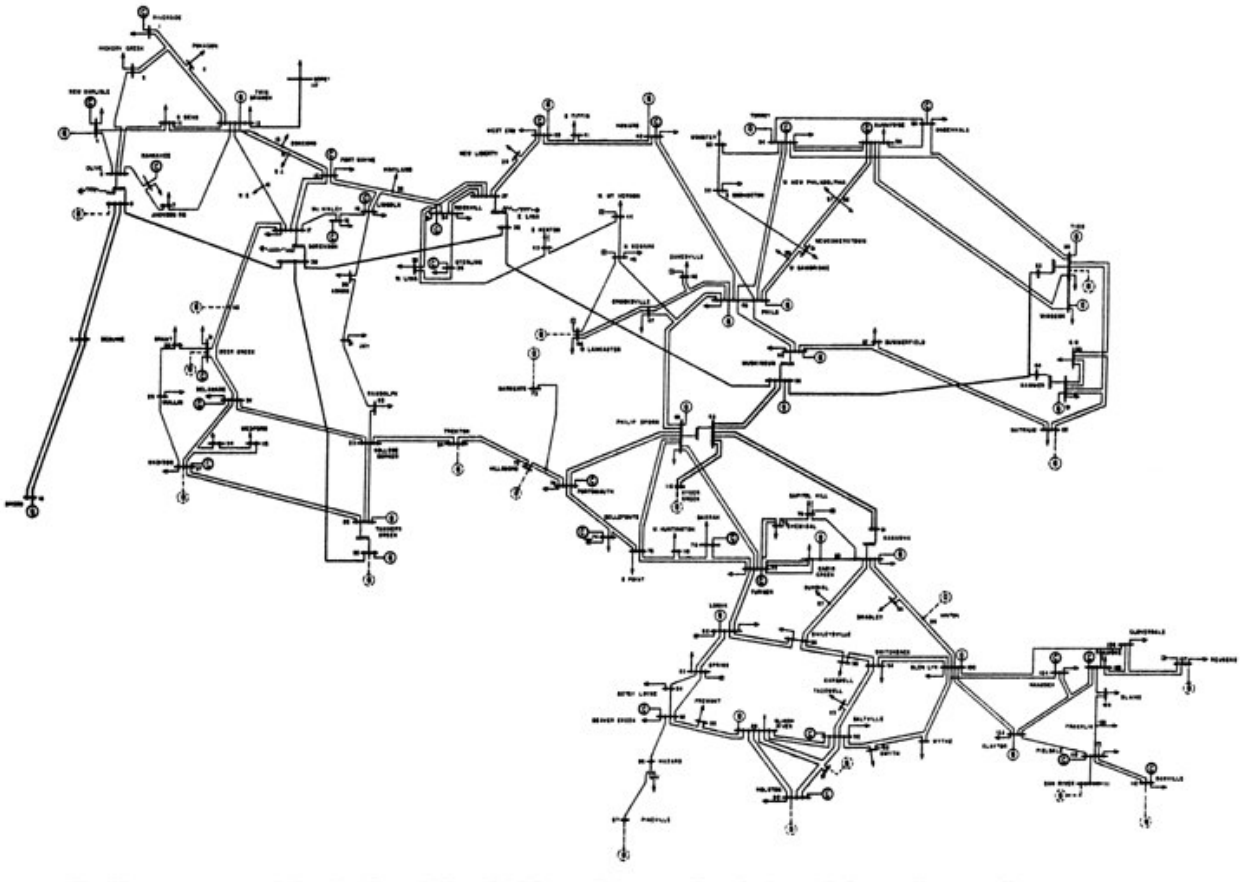

Figura C.4 – Diagrama Unifilar: 118 barras

- Sistema IEEE 300 Barras

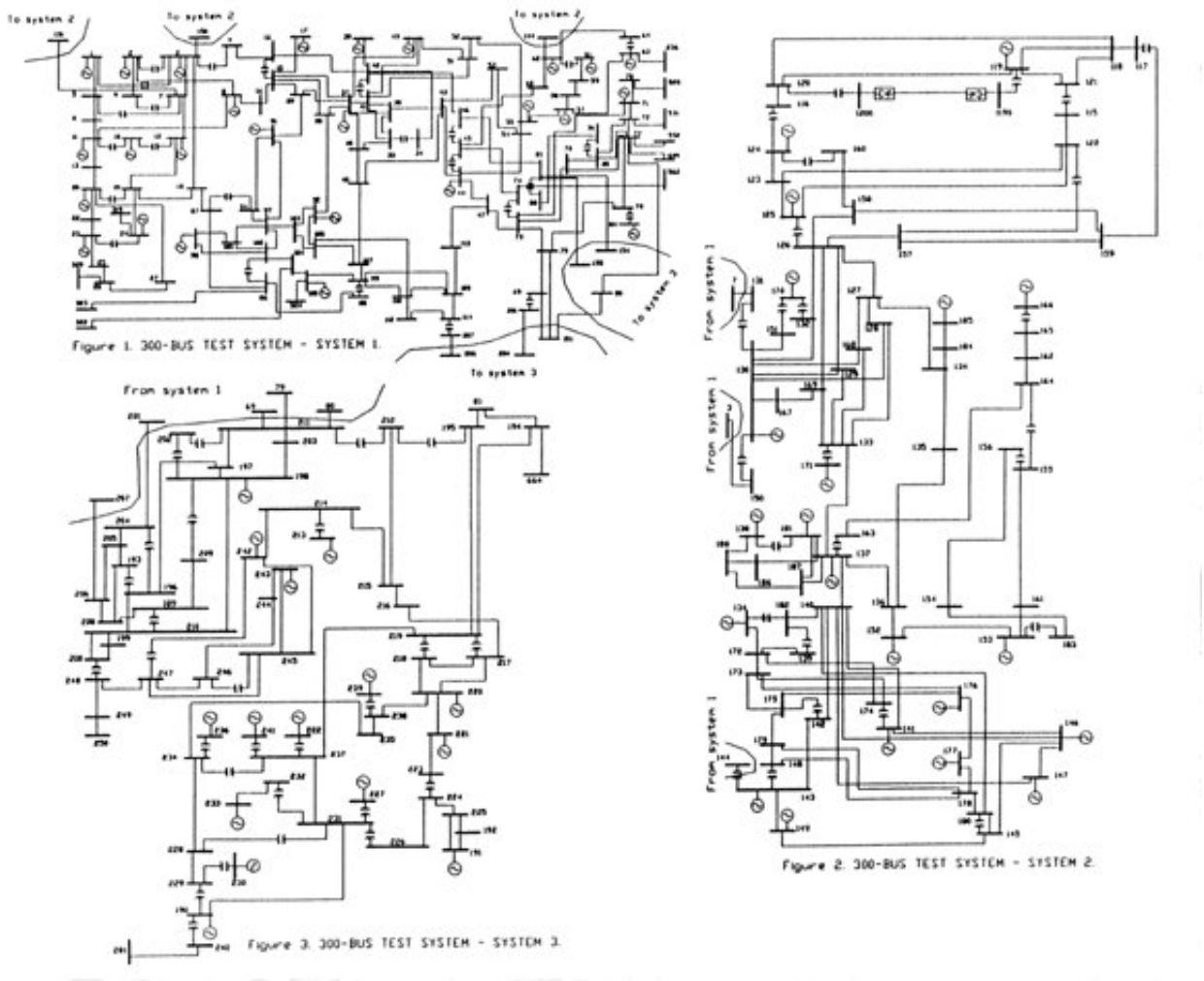

Figura C.5 – Diagrama Unifilar: 300 barras

- Sistema Cesp 53 Barras

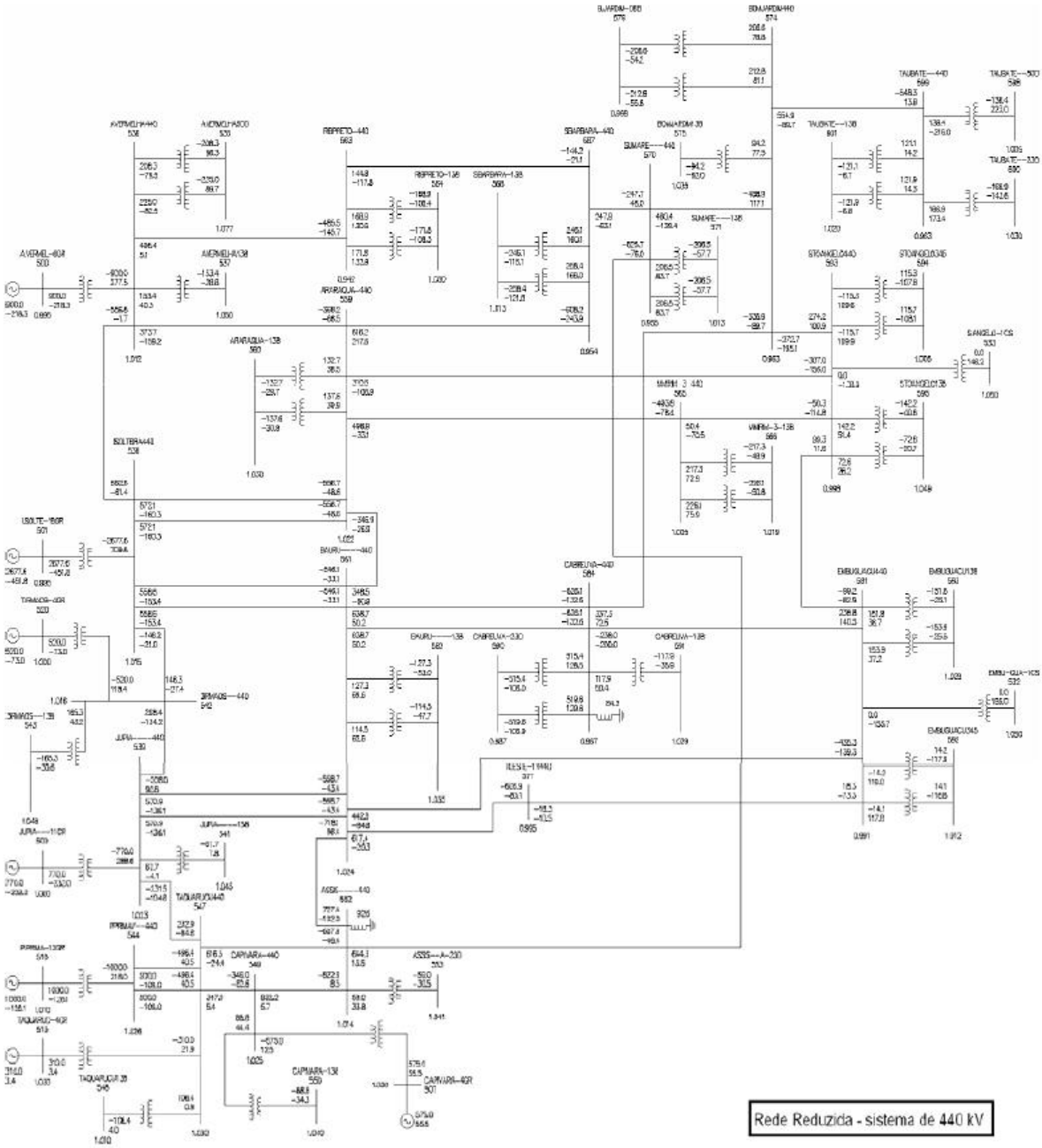

Figura C.6 – Diagrama Unifilar: 53 barras