EDSON APARECIDO ROZAS THEODORO

**Contribuição à Análise de Estabilidade Transitória,
em Duas Escalas de Tempo, de Sistemas Elétricos de
Potência via Métodos Diretos**

Tese apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos, da Universidade de São
Paulo, como parte dos requisitos para a
obtenção do título de Doutor em Ciências
- Programa de Pós-Graduação em Engen-
haria Elétrica.

Área de Concentração: Sistemas Elé-
tricos de Potência.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Luís Fernando Costa Alberto

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Rodrigo Andrade Ramos

São Carlos
2013

Trata-se da versão corrigida da tese. A versão original se encontra disponível na EESC/USP que aloja o Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica.

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

T388c Theodoro, Edson Aparecido Rozas
Contribuição à Análise de Estabilidade Transitória,
em Duas Escalas de Tempo, de Sistemas Elétricos de
Potência via Métodos Diretos / Edson Aparecido Rozas
Theodoro; orientador Luís Fernando Costa Alberto;
coorientador Rodrigo Andrade Ramos. São Carlos, 2013.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas
Elétricos de Potência -- Escola de Engenharia de São
Carlos da Universidade de São Paulo, 2013.

1. Sistemas elétricos de potência. 2. Estabilidade
transitória. 3. Métodos diretos. 4. Sistemas com duas
escalas de tempo. 5. Sistemas singularmente
perturbados. 6. BCU. 7. CUEP. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **EDSON APARECIDO ROZAS THEODORO**.

Título da tese: "Contribuição à análise de estabilidade transitória, em duas escalas de tempo, de sistemas elétricos de potência via métodos diretos".

Data da defesa: 25/03/2013

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Titular **Newton Geraldo Bretas**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Aguinaldo Silveira e Silva**
(Universidade Federal de Santa Catarina/UFSC)

APROVADO

Prof. Dr. **André Christóvão Pio Martins**
(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/UNESP-campus Bauru)

APROVADO

Prof. Dr. **Luis Carlos Pereira da Silva**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Presidente da
Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

Protocolado em _____
Serviço de Pós-Graduação
15/04/2013

Com muito amor dedico este trabalho
aos meus familiares e a todas as pessoas
mais que especiais em minha vida
por seu amor, carinho e paciência
durante todos estes anos de pós-graduação.

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus por me dar seu amor incondicional, por me ensinar em sua paciência, por me guiar em sua fé e por me dar a alegria de partilhar dos seus frutos.

- Ao Professor Luís Fernando Costa Alberto por sua orientação paciente, por sua confiança em meu empenho e pela sua amizade durante o desenvolvimento deste trabalho o meu muito obrigado.

- Ao Professor Rodrigo Andrade Ramos por sua co-orientação neste trabalho, por sua sinceridade e por suas lições que me guiaram em momentos importantes o meu sincero obrigado.

Ao Professor André Cristóvão Pío Martins por sua disponibilidade para participar de minha banca de defesa e por suas críticas justas que me fizeram pensar e aprender.

- Ao Professor João Bosco Augusto London Júnior pelos ensinamentos que em muito me fizeram crescer e pela amizade compartilhada durante todos estes anos.

- A todos os colegas do Laboratório de Análise Computacional de Sistemas Elétricos de Potência (LACOSEP), em especial à Raphael Augusto de Souza Benedito, Moussa Reda Mansour, Edwin Choque Pillco, Guilherme Pereira Borges, Danilo Sipoli Sanches, Paulo Victor Lameira de Souza, Taylon Gomes Landgraf e Alexandre Prodóssimo Sohn por seus ensinamentos, pela amizade compartilhada e pelos momentos vividos.

- A todos os meus Professores cujos ensinamentos me permitiram realizar muitos dos meus sonhos o meu muito obrigado.

- À Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo pela oportunidade de realizar o curso de doutorado.

- À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pela bolsa de estudo de doutorado concedida e pelo apoio financeiro para a realização desta pesquisa.

*“Blessed is he who has learned
to admire but not envy,
to follow but not imitate,
to praise but not flatter,
and to lead but not manipulate.”*

“Abençoado é aquele que aprendeu
a admirar mas não invejar,
a seguir mas não imitar,
a elogiar mas não bajular,
e a liderar mas não manipular.”

William Arthur Ward (✠1921-1994‡)

Resumo

Theodoro, Edson Aparecido Rozas (2013). *Contribuição à Análise de Estabilidade Transitória, em Duas Escalas de Tempo, de Sistemas Elétricos de Potência via Métodos Diretos*. Tese de Doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

O presente trabalho tem como objetivo investigar a presença de diferentes escalas de tempo nos modelos matemáticos que descrevem a dinâmica dos sistemas elétricos de potência (SEPs), em particular a existência de duas escalas de tempo distintas: lenta e rápida, e explorá-las no estudo de estabilidade transitória destes sistemas através da utilização de métodos diretos (funções energia). Em particular, o método do Ponto de Equilíbrio Instável de Controle (CUEP) para modelos com duas escalas de tempo será estudado e aplicado na análise de estabilidade transitória de SEPs. As bases teóricas para a análise de estabilidade transitória, de sistemas com duas escalas de tempo, serão apresentadas, assim como funções energia e novos algoritmos numéricos para o cálculo do CUEP nestes sistemas, a fim de evidenciar as melhorias e possíveis limitações deste novo método CUEP em duas escalas de tempo quando comparado ao método CUEP tradicional. Explorando as escalas de tempo lenta e rápida na análise de estabilidade transitória, espera-se que novos algoritmos numéricos mais robustos para o cálculo do CUEP sejam obtidos, assim como a diminuição do conservadorismo dos resultados.

Palavras-Chave: sistemas elétricos de potência, estabilidade transitória, métodos diretos, sistemas com duas escalas de tempo, sistemas singularmente perturbados, método BCU, método CUEP.

Abstract

Theodoro, Edson Aparecido Rozas (2013). *Contribution to Two-Time Scale Transient Stability Assessment of Power Systems by Direct Methods*. Thesis (PhD. Thesis) - School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2013.

The main objective of this work is to investigate the existence of several time-scales in the mathematical models of electric power systems, in particular the existence of two-time scales: slow and fast, and exploit these features in the direct transient stability assessment. In particular, the Controlling Unstable Equilibrium Point (CUEP) method is studied for two-time scale models of power systems and applied to transient stability analysis. In order to accomplish this aim, a sound theoretical basis for two-time scale transient stability analysis of electric power system models will be provided, as well as energy functions and new numerical algorithms for proper two-time scale CUEP calculations, with the purpose of investigating improvements and possible limitations of this method when compared with the traditional CUEP method. Exploiting the two-time scale features of power system models, it is intended to obtain new robust numerical algorithms for transient stability analysis, as well as to diminish the conservativeness of the results.

Key-Words: electric power systems, transient stability, direct methods, two-time scale systems, singular perturbed systems, BCU method, CUEP method.

Lista de Figuras

1.1	Classificação do problema de estabilidade em SEPs [1].	4
2.1	Teorema de Estabilidade de Lyapunov.	24
2.2	Princípio da Invariância de LaSalle.	25
2.3	Extensão do Princípio da Invariância de LaSalle.	26
2.4	Comparação entre as fronteiras da região de estabilidade e quase-estabilidade.	29
2.5	ilustração da relação entre os pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade dos sistemas Σ_0 (a) e Σ_ε (b) sobre uma componente conexa Γ_s [2].	38
2.6	(a) ilustração das hipóteses sobre os pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade de Σ_ε , Σ_0 e $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}^*)$ em uma componente conexa Γ_u (b) ilustração da relação entre os pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade de Σ_ε , Σ_0 e $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}^*)$ em uma componente conexa Γ_u [2].	39
3.1	Comparação entre as estimativas fornecidas pelos métodos CUEP e <i>Closest Unstable Equilibrium Point</i>	44
3.2	Etapas para a demonstração do método (algoritmo numérico) BCU para o cálculo do CUEP.	48
3.3	O algoritmo numérico BCU para o cálculo do CUEP.	49
3.4	O algoritmo auxiliar <i>Shadowing Method</i> para a aproximação do CUEP.	52
4.1	Ilustração da relação entre o CUEP do subsistema rápido $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}_0)$ e do CUEP univalente do sistema singularmente perturbado Σ_ε em uma componente conexa instável Γ_u [3].	55
4.2	Ilustração da pseudo-trajetória em falta do subsistema lento Σ_0 utilizada na detecção do <i>exit point</i> e do CUEP [3].	57
4.3	Diagrama unifilar de um SEP composto por uma máquina síncrona conectada a um barramento infinito.	62
4.4	Diagrama unifilar do SEP composto por uma máquina síncrona conectada a um barramento infinito incluindo o modelo do gerador, sendo $X_{linha(eq)}$ a reatância indutiva equivalente das linhas de transmissão que conectam o gerador ao barramento infinito.	64
4.5	Ilustração do referencial d-q síncrono (∞), fixo ao barramento infinito, e do referencial d-q do gerador, fixo ao rotor da máquina.	65

4.6	Simulação da resposta dinâmica do sistema máquina - barramento infinito no cenário 1.	67
4.7	Resposta dinâmica do SEP do cenário 1 no espaço de estado. Os pontos ($\square$) e ($\circ$) indicam o instante de eliminação da falta e o asep do sistema, respectivamente.	67
4.8	Decomposição da dinâmica do sistema original nas dinâmicas lenta e rápida associadas, durante à aplicação do método TTS-CUEP no sistema máquina - barramento infinito (cenário 1). Os pontos ($\triangle$) e ($*$) representam respectivamente o <i>exit point</i> da trajetória em falta do sistema rápido e o ponto onde a soma da norma das derivadas do sistema rápido pós-falta atinge seu primeiro mínimo.	69
4.9	Visualização tridimensional (no espaço de estados) da aplicação dos passos do método TTS-CUEP no sistema máquina - barramento infinito (cenário 1). Os pontos ($\triangle$) e ($*$) representam respectivamente o <i>exit point</i> da trajetória em falta do sistema rápido e o ponto onde a soma da norma das derivadas do sistema rápido pós-falta atinge seu primeiro mínimo.	70
4.10	Variação da energia total do sistema Π_ε e estimativa do tempo crítico de abertura para o sistema máquina - barramento infinito (cenário 1).	71
4.11	Simulação da resposta dinâmica do sistema máquina - barramento infinito no cenário 2.	73
4.12	Resposta dinâmica do SEP do cenário 2 no espaço de estado. Os pontos ($\square$), ($\circ$) e ($\diamond$) indicam o instante de reconexão da linha de transmissão o asep do sistema pré-falta, e o asep do sistema pós-falta, respectivamente.	73
4.13	Decomposição da dinâmica do sistema original nas dinâmicas lenta e rápida associadas, durante à aplicação do método TTS-CUEP no sistema máquina - barramento infinito (cenário 2). Os pontos ($\triangle$) e ($*$) representam respectivamente o <i>exit point</i> da trajetória (ou pseudo-trajetória) em falta do sistema rápido (ou lento) e o ponto onde a soma da norma das derivadas do sistema rápido (ou lento) pós-falta atinge seu primeiro mínimo.	74
4.14	Visualização tridimensional (no espaço de estados) da aplicação dos passos do método TTS-CUEP no sistema máquina - barramento infinito (cenário 2). Os pontos ($\triangle$) e ($*$) representam respectivamente o <i>exit point</i> da trajetória (ou pseudo-trajetória) em falta do sistema rápido (ou lento) e o ponto onde a soma da norma das derivadas do sistema rápido (ou lento) pós-falta atinge seu primeiro mínimo.	75
4.15	Simulação do sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$	76
4.16	Variação da energia total do sistema Π_ε e estimativa do tempo crítico de abertura para o sistema máquina - barramento infinito (cenário 2).	76
4.17	Simulação da resposta dinâmica do sistema máquina - barramento infinito.	78
4.18	Resposta dinâmica do SEP do cenário 3 no espaço de estado. Os pontos ($\square$), ($\circ$) e ($\diamond$) indicam o instante de reconexão da linha de transmissão, o asep do sistema pré-falta, e o asep do sistema pós-falta, respectivamente.	78

4.19	Decomposição da dinâmica do sistema original nas dinâmicas lenta e rápida associadas, durante à aplicação do método TTS-CUEP no sistema máquina - barramento infinito (cenário 3). Os pontos ($\triangle$), ($*$) e ($\bigcirc$) representam respectivamente o <i>exit point</i> da trajetória (ou pseudo-trajetória) em falta do sistema rápido (ou lento), o ponto onde a soma da norma das derivadas do sistema rápido (ou lento) pós-falta atinge seu primeiro mínimo, e o asep do sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$ em falta.	79
4.20	Visualização tridimensional (no espaço de estados) da aplicação dos passos do método CUEP em duas escalas de tempo no sistema máquina - barramento infinito (cenário 3). Os pontos ($\triangle$), ($*$) e ($\bigcirc$) representam respectivamente o <i>exit point</i> da trajetória (ou pseudo-trajetória) em falta do sistema rápido (ou lento), o ponto onde a soma da norma das derivadas do sistema rápido (ou lento) pós-falta atinge seu primeiro mínimo, e o asep do sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$ em falta.	79
4.21	Simulação do sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$ em falta.	80
4.22	Detalhe da trajetória do sistema rápido em falta, sobreposta à dinâmica do sistema original Π_ϵ em falta, projetada sobre o plano $\delta \times E'_q$ (para $\omega = 0$).	80
4.23	Variação da energia total do sistema Π_ϵ e estimativa do tempo crítico de abertura para o sistema máquina - barramento infinito (cenário 3).	81
5.1	Estratégia para a demonstração do algoritmo numérico TTS-BCU para sistemas com duas escalas de tempo.	86
5.2	Etapas para a demonstração detalhada das relações estáticas e dinâmicas entre os pontos de equilíbrio dos sistemas rápidos Π_o^* (5.8) e $\Pi_{0(AR)}^*$ (5.11) [4].	90
6.1	Sistema Kundur modificado.	99
6.2	Sistema IEEE 14 barras modificado.	101

Lista de Tabelas

4.1	Condições iniciais calculadas para o instante pré-falta do sistema máquina - barramento infinito (cenário 1).	66
4.2	Condições iniciais calculadas para o instante pré-falta do sistema máquina - barramento infinito (cenário 2).	72
4.3	Condições iniciais calculadas para o instante pré-falta do sistema máquina - barramento infinito (cenário 3).	77
6.1	Resultados da aplicação do método TTS-CUEP/BCU na análise de estabilidade transitória do sistema Kundur modificado.	99
6.2	Resultados da aplicação do método TTS-CUEP/BCU na análise de estabilidade transitória do sistema IEEE 14 barras modificado.	101
B.1	Dados estáticos de barra do sistema Kundur modificado (considera-se $V_{base} = 230$ kV, $S_{base} = 100$ MVA).	127
B.2	Dados estáticos de linha do sistema Kundur modificado (considera-se $V_{base} = 230$ kV, $S_{base} = 100$ MVA).	128
B.3	Dados dinâmicos dos geradores do sistema Kundur modificado (considera-se $V_{base} = 230$ kV, $S_{base} = 100$ MVA).	128
B.4	Dados estáticos de barra do sistema IEEE 14 barras modificado (considera-se $V_{base} = 100$ kV, $S_{base} = 100$ MVA).	129
B.5	Dados estáticos de linha do sistema IEEE 14 barras modificado (considera-se $V_{base} = 100$ kV, $S_{base} = 100$ MVA).	129
B.6	Dados dinâmicos dos geradores do sistema IEEE 14 barras modificado (considera-se $V_{base} = 100$ kV, $S_{base} = 100$ MVA).	130

Lista de Abreviaturas e Siglas

$(\cdot)^f$	referência ao período em falta
$(\cdot)^{pf}$	referência ao período pós-falta
$(\cdot)^{prf}$	referência ao período pré-falta
$(\cdot)_{(\varepsilon)}$	referência ao sistema singularmente perturbado (Σ_ε ou Π_ε)
$(\cdot)_{\mathbf{AR}}$	referência ao sistema artificial reduzido utilizado pelo método BCU/TTS-BCU
$(\cdot)_{\mathbf{ab}}$	referência ao instante (ponto) de atuação do sistema de proteção associado ao elemento sob falta no SEP
$(\cdot)_e$	referência a um determinado ponto de equilíbrio
$(\cdot)_{(\mathbf{F})}$	referência ao subsistema rápido Π_ε (ou ao subsistema rápido de fronteira Π_{BLS})
$(\cdot)_{(\mathbf{P})}$	referência à pseudo-trajetória do subsistema lento Σ_0 sobre a variedade de restrição estável pós-falta Γ_s
$(\cdot)_{(\mathbf{red})}$	referência ao subsistema lento reduzido em torno da origem Σ_{red}
$(\cdot)_{(\mathbf{S})}$	referência ao subsistema lento Σ_0
$(\cdot)_s$	referência ao ponto de equilíbrio assintoticamente estável (ou a uma componente estável de Γ)
$(\cdot)_{\mathbf{sinc}}$	referência à frequência síncrona
$(\cdot)_{\mathbf{sing}}$	referência a um ponto singular na variedade de restrição estável Γ_s
$(\cdot)_u$	referência ao ponto de equilíbrio instável (ou a uma componente instável de Γ)
AGC	do inglês <i>Automatic Generation Control</i>
AVR	do inglês <i>Automatic Voltage Regulator</i>
asep	do inglês <i>asymptotic stable equilibrium point</i>
BCU	do inglês <i>Boundary Controlling Unstable Equilibrium Point</i>
COA / COI	do inglês <i>Center Of Angle / Center of Inertia</i>
CUEP	do inglês <i>Controlling Unstable Equilibrium Point</i>
EAD	sistema de Equações Algébrico-Diferenciais
EDO	sistema de Equações Diferenciais Ordinárias

EDOSP	sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Singularmente Perturbadas
MGP	do inglês <i>Minimum Gradient Point</i>
OMR	do inglês <i>One-Machine as Reference</i>
PEBS	do inglês <i>Potential Energy Boundary Surface Method</i>
p.u.	referência ao sistema de medida em Por Unidade
SEP	Sistema Elétrico de Potência
SIN	Sistema Interligado Nacional (Brasil)
TTS	do inglês <i>Two-Time Scale</i>
uep	do inglês <i>unstable equilibrium point</i>

Lista de Símbolos

Γ	variedade de restrição do sistema lento Σ_0
δ	desvio angular do rotor com relação a referência síncrona
$\delta_{i,n}$	desvio angular do rotor da máquina ‘i’ com relação ao rotor da n-ésima máquina
δ_{OMR}	vetor coluna formado pelos elementos $\delta_{i,n}$ com $i = 1, 2, \dots, n - 1$
ε	parâmetro real, positivo e pequeno do sistema dinâmico
λ	constante real igual ao valor do amortecimento uniforme das máquinas síncronas (D/M) do SEP
μ	número real positivo pequeno
Π_ε	modelo algébrico-diferencial do sistema dinâmico rápido
Π_0 / Π_{BLS}	modelo diferencial do sistema dinâmico rápido de fronteira
$\rho(\cdot)$	posto da matriz $(\cdot)$
σ	número real positivo pequeno
Σ	modelo algébrico-diferencial do sistema dinâmico original
Σ_0	modelo algébrico-diferencial do sistema dinâmico lento
Σ_ε	modelo algébrico-diferencial do sistema dinâmico com duas escalas de tempo
Σ_{red}	modelo algébrico-diferencial do sistema dinâmico lento reduzido em torno da origem
τ	variável tempo (escala de tempo rápida: $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$)
τ'_{d0}	constante de tempo de circuito aberto transitória de eixo direto do gerador
$\Phi(\mathbf{x}_0, t)$	trajetória (solução) do sistema dinâmico, iniciando em $\mathbf{x}_0$ para todo o tempo t
$\phi_\varepsilon(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0, \tau)$	trajetória (solução) do subsistema rápido Π_ε , iniciando em $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0)$ para todo o tempo t
$\phi_0(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0, \tau)$	trajetória (solução) do subsistema rápido de fronteira Π_0 (ou $\Pi_{BLS}(\mathbf{w})$), iniciando em $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0)$ para todo o tempo t
$\varphi_\varepsilon(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0, t)$	trajetória (solução) do sistema singularmente perturbado Σ_ε , iniciando em $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0)$ para todo o tempo t

$\varphi_0(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0, t)$	trajetória (solução) do subsistema lento Σ_0 , iniciando em $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0)$ para todo o tempo t
Ω	região do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$
$\Omega_{\mathcal{L}}$	subconjunto limitado (pelo valor $\mathcal{L}$) e fechado de Ω
Ω_l	subconjunto limitado (por um valor $l < \mathcal{L}$) de Ω
ω	desvio da velocidade angular com relação a frequência síncrona
$\omega_{i,n}$	desvio da velocidade angular da máquina ‘i’ com relação a velocidade angular da n-ésima máquina
$\partial\tilde{A}(x_s)$	fronteira topológica da região de quase-estabilidade $\tilde{A}(x_s)$
$\partial A(x_s)$	fronteira topológica da região de estabilidade $A(x_s)$
$\mathcal{A}$	subconjunto de $\Omega_{\mathcal{L}}$ tal que $c(\mathbf{x}) < 0$
$\tilde{A}(x_s)$	região de quase-estabilidade de x_s ($\tilde{A}(x_s) = \text{int}(\overline{A(x_s)})$)
$A(x_s)$	região de estabilidade de x_s
B	maior conjunto invariante contido em $\mathcal{E}$
B_{ij}	elemento “i-j” da matriz susceptância, referente a matriz admitância reduzida Y_{RED} , do SEP
$\mathcal{C}^1$	conjunto das funções diferenciáveis cuja primeira deriva é contínua
C_{ij}	susceptância de transferência entre as barras i e j, referente a matriz admitância reduzida Y_{RED} , multiplicada pelo módulo das tensões complexas nas respectivas barras do sistema
C_λ	componente conexa de S_λ
$c(x)$	função contínua para todo $\mathbf{x} \in \Omega$
c_i	fator de proporcionalidade da constante local ε_i em relação a constante ε global do sistema
D	matriz diagonal contendo os coeficientes de amortecimento dos geradores síncronos
D_1	subconjunto aberto do espaço $\mathbb{R}^n$ contendo a origem
D_{ij}	condutância de transferência entre as barras i e j, referente a matriz admitância reduzida Y_{RED} , multiplicada pelo módulo das tensões complexas nas respectivas barras do sistema
$D_{\mathbf{w}}$	domínio aberto convexo em $\mathbb{R}^n$
$D_{\mathbf{z}}$	domínio aberto em $\mathbb{R}^m$ contendo a origem
$\mathcal{E}$	conjunto de todos os pontos do espaço de estado nos quais a derivada da função energia (ou função de Lyapunov) se anula
$\mathcal{E}_P$	conjunto de todos os pontos do espaço de estado nos quais a derivada da função energia (ou função de Lyapunov) se torna positiva
E	conjunto dos pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico
E_i	fator da tensão elétrica complexa na barra i do sistema

E'_q	tensão elétrica sobre o eixo em quadratura (eixo q) proporcional ao fluxo magnético produzido pelo enrolamento da máquina
E_{FD}	tensão elétrica equivalente, proporcional à tensão aplicada no circuito de campo, sobre o eixo em quadratura da máquina
$\mathbf{e}_{n-1}$	vetor coluna composto por $n - 1$ elementos unitários
$f(\cdot)$	função lipschitziana contínua por partes
$f_{\mathcal{F}}(\cdot)$	equações respectivas às variáveis dinâmicas rápidas de $f(\cdot)$
$f_{\mathcal{S}}(\cdot)$	equações respectivas às variáveis dinâmicas lentas de $f(\cdot)$
f_{sinc}	frequência síncrona do SEP (no SIN do Brasil tem-se $f_{sinc} = 60$ Hz)
G_{ij}	elemento “i-j” da matriz condutância, referente a matriz admitância reduzida Y_{RED} , do SEP
$g(\cdot)$	função lipschitziana contínua por partes
$g_{G1}(\cdot)$	função dependente das condutâncias de transferência na equação da potência elétrica P_e
$g_{G2}(\cdot)$	função dependente das condutâncias de transferência na equação da corrente de eixo direto I_d
H	constante de inércia da máquina
$h(\cdot)$	função contínua e diferenciável
I_n	matriz identidade de ordem n
I_d	componente sobre o eixo direto da corrente de estator da máquina síncrona
I_q	componente sobre o eixo em quadratura da corrente de estator da máquina síncrona
$\mathcal{L}$	número real constante
$L(\cdot)$	função de Lyapunov
$\mathcal{L}_{cr}$	valor crítico da função escalar auxiliar sobre a fronteira da região de estabilidade
l	constante real menor que $\mathcal{L}$
M	matriz diagonal contendo os momentos de inércia do rotor dos geradores síncronos
M_0	variedade de dimensão n , definida como $M_0 = \{(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \mathbf{z} = h(\mathbf{w}, \mathbf{p}), \mathbf{w} \in D_1\}$
$\mathcal{N}$	número máximo de iterações (ciclos) para que o algoritmo <i>Shadowing Method</i> alcance o CUEP
n_{ger}	número de geradores síncronos conectados ao SEP
P_m	potência mecânica fornecida para a máquina
P_e	potência elétrica fornecida pelo gerador
$\mathbb{R}$	corpo formado pelo conjunto dos números reais munido das operações de adição e multiplicação usuais

$\mathbb{R}^n$	corpo formado pelo conjunto das ênuplas reais $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, munido das operações de adição e multiplicação usuais para este conjunto
S_λ	subconjunto formado pelos pontos cuja função energia é limitada superiormente por um valor real $\lambda \geq 0$
$S_{\mathbf{w}}$	subconjunto compacto de $D_{\mathbf{w}}$
$S_{\tilde{\mathbf{z}}}$	subconjunto compacto de $A_{BLS}(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{z}}_s)$ contido em $D_{\tilde{\mathbf{z}}}$
$T_x(\cdot)$	espaço tangente de $(\cdot)$ no ponto $\mathbf{x}$
t	variável tempo
t_{ab}	tempo de atuação (abertura) do sistema de proteção associado ao equipamento sob falta no SEP
t_{cr}	tempo crítico de abertura (atuação do sistema de proteção) para uma dada perturbação SEP
$\hat{t}_{cr}$	estimativa do t_{cr} para uma dada perturbação sobre o SEP
$V(\cdot)$	função energia
$\mathcal{V}_{ab}$	valor da função energia no instante de eliminação da falta
$\mathcal{V}_{cr}$	valor crítico da função energia sobre a fronteira da região de estabilidade
$V_p(\cdot)$	componente potencial da função energia $V(\cdot)$
$V_k(\cdot)$	componente cinética da função energia $V(\cdot)$
V_{ger}	tensão elétrica complexa na barra terminal do gerador
V_∞	tensão elétrica complexa no barramento infinito
$W^s(\cdot)$	variedade estável de $(\cdot)$
$W^u(\cdot)$	variedade instável de $(\cdot)$
$\mathbf{w}$	vetor de variáveis lentas do sistema dinâmico
X_{linha}	reatância indutiva da linha de transmissão
$\mathbf{x}$	vetor de variáveis dinâmicas de estado do sistema dinâmico
x'_d	a reatância transitória de eixo direto da máquina síncrona
x'_q	a reatância transitória de eixo em quadratura da máquina síncrona
x_d	a reatância síncrona de eixo direto da máquina síncrona
x_q	a reatância síncrona de eixo em quadratura da máquina síncrona
Y_{RED}	matriz admitância, reduzida aos nós internos das forças eletromotrizes dos geradores síncronos, do SEP
$\mathbf{y}$	vetor de variáveis algébricas (instantâneas) de estado do sistema dinâmico
$\mathbf{z}$	vetor de variáveis rápidas do sistema dinâmico
$\tilde{\mathbf{z}}$	vetor de variáveis rápidas do sistema dinâmico nas coordenadas: $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z} - h(\mathbf{w})$

Sumário

1	Introdução	1
1.1	O Problema de Estabilidade em SEPs	1
1.2	O Problema de Estabilidade Transitória em SEPs	5
1.2.1	A Importância da Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade: O Nascimento dos Métodos Diretos	7
1.3	Modelos de SEPs com Duas Escalas de Tempo	10
1.3.1	A Importância das Escalas de Tempo em SEPs: Uma Aplicação da Teoria de Sistemas Singularmente Perturbados	11
1.4	Objetivos deste trabalho	14
1.4.1	Objetivo Geral	14
1.4.2	Objetivos Específicos	15
1.5	Estrutura Metodológica do Trabalho	15
1.6	Organização do Trabalho	16
2	Estudos Preliminares em Sistemas Dinâmicos	17
2.1	Introdução	17
2.2	Preliminares Matemáticas	17
2.3	Métodos Diretos Aplicados à Análise de Estabilidade Transitória: Teoria e Potencialidades	20
2.3.1	A Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade para Sistemas Dinâmicos Autônomos Não Lineares	26
2.4	A Teoria de Sistemas Singularmente Perturbados: Aplicações na Análise de Estabilidade	30
2.4.1	Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade em Sistemas com Duas Escalas de Tempo	36
3	Métodos Diretos Aplicados à Análise de Estabilidade Transitória de SEPs	41
3.1	Introdução	41
3.2	O Método Direto CUEP para Análise de Estabilidade Transitória de SEPS	41

3.3	O Algoritmo Numérico BCU para o Cálculo do CUEP: Discussões Teóricas e Implementações	43
3.3.1	Implementação Prática do Algoritmo Numérico BCU	48
4	O Método TTS-CUEP para Análise de Estabilidade Transitória de Sistemas com Duas Escalas de Tempo	53
4.1	Introdução	53
4.2	O Método TTS-CUEP para Análise de Estabilidade Transitória de SEPs .	53
4.2.1	Discussão dos Cenários para o Cálculo do CUEP em Sistemas com Duas Escalas de Tempo	57
4.2.2	Implementação Prática do Método TTS-CUEP na Análise de Estabilidade Transitória de SEPs	59
4.3	Aplicação do Método TTS-CUEP em um Sistema Máquina - Barramento Infinito	62
5	Um Algoritmo TTS-BCU para o Cálculo do CUEP em Sistemas com Duas Escalas de Tempo	83
5.1	Introdução	83
5.2	Uma Proposta do Algoritmo TTS-BCU para Modelos de SEPs com Duas Escalas de Tempo	83
5.3	Discussão das Relações Estáticas e Dinâmicas na Demonstração do Algoritmo TTS-BCU	87
5.4	Aplicação do Algoritmo Numérico TTS-BCU, integrado ao Método TTS-CUEP, no Cálculo do CUEP em Sistemas com Duas Escalas de Tempo . .	92
6	Aplicações do Método TTS-BCU na Análise de Estabilidade Transitória de SEPs	95
6.1	Introdução	95
6.2	Modelagem dos SEPs Estudados para a Aplicação do Método TTS-CUEP/BCU	95
6.3	Exemplos do Método TTS-CUEP/BCU na Análise de Estabilidade Transitória de SEPs	98
6.3.1	Exemplo 1: Sistema Kundur Modificado	98
6.3.2	Exemplo 2: Sistema IEEE 14 Barras Modificado	100
7	Conclusões e Perspectivas Futuras	103
7.1	Introdução	103
7.2	Comentários e Conclusões Finais	103
7.3	Contribuições Originais deste Trabalho	104
7.4	Perspectivas Futuras	105
	Referências Bibliográficas	107

A	Análise das Funções Energia para o Sistema Máquina - Barramento	
	Infinito	117
A.1	Função Energia do Sistema Original Π_ϵ	117
A.2	Função Energia do Subsistema Rápido $\Pi_{BLS}(E'_q)$	120
A.3	Função Energia do Subsistema Lento Σ_0	123
B	Dados Estáticos e Dinâmicos dos SEPs Estudados	127
B.1	Introdução	127
B.2	Dados do Sistema Kundur Modificado	127
B.3	Dados do Sistema IEEE 14 Barras Modificado	128

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, uma introdução e a devida subdivisão e caracterização do problema de estabilidade em sistemas elétricos de potência (SEPs) são apresentadas, a importância dos métodos diretos (energéticos) no estudo de estabilidade transitória destes sistemas é caracterizada e uma breve explanação sobre a teoria de sistemas singularmente perturbados aplicada à análise de estabilidade de modelos de SEPs com duas escalas de tempo (neste trabalho explorada com o objetivo de se obter um novo algoritmo para análise de estabilidade transitória de SEPs) é apresentada de modo a tornar claro a proposta de estudo e os objetivos pretendidos neste trabalho.

1.1 O Problema de Estabilidade em SEPs

Um sistema elétrico de potência tem como objetivo fornecer (gerar, transmitir e distribuir) energia elétrica dentro de padrões pré-estabelecidos de qualidade¹ para as cargas (consumidores) conectadas ao mesmo [5], [6]. Tal sistema é composto macroscopicamente por três subsistemas: geração, transmissão e distribuição de energia elétrica.

Cada um destes subsistemas é composto por diversos tipos de equipamentos (turbogeradores, compensadores síncronos, transformadores, linhas de transmissão, relés de proteção, motores, cargas industriais e residenciais diversas, etc.) e diversos tipos de controladores (reguladores de tensão (AVRs), reguladores de velocidade, controladores de amortecimento (PSSs / FACTSs), controle automático de geração (AGC), etc.) associados aos mesmos.

A existência de diversos equipamentos e consequentemente de diferentes dinâmicas torna o estudo de estabilidade em sistemas elétricos de potência uma tarefa desafiadora, dado que tais sistemas são: (i) muito complexos (possuem dinâmicas contínuas e discretas

¹No sistema interligado nacional (SIN) do Brasil, a Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) estabelece os padrões de qualidade para o fornecimento de energia elétrica (vide Resoluções nº 24 (jan/2000 - padrões para continuidade da distribuição de energia elétrica) e nº 505 (nov/2001 - padrões para conformidade dos níveis de tensão elétrica em regime permanente)).

com diversas escalas de tempo), (ii) de grande porte (modelados por um sistema algébrico-diferencial podendo conter milhares de equações) e (iii) ricos em não linearidades (oriundas da modelagem dos componentes do sistema e das diversas iterações entre as malhas de controle e os diferentes equipamentos presentes no SEP).

Dito isto, com o objetivo de assegurar o fornecimento de energia elétrica para as cargas, muitos estudos (fluxo de potência, cálculo de curto-circuito, estabilidade, entre outros) são realizados a fim de prever e evitar possíveis falhas, ou mesmo aumentar a confiabilidade, nos sistemas de energia elétrica. Tais estudos preocupam-se de um modo geral com um conceito denominado segurança de SEPs.

É possível definir o conceito de segurança (estática e dinâmica) em SEPs, e portanto dizer que um sistema de potência é estaticamente seguro se dada a ocorrência de uma perturbação sobre este, após a mitigação do distúrbio, o sistema possui um ponto de operação factível, ou seja, em que todos os limites pré-estabelecidos de tensão elétrica, carregamento e frequência nas barras do sistema são atendidos. Porém, a mera existência de um ponto de operação factível no sistema pós-perturbação não necessariamente indica que existe amortecimento suficiente no mesmo que o conduza a tal situação de operação.

Sob tal perspectiva, é preciso que um sistema elétrico de potência seja dinamicamente seguro [7], ou seja: (i) Nenhum equipamento de transmissão permanece sobrecarregado, (ii) nenhuma barra permanece fora dos limites de tensão elétrica pré-estabelecidos para o sistema (usualmente $\pm 5\%$ do seu valor nominal) e (iii) um estado de operação normal é atingido após o desaparecimento dos transitórios eletromecânicos, ou seja, todos os limites de operação do sistema são atendidos.

Baseado na definição de segurança para sistemas de potência, uma força-tarefa conjunta IEEE/CIGRE em 2004 [1], definiu o que é estabilidade para um sistema elétrico de potência: *estabilidade de um SEP é a capacidade de um sistema de potência, para uma dada condição inicial de operação, em atingir um ponto de operação em regime permanente após ser submetido a um distúrbio físico, com a maioria de suas variáveis limitadas, de modo que praticamente todo o sistema permaneça intacto.*

O problema de estabilidade em SEPs é essencialmente um único problema, porém quase intratável devido ao grande número de variáveis a serem observadas (velocidade dos geradores, tensão elétrica nas barras² do sistema e a frequência da tensão elétrica) e a grande quantidade de problemas associados às mesmas. Seu tratamento é hoje possível apenas através da resolução numérica do sistema de equações algébrico-diferenciais que descrevem a dinâmica completa do sistema, ou seja, através da utilização de extensivas simulações por computador, o que acaba por restringir severamente o número de casos passíveis de análise, dado o tamanho e a complexidade do modelo associado ao SEP.

Tal restrição se torna ainda mais severa no que se refere ao ambiente de operação em

²Neste trabalho uma *barra* será definida como todo ponto de conexão de um equipamento ao sistema de transmissão [6].

tempo-real³, sendo hoje um dos maiores empecilhos à otimização dos sistemas de energia elétrica, uma vez que ao desconhecer as corretas margens de estabilidade dos SEPs, os engenheiros são obrigados a operar tais sistemas de modo extremamente conservador para garantir a continuidade do fornecimento de energia, diminuindo assim os possíveis ganhos financeiros advindos dos mesmos [4].

É relevante mencionar que, durante as últimas duas décadas, muitas pesquisas envolvendo a aplicação de computação paralela e distribuída para análise de segurança em tempo-real de SEPs foram desenvolvidas [9], [8], [10]. Tais pesquisas visam utilizar o atual poder de processamento, presente nos clusters de computadores localizados nos centros de operação, a fim de possibilitar um maior numero de análises dentro do menor intervalo de tempo possível.

Porém, é preciso fazer menção ao fato de que para uma análise de estabilidade (segurança dinâmica) adequada a um sistema de energia de grande porte, estima-se que são necessários analisar 100 contingências em um tempo inferior a 1 min [11],[8]. Tal requerimento é ainda um desafio para as atuais ferramentas computacionais empregadas nesta análise, haja visto que em casos onde o SEP opera com margens de estabilidade reduzidas, cada uma das aplicações envolvidas torna-se uma tarefa numericamente mais difícil, o que resulta por demandar um maior esforço computacional em sua resolução e um maior consumo de tempo [8].

Com a finalidade de possibilitar o tratamento do complexo problema de estabilidade de SEPs, os engenheiros de sistemas de potência dividem o mesmo em subproblemas menores, classificados segundo a variável de interesse, o intervalo de tempo do estudo e o tipo de perturbação a ser observada [1], como apresentado na figura 1.1.

Deste modo, o problema de estabilidade é estudado através da resolução paralela de diversos subproblemas de estabilidade de ângulo, tensão e frequência. Ao tratar os subproblemas de estabilidade separadamente, os engenheiros de potência se aproveitam das hipóteses sobre cada um destes para realizar seu estudo e definir quais ações de controle são necessárias para assegurar o fornecimento de energia elétrica pelo SEP. Tais hipóteses simplificadoras são geralmente oriundas sejam de características físicas, dinâmicas e temporais dos componentes do sistema (tais como a existência de diferentes escalas de tempo), sejam de observações empíricas da operação do sistema (tal como os diferentes intervalos de tempo para a atuação dos diferentes esquemas de controle).

A divisão do problema de estabilidade em subproblemas traz consigo as seguintes vantagens para cada subproblema: (i) resolução independente de outros subproblemas (desacoplamento), (ii) redução da complexidade do problema, (iii) simplificação na modelagem e (iv) possibilidade de tratamento teórico-matemático.

³Neste trabalho o termo *tempo-real* será utilizado para fazer menção ao intervalo de tempo necessário para que o sistema de medição, associado ao estimador de estados, informe o atual ponto de operação do SEP e uma nova análise de segurança dinâmica (estabilidade) seja possivelmente necessária (sendo esta janela de tempo variando de 2-15 minutos no sistema interligado nacional (SIN) brasileiro [8]).

Figura 1.1: Classificação do problema de estabilidade em SEPs [1].

Porém, o problema de estabilidade em sistemas de potência é um único problema, e a decomposição anterior, mesmo baseada em hipóteses plausíveis, não é perfeitamente possível, o que pode conduzir os engenheiros a resultados de estabilidade conservadores⁴ em cada subproblema, uma vez que, ao decompor o problema inicial não é possível verificar a interação entre os diversos subproblemas de um modo imediato.

Nas próximas seções deste trabalho, a teoria de sistemas singularmente perturbados será exposta como uma ferramenta para estudar o problema de estabilidade transitória em modelos de SEPs com duas escalas de tempo. Esta teoria poderá, no futuro, ser explorada para o estudo conjunto de vários subproblemas de estabilidade em sistemas de potência, uma vez que a mesma possibilita a resolução do modelo original do sistema através dos subsistemas lento e rápido associados, de modo a extrair o comportamento qualitativo do sistema original, o que não poderia ser feito anteriormente apenas dividindo o problema de estabilidade quanto à variável, o intervalo e o tipo de perturbação de interesse.

⁴Neste trabalho o termo *conservador* será utilizado para fazer referência ao fato de que, os resultados das análises de estabilidade forneceram estimativas para os limites de segurança do SEP inferiores aos seus verdadeiros valores, seja sob o aspecto de sincronismo entre os geradores ou magnitude e / ou frequência da tensão elétrica nas barras do sistema [7].

1.2 O Problema de Estabilidade Transitória em SEPs

A definição de estabilidade para um sistema de energia elétrica proposta em 2004 [1], é uma definição pragmática, ou seja, baseada em conceitos práticos para a operação do sistema, porém não corresponde univocamente a uma definição matemática, cabendo ao engenheiro definir para um determinado tipo de estudo de estabilidade (ângulo, tensão ou frequência) uma definição matemática apropriada ao problema sob análise.

Logo, o problema de estabilidade transitória, em específico, é caracterizado de um modo geral como sendo [12], [13], [14]: *A capacidade dos geradores síncronos, conectados a um SEP, manterem o sincronismo após a ocorrência e respectiva mitigação de uma grande perturbação*⁵. Seu estudo se realiza em intervalos de 3 a 5 segundos após a ocorrência do distúrbio (em estudos de estabilidade ao primeiro *swing*⁶), podendo se estender para períodos de até 20 segundos (em estudos de estabilidade *multiswing*).

Deve-se recordar que a definição matemática de estabilidade (no sentido de Lyapunov) foi concebida para um ponto de equilíbrio (ponto de operação em regime permanente) de um sistema dinâmico [15]. Dito isto, a definição de estabilidade transitória para um SEP provém do fato de que o modelo completo de um sistema de energia elétrica, considerando como referência a frequência síncrona do sistema, não possui pontos de equilíbrio [12], [16]. Porém, ao se tomar uma máquina como referência (OMR) [14], ou o centro de ângulo como referência (COA / COI) [14], o sistema de equações resultante passa, então, a apresentar soluções de equilíbrio⁷ [17], [12].

Em 1998, Alberto e Bretas [17] demonstraram teoricamente a equivalência matemática entre o estudo de sincronismo (estabilidade transitória) entre os geradores síncronos conectados a um sistema de potência e o estudo de estabilidade de um ponto de equilíbrio do modelo matemático associado, quando da modelagem do sistema tomando uma máquina como referência (OMR) ou o centro de ângulo como referência (COA), de modo a concluir sobre a persistência ou não do sincronismo entre as máquinas conectadas ao SEP através do estudo de estabilidade de um ponto de equilíbrio do seu respectivo modelo matemático.

Genericamente, o estudo de estabilidade transitória em SEPs compreende três intervalos de tempo distintos: pré-falta (intervalo antes da ocorrência do distúrbio), falta (intervalo entre a ocorrência do distúrbio e sua respectiva eliminação do sistema) e pós-falta (intervalo após a eliminação do distúrbio). Tal divisão temporal é claramente exemplificada para o estudo de uma falta (curto-circuito) no sistema de transmissão, onde o

⁵Uma grande perturbação é caracterizada como um distúrbio capaz de afastar significativamente a trajetória de um sistema dinâmico de seu ponto de equilíbrio (em regime permanente) de modo que o sistema linearizado em torno deste ponto não seja capaz de descrever a dinâmica do sistema original satisfatoriamente.

⁶Neste trabalho a palavra *swing* será utilizada para caracterizar um ciclo de aceleração / desaceleração de um gerador síncrono.

⁷Uma solução $\Phi(\mathbf{x}, t)$ é uma solução de equilíbrio de um sistema dinâmico $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$ se e somente se $f(\Phi(\mathbf{x}, t), t) = 0$ [15] (para um sistema algébrico-diferencial uma solução de equilíbrio deve satisfazer também as restrições algébricas do problema).

intervalo pré-falta é caracterizado até o instante de ocorrência da falta, o intervalo em falta é compreendido entre o instante anterior e o instante de atuação do sistema de proteção associado, sendo o intervalo pós-falta definido após a eliminação do distúrbio.

Porém é válido mencionar que a diversidade de ocorrências em um sistema de potência permite a alteração dos intervalos anteriores segundo o distúrbio sob análise, como por exemplo, no caso de uma variação abrupta de carga, o intervalo pré-falta está definido até o instante anterior à variação de carga, e o intervalo pós-falta caracterizado após tal instante, sendo intervalo em falta considerado inexistente a não ser que variação de carga seja momentânea.

O resultado dos estudos de estabilidade transitória é a determinação do máximo intervalo de tempo para a atuação do sistema de proteção associado a um determinado equipamento, tal que todos os geradores do sistema se mantenham em sincronismo (transitoriamente estáveis) no intervalo pós-falta.

Logo, das idéias anteriormente expostas neste capítulo, a análise de estabilidade transitória pode ser transcrita no estudo das trajetórias do sistema em falta, e na respectiva verificação do cruzamento da fronteira da região de estabilidade⁸ do ponto de equilíbrio assintoticamente estável⁹ (ponto de operação) de interesse do sistema pós-falta.

Deste modo, a caracterização matemática do problema de estabilidade transitória permitiu que muitas técnicas para o estudo do comportamento qualitativo de sistemas dinâmicos (com ênfase em modelos de SEPs) fossem desenvolvidas e reavaliadas. O problema de estabilidade transitória foi responsável por dar impulso ao estudo e caracterização da região de estabilidade (e respectivamente de sua fronteira) de pontos de equilíbrio em sistemas dinâmicos não lineares [18], [19], [20], [21].

Na próxima seção deste trabalho será discutida a utilização de métodos diretos (energéticos), baseados na utilização de funções de Lyapunov (funções escalares auxiliares utilizadas no estudo de estabilidade de pontos de equilíbrio [22]) e funções energia (funções escalares auxiliares utilizadas na caracterização da fronteira da região de estabilidade de pontos de equilíbrio [23]), para o estudo de soluções de equilíbrio em modelos de sistemas de potência, e sua respectiva utilização na formulação de métodos de análise de estabilidade transitória destes sistemas.

⁸A região de estabilidade (ou área de atração) de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de um sistema dinâmico não linear é definida como sendo a união de todas as condições iniciais do sistema cujas trajetórias convergem para este ponto de equilíbrio quando o tempo tende para infinito.

⁹Um ponto de equilíbrio é assintoticamente estável se: para uma dada vizinhança, arbitrariamente pequena, é possível determinar uma segunda vizinhança (geralmente menor), tal que, para toda condição inicial do sistema dinâmico dentro da segunda vizinhança a trajetória do sistema permanece contida dentro da primeira vizinhança para todo tempo futuro, e ademais a trajetória do sistema dinâmico converge para o ponto de equilíbrio quando o tempo tende para infinito.

1.2.1 A Importância da Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade: O Nascimento dos Métodos Diretos

É conhecido que, em sistemas dinâmicos não lineares, a maioria dos pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis presentes nestes sistemas não são globalmente assintoticamente estáveis, assim urge definir o que se conhece na literatura por região de estabilidade ou bacia de atração [18], [19], em torno de tais soluções de equilíbrio. Tal definição permite dividir o espaço de estados no qual as trajetórias destes sistemas estão contidas em regiões de convergência ou divergência, segundo os vários tipos de soluções de equilíbrio presentes no sistema.

Como dito anteriormente, o estudo de estabilidade transitória em SEPs pode ser traduzido matematicamente como o estudo da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, uma vez que a fronteira da região de estabilidade de um ponto de operação (solução de equilíbrio em regime permanente) determina o limiar entre a estabilidade ou instabilidade transitória de um sistema de potência para uma dada situação de operação.

Com isto em mente, as idéias de Lyapunov [22], principalmente no que se refere a utilização de funções escalares auxiliares (funções de Lyapunov) para análise de estabilidade de soluções de equilíbrio, começaram a ser revisitadas e aplicadas ao estudo e caracterização da fronteira da região de estabilidade em modelos de sistemas elétricos de potência, a fim de proporcionar métodos rápidos e eficientes para análise de estabilidade transitória em tais sistemas. No capítulo 2 deste trabalho uma revisão cuidadosa dos conceitos de funções de Lyapunov e funções energia, suas aplicações e possíveis generalizações, será apresentada ao leitor.

A partir do emprego de funções energia, a caracterização da fronteira da região de estabilidade para uma classe de sistemas dinâmicos não lineares que admite uma função energia foi concebida por Chiang, Wu e Varaiya em 1987 [23] como sendo a união das variedades estáveis¹⁰ dos pontos de equilíbrio instáveis presentes na fronteira da região de estabilidade.

É válido mencionar que outros autores também contribuíram para a caracterização da fronteira da região de estabilidade, como Tsolas, Arapostathis e Varaiya em 1985 [24], pioneiros nos esforços pela caracterização topológica da fronteira da região de estabilidade em modelos de SEPs, e Zaborszky et al., em 1988 [21], responsáveis por definir o conceito de região de quase-estabilidade para sistemas dinâmicos não lineares.

Definida a caracterização da fronteira da região de estabilidade, muitos métodos diretos (energéticos), baseados na utilização de funções de Lyapunov e funções energia, surgiram

¹⁰A variedade estável de um ponto de equilíbrio hiperbólico (analogamente à região de estabilidade) é a união de todas as condições iniciais cujas trajetórias convergem para este ponto de equilíbrio, quando o tempo tende a infinito, sendo esta definida tanto para pontos de equilíbrio estáveis como para pontos de equilíbrio instáveis.

para a análise de estabilidade transitória. Tais métodos, genericamente, se baseiam em uma “aproximação” da fronteira da região de estabilidade, na forma de um conjunto de nível da função escalar auxiliar, de modo a concluir sobre o cruzamento ou não da fronteira da região de estabilidade, como apresentado no algoritmo a seguir.

Algoritmo conceitual para avaliação de estabilidade transitória de SEPs: Métodos Diretos (Energéticos) [25]:

1. Determine um valor crítico $\mathcal{L}_{cr}$ (energia crítica) da função escalar auxiliar sobre a “fronteira da região de estabilidade”;
2. Avalie a função escalar auxiliar (energia) do sistema em falta e determine o instante t_{cr} em que a mesma alcança o valor crítico $\mathcal{L}_{cr}$;
3. Se t_{cr} é maior que o tempo necessário para a eliminação do distúrbio (falta) sobre o sistema, então o sistema é considerado transitoriamente estável, sendo instável em caso contrário.

Muitas são as formas, e consequentemente os métodos diretos, para estimar a energia crítica $\mathcal{L}_{cr}$, de modo que tanto a confiabilidade (conservadorismo) quanto a precisão dos mesmos dependem de tal estimativa. Em [26], [27] e [28] pode-se encontrar uma ampla discussão sobre os principais métodos diretos desenvolvidos para o estudo de estabilidade transitória de sistemas de energia elétrica.

É importante ressaltar, neste ponto, que o interesse pelo desenvolvimento dos métodos diretos (energéticos) foi fomentado pela busca de ferramentas que pudessem tornar a análise de segurança dinâmica (estabilidade) uma aplicação em tempo-real nos centros de operação dos SEPs [7], uma vez que a análise clássica, baseada na integração numérica do sistemas de equações que escreve o modelo completo do sistema de potência, limita o número de casos a serem analisados devido ao grande esforço computacional envolvido no processo de resolução (integração numérica) do modelo.

Outra característica importante a ser ressaltada na utilização dos métodos diretos (energéticos) reside na simplicidade da obtenção de estimativas para os limites de segurança (tal como o máximo intervalo de tempo para a eliminação do distúrbio), o que só pode ser conseguido pela análise clássica a custo da resolução numérica do modelo completo do sistema iterativamente, tornando quase impraticável¹¹ o cálculo de tais limites em um ambiente de operação em tempo-real.

Entre os primeiros métodos diretos aplicados à análise de sistemas multimáquinas está o método PEBS (do inglês *Potential Energy Boundary Surface*), proposto por Kakimoto,

¹¹Atualmente, os grandes centros de operação utilizam ferramentas para análise de segurança dinâmica baseadas na resolução numérica do modelo matemático completo do sistema, utilizando processamento paralelo e distribuído o que garante, frente a atual disponibilidade de poder computacional, desempenho suficiente para avaliar a segurança dinâmica de um grande sistema de potência frente a uma lista de contingências de dezenas de casos em alguns minutos [8], [9].

Oshawa e Hayashi em 1978 [29] e mais tarde aprimorado por Athay, Podmore e Virmani em 1979 [30]. Este método é muito rápido, pois utiliza apenas a avaliação da função energia sobre a trajetória do sistema durante a ocorrência da perturbação (falta) para determinar o cruzamento ou não da fronteira da região de estabilidade (verificando se o tempo para que a energia total armazenada no sistema se torne igual ao primeiro máximo de energia potencial, ao longo da trajetória em falta, é maior ou menor que o tempo de eliminação da falta), exigindo assim apenas a integração numérica do sistema de equações que descreve o sistema de potência durante o intervalo em falta.

Desta maneira, o método PEBS é capaz de realizar a avaliação de estabilidade transitória, de uma determinada contingência, em tempos muito inferiores aos exigidos pelo procedimento tradicional, que depende da resolução numérica do modelo pós-falta do sistema sob análise e da respectiva avaliação de sincronismo entre as máquinas síncronas conectadas ao mesmo, de forma a ser extremamente atrativo para aplicações de análise de segurança em tempo-real. Contudo o método PEBS nem sempre fornece resultados conservadores, pois a aproximação da região de estabilidade nem sempre é realizada de forma adequada [31].

Na literatura, o método do ponto de equilíbrio instável de controle (CUEP¹² - do inglês *Controlling Unstable Equilibrium Point*) foi reconhecido como o melhor método direto para análise de estabilidade transitória em sistemas de potência [32], pois aproxima a fronteira da região de estabilidade a partir do cálculo do ponto de equilíbrio instável, na fronteira da região de estabilidade, na direção da falta, garantindo (e geralmente também diminuindo) o conservadorismo das análises [33], [16].

As maiores limitações do método CUEP, tanto do ponto de vista do conservadorismo (necessário à segurança na operação) como do ponto de vista da velocidade (necessária às aplicações em tempo-real), estão na caracterização correta do CUEP e na eficiência de seu cálculo.

Chiang, Wu e Varaiya, em 1994 [34], propuseram o algoritmo BCU (do inglês *Boundary Controlling Unstable Equilibrium Point*) para possibilitar o cálculo do CUEP através de um sistema gradiente reduzido associado ao sistema original. O método CUEP e o algoritmo BCU serão apresentados e estudados detalhadamente no capítulo 3 deste trabalho.

¹²Na literatura em língua inglesa a referência ao método do ponto de equilíbrio instável de controle é feita pela sigla CUEP, sendo tal sigla também adotada neste trabalho a fim de uniformizar a nomenclatura vigente.

1.3 Modelos de SEPs com Duas Escalas de Tempo

Os sistemas elétricos de potência, em sua maioria são modelados por um conjunto de equações algébrico-diferenciais (EAD) na forma:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{0} = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases} \quad (1.1)$$

sendo $(\dot{\cdot})$ a derivada de $(\cdot)$ em relação à variável tempo t , $\mathbf{x}$ o vetor de variáveis dinâmicas, $\mathbf{y}$ o vetor de variáveis algébricas (instantâneas), e f, g as funções (contínuas por partes) que descrevem a dinâmica do sistema.

Para resolução do problema de estabilidade transitória, utilizando modelos de sistemas de potência de grande porte na forma (1.1), a abordagem clássica consiste na integração numérica do sistema de equações diferenciais e respectiva determinação da estabilidade ou não do sistema após a mitigação da perturbação, o que demanda um grande esforço computacional exigindo a resolução de um sistema EAD que atinge a ordem de centenas de equações diferenciais e milhares de equações algébricas, e resulta por limitar severamente o número de casos a serem tratados na análise de segurança dinâmica em tempo-real de SEPs [7].

Desta forma, com o objetivo de realizar o estudo de estabilidade transitória em tempo-real nos centros de operação, os métodos diretos (energéticos), tais como o método PEBS e o método CUEP, serão empregados neste trabalho. Porém a utilização destes métodos encontra algumas dificuldades, do ponto de vista numérico, como pode ser observado pela experiência da utilização do próprio algoritmo BCU para o cálculo do CUEP, que muitas vezes apresenta problemas numéricos relacionados a convergência numérica dos algoritmos empregados nas suas diversas etapas de cálculos [35], [28].

Com o objetivo de tornar os métodos diretos numericamente mais robustos¹³, muitos autores realizaram diversas propostas, tais como a algoritmo PEBS dinâmico proposto por Scruggs e Mili em 2001 [36] e mais tarde aperfeiçoado por Nazareno, Alberto e Bretas em 2005 [37], e o algoritmo *Shadowing Method* para o cálculo do CUEP proposto por Treinen, Vittal e Kliemann em 1996 [38].

O próprio Chiang, inventor do algoritmo numérico BCU para o cálculo do CUEP, em conjunto com muitos de seus colaboradores propuseram diversas variantes do algoritmo BCU com o objetivo de tornar sua utilização mais robusta e eficiente na análise de contingências, tais como os classificadores BCU [4], [39], [40], [28] baseados nos passos do algoritmo BCU e a concepção de um esquema de seleção de contingências integrando os classificadores BCU e a simulação do modelo completo do sistema [41].

¹³Neste trabalho, o termo *robusto* será utilizado para fazer referência à característica de um determinado método numérico ter uma menor propensão à falhas (melhor estabilidade e convergência numéricas).

Neste sentido, este trabalho visa a utilização de uma característica intrínseca nos sistemas de energia elétrica: a existência de diversas “escalas de tempo”, a fim de criar um novo método direto, numericamente mais robusto e eficiente, para a análise de estabilidade transitória em tais sistemas. Na próxima seção deste trabalho as dinâmicas presentes em um SEP serão agrupadas em duas classes: rápidas e lentas, e as respectivas vantagens de tal subdivisão serão justificadas e discutidas.

1.3.1 A Importância das Escalas de Tempo em SEPs: Uma Aplicação da Teoria de Sistemas Singularmente Perturbados

Devido a grande quantidade de equipamentos que compõem um SEP, e existência de diversas dinâmicas pode conduzir ao aparecimento de diversas escalas de tempo, caracterizadas pela variedade da resposta temporal de duas variáveis. Tais escalas de tempo podem ser classificadas arbitrariamente em diversos níveis, sendo, neste trabalho, classificadas em dois grupos a saber: lentas e rápidas¹⁴, dando origem ao que serão chamadas variáveis lentas e variáveis rápidas do sistema.

Primeiramente é preciso reconhecer em um SEP a existência deste dois tipos de variáveis, tal constatação que pode variar segundo a modelagem do sistema sob análise, porém pode ser entendido intuitivamente a partir do modelo de 1 eixo de um único gerador síncrono, uma vez que a tensão elétrica E'_q , proporcional ao fluxo magnético produzido pelo enrolamento de campo da máquina [42], requer um intervalo de tempo maior que a velocidade de seu rotor para atingir seu valor em regime permanente, quando da existência de um transitório (vide exemplo na seção 4.3 deste trabalho), podemos classificar a tensão E'_q como uma variável lenta e a variação da velocidade (ω) e do ângulo (δ) do rotor como variáveis rápidas [43].

Para fins de simplificação, neste trabalho, num primeiro instante admite-se hipóteses suficientes para a redução do sistema de transmissão¹⁵ (rede) aos nós internos das forças eletromotrizes dos geradores síncronos conectados ao SEP (modelos de rede reduzida [13], [12]), através do uso do teorema da Função Implícita [15], é possível escrever as variáveis

¹⁴É importante mencionar que as escalas de tempo podem ser menores ou maiores, sendo portanto, as denominações lenta e rápida associadas ao fato de que escalas de tempo menores capturam satisfatoriamente o comportamento temporal de variáveis de estado cuja resposta temporal é rápida e, de modo análogo, escalas de tempo maiores observam de modo satisfatório as variáveis de estado com comportamento temporal mais lento.

¹⁵As hipóteses de redução do sistema de transmissão são comumente realizadas em estudos de estabilidade transitória a fim de reduzir a ordem de complexidade do problema de estabilidade transitória: (i) rede em regime senoidal permanente, (ii) modelagem da carga como impedâncias constantes e (iii) modelagem clássica dos geradores como uma fonte de tensão constante atrás de uma reatância transitória de eixo direto constante [16], [28]. É necessário fazer uma ressalva quanto à modelagem dos geradores pois a redução citada também pode ser realizada quando da utilização dos modelos de 1 e 2 eixos, com inclusão de modelos de AVR simplificados (cujas entradas independem de tensões externas ao gerador controlado), [13], [42].

algébricas ($\mathbf{y}$) como função das variáveis dinâmicas ($\mathbf{x}$) do sistema:

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x}) \quad (1.2)$$

Portanto, o conjunto de equações algébrico-diferencial (EAD) pode ser reduzido a um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO):

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (1.3)$$

Com isso, em uma primeira abordagem do problema, simplifica-se a teoria matemática envolvida na formulação do problema de estabilidade transitória [12], [16], bem como na caracterização da fronteira da região de estabilidade [19], [23]. Porém é válido mencionar que já existe uma caracterização completa da fronteira da região de estabilidade para sistemas algébrico-diferenciais [44], [45], porém tal análise é demasiadamente dispendiosa numa primeira proposta para este trabalho.

Uma vez verificada¹⁶ a existência de diversas escalas de tempo num dado modelo de SEP, na forma (1.3), pode-se dividir suas variáveis de estado ($\mathbf{x}$) segundo suas características de variação temporal em dois grupos:

$$\Sigma_\varepsilon : \begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = f_S(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \\ \varepsilon \dot{\mathbf{z}} = f_F(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \end{cases} \quad (1.4)$$

sendo $\mathbf{w}$ o vetor de variáveis lentas, $\mathbf{z}$ o vetor de variáveis rápidas, e ε um parâmetro real, positivo e pequeno do sistema.

O parâmetro ε possui um papel fundamental na teoria de sistemas singularmente perturbados, apresentada com maiores detalhes no capítulo 2 deste trabalho, uma vez que fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ pode-se estudar o comportamento dos subsistemas rápido e lento oriundos do sistema original e obter informações qualitativas sobre o sistema original [15].

O sistema (1.4) pode ser visto como um sistema de equações diferenciais ordinárias singularmente perturbadas (EDOSP). Deste modo, podemos estudar seu comportamento dividindo sua dinâmica da seguinte maneira: (i) para intervalos de tempo relativamente¹⁷ grandes as variáveis rápidas já atingiram seu equilíbrio e portanto o comportamento do sistema é quase que completamente regido pela dinâmica das variáveis lentas e (ii) para curtos intervalos de tempo as variáveis lentas podem ser consideradas praticamente “congeladas” (sem dinâmica) e a dinâmica do sistema é regida quase que completamente pelas

¹⁶Neste trabalho, não serão discutidos métodos para identificar as variáveis rápidas e lentas presentes em modelos matemáticos de sistemas dinâmicos descritos por EDOs, porém faz-se menção ao fato de que tais métodos já foram amplamente discutidos na literatura [46], [47], sendo inclusive aplicados à análise de coerência em SEPs [48],[49].

¹⁷Neste trabalho, o termo *relativamente grande (pequeno)* será empregado para fazer menção as diferentes escalas de tempo em um mesmo sistema EDOSP de modo a se referir respectivamente às escalas de tempo lentas e rápidas do sistema dinâmico.

variáveis rápidas.

Dito isto, pode-se definir o sistema lento Σ_0 como sendo o sistema (1.4), quando $\varepsilon \rightarrow 0$, ou seja, quando as variáveis rápidas cessam sua dinâmica transitória:

$$\Sigma_0 : \begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = f_S(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \\ 0 = f_{\mathcal{F}}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \end{cases} \quad (1.5)$$

De outro modo, o sistema rápido Π_ε pode ser exibido fazendo, sobre o sistema (1.4), uma mudança de variáveis da forma $\tau \stackrel{def}{=} \frac{t}{\varepsilon}$, o que corresponde à mudança da escala de tempo original t para a rápida τ :

$$\Pi_\varepsilon : \begin{cases} \frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = \varepsilon f_S(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \\ \frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = f_{\mathcal{F}}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \end{cases} \quad (1.6)$$

De maneira análoga ao caso lento, ao fazer $\varepsilon \rightarrow 0$, ou seja, fixando as variáveis lentas em um dado ponto de operação ($\mathbf{w}$ é tratado agora como um parâmetro), obtém-se o sistema rápido de fronteira:

$$\Pi_{BLS}(\mathbf{w}) : \left\{ \frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = f_{\mathcal{F}}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \right. \quad (1.7)$$

O sistema (1.7) é denominado um sistema de fronteira pois sua dinâmica é dependente do ponto de operação das variáveis lentas, como será discutido em detalhes no capítulo 2 deste trabalho.

A partir da aplicação do Teorema de Tikhonov [15] pode-se estabelecer as relações entre as dinâmicas dos subsistemas lento (1.5) e rápido (1.7) e a dinâmica do sistema original (1.4) a medida que ε se torna menor, expandindo tais resultados pode-se também encontrar as relações entre suas regiões de estabilidade (e respectivamente suas fronteiras) e assim criar um método CUEP mais robusto e eficiente para a análise de estabilidade transitória [2], [3].

Entre as possíveis vantagens da utilização de um método de análise de estabilidade transitória, em duas escalas de tempo, de sistemas elétricos de potência pode-se citar: (i) redução do conservadorismo das análises, (ii) maior velocidade no cálculo do CUEP através de modelos de menores ordens (subsistemas lento e rápido) e (iii) melhor condicionamento numérico na resolução das equações do problema de estabilidade transitória nos subproblemas lento e rápido.

É extremamente importante ressaltar que o estudo da decomposição da dinâmica do sistema original em dois subsistemas desacoplados: lento e rápido, representa um possível caminho para a busca por uma solução completa do problema de estabilidade de um sistema de energia, uma vez que tal decomposição pode vir a viabilizar o tratamento teórico-matemático de modelos de SEPs mais complexos, de modo a tornar possível a

resolução simultânea de vários subproblemas de estabilidade ao mesmo tempo.

Assim, no futuro, a utilização da decomposição do problema de estabilidade de SEPs em duas escalas de tempo poderá observar, por exemplo, o problema de estabilidade transitória, geralmente associado à escalas de tempo menores (rápidas), através do estudo do modelo rápido associado ao SEP e também observar o problema de estabilidade de tensão nas barras do SEP, geralmente associado à escalas de tempo maiores (lentas), ao estudar o comportamento do subsistema lento associado.

Também é válido ressaltar que a utilização da decomposição da dinâmica do sistema em duas escalas de tempo, representa um importante avanço no desenvolvimento dos métodos diretos que possam tratar modelos mais completos de um sistema elétrico de potência, bem como auxiliar no desenvolvimento de novos métodos diretos para análise de estabilidade de tensão e frequência, o que resultaria num ferramental, baseado em métodos diretos, completo e eficiente para a análise de estabilidade de SEPs.

Nas próximas seções deste trabalho, os objetivos deste trabalho serão expostos, bem como as principais ferramentas (metodologias) a serem estudadas para o cumprimento destes.

1.4 Objetivos deste trabalho

Na sequência seguem listados o objetivo principal e os respectivos desdobramentos propostos como temas de pesquisa nesta tese de doutorado.

1.4.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem por objetivo desenvolver um método (algoritmo) robusto para o cálculo do CUEP em modelos de SEPs utilizando a decomposição da dinâmica original do sistema em duas escalas de tempo: lenta e rápida.

Este novo método irá utilizar sistemas artificiais reduzidos (lento e rápido) a fim de proporcionar maior eficiência ao cálculo do CUEP nos sistemas lento e rápido associados ao modelo original do SEP durante a análise de estabilidade transitória (vide capítulo 4 deste trabalho). Tais sistemas reduzidos serão produzidos de modo que relações estáticas e dinâmicas entre os pontos de equilíbrio destes e dos respectivos sistemas lento e rápido associados ao sistema original sejam satisfeitas (tais propriedades são expostas e discutidas na seção 3.3 deste trabalho).

A demonstração das relações acima mencionadas seguem os mesmos princípios, embora nem sempre utilizem o mesmo ferramental matemático, da demonstração do algoritmo numérico BCU tradicional [34], para o cálculo do CUEP, porém agora utilizando a decomposição da dinâmica do sistema original em duas escalas de tempo, dando assim origem a denominação de algoritmo numérico TTS-BCU (do inglês *Two-Time Scale BCU*) utilizada adiante neste texto.

1.4.2 Objetivos Específicos

A fim de atingir o objetivo principal deste trabalho, o cumprimento dos seguintes objetivos intermediários tornam-se necessários:

- Estudo da caracterização da região de estabilidade, e respectivamente de sua fronteira, para sistemas singularmente perturbados descritos por EDOs (proposta por Alberto e Chiang [18], [50]) e sua aplicação em modelos de SEPs, com duas escalas de tempo;
- Estudo e desenvolvimento de funções energia numéricas adequadas à análise de estabilidade transitória de modelos de SEPs com duas escalas de tempo;
- Estudo do método CUEP para modelos de SEPs com duas escalas de tempo (proposto por Alberto e Chiang em 2008 [2]) e desenvolvimento de um algoritmo numérico robusto para o cálculo do CUEP em tais sistemas (algoritmo TTS-BCU).

1.5 Estrutura Metodológica do Trabalho

Este trabalho propõe a elaboração de um algoritmo numérico robusto para o cálculo do CUEP em modelos de sistemas de energia elétrica com duas escalas de tempo, através do estudo e caracterização da fronteira da região de estabilidade de tais sistemas e da aplicação da teoria de estabilidade para sistemas singularmente perturbados.

É importante ressaltar que embora haja na literatura uma proposta para o método CUEP para sistemas com duas escalas de tempo [2], [3], denominado comumente como método TTS-CUEP (do inglês *Two-Time Scale CUEP*), ainda não existe um algoritmo numérico, baseado na caracterização da fronteira da região de estabilidade, com sólido embasamento teórico proposto para o cálculo do CUEP em tais sistemas.

A realização de tal proposta prevê a futura obtenção de diversas ferramentas derivadas deste algoritmo inicial para aplicações na análise de segurança dinâmica (estabilidade) de SEPs em tempo-real, tais como o desenvolvimento de classificadores para seleção de contingências e mesmo a extensão das idéias utilizadas para análise de estabilidade transitória em conjunto com análises de estabilidade de tensão.

Deste modo, tendo em vista os benefícios da obtenção de um algoritmo numérico robusto para o cálculo do CUEP em modelos de SEPs com duas escalas de tempo, a teoria de estabilidade para sistemas singularmente perturbados será estudada e aplicada na obtenção de tal algoritmo.

Por fim, uma vez obtido um algoritmo robusto para o cálculo do CUEP em sistemas com duas escalas de tempo, o mesmo será testado na análise de estabilidade transitória de sistemas de potência, a fim de verificar sua real eficiência e aplicabilidade.

1.6 Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado em 6 capítulos de modo a prover ao leitor uma visão geral sobre o tema desta tese de doutorado e suas principais contribuições à análise de estabilidade transitória de SEPs.

No capítulo 2, uma ampla discussão dos principais avanços e dificuldades na análise de estabilidade transitória de SEPs via métodos diretos (energéticos) é apresentada, bem como as bases da teoria de sistemas singularmente perturbados e sua aplicação na caracterização da região de estabilidade (e sua fronteira) para modelos de SEPs com duas escalas de tempo.

No capítulo 3, o método CUEP para análise de estabilidade transitória, e o algoritmo numérico BCU para o cálculo do CUEP, serão apresentados e discutidos frente a caracterização da fronteira da região de estabilidade, tendo também suas principais vantagens e dificuldades apontadas.

No capítulo 4, o método TTS-CUEP para análise de estabilidade transitória de modelos de SEPs com duas escalas de tempo, obtido como produto dos principais resultados derivados da caracterização da fronteira da região de estabilidade de tais sistemas, é apresentado e aplicado na análise de estabilidade transitória de um sistema máquina versus barramento infinito a fim de ilustrar sua aplicação e seus potenciais benefícios na análise de estabilidade de SEPs.

No capítulo 5, a proposta de um algoritmo numérico robusto TTS-BCU para o cálculo do CUEP em sistemas com duas escalas de tempo, baseado na caracterização da fronteira da região de estabilidade para tais sistemas, e sua demonstração matemática são apresentadas e discutidas em detalhes.

No capítulo 6, o método TTS-CUEP, associado ao novo algoritmo numérico TTS-BCU proposto neste trabalho, será aplicado à análise de estabilidade transitória de modelos de SEPs com duas escalas de tempo, visando assim, avaliar as possíveis vantagens e desvantagens em sua utilização, bem como exibir a possibilidade de se utilizar o método TTS-CUEP/BCU na redução do conservadorismo das análises de estabilidade transitória.

No capítulo 7, as conclusões finais e as perspectivas futuras para a continuação deste trabalho são comentadas.

*Before you speak, listen. Before you write, think.
Before you spend, earn. Before you invest, investigate.
Before you criticize, wait. Before you pray, forgive.
Before you quit, try. Before you retire, save.
Before you die, give.*

William Arthur Ward (✱1921-1994✧)

Capítulo 2

Estudos Preliminares em Sistemas Dinâmicos

2.1 Introdução

Neste capítulo, uma ampla revisão bibliográfica sobre os principais tópicos abordados neste trabalho será apresentada. Primeiramente uma breve revisão sobre os principais conceitos matemáticos necessários ao entendimento dos métodos diretos (energéticos) propostos neste trabalho é apresentada, sendo seguida de uma discussão sobre a teoria de sistemas singularmente perturbados, onde a mesma será revista e apresentada num enfoque aplicado ao estudo de estabilidade transitória de modelos de SEPs com duas escalas de tempo.

2.2 Preliminares Matemáticas

Neste trabalho, os modelos de sistemas elétricos de potência serão estudados a fim de explorar, no estudo de estabilidade transitória, as diferentes escalas de tempo presentes nos mesmos. Tais modelos não exibem uma dependência explícita com a variável tempo, uma vez que a condição de operação (estado) posterior pode ser completamente determinada pelo conhecimento da condição de operação anterior, independente do tempo em que a mesma ocorra, e por essa razão são genericamente denominados autônomos.

Por tal motivo, neste trabalho serão estudados os sistemas dinâmicos autônomos não lineares, uma classe específica de sistemas dinâmicos na qual os sistemas de energia elétrica se enquadram, aqui representados na forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

sendo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados dinâmicos do sistema e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$, ou seja, diferenciável e cuja primeira derivada é contínua, condição esta suficiente

para garantir a existência e unicidade de soluções [51]. A solução de (2.1) iniciando no ponto $\mathbf{x}_0$, no tempo $t = 0$, será chamada trajetória do sistema, e será denotada por $\Phi(\mathbf{x}_0, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Uma vasta apresentação dos conceitos relativos ao tratamento qualitativo de EDOs, em especial para o caso de sistemas autônomos, pode ser encontrada tanto em livros [51], [15], como teses [18] e artigos [13], [34]. Assim, nesta seção, se apresentarão apenas as definições e resultados essenciais à compreensão da teoria a ser desenvolvida neste trabalho.

Um ponto $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio se e somente se: $f(\mathbf{x}_e) = 0$, sendo o conjunto de todos os pontos de equilíbrio de (2.1) denotado por $E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = 0\}$. Um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e$ é hiperbólico de tipo k , se a matriz Jacobiana do sistema linearizado associado ao mesmo, avaliada neste ponto de equilíbrio, possuir k autovalores com parte real positiva e $n - k$ autovalores com parte real negativa, além disso se todos os autovalores possuírem parte real negativa este ponto é dito estável, caso contrário o mesmo é dito instável.

Seja $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$ um ponto de equilíbrio hiperbólico, suas variedades estável ($W^s(\mathbf{x}_e)$) e instável ($W^u(\mathbf{x}_e)$) podem ser definidas por:

$$W^s(\mathbf{x}_e) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \Phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{x}_e, \text{ quando } t \rightarrow +\infty\} \quad (2.2)$$

$$W^u(\mathbf{x}_e) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \Phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{x}_e, \text{ quando } t \rightarrow -\infty\} \quad (2.3)$$

As variedades estável ($W_s(\mathbf{x}_e)$) e instável ($W_u(\mathbf{x}_e)$) são conjuntos invariantes [51], ou seja, toda trajetória de (2.1) começando dentro destas variedades permanece dentro das mesmas para todo o tempo. Tal característica é muito explorada para fins de caracterização da fronteira da região de estabilidade [23].

Um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pertence ao conjunto ω -limite ($\omega(\mathbf{x}_0)$) da solução $\Phi(\mathbf{x}_0, t)$, se existe uma sequência $t_i \in \mathbb{R}$, com $t_i \rightarrow +\infty$ quando $i \rightarrow +\infty$ tal que:

$$\mathbf{x} = \lim_{i \rightarrow \infty, t_i \rightarrow +\infty} \Phi(\mathbf{x}_0, t_i) \quad (2.4)$$

Analogamente, um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pertence ao conjunto α -limite ($\alpha(\mathbf{x}_0)$) da solução $\Phi(\mathbf{x}_0, t)$, se existe uma sequência $t_i \in \mathbb{R}$, com $t_i \rightarrow -\infty$ quando $i \rightarrow +\infty$ tal que:

$$\mathbf{x} = \lim_{i \rightarrow \infty, t_i \rightarrow -\infty} \Phi(\mathbf{x}_0, t_i) \quad (2.5)$$

Os conjuntos limites $\alpha(\mathbf{x}_0)$ e $\omega(\mathbf{x}_0)$ são fechados¹ e invariantes [12], [51]. O estudo destes conjuntos permite caracterizar o comportamento assintótico de um sistema dinâmico, sendo muitas vezes importante na extração de resultados quando do estudo da

¹Um conjunto M é dito fechado se contém todos os seus pontos aderentes [52].

caracterização da fronteira da região de estabilidade [18].

Um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e$ é estável se dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\sigma(\epsilon) > 0$, sendo $\epsilon, \sigma \in \mathbb{R}$, tal que para toda condição inicial $\mathbf{x}_0$, satisfazendo $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < \sigma$, implica que $\|\Phi(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{x}_e\| < \epsilon$, para todo $t > t_0$.

Um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e$ é atrativo se existe $\eta > 0$, sendo $\eta \in \mathbb{R}$, tal que para toda condição inicial $\mathbf{x}_0$, satisfazendo $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < \eta$, implica que $\Phi(\mathbf{x}_0, t) \rightarrow \mathbf{x}_e$, quando $t \rightarrow +\infty$.

Além disso, um ponto $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável (asep) se e somente se este ponto é estável e atrativo.

A maioria dos sistemas dinâmicos não lineares não possui uma solução de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, mas sim um conjunto de soluções de equilíbrio assintoticamente estáveis. Deste modo, caracterizar uma solução de equilíbrio como sendo um asep, e determinar o “tamanho” do conjunto, formado pelas condições iniciais do sistema dinâmico que convergem para o mesmo quando o tempo tende para o infinito, é muito importante em diversas aplicações.

Este conjunto de condições iniciais é denominado de região de estabilidade (ou área de atração) de um asep $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n$ pode ser definida matematicamente por:

$$A(\mathbf{x}_s) = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_s\} \quad (2.6)$$

Topologicamente a região de estabilidade de um asep é um conjunto aberto², invariante e conexo³ [19].

Assim, pode-se definir a fronteira da região de estabilidade, ou simplesmente fronteira de estabilidade, denotada por $\partial A(\mathbf{x}_e)$, como sendo todos os pontos, cujas bolas abertas $B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| < r\}$, com $\mathbf{x} \in \partial A(\mathbf{x}_e)$ e $r > 0$, possuem pelo menos um ponto dentro e um ponto fora da região de estabilidade.

O conceito de transversalidade entre duas variedades⁴ no $\mathbb{R}^n$ também será utilizado durante a caracterização da região de estabilidade (e sua fronteira), a fim de facilitar a obtenção dos resultados pretendidos.

Considere duas variedades topológicas $A, B \in \mathbb{R}^n$, diz-se que a intersecção entre A e B satisfaz a condição de transversalidade se a intersecção é nula, $(A \cap B) = \emptyset$, ou se para cada ponto $\mathbf{x} \in (A \cap B)$, os espaços tangentes de A e B , formam uma base para o espaço tangente do $\mathbb{R}^n$ no ponto $\mathbf{x}$, ou seja:

$$T_{\mathbf{x}}(A) + T_{\mathbf{x}}(B) = T_{\mathbf{x}}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{x} \in (A \cap B) \quad (2.7)$$

²Um conjunto M é dito aberto se todo ponto deste conjunto pertence ao interior de M [52].

³Um conjunto M é dito conexo (por caminho) se é possível encontrar um caminho que conecte quaisquer dois pontos deste conjunto, de modo que o mesmo contenha somente pontos de M .

⁴Neste trabalho o termo *variedade* será utilizado no sentido de variedade topológica. Assim um espaço topológico M é uma variedade topológica se para cada ponto $p \in M$, existe uma vizinhança homeomorfa a um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ [53].

A propriedade de transversalidade de intersecção de variedades é relevante, uma vez que a mesma persiste a perturbações contínuas destas variedades. Como exemplo de transversalidade tem-se as variedades estável e instável de um ponto de equilíbrio hiperbólico $\mathbf{x}_e$, $W^s(\mathbf{x}_e)$ e $W^u(\mathbf{x}_e)$, se interceptam transversalmente em $\mathbf{x}_e$.

Na próxima seção deste trabalho, inicia-se o estudo dos métodos diretos (energéticos) com a apresentação dos conceitos de função de Lyapunov e função energia, progredindo para o desenvolvimentos dos métodos diretos utilizados nas aplicações práticas para análise de estabilidade transitória de SEPs e culminando com o desenvolvimento da teoria de sistemas singularmente perturbados também aplicada ao estudo de estabilidade transitória nestes sistemas.

2.3 Métodos Diretos Aplicados à Análise de Estabilidade Transitória: Teoria e Potencialidades

As idéias de Lyapunov [22] deram grande impulso ao emprego de funções escalares auxiliares, conhecidas hoje como *funções de Lyapunov*, no estudo qualitativo de estabilidade de equações diferenciais ordinárias. Na literatura contemporânea existe uma ampla gama de definições (dependendo do problema a ser tratado) para o que se chama função de Lyapunov, sendo uma das mais comumente encontradas a dada a seguir [12], [54].

Definição 2.3.1 (Função de Lyapunov). *Uma função escalar $L: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é um conjunto aberto contendo a origem, é uma função de Lyapunov de (2.1), em Ω , se e somente se: (i) $L(\mathbf{x})$ é contínua⁵ em Ω , (ii) definida positiva⁶ para qualquer $\mathbf{x} \in \Omega - \{\mathbf{0}\}$ e (iii) $\dot{L}(\mathbf{x}) \leq 0$ em Ω .*

Faz-se menção ao fato de que a condição (ii) da definição anterior exclui o ponto $\mathbf{0}$, uma vez que estudar o equilíbrio da solução nula é o mesmo que estudar o equilíbrio de qualquer solução do sistema, pois para um sistema dinâmico descrito por EDOs, sendo este autônomo ou não, é sempre possível realizar uma mudança de coordenadas (translação) de modo a escrever a solução de interesse como sendo a solução nula do sistema transladado [12], [51], [15].

É importante observar também que a definição de função de Lyapunov tem por objetivo fornecer as condições necessárias à aplicação do Teorema de Estabilidade de Lyapunov (ver teorema 2.3.1), de modo que as condições (i)-(iii) visam estabelecer as propriedades necessárias para que uma solução do sistema (2.1), cuja condição inicial esteja no interior de Ω , permaneça no interior de Ω para todo tempo futuro.

⁵Uma função $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, em um ponto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, se dado $\epsilon > 0$, existe $\sigma > 0$, tal que se $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \sigma \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})\| < \epsilon$.

⁶Uma função escalar $L: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é definida positiva se e somente se $L(\mathbf{0}) = 0$ e $L(\mathbf{x}) > 0$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega - \{\mathbf{0}\}$ [12]

Através da utilização de uma função de Lyapunov apropriada pode-se provar a estabilidade de um ponto de equilíbrio para um sistema dinâmico não linear qualquer [15], assim como obter uma estimativa local da região de estabilidade. Porém a maior dificuldade na utilização destas idéias reside na obtenção de tal função escalar, pois não existe um método sistemático para encontrá-las em sistemas não lineares dissipativos de ordem⁷ maior que 2.

Uma idéia bastante empregada na obtenção de funções de Lyapunov é utilizar a energia associada ao sistema dinâmico sob análise (1ª integral do sistema). Porém a primeira integral só é independente do caminho em sistemas conservativos (hamiltonianos), o que restringe a sua aplicação em muitos casos, pois a condição (iii) da definição 2.3.1 não pode ser garantida.

É importante mencionar que existem inúmeros sistemas não hamiltonianos que possuem uma função de Lyapunov, porém tais funções não são obtidas a partir da 1ª integral (energia) do sistema, mas a partir de processos de tentativa e erro, o que torna exaustiva a busca por tais funções.

Ademais, a existência de uma função de Lyapunov local garante apenas a estabilidade da solução sob análise, porém quase sempre produz estimativas muito conservadoras da região de estabilidade, normalmente caracterizada como o conjunto definido pelo interior da componente conexa, $\Omega_{\mathcal{L}} = \{\mathbf{x} \in \Omega : L(\mathbf{x}) < \mathcal{L}\}$, que contém a solução de equilíbrio sob análise e satisfaz a condição de negatividade da primeira derivada da função de Lyapunov em todos os seus pontos. O que acaba por limitar severamente seu uso em análises globais, pois nada diz a respeito da extensão da região de estabilidade ou sua fronteira.

Existem esforços para a obtenção de métodos que possam exibir funções de Lyapunov (funções energia) globais que permitam o seu emprego no estudo da região de estabilidade em sistemas de energia elétrica [55], [56]. Tais métodos realizam a construção iterativa destas funções a partir de uma função de Lyapunov (função energia) inicial, possibilitando uma melhora significativa na estimativa da região de estabilidade, porém, não fornecem uma maneira sistemática para a construção da função de Lyapunov (função energia) inicial.

Em 1987, Chiang, Wu e Varaiya [23] propuseram o conceito de função energia como uma ferramenta auxiliar no estudo da caracterização da fronteira da região de estabilidade de sistemas dinâmicos autônomos. Tal definição é caracterizada a seguir.

Definição 2.3.2 (Função Energia). *Uma função escalar $V: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, onde Ω é um conjunto aberto contendo a origem, é uma função energia de (2.1), em Ω , se e somente se: (i) $\dot{V}(\Phi(\mathbf{x}, t)) \leq 0$ sempre que $\Phi(\mathbf{x}, t) \in \Omega$, e (ii) se $\mathbf{x} \notin E$, então o conjunto $\{t \in \mathbb{R} : \dot{V}(\Phi(\mathbf{x}, t)) = 0\}$ tem medida zero sobre $\mathbb{R}$. Além disso, (iii) se a trajetória do sistema $\Phi(\mathbf{x}, t)$ tem um valor limitado de $V(\Phi(\mathbf{x}, t))$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, então $\Phi(\mathbf{x}, t)$*

⁷A ordem de um sistema não linear modelado por conjunto de EDOs é dada pela soma das ordens das maiores derivadas presentes em cada equação diferencial.

também é limitada.

A condição (i) da definição anterior estabelece que a a função energia ao longo de qualquer solução iniciando no interior da região Ω é não crescente, fato que associado à condição (ii) estabelece também que no interior de Ω toda solução $\Phi(\mathbf{x}, t)$ é estritamente decrescente. A condição (iii) estabelece que a função energia é radialmente ilimitada ao longo das trajetória do sistema [18], [15], fato este explorado durante as demonstrações utilizadas na caracterização da fronteira da região de estabilidade quando da necessidade de limitação da função energia.

É importante observar que a proposta de definição de uma função energia, tem por objetivo fornecer as hipóteses necessárias para uma melhor caracterização e estudo da região de estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares, e não se conhece, na literatura vigente, uma equivalência entre as definições (2.3.1) e (2.3.2). Portanto, justifica-se a utilização da denominação de função energia, no sentido da definição (2.3.2), para designar as funções escalares auxiliares, ao realizar a caracterização da fronteira da região de estabilidade, utilizadas neste trabalho.

Tendo apresentado as definições de função de Lyapunov (2.3.1) e de função energia (2.3.2), é relevante comentar que sua existência é uma das condições utilizadas no estudo e caracterização da fronteira da região de estabilidade, e consequentemente no estudo de estabilidade transitória, de SEPs, como será exposto na próxima seção deste trabalho. As funções escalares auxiliares (funções de Lyapunov ou funções energia) tem como principal papel, na teoria de estabilidade, fornecer estimativas para a fronteira da região de estabilidade de soluções de equilíbrio em sistemas dinâmicos, sendo estas estimativas dadas na forma de conjuntos de nível da função auxiliar, obtidas a partir da avaliação de um nível crítico de energia, como comentado na introdução deste trabalho.

A utilização das funções de Lyapunov na análise de estabilidade transitória foi proposto pela primeira vez na literatura por Magnusson em 1947 [57], sendo seguido por Aylett em 1958 [58] e Gless em 1966 [59]. Da década de 1960 até o fim da década de 1980, um grande esforço foi empregado na obtenção de uma função de Lyapunov (e uma função energia) global adequada à análise de estabilidade transitória para SEPs multimáquinas [59], [60], [61], [24], contudo restavam dúvidas sobre a existência de tais funções, e em 1984 Narasimhamurthi [62] exibiu os primeiros resultados demonstrando que não existia uma maneira de modificar suavemente uma função energia para um sistema sem perdas de modo a acomodar as perdas no sistema de transmissão.

Em 1989 Chiang demonstrou a inexistência de tal função para modelos de SEPs com perdas [63], e demonstrou também que uma função energia (ou uma função de Lyapunov) só poderia existir em conjuntos compactos⁸ do espaço de estados. Portanto a utilização das mesmas em estudos de caracterização da fronteira da região de estabilidade só teria

⁸Um conjunto M é compacto, sobre o espaço $\mathbb{R}^n$, se o mesmo for limitado e fechado.

utilidade prática em casos deveras especiais, e em subconjuntos do espaço de estados onde tais funções existissem.

O resultado de Chiang em 1989 [63], por muito tempo desencorajou a pesquisa sobre a obtenção de melhores funções energia para modelos de SEPs, e consequentemente tornou os métodos diretos, baseados na caracterização da fronteira da região de estabilidade, um estudo teórico de pouca aplicação prática. Contudo, a experiência dos pesquisadores demonstrou ao longo do tempo que mesmo inexistindo uma função energia analítica para modelos de SEPs com perdas, o uso de funções energia numéricas (aproximadas) provou ser de grande valia prática [13], permitindo que resultados conservadores fossem obtidos mesmo quando a teoria não exibía garantia de tais resultados.

Estando a teoria limitada à existência de uma função energia, e a utilização de uma aproximação numérica para tais funções limitada pela possibilidade de falhas, os métodos diretos tiveram sua eficácia colocada em xeque. Deste ponto em diante, os pesquisadores tiveram que adaptar a utilização de tais métodos a fim de prover a confiabilidade necessária à sua utilização na análise de segurança dinâmica de SEPs em tempo-real.

Entre as propostas para o melhor aproveitamento dos métodos diretos presentes na literatura pode-se citar, como principal, a criação de esquemas de seleção (filtragem) de contingências associado à simulação computacional, no domínio do tempo, do modelo completo do SEP sob estudo [64], [39].

Com isto em mente, a seguir as bases teóricas da aplicação da teoria de funções energia ou funções de Lyapunov (funções escalares auxiliares) na análise de estabilidade de soluções de equilíbrio em sistemas dinâmicos será apresentada, com o objetivo de prover as bases teóricas necessárias ao entendimento dos métodos diretos discutidos neste trabalho.

Os resultados de Lyapunov podem ser sumariamente expostos no teorema a seguir.

Teorema 2.3.1 (Teorema de Estabilidade de Lyapunov [12], [22]). *Se o sistema dinâmico autônomo (2.1) admite uma função de Lyapunov $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e definida positiva, para a qual $\dot{L}(\Phi(\mathbf{x}, t)) \leq 0$ ($\dot{L}(\Phi(\mathbf{x}, t)) < 0$) em alguma região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ do espaço de estados contendo a origem⁹, então a origem é um ponto de equilíbrio estável (assintoticamente estável).*

A figura 2.1 apresenta uma representação geométrica do teorema de Lyapunov.

Os resultados de Lyapunov [22] provam a estabilidade assintótica de um ponto de equilíbrio a partir da condição de negatividade da derivada da função escalar auxiliar, porém é difícil utilizar tais funções na extração de resultados para caracterizar a região de estabilidade (e sua fronteira), uma vez que o teorema só garante que o conjunto de nível

⁹Nas análises de estabilidade assume-se que a origem seja um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico, o que pode ser considerado uma condição genérica seja para sistemas autônomos ou não, uma vez que sempre é possível definir uma mudança de coordenadas de modo a transladar qualquer solução de equilíbrio para a origem [51], [15], [12].

Figura 2.1: Teorema de Estabilidade de Lyapunov.

$\Omega_{\mathcal{L}_{cr}} = \{\mathbf{x} \in \Omega : L(\mathbf{x}) < \mathcal{L}_{cr}\}$ esteja no interior da região de estabilidade da origem, se $\dot{L}(\mathbf{x}) < 0$ para todo ponto interior a $\Omega_{\mathcal{L}_{cr}}$.

Tal condição é comumente violada quando avaliada sobre os pontos do interior da região de estabilidade, o que acaba por tornar o conjunto de nível $\Omega_{\mathcal{L}_{cr}}$, obtido pela função de Lyapunov, uma estimativa deveras conservadora para a região de estabilidade (e sua fronteira).

Com tal constatação em mente o princípio da invariância de LaSalle [54] entra em cena a fim de provar a atratividade de um ponto de equilíbrio exigindo apenas a semi-negatividade da função escalar auxiliar, como pode ser observado no teorema a seguir, e com isso pode-se provar a estabilidade do mesmo ponto a partir dos resultados de Lyapunov e concluir sobre a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio.

Teorema 2.3.2 (Princípio da Invariância de LaSalle [12], [54]). *Seja $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , em alguma região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, de modo que $\dot{V}(\Phi(\mathbf{x}, t)) \leq 0$ e $V(\mathbf{0}) = 0$. Para alguma constante real $\lambda \geq 0$, seja C_λ a componente conexa do conjunto $S_\lambda = \{\mathbf{x} \in \Omega : V(\mathbf{x}) \leq \lambda\}$ que contém a origem, admitindo que C_λ é um subconjunto fechado e limitado de Ω . Seja $\mathcal{E} = \{x \in S_\lambda : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$ um subconjunto de Ω e seja B o maior subconjunto invariante contido em $\mathcal{E}$. Então, toda solução de (2.1) começando em C_λ aproxima-se de B quando $t \rightarrow \infty$.*

A figura 2.2 apresenta um esboço das condições para aplicação do Princípio de Invariância.

Os teoremas de estabilidade de Lyapunov e o princípio de invariância de LaSalle compõem um conjunto de ferramentas extremamente versátil não somente para determinar a estabilidade de pontos de equilíbrio, mas também para explorar a região de estabilidade (e sua fronteira) em sistemas dinâmicos. A aplicação do princípio de invariância permite a existência de regiões de semi-negatividade da derivada da função escalar auxiliar, $V(\mathbf{x})$, dentro do conjunto de nível $\Omega_{\mathcal{V}_{cr}} = \{\mathbf{x} \in \Omega : V(\mathbf{x}) < \mathcal{V}_{cr}\}$, o que resulta em

Figura 2.2: Princípio da Invariância de LaSalle.

uma melhor aproximação da região de estabilidade quando comparada àquela fornecida apenas pelos resultados de Lyapunov, porém sendo ainda muito restritiva, uma vez que a condição de semi-negatividade não é assegurada em todos os pontos do interior da região de estabilidade da origem.

Em 2000, Rodrigues, Alberto e Bretas [65] propuseram a extensão do princípio da invariância de LaSalle, permitindo agora que a derivada da função energia (ou função de Lyapunov) assumia valores positivos em certas regiões do espaço de estados, como retratado no teorema a seguir.

Teorema 2.3.3 (Extensão do princípio da Invariância de LaSalle [65], [66]). *Seja $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$, e $c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em alguma região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, de modo que $-\dot{V}(\mathbf{x}) \geq c(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$. Para alguma constante real $\mathcal{L} \geq 0$, seja $\Omega_{\mathcal{L}} = \{\mathbf{x} \in \Omega : V(\mathbf{x}) < \mathcal{L}\}$ um conjunto que contém a origem, admitindo que $\Omega_{\mathcal{L}}$ é um subconjunto limitado de Ω . Seja $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{L}} : c(\mathbf{x}) < 0\}$, suponha que*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} V(\mathbf{x}) = l < \mathcal{L}$$

e seja $\bar{\Omega}_l = \{\mathbf{x} \in \Omega : V(\mathbf{x}) \leq l\}$, sendo $\bar{\Omega}_l$ o fecho¹⁰ do conjunto Ω_l . Defina $\mathcal{E}_P = \{\mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{L}} : c(\mathbf{x}) = 0\} \cup \bar{\Omega}_l$ um subconjunto de Ω e seja B o maior subconjunto invariante contido em $\mathcal{E}_P$. Então, toda solução de (2.1) começando em Ω_L aproxima-se de B quando $t \rightarrow \infty$. Além disso, se $\mathbf{x}_0 \in \bar{\Omega}_l$ então $\Phi(\mathbf{x}_0, t) \in \bar{\Omega}_l$, para todo $t \geq 0$, e $\Phi(\mathbf{x}_0, t)$ tende para o maior conjunto invariante contido em $\bar{\Omega}_l$, quando $t \rightarrow \infty$.

A figura 2.3 apresenta geometricamente as condições para a aplicação da extensão do Princípio de Invariância.

¹⁰O fecho do conjunto M , denotado por $\bar{M}$, é o conjunto formado por todos os pontos aderentes a M ($\bar{M} = \text{int}(M) \cup \partial M$) [52].

Figura 2.3: Extensão do Princípio da Invariância de LaSalle.

Esta extensão permitiu a definição de um novo conceito de função de energia estendida (generalizada) [67], fornecendo novas bases teóricas (incluindo a extensão da caracterização da fronteira da região de estabilidade [18]) para a aplicação dos métodos diretos (energéticos) na análise de estabilidade transitória de SEPs com perdas [68], [69], [70], assim como abriu novas fronteiras para a aplicação de métodos diretos na análise de estabilidade de tensão a grandes perturbação [71], [72].

Com a utilização da extensão do princípio da invariância de LaSalle [65], [66], e seus desdobramentos [18], [69], [67], Alberto e Chiang em 2011 [73] utilizaram funções de energia generalizadas na caracterização da fronteira da região de estabilidade de sistemas dinâmicos autônomos complexos.

Com tais desenvolvimentos espera-se que, dentro em breve, os métodos diretos (energéticos) sejam capazes de tratar modelos mais completos de SEPs, possibilitando seu emprego de maneira mais ampla e eficiente na análise de estabilidade de SEPs, bem como na análise de segurança dinâmica em tempo-real.

Na próxima seção deste trabalho a caracterização da fronteira da região de estabilidade para a classe de sistemas dinâmicos autônomos não lineares, na qual todos os modelos de SEPs descritos por EDOs se enquadram, será apresentada a fim de dar subsídios ao desenvolvimento dos métodos diretos estudados neste trabalho.

2.3.1 A Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade para Sistemas Dinâmicos Autônomos Não Lineares

Entre os anos 1987/88, Chiang, Hirsch e Varayia [19], [20], [23], iniciaram o estudo da fronteira da região de estabilidade de sistemas dinâmicos autônomos não lineares, motivados pela resolução do problema de estabilidade transitória em SEPs.

Desde então a caracterização topológica da fronteira da região de estabilidade tem

sido a base para o estudo e desenvolvimento teórico-matemático de muitos métodos diretos (energéticos) para análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência: desde o método PEBS, criado em 1978 por Kakimoto, Ohsawa e Hayashi [29], passando pelo método *Closest Unstable Equilibrium Point*, proposto em 1966 por El-Abiad e Nagappan [74], e o método BCU, desenvolvido por Chiang, Wu e Varaiya em 1994 [34].

É importante fazer menção ao fato de que existem muitos métodos diretos que não se apóiam sobre a caracterização da fronteira da região de estabilidade, tal como o método SIME (do Inglês *Single Machine Infinite Bus Equivalent*) [75], baseado no Critério das Áreas Iguais Extendido, proposto por Xue, Van Cutsem e Ribbens-Pavella em 1988 [76].

Dito isto, com o objetivo de estabelecer e simplificar a caracterização da fronteira região de estabilidade, são feitas as seguintes hipóteses:

- (A1) Existe um aseps no sistema sob análise;
- (A2) Todos os pontos de equilíbrio localizados na fronteira da região de estabilidade do aseps sob estudo são hiperbólicos;
- (A3) A intersecção das variedades estáveis e instáveis dos pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade do aseps sob análise satisfazem a condição de transversalidade;
- (A4) Toda trajetória na fronteira da região de estabilidade converge para um ponto de equilíbrio quando $t \rightarrow \infty$.

A condição (A1) é um pressuposto usual ao tratar modelos que representam sistemas físicos reais, uma vez que a inexistência de um aseps representa na maioria dos casos de interesse a infactibilidade na operação do sistema. As condições (A2) e (A3) são genericamente satisfeitas, ou seja, válidas para quase todos os sistemas dinâmicos, incluindo os sistemas de energia elétrica [77]. Já a condição (A4) necessita ser verificada individualmente caso a caso.

Uma constatação importante é que a condição (A4) é verificada para todo sistema dinâmico que admite uma função energia no sentido da definição (2.3.2) [19]. Contudo, para modelos de sistemas de potência com perdas, não existe uma função energia analítica global [63] e apenas aproximações numéricas desta são utilizadas nos estudos de estabilidade transitória por métodos diretos [13], sendo então a condição (A4) admitida como um pressuposto verdadeiro durante as análises.

Admitindo então que as condições (A1)-(A4) são válidas para o sistema dinâmico autônomo, na forma (2.1), sob análise pode-se caracterizar um ponto de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade de um aseps neste sistema como no teorema a seguir.

Teorema 2.3.4 (Caracterização de um Ponto de Equilíbrio na Fronteira da Região de Estabilidade [19], [4]). *Para um sistema dinâmico autônomo, na forma (2.1), satisfazendo as hipóteses (A1)-(A4), seja $\mathbf{x}_e$ um ponto de equilíbrio hiperbólico, e seja $\partial A(\mathbf{x}_s)$ a fronteira da região de estabilidade de um asep $\mathbf{x}_s$. Então:*

$$\mathbf{x}_e \in \partial A(\mathbf{x}_s) \Leftrightarrow W^u(\mathbf{x}_e) \cap A(\mathbf{x}_s) \neq \emptyset \quad (2.8)$$

$$\mathbf{x}_e \in \partial A(\mathbf{x}_s) \Leftrightarrow W^s(\mathbf{x}_e) \subseteq \partial A(\mathbf{x}_s) \quad (2.9)$$

Do teorema anterior fica claro que todo ponto de equilíbrio hiperbólico presente na fronteira da região de estabilidade deve ser instável, ou seja, deve ser um ponto de equilíbrio hiperbólico de tipo $k \geq 1$, caso contrário a condição (2.8) do teorema anterior é violada.

Uma vez caracterizada as condições para que um ponto de equilíbrio esteja presente na fronteira da área de atração, sob as condições (A1)-(A4), pode-se prosseguir para a caracterização completa da fronteira da região de estabilidade expressa no próximo teorema.

Teorema 2.3.5 (Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade [19], [23]). *Para um sistema dinâmico autônomo, na forma (2.1), satisfazendo as hipóteses (A1)-(A4), sejam $\mathbf{x}_{u_i}$, $i=1,2,\dots$ pontos de equilíbrio instáveis (uep) na fronteira da região de estabilidade $\partial A(\mathbf{x}_s)$, de um asep $\mathbf{x}_s$. Então:*

$$\partial A(\mathbf{x}_s) = \bigcup_{\mathbf{x}_{u_i} \in E \cap \partial A(\mathbf{x}_s)} W^s(\mathbf{x}_{u_i}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Por algum tempo, desde a primeira proposta para a caracterização da fronteira da região de estabilidade, feita por Tsolas et al. em 1985 [24], acreditou-se que uma caracterização simplificada poderia ser obtida, a partir da aplicação do Teorema de Categorização de Baire [53], igualando a fronteira da região de estabilidade à união dos fechos das variedades estáveis dos pontos de equilíbrio hiperbólicos de tipo 1 presentes na fronteira.

Tal afirmativa provou-se incorreta, sendo o primeiro contra-exemplo reportado por Zaborszky, Huang e Zheng em 1988 [78]. Posteriormente descobriu-se que a união dos fechos das variedades estáveis dos pontos de equilíbrio hiperbólicos de tipo 1 presentes na fronteira é igual à fronteira do interior do fecho da região de estabilidade (ou região de quase-estabilidade).

A região de quase-estabilidade, $\tilde{A} = \text{int}(\overline{A})$, pode ser tratada como a região de interesse, do ponto de vista prático, ao se tratar o problema de estabilidade transitória de SEPs, uma vez que a fronteira da região de quase-estabilidade está contida na fronteira da região de estabilidade, como pode ser verificado na figura 2.4.

Analizando a figura 2.4 percebe-se que as partes da fronteira da região de estabilidade que não estão presentes na fronteira da região de quase-estabilidade, estão por sua vez no

Figura 2.4: Comparação entre as fronteiras da região de estabilidade e quase-estabilidade.

interior da região de quase-estabilidade. Assim, do ponto de vista prático, a trajetória de um SEP em falta, ao cruzar a fronteira da região de estabilidade nem sempre sai da região de estabilidade, ou seja, nem sempre ocorre instabilidade transitória no período pós-falta após o cruzamento da fronteira da região de estabilidade, o que, por outro lado, sempre é verdade ao se cruzar a fronteira da região de quase-estabilidade.

Assim, pode-se caracterizar as condições para que um ponto de equilíbrio hiperbólico pertença a região de quase-estabilidade, conforme apresentado na definição a seguir.

Definição 2.3.3 (Caracterização de um Ponto de Equilíbrio na Fronteira da Região de Quase-Estabilidade [79], [4]). *Um ponto de equilíbrio hiperbólico $\mathbf{x}_e$ pertence a fronteira da quase região de estabilidade $\partial\tilde{A}(\mathbf{x}_s) = \partial(\text{int}(\overline{A(\mathbf{x}_s)}))$ se:*

$$(i) \quad \mathbf{x}_e \in \partial A(\mathbf{x}_s) \quad (2.11)$$

$$(ii) \quad W^u(\mathbf{x}_e) \cap (A(\mathbf{x}_s))^c \neq \emptyset \quad (2.12)$$

sendo $A(\mathbf{x}_s)$ a região de estabilidade de um asep $\mathbf{x}_s$.

Com isso, obtém-se uma caracterização “simplificada” para a fronteira da região de quase-estabilidade em função das variedades estáveis dos pontos de equilíbrio hiperbólicos de tipo 1, presentes sobre a mesma, como está expresso no próximo teorema.

Teorema 2.3.6 (Caracterização Simplificada da Fronteira da Região de Quase-Estabilidade [79], [21]). *Para um sistema dinâmico autônomo, na forma (2.1), satisfazendo as hipóteses (A1)-(A4), sejam $\mathbf{x}_{u_i}^1$, $i=1,2,\dots$ pontos de equilíbrio instáveis (uep) de tipo 1 na fronteira da região de estabilidade $\partial A(\mathbf{x}_s)$, de um asep $\mathbf{x}_s$. Então:*

$$\partial\tilde{A}(\mathbf{x}_s) = \bigcup_{\mathbf{x}_{u_i}^1 \in E \cap \partial A(\mathbf{x}_s)} \overline{W^s(\mathbf{x}_{u_i}^1)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

sendo $\tilde{A}(\mathbf{x}_s) = \text{int}(\overline{A(\mathbf{x}_s)})$ a região de quase-estabilidade do asep $\mathbf{x}_s$.

Para fins práticos, como discutido anteriormente, a caracterização “simplificada” da região de quasi-estabilidade, $\tilde{A}(\mathbf{x}_s)$, pode ser explorada na análise de estabilidade transitória de SEPs, uma vez que o cruzamento de componentes da $\partial A(\mathbf{x}_s)$ que estejam no interior da $\tilde{A}(\mathbf{x}_s)$ não faz com que o sistema deixe a região de estabilidade do asep $\mathbf{x}_s$ [80] e portanto tais componentes não influem na avaliação do tempo crítico de abertura do sistema.

Muitos resultados que complementam a caracterização da fronteira da região de estabilidade, apresentada no teorema 2.3.5, podem ser encontrados em [18], [19] e [21], porém estes serão apresentados a medida que se tornarem necessários aos propósitos deste trabalho.

Na próxima seção deste trabalho, a teoria de sistemas singularmente perturbados será apresentada e tratada a fim de dar subsídios à caracterização da fronteira da região de estabilidade de sistemas com duas escalas de tempo. Os resultados de Tikhonov serão revistos a fim de propiciar o entendimento necessário à decomposição da dinâmica do sistema singularmente perturbado original na dinâmica dos subsistemas lento e rápido, culminando na caracterização das relações entre as fronteiras das regiões de estabilidade destes dois subsistemas com o sistema singularmente perturbado original.

2.4 A Teoria de Sistemas Singularmente Perturbados: Aplicações na Análise de Estabilidade

A teoria de sistemas singularmente perturbados surge nos estudos de Gradshtein e Tikhonov, na década de 1950 [81], para a análise qualitativa (estabilidade) de sistemas de EDOs com um parâmetro pequeno multiplicando algumas das equações que compõem o sistema. Tais estudos foram levados adiante por seus sucessores e encontraram aplicações em diversas áreas da ciência [81], [15], [82], [83].

A teoria de sistemas singularmente perturbados está intimamente ligada ao fato de que em um mesmo sistema coexistem dinâmicas em diferentes escalas de tempo, ou seja, variáveis cujo comportamento individual contribui significativamente para a alteração do comportamento global do sistema apenas em um pequeno intervalo de tempo (dinâmicas rápidas), ou após um período de tempo específico (dinâmicas lentas).

Ao explorar a existência de duas escalas de tempo, pode-se realizar, sob certas hipóteses, o desacoplamento do modelo de forma a capturar as dinâmicas de interesse em um determinado intervalo de tempo, bem como decompor o estudo pretendido no estudo de modelos reduzidos, diminuindo assim a ordem de complexidade do problema tratado e aumentando a velocidade na obtenção de resultados. A teoria de sistemas singularmente perturbados figura como uma das ferramentas mais empregadas no estudo qualitativo de sistemas dinâmicos complexos [4], [82].

Em um sistema elétrico de potência, a diferenciação entre as dinâmicas rápidas e lentas está intimamente relacionada ao fato de que neste sistema físico, diferentes tipos de equipamento necessitam de diferentes características de operação. Assim, classificando as variáveis de estado presentes nestes modelos, conforme a característica temporal de sua dinâmica, em dois grupos distintos: rápidas e lentas, pode-se utilizar a teoria de sistemas singularmente perturbados para estudar o comportamento dinâmico do sistema original (singularmente perturbado) através da definição de dois subsistemas auxiliares, sendo um correspondente às variáveis lentas e outro correspondente às variáveis rápidas.

Tais idéias tem sido muito empregadas no estudo de SEPs, seja na análise de estabilidade [84], na análise de coerência entre geradores [85], [86], [87], [88], [89], e na construção de modelos reduzidos [90], [48].

Neste trabalho, a teoria de sistemas singularmente perturbados, aplicada à análise de estabilidade transitória de modelos de SEPs com duas escalas de tempo, será explorada a fim de explicitar as relações entre as fronteiras de estabilidade do sistema singularmente perturbado e as fronteiras de estabilidade dos subsistemas lento e rápido associados. Espera-se com isso tornar a análise de estabilidade transitória mais eficiente e numericamente robusta ao explorar os subsistemas de ordem reduzida e melhores condicionados devido ao desacoplamento entre as escalas de tempo lenta e rápida das variáveis presentes no modelo original.

Inicialmente, considere o sistema singularmente perturbado Σ_ε , dado na forma (1.4):

$$\Sigma_\varepsilon : \begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = f_S(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \\ \varepsilon \dot{\mathbf{z}} = f_F(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \end{cases} \quad (2.14)$$

sendo $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$, as funções $f_S(\cdot)$ e $f_F(\cdot)$ são de classe $\mathcal{C}^1$, e ε um parâmetro real, positivo e pequeno do sistema.

Neste trabalho, admite-se conhecida a existência das escalas de tempo lenta e rápida do sistema dinâmico sob análise, de modo que como hipótese admite-se conhecida a separação das variáveis de estado $\mathbf{x} = (\mathbf{w}, \mathbf{z})$, de modo que $f(\cdot) = (f_S(\cdot), f_F(\cdot))$. Na literatura contemporânea existem métodos numéricos, baseados na teoria de sistemas singularmente perturbados, capazes de realizar iterativamente a separação das variáveis rápidas e lentas na confecção de modelos reduzidos, [86], [84], [47], [48].

Considere E_ε o conjunto dos pontos de equilíbrio de Σ_ε , $\varphi_\varepsilon(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0, t)$ a trajetória de Σ_ε iniciando em $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0)$ e seja $(\mathbf{w}_{s(\varepsilon)}, \mathbf{z}_{s(\varepsilon)})$ um asep de Σ_ε , então a região de estabilidade deste ponto pode ser definida como:

$$A_\varepsilon(\mathbf{w}_{s(\varepsilon)}, \mathbf{z}_{s(\varepsilon)}) = \{(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \varphi_\varepsilon(\mathbf{w}, \mathbf{z}, t) \rightarrow (\mathbf{w}_{s(\varepsilon)}, \mathbf{z}_{s(\varepsilon)}) \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$$

O principal interesse das análises que se seguem é definir as relações entre a fronteira

da região de estabilidade do sistema Σ_ε , $\partial A_\varepsilon(\mathbf{w}_{\mathbf{s}(\varepsilon)}, \mathbf{z}_{\mathbf{s}(\varepsilon)})$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e as fronteiras de estabilidade dos subsistemas lento e rápido definidos a seguir.

O sistema lento pode ser formalmente definido, a partir do sistema Σ_ε , tomando $\varepsilon = 0$ (1.5):

$$\Sigma_0 : \begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = f_S(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \\ 0 = f_F(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \end{cases} \quad (2.15)$$

Considere E_0 o conjunto dos pontos de equilíbrio de Σ_0 , $\varphi_0(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0, t)$ a trajetória de Σ_0 iniciando em $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0)$ e seja $(\mathbf{w}_{\mathbf{s}(0)}, \mathbf{z}_{\mathbf{s}(0)})$ um asep de Σ_ε , então a região de estabilidade deste ponto pode ser definida como:

$$A_0(\mathbf{w}_{\mathbf{s}(0)}, \mathbf{z}_{\mathbf{s}(0)}) = \{(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \varphi_0(\mathbf{w}, \mathbf{z}, t) \rightarrow (\mathbf{w}_{\mathbf{s}(0)}, \mathbf{z}_{\mathbf{s}(0)}) \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$$

A equação algébrica $0 = f_F(\mathbf{w}, \mathbf{z})$ restringe a dinâmica do sistema lento Σ_0 ao conjunto de restrição:

$$\Gamma = \{(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : 0 = f_F(\mathbf{w}, \mathbf{z})\} \quad (2.16)$$

Assumindo que $\rho([D_{\mathbf{w}}(f_F) \ D_{\mathbf{z}}(f_F)]) = m$, sendo $\rho(\cdot)$ o posto da matriz em questão, o teorema da Formal Local para Submersões [77] implica que Γ é uma variedade suave n -dimensional em $\mathbb{R}^{n+m}$ [44].

Tipicamente Γ é uma variedade composta de várias componentes conexas disjuntas, assim, considere $NH \subset \Gamma$ como sendo o conjunto de pontos não hiperbólicos de Γ , ou seja, o conjunto de pontos de Γ onde $D_{\mathbf{z}}(f_F)$ possui pelo menos um autovalor sobre o eixo imaginário. O conjunto NH é tipicamente uma variedade de dimensão $n - 1$ que separa cada componente conexa de Γ em componentes conexas menores Γ_i , e portanto tem-se que [44]:

$$\Gamma \setminus NH = \bigcup_i \Gamma_i \quad (2.17)$$

O conjunto de pontos onde $D_{\mathbf{z}}(f_F)$ é singular está contido em NH . Dito isto, é importante verificar que sobre o conjunto de pontos não singulares $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in \Gamma \setminus NH$, ou seja, nos pontos onde $D_{\mathbf{z}}(f_F)$ é não singular, o conjunto de equações algébrico diferenciais induz um campo vetorial sobre a variedade Γ [18], de modo que o mesmo pode ser facilmente exibido pela aplicação do Teorema da Função Implícita [15].

De modo geral, suponha que a origem é um ponto de equilíbrio do sistema lento Σ_0 e que a matriz Jacobiana $D_{\mathbf{z}}(f_F)$ seja não singular na origem¹¹, assim pelo Teorema da

¹¹Tais suposições não alteram a abrangência dos resultados que se seguem, haja visto que tanto para sistemas autônomos como para não autônomos qualquer ponto de equilíbrio pode ser trasladado para a origem modificando-se o sistema de coordenadas adotado [15].

Função Implícita [15], existe uma única solução local para a equação algébrica $f_{\mathcal{F}}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \mathbf{0}$, na forma $\mathbf{z} = h(\mathbf{w})$, satisfazendo $f_{\mathcal{F}}(\mathbf{w}, h(\mathbf{w})) = \mathbf{0}$ com $h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Assim, $f_{\mathcal{F}}(\mathbf{w}) = 0$ define uma variedade de dimensão n , $M_0 = \{(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \mathbf{z} = h(\mathbf{w}), \mathbf{w} \in D_1\}$, sendo $D_1 \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto conexo que contém a origem [18].

Logo, o sistema lento pode ser escrito nas vizinhanças da origem como:

$$\Sigma_{red} : \begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = f_S(\mathbf{w}, h(\mathbf{w})) \\ \mathbf{z} = h(\mathbf{w}) \end{cases} \quad (2.18)$$

Considere E_{red} o conjunto de pontos de equilíbrio do sistema Σ_{red} , $\varphi_{red}(\mathbf{w}_0, h(\mathbf{w}_0), t)$ a trajetória de Σ_{red} iniciando em $(\mathbf{w}_0, h(\mathbf{w}_0))$ e seja $(\mathbf{w}_{s(red)}, h(\mathbf{w}_{s(red)}))$ um asep de Σ_{red} , então a região de estabilidade deste ponto pode ser definida como:

$$A_{red}(\mathbf{w}_{s(red)}, h(\mathbf{w}_{s(red)})) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \varphi_{red}(\mathbf{w}, h(\mathbf{w}), t) \rightarrow (\mathbf{w}_{s(red)}, h(\mathbf{w}_{s(red)})) \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$$

Com o objetivo de explorar as escalas de tempo rápidas contidas em Σ_{ε} , defina a escala de tempo rápida $\tau \stackrel{def}{=} \frac{t}{\varepsilon}$, de modo que o sistema rápido tome a forma (1.6):

$$\Pi_{\varepsilon} : \begin{cases} \frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = \varepsilon f_S(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \\ \frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = f_{\mathcal{F}}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \end{cases} \quad (2.19)$$

Considere $\phi_{\varepsilon}(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0, \tau)$ a trajetória de Π_{ε} iniciando em $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0)$. É imediato que $\phi_{\varepsilon}(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0, \tau) = \varphi_{\varepsilon}(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0, \varepsilon\tau)$.

Com isso, pode-se definir, a partir do sistema Π_{ε} , o sistema rápido Π_0 fazendo $\varepsilon = 0$:

$$\Pi_0 : \begin{cases} \frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = 0 \\ \frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = f_{\mathcal{F}}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \end{cases} \quad (2.20)$$

Assim, as variáveis dinâmicas lentas ($\mathbf{w}$) são consideradas “congeladas”, assim o sistema rápido Π_0 pode ser pensado como uma família de sistemas rápidos de fronteira $\Pi_{BLS}(\mathbf{w})$ na forma:

$$\Pi_{BLS}(\mathbf{w}^*) : \left\{ \frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = f_{\mathcal{F}}(\mathbf{w}^*, \mathbf{z}) \right. \quad (2.21)$$

sendo $\mathbf{w}^*$ a variável dinâmica lenta “congelada”.

Considere $E_{\Pi_{BLS}(\mathbf{w}^*)}$ o conjunto dos pontos de equilíbrio do sistema $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}^*)$ com $\mathbf{w} = \mathbf{w}^*$ fixo, $\phi_0(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0, \tau)$ a trajetória de Π_0 iniciando em $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0)$, e seja $(\mathbf{w}^*, \mathbf{z}_{s(F)})$ um asep de $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}^*)$, então a região de estabilidade deste ponto de equilíbrio pode ser

definida como:

$$A_{BLS}(\mathbf{w}^*, \mathbf{z}_{\mathbf{s}(\mathbf{F})}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m : \phi_0(\mathbf{w}^*, \mathbf{z}, t) \rightarrow (\mathbf{w}^*, \mathbf{z}_{\mathbf{s}(\mathbf{F})}) \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$$

Sob certas condições de estabilidade (ver Teorema de Tikhonov (2.4.1)), pode-se esperar que as dinâmicas rápidas $\mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{w}^*, \mathbf{z}_0, t)$ converjam para a trajetória do sistema em regime permanente (sistema lento reduzido) $\mathbf{z}_{red}(t) = h(\mathbf{w}(t))$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, algumas vezes é conveniente utilizar a seguinte mudança de coordenadas [18], [15]:

$$\tilde{\mathbf{z}} \stackrel{def}{=} \mathbf{z} - h(\mathbf{w}) \quad (2.22)$$

O sistema rápido Π_ε , nestas novas coordenadas, é descrito na seguinte forma:

$$\Pi_\varepsilon : \begin{cases} \frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = \varepsilon f_S(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{z}} + h(\mathbf{w})) \\ \frac{d\tilde{\mathbf{z}}}{d\tau} = f_F(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{z}} + h(\mathbf{w})) - \varepsilon \frac{\partial h(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} f_S(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{z}} + h(\mathbf{w})) \end{cases} \quad (2.23)$$

Com isso, o sistema rápido de fronteira $\Pi_{BLS}(\mathbf{w})$ é obtido fazendo $\varepsilon = 0$:

$$\Pi_{BLS}(\mathbf{w}^*) : \left\{ \frac{d\tilde{\mathbf{z}}}{d\tau} = f_F(\mathbf{w}^*, \tilde{\mathbf{z}} + h(\mathbf{w})) \right\} \quad (2.24)$$

Desta forma, uma vez que a continuidade de $D_{\mathbf{z}}(f_F)$ garante que o número de autovalores de $D_{\mathbf{z}}(f_F)$ com parte real positiva é constante em cada componente conexa Γ_i de Γ . Assim, faz sentido definir o tipo de estabilidade de cada componente Γ_i com respeito à família de subsistemas rápidos de fronteira $\Pi_{BLS}(\mathbf{w})$.

Definição 2.4.1 (Tipo de uma componente conexa Γ_i). *A componente Γ_i é uma componente de tipo k de Γ se a matriz $D_{\mathbf{z}}(f_F)$ avaliada em qualquer ponto de Γ_i tem k autovalores com parte real positiva e $m - k$ autovalores com parte real negativa.*

Logo, se todos os autovalores de $D_{\mathbf{z}}(f_F)$, calculados nos pontos de uma certa componente conexa Γ_i , possuem parte real negativa, então esta componente Γ_i é dita estável, ou instável em caso contrário.

Observe ainda que, se $(\mathbf{w}^*, \mathbf{z}^*)$ é um ponto qualquer em uma componente tipo k de Γ , então $\mathbf{z}^*$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico de tipo k para o sistema rápido de fronteira $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}^*)$ [18], [2], [3].

Tendo, então, apresentado a decomposição do sistema singularmente perturbado Σ_ε , nas escalas de tempo lenta (Σ_0) e rápida ($\Pi_0 / \Pi_{BLS}(\mathbf{w})$), apresenta-se na sequência deste trabalho o estudo entre a resposta dinâmica do sistema original e a resposta dinâmica composta dos subsistemas lento e rápido associados ao mesmo, de forma a exibir as características que determinam a importância de cada subsistema na resposta do sistema original.

Primeiramente é desejável verificar que a dinâmica do sistema singularmente perturbado, com duas escalas de tempo, pode ser representado como a dinâmica composta dos subsistemas lento e rápido associados. Um dos principais resultados na análise de sistemas singularmente perturbados se deve a Tikhonov e estabelece tal relação entre as trajetória do sistema singularmente perturbado Σ_ε (2.14), e a trajetória dos subsistemas rápido de fronteira $\Pi_{BLS}(\mathbf{w})$ (2.24) e lento reduzido $\Sigma_{(red)}$ (2.18).

Teorema 2.4.1 (Teorema de Tikhonov em intervalos de tempo finitos [15]). *Considere o sistema singularmente perturbado Σ_ε (2.14), e seja $\mathbf{z} = h(\mathbf{w})$ uma solução de equilíbrio isolada de $f_{\mathcal{F}}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \mathbf{0}$. Para todo*

$$[\mathbf{w}, \mathbf{z} - h(\mathbf{w}), \varepsilon, t] \in D_{\mathbf{w}} \times D_{\tilde{\mathbf{z}}} \times [0, \varepsilon_0] \times [0, t_1]$$

onde $D_{\mathbf{w}} \subset \mathbb{R}^n$ e $D_{\tilde{\mathbf{z}}} \subset \mathbb{R}^m$, são domínios nos quais $D_{\mathbf{w}}$ é convexo¹² e $D_{\tilde{\mathbf{z}}}$ contém a origem, assuma que as seguintes condições são satisfeitas:

- As funções f_S , $f_{\mathcal{F}}$, suas derivadas parciais com respeito a $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \varepsilon)$, e a primeira derivada parcial de $f_{\mathcal{F}}$ com respeito a variável t são contínuas. As funções $h(\mathbf{w})$ e a matriz Jacobiana $D_{\mathbf{z}}(f_{\mathcal{F}})$ tem suas primeiras derivadas parciais com relação aos seus argumentos contínuas. As condições iniciais do sistema Σ_ε são funções contínuas do parâmetro ε ;
- O subsistema lento reduzido Σ_{red} (2.18) possui uma única solução $\mathbf{w}_{red}(t) \in S_{\mathbf{w}}$, sendo $S_{\mathbf{w}}$ um subconjunto compacto de $D_{\mathbf{w}}$;
- A origem é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável¹³ do sistema rápido de fronteira $\Pi_{BLS}(\mathbf{w})$ (2.24), uniformemente em $(\mathbf{w}, t)$. Seja $A_{BLS}(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{z}}_s) \subset D_{\tilde{\mathbf{z}}}$ a região de estabilidade de (2.24) e $S_{\tilde{\mathbf{z}}}$ um subconjunto compacto de $A_{BLS}(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{z}}_s)$.

Então, existe $\varepsilon^* > 0$ tal que para toda condição inicial $z_\varepsilon - h(\mathbf{w}_0, t_0) \in A_{BLS}(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{z}}_s)$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, tal que o sistema singularmente perturbado Σ_ε (2.14) possui uma única solução $(\mathbf{w}_\varepsilon(t), \mathbf{z}_\varepsilon(t))$ em $[t_0, t_1]$ e as aproximações:

$$\mathbf{w}_\varepsilon(t) - \mathbf{w}_{red}(t) = O(\varepsilon) \quad (2.25)$$

$$\mathbf{z}_\varepsilon(t) - h(\mathbf{w}_{red}(t)) - \tilde{\mathbf{z}}(\tau) = O(\varepsilon) \quad (2.26)$$

¹²Um subconjunto X de um espaço vetorial chama-se convexo se dado dois pontos quaisquer a, b então $[a, b] \subset X$, ou seja, o segmento de reta que liga estes dois pontos está inteiramente contido em X [52].

¹³O ponto de equilíbrio $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$ do sistema rápido de fronteira $\Pi_{BLS}(\mathbf{w})$ (2.24) é exponencialmente estável, uniformemente em $(\mathbf{w}, t) \in D_{\mathbf{w}} \times [0, t_1]$, se existem constantes κ , γ e ρ_0 tais que as soluções deste sistema satisfazem:

$$\|\tilde{\mathbf{z}}(\tau)\| \leq \kappa \|\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{0})\| e^{(-\gamma\tau)}$$

para $\forall \|\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{0})\| < \rho_0, \forall (\mathbf{w}, t) \in D_{\mathbf{w}} \times [0, t_1], \forall \tau \geq 0$ [15].

são uniformes no intervalo $[t_0, t_1]$, sendo $\tilde{\mathbf{z}}(\tau)$ a solução do sistema rápido de fronteira $\Pi_{BLS}(\mathbf{w})$ (2.24).

Além disso, dado $t^* > t_0$, existe $\varepsilon^{**} \leq \varepsilon^*$ tal que:

$$\mathbf{z}_\varepsilon(t) - h(\mathbf{w}_{\text{red}}(t)) = O(\varepsilon) \quad (2.27)$$

é uniforme no intervalo $[t^*, t_1]$ sempre que $\varepsilon < \varepsilon^{**}$.

O teorema de Tikhonov estabelece, portanto, uma relação assintótica entre a dinâmica do sistema singularmente perturbado e as dinâmicas dos sistemas lento e rápido associados, de modo a tornar possível o estudo qualitativo da dinâmica do sistema original, com duas escalas de tempo, de maior ordem, a partir dos subsistemas lento e rápido associados, de menores ordens, como será visto adiante neste trabalho.

É importante mencionar também que o teorema de Tikhonov é apresentado na literatura vigente em diversas formas, dependendo do fim a que se presta [82], bem como pode ser estendido para intervalos de tempo infinitos sob hipóteses adicionais, como demonstrado por Hoppensteadt em 1966 [91].

Na próxima seção deste trabalho, os principais resultados para a caracterização da fronteira da região de estabilidade de sistemas singularmente perturbados serão apresentados e fim de prover os subsídios necessários ao desenvolvimento do método CUEP para modelos de SEPs com duas escalas de tempo.

2.4.1 Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade em Sistemas com Duas Escalas de Tempo

Concluída a apresentação da decomposição do sistema singularmente perturbado Σ_ε (Π_ε) nos subsistemas lento Σ_0 e rápido Π_0 ($\Pi_{BLS}(\mathbf{w})$) associados, a próxima etapa deste trabalho será caracterizar as relações estáticas (tipo e localização dos pontos de equilíbrio hiperbólicos) e dinâmicas (presença ou não na fronteira da região de estabilidade) entre os pontos de equilíbrio do sistema singularmente perturbado e de seus subsistemas rápido e lento associados.

A existência de uma função energia para um sistema dinâmico pode fornecer informações importantes sobre o comportamento assintótico das soluções sobre a fronteira da região de estabilidade [3], [19], [23]. Logo, tais funções auxiliares tornam-se de grande valia na caracterização e estimativa da região de estabilidade de sistemas dinâmicos.

A próxima definição adapta o conceito de função energia para fins de caracterização da região de estabilidade do sistema singularmente perturbado Σ_ε , bem como para estabelecer suas relações com os subsistemas lento e rápido (Σ_0 / $\Pi_{BLS}(\mathbf{w})$) associados.

Definição 2.4.2 (Família de Funções Energia para Σ_ε). : Uma família de funções escalares $V_\varepsilon: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, é uma família de funções energia de Σ_ε (2.14)

se existe $\varepsilon^* > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ as seguintes condições são satisfeitas: (i) $\dot{V}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(\mathbf{w}, \mathbf{z}, t)) \leq 0$, (ii) se $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \notin E_\varepsilon$, então o conjunto $\{t \in \mathbb{R} : \dot{V}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(\mathbf{w}, \mathbf{z}, t)) = 0\}$ tem medida zero sobre $\mathbb{R}$ e (iii) se $V_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(\mathbf{w}, \mathbf{z}, t))$ é limitada sobre a trajetória do sistema $\varphi_\varepsilon(\mathbf{w}, \mathbf{z}, t)$, então $\varphi_\varepsilon(\mathbf{w}, \mathbf{z}, t)$ também é limitada.

Suponha que o sistema singularmente perturbado Σ_ε satisfaça as seguintes condições:

- as hipóteses (A1)-(A4) são satisfeitas para um parâmetro ε suficientemente pequeno;
- o sistema possua uma família de funções energia no sentido da definição (2.4.2).

Desta maneira, é possível caracterizar a fronteira da região de estabilidade de um determinado asep do sistema singularmente perturbado Σ_ε conforme apresentado no teorema 2.3.5. Suposições semelhantes podem ser adotadas para realizar a caracterização da fronteira da região de estabilidade nos subsistemas lento Σ_0 ¹⁴ e rápido $\Pi_{BLS}(\mathbf{w})$ associados, de modo a permitir que as relações entre as fronteiras de estabilidade destes subsistemas e do sistema original sejam exibidas [18], [3], [93].

Com o objetivo de caracterizar as relações existentes entre os pontos de equilíbrio do sistema singularmente perturbado Σ_ε e de seus subsistemas lento Σ_0 e rápido $\Pi_{BLS}(\mathbf{w})$ associados, são apresentados três teoremas, cada um dos quais responsável por caracterizar tais relações tanto do ponto de vista de suas propriedades estáticas (tipo e localização dos pontos de equilíbrio hiperbólicos) e dinâmicas (presença ou não na fronteira da região de estabilidade) [18], [13].

Teorema 2.4.2 (Caracterização dos pontos de equilíbrio: $\Sigma_0 \rightarrow \Sigma_\varepsilon$ [18], [2], [94]). *Seja um ponto de equilíbrio hiperbólico de tipo j , $(\mathbf{w}_e, \mathbf{z}_e)$, de Σ_0 em uma componente Γ_i de tipo k de Γ , então existe $\varepsilon^* > 0$ tal que $(\mathbf{w}_e, \mathbf{z}_e)$ é um ponto de equilíbrio de tipo $j + k$ de Σ_ε para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$.*

O teorema 2.4.2 exhibe parcialmente a relação estática entre os pontos de equilíbrio do subsistema lento Σ_0 e o sistema singularmente perturbado Σ_ε , pois, deve-se fazer menção ao fato de que o teorema evidencia apenas a relação entre pontos de equilíbrio de Σ_0 e pontos de equilíbrio de Σ_ε , mas a relação inversa pode não ser sempre verdadeira.

No entanto, sobre uma componente estável Γ_s , admitindo hipóteses amenas, é possível demonstrar que todo ponto de equilíbrio hiperbólico de tipo k do sistema singularmente perturbado Σ_ε é também um ponto de equilíbrio hiperbólico de tipo k do seu subsistema lento Σ_0 associado, como apresentado no corolário a seguir.

Corolário 2.4.1 (Caracterização dos pontos de equilíbrio em Γ_s : $\Sigma_\varepsilon \rightarrow \Sigma_0$ [95]). *Seja $(\mathbf{w}_e, \mathbf{z}_e)$ um ponto de equilíbrio hiperbólico de tipo k de Σ_ε , pertencente a uma componente*

¹⁴É importante fazer menção ao fato de que o subsistema lento Σ_0 é um sistema dinâmico algébrico-diferencial e portanto mais complexo que o sistema original singularmente perturbado Σ_ε , o que implica na possível existência de pontos semi-singulares, pseudo-equilíbrios, bem como superfícies singulares na fronteira de estabilidade deste tipo de sistema [18], [92], [44].

estável Γ_s da variedade de restrição Γ , para todo ε suficientemente pequeno. Se para todo ε suficientemente pequeno existe um número real $\alpha > 0$ tal que $\|Re(\lambda)\| > \alpha$ para todo autovalor λ da matriz Jacobiana do sistema Σ_ε , calculada em $(\mathbf{w}_e, \mathbf{z}_e)$, então $(\mathbf{w}_e, \mathbf{z}_e)$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico de tipo k de Σ_0 .

Para o prosseguimento das análises, assume-se também que o sistema lento Σ_0 satisfaz a seguinte hipótese:

- todos os pontos de equilíbrio de Σ_0 são hiperbólicos.

A hipótese anterior encontra seu respaldo no fato de que a mesma é genérica no universo dos sistemas dinâmicos. Assim, esta suposição não introduz restrições severas na análise a ser realizada adiante neste trabalho.

Teorema 2.4.3 (Caracterização dos pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade de Σ_ε e Σ_0 em uma componente conexa Γ_s [2], [94]). *Suponha que $(\mathbf{w}_s, \mathbf{z}_s)$ e $(\mathbf{w}_u, \mathbf{z}_u)$ são respectivamente um asep e um uep de Σ_0 em uma componente estável Γ_s , o sistema singularmente perturbado Σ_ε possua uma família de funções energia, no sentido da definição (2.4.2), e seus pontos de equilíbrio são isolados. Então, existe um $\varepsilon^* > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, o uep $(\mathbf{w}_u, \mathbf{z}_u)$ está na fronteira de estabilidade $\partial A_0(\mathbf{w}_s, \mathbf{z}_s)$ do sistema Σ_0 , se e somente se o uep $(\mathbf{w}_u, \mathbf{z}_u)$ está na fronteira de estabilidade $\partial A_\varepsilon(\mathbf{w}_s, \mathbf{z}_s)$ do sistema Σ_ε .*

O teorema 2.4.3 estabelece que, para $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, todo uep na fronteira de estabilidade do sistema lento Σ_0 , sobre uma componente conexa Γ_s , está também sobre a fronteira de estabilidade do sistema singularmente perturbado Σ_ε , como ilustrado na figura 2.5.

Figura 2.5: ilustração da relação entre os pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade dos sistemas Σ_0 (a) e Σ_ε (b) sobre uma componente conexa Γ_s [2].

Porém, o mesmo não estabelece completamente a caracterização das relações dinâmicas dos equilíbrios presentes na fronteira do sistema singularmente perturbado Σ_ε , uma vez que um uep de tipo 1 pode estar contido em uma componente instável Γ_u de Γ . Neste sentido, o próximo teorema completa a caracterização destas relações, explicitando a relação existente entre um uep de tipo 1 em uma componente Γ_u de Γ e os pontos de equilíbrio dos subsistemas lento e rápido.

Teorema 2.4.4 (Caracterização entre os pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade de Σ_ε , Σ_0 e $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}^*)$ em uma componente conexa Γ_u [2], [95]). *Considere o sistema Σ_ε e os subsistemas associados $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}^*)$ e Σ_0 satisfazendo a hipótese de que todos os seus pontos de equilíbrio são hiperbólicos. Suponha que o sistema singularmente perturbado Σ_ε possua uma família de funções energia, no sentido da definição (2.4.2), e seja $(\mathbf{w}_s, \mathbf{z}_s)$ um asep do sistema Σ_0 , em uma componente estável Γ_s e $(\mathbf{w}_u, \mathbf{z}_u)$ um asep do sistema Σ_0 , em uma componente instável de tipo 1 Γ_u . Suponha também que para todo ε suficientemente pequeno existe um número real $\alpha > 0$ tal que $\|Re(\lambda)\| > \alpha$ para todo autovalor λ da matriz Jacobiana do sistema Σ_ε , calculada em $(\mathbf{w}_s, \mathbf{z}_s)$ e $(\mathbf{w}_u, \mathbf{z}_u)$, e que $(\mathbf{w}_u, \mathbf{z}^*)$ está na região de estabilidade $A_0(\mathbf{w}_s, \mathbf{z}_s) \subset \Gamma_s$, e $(\mathbf{w}_u, \mathbf{z}_u)$ está na fronteira da região de estabilidade $\partial A_{BLS}(\mathbf{w}_u, \mathbf{z}^*)$ do sistema rápido $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}_u)$, então existe um $\varepsilon^* > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, $(\mathbf{w}_u, \mathbf{z}_u)$ é um uep de tipo 1 de Σ_ε na fronteira de estabilidade $\partial A_\varepsilon(\mathbf{w}_s, \mathbf{z}_s)$ de Σ_ε .*

A figura 2.6 apresenta a ilustração das hipóteses do teorema 2.4.4 e da relação, estabelecida pelo mesmo, entre as fronteiras da região de estabilidade dos sistemas Σ_ε , Σ_0 e $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}^*)$ em uma componente conexa Γ_u .

Figura 2.6: (a) ilustração das hipóteses sobre os pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade de Σ_ε , Σ_0 e $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}^*)$ em uma componente conexa Γ_u (b) ilustração da relação entre os pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade de Σ_ε , Σ_0 e $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}^*)$ em uma componente conexa Γ_u [2].

É válido mencionar que, no teorema 2.4.4, a hipótese de hiperbolicidade para os pontos de equilíbrio do sistema lento Σ_0 pode ser relaxada, sendo necessária apenas sobre o asep

e o uep de interesse, sem alterações significativas em sua demonstração. Porém, faz-se novamente menção que a exigência de hiperbolicidade não é uma restrição severa, uma vez que tal característica é genérica no universo dos sistemas dinâmicos.

Assim, tem-se uma visão geral das possíveis relações estáticas e dinâmicas entre os diversos tipos de pontos de equilíbrio na fronteira do sistema singularmente perturbado Σ_ε e de seus subsistemas associados Σ_0 e $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}^*)$. O próximo passo para alcançar o objetivo deste trabalho é explorar a relação entre as fronteiras da região de estabilidade de sistemas singularmente perturbados e seus subsistemas lento e rápido associados, na síntese de um método direto CUEP para modelos de SEPs com duas escalas de tempo (TTS-CUEP) capaz de fornecer resultados menos conservadores para o problema de estabilidade transitória, bem como algoritmos mais eficientes para o cálculo do CUEP (TTS-BCU).

No próximo capítulo deste trabalho, o método direto CUEP para análise de estabilidade transitória e o algoritmo numérico BCU para o cálculo do CUEP, serão apresentados e discutidos, frente a caracterização da fronteira da região de estabilidade aqui exposta, bem como suas principais dificuldades e potencialidades apontadas e comentadas.

Capítulo 3

Métodos Diretos Aplicados à Análise de Estabilidade Transitória de SEPs

3.1 Introdução

Neste capítulo, o método CUEP para análise de estabilidade transitória de sistemas de energia elétrica será apresentado e discutido segundo a perspectiva dada pela caracterização da região de estabilidade (e de sua fronteira) apresentada. O algoritmo numérico BCU será também apresentado e discutido, segundo esta mesma perspectiva, uma vez que este algoritmo torna possível o cálculo do CUEP do sistema original, através da definição de um sistema artificial reduzido associado. As principais dificuldades no cálculo do CUEP serão apontadas e as soluções propostas na literatura vigente serão apontadas.

3.2 O Método Direto CUEP para Análise de Estabilidade Transitória de SEPS

O problema de estabilidade transitória é comumente dividido em três intervalos de tempo bem definidos quanto à ocorrência de uma perturbação (falta) sobre o sistema: pré-falta, falta e pós-falta. Em cada um destes intervalos o SEP é modelado por um conjunto de equações distinto, uma vez que mudanças topológicas no sistema de transmissão, quando da ocorrência e respectiva eliminação da falta, afetam os parâmetros do sistema de maneiras distintas.

O resultado dos estudos de estabilidade transitória consistem em determinar se o tempo de atuação do sistema de proteção, t_{ab} , de um sistema de potência é menor ou maior que o tempo crítico de abertura, t_{cr} , para uma determinada contingência sobre o mesmo, ou seja, se a proteção é suficientemente rápida para impedir a instabilização do sistema no período pós-falta. Este resultado pode ser entendido (modelado) como a quantização do tempo necessário para que a trajetória em falta do sistema de potência abandone a região

de estabilidade do asep (ponto de operação) pós-falta.

Dito isto, verifica-se que todos os métodos diretos (energéticos) propostos na literatura para a análise de estabilidade transitória de SEPs, apresentam de uma ou outra forma as seguintes etapas conceituais [25]:

1. Uma estimativa da fronteira região de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema pós-falta é obtida na forma de uma curva de nível da função energia (ou função de Lyapunov): $\Omega_{V_{cr}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} : V(\mathbf{x}) < V_{cr}\}$;
2. A equação diferencial que descreve o sistema em falta é numericamente resolvida até que a função energia do sistema, $V(\mathbf{x})$, atinja o valor crítico V_{cr} . O tempo $\hat{t}_{cr}$ em que essa situação ocorre é uma estimativa do verdadeiro tempo crítico de abertura para a contingência sob estudo;
3. Por fim, se $t_{ab} < t_{cr}$ então o sistema pós-falta é transitoriamente estável, ou seja, as máquinas síncronas conectadas ao SEP mantêm o sincronismo entre si, caso contrário o sistema pós-falta é transitoriamente instável.

O método CUEP é um método direto que tem como objetivo principal garantir o conservadorismo e aumentar a precisão das análises de estabilidade transitória, de modo a estimar o tempo crítico de abertura com uma menor imprecisão, tornando relevante as informação contidas na trajetória do sistema em falta. Este método visa estimar localmente a fronteira da região de estabilidade, próximo ao ponto onde a trajetória do sistema em falta cruza a mesma, de forma que o CUEP pode ser definido como apresentado a seguir.

Definição 3.2.1. *O ponto de equilíbrio instável de controle (CUEP) para uma dada trajetória em falta, é o uep cuja variedade estável (W_s) contém o ponto onde a trajetória em falta sustentada intercepta a fronteira da região de estabilidade do asep pós-falta*

É importante mencionar que o método CUEP foi extensivamente estudado na literatura moderna, após a década de 1980, tendo suas bases teóricas expostas e extensivamente discutida desde então. Como referência para o estudo da fundamentação matemática do método CUEP sugere-se [4], onde as principais questões sobre existência e unicidade do CUEP são fundamentadas e discutidas em detalhes.

O método direto CUEP é conceitualmente composto pelas 4 etapas a seguir:

1. Determine o CUEP para a trajetória do sistema em falta;
2. Defina o valor da energia crítica V_{cr} como sendo o valor da função energia avaliada no CUEP: $V_{cr} = V(\mathbf{x}_{CUEP})$;
3. Calcule o valor da função energia no instante de eliminação da falta (V_{ab}) utilizando a trajetória do sistema em falta;

4. Se $\mathcal{V}_{ab} < \mathcal{V}_{cr}$ então o sistema permanece transitoriamente estável no pós-falta, caso contrário, o mesmo pode tornar-se instável.

É importante observar que o método direto CUEP, em seu primeiro passo estabelece a tarefa de calcular o CUEP, porém o mesmo não especifica como fazê-lo. Ao longo dos anos diversas foram as propostas para calcular o CUEP (muitas destas propostas estão discutidas em [12], [26], [27]), o algoritmo numérico BCU [34] está entre estas, e será discutido em detalhes na próxima seção deste trabalho.

Uma característica a ser notada no método CUEP é que o mesmo fornece apenas aproximações locais da fronteira da região de estabilidade, não estando o conjunto de nível da função energia dado por $\{\mathbf{x} \in \Omega : V(\mathbf{x}) < V(\mathcal{V}_{cr})\}$ totalmente contido na região de estabilidade, como pode ser observado na figura 3.1.

Outros métodos, tal como o método *Closest Unstable Equilibrium Point* [96], fornecem estimativas da região da estabilidade através do conjunto de nível da função energia, tomando como valor crítico, $\mathcal{V}_{cr}$, o menor valor da função energia quando avaliada sobre todos os pontos de equilíbrio de tipo 1 presentes na fronteira da região de estabilidade. Tal método garante que o conjunto de nível da função energia obtido esteja inteiramente contido no interior da região de estabilidade (conforme ilustra a figura 3.1), porém tal estimativa exibe em muitos casos um conservadorismo excessivo na determinação do tempo crítico de abertura e exige um esforço computacional elevado no cálculo de todos os pontos de equilíbrio de tipo 1 na fronteira da região de estabilidade.

A figura 3.1 apresenta uma comparação ilustrativa entre as estimativas obtidas pelo método *Closest Unstable Equilibrium Point* e pelo método CUEP, onde pode-se observar a diminuição do conservadorismo na estimativa do tempo crítico de abertura pelo método CUEP, uma vez que o mesmo aproxima localmente a fronteira de estabilidade na direção da trajetória em falta do SEP.

Neste ponto, é válido fazer menção que o método CUEP, associado ao algoritmo numérico BCU que será apresentado na próxima seção deste trabalho, é reconhecidamente o melhor método direto para análise de estabilidade transitória em SEPs [32], provando ser extremamente adequado à seleção de contingências (classificadores BCU [97], [40]) na análise de estabilidade transitória em tempo-real de sistemas de energia elétrica, quando associado à simulação computacional, no domínio do tempo, do modelo completo do SEP [41].

3.3 O Algoritmo Numérico BCU para o Cálculo do CUEP: Discussões Teóricas e Implementações

O cálculo do CUEP do sistema de equações diferenciais original que modelam o SEP, embora possível através do uso da definição (3.2.1), é uma tarefa com alto custo com-

Figura 3.1: Comparação entre as estimativas fornecidas pelos métodos CUEP e *Closest Unstable Equilibrium Point*.

putacional, uma vez que a identificação da fronteira da região de estabilidade do sistema pós-falta só pode ser realizada através da simulação (integração numérica) do conjunto completo de equações que modelam o sistema pós-falta, e haja visto que tal tarefa deve ser realizada sobre os pontos que compõem a trajetória em falta do SEP, com o objetivo de determinar o correto ponto onde a mesma cruza a fronteira de estabilidade, fica evidente o alto custo computacional associado a mesma.

O algoritmo numérico BCU, proposto por Chiang, Wu e Varaiya em 1994 [34], para o cálculo do CUEP utiliza um sistema artificial (gradiente) de dimensão reduzida, ou seja, com ordem menor que o sistema de equações original, para viabilizar o cálculo do CUEP no sistema original. A vantagem da utilização deste algoritmo, reside no fato de que a fronteira da região de estabilidade de um sistema gradiente pode ser aproximadamente detectada sem a necessidade de se recorrer a resolução iterativa (simulação computacional) do sistema de equações diferenciais que modelam o SEP.

Com a finalidade de simplificar as equações e dar ao leitor uma visão geral sobre a demonstração do método (passos do algoritmo) BCU, admitem-se as hipóteses usuais ao estudo de estabilidade transitória e à redução da rede aos nós internos das forças eletromotrizes dos geradores síncronos conectados ao sistema de transmissão [12], [14], [28]. Com isso modela-se matematicamente o SEP através do seguinte conjunto de EDOs:

$$\dot{\delta}_i = \omega_i \quad (3.1)$$

$$M_i \dot{\omega}_i = P_{m_i} - P_{e_i} - D_i \omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_{ger} \quad (3.2)$$

sendo δ_i o desvio angular do rotor da máquina “i” com relação à referência síncrona, ω_i o desvio de velocidade angular do gerador “i” com relação à velocidade síncrona, M_i o

momento de inércia da máquina “i”, P_{m_i} a potência mecânica em regime pré-falta do gerador “i” (considera-se neste trabalho que durante o período em falta os reguladores de velocidade não atuam e a potência mecânica das máquinas permanece constante durante o transitório eletromecânico), P_{e_i} a potência elétrica fornecida pelo gerador “i”, D_i o coeficiente de amortecimento (atrito viscoso) da máquina “i” e n_{ger} o número de geradores síncronos conectados ao SEP.

Com a redução da rede é possível escrever a potência elétrica das máquinas síncronas na forma:

$$P_{e_i} = |E_i|^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_{ger}} [C_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) + D_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j)], \quad i = 1, 2, \dots, n_{ger} \quad (3.3)$$

sendo E_i o fasor da tensão complexa na barra i, G_{ii} a condutância própria da barra i (retirada da matriz admitância nodal do sistema), C_{ij} e D_{ij} respectivamente a susceptância e a condutância de transferência entre as barras i e j multiplicadas pelo módulo das tensões complexas nestas barras do SEP.

Conclui-se, então, a modelagem do sistema de potência na referência síncrona, para o estudo de estabilidade transitória. É importante ressaltar que para a utilização de métodos diretos (energéticos) a referência do sistema deve ser alterada tomando-se o centro de ângulo do sistema (COA) ou uma máquina como referência a fim de possibilitar o tratamento matemático do problema, transformando o estudo de estabilidade transitória (sincronismo entre os geradores do SEP) no estudo de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável em seu respectivo modelo matemático [17], [12], [16].

Sob a condição de amortecimento não uniforme para as máquinas síncronas ($\frac{D_i}{M_i} \neq \frac{D_j}{M_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n_{ger} (i \neq j)$), e tomando-se a n-ésima máquina do sistema como referência para o desvio angular dos geradores, pode-se reescrever as equações (3.1) e (3.2) como [16], [26]:

$$\dot{\delta}_{i, n_{ger}} = \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_{n_{ger}} \quad i = 1, 2, \dots, n_{ger} - 1 \quad (3.4)$$

$$M_i \dot{\omega}_i = P_{m_i} - P_{e_i} - D_i \omega \quad i = 1, 2, \dots, n_{ger} \quad (3.5)$$

Sastry e Murthy, em 1972 [98], demonstraram que o modelo matemático (3.4)-(3.5) é uma realização mínima¹ para um SEP multimáquinas, considerando o amortecimento não uniforme para as máquinas. Tal constatação é importante do ponto de vista da teoria de controle [100], [101], porém, neste trabalho, ao se utilizar de tal representação, tem-se por objetivo garantir a existência de pontos de equilíbrio hiperbólicos no modelo em espaço de estados [26].

¹Uma realização mínima de uma função transferência é uma representação desta em um espaço de estados, controlável e observável, que descreve o mesmo comportamento entrada-saída com o menor número possível de estados (variáveis) [99].

Assim, reescrevendo as equações (3.4) e (3.5) em uma forma compacta:

$$\dot{\delta}_{\text{OMR}} = [I_{n_{\text{ger}}-1} - \mathbf{e}_{n_{\text{ger}}-1}] \boldsymbol{\omega} \quad (3.6)$$

$$M\dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} I_{n_{\text{ger}}-1} \\ -\mathbf{e}_{n_{\text{ger}}-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{m_1} - P_{e_1} \\ \vdots \\ P_{m_{n_{\text{ger}}}} - P_{e_{n_{\text{ger}}}} \end{bmatrix} - D\boldsymbol{\omega} \quad (3.7)$$

sendo $\dot{\delta}_{\text{OMR}}$ o vetor coluna formado pelos elementos $\dot{\delta}_{i,n_{\text{ger}}}$ com $i = 1, 2, \dots, n_{\text{ger}} - 1$, $I_{n_{\text{ger}}-1}$ a matriz identidade de ordem $(n_{\text{ger}} - 1)$, $\mathbf{e}_{n_{\text{ger}}-1}$ um vetor coluna composto de $(n_{\text{ger}} - 1)$ elementos unitários, M e D matrizes diagonais compostas respectivamente pelos momentos de inércia e coeficientes de atrito das máquinas síncronas conectadas ao sistema.

Com isso, tem-se que a ordem do sistema de equações que modelam a dinâmica do SEP passou de $2n_{\text{ger}}$ para $2n_{\text{ger}} - 1$, e agora este novo sistema apresenta soluções de equilíbrio cujo estudo de estabilidade (no sentido de Lyapunov) relaciona-se com o estudo de estabilidade transitória do sistema original [16]. Outras formulações para o modelo do SEP, que se prestam ao estudo de estabilidade transitória destes sistemas, também são possíveis utilizando o centro de ângulo (COA) como referência sob a hipótese de amortecimento uniforme para as máquinas síncronas ($\frac{D_i}{M_i} = \lambda$, $i = 1, 2, \dots, n_{\text{ger}}$) [12], [16].

Para que a demonstração do método BCU possa ser completada com sucesso, faz-se necessário que as seguintes hipóteses sejam válidas:

1. o sistema original (3.6)-(3.7) satisfaz as hipóteses (A1)-(A4);
2. as condutâncias de transferência do sistema são suficientemente pequenas para que possam ser desconsideradas.
3. a condição de transversalidade a um parâmetro [102], [103], é satisfeita, ou seja, o coeficiente de amortecimento D dos geradores é suficientemente grande.

Dito isto, o método BCU visa realizar a obtenção do CUEP através do uso de um sistema artificial reduzido na forma:

$$\dot{\delta}_{\text{OMR}} = \begin{bmatrix} P_{m_i} - P_{e_i} \\ \vdots \\ P_{m_{n_{\text{ger}}-1}} - P_{e_{n_{\text{ger}}-1}} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

É relevante mencionar que o sistema artificial reduzido é uma abstração matemática cuja função é propiciar um meio para o cálculo do CUEP do sistema original, desta forma, o sistema artificial (3.8) não conserva a representação física do SEP, ou seja, ao se realizar a análise dimensional da equação (3.8) as grandezas físicas não se conservam em ambos os lados da igualdade, o que impossibilita a associação do comportamento

dinâmico do sistema artificial reduzido à física do SEP. Porém, é necessário observar que tal ressalva, na interpretação física do sistema artificial reduzido, em nada impede sua utilização para realizar o cálculo de pontos de equilíbrio do sistema original, uma vez que é possível demonstrar relações matemáticas válidas entre os pontos de equilíbrio de ambos os sistemas.

Assim, para que o sistema artificial reduzido (3.8) possa ser utilizado no cálculo do CUEP do sistema original (3.6)-(3.7), faz-se necessário provar a existência de determinadas relações estáticas e dinâmicas entre os pontos de equilíbrio de ambos os sistemas de forma a garantir a eficácia e o conservadorismo das análises [20], [26], [34].

Relação estática:

- a localização e o tipo dos pontos de equilíbrio do sistema artificial reduzido correspondem à localização e o tipo dos pontos de equilíbrio do sistema original. Por exemplo, se $\mathbf{x}_e$ é um ponto de equilíbrio de tipo k do sistema artificial reduzido, então $(\mathbf{x}_e, \mathbf{0})$ é um ponto de equilíbrio de tipo k do sistema original.

Relação dinâmica:

- um uep $\mathbf{x}_u$ está na fronteira de estabilidade do asep $\mathbf{x}_s$, $\partial A(\mathbf{x}_s)$, do sistema artificial reduzido, se e somente se o uep $(\mathbf{x}_u, \mathbf{0})$ está na fronteira de estabilidade do asep $(\mathbf{x}_s, \mathbf{0})$, $\partial A(\mathbf{x}_s, \mathbf{0})$, do sistema original;

Porém, realizar a demonstração das relações estática e dinâmica entre os sistemas artificial reduzido (3.8) e original (3.6)-(3.7) não é uma tarefa trivial. Portanto, quando Chiang, Wu e Varaiya propuseram o método BCU [34] tais relações foram provadas através de várias etapas intermediárias a fim de se conseguir modificar suavemente o sistema artificial reduzido até que o mesmo apresentasse uma estrutura similar ao sistema original, como apresentado na figura 3.2.

Na primeira destas etapas, dada a existência de uma função energia para o sistema artificial (3.8) na forma $V(\delta_{\text{OMR}}, \omega) = V_p(\delta_{\text{OMR}}) + V_k(\omega)$, sendo a primeira componente, $V_p(\delta_{\text{OMR}})$, identificada como a energia potencial armazenada no sistema, as relações estáticas e dinâmicas são provadas entre o sistema artificial reduzido (3.8) e um sistema na forma gradiente:

$$\dot{\delta}_{\text{OMR}} = -\frac{\partial V_p(\delta_{\text{OMR}})}{\partial \delta_{\text{OMR}}} \quad (3.9)$$

Na segunda etapa, as relações estáticas e dinâmicas são provadas entre o sistema gradiente reduzido (3.9) e um sistema estendido na forma:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_{\text{OMR}} &= -\frac{\partial V_p(\delta_{\text{OMR}})}{\partial \delta_{\text{OMR}}} \\ M\dot{\omega} &= -D\omega \end{aligned} \quad (3.10)$$

Figura 3.2: Etapas para a demonstração do método (algoritmo numérico) BCU para o cálculo do CUEP.

Na terceira etapa, as relações estáticas e dinâmicas são provadas entre o primeiro sistema estendido (3.10) e um segundo sistema estendido dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_{OMR} &= [I_{n_{ger}-1} \quad -e_{n_{ger}-1}] \omega \\ M\dot{\omega} &= - \begin{bmatrix} I_{n_{ger}-1} \\ -e_{n_{ger}-1}^T \end{bmatrix} \frac{\partial V_p(\delta_{OMR})}{\partial \delta_{OMR}} - D\omega \end{aligned} \quad (3.11)$$

Na última etapa, por fim, prova-se as relações estáticas e dinâmicas entre o sistema estendido anterior (3.11) e o sistema original (3.6)-(3.7).

Por fim, é importante ressaltar que a fundamentação teórica do método (algoritmo numérico) BCU, baseada na caracterização da fronteira da região de estabilidade, permite que relações unívocas entre os pontos de equilíbrio dos sistemas artificial reduzido e original sejam estabelecidas, de modo a possibilitar o cálculo do CUEP do sistema original através da utilização de um sistema artificial reduzido, de menor ordem e respectivamente de menor complexidade.

3.3.1 Implementação Prática do Algoritmo Numérico BCU

Uma vez compreendidos os passos para a demonstração do método (algoritmo numérico) BCU, apresentam-se a seguir as etapas que compõem a aplicação do método BCU no cálculo do CUEP. A figura 3.3 ilustra as etapas do algoritmo BCU durante o cálculo do ponto de equilíbrio instável de controle.

Etapas do algoritmo numérico (método) BCU:

1. A partir da trajetória em falta do sistema original (3.6)-(3.7), $(\delta_{\text{OMR}}(t), \omega(t))$, identifique o *exit point* (vide observação (3.3.1) a seguir), $\delta_{\text{exit(OMR)}}^*$, no qual a trajetória projetada do sistema $\delta_{\text{OMR}}(t)$ cruza a fronteira da região de estabilidade do sistema gradiente reduzido (3.9);
2. Use o ponto $\delta_{\text{exit(OMR)}}^*$ como condição inicial para integrar o sistema gradiente reduzido pós-falta e encontre o primeiro ponto de mínimo da norma da função $f(\delta_{\text{OMR}})$ (3.9) dada por:

$$\|f(\delta_{\text{OMR}})\| = \sum_{i=1}^{n_{\text{ger}}-1} \left| \frac{\partial V_p(\delta_{i,n})}{\partial \delta_i} \right|$$

e seja este ponto, $\delta_{\text{MGP(OMR)}}^*$, o ponto de mínimo gradiente (MGP - do inglês *Minimum Gradient Point*);

3. Use o ponto $\delta_{\text{MGP(OMR)}}^*$ como condição inicial para resolver

$$\sum_{i=1}^{n_{\text{ger}}} \|f_i(\delta_{\text{OMR}})\| = 0$$

e seja este ponto, $\delta_{\text{CUEP(OMR)}}^*$, o CUEP do sistema gradiente reduzido (3.9);

4. Defina o CUEP do sistema original, com respeito à trajetória em falta sob estudo, como sendo $(\delta_{\text{CUEP(OMR)}}^*, \mathbf{0})$ e conclua sobre a estabilidade do SEP utilizando o método CUEP;

Figura 3.3: O algoritmo numérico BCU para o cálculo do CUEP.

Observação 3.3.1. Um resultado conhecido na literatura e que fomenta a escolha do sistema gradiente reduzido para a computação do exit point é que a fronteira de estabilidade

do sistema gradiente reduzido coincide com a fronteira de energia potencial (PEBS) [31], [24]. Com isso, para identificar o ponto de cruzamento da trajetória em falta do sistema é necessário apenas identificar o primeiro máximo de energia potencial na maioria dos casos, no entanto é necessário observar que um máximo de energia potencial pode ocorrer ao longo da trajetória em falta do sistema sem que isto indique necessariamente o cruzamento com o PEBS, assim um teste melhor para identificar tal cruzamento é verificar quando o produto escalar entre o gradiente da energia potencial e a velocidade dos geradores se iguala a zero, no instante entre a mudança de sinal positivo para negativo [38].

Desta maneira, o método BCU utiliza o sistema gradiente reduzido (3.9), derivado do sistema artificial reduzido (3.8), para calcular o CUEP do sistema original (3.6)-(3.7). Tal procedimento se justifica na equivalência estática e dinâmica entre os pontos de equilíbrio de ambos os sistemas, e portanto ao utilizar o sistema gradiente reduzido o algoritmo numérico BCU se utiliza de um sistema de menor ordem (e complexidade) para possibilitar o cálculo do CUEP no sistema original, obtendo também ganhos excedentes tais como: (i) menor esforço computacional, uma vez que o espaço de busca do CUEP no sistema artificial reduzido é menor quando comparado ao espaço de busca original, e (ii) melhor estabilidade devido à forma gradiente do sistema artificial reduzido [34].

É importante ressaltar também que devido a imprecisões numéricas no cálculo do *exit point*, o mesmo é obtido de maneira aproximada e portanto não estará exatamente sobre a variedade estável do CUEP do sistema gradiente reduzido, o que justifica os passos 2 e 3 do algoritmo BCU. Caso contrário a simples integração numérica do sistema gradiente reduzido pós-falta seria suficiente para a obtenção do ponto de equilíbrio instável de controle.

Do ponto de vista teórico, o método BCU não apresenta falhas, e sempre que suas hipóteses sejam satisfeitas, o cálculo do CUEP através do sistema gradiente reduzido pode sempre ser realizado com sucesso. Porém a literatura relata diversos casos onde o algoritmo BCU encontra dificuldades ao realizar o cálculo do CUEP, acarretando a divergência do processo de cálculo em alguma das etapas envolvidas ou mesmo obtendo um ponto de equilíbrio instável diferente do CUEP real [104], [35], [36], [38].

Tais falhas são resultados de imprecisões numéricas geradas na computação de cada uma das etapas do algoritmo BCU. Por tais motivos muitos pesquisadores propuseram diversos métodos auxiliares ao algoritmo BCU com o objetivo de introduzir uma maior robustez ao mesmo.

Dentre as propostas para a melhoria do método BCU está o método PEBS dinâmico, proposto inicialmente por Scruggs e Mili em 2001, e mais tarde aperfeiçoado por Nazareno, Alberto e Bretas em 2004/05 [35], [37], utilizado para aumentar a confiabilidade na detecção do *exit point* e o *Shadowing Method* proposto por Treinen, Vittal e Kliemann em 1996, utilizado para realizar a busca pelo CUEP durante a integração do sistema gradiente

reduzido pós-falta, após a detecção do exit point.

Existem algumas considerações a serem observadas para a utilização de métodos auxiliares em conjunto com o algoritmo BCU, sendo a principal relativa ao esforço computacional empregado nos cálculos, uma vez que a principal vantagem na utilização de métodos diretos (energéticos) reside na economia de tempo das análises quando comparadas à utilização da simulação computacional, no domínio do tempo, do modelo completo do SEP. Tal característica é o que torna a utilização dos métodos diretos indispensável às análises de estabilidade em tempo-real em sistemas de potência de grande porte.

Sob esta perspectiva algumas soluções para assegurar a correta execução das etapas do algoritmo BCU tornam-se inviáveis, já que o esforço para executá-las torna-se igual ou mesmo superior ao esforço requerido na simulação completa do sistema. O método PEBS dinâmico é um destes casos já que sua execução exige a simulação computacional do sistema gradiente reduzido pós-falta nos pontos próximos ao PEBS para determinar a correta identificação do *exit point*.

Contudo, o algoritmo *Shadowing Method* utilizado para guiar a busca do CUEP sobre a fronteira do sistema gradiente reduzido pós-falta, mostra-se como uma ferramenta auxiliar extremamente eficiente na maioria dos casos e computacionalmente econômica, já que nenhuma rotina extra de integração numérica é necessária além da que está prevista na terceira etapa do próprio algoritmo BCU. As etapas do algoritmo *Shadowing Method* estão descritas a seguir, e podem ser visualizadas na figura 3.4.

Etapas do algoritmo auxiliar *Shadowing Method*:

1. Defina $i \in [1, 2, \dots, \mathcal{N}]$, onde $\mathcal{N}$ é o número de iterações (ciclos) máximo estipulado para que o CUEP seja encontrado;
2. Integre o sistema gradiente reduzido (3.9) pós-falta e obtenha o ponto $\delta_{i(\text{OMR})} = \Phi(\delta_{m_{(i-1)}(\text{OMR})}, t_i)$, sendo $\delta_{m_0} = \delta_{\text{exit}(\text{OMR})}^*$ e t_i é suficientemente pequeno;
3. Calcule o conjunto $R(\delta_{i(\text{OMR})}) = \{\delta_{\text{OMR}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{ger}}-1} : \delta_{\text{OMR}} = \alpha(\delta_{i(\text{OMR})} - \delta_{s(\text{OMR})}^{pf}) + \delta_{s(\text{OMR})}^{pf}, \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha \geq 0\}$, onde $\delta_{s(\text{OMR})}^{pf}$ é o asep do sistema gradiente reduzido (3.9) pós-falta. Vá para a etapa 4;
4. Encontre $\delta_{m_i(\text{OMR})} \in R(\delta_{i(\text{OMR})})$ satisfazendo:

$$-\frac{\partial V_p(\delta_{(\text{OMR})})}{\partial \delta_{m_i(\text{OMR})}}(\delta_{m_i(\text{OMR})} - \delta_{s(\text{OMR})}^{pf}) = 0$$

Se $i < \mathcal{N}$ retorne a etapa 2 até que uma aproximação para o CUEP seja encontrada, caso contrário o *Shadowing Method* não foi capaz de encontrar uma aproximação para o ponto de equilíbrio instável de controle dentro de $\mathcal{N}$ ciclos;

Figura 3.4: O algoritmo auxiliar *Shadowing Method* para a aproximação do CUEP.

Observa-se, então, que a maior parte dos problemas relacionados à aplicação do método BCU no cálculo do CUEP são oriundos do mal condicionamento do sistema de equações que compõe o modelo do sistema elétrico de potência, e resultam em imprecisões numéricas que comprometem o conservadorismo das análises.

Neste trabalho uma nova proposta de um algoritmo numérico para o cálculo do CUEP será discutida, com base na exploração da existência de duas escalas de tempo (lenta e rápida) nos modelos de SEPs, a fim de utilizar dois subsistemas reduzidos: um lento e outro rápido, associados ao sistema artificial reduzido, que conserve as relações estáticas e dinâmicas com os subsistemas lento e rápido associados ao sistema original, e a partir destes subsistemas reduzidos possibilitar o cálculo do CUEP de forma mais eficiente e robusta, garantindo também o conservadorismo das análises.

No próximo capítulo deste trabalho, o método direto TTS-CUEP para modelos de SEPs com duas escalas de tempo, proposto por Alberto e Chiang, em 2008 [2], será apresentado e aplicado na análise de estabilidade transitória de um sistema máquina versus barramento infinito com o objetivo de ilustrar seu funcionamento e as possíveis vantagens, oriundas da decomposição do problema de estabilidade de SEPs em duas escalas de tempo.

*Do more than belong: participate.
Do more than care: help.
Do more than believe: practice.
Do more than be fair: be kind.
Do more than forgive: forget.
Do more than dream: work.*

William Arthur Ward (✠1921-1994✠)

Capítulo 4

O Método TTS-CUEP para Análise de Estabilidade Transitória de Sistemas com Duas Escalas de Tempo

4.1 Introdução

Neste capítulo, o método TTS-CUEP para análise de estabilidade transitória de modelos de SEPs com duas escalas de tempo é apresentado, na forma de um algoritmo conceitual, e discutido com o objetivo de prover as bases teóricas necessárias ao desenvolvimento de um método numérico robusto para o cálculo do CUEP em sistemas com duas escalas de tempo nos capítulos posteriores deste trabalho. Por fim, o algoritmo conceitual para o cálculo do CUEP em modelos de SEPs com duas escalas de tempo é aplicado na análise de sistema máquina versus barramento infinito, a fim de verificar as possíveis vantagens em sua utilização frente ao método CUEP tradicional.

4.2 O Método TTS-CUEP para Análise de Estabilidade Transitória de SEPs

O método TTS-CUEP para modelos de sistemas elétricos de potência com duas escalas de tempo foi proposto pela primeira vez na literatura em 2008 por Alberto e Chiang [2].

Tal método explora a divisão da dinâmica do SEP em duas escalas de tempo de forma a obter dois subsistemas de equações: lento e rápido. Explorando então a caracterização da fronteira da região de estabilidade, apresentada na seção 2.4.1 deste trabalho, cria-se uma maneira eficiente para calcular o CUEP do sistema original explorando sua relação com os subsistemas lento e rápido, propiciando uma maior robustez e velocidade ao cálculo do

CUEP ao tratar subproblemas com menor ordem e complexidade que o sistema original.

Antes de iniciar a apresentação e a discussão do método TTS-CUEP para sistemas com duas escalas de tempo algumas definições quanto ao CUEP em cada um dos sistemas estudados é necessária. Considere então, $(\mathbf{w}_s, \mathbf{z}_s)$ o asep pós-falta do sistema Σ_ε (2.14).

Definição 4.2.1 (CUEP do sistema Σ_ε). *O CUEP do sistema singularmente perturbado Σ_ε (2.14), para um dado $\varepsilon > 0$, com respeito à trajetória em falta $\varphi_\varepsilon^f(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0, t)$, é o uep $(\mathbf{w}_{\text{CUEP}(\varepsilon)}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\varepsilon)})$ na fronteira de estabilidade $\partial A_\varepsilon(\mathbf{w}_s, \mathbf{z}_s)$, cuja variedade estável $W_{(\Sigma_\varepsilon)}^s(\mathbf{w}_{\text{CUEP}(\varepsilon)}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\varepsilon)})$ contém o exit point $(\mathbf{w}_{\text{exit}(\varepsilon)}, \mathbf{z}_{\text{exit}(\varepsilon)})$ da trajetória em falta.*

Para modelos de SEPs com duas escalas de tempo, o parâmetro ε é fixo, contudo para estabelecer a relação entre o CUEP do sistema singularmente perturbado Σ_ε (2.14) e os CUEPs do subsistema lento Σ_0 (2.15) e do subsistema rápido de fronteira $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}^*)$ (2.24), é necessário estudar o comportamento do CUEP no sistema singularmente perturbado quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Tal tipo de estudo requer a definição de um CUEP uniforme para o sistema singularmente perturbado Σ_ε .

Definição 4.2.2 (CUEP uniforme do sistema Σ_ε). *Seja $(\mathbf{w}_{\text{CUEP}(\varepsilon)}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\varepsilon)})$ o CUEP do sistema Σ_ε com respeito à trajetória em falta $\varphi_\varepsilon^f(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0, t)$, e considere a aplicação¹ $\varepsilon \rightarrow (\mathbf{w}_{\text{CUEP}(\varepsilon)}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\varepsilon)})$. Se existe $\varepsilon^* > 0$, tal que a mesma aplicação é constante para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, então $(\mathbf{w}_{\text{CUEP}(\varepsilon)}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\varepsilon)}) = (\mathbf{w}_{\text{CUEP}}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}})$ é um CUEP uniforme com relação à trajetória em falta $\varphi_\varepsilon^f(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0, t)$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$.*

É importante mencionar que, se a condição de transversalidade (A3) é satisfeita para o sistema singularmente perturbado Σ_ε (2.14), então, o CUEP deste sistema é genericamente um ponto de equilíbrio instável de tipo 1. Tal característica será explorada adiante neste trabalho na concepção de um algoritmo conceitual (bem como na criação posterior de um algoritmo numérico robusto) para o cálculo do CUEP em sistemas com duas escalas de tempo.

Com o objetivo de definir o CUEP para o subsistema rápido de fronteira considere que $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0)$ é o asep pré-falta do sistema Σ_ε (2.14) e $\mathbf{z}_s$ é o asep pós-falta do sistema rápido de fronteira $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}_0)$ (2.24) na variedade de restrição estável Γ_s .

Definição 4.2.3 (CUEP do sistema rápido de fronteira $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}_0)$). *O CUEP do sistema rápido de fronteira $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}_0)$, com respeito à trajetória em falta $\phi_0^f(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0, t)$, é o uep de tipo 1 $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\mathbf{F})})$ na fronteira de estabilidade $\partial A_{BLS}(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\mathbf{F})})$ cuja variedade estável $W_{\Pi_{BLS}(\mathbf{w}_0)}^s(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\mathbf{F})})$ contém o exit point $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{\text{exit}(\mathbf{F})})$ da trajetória em falta deste sistema rápido.*

¹Neste trabalho o termo *aplicação* será utilizado como sinônimo de função ($f(\cdot)$), a fim de definir uma relação que associa os elementos de um conjunto de partida (dado $a \in M$) a elementos únicos em um conjunto de chegada (existe apenas um elemento $f(a) \in M$).

A relação entre o CUEP do subsistema rápido de fronteira $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}_0)$ e o CUEP uniforme do sistema Σ_ε pode ser estabelecida, uma vez que o CUEP do subsistema rápido está contido em uma componente conexa instável Γ_u , e sendo a condição de transversalidade (A3) satisfeita, o CUEP do sistema singularmente perturbado é um uep de tipo 1. Logo se o CUEP do sistema singularmente perturbado estiver contido na componente conexa Γ_u de tipo 1, o mesmo é um asep nesta componente (vide teorema 2.4.4), e a trajetória pós-falta do sistema Σ_ε iniciando no CUEP do subsistema rápido converge naturalmente para o CUEP uniforme do sistema singularmente perturbado, conforme apresentado na figura 4.1.

É importante lembrar que os pontos de equilíbrio do subsistema rápido de fronteira $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}_0)$ podem não ser pontos de equilíbrio do sistema original Σ_ε .

Figura 4.1: Ilustração da relação entre o CUEP do subsistema rápido $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}_0)$ e do CUEP uniforme do sistema singularmente perturbado Σ_ε em uma componente conexa instável Γ_u [3].

Uma vez que os modelos do SEP em falta e pós-falta podem se apresentar estruturalmente diferentes, dada a atuação do sistema de proteção e a alteração dos parâmetros de rede do sistema, as componentes de restrição estáveis, Γ_s , pré e pós-falta também poderão ser diferentes. Assim, enquanto o CUEP do sistema lento Σ_0 (2.15) pertence à variedade de restrição estável pós-falta Γ_s^{pf} , a trajetória do sistema lento em falta pertence a uma variedade de restrição Γ^{f} diferente, isso se a mesma existir.

Dito isto, com o objetivo de definir o CUEP do subsistema lento Σ_0 (2.15), considera-se

a pseudo-trajetória do sistema lento sobre a variedade de restrição estável pós-falta Γ_s^{pf} [94].

Definição 4.2.4 (Pseudo-Trajetoária do Sistema Lento). *Dado um ponto da trajetória do subsistema lento em falta, $(\mathbf{w}, \mathbf{z})$, que está dentro do conjunto de atração² da variedade de restrição estável pós-falta, $A_{tr}(\Gamma_s^{pf})$, existe um ponto correspondente $(\mathbf{w}, \mathbf{z}^*)$, pertencente a pseudo-trajetória do sistema lento, sendo $\mathbf{z}^*$ um asep do sistema rápido de fronteira pós-falta $\Pi_{BLS}(\mathbf{w})$.*

Assim a definição do *exit point* da trajetória em falta do subsistema lento Σ_0 (1.5) pode ser dada em função da pseudo-trajetória do sistema lento em falta.

Definição 4.2.5 (*Exit point* do sistema lento Σ_0). *O exit point $(\mathbf{w}_{\text{exit}(\mathbf{S})}, \mathbf{z}_{\text{exit}(\mathbf{S})})$ do sistema lento Σ_0 é definido como o ponto onde a pseudo-trajetória do sistema lento em falta $\varphi_{0(P)}^f(t)$ cruza a fronteira de estabilidade do sistema lento pós-falta $\partial A_0(\mathbf{w}_s, \mathbf{z}_s)$*

A figura 4.2 ilustra a definição do *exit point* do sistema lento, bem como sua pseudo-trajetória.

É necessário fazer uma ressalva quanto à computação da pseudo trajetória do sistema lento, uma vez que ao primeiro olhar sobre a definição (4.2.4) tal computação dependa da integração numérica do subsistema rápido de fronteira em cada ponto. Deve-se lembrar que a trajetória do subsistema lento está restrita à componentes da variedade Γ , assim, uma vez determinado o valor das variáveis de estado lentas $(\mathbf{w})$ sobre Γ^f , a partir da trajetória em falta, pode-se utilizar o método de Newton-Raphson para encontrar o próximo ponto $(\mathbf{w}, \mathbf{z}^*)$ da pseudo-trajetória do sistema lento sobre a variedade de restrição Γ_s^{pf} .

Dito isto, pode-se definir o CUEP do subsistema lento Σ_0 a partir do *exit point* da pseudo-trajetória do sistema lento em falta.

Definição 4.2.6 (CUEP do sistema lento Σ_0). *O CUEP do subsistema lento Σ_0 (2.15) é o uep de tipo 1 $(\mathbf{w}_{\text{CUEP}(\mathbf{S})}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\mathbf{S})})$, contido na variedade de restrição estável pós-falta Γ_s^{pf} , cuja variedade estável $W_{\Sigma_0}^s(\mathbf{w}_{\text{CUEP}(\mathbf{S})}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\mathbf{S})})$ contém o exit point do sistema lento.*

O método CUEP conceitual para sistemas com duas escalas de tempo, proposto por Alberto e Chiang em 2008 [2], é apresentado em dois cenários bem definidos: um para o sistema rápido em falta estável e outro para o sistema rápido em falta instável. Tal

²O conjunto de atração de uma variedade κ , denotado por $A_{tr}(\kappa)$ é formado por todos os pontos $(\mathbf{w}, \mathbf{z})$ do espaço de estados tal que existe um tempo $T = T(\mathbf{w}, \mathbf{z}) > 0$ tal que:

$$\begin{cases} \mathbf{w}(\varepsilon, t) = \mathbf{w}(t) + O(\varepsilon), & t_{ch} \leq t \leq T \\ \mathbf{z}(\varepsilon, t) = \mathbf{z}(t) + O(\varepsilon), & t_{ch} + \sigma \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.1)$$

se mantém uniformemente com respeito à variável tempo, sendo t_{ch} o tempo em que ocorre o chaveamento (salto) do sistema, $\sigma > 0$ é uma constante arbitrariamente pequena, $(\mathbf{w}(\varepsilon, t), \mathbf{z}(\varepsilon, t))$ e $(\mathbf{w}(t), \mathbf{z}(t))$ são respectivamente as trajetórias do sistema rápido de fronteira e do sistema singularmente perturbado [94].

Figura 4.2: Ilustração da pseudo-trajetória em falta do subsistema lento Σ_0 utilizada na detecção do *exit point* e do CUEP [3].

divisão é necessária uma vez que a existência ou não de uma variedade de restrição em falta Γ^f altera significativamente o comportamento dinâmico dos respectivos subsistemas lento e rápido associados, e consequentemente o processo de obtenção do CUEP do sistema singularmente perturbado original Σ_ε .

4.2.1 Discussão dos Cenários para o Cálculo do CUEP em Sistemas com Duas Escalas de Tempo

A seguir apresenta-se a primeira versão proposta na literatura [2], para o cálculo do CUEP em sistemas com duas escalas de tempo. Tal método será empregado nas próximas seções deste trabalho na análise de estabilidade transitória de SEPs de pequeno porte, a fim de demonstrar sua utilização prática, suas possíveis potencialidades e restrições.

(M1) Método para o cálculo do CUEP em sistemas com duas escalas de tempo: cenário 1 - subsistema rápido instável [2]:

1. Calcule o *exit point*, $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{\text{exit}(\mathbf{F})})$, e o respectivo CUEP, $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\mathbf{F})})$, do subsistema rápido de fronteira $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}_0)$, sobre a variedade de restrição instável pós-falta Γ_u^{pf} com respeito à trajetória em falta do sistema rápido de fronteira $\phi_0^f(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0, \tau)$;
2. Usando o CUEP do subsistema rápido de fronteira, $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\mathbf{F})})$, como condição inicial, calcule a trajetória $\varphi_0^{\text{pf}}(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\mathbf{F})}, t)$ do sistema lento Σ_0 sobre a com-

ponente de restrição instável pós-falta de tipo 1, Γ_u^{pf} , e a correspondente pseudo-trajetória³ do sistema lento, $\varphi_{0(P)}^{\text{pf}}(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\mathbf{F})}, t)$, sobre a variedade de restrição estável pós-falta Γ_s^{pf} ;

3. Verifique se a trajetória $\varphi_0^{\text{pf}}(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\mathbf{F})}, t)$ ao longo de Γ_u^{pf} converge para um asep $(\mathbf{w}_s(\mathbf{S}), \mathbf{z}_s(\mathbf{S}))$, ou se a pseudo-trajetória $\varphi_{0(P)}^{\text{pf}}(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\mathbf{F})}, t)$ alcança o *exit point* do subsistema lento $(\mathbf{w}_{\text{exit}(\mathbf{S})}, \mathbf{z}_{\text{exit}(\mathbf{S})})$ sobre a variedade de restrição estável pós-falta Γ_s^{pf} ;
4. Se o asep $(\mathbf{w}_s(\mathbf{S}), \mathbf{z}_s(\mathbf{S}))$ é atingido primeiro, então este ponto é o CUEP uniforme, $(\mathbf{w}_{\text{CUEP}}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}}) = (\mathbf{w}_s(\mathbf{S}), \mathbf{z}_s(\mathbf{S}))$, do sistema singularmente perturbado Σ_ε para ε suficientemente pequeno. Caso contrário, calcule o CUEP do subsistema lento Σ_0 , $(\mathbf{w}_{\text{CUEP}(\mathbf{S})}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\mathbf{S})})$, com respeito à pseudo-trajetória $\varphi_{0(P)}^{\text{pf}}(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\mathbf{F})}, t)$, e neste caso o CUEP uniforme do sistema Σ_ε é o ponto $(\mathbf{w}_{\text{CUEP}}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}}) = (\mathbf{w}_{\text{CUEP}(\mathbf{S})}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\mathbf{S})})$, para ε suficientemente pequeno.

(M2) Método para o cálculo do CUEP em sistemas com duas escalas de tempo: cenário 2 - subsistema rápido estável [2]:

1. Calcule o asep do sistema rápido de fronteira $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}_0)$ em falta, $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{\mathbf{S}(\mathbf{F})}^f)$, na variedade de restrição estável em falta Γ_s^f ;
2. Calcule a trajetória $\varphi_0^f(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{\mathbf{S}(\mathbf{F})}^f, t)$ do sistema lento Σ_0 sobre a componente de restrição estável em falta Γ_s^f , iniciando em $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{\mathbf{S}(\mathbf{F})}^f)$ e a correspondente pseudo-trajetória $\varphi_{0(P)}^{\text{pf}}(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{\mathbf{S}(\mathbf{F})}^f)$ do sistema lento sobre a variedade de restrição estável pós-falta Γ_s^{pf} ;
3. Verifique se a trajetória do sistema lento em falta $\varphi_0^f(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{\mathbf{S}(\mathbf{F})}^f)$ alcançou uma singularidade em Γ_s^f , ou a pseudo-trajetória $\varphi_{0(P)}^{\text{pf}}(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{\mathbf{S}(\mathbf{F})}^f)$ alcança o *exit point* do subsistema lento Σ_0 pós-falta;
4. Se a singularidade $(\mathbf{w}_{\text{sing}}, \mathbf{z}_{\text{sing}})$ é atingida primeiro, então uma nova fase de análise do sistema rápido é iniciada, recomeçando a análise a partir do passo 1 do cenário 1 com o ponto $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0)$ substituído pelo ponto $(\mathbf{w}_{\text{sing}}, \mathbf{z}_{\text{sing}})$. Caso contrário, calcule o CUEP do subsistema lento Σ_0 , $(\mathbf{w}_{\text{CUEP}(\mathbf{S})}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\mathbf{S})})$, com respeito à pseudo-trajetória $\varphi_{0(P)}^{\text{pf}}(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{\mathbf{S}(\mathbf{F})}^f)$, e neste caso o ponto $(\mathbf{w}_{\text{CUEP}}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}}) = (\mathbf{w}_{\text{CUEP}(\mathbf{S})}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\mathbf{S})})$ é o CUEP uniforme do sistema Σ_ε para ε suficientemente pequeno.

É importante mencionar que o segundo passo do cenário 1 utiliza o fato de que o CUEP do sistema Σ_ε é um uep de tipo 1, sendo portanto um asep do sistema lento Σ_0

³A pseudo-trajetória do sistema lento pode ser calculada como anteriormente, apenas substituindo a trajetória do sistema lento em falta pela trajetória do sistema lento sobre a variedade de restrição instável pós-falta Γ_u^{pf} .

na variedade de restrição instável Γ_u de tipo 1. Como consequência disto, a trajetória do sistema lento sobre Γ_u naturalmente converge para o CUEP evitando a necessidade do uso do sistema gradiente reduzido do método BCU [2].

Outra observação se refere à detecção do *exit point* nos subsistemas lento e rápido, pois a mesma pode ser realizada com uma boa aproximação, na maioria dos casos, pela detecção do primeiro máximo de energia potencial ao longo da trajetória em falta destes sistemas [29].

Uma versão preliminar do algoritmo conceitual para aplicação do método TTS-CUEP na análise de estabilidade transitória de SEPs foi também proposta por Alberto e Chiang em 2008 [2], porém neste trabalho opta-se por apresentar uma versão unificada deste procedimento proposta por Alberto e Chiang em 2009 [3].

4.2.2 Implementação Prática do Método TTS-CUEP na Análise de Estabilidade Transitória de SEPs

Primeiramente, admita a existência de uma função energia V_ε para o sistema singularmente perturbado original Σ_ε , uma função energia $V_{(S)}$ para o subsistema lento Σ_0 e uma família de funções energia $V_{(F)}$ para a família de subsistemas rápidos de fronteira $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}^*)$ associados ao sistema original.

Algoritmo conceitual para análise de estabilidade transitória de SEPs utilizando o método TTS-CUEP [3]:

1. (*Verificação de Estabilidade do Subsistema Rápido em Falta*):
 - (a) Verifique se a trajetória em falta do subsistema rápido de fronteira ($\Pi_{BLS}(\mathbf{w}_0)$), $\phi_0^f(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0, \tau)$, converge para um asep $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{s(F)})$. Se a mesma converge, então siga para o passo 2 e analise a estabilidade do subsistema lento Σ_0 , caso contrário vá ao passo 3 e analise a estabilidade do subsistema rápido Π_0 .
2. (*Verificação de Estabilidade do Subsistema Lento*):
 - (a) Calcule o CUEP, $(\mathbf{w}_{CUEP(S)}, \mathbf{z}_{CUEP(S)})$, do subsistema lento Σ_0 ;
 - (b) Calcule a energia crítica do subsistema lento como sendo:

$$V_{CUEP(S)} = V_{(S)}(\mathbf{w}_{CUEP(S)}, \mathbf{z}_{CUEP(S)})$$

- (c) Verifique se a trajetória em falta do subsistema lento $\varphi_0^f(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{s(F)}, t)$ encontra uma singularidade sobre a componente conexa em falta Γ_s^f antes que a falta seja eliminada do sistema, ou seja, em um $t < t_{ab}$ ⁴. Se este é o caso, então a

⁴O tempo t_{ab} é o tempo em que ocorre a atuação do sistema de proteção associado ao equipamento sob falta, de forma que o elemento sob falha seja isolado do SEP.

análise é terminada com a conclusão de que o sistema original Σ_ε (com duas escalas de tempo) pode ser instável⁵, caso contrário a energia sobre a pseudo-trajetória em falta do subsistema lento Σ_0 pós-falta é avaliada no instante t_{ab} como sendo:

$$V_{ab(S)} = V_{(S)}(\varphi_{0(P)}^{pf}(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_s(\mathbf{F}), t_{ab}))$$

- (d) Então, se $V_{ab(S)} < V_{CUEP(S)}$ o subsistema lento é transitoriamente estável e, para um parâmetro ε suficientemente pequeno, o sistema original Σ_ε é também transitoriamente estável, caso contrário prossiga para o próximo passo e refine a análise de estabilidade para o subsistema lento;
- (e) Integre numericamente o subsistema lento pós-falta, partindo da condição inicial da pseudo-trajetória do subsistema lento. Se o subsistema lento for transitoriamente estável, então, para um parâmetro ε suficientemente pequeno, o sistema original Σ_ε é também transitoriamente estável. Caso contrário, a análise é terminada com a conclusão de que, para um parâmetro ε suficientemente pequeno, o sistema original Σ_ε é também transitoriamente instável.

3. (Verificação de Estabilidade do Subsistema Rápido)

- (a) Calcule o CUEP, $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{CUEP}(\mathbf{F}))$, do subsistema rápido de fronteira $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}_0)$;
- (b) Calcule a energia crítica do subsistema rápido como sendo:

$$V_{CUEP(F)} = V_{(F)}(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_{CUEP}(\mathbf{F}))$$

- (c) Calcule a energia do subsistema rápido de fronteira pós-falta no instante $t = t_{ab}$ como sendo:

$$V_{ab(F)} = V_{(F)}(\phi_0^f(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0, \tau_{ab})), \text{ com } \tau_{ab} = \frac{t_{ab}}{\varepsilon}$$

- (d) Então, se $V_{ab(F)} < V_{CUEP(F)}$ o subsistema rápido de fronteira é transitoriamente estável e a análise prossegue no passo 4, caso contrário prossiga para o próximo passo e refine a análise de estabilidade para o subsistema rápido de fronteira;
- (e) Integre numericamente o subsistema rápido de fronteira pós-falta. Se o subsistema rápido de fronteira for transitoriamente instável, então, para um parâmetro ε suficientemente pequeno, o sistema original Σ_ε é também transitoriamente instável e a análise está terminada. Caso contrário, prossiga para o passo 4.

⁵A afirmativa de instabilidade não pode ser feita concretamente, uma vez que a trajetória em falta do sistema original Σ_ε cruza a fronteira do conjunto de nível da função energia $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+m} : V_{(\varepsilon)}(\mathbf{x}) \leq V_{(\varepsilon)}(\mathbf{x}_{CUEP})\}$, antes de cruzar a fronteira da região de estabilidade, logo existe a possibilidade de que o tempo de atuação do sistema de proteção seja menor que o tempo crítico associado ao distúrbio [34].

4. (Verificação de Estabilidade do Sistema Singularmente Perturbado Original)

- (a) Verifique a existência do CUEP uniforme para o sistema singularmente perturbado Σ_ε , $(\mathbf{w}_{\text{CUEP}(\varepsilon)}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\varepsilon)})$, sobre a componente conexa instável Γ_u de tipo 1. Se ele existe prossiga para o próximo passo, caso contrário calcule o CUEP do subsistema lento Σ_0 , $(\mathbf{w}_{\text{CUEP}(\mathbf{S})}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\mathbf{S})})$, sendo este o CUEP uniforme para o sistema Σ_ε : $(\mathbf{w}_{\text{CUEP}(\varepsilon)}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\varepsilon)}) = (\mathbf{w}_{\text{CUEP}(\mathbf{S})}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\mathbf{S})})$;
- (b) Calcule a energia crítica do sistema original Σ_ε no CUEP uniforme, para um parâmetro ε pequeno fixo, como sendo:

$$V_{\text{CUEP}(\varepsilon)} = V_\varepsilon(\mathbf{w}_{\text{CUEP}(\varepsilon)}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}(\varepsilon)})$$

- (c) Calcule a energia do sistema original pós-falta no instante $t = t_{ab}$ como sendo:

$$V_{ab(\varepsilon)} = V_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^f(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0, t_{ab}))$$

- (d) Então, se $V_{ab(\varepsilon)} < V_{\text{CUEP}(\varepsilon)}$ o sistema original (com duas escalas de tempo) é transitoriamente estável, caso contrário o mesmo pode ser instável.

É válido fazer menção ao fato de que a aproximação local da fronteira da região de estabilidade fornecida pelo método TTS-CUEP, assim como o método CUEP tradicional, está localmente contida no interior da região de estabilidade verdadeira para todo ponto desta aproximação excluindo o CUEP calculado, o qual se encontra sobre a fronteira de estabilidade real do sistema.

Assim, as afirmativas de estabilidade são sempre verdadeiras, assegurando o conservadorismo do método TTS-CUEP, porém as afirmativas de instabilidade podem não estar sempre corretas, exigindo em tais casos a integração numérica (simulação) do modelo original do SEP para avaliar corretamente a estabilidade do sistema. É relevante lembrar também que esforços para associar o método CUEP (assim como o método BCU) à simulação computacional do modelo completo do SEP já é uma prática corrente na análise de segurança dinâmica em tempo-real, cujo objetivo é realizar a seleção de contingências críticas e, assim, evitar a simulação do sistema para todos os casos de contingência sob análise [64], [40].

Uma vez apresentados o método TTS-CUEP para análise de estabilidade transitória de modelos de SEPs com duas escalas de tempo, na próxima seção deste trabalho, tal procedimento será aplicado ao estudo de estabilidade transitória para um modelos simples (máquina versus barramento infinito) de um sistema de energia elétrica, com o objetivo de avaliar a eficiência e possíveis vantagens deste método frente às abordagens tradicionais de análise de estabilidade transitória.

4.3 Aplicação do Método TTS-CUEP em um Sistema Máquina - Barramento Infinito

Primeiramente, considere um SEP simples composto por uma máquina conectada a um barramento infinito⁶ através de 4 linhas de transmissão, conforme apresentado na figura 4.3. Este sistema foi utilizado por Alberto e Chiang, em 2008/09 [2], [3], a fim de experimentar o método TTS-CUEP na análise de estabilidade transitória de sistemas elétricos de potência, e será também apresentado e discutido neste trabalho com o objetivo de propiciar uma introdução adequada à aplicação deste método na análise de estabilidade de SEPs.

Figura 4.3: Diagrama unifilar de um SEP composto por uma máquina síncrona conectada a um barramento infinito.

Para que coexistam dinâmicas rápidas e lentas no modelo do SEP se faz necessário modelar a máquina síncrona considerando o decaimento do fluxo no enrolamento de campo da máquina (modelo de 1 eixo), de modo que a dinâmica da tensão elétrica equivalente E'_q , proporcional ao fluxo magnético produzido pelo enrolamento da máquina, seja acrescentada ao modelo que descreve a dinâmica do sistema. Faz-se também a hipótese de que as linhas de transmissão que conectam a máquina síncrona ao barramento infinito sejam puramente indutivas, de modo que a resistência e a capacitância das linhas serão desconsideradas na modelagem.

O modelo de 1 eixo (comumente utilizado na modelagem de máquinas de pólos salientes [42]) pode ser expresso pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{E}'_q = \frac{1}{\tau'_{do}} [E_{FD} - E'_q + (x_d - x'_d)I_d] \quad (4.2)$$

sendo E'_q a tensão elétrica equivalente, proporcional ao fluxo magnético produzido pelo

⁶Um barramento infinito é subentendido, neste trabalho, como uma máquina com capacidade de geração e absorção de potência infinita, de modo a absorver qualquer desbalanço de potência elétrica originado no SEP, apresentando também um momento de inércia infinito, o que faz com que a tensão e a frequência elétrica nesta barra do sistema permaneçam inalteradas para qualquer situação de operação ou contingência.

enrolamento de campo, de eixo em quadratura, τ'_{do} a constante de tempo de circuito aberto transitória de eixo direto, E_{FD} a tensão elétrica equivalente, proporcional à tensão aplicada no circuito de campo, sobre o eixo em quadratura, x_d a reatância síncrona de eixo direto, x'_d a reatância transitória de eixo direto e I_d a componente sobre o eixo direto da corrente de estator da máquina.

Incluindo as equações mecânicas do gerador (3.1)-(3.2), na referência síncrona, a modelagem completa do SEP apresentado na figura 4.3 é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{E}'_q &= \frac{1}{\tau'_{do}}[E_{FD} - E'_q + (x_d - x'_d)I_d] \\ \dot{\delta} &= \omega \\ M\dot{\omega} &= P_m - P_e - D\omega\end{aligned}\tag{4.3}$$

Neste ponto, a análise do sistema apresentado na figura 4.3 será subdividida em três cenários distintos, a fim de explorar a iteração das diferentes dinâmicas presentes no modelo do SEP.

Cenário 1: Falta trifásica franca⁷ momentânea na barra terminal do gerador

Neste cenário, uma falta trifásica franca momentânea é aplicada à barra terminal do gerador, sendo eliminada após $\tau_{ab} = 0,277$ s sem que o sistema sofra qualquer alteração topológica. Os dados de operação pré-falta para o SEP são: $P_m = 0,6$ p.u., $D = 0.0294$ p.u., $H = 2,77$ s, $\tau'_{do} = 6,6$ s, $X_{linha} = 1,5$ p.u., $x'_d = 0,3$ p.u., $x_d = 1,15$ p.u., $V_{ger} = 1,0$ p.u. e $V_\infty = 1,0$ p.u. (sendo $S_{base} = 2220$ MVA e $V_{base} = 24$ kV [14]).

Como hipóteses simplificadoras admite-se que: (i) a resistência do enrolamento de estator (por fase) é desprezível, (ii) as reatâncias transitórias de eixo direto e em quadratura são iguais: $x'_d = x'_q$ (tal hipótese é comumente utilizada na modelagem de máquinas com pólos lisos [42], porém tal hipótese é aqui empregada com o objetivo de simplificar a obtenção de uma função energia para o SEP), (iii) as reatâncias síncrona e transitória de eixo em quadratura são iguais: $x_q = x'_q$ (hipótese comumente empregada na modelagem de máquinas de pólos salientes para descartar as perdas por correntes de Foucault no rotor [42]) e (iv) o desvio da velocidade do rotor da máquina em relação à velocidade síncrona é pequeno durante o período transitório de modo que o momento de inércia da máquina permaneça constante e igual a $M = \frac{H}{\pi f_{sinc}}$, sendo f_{sinc} a frequência síncrona do sistema.

Com isso, retornando ao modelo do SEP (4.3), o primeiro desafio é escrever a corrente I_d e a potência elétrica P_e , fornecida pelo gerador, em função das variáveis conhecidas e calcular o valor de E_{FD} e a condição inicial de E'_q . Então, primeiramente, inclui-se o modelo de 1 eixo do gerador síncrono ao sistema resultando no diagrama unifilar mostrado na figura 4.4.

⁷Uma falta é dita franca ou sólida, se a resistência elétrica entre o ponto de ocorrência da mesma e o ponto de acoplamento com a terra é zero.

Figura 4.4: Diagrama unifilar do SEP composto por uma máquina síncrona conectada a um barramento infinito incluindo o modelo do gerador, sendo $X_{linha(eq)}$ a reatância indutiva equivalente das linhas de transmissão que conectam o gerador ao barramento infinito.

Assim, resolvendo o fluxo de carga (condição de equilíbrio) no sistema pré-falta tem-se que:

$$\check{V}_{ger} = V_{ger}e^{j\theta} \quad (4.4)$$

$$\check{V}_{\infty} = V_{\infty} \quad (4.5)$$

$$\check{I}_{ger} = I_{ger}e^{j(\theta+\varphi)} = \frac{\check{V}_{ger} - \check{V}_{\infty}}{jX_{linha(eq)}} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} S_{ger}^{prf} &= \check{V}_{ger}\check{I}_{ger}^* = P_{ger}^{prf} + jQ_{ger}^{prf} = \\ &= \frac{V_{ger}V_{\infty}\sin(\theta)}{X_{linha(eq)}} + j \left[\frac{V_{ger}^2}{X_{linha(eq)}} - \frac{V_{ger}V_{\infty}\cos(\theta)}{X_{linha(eq)}} \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde $(\check{\cdot})$ e $(\cdot)^*$, denotam o fasor e o complexo conjugado de $(\cdot)$, respectivamente.

Calculando então o ângulo θ da tensão complexa na barra terminal do gerador, tem-se:

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{P_e^{prf} X_{linha(eq)}}{V_{ger}V_{\infty}} \right) = 13,003^\circ \quad (4.8)$$

A tensão E'_q , que aparece na figura 4.4, está em fase com a tensão E'_q , sendo regida pela equação [42]:

$$\check{E}' = E' \angle \delta = \check{V}_{ger} + r\check{I}_{ger} + jx_q\check{I}_{ger} \quad (4.9)$$

Avaliando a equação (4.9) para as condições em regime permanente pré-falta, determina-se a condição inicial do ângulo do rotor δ :

$$\begin{aligned} \check{E}' &= 9,538 + j4,050 = 1,036 \angle 23,006^\circ \\ \delta &= 23,006^\circ \end{aligned} \quad (4.10)$$

A tensão E'_q é regida pela equação [42]:

$$E'_q = (V_{ger})_q - x'_d I_d \quad (4.11)$$

sendo $(\cdot)_d$ e $(\cdot)_q$ as projeções de $(\cdot)$ sobre os eixos direto e em quadratura, respectivamente.

A condição inicial da tensão E'_q pode ser calculada pela equação (4.11). No entanto a corrente $\tilde{I}_{ger} = I_{ger(q(\infty))} + jI_{ger(d(\infty))}$ está descrita em um referencial d-q que gira à velocidade síncrona ω_{sinc} (referencial do barramento infinito), que é diferente do referencial d-q fixo no rotor da máquina, que gira à velocidade do rotor ω , no qual a equação (4.11) está escrita. A figura 4.5 ilustra os diferentes referenciais em questão.

Figura 4.5: Ilustração do referencial d-q síncrono (∞), fixo ao barramento infinito, e do referencial d-q do gerador, fixo ao rotor da máquina.

Assim, a partir da figura 4.5, pode-se escrever a transformação de coordenadas, para as grandezas de tensão e corrente, entre os referenciais d-q fixos ao barramento infinito e ao rotor do gerador:

$$\begin{bmatrix} V_q \\ V_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & \sin(\delta) \\ -\sin(\delta) & \cos(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{q(\infty)} \\ V_{d(\infty)} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\begin{bmatrix} I_q \\ I_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & \sin(\delta) \\ -\sin(\delta) & \cos(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{q(\infty)} \\ I_{d(\infty)} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Transformando, então, a corrente I_{ger} para o referencial d-q fixo ao rotor da máquina, pode-se calcular a condição inicial da tensão E'_q através da equação (4.11):

$$E'_q = 1,036 \text{ p.u.} \quad (4.14)$$

Utilizando a equação (4.2), em regime permanente ($\dot{E}'_q = 0$), é possível calcular o valor de E_{FD} :

$$E_{FD} = E'_q - (x_d - x'_d)I_d = 1,182 \text{ p.u.} \quad (4.15)$$

A tabela (4.1) resume os valores calculados para as condições iniciais pré-falta do cenário 1.

Tabela 4.1: Condições iniciais calculadas para o instante pré-falta do sistema máquina - barramento infinito (cenário 1).

variável	condição inicial
θ	13,003°
E'	1,036 p.u.
δ	23,006°
E'_q	1,036 p.u.
E_{FD}	1,182 p.u.

Por fim, escrevendo a componente I_d da corrente I_{ger} , no referencial d-q fixo ao rotor da máquina, e a potência elétrica P_e em função dos parâmetros conhecidos, e substituindo na equação (4.2), obtém-se a modelagem final do sistema na forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{E}'_q &= \frac{1}{\tau'_{do}} \left[E_{FD} - \frac{(x_d + X_{linha(eq)})}{(x'_d + X_{linha(eq)})} E'_q + \frac{(x_d - x'_d)}{(x'_d + X_{linha(eq)})} V_\infty \cos(\delta) \right] \\
 \dot{\delta} &= \omega \\
 M\dot{\omega} &= P_m - \frac{V_\infty E'_q \sin(\delta)}{(x'_d + X_{linha(eq)})} - D\omega
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

É importante mencionar que a modelagem do sistema não necessariamente exibe a escala de tempo associada ao sistema de maneira trivial, ou seja, não se pode afirmar de imediato se o modelo (4.16) é o sistema singularmente perturbado original, ou um dos subsistemas (lento / rápido) associados ao modelo original. Portanto, neste trabalho, num primeiro momento se identificarão as variáveis rápidas e lentas do modelo a fim de tornar evidente em qual escala de tempo está escrita o modelo sob análise.

Então, simulando o sistema (4.16) para um intervalo de tempo igual a 10s, verifica-se que a dinâmica da tensão E'_q é mais lenta que a dinâmica das variáveis mecânicas (δ / ω) do gerador, como pode ser verificado na figura 4.6. Tal constatação também pode ser vislumbrada ao se comparar a constante de tempo elétrica τ'_{do} com a constante eletromecânica H do gerador, o que resulta em verificar que a constante elétrica é aproximadamente 2,4 vezes maior que a eletromecânica.

A figura 4.7 mostra o comportamento da trajetória, no espaço de fase, do SEP no cenário 1. Pode-se notar que, sendo os sistemas pré e pós-falta coincidentes, a trajetória estável pós-falta converge para o asep pré-falta.

Desta forma, pode-se classificar a variável E'_q como uma variável lenta, enquanto as variáveis δ e ω serão classificadas como rápidas nas análises. Assim, tomando $\varepsilon = \frac{1}{\tau'_{do}}$, nota-se que o modelo (4.16) foi originalmente modelado na escala de tempo rápida τ , e é

Figura 4.6: Simulação da resposta dinâmica do sistema máquina - barramento infinito no cenário 1.

Figura 4.7: Resposta dinâmica do SEP do cenário 1 no espaço de estado. Os pontos (□) e (○) indicam o instante de eliminação da falta e o asep do sistema, respectivamente.

portanto uma representação do subsistema rápido Π_ε :

$$\Pi_\varepsilon : \begin{cases} \frac{dE'_q}{d\tau} = \varepsilon \left[E_{FD} - \frac{(x_d + X_{linha(eq)})}{(x'_d + X_{linha(eq)})} E'_q + \frac{(x_d - x'_d)}{(x'_d + X_{linha(eq)})} V_\infty \cos(\delta) \right] \\ \frac{d\delta}{d\tau} = \omega \\ M \frac{d\omega}{d\tau} = P_m - \frac{V_\infty E'_q \sin(\delta)}{(x'_d + X_{linha(eq)})} - D\omega \end{cases} \quad (4.17)$$

Os sistemas rápidos de fronteira, $\Pi_{BLS}(E'_q)$, podem ser gerados tomando $\varepsilon = 0$ em (4.17):

$$\Pi_{BLS}(E'_q) : \begin{cases} \frac{d\delta}{d\tau} = \omega \\ M \frac{d\omega}{d\tau} = P_m - \frac{V_\infty E'_q \sin(\delta)}{(x'_d + X_{linha(eq)})} - D\omega \end{cases} \quad (4.18)$$

O sistema lento Σ_0 , pode ser exibido definindo-se a escala de tempo lenta $t = \varepsilon\tau$, e fazendo $\varepsilon = 0$:

$$\Sigma_0 : \begin{cases} \frac{dE'_q}{dt} = E_{FD} - \frac{(x_d + X_{linha(eq)})}{(x'_d + X_{linha(eq)})} E'_q + \frac{(x_d - x'_d)}{(x'_d + X_{linha(eq)})} V_\infty \cos(\delta) \\ 0 = \omega \\ 0 = P_m - \frac{V_\infty E'_q \sin(\delta)}{(x'_d + X_{linha(eq)})} \end{cases} \quad (4.19)$$

O sistema lento Σ_0 é uma equação algébrico-diferencial, cuja solução está restrita à variedade Γ definida por:

$$\Gamma = \left\{ (E'_q, \delta, \omega) \in \mathbb{R}^3 : \omega = 0 \text{ e } P_m = \frac{V_\infty E'_q \sin(\delta)}{(x'_d + X_{linha(eq)})} \right\} \quad (4.20)$$

Uma vez modelado o sistema original Π_ε , na escala de tempo rápida τ , e os subsistemas rápido, $\Pi_{BLS}(E'_q)$, e lento, Σ_0 , associados, derivam-se as funções energia para cada um destes sistemas (vide apêndice A deste trabalho) [2], [3]:

$$V_\varepsilon(E'_q, \delta, \omega) = \frac{M\omega^2}{2} - P_m\delta - \frac{V_\infty E'_q \cos(\delta)}{x'_d + X_{linha(eq)}} + \frac{x_d + X_{linha(eq)}}{(x'_d + X_{linha(eq)})(x_d - x'_d)} \frac{E_q'^2}{2} - \frac{E'_q E_{FD}}{x_d - x'_d} \quad (4.21)$$

$$V_{(F)}(E'_q, \delta, \omega) = \frac{M\omega^2}{2} - P_m\delta - \frac{V_\infty E'_q \cos(\delta)}{x'_d + X_{linha(eq)}} \quad (4.22)$$

$$V_{(S)}(E'_q, \delta) = -(x_d - x'_d)P_m\delta - \frac{x_d - x'_d}{x'_d + X_{linha(eq)}} V_\infty E'_q \cos(\delta) + \frac{x_d + X_{linha(eq)}}{x'_d + X_{linha(eq)}} \frac{E_q'^2}{2} - E'_q E_{FD} \quad (4.23)$$

Realizando os passos do método TTS-CUEP para sistemas com duas escalas de tempo, conforme apresentado na seção 4.2 deste trabalho, pode-se calcular o CUEP do sistema original Π_ϵ através da decomposição da dinâmica do sistema original em duas escalas de tempo, e consequentemente realizar o cálculo do CUEP nos subsistemas lento e rápido associados, como apresentado nas figuras 4.8 e 4.9.

Figura 4.8: Decomposição da dinâmica do sistema original nas dinâmicas lenta e rápida associadas, durante a aplicação do método TTS-CUEP no sistema máquina - barramento infinito (cenário 1). Os pontos (Δ) e ($*$) representam respectivamente o *exit point* da trajetória em falta do sistema rápido e o ponto onde a soma da norma das derivadas do sistema rápido pós-falta atinge seu primeiro mínimo.

Primeiramente, realizando a integração numérica do sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$ verifica-se que o mesmo é instável, e portanto prossegue-se para a determinação do CUEP do mesmo. O primeiro máximo de energia potencial sobre a trajetória do sistema rápido em falta é o *exit point*, $(E'_{q(exit(F))}, \delta_{exit(F)}, \omega_{exit(F)}) = (1,036; 2,736; 10,885)$, indicado pelo símbolo (Δ) nas figuras 4.8 e 4.9.

A partir do *exit point*, integra-se o sistema rápido pós-falta ($\Pi_{BLS}^{pf}(E'_q(\tau = 0))$) até que o primeiro mínimo da soma das normas das derivadas que compõem este sistema seja atingido, sendo tal ponto indicado pelo símbolo ($*$) nas figuras 4.8 e 4.9. Este procedimento visa obter uma melhor aproximação para o CUEP do sistema rápido, uma vez que sendo o último um ponto de equilíbrio hiperbólico e estando o *exit point* próximo à variedade estável deste, a integração do sistema pós-falta conduz naturalmente a uma aproximação do CUEP.

O CUEP do sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$ é, então, calculado utilizando-se o método

Figura 4.9: Visualização tridimensional (no espaço de estados) da aplicação dos passos do método TTS-CUEP no sistema máquina - barramento infinito (cenário 1). Os pontos ($\triangle$) e ($*$) representam respectivamente o *exit point* da trajetória em falta do sistema rápido e o ponto onde a soma da norma das derivadas do sistema rápido pós-falta atinge seu primeiro mínimo.

de Newton-Raphson, utilizando-se como condição inicial o ponto de mínimo da soma das normas das derivadas que compõem o sistema, obtido no passo anterior. Tal procedimento resulta em: $(E'_{q(CUEP(F))}, \delta_{CUEP(F)}, \omega_{CUEP(F)}) = (1,036; 2,740; 0)$.

É importante ressaltar que o CUEP do sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$ está sobre a componente conexa instável Γ_u de tipo 1, e é um ponto de equilíbrio do sistema rápido, porém o mesmo não é um ponto de equilíbrio do sistema lento Σ_0 nem do sistema original Σ_ε .

Dito isto, procede-se à verificação de estabilidade do sistema do sistema rápido avaliando a energia total do sistema rápido no instante de eliminação da falta, $\tau_{ab} = 0,277$, e compara-se com a energia potencial do CUEP:

$$V_{ab(F)} = -2,548 \text{ p.u.} < V_{CUEP(F)} = -2,309 \text{ p.u.}$$

Logo o sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$ é transitoriamente estável e prossegue-se à determinação do CUEP do sistema lento Σ_0 . Uma informação relevante é que o CUEP do sistema rápido não fornece uma estimativa conservadora para o tempo crítico de abertura, uma vez que o mesmo não é um ponto de equilíbrio do sistema original Π_ε .

Dito isto, apenas por ilustração, pode-se utilizar a energia $V_{CUEP(F)}$ e estimar o tempo

crítico de abertura para o subsistema rápido ($\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$) como sendo igual a: $\tau_{cr(F)} = 0,280$ s, enquanto o verdadeiro tempo de abertura, para o sistema original Π_ε reside no intervalo $(0,277$ s, $0,278$ s).

Sendo o CUEP genericamente um uep de tipo 1, se o mesmo estiver localizado sobre a componente conexa Γ_u de tipo 1, então o mesmo é um asep do sistema lento e a dinâmica deste sistema, no período pós-falta, naturalmente converge para o CUEP.

Como pode ser verificado na figura 4.8, o CUEP do sistema lento Σ_0 é, então, obtido via integração do sistema lento pós-falta, tomando como condição inicial o CUEP do sistema rápido ($\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$), como sendo o ponto: $(E'_{q(CUEP(S))}, \delta_{CUEP(S)}, \omega_{CUEP(S)}) = (0,413; 1,770; 0)$.

Uma vez que todo ponto de equilíbrio do sistema Σ_0 é também um ponto de equilíbrio de Π_ε , então o CUEP do sistema lento é o CUEP uniforme do sistema original.

A energia potencial do sistema original, V_ε , avaliada sobre o CUEP uniforme é igual a $V_{CUEP(\varepsilon)} = -1,288$ p.u.. A intersecção do conjunto de nível da função energia, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : V_\varepsilon(\mathbf{x}) < V_{CUEP(\varepsilon)}\}$, e o plano $\omega = 0$ pode ser visualizada na figura 4.8.

A estimativa do tempo crítico de abertura fornecida pelo método TTS-CUEP é igual a: $\tau_{cr} = 0,166$ s, como pode ser verificado na figura 4.10. O tempo crítico verdadeiro para a perturbação em questão neste cenário está contido no intervalo $(0,277$ s, $0,278$ s), o que verifica o conservadorismo da análise realizada e ratifica a aplicação do método TTS-CUEP na análise de estabilidade transitória para modelos de SEPs com duas escalas de tempo.

Figura 4.10: Variação da energia total do sistema Π_ε e estimativa do tempo crítico de abertura para o sistema máquina - barramento infinito (cenário 1).

Cenário 2: Interrupção simultânea de 3 linhas de transmissão e reconexão de 1 linha de transmissão no sistema pós-falta

Neste cenário, ocorre a interrupção simultânea de 3 linhas de transmissão no sistema, havendo a reconexão de 1 linha no instante $\tau_{ab} = 0,4084$ s, fazendo então com que a topologia do sistema pós-falta seja diferente da topologia do sistema pré-falta. Os dados de operação pré-falta para o SEP em questão são: $P_m = 0,815$ p.u., $D = 0.0588$ p.u., $H = 2,77$ s, $\tau'_{do} = 6,6$ s, $X_{linha} = 1,4$ p.u., $x'_d = 0,3$ p.u., $x_d = 1,15$ p.u., $V_{ger} = 1,0$ p.u. e $V_\infty = 1,0$ p.u. (sendo $S_{base} = 2220$ MVA e $V_{base} = 24$ kV [14]).

De maneira análoga ao cenário 1, calculam-se as condições iniciais para esta nova condição de operação. A tabela (4.2) resume os valores calculados para as condições iniciais pré-falta do cenário 2.

Tabela 4.2: Condições iniciais calculadas para o instante pré-falta do sistema máquina - barramento infinito (cenário 2).

variável	condição inicial
θ	$16,574^\circ$
E'	$1,064$ p.u.
δ	$29,858^\circ$
E'_q	$1,064$ p.u.
E_{FD}	$1,321$ p.u.

Simulando, então, o sistema original Π_ε no cenário 2, para um intervalo de tempo igual a 10s, verifica-se que o sistema é instável, como pode ser observado na figura 4.11. Ao reconectar a linha próximo ao tempo crítico de abertura a dinâmica rápida conduz o sistema para próximo à componente conexa estável Γ_s mas ainda assim sua trajetória diverge, uma vez que a trajetória pós-falta é iniciada fora da região de estabilidade do asep pós-falta, como apresentado na figura 4.13.

A figura 4.12 mostra o comportamento da trajetória, no espaço de fase, do SEP no cenário 2. Pode-se notar que os sistemas pré e pós-falta apresentam aseps distintos (não coincidentes), uma vez que os parâmetros de rede para ambos os sistemas são diferentes.

Aplicando o método TSS-CUEP para sistemas com duas escalas de tempo, pode-se calcular o CUEP do sistema original Π_ε através da decomposição da dinâmica em duas escalas de tempo, como pode ser visualizado nas figuras 4.13-4.14.

Analogamente ao procedimento realizado na análise do cenário 1, realizando a integração numérica do sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$ verifica-se que o mesmo é instável, e portanto prossegue-se à determinação do CUEP do sistema rápido, que resulta em: $(E'_{q(CUEP(F))}, \delta_{CUEP(F)}, \omega_{CUEP(F)}) = (1,064; 2,269; 0)$.

Uma vez calculado o CUEP do sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$, verifica-se a estabilidade do mesmo avaliando-se a energia total do sistema rápido no instante de reconexão da

Figura 4.11: Simulação da resposta dinâmica do sistema máquina - barramento infinito no cenário 2.

Figura 4.12: Resposta dinâmica do SEP do cenário 2 no espaço de estado. Os pontos (□), (○) e (◆) indicam o instante de reconexão da linha de transmissão o asep do sistema pré-falta, e o asep do sistema pós-falta, respectivamente.

Figura 4.13: Decomposição da dinâmica do sistema original nas dinâmicas lenta e rápida associadas, durante à aplicação do método TTS-CUEP no sistema máquina - barramento infinito (cenário 2). Os pontos ($\triangle$) e ($*$) representam respectivamente o *exit point* da trajetória (ou pseudo-trajetória) em falta do sistema rápido (ou lento) e o ponto onde a soma da norma das derivadas do sistema rápido (ou lento) pós-falta atinge seu primeiro mínimo.

linha de transmissão, $\tau_{ab} = 0,408$, e comparando esta com a energia potencial do CUEP:

$$V_{ab(F)} = -1,130 \text{ p.u.} > V_{CUEP(F)} = -1,162 \text{ p.u.}$$

Logo, o método CUEP não dá garantias de que o sistema rápido ($\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$) seja estável, sendo portanto necessária a integração numérica deste sistema, a fim de verificar sua estabilidade e concluir sobre a estabilidade do sistema original. Realizando a simulação do sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$, para um intervalo de tempo igual a 5s, conclui-se que este é transitoriamente estável, como pode ser observado na figura 4.15.

Prossegue-se, então, para a busca do CUEP no sistema lento Σ_0 . Verifica-se que a pseudo-trajetória pós-falta do sistema lento atinge o *exit point*, ponto ($\triangle$) nas figuras 4.13-4.14, sobre a componente conexa estável Γ_s . Seguindo o procedimento análogo ao realizado durante a busca do CUEP para o sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$, obtém-se o CUEP do sistema lento Σ_0 : $(E'_{q(CUEP(S))}, \delta_{CUEP(S)}, \omega_{CUEP(S)}) = (0,858; 1,252; 0)$, que é o CUEP uniforme do sistema original Π_ϵ .

Avaliando a energia potencial do sistema original, V_ϵ , sobre o CUEP uniforme é igual a $V_{CUEP(\epsilon)} = -1,822 \text{ p.u.}$ Pode-se visualizar a intersecção do conjunto de nível da função energia, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : V_\epsilon(\mathbf{x}) < V_{CUEP(\epsilon)}\}$, e o plano $\omega = 0$ na figura 4.13.

Figura 4.14: Visualização tridimensional (no espaço de estados) da aplicação dos passos do método TTS-CUEP no sistema máquina - barramento infinito (cenário 2). Os pontos ($\triangle$) e (*) representam respectivamente o *exit point* da trajetória (ou pseudo-trajetória) em falta do sistema rápido (ou lento) e o ponto onde a soma da norma das derivadas do sistema rápido (ou lento) pós-falta atinge seu primeiro mínimo.

É importante observar que não é possível obter uma estimativa para o tempo crítico de abertura através do método TTS-CUEP, uma vez que a energia do sistema original Π_ε é maior que a energia potencial do CUEP uniforme desde o instante anterior à ocorrência da perturbação, como pode ser verificado na figura 4.16. Porém, o método TTS-CUEP foi capaz de calcular o CUEP uniforme para o sistema Π_ε , através da decomposição de sua dinâmica em duas escalas de tempo, o que não seria possível no método tradicional, uma vez que o *exit point* da trajetória em falta não seria encontrado, impossibilitando assim o cálculo do CUEP.

Novamente é importante mencionar que a estabilidade do sistema rápido $\Pi_{BLS}(E_q'(\tau = 0))$ não implica na estabilidade do sistema original Π_ε , porém, como ilustração, pode-se avaliar o tempo crítico de abertura para o sistema rápido, utilizando o CUEP deste sistema, obtendo-se: $\tau_{cr} = 0,360$ s. O tempo crítico verdadeiro para a perturbação em questão neste cenário está contido no intervalo (0,408 s, 0,409 s), o que verifica, neste caso, um certo conservadorismo na utilização da estimativa obtido pelo sistema rápido, embora ainda não existam, na literatura vigente, condições que possam garantir tal conservadorismo.

Figura 4.15: Simulação do sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$.

Figura 4.16: Variação da energia total do sistema Π_ϵ e estimativa do tempo crítico de abertura para o sistema máquina - barramento infinito (cenário 2).

Cenário 3: Interrupção simultânea de 2 linhas de transmissão e reconexão de 1 linha de transmissão no sistema pós-falta

No último cenário estudado neste exemplo, ocorre a interrupção simultânea de 2 linhas de transmissão no sistema, havendo a reconexão de 1 linha no instante $\tau_{ab} = 28,511$ s, fazendo então com que a topologia do sistema pós-falta seja diferente da topologia do sistema pré-falta. Os dados de operação pré-falta para o SEP são: $P_m = 0,815$ p.u., $D = 0.0588$ p.u., $H = 2,77$ s, $\tau'_{do} = 6,6$ s, $X_{linha} = 1,5$ p.u., $x'_d = 0,3$ p.u., $x_d = 1,15$ p.u., $V_{ger} = 1,0$ p.u. e $V_\infty = 1,0$ p.u. (sendo $S_{base} = 2220$ MVA e $V_{base} = 24$ kV [14]).

Calculando as condições iniciais, analogamente aos cenários anteriores, obtêm-se os dados expressos na tabela (4.3).

Tabela 4.3: Condições iniciais calculadas para o instante pré-falta do sistema máquina - barramento infinito (cenário 3).

variável	condição inicial
θ	$16,574^\circ$
E'	$1,064$ p.u.
δ	$29,858^\circ$
E'_q	$1,066$ p.u.
E_{FD}	$1,331$ p.u.

Simulando o sistema original Π_ε , para um intervalo de tempo igual a 45s, verifica-se que o sistema pós-falta é estável. Assim, ao se reconectar a linha próximo ao tempo crítico de abertura a dinâmica rápida conduz o sistema para próximo à componente conexa estável Γ_s , uma vez que a condição inicial do sistema pós-falta está no interior da região de estabilidade do asep pós-falta, como apresentado nas figuras 4.17-4.18.

Uma peculiaridade que difere este cenário dos dois anteriores é que o sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$ em falta é estável, o que faz com que exista uma variedade de restrição Γ^f em falta, e portanto, a existência de dinâmicas lentas neste período seja permitida, como pode ser observado nas figuras 4.19-4.20.

Aplicando, então, o método TTS-CUEP para sistemas com duas escalas de tempo, pode-se calcular o CUEP do sistema original Π_ε através da decomposição da dinâmica em duas escalas de tempo, como pode ser visualizado nas figuras 4.19-4.20.

De maneira diferente aos cenários anteriores, após o sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$ em falta convergir para um asep, como pode ser verificado nas figuras 4.21-4.22, a dinâmica do sistema lento Σ_0 em falta faz com que a trajetória percorra a componente conexa estável Γ_s^f . A trajetória do sistema lento Σ_0 em falta atinge a singularidade na variedade de restrição Γ^f antes que a mesma encontra um ponto de equilíbrio e também antes que a pseudo-trajetória do sistema lento pós-falta encontre o *exit point*, fazendo com que o sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_{q(sing)})$ retorne a governar a dinâmica em falta do sistema (criando

Figura 4.17: Simulação da resposta dinâmica do sistema máquina - barramento infinito.

Figura 4.18: Resposta dinâmica do SEP do cenário 3 no espaço de estado. Os pontos (□), (○) e (◇) indicam o instante de reconexão da linha de transmissão, o asep do sistema pré-falta, e o asep do sistema pós-falta, respectivamente.

Figura 4.19: Decomposição da dinâmica do sistema original nas dinâmicas lenta e rápida associadas, durante à aplicação do método TTS-CUEP no sistema máquina - barramento infinito (cenário 3). Os pontos (Δ), ($*$) e ($\bigcirc$) representam respectivamente o *exit point* da trajetória (ou pseudo-trajetória) em falta do sistema rápido (ou lento), o ponto onde a soma da norma das derivadas do sistema rápido (ou lento) pós-falta atinge seu primeiro mínimo, e o asep do sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$ em falta.

Figura 4.20: Visualização tridimensional (no espaço de estados) da aplicação dos passos do método CUEP em duas escalas de tempo no sistema máquina - barramento infinito (cenário 3). Os pontos (Δ), ($*$) e ($\bigcirc$) representam respectivamente o *exit point* da trajetória (ou pseudo-trajetória) em falta do sistema rápido (ou lento), o ponto onde a soma da norma das derivadas do sistema rápido (ou lento) pós-falta atinge seu primeiro mínimo, e o asep do sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_q(\tau = 0))$ em falta.

um novo período transitório).

Figura 4.21: Simulação do sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_q(\tau=0))$ em falta.

Figura 4.22: Detalhe da trajetória do sistema rápido em falta, sobreposta à dinâmica do sistema original Π_ϵ em falta, projetada sobre o plano $\delta \times E'_q$ (para $\omega = 0$).

Após a trajetória atingir a singularidade, a trajetória do sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_{q(sing)})$ em falta torna-se instável, e, analogamente ao procedimento do cenário 1, procede-se à determinação do CUEP do sistema rápido, resultando em: $(E'_{q(CUEP(F))}, \delta_{CUEP(F)}, \omega_{CUEP(F)}) = (1,066; 2,275; 0)$, como ilustrado nas figuras 4.19-4.20.

Neste ponto da análise seria necessária realizar o estudo de estabilidade do sistema rápido em falta $\Pi_{BLS}(E'_{q(CUEP(F))})$, porém este sistema se apresenta descontínuo no tempo, sendo imprecisa a determinação da energia deste sistema no instante de reconexão da linha de transmissão, $V_{ab(F)}$. Assim, com o objetivo de prosseguir com as análises, assumiremos que o sistema rápido seja transitoriamente estável, e segue-se, então, a busca pelo CUEP do sistema lento Σ_0 .

Verifica-se, que a pseudo-trajetória pós-falta do sistema lento atinge o *exit point* sobre a componente conexa estável Γ_s^{pf} . Seguindo o procedimento análogo ao realizado durante a busca do CUEP para o sistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_{q(CUEP(F))})$, obtém-se o CUEP do sistema lento Σ_0 : $(E'_{q(CUEP(S))}, \delta_{CUEP(S)}, \omega_{CUEP(S)}) = (0,652; 1,557; 0)$, que é o CUEP uniforme do sistema original Π_ε .

Avaliando a energia potencial do sistema original, V_ε , sobre o CUEP uniforme tem-se $V_{CUEP(\varepsilon)} = -1,785$ p.u.. Pode-se visualizar a intersecção do conjunto de nível da função energia, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : V_\varepsilon(\mathbf{x}) < V_{CUEP(\varepsilon)}\}$, e o plano $\omega = 0$ na figura 4.19.

A estimativa do tempo crítico de abertura fornecida pelo método TTS-CUEP é igual a: $\tau_{cr} = 25,009$ s, como pode ser verificado na figura 4.23.

Figura 4.23: Variação da energia total do sistema Π_ε e estimativa do tempo crítico de abertura para o sistema máquina - barramento infinito (cenário 3).

O tempo crítico verdadeiro para a perturbação em questão neste cenário está contido no intervalo de 28,511 s a 28,512 s, o que verifica o conservadorismo da análise realizada e ratifica a aplicação do método TTS-CUEP na análise de estabilidade transitória de modelos de SEPs com duas escalas de tempo.

No próximo capítulo deste trabalho, a proposta para um novo algoritmo TTS-BCU para o cálculo do CUEP em sistemas com duas escalas de tempo (singularmente perturbados) será apresentada e discutida.

Capítulo 5

Um Algoritmo TTS-BCU para o Cálculo do CUEP em Sistemas com Duas Escalas de Tempo

5.1 Introdução

Neste capítulo, o desenvolvimento de um novo método TTS-BCU (algoritmo numérico) para o cálculo robusto do CUEP, em sistemas com duas escalas de tempo, é apresentado como a principal contribuição deste trabalho, sendo seu desenvolvimento teórico-matemático proposto e discutido em detalhes.

5.2 Uma Proposta do Algoritmo TTS-BCU para Modelos de SEPs com Duas Escalas de Tempo

O método BCU, proposto por Chiang, Wu e Varaiya em 1994 [34], visa a obtenção de um algoritmo numérico robusto e eficiente para o cálculo do CUEP na análise de estabilidade transitória de SEPs. O cálculo numérico do CUEP é um problema complexo, e na maioria das vezes impossível de ser resolvido sem se recorrer a um grande esforço computacional [4].

O algoritmo BCU utiliza de um sistema artificial de ordem reduzida, o qual preserva relações estáticas e dinâmicas entre seus pontos de equilíbrio e aqueles do sistema original, de modo a possibilitar que o CUEP do sistema original possa ser calculado com relativa facilidade, através do uso deste sistema reduzido.

O método BCU é reconhecidamente, na literatura moderna, o melhor método direto para análise de estabilidade transitória [32], porém o mesmo sofre com as dificuldades numéricas impostas em cada uma de suas etapas [37], [28], tais como a detecção do *exit point* e do ponto de mínimo gradiente (MGP), como visto anteriormente na seção 3.3

deste trabalho. Logo, algoritmos numéricos sofisticados são necessários para contornar estas dificuldades, requerendo com isto um grande esforço computacional para o cálculo do CUEP.

Neste trabalho, pretende-se desenvolver um novo algoritmo numérico TTS-BCU que, conjuntamente com o método TTS-CUEP, explore as diferentes escalas de tempo (lenta e rápida) que compõem a dinâmica do SEP, a fim de subdividir o modelo original em modelos lento e rápido, de menores ordens e numericamente melhores condicionados, e com isso obter um algoritmo numérico TTS-BCU mais rápido e robusto, quando comparado ao algoritmo BCU tradicional, para realizar o cálculo do CUEP neste tipo de sistema.

Nesta proposta do algoritmo TTS-BCU, o CUEP do sistema original será calculado através do cálculo do CUEP do sistema lento e/ou do sistema rápido associado ao sistema original. Portanto, o algoritmo numérico TTS-BCU é um algoritmo numérico que possibilita o cálculo dos CUEPs dos sistemas lento e rápido, e consequentemente do sistema original.

Inicialmente, este trabalho irá tratar os modelos reduzidos de SEPs, nos quais o sistema de transmissão é reduzido aos nós internos das forças eletromotrizes dos geradores conectados ao sistema. Tal simplificação sempre é possível, quando o sistema de transmissão permanecer em regime senoidal, as cargas forem modeladas como impedâncias constantes e os geradores forem modelados classicamente ou utilizando modelos de 1 ou 2 eixos associados a modelos de AVR's simplificados (cuja entrada independem de tensões externas ao gerador controlado).

Primeiramente, dada as hipóteses para a redução da rede, o modelo matemático do SEP pode ser descrito pelo seguinte conjunto de equações diferenciais ordinárias singularmente perturbadas (EDOSP):

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{w}}{dt} &= f_S(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \\ \varepsilon \frac{d\mathbf{z}}{dt} &= f_F(\mathbf{w}, \mathbf{z})\end{aligned}\tag{5.1}$$

sendo $\mathbf{w}$ as variáveis dinâmicas rápidas e $\mathbf{z}$ as variáveis dinâmicas lentas do sistema.

Tomando a escala de tempo rápida, $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$, pode-se escrever o modelo EDOSP (5.1) como:

$$\frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = \varepsilon f_S(\mathbf{w}, \mathbf{z})\tag{5.2}$$

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = f_F(\mathbf{w}, \mathbf{z})\tag{5.3}$$

Suponha, então, que exista uma função energia $V = V_k(\boldsymbol{\omega}) + V_p(\mathbf{w}, \mathbf{z})$, como na definição (2.3.2), tal que o modelo do SEP (com duas escalas de tempo) possa ser escrito

na forma [13]:

$$\Pi_\varepsilon : \begin{cases} \frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) + g_S(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) \\ \frac{d\hat{\mathbf{z}}}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{z}}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) + g_{\mathcal{F}}(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) \\ \frac{d\boldsymbol{\delta}}{d\tau} = \boldsymbol{\omega} \\ M \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\delta}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) - D\boldsymbol{\omega} + g'_{\mathcal{F}}(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) \end{cases} \quad (5.4)$$

É importante mencionar que no modelo (5.4) as variáveis rápidas foram decompostas na forma: $\mathbf{z} = (\hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\omega})$, de modo que as variáveis eletromecânicas do gerador foram previamente selecionadas como variáveis rápidas do sistema. As funções $g_S(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta})$ e $g_{\mathcal{F}}(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta})$ representam (contabilizam) os efeitos das condutâncias de transferência (G_{ij}), considerando a rede reduzida, no modelo do SEP.

É válido ressaltar também que a modelagem anterior já foi demonstrada possível para sistemas de rede reduzida considerando o modelo clássico para os geradores síncronos, bem como para modelos de 1 e 2 eixos associados a modelos de AVR's simplificados (cuas entradas independem de tensões externas ao gerador controlado) [105].

Assim, seria interessante utilizar um sistema singularmente perturbado artificial de ordem reduzida (com duas escalas de tempo), a fim de facilitar o cálculo do CUEP no sistema original, que possa ser descrito da seguinte forma gradiente¹ aproximada [13]:

$$\Pi_{\varepsilon(AR)} : \begin{cases} \frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) + g_S(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) \\ \frac{d\hat{\mathbf{z}}}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{z}}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) + g_{\mathcal{F}}(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) \\ \frac{d\boldsymbol{\delta}}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\delta}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) + g'_{\mathcal{F}}(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) \end{cases} \quad (5.5)$$

Para tanto é necessário provar as relações estáticas (tipo e localização dos pontos de equilíbrio hiperbólicos) e dinâmicas (presença ou não na fronteira da região de estabilidade), descritas em detalhes na seção 3.3, entre os pontos de equilíbrio do sistema original com duas escalas de tempo (5.4) e do sistema artificial reduzido com duas escalas de tempo (5.5). Porém tal demonstração não é trivial, sendo, portanto, dividida em 8 etapas, como mostrado na figura 5.1, nos quais as relações estáticas e dinâmicas entre os pontos de equilíbrio dos dois sistemas desejados são demonstradas através do uso de vários subsistemas intermediários.

Na próxima seção deste trabalho, será lançada alguma luz sobre a demonstração das relações estáticas e dinâmicas entre os pontos de equilíbrio do sistema original com duas escalas de tempo (5.4) e um sistema artificial reduzido com duas escalas de tempo (5.5), conforme evidenciadas na figura 5.1.

¹Um sistema gradiente é dado na forma: $\dot{\mathbf{x}} = \nabla V(\mathbf{x})$, sendo V uma função escalar de classe $\mathcal{C}^1$.

Figura 5.1: Estratégia para a demonstração do algoritmo numérico TTS-BCU para sistemas com duas escalas de tempo.

5.3 Discussão das Relações Estáticas e Dinâmicas na Demonstração do Algoritmo TTS-BCU

O algoritmo BCU tradicional [34], faz uso de um sistema artificial reduzido para possibilitar o cálculo do CUEP do sistema original, de modo que as relações estáticas e dinâmicas entre os pontos de equilíbrio de ambos os sistemas sejam preservadas. Porém, o método TTS-BCU, proposto neste trabalho, pretende estender a demonstração de tais relações entre os pontos de equilíbrio dos subsistemas rápidos e lentos derivados de ambos os sistemas anteriores, de modo que estas sejam conservadas pela decomposição das dinâmicas originais em duas escalas de tempo.

Desta maneira, será possível calcular o CUEP do sistema lento (rápido) derivado do sistema original, através do cálculo do CUEP do sistema lento reduzido (rápido) derivado do sistema artificial. Tal possibilidade é atraente, tanto do ponto de vista de possibilitar o cálculo do CUEP do sistema original, quanto do menor esforço computacional requerido na identificação do CUEP, haja visto a forma reduzida (gradiente) dos sistemas reduzidos lento e rápido associados ao sistema artificial (vide figura 5.1).

Dito isto, a fim de verificar as relações estáticas e dinâmicas entre os pontos de equilíbrio do sistema original com duas escalas de tempo (5.4) e aqueles do sistema artificial reduzido com duas escalas de tempo (5.5), discuti-se a seguir as etapas envolvidas na demonstração do algoritmo TTS-BCU proposto.

Etapas 1 e 8: na etapa 1, é necessário verificar as relações estáticas e dinâmicas entre os pontos de equilíbrio do sistema original (5.4) e aqueles do seguinte sistema:

$$\Pi_\varepsilon^* : \begin{cases} \frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) \\ \frac{d\hat{\mathbf{z}}}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) \\ \frac{d\boldsymbol{\delta}}{d\tau} = \boldsymbol{\omega} \\ M \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\delta}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) - D\boldsymbol{\omega} \end{cases} \quad (5.6)$$

Para tanto, considerando que as condutâncias de transferência sejam suficientemente pequenas, pode-se considerar que o sistema Π_ε (5.4) é uma perturbação $\mathcal{C}^1$ (contínua e diferenciável) do sistema Π_ε^* (5.6) [4]. Com tal objetivo em mente, utilizam-se os seguintes resultados, abaixo relacionados, para verificar as relações estáticas e dinâmicas entre os pontos de equilíbrio dos sistemas Π_ε (5.4) e Π_ε^* (5.6).

Teorema 5.3.1 (Persistência dos Pontos de Equilíbrio [4]). *Seja $\tilde{f} : N \rightarrow P$, um campo vetorial $\mathcal{C}^1$ e N um conjunto aberto no espaço vetorial P . Seja $\mathbf{x}_s$ um asep e seja $\mathbf{x}_u$ um ponto de equilíbrio hiperbólico de tipo k sobre a fronteira da região de estabilidade $\partial A(\mathbf{x}_s)$, tal que a intersecção das variedades estáveis e instáveis dos pontos de equilíbrio presentes na fronteira da região de estabilidade satisfazem a condição de transversalidade. Então,*

para qualquer $\mu > 0$, existe uma $\tilde{\delta}$ -vizinhança $h \subset v(N)$ de $\tilde{f}$, onde $v(N)$ é o conjunto de todos os campos vetoriais $\mathcal{C}^1$ em N , e uma vizinhança $u \subset N$ de $\mathbf{x}_u$, tal que para todo campo vetorial $\tilde{g} \in h$:

1. Existe um único ponto de equilíbrio hiperbólico de tipo k , $\mathbf{x}_u^{\tilde{g}}$, do campo vetorial $\tilde{g}$, tal que $\mathbf{x}_u^{\tilde{g}} \in u$;
2. Além disso, $\mathbf{x}_u^{\tilde{g}}$ está sobre a fronteira da região de estabilidade $\partial A(\mathbf{x}_s^{\tilde{g}})$, onde $\mathbf{x}_s^{\tilde{g}}$ é um asep do campo vetorial $\tilde{g}$ e $\|\mathbf{x}_s^{\tilde{g}} - \mathbf{x}_s\| < \mu$.

Assim, utilizando o teorema 5.3.1, é possível demonstrar o seguinte resultado principal.

Teorema 5.3.2 (Relações Estáticas e Dinâmicas entre Π_ε e Π_ε^* [26]). *Considere que as condutâncias do sistema Π_ε sejam suficientemente pequenas tais que $G_{ij} < \sigma^*$, para algum $\sigma > 0$, e seja $(\mathbf{w}_i, \mathbf{z}_i)$ um ponto de equilíbrio hiperbólico de tipo k do sistema original Π_ε . Então existe um ponto de equilíbrio hiperbólico de tipo k , $(\tilde{\mathbf{w}}_i, \tilde{\mathbf{z}}_i)$, em uma vizinhança μ , com $\mu > 0$, de $(\mathbf{w}_i, \mathbf{z}_i)$, no sistema Π_ε^* . Além disso, se $(\mathbf{w}_u, \mathbf{z}_u)$ é um uep sobre a fronteira de estabilidade $\partial A(\mathbf{w}_s, \mathbf{z}_s)$ do sistema Π_ε , então existe um uep $(\tilde{\mathbf{w}}_u, \tilde{\mathbf{z}}_u)$, em uma vizinhança μ , com $\mu > 0$, de $(\mathbf{w}_u, \mathbf{z}_u)$, no sistema Π_ε^* na fronteira de estabilidade de $\partial A(\tilde{\mathbf{w}}_s, \tilde{\mathbf{z}}_s)$.*

Com o resultado anterior, verificam-se as relações estáticas e dinâmicas entre ambos os sistemas, concluindo a etapa 1. Procede-se de modo análogo na verificação das relações na etapa 8.

Etapas 2/3 e 6/7: Primeiramente relativo à etapa 2/3, é necessário observar que as mesmas não podem ser verificadas de forma independente, porém compõem uma única etapa integrada, na qual se verifica a relação entre os pontos de equilíbrio do sistema singularmente perturbado Π_ε^* (5.6) e de seus subsistemas derivados: lento e rápido, como apresentado na figura 5.1.

Dito isto, verificam-se as relações estática e dinâmica entre os pontos de equilíbrio do sistema singularmente perturbado Π_ε^* (5.6), e aqueles do seu subsistema lento associado:

$$\Sigma_0 : \begin{cases} \frac{d\mathbf{w}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) \\ 0 = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) \\ 0 = \boldsymbol{\omega} \\ 0 = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\delta}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) - D\boldsymbol{\omega} \end{cases} \quad (5.7)$$

Para tanto, é trivial verificar que os conjuntos dos pontos de equilíbrio do sistema singularmente perturbado Π_ε^* (5.6) e de seu subsistema lento associado Σ_0 (5.7) é idêntico. Logo, os teoremas 2.4.2 e 2.4.3 garantem que, em uma componente estável Γ_s de Σ_0 , as relações estática e dinâmica entre os pontos de equilíbrio destes dois sistemas se verificam.

Resta, agora, verificar as relações estáticas e dinâmicas entre equilíbrios que residem sobre uma componente instável Γ_u de Σ_0 (5.7). Neste ponto, o teorema 2.4.3 garante a relação estática devida, para os fins da aplicação do algoritmo TTS-BCU, uma vez que o CUEP uniforme do sistema original Π_ε^* (5.6) é genericamente um ponto de equilíbrio hiperbólico de tipo 1 deste sistema, e portanto, genericamente um asep do sistema Σ_0 (5.7) quando encontrado sobre uma componente instável Γ_u de tipo 1 (vide teorema 2.4.2).

Quanto a relação dinâmica, esta se estabelece com o auxílio do subsistema rápido associado, definido por:

$$\Pi_0 : \begin{cases} \frac{d\hat{\mathbf{z}}}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) \\ \frac{d\boldsymbol{\delta}}{d\tau} = \boldsymbol{\omega} \\ M \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\delta}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) - D\boldsymbol{\omega} \end{cases} \quad (5.8)$$

Este sistema é responsável por garantir a relação dinâmica necessária à aplicação do algoritmo TTS-BCU, uma vez que se o CUEP uniforme do sistema singularmente perturbado Π_ε^* (5.6) estiver sobre uma componente instável Γ_u de Σ_0 (5.7), então, este deve pertencer à fronteira de estabilidade de um determinado sistema rápido Π_0 (5.8) cujo asep esteja contido no interior da região de estabilidade do asep do sistema Π_ε^* (5.6), como apresentado no teorema 2.4.4.

Desta forma, se estabelecem as relações estáticas e dinâmicas de interesse entre o sistema singularmente perturbado Π_ε^* (5.6) e seus subsistemas lento Σ_0 (5.7) e rápido Π_0 (5.8) associados, verificando assim a etapa 2/3. A demonstração da etapa 6/7 segue de modo análogo.

Etapa 4: De modo análogo ao realizado para o sistema Π_ε (5.4) na etapa 1, pode-se expressar o sistema artificial reduzido $\Pi_{\varepsilon(AR)}$ (5.5) na forma de um sistema gradiente singularmente perturbado após a etapa 8:

$$\Pi_{\varepsilon(AR)}^* : \begin{cases} \frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) \\ \frac{d\hat{\mathbf{z}}}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) \\ \frac{d\boldsymbol{\delta}}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\delta}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) \end{cases} \quad (5.9)$$

Com isso, o subsistema lento reduzido será expresso por:

$$\Sigma_{0(AR)}^* : \begin{cases} \frac{d\mathbf{w}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) \\ 0 = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) \\ 0 = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\delta}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\delta}) \end{cases} \quad (5.10)$$

Observa-se, então, que o subsistema lento $\Sigma_{0(AR)}^*$ (5.10), derivado do sistema artificial reduzido $\Pi_{\varepsilon(AR)}^*$ (5.9), coincide com o subsistema lento Σ_0 (5.7), derivado do sistema

original Π_ε^* (5.6), e portanto as relações estáticas e dinâmicas entre os subsistemas lentos trivialmente se verificam.

Etapa 5: Por fim, na última etapa, deseja-se verificar as relações estáticas e dinâmicas entre os equilíbrios do subsistema rápido derivado do sistema artificial reduzido $\Pi_{\varepsilon(AR)}^*$ (5.9), expresso por:

$$\Pi_{0(AR)}^* : \begin{cases} \frac{d\hat{z}}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \delta) \\ \frac{d\delta}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial \delta} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \delta) \end{cases} \quad (5.11)$$

e o subsistema rápido Π_0^* (5.8) derivado do sistema original Π_ε^* (5.6).

No entanto, a verificação das relações estáticas e dinâmicas, neste caso em particular, segue o desenvolvimento original do método BCU, como apresentada na figura 5.2, para o caso específico das relações entre os subsistemas rápidos Π_o^* (5.8) e $\Pi_{0(AR)}^*$ (5.11), e discutido em detalhes nas referências [26], [4].

Figura 5.2: Etapas para a demonstração detalhada das relações estáticas e dinâmicas entre os pontos de equilíbrio dos sistemas rápidos Π_o^* (5.8) e $\Pi_{0(AR)}^*$ (5.11) [4].

Observando, então, a forma das equações que compõem ambos os subsistemas rápidos Π_0^* (5.8) e $\Pi_{0(AR)}^*$ (5.11), verifica-se que as relações estáticas e dinâmicas entre os pontos de equilíbrio nos passos A e E, mostrados na figura 5.2, são verificados analogamente às etapas 1 e 8 do algoritmo TTS-BCU.

No passo B, verificam-se as relações estáticas e dinâmicas entre os pontos de equilíbrio do sistema gradiente:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{z}}}{d\tau} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \delta) \\ \frac{d\delta}{d\tau} &= -\frac{\partial}{\partial \delta} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \delta)\end{aligned}\quad (5.12)$$

e os pontos de equilíbrio do sistema

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{z}}}{d\tau} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \delta) \\ \frac{d\delta}{d\tau} &= -\frac{\partial}{\partial \delta} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \delta) \\ M \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\tau} &= -D\boldsymbol{\omega}\end{aligned}\quad (5.13)$$

Observa-se no sistema (5.13) que a dinâmica da variável $\boldsymbol{\omega}$ é completamente desacoplada das demais, assim como, a dinâmica das variáveis $(\hat{\mathbf{z}}, \delta)$ é a mesma do sistema (5.12). Com isso, verificam-se as relações estáticas e dinâmicas entre os sistemas (5.13) e (5.12) trivialmente.

Nos passos C e D, demonstram-se as relações estáticas e dinâmicas entre os pontos de equilíbrio do sistema (5.13) e o sistema:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{z}}}{d\tau} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \delta) \\ \frac{d\delta}{d\tau} &= \boldsymbol{\omega} \\ M \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\tau} &= -\frac{\partial}{\partial \delta} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \delta) - D\boldsymbol{\omega}\end{aligned}\quad (5.14)$$

Verifica-se facilmente que os sistemas (5.13) e (5.14) possuem os mesmos equilíbrios. Assim, para provar as relações estáticas entre seus respectivos pontos de equilíbrio, basta calcular as matrizes Jacobianas, avaliadas nos pontos de equilíbrio, e utilizar o teorema da inércia de Sylvester [106] para verificar a igualdade entre as inércias (número de autovalores com parte real positiva, negativa e zero) destas matrizes.

Para verificar as relações dinâmicas entre os pontos de equilíbrio destes sistemas é necessário fazer uso do seguinte sistema intermediário:

$$d(\lambda) : \begin{cases} \frac{d\hat{\mathbf{z}}}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \delta) \\ \frac{d\delta}{d\tau} = (1 - \lambda)\boldsymbol{\omega} - \lambda \frac{\partial}{\partial \delta} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \delta) \\ M \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\tau} = -(1 - \lambda) \frac{\partial}{\partial \delta} V_p(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{z}}, \delta) - D\boldsymbol{\omega} \end{cases}$$

Agora, é preciso admitir que a condição de transversalidade a um parâmetro seja satisfeita para todo $\lambda \in [0, 1]$ no sistema $d(\lambda)$. Em termos físicos, a satisfação da condição

de transversalidade a um parâmetro implica que o amortecimento do sistema, parâmetro D , seja suficientemente grande² Deste modo é possível demonstrar as relações dinâmicas entre os pontos de equilíbrio dos sistemas (5.13) e (5.14) utilizando o resultado a seguir.

Teorema 5.3.3 (Relação Dinâmica entre Pontos de Equilíbrio e a Condição de Transversalidade a 1 Parâmetro [4]). *Seja $(\mathbf{w}_s, \mathbf{z}_s)$ um asep do sistema (5.13). Se as variedades estáveis e instáveis dos pontos de equilíbrio sobre a fronteira da região de instabilidade do sistema $d(\lambda)$ (5.15) satisfazem a condição de transversalidade para todo $\lambda \in [0, 1]$, então:*

1. *$(\mathbf{w}_u, \mathbf{z}_u)$ é um uep na fronteira de estabilidade $\partial A(\mathbf{w}_s, \mathbf{z}_s)$ do sistema (5.13), se e somente se $(\mathbf{w}_u, \mathbf{z}_u)$ é um uep na fronteira de estabilidade $\partial A(\mathbf{w}_s, \mathbf{z}_s)$ do sistema (5.14);*
2. *A fronteira de estabilidade $\partial A(\mathbf{w}_s, \mathbf{z}_s)$, do sistema (5.13), é igual a união das variedades estáveis dos pontos de equilíbrio $(\mathbf{w}_i, \mathbf{z}_i)$, $i = 1, \dots, n$, presentes sobre a mesma. Além disso, a fronteira de estabilidade $\partial A(\mathbf{w}_s, \mathbf{z}_s)$, do sistema (5.14), é também igual a união das variedades estáveis dos pontos de equilíbrio $(\mathbf{w}_i, \mathbf{z}_i)$, $i = 1, \dots, n$, ou seja, dos mesmos equilíbrios presentes sobre $\partial A(\mathbf{w}_s, \mathbf{z}_s)$.*

Utilizando o resultado acima, é possível estabelecer as relações dinâmicas entre os pontos de equilíbrio dos sistemas (5.13) e (5.14). Desta maneira, se concluem os passos para a demonstração das relações estáticas e dinâmicas entre os pontos de equilíbrio dos subsistemas rápidos Π_o^* (5.8) e $\Pi_{0(AR)}^*$ (5.11), e consequentemente a etapa 4 da verificação das relações estáticas e dinâmicas necessárias à demonstração do método (algoritmo numérico) TTS-BCU.

Por fim, conclui-se a discussão das relações estáticas e dinâmicas entre os pontos de equilíbrio do sistema original (5.4) e de seu sistema artificial reduzido associado (5.5) para os fins propostos do algoritmo TTS-BCU.

Na próxima seção deste trabalho, a integração do algoritmo numérico TTS-BCU ao método direto TTS-CUEP [2], [3], será apresentada e discutida com o objetivo de possibilitar o cálculo do CUEP em sistemas com duas escalas de tempo.

5.4 Aplicação do Algoritmo Numérico TTS-BCU, integrado ao Método TTS-CUEP, no Cálculo do CUEP em Sistemas com Duas Escalas de Tempo

Nesta seção, o algoritmo numérico TTS-BCU será apresentado, de forma integrada ao método direto TTS-CUEP, a fim de possibilitar a implementação do método TTS-CUEP/BCU para a análise de estabilidade transitória de sistemas elétricos de potência.

²Uma discussão apurada sobre a satisfação da condição de transversalidade a um parâmetro, e sua relação com o método BCU, pode ser encontrada em [103] e [102].

Observando, então, os passos que compõem a análise de estabilidade transitória realizada pelo método TTS-CUEP, apresentado em detalhes na seção 4.2 deste trabalho, é possível verificar onde a aplicação do algoritmo numérico TTS-BCU é necessária.

Aplicação do algoritmo TTS-BCU no cálculo do CUEP do sistema rápido $\Pi_{BLS}(\mathbf{w}^*)$: no terceiro passo do algoritmo conceitual do método TTS-CUEP para análise de estabilidade (vide seção 3.3.1 deste trabalho), é necessário realizar o cálculo do CUEP do sistema rápido Π_0 ($\Pi_{BLS}(\mathbf{w}^*)$).

Neste ponto, entra em cena o algoritmo numérico TTS-BCU, proposto neste trabalho, uma vez que utilizando um sistema artificial (gradiente) reduzido $\Pi_{0(AR)}$ é possível facilmente identificar o *exit point* sobre a trajetória em falta do sistema rápido, pois um máximo de energia potencial sempre ocorre ao se atravessar ortogonalmente a fronteira da região de estabilidade do sistema gradiente. Uma vez identificado o *exit point* é possível utilizar etapas análogas ao algoritmo BCU tradicional (descrito na seção 3.3.1) para promover o cálculo do CUEP utilizando o sistema gradiente reduzido $\Pi_{0(AR)}$.

É relevante mencionar que as mesmas estratégias numéricas (tais como o PEBS dinâmico [36] e o *Shadowing Method* [38]) para aumentar a robustez do algoritmo BCU tradicional no cálculo do CUEP, podem, agora, ser aplicadas também ao cálculo do CUEP do sistema rápido, através do uso do sistema gradiente reduzido $\Pi_{0(AR)}$.

Aplicação do algoritmo TTS-BCU no cálculo do CUEP do sistema lento Σ_0 : no segundo passo do algoritmo conceitual do método TTS-CUEP para análise de estabilidade (vide seção 3.3.1 deste trabalho), é necessário realizar o cálculo do CUEP do sistema lento Σ_0 .

Neste ponto, novamente, entra em cena o algoritmo numérico TTS-BCU, aqui proposto, porém observa-se que o subsistema lento Σ_0 e o sistema artificial reduzido $\Sigma_{0(AR)}$ são idênticos, o que possibilita tanto a detecção do *exit point* como o cálculo do CUEP através do uso do próprio subsistema lento, derivado do sistema original Σ_ϵ .

No entanto, é válido mencionar que o subsistema lento Σ_0 , se apresenta na forma de um sistema algébrico-diferencial (EAD), o que, num primeiro momento, levanta questões sobre como realizar os passos propostos no método BCU tradicional para o cálculo numérico do CUEP no subsistema lento Σ_0 (vide seção 3.3.1 deste trabalho), uma vez que a teoria apresentada para a caracterização deste método foi demonstrada para um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO).

A literatura vigente, já exibiu a demonstração do método CUEP/BCU tradicional para sistemas algébrico-diferenciais (na literatura de sistemas elétricos de potência tais sistemas tem origem na preservação da estrutura do sistema de transmissão do SEP), como pode ser visto em [13], e amplamente discutido em [4].

Para sobrepujar tais dificuldades, uma vez mais recorre-se a técnica de perturbação singular para definir um sistema singularmente perturbado associado ao sistema algébrico-diferencial [13], [4], que neste caso se apresenta na forma de um sistema gradiente, possi-

bilitando, assim, que todos os passos propostos no método BCU tradicional sejam empregados para o cálculo do CUEP do subsistema lento Σ_0 , de maneira análoga ao realizado anteriormente para o subsistema rápido Π_0 .

Ademais da abordagem sugerida, é interessante verificar que o método TTS-CUEP calcula o CUEP do subsistema lento Σ_0 , apenas quando o mesmo se apresenta sobre uma componente estável Γ_s da variedade de restrição Γ (vide passo 2 método TTS-CUEP na seção 4.2.2 deste trabalho). Tal constatação permite para fins práticos, a utilização da trajetória do próprio sistema algébrico-diferencial nos cálculos efetuados pelo método BCU tradicional durante o cálculo do CUEP do subsistema lento Σ_0 .

Por fim, é válido ressaltar que, como anteriormente no caso do cálculo do CUEP do subsistema rápido Π_0 , todas as técnicas numéricas para o aumento da eficácia do algoritmo BCU tradicional, podem também ser aplicadas ao cálculo do CUEP do subsistema lento Σ_0 sem nenhuma restrição.

Com isso, conclui-se a apresentação do algoritmo numérico TTS-BCU e sua integração ao método TTS-CUEP. No próximo capítulo deste trabalho, o método TTS-CUEP associado ao algoritmo numérico TTS-BCU, proposto neste trabalho, será utilizado na análise de SEPs multimáquinas a fim de demonstrar sua eficácia em comparação ao método CUEP/BCU tradicional.

Capítulo 6

Aplicações do Método TTS-BCU na Análise de Estabilidade Transitória de SEPs

6.1 Introdução

Neste capítulo o novo método (algoritmo numérico) TTS-BCU, proposto neste trabalho, associado ao método TTS-CUEP será aplicado à análise de estabilidade transitória de modelos de SEPs com duas escalas de tempo, visando com isso, avaliar suas possíveis vantagens e desvantagens frente ao método CUEP/BCU tradicional. Pretende-se também, através destes exemplos, avaliar as possíveis iterações entre as dinâmicas lenta e rápida e os diversos subproblemas de estabilidade em um sistema elétrico de potência, bem como sua utilização na diminuição do conservadorismo destas análises.

6.2 Modelagem dos SEPs Estudados para a Aplicação do Método TTS-CUEP/BCU

Inicialmente, com o objetivo de aplicar o método TTS-CUEP/BCU na análise de estabilidade transitória do SEP proposto, faz-se necessário particularizar e discutir a modelagem do mesmo de modo a adaptar os resultados, anteriormente expostos neste trabalho, à uma aplicação real.

Dito isto, considere um SEP composto de um número arbitrário de barras e n_{ger} geradores conectados ao mesmo. Ademais, considere que existe um barramento infinito¹

¹A hipótese da existência de um barramento infinito é aqui adotada apenas para simplificar a exposição dos resultados, permitindo assim que as máquinas sejam modeladas no referencial síncrono (barramento infinito) e o conjunto de equações resultante que descreve a dinâmica do sistema seja linearmente independente (possua pontos de equilíbrio), pode-se, no entanto, mostrar que os mesmos resultados são válidos tomando uma máquina como referência (OMR) ou mesmo o centro de ângulo (COA/COI) como

no SEP em questão.

Tomando as hipóteses comumente usadas para a redução do sistema de transmissão [12], [14], e modelando os geradores síncronos através do modelo de 1 eixo (modelo com decaimento de fluxo [16]) para os geradores síncronos conectados ao SEP, é possível descrever a dinâmica completa do sistema pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \tau'_{do_i} \frac{dE'_{q_i}}{d\tau} &= E_{FD_i} - E'_{q_i} + (x'_{d_i} - x_{d_i})I_{d_i} \\ \frac{d\delta_i}{d\tau} &= \omega_i \\ M_i \frac{d\omega_i}{d\tau} &= P_{m_i} - P_{e_i} - D_i\omega_i \end{aligned} \quad i = 1, \dots, n_{ger} \quad (6.1)$$

sendo:

$$P_{e_i} = \sum_{j=1}^{n_{ger}} E'_{q_i} E'_{q_j} (G_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j)) \quad (6.2)$$

$$I_{d_i} = \sum_{j=1}^{n_{ger}} E'_{q_i} E'_{q_j} (B_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) - G_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j)) \quad (6.3)$$

É importante notar que, para o estudo aqui pretendido, as variáveis eletromecânicas dos geradores (δ, ω) serão classificadas como rápidas e as variáveis elétricas $(\mathbf{E}_q')$ como lentas. Tomando, então, $\varepsilon_i = \frac{1}{\tau'_{do_i}}$ verifica-se que o modelo (6.1) está expresso na escala de tempo rápida τ e portanto:

$$\Pi_\varepsilon : \begin{cases} \frac{dE'_{q_i}}{d\tau} = \varepsilon_i (E_{FD_i} - E'_{q_i} + (x'_{d_i} - x_{d_i})I_{d_i}) \\ \frac{d\delta_i}{d\tau} = \omega_i \\ M_i \frac{d\omega_i}{d\tau} = P_{m_i} - P_{e_i} - D_i\omega_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, n_{ger} \quad (6.4)$$

Fazendo, então, $\varepsilon = \max_i \left(\frac{1}{\tau'_{do_i}} \right)$, e escrevendo $\varepsilon_i = \frac{1}{\tau'_{do_i}} = c_i \varepsilon$, $c_i \in \mathbb{R}$, é possível exibir os subsistemas rápido (Π_0) e lento (Σ_0) associados, tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ nas escalas de tempo rápida ($\tau = \frac{t}{\varepsilon}$) e lenta (t) respectivamente:

$$\Pi_0 : \begin{cases} \frac{dE'_{q_i}}{d\tau} = 0 \\ \frac{d\delta_i}{d\tau} = \omega_i \\ M_i \frac{d\omega_i}{d\tau} = P_{m_i} - P_{e_i} - D_i\omega_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, n_{ger} \quad (6.5)$$

$$\Sigma_0 : \begin{cases} \frac{dE'_{q_i}}{dt} = c_i (E_{FD_i} - E'_{q_i} + (x'_{d_i} - x_{d_i})I_{d_i}) \\ 0 = \omega_i \\ 0 = P_{m_i} - P_{e_i} - D_i\omega_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, n_{ger} \quad (6.6)$$

Para este modelo de SEP (6.1) define-se, então, o sistema artificial reduzido como sendo igual a:

$$\Pi_{\varepsilon(AR)} : \begin{cases} \frac{dE'_{q_i}}{d\tau} = \varepsilon_i (E_{FD_i} - E'_{q_i} + (x'_{d_i} - x_{d_i})I_{d_i}) \\ \frac{d\delta_i}{d\tau} = P_{m_i} - P_{e_i} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n_{ger} \quad (6.7)$$

E, de modo análogo ao realizado para o sistema original, definem-se os subsistemas rápido ($\Pi_{0(AR)}$) e lento ($\Sigma_{0(AR)}$) reduzidos:

$$\Pi_{0(AR)} : \begin{cases} \frac{dE'_{q_i}}{d\tau} = 0 \\ \frac{d\delta_i}{d\tau} = P_{m_i} - P_{e_i} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n_{ger} \quad (6.8)$$

$$\Sigma_{0(AR)} : \begin{cases} \frac{dE'_{q_i}}{dt} = c_i (E_{FD_i} - E'_{q_i} + (x'_{d_i} - x_{d_i})I_{d_i}) \\ 0 = P_{m_i} - P_{e_i} - D_i\omega_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, n_{ger} \quad (6.9)$$

É relevante mencionar que, diferentemente da demonstração matemática, as condutâncias de transferência não são desprezíveis neste sistema, o que torna impraticável ou mesmo impossível a obtenção de uma função energia analítica, no sentido da definição (2.3.2), para os sistemas em questão.

Por este motivo, serão aqui adotadas funções energia numéricas [13], [4], sob a hipótese de que os termos dependentes da trajetória do sistema em questão, são avaliados sobre caminhos retilíneos. Dito isto, as funções energia numéricas aqui adotadas para o sistema singularmente perturbado (Π_{ε}), e seus respectivos subsistemas lento (Σ_0) e rápido (Π_0) são dadas por:

$$V_{\varepsilon} = - \sum_{i=1}^{n_{ger}} \int_{\delta_i^0}^{\delta_i} (P_{m_i} - P_{e_i}) d\delta_i - \sum_{i=1}^{n_{ger}} \int_{E'_{q_i^0}}^{E'_{q_i}} (E_{FD_i} - E'_{q_i} + (x'_{d_i} - x_{d_i})I_{d_i}) dE'_{q_i} \quad (6.10)$$

$$V_{(S)} = \sum_{i=1}^{n_{ger}} \int_{E'_{q_i^0}}^{E'_{q_i}} (E_{FD_i} - E'_{q_i} + (x'_{d_i} - x_{d_i})I_{d_i}) dE'_{q_i} \quad (6.11)$$

$$V_{(F)} = \sum_{i=1}^{n_{ger}} \frac{M_i \omega^2}{2} - \sum_{i=1}^{n_{ger}} (P_{m_i} - |E_i|^2 G_{ii})(\delta_i - \delta_i^0) - \sum_{i=1}^{n_{ger}} \sum_{j=i+1}^{n_{ger}+1} E'_{q_i} E'_{q_j} B_{ij} (\cos(\delta_{ij} - \delta_{ij}^0)) + \sum_{i=1}^{n_{ger}} \sum_{j=i+1}^{n_{ger}+1} E'_{q_i} E'_{q_j} G_{ij} \frac{(\delta_i - \delta_i^0) + (\delta_j - \delta_j^0)}{(\delta_i - \delta_i^0) - (\delta_j - \delta_j^0)} (\sin(\delta_{ij} - \delta_{ij}^0)) \quad (6.12)$$

sendo $\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j$ a diferença angular entre as máquinas i e j conectados ao sistema.

É importante ressaltar que a função energia proposta para o sistema rápido Π_0 é idêntica àquela proposta por Athay, Podmore e Virmani, em 1979 [30], uma vez que este sistema equivale ao modelo do SEP no qual os geradores são modelados classicamente, ou seja, como uma fonte de tensão constante atrás de uma reatância transitória.

Assim, uma vez realizada a discussão da modelagem a ser utilizada, exibido o modelo singularmente perturbado e seus subsistemas rápido e lento, bem como proposta suas respectivas funções energia numéricas, e seus respectivos subsistemas reduzidos, têm-se todos os requisitos para a aplicação do método TTS-CUEP/BCU na análise de estabilidade transitória de SEPs com duas escalas de tempo.

6.3 Exemplos do Método TTS-CUEP/BCU na Análise de Estabilidade Transitória de SEPs

Nesta seção, o método direto TTS-CUEP/BCU (composto pela associação do método TTS-CUEP ao algoritmo numérico TTS-BCU) será empregado na análise de estabilidade transitória de modelos multimáquinas de SEPs de pequeno porte. Os sistemas Kundur e IEEE 14 barras modificados serão tomados como exemplo na aplicação do método TTS-CUEP/BCU para análise de estabilidade transitória de SEPs.

6.3.1 Exemplo 1: Sistema Kundur Modificado

Num primeiro exemplo, um SEP ligeiramente modificado a partir do exemplo proposto por Klein, Rogers e Kundur em 1991 [107], será estudado utilizando o método TTS-CUEP/BCU. Pretende-se, com isso, analisar as possíveis informações advindas das diferentes escalas de tempo presentes no modelo matemático que descreve o sistema e como o método TTS-CUEP e verificar a robustez do método proposto no cálculo do CUEP em modelos de SEPs multimáquinas.

O sistema Kundur de 2 áreas (cuja denominação se deve à sua ampla divulgação no livro escrito por Prabha Kundur [14]) modificado é ilustrado na figura 6.1.

O sistema Kundur original é composto por 2 áreas interconectadas por um elo duplo em corrente alternada, sendo proposto inicialmente para o estudo de estabilidade à pequenas perturbações, especificamente para a análise de modos de oscilação locais e inter-área².

O sistema Kundur modificado, aqui proposto, se diferencia do original ao realizar a hipótese de que o sistema possui um barramento infinito conectado à barra 1 do mesmo. Os dados estáticos e dinâmicos relacionados ao sistema apresentado na figura 6.1 estão descritos no apêndice B deste trabalho.

²Modos de oscilação locais e inter-área são problemas relacionados à estabilidade de ângulo do rotor das máquinas síncronas, porém diferentemente do problema de estabilidade transitória, tais oscilações “mal-amortecidas” são excitadas geralmente pelos sistemas de regulação de tensão das máquinas (AVRs) quando de sua atuação devido à pequenas variações no ponto de operação do sistema [14].

Figura 6.1: Sistema Kundur modificado.

A tabela (6.1) apresenta os resultados da aplicação do método TTS-CUEP/BCU na análise de estabilidade transitória do sistema Kundur modificado, bem como as estimativas obtidas para os tempos críticos de abertura associadas às respectivas contingências.

Tabela 6.1: Resultados da aplicação do método TTS-CUEP/BCU na análise de estabilidade transitória do sistema Kundur modificado.

Número da contingência	Barramento em falta	Linha interrompida	$\hat{t}_{cr}$ (TTS-BCU)	$\hat{t}_{cr}$ (BCU Trad.)	$\hat{t}_{cr(F)}$ (Π_0)	t_{cr} (Simulação)
1	6	—	104 ms	104 ms	96 ms	149 ms
2	5	—	204 ms	204 ms	189 ms	285 ms
3	8	8 - 9	121 ms	121 ms	114 ms	132 ms
4	2	—	73 ms	— ³	58 ms	100 ms
5	7	—	138 ms	138 ms	126 ms	191 ms

Os dados da tabela (6.1) estão organizados da seguinte forma: na primeira coluna está o número que identifica a respectiva contingência, na segunda coluna está o barramento no qual uma falta trifásica (franca à terra) foi aplicada, na terceira coluna descreve-se a linha interrompida nos casos onde a falta foi persistente, na quarta e quinta colunas encontram-se as estimativas do tempo crítico de abertura ($\hat{t}_{cr}$) fornecidas pelo método TTS-CUEP/BCU e pelo método CUEP/BCU tradicional (utilizando a função energia do sistema original V_ε (6.10)), na sexta coluna está descrita a estimativa do tempo crítico de abertura ($\hat{t}_{cr(F)}$) para o subsistema rápido Π_0 .

É importante salientar que, para os casos 1, 2, 3 e 5 da tabela (6.1), o método TTS-CUEP/BCU e o método CUEP/BCU tradicional localizaram o mesmo CUEP e consequentemente proveram a mesma estimativa $\hat{t}_{cr}$ do para o tempo crítico de abertura das respectivas contingências, ratificando a precisão do método TTS-CUEP/BCU.

³Neste caso o método CUEP/BCU tradicional encontrou um CUEP que não está sobre a fronteira da região de estabilidade do sistema original pós-falta (Π_ε), deteriorando as estimativas fornecidas pelo mesmo.

Observando a tabela (6.1), é possível notar também que a contingência 4 não apresenta estimativa para a aplicação do método CUEP/BCU tradicional. Isto ocorre, devido à detecção incorreta do CUEP pelo respectivo método, uma vez que o mesmo encontra um CUEP que não está sobre a fronteira da região de estabilidade do sistema original (Π_ε) pós-falta deteriorando a estimativa realizada.

No entanto, para a mesma contingência 4 (da tabela (6.1)), o método TTS-CUEP/BCU foi capaz de localizar o CUEP correto, e fornecer uma estimativa conservadora para o tempo crítico de abertura, ratificando a robustez no cálculo do CUEP do sistema original, através do cálculo do CUEP utilizando os subsistemas rápido e lento associados. Isto comprova uma vantagem advinda da decomposição da dinâmica do sistema original singularmente perturbado na dinâmica de seus subsistemas lento e rápido associados.

Por fim, é interessante observar que as estimativas do tempo crítico de abertura $\hat{t}_{cr(F)}$ do subsistema rápido (Π_0) são conservadoras, em todas as contingências analisadas, quando comparadas ao tempo crítico de abertura t_{cr} do sistema original (Π_ε), porém mostram-se mais conservadoras que a estimativa final obtida pelo CUEP uniforme do sistema original.

Ainda não há resultados suficientes que possam comprovar quando tal estimativa é conservadora, nem o quanto mais conservadora a mesma pode ser, em relação ao tempo crítico do sistema original, contudo, os resultados aqui expostos mostram-se promissores no sentido de exibir um indício de que a utilização de tal estimativa pode acelerar o processo de classificação de uma contingência, simplificando a obtenção de uma estimativa durante a execução dos passos do método TTS-CUEP/BCU, quando da utilização de um processo de filtragem de contingências em uma aplicação para análise de segurança dinâmica em tempo-real [40], [4], [28].

6.3.2 Exemplo 2: Sistema IEEE 14 Barras Modificado

Como um segundo exemplo na aplicação do método TTS-CUEP/BCU, toma-se o sistema IEEE 14 barras ligeiramente modificado, de modo que, faz-se novamente a hipótese de que o sistema possui um barramento infinito conectado à barra 1 do mesmo. Os dados estáticos e dinâmicos relacionados ao sistema apresentado na figura 6.2 estão devidamente listados no apêndice B deste trabalho.

A tabela (6.2) apresenta os resultados da aplicação do método TTS-CUEP/BCU na análise de estabilidade transitória do sistema IEEE 14 barras modificado, bem como as estimativas obtidas para os tempos críticos de abertura associadas às respectivas contingências.

Figura 6.2: Sistema IEEE 14 barras modificado.

Tabela 6.2: Resultados da aplicação do método TTS-CUEP/BCU na análise de estabilidade transitória do sistema IEEE 14 barras modificado.

Número da contingência	Barramento em falta	Linha interrompida	$\hat{t}_{cr}$ (TTS-BCU)	$\hat{t}_{cr}$ (BCU Trad.)	$\hat{t}_{cr(F)}$ (Π_0)	t_{cr} (Simulação)
1	2	1 - 2	100 ms	100 ms	126 ms	136 ms
2	4	4 - 13	318 ms	318 ms	358 ms	365 ms
3	6	6 - 8	121 ms	121 ms	176 ms	190 ms
4	7	7 - 9	235 ms	235 ms	355 ms	524 ms
5	9	9 - 14	255 ms	— ⁴	406 ms	672 ms

Faz-se referência ao fato de que os dados da tabela (6.2) estão organizados da mesma forma que os dados apresentados na tabela (6.1).

Novamente verifica-se, agora, para os casos 1, 2, 3 e 4 da tabela (6.2), que o método TTS-CUEP/BCU e o método CUEP/BCU tradicional localizaram o mesmo CUEP e consequentemente proveram a mesma estimativa $\hat{t}_{cr}$ do para o tempo crítico de abertura das respectivas contingências.

⁴Neste caso o método CUEP/BCU tradicional não encontrou um *exit point* sobre a trajetória em falta do sistema original, impedindo que o CUEP fosse encontrado e uma estimativa fosse fornecida.

Observando a tabela (6.2), é possível notar também que a contingência 5 não apresenta estimativa para a aplicação do método CUEP/BCU tradicional, isto ocorre devido à não detecção do *exit point* pelo respectivo método, o que acaba por impedir o cálculo do CUEP do sistema original (Π_ε), impossibilitando que qualquer estimativa para o tempo crítico de abertura seja realizada.

Novamente, para a mesma contingência 5 (da tabela (6.2)), o método TTS-CUEP/BCU foi capaz de localizar o CUEP correto, e fornecer uma estimativa conservadora para o tempo crítico de abertura, ratificando a robustez no cálculo do CUEP do sistema original, através do cálculo do CUEP utilizando os subsistemas rápido e lento associados.

Além disso, é interessante observar que as estimativas do tempo crítico de abertura ($\hat{t}_{cr(F)}$) do subsistema rápido (Π_0) são conservadoras, em todas as contingências analisadas, quando comparadas ao tempo crítico de abertura t_{cr} do sistema original (Π_ε). Porém, neste caso, mostram-se menos conservadoras que a estimativa final obtida pelo CUEP uniforme do sistema original.

Como afirmado anteriormente, ainda não existem resultados suficientes para comprovar quando tal estimativa é conservadora, nem o quanto mais ou menos conservadora a mesma pode ser, porém, os resultados aqui apresentados mostram promissores e podem conduzir a futuras pesquisas sobre o tema.

Por fim, no próximo capítulo deste trabalho, serão apresentadas as conclusões finais, bem como evidenciadas as principais contribuições deste trabalho, e perspectivas futuras para o posterior desenvolvimento das pesquisas aqui iniciadas.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas Futuras

7.1 Introdução

Neste capítulo, as conclusões finais deste trabalho são apresentadas, assim como as principais contribuições deste trabalho. As perspectivas futuras para a continuação desta pesquisa são também apresentadas e discutidas em vista das presentes necessidades de desenvolvimento de um novo método direto para análise completa de estabilidade (ângulo, tensão e frequência) para modelos de SEPs com duas escalas de tempo.

7.2 Comentários e Conclusões Finais

Neste trabalho, um novo algoritmo numérico TTS-BCU para o cálculo do CUEP em sistemas com duas escalas de tempo (singularmente perturbados) foi desenvolvido. Tal algoritmo foi integrado ao método direto TTS-CUEP, a fim de possibilitar o cálculo numérico do CUEP, em modelos de SEPs com duas escalas de tempo, durante as análises de estabilidade transitória.

Dito isto, primeiramente é importante observar que o método TTS-CUEP tem por objetivo explorar as diferentes escalas de tempo presentes nos modelos do SEP, a fim de obter as seguintes vantagens:

- possibilitar o cálculo do CUEP do sistema original (singularmente perturbado), através do cálculo do CUEP do sistema lento e/ou rápido associado ao sistema singularmente perturbado;
- prover um maior entendimento dos modos de instabilidade do SEP sob análise, através da decomposição da dinâmica original em duas escalas de tempo;
- possibilitar a diminuição do conservadorismo das análises de estabilidade transitória, através da obtenção de possíveis estimativas associadas aos subsistemas lento e/ou rápido.

Tendo as vantagens anteriores em mente, o novo algoritmo numérico TTS-BCU, proposto neste trabalho, faz uso de sistemas artificiais reduzidos, na forma gradiente, com o objetivo de realizar o cálculo robusto dos CUEPs dos sistemas lento e rápido, e consequentemente do sistema singularmente perturbado original.

Entre as principais vantagens deste novo algoritmo numérico TTS-BCU citam-se:

- possibilita o cálculo do CUEP nos subsistemas rápido e lento derivados do sistema singularmente perturbado original, definindo sistema gradientes reduzidos nos quais a fronteira da região de estabilidade pode ser facilmente identificada através do uso de funções energia;
- se comparado ao algoritmo BCU tradicional, possui uma maior robustez numérica ao calcular o CUEP do sistema original, uma vez que a decomposição das dinâmicas lenta e rápida torna mais fácil a identificação do CUEP;
- possibilita um melhor condicionamento numérico no cálculo do CUEP dos subsistemas lento e rápido, uma vez que a utilização de sistemas artificiais diminuem o espaço de busca do CUEP.

Os teste realizados com a aplicação do método proposto mostram-se promissores, e demonstram que os resultados obtidos pelo método TTS-CUEP/BCU são corretos e compatíveis com os obtidos pelo método CUEP/BCU tradicional. Ademais estes também verificaram que o método TTS-CUEP/BCU é capaz de calcular corretamente o CUEP em diversos casos onde o método CUEP/BCU tradicional encontra dificuldades.

Tal constatação ratifica a proposta de que a decomposição do modelo do SEP em duas escalas de tempo, promovida pelo método direto TTS-CUEP/BCU, é capaz de melhorar o cálculo do CUEP e promover uma melhor análise de estabilidade transitória.

7.3 Contribuições Originais deste Trabalho

Como resultado das pesquisas desenvolvidas, destacam-se duas contribuições principais deste trabalho:

1. Um novo algoritmo numérico TTS-BCU para o cálculo do CUEP em sistemas com duas escalas de tempo (singularmente perturbados) foi proposto, e suas bases teóricas foram demonstradas e discutidas;
2. A primeira aplicação do método TTS-CUEP em modelos de SEPs multimáquinas, conhecida na literatura vigente, foi realizada com sucesso.

7.4 Perspectivas Futuras

Como perspectivas futuras deste trabalho, pretende-se estender a teoria do método TTS-CUEP/BCU para modelos com rede preservada [13], assim como estudar as possíveis aplicações do método TTS-CUEP/BCU na análise conjunta de estabilidade de tensão e ângulo (transitória), identificando as interações entre o problema de estabilidade de tensão e a decomposição da dinâmica do SEP em dinâmicas lentas e rápidas presentes no modelo do sistema.

Pretende-se também verificar rigorosamente quando as estimativas intermediárias do tempo crítico de abertura, promovidas pelo subsistema rápido (ou lento), podem ser tomadas como estimativas conservadoras e suficientemente próximas ao seu valor real.

Por fim, ressalta-se que a análise de sistemas com múltiplas (mais de duas) escalas de tempo será tema de futuras pesquisas, tanto por parte do autor, em seu estágio de pós-doutorado, como do orientador do presente trabalho. Pretende-se com isso, possibilitar no futuro a análise conjunta das diversas dinâmicas presentes no SEP por meio de métodos diretos que possam analisar conjuntamente os problemas de estabilidade de tensão/ângulo/frequência.

Referências Bibliográficas

- [1] KUNDUR, P., PASERBA, J., AJJARAPU, V., ANDERSSON, G., BOSE, A., CANIZARES, C., HATZIARGYRIOU, N., HILL, D., STANKOVIC, A., TAYLOR, C., VAN CUTSEM, T., AND VITTAL, V. Definition and Classification of Power System Stability IEEE/CIGRE joint Task Force on Stability Terms and Definitions. Power Systems, IEEE Transactions on, 19(3):1387 – 1401, agosto de 2004.
- [2] ALBERTO, L.F.C. AND CHIANG, H.-D. Controlling Unstable Equilibrium Point Theory for Stability Assessment of Two-Time Scale Power System Models. In Power and Energy Society General Meeting - Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century, 2008 IEEE, páginas 1 –9, julho de 2008.
- [3] ALBERTO, L.F.C. AND CHIANG, H.-D. Theoretical Foundation of CUEP Method for Two-Time Scale Power System Models. In Power Energy Society General Meeting, 2009. PES '09. IEEE, páginas 1 –9, julho de 2009.
- [4] CHIANG, H.-D. Direct Methods for Stability Analysis of Electric Power Systems: Theoretical Foundation, BCU Methodologies, and Applications. John Wiley & Sons Inc., first edition, 2011.
- [5] DUGAN, R.C., MCGRANAHAM, M.F., SANTOSO, S., AND BEATY, H.W. Electrical Power System Quality. Professional Engineering. McGraw Hill, second edition, 2003.
- [6] GRAINER, J.J. AND STEVENSON JR., W.D. Power System Analysis. Electrical and Computer Engineering. McGraw Hill, international edition, 1994.
- [7] BALU, N., BERTRAM, T., BOSE, A., BRANDWAJN, V., CAULEY, G., CURTICE, D., FOUAD, A., FINK, L., LAUBY, M.G., WOLLENBERG, B.F., AND WRUBEL, J.N. On-line Power System Security Analysis. Proceedings of the IEEE, 80(2):262 –282, fevereiro de 1992.
- [8] JARDIM, J. L., NETO, C., AND GROETAERS DOS SANTOS, M. Brazilian System Operator Online Security Assessment System. In Power Systems Conference and Exposition, 2006. PSCE '06. 2006 IEEE PES, páginas 7 –12, novembro de 2006.

- [9] LEITE DA SILVA, A. M., JARDIM, J. L., REI, A. M., AND MELLO, J. C. O. Dynamic Security Risk Assessment. In Power Engineering Society Summer Meeting, 1999. IEEE, volume 1, páginas 198 –205 vol.1, julho de 1999.
- [10] NETO, C.A.S., QUADROS, M.A., SANTOS, M.G., AND JARDIM, J.L. Brazilian System Operator Online Security Assessment System. In Power and Energy Society General Meeting, 2010 IEEE, páginas 1–7, 2010.
- [11] JARDIM, J.L., NETO, C.S., AND KWASNICKI, W.T. Design Features of a Dynamic Security Assessment System. In Power Systems Conference and Exposition, 2004. IEEE PES, páginas 446–452 vol.1, 2004.
- [12] ALBERTO, L.F.C. AND BRETAS, N.G. Estabilidade Transitória em Sistemas Eletroenergéticos. Projeto REENGE. EESC/USP, 2000.
- [13] CHIANG, H.-D., CHU, C.-C., AND CAULEY, G. Direct Stability Analysis of Electric Power Systems using Energy Functions: Theory, Applications, and Perspective. Proceedings of the IEEE, 83(11):1497 –1529, novembro de 1995.
- [14] KUNDUR, P. Power System Stability and Control. Power System Engineering Series. McGraw-Hill, 1994.
- [15] KHALIL, H.K. Nonlinear Systems. Prentice Hall, third edition, 2002.
- [16] PAI, M.A. Power System Stability - Analysis by the Direct Method of Lyapunov. North-Holland Publishing Company, 1981.
- [17] ALBERTO, L.F.C. AND BRETAS, N.G. Synchronism versus Stability in Power Systems: Frequency Dependent Loads. In Power System Technology, 1998. Proceedings. POWERCON '98. 1998 International Conference on, volume 2, páginas 1341 –1345, agosto de 1998.
- [18] ALBERTO, L.F.C. Caracterização e Estimativas da Área de Atração de Sistemas Dinâmicos Não Lineares. Tese de Livre-Docência, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 2006.
- [19] CHIANG, H.-D., HIRSCH, M.W., AND WU, F.F. Stability Regions of Nonlinear Autonomous Dynamical Systems. Automatic Control, IEEE Transactions on, 33(1):16 –27, janeiro de 1988.
- [20] CHIANG, H.-D. AND WU, F.F. Stability of Nonlinear Systems Described by a Second-Order Vector Differential Equation. Circuits and Systems, IEEE Transactions on, 35(6):703 –711, junho de 1988.

-
- [21] ZABORSZKY, J., HUANG, G., ZHENG, B., AND LEUNG, T.-C. On the Phase Portrait of a Class of Large Nonlinear Dynamic Systems such as the Power System. Automatic Control, IEEE Transactions on, 33(1):4 –15, janeiro de 1988.
- [22] LIAPUNOFF, A. Problème Général de la Stabilité du Mouvement. In Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse - Mathématiques, volume 2, páginas 203–474. Faculté des Sciences de Toulouse, 1907.
- [23] CHIANG, H.-D., WU, F., AND VARAIYA, P. Foundations of Direct Methods for Power System Transient Stability Analysis. Circuits and Systems, IEEE Transactions on, 34(2):160 – 173, fevereiro de 1987.
- [24] TSOLAS, N., ARAPOSTATHIS, A., AND VARAIYA, P. A Structure Preserving Energy Function for Power System Transient Stability Analysis. Circuits and Systems, IEEE Transactions on, 32(10):1041 – 1049, outubro de 1985.
- [25] ALBERTO, L.F.C., SILVA, F.H.J.R., AND BRETAS, N.G. Direct Methods for Transient Stability Analysis in Power Systems: State of Art and Future Perspectives. In Power Tech Proceedings, 2001 IEEE Porto, volume 2, página 6, setembro de 2001.
- [26] CHIANG, H.-D. AND CHU, C.-C. Theoretical Foundation of the BCU Method for Direct Stability Analysis of Network-Reduction Power System. Models with Small Transfer Conductances. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on, 42(5):252 –265, maio de 1995.
- [27] RIBBENS-PAVELLA, M. AND EVANS, F.J. Direct Methods for Studying Dynamics of Large-Scale Electric Power Systems - A Survey. Automatica, 21(1):1 – 21, 1985.
- [28] THEODORO, E.A.R. Desenvolvimento de uma Ferramenta Computacional para Análise de Segurança Dinâmica de Sistemas Elétricos de Potência, no contexto da Estabilidade Transitória, via Métodos Diretos. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 2010.
- [29] KAKIMOTO, N., OSHAWA, Y., AND HAYASHI, M. Transient Stability Analysis of Electric Power System by Lure-Type Lyapunov Function - Partes I e II. IEE of Japan, 98(5 / 6):63–71 / 72–19, 1978.
- [30] ATHAY, T., PODMORE, R., AND VIRMANI, S. A Practical Method for the Direct Analysis of Transient Stability. Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on, PAS-98(2):573 –584, março de 1979.
- [31] CHIANG, H.-D., WU, F.F., AND VARAIYA, P.P. Foundations of the Potential Energy Boundary Surface Method for Power System Transient Stability Analysis. Circuits and Systems, IEEE Transactions on, 35(6):712 –728, junho de 1988.

- [32] RAHIMI, F.A., LAUBY, M.G., WRUBEL, J.N., AND LEE, K.L. Evaluation of the Transient Energy Function Method for On-line Dynamic Security Analysis. Power Systems, IEEE Transactions on, 8(2):497 –507, maio de 1993.
- [33] CHIANG, H.-D. A Theory-based Controlling UEP Method for Direct Analysis of Power System Transient Stability. In Circuits and Systems, 1989., IEEE International Symposium on, volume 3, páginas 1980 –1983, maio de 1989.
- [34] CHIANG, H.-D., WU, F.F., AND VARAIYA, P.P. A BCU Method for Direct Analysis of Power System Transient Stability. Power Systems, IEEE Transactions on, 9(3):1194 –1208, agosto de 1994.
- [35] NAZARENO, I.S., ALBERTO, L.F.C., AND BRETAS, N.G. Problems in the Precise Determination of BCU's Controlling Unstable Equilibrium Points and PEBS's Exit Point Method in Real-Time Transient Stability Analysis. In Transmission and Distribution Conference and Exposition: Latin America, 2004 IEEE/PES, páginas 475 – 480, novembro de 2004.
- [36] SCRUGGS, J.T. AND MILI, L. Dynamic Gradient Method for PEBS Detection in Power System Transient Stability Assessment. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 23(2):155 – 165, 2001.
- [37] NAZARENO, I.S., ALBERTO, L.F.C., AND BRETAS, N.G. Robust Computation of the Controlling Unstable Equilibrium Points in Transient Stability Analysis. In Power Tech, 2005 IEEE Russia, páginas 1 –7, junho de 2005.
- [38] TREINEN, R.T., VITTAL, V., AND KLIEMANN, W. An Improved Technique to Determine the Controlling Unstable Equilibrium Point in a Power System. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on, 43(4):313 –323, abril de 1996.
- [39] CHIANG, H.-D., LI, H., YAN, Z., AND WANG, C.-S. BCU Classifiers for On-line Dynamic Contingency Screening of Electric Power Systems. In Power System Technology, 1998. Proceedings. POWERCON '98. 1998 International Conference on, volume 2, páginas 1260 –1265, agosto de 1998.
- [40] CHIANG, H.-D., WANG, C.-S., AND LI, H. Development of BCU Classifiers for On-line Dynamic Contingency Screening of Electric Power Systems. Power Systems, IEEE Transactions on, 14(2):660 –666, maio de 1999.
- [41] TADA, Y., KURITA, A., ZHOU, Y., KOYANAGI, K., CHIANG, H.-D., AND ZHENG, Y. BCU-Guided Time-Domain Method for Energy Margin Calculation to Improve BCU-DSA System. In Transmission and Distribution Conference and

- Exhibition 2002: Asia Pacific. IEEE/PES, volume 1, páginas 366 – 371, outubro de 2002.
- [42] RAMOS, R.A., ALBERTO, L.F.C., AND BRETAS, N.G. Modelagem de Máquinas Síncronas aplicada ao Estudo de Estabilidade de Sistemas Elétricos de Potência. Technical report, EESC/USP, São Carlos, SP, 2000.
- [43] ALBERTO, L.F.C. AND CHIANG, H.-D. Uniform Approach for Stability Analysis of Fast Subsystem of Two-Time Scale Nonlinear Systems. International Journal of Bifurcation and Chaos, 17(11):4195 – 4203, 2007.
- [44] VENKATASUBRAMANIAN, V., SCHATTLER, H., AND ZABORSZKY, J. Dynamics of Large Constrained Nonlinear Systems - A Taxonomy Theory [Power System Stability]. Proceedings of the IEEE, 83(11):1530 – 1561, novembro de 1995.
- [45] VENKATASUBRAMANIAN, V., SCHATTLER, H., AND ZABORSZKY, J. Local Bifurcations and Feasibility Regions in Differential-Algebraic Systems. Automatic Control, IEEE Transactions on, 40(12):1992 – 2013, dezembro de 1995.
- [46] KOKOTOVIC, P.V. Subsystems, Time Scales and Multimodeling. Automatica, 17(6):789 – 795, 1981.
- [47] KOKOTOVIC, P.V., ALLEMONG, J.J., WINKELMAN, J.R., AND CHOW, J.H. Singular Perturbation and Iterative Separation of Time Scales. Automatica, 16(1):23 – 33, 1980.
- [48] WINKELMAN, J.R., CHOW, J.H., ALLEMONG, J.J., AND KOKOTOVIC, P.V. Multi-Time-Scale Analysis of a Power System. Automatica, 16(1):35 – 43, 1980.
- [49] WINKELMAN, J.R., CHOW, J.H., BOWLER, B.C., AVRAMOVIC, B., AND KOKOTOVIC, P.V. An Analysis of Interarea Dynamics of Multi-Machine Systems. Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on, PAS-100(2):754 – 763, fevereiro de 1981.
- [50] ALBERTO, L.F.C. AND CHIANG, H.-D. Stability Regions of Singular Perturbed Systems. In Anais do XVIII CBA-Congresso Brasileiro de Automática, páginas 1398–1404. SBA, setembro de 2010.
- [51] BRAUER, F. AND NOHEL, J.A. The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations. Dover Publications Inc., 1969.
- [52] LIMA, E.L. Espaços Métricos. Projeto Euclides. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), quarta edition, 1993.
- [53] MUNKRES, J.R. Topology. Prentice-Hall, second edition, 2000.

- [54] LA SALLE, J.P. The Stability of Dynamical Systems. Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, third edition, 1976.
- [55] CHIANG, H.-D. AND FEKIH-AHMED, L. A Constructive Methodology for Estimating the Stability Regions of Interconnected Nonlinear Systems. Circuits and Systems, IEEE Transactions on, 37(5):577 –588, maio de 1990.
- [56] CHIANG, H.-D. AND THORP, J.S. Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems: A Constructive Methodology. Automatic Control, IEEE Transactions on, 34(12):1229 –1241, dezembro de 1989.
- [57] MAGNUSSON, P.C. The Transient-Energy Method of Calculating Stability. American Institute of Electrical Engineers, Transactions of the, 66(1):747 –755, janeiro de 1947.
- [58] AYLETT, P.D. The Energy-Integral Criterion of Transient Stability Limits of Power Systems. Proceedings of the IEE - Part C: Monographs, 105(8):527 –536, setembro de 1958.
- [59] GLESS, G.E. Direct Method of Liapunov Applied to Transient Power System Stability. Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on, PAS-85(2):159 –168, fevereiro de 1966.
- [60] KWATNY, H., BAHAR, L., AND PASRIJA, A. Energy-like Lyapunov Functions for Power System Stability Analysis. Circuits and Systems, IEEE Transactions on, 32(11):1140 – 1149, novembro de 1985.
- [61] NARASIMHAMURTHI, N. AND MUSAVI, M. A Generalized Energy Function for Transient Stability Analysis of Power Systems. Circuits and Systems, IEEE Transactions on, 31(7):637 – 645, julho de 1984.
- [62] NARASIMHAMURTHI, N. On the Existence of Energy Function for Power Systems with Transmission Losses. Circuits and Systems, IEEE Transactions on, 31(2):199 – 203, fevereiro de 1984.
- [63] CHIANG, H.-D. Study of the Existence of Energy Functions for Power Systems with Losses. Circuits and Systems, IEEE Transactions on, 36(11):1423 –1429, novembro de 1989.
- [64] CHADALAVADA, V., VITTAL, V., EJEBE, G.C., IRISARRI, G.D., TONG, J., PIEPER, G., AND MCMULLEN, M. An On-line Contingency Filtering Scheme for Dynamic Security Assessment. Power Systems, IEEE Transactions on, 12(1):153 –161, fevereiro de 1997.

-
- [65] RODRIGUES, H.M., ALBERTO, L.F.C., AND BRETAS, N.G. On the Invariance Principle: Generalizations and Applications to Synchronization. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on, 47(5):730–739, maio de 2000.
- [66] RODRIGUES, H. M., ALBERTO, L. F. C., AND BRETAS, N. G. Uniform Invariance Principle and Synchronization - Robustness with Respect to Parameter Variation. Journal of Differential Equations, 169(1):228 – 254, 2001.
- [67] SILVA, F.H.J.R., GUEDES, R.B.L., ALBERTO, L.F.C., AND BRETAS, N.G. Função Energia Generalizada de Controle para Estabilização de Sistemas Não Lineares. SBA - Controle & Automação, 20(2):133–145, junho de 2009.
- [68] BRETAS, N.G. AND ALBERTO, L.F.C. Energy Function for Power Systems with Transmission Losses: Extension of the Invariance Principle. In Power System Technology, 2000. Proceedings. PowerCon 2000. International Conference on, volume 1, páginas 145 –150, 2000.
- [69] SILVA, F.H.J.R., ALBERTO, L.F.C., AND BRETAS, G. Extended Lyapunov Function for Power Systems with Transmission Losses. In Power Tech Conference Proceedings, 2003 IEEE Bologna, volume 3, página 6, junho de 2003.
- [70] SILVA, F.H.J.R., ALBERTO, L.F.C., LONDON JR., J.B.A., AND BRETAS, N.G. Smooth Perturbation on a Classical Energy Function for Lossy Power System Stability Analysis. Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on, 52(1):222 – 229, janeiro de 2005.
- [71] GUEDES, R.B.L., SILVA, F.H.J., ALBERTO, L.F.C., AND BRETAS, N.G. An Extended Energy Function for Voltage and Transient Stability Analysis considering Voltage Dependent Active Loads. In Power Tech, 2005 IEEE Russia, páginas 1 –6, junho de 2005.
- [72] GUEDES, R.B.L., SILVA, F.H.J.R., ALBERTO, L.F.C., AND BRETAS, N.G. Large Disturbance Voltage Stability Assessment using Extended Lyapunov Function and Considering Voltage Dependent Active Loads. In Power Engineering Society General Meeting, 2005. IEEE, volume 2, páginas 1760 – 1767, junho de 2005.
- [73] ALBERTO, L. F. C. AND CHIANG, H.-D. Characterization of Stability Region for General Autonomous Nonlinear Dynamical Systems. Automatic Control, IEEE Transactions on, PP(99):1, 2011.
- [74] EL-ABIAD, A.H. AND NAGAPPAN, K. Transient Stability Regions of Multimachine Power Systems. Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on, PAS-85(2):169 –179, feb. 1966.

- [75] ZHANG, Y., WEHENKEL, L., ROUSSEAUX, P., AND RIBBENS-PAVELLA, M. First- and Multi-Swing Transient Stability Limits of a Longitudinal System using the SIME Method. In Electrotechnical Conference, 1996. MELECON '96., 8th Mediterranean, volume 2, páginas 809 –815 vol.2, maio de 1996.
- [76] XUE, Y., VAN CUTSEM, T., AND RIBBENS-PAVELLA, M. A Simple Direct Method for Fast Transient Stability Assessment of Large Power Systems. Power Systems, IEEE Transactions on, 3(2):400 –412, maio de 1988.
- [77] PALIS JR., J. AND DE MELO, W. Geometric Theory of Dynamical Systems - An Introduction. Springer-Verlag, 1982.
- [78] ZABORSZKY, J., HUANG, G., ZHENG, B., AND VARAIYA, P. A Counterexample of a Theorem by Tsolas et al. and An Independent Result by Zaborszky et al. [with reply]. Automatic Control, IEEE Transactions on, 33(3):316 –317, março de 1988.
- [79] CHIANG, H.-D. AND FEKIH-AHMED, L. Quasi-Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems: Theory. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on, 43(8):627 –635, agosto de 1996.
- [80] CHIANG, H.-D. AND FEKIH-AHMED, L. Quasi-Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems: Optimal Estimations. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on, 43(8):636 –643, agosto de 1996.
- [81] GRUJIĆ, L.T. Uniform Asymptotic Stability of Non-Linear Singularly Perturbed General and Large-Scale Systems. International Journal of Control, 33(3):481–504, março de 1981.
- [82] KOKOTOVIC, P.V., O'MALLEY JR., R.E., AND SANNUTI, P. Singular Perturbations and Order Reduction in Control Theory - An Overview. Automatica, 12(2):123 – 132, 1976.
- [83] O'MALLEY, R.E. Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations, volume 89 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, first edition, 1991.
- [84] KHORASANI, K. AND PAI, M.A. Two Time Scale Decomposition and Stability Analysis of Power Systems. Control Theory and Applications, IEE Proceedings D, 135(3):205 – 212, maio de 1988.
- [85] CHOW, J.H., ALLEMONG, J.J., AND KOKOTOVIC, P.V. Singular Perturbation Analysis of Systems with Sustained High Frequency Oscillations. Automatica, 14(3):271 – 279, 1978.

-
- [86] CHOW, J.H., GALARZA, R., ACCARI, P., AND PRICE, W.W. Inertial and Slow Coherency Aggregation Algorithms for Power System Dynamic Model Reduction. Power Systems, IEEE Transactions on, 10(2):680 –685, maio de 1995.
- [87] DATE, R.A. AND CHOW, J.H. Aggregation Properties of Linearized Two-Time-Scale Power Networks . Circuits and Systems, IEEE Transactions on, 38(7):720 –730, julho de 1991.
- [88] KOKOTOVIC, P.V., AVRAMOVIC, B., CHOW, J.H., AND WINKELMAN, J.R. Coherency based Decomposition and Aggregation. Automatica, 18(1):47 – 56, 1982.
- [89] PEPONIDES, G., KOKOTOVIC, P., AND CHOW, J. Singular Perturbations and Time Scales in Nonlinear Models of Power Systems. Circuits and Systems, IEEE Transactions on, 29(11):758 – 767, novembro de 1982.
- [90] GALARZA, R.J., CHOW, J.H., PRICE, W.W., HARGRAVE, A.W., AND HIRSCH, P.M. Aggregation of Exciter Models for Constructing Power System Dynamic Equivalents. Power Systems, IEEE Transactions on, 13(3):782 –788, agosto de 1998.
- [91] HOPPENSTEADT, F.C. Singular perturbations on the infinite interval. Transactions of the American Mathematical Society, 123:521–535, 1966.
- [92] NAZARENO, I.S. Mecanismo de Instabilidade devido à Grandes Perturbações em Sistemas Elétricos de Potência modelados por Equações Algébrico-Diferenciais. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 2009.
- [93] SABERI, A. AND KHALIL, H. Quadratic-type Lyapunov Functions for Singularly Perturbed Systems. Automatic Control, IEEE Transactions on, 29(6):542 – 550, junho de 1984.
- [94] ZOU, Y., YIN, M.-H., AND CHIANG, H.-D. Theoretical Foundation of the Controlling UEP Method for Direct Transient-Stability Analysis of Network-Preserving Power System Models. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on, 50(10):1324 – 1336, outubro de 2003.
- [95] ALBERTO, L.F.C. AND CHIANG, H.-D. Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems: Theory, Estimation and Applications. Cambridge University Press, United Kingdom, a ser publicado em 2013.
- [96] CHIANG, H.-D. AND THORP, J.S. The Closest Unstable Equilibrium Point Method for Power System Dynamic Security Assessment. Circuits and Systems, IEEE Transactions on, 36(9):1187 –1200, setembro de 1989.

- [97] CHIANG, H.D. AND SUBRAMANIAN, A.K. BCU Dynamic Security Assessor for Practical Power System Models. In Power Engineering Society Summer Meeting, 1999. IEEE, volume 1, páginas 287 –290, julho de 1999.
- [98] SASTRY, V. R. AND MURTHY, P. G. Derivation of Completely Controllable and Completely Observable State Models for Multimachine Power System Stability Studies. International Journal of Control, 16(4):777–788, 1972.
- [99] CHEN, C.-T. Linear System Theory and Design. The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering. Oxford University Press, third edition, 1999.
- [100] ANDERSON, B.D.O. Stability of Control Systems with Multiple Nonlinearities. Journal of the Franklin Institute, 282(3):155 – 160, 1966.
- [101] ANDERSON, B.D.O., NEWCOMB, R.W., KALMAN, R.E., AND YOULA, D.C. Equivalence of Linear Time-Invariant Dynamical Systems. Journal of the Franklin Institute, 281(5):371 – 378, 1966.
- [102] CHU, C.-C. AND CHIANG, H.-D. Boundary Properties of the BCU Method for Power System Transient Stability Assessment. In Circuits and Systems (ISCAS), Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on, páginas 3453 –3456, junho de 2010.
- [103] PAGANINI, F. AND LESIEUTRE, B.C. Generic Properties, One-Parameter Deformations, and the BCU Method. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on, 46(6):760 –763, junho de 1999.
- [104] LLAMAS, A., DE LA REE LOPEZ, J., MILI, L., PHADKE, A.G., AND THORP, J.S. Clarifications of the BCU Method for Transient Stability Analysis. Power Systems, IEEE Transactions on, 10(1):210 –219, fevereiro de 1995.
- [105] CHU, C.-C. AND CHIANG, H.-D. Constructing Analytical Energy Functions for Lossless Network-Reduction Power System Models: Framework and New Developments. Circuits Systems and Signal Processing, 18(1):1 –16, 1999.
- [106] SYLVESTER, J.J. A Demonstration of the Theorem that Every Homogeneous Quadratic Polynomial is Reducible by Real Orthogonal Substitutions to the Form of a Sum of Positive and Negative Squares. Philosophical Magazine, 4(23):138–142, 1852.
- [107] KLEIN, M., ROGERS, G.J., AND KUNDUR, P. A Fundamental Study of Inter-Area Oscillations in Power Systems. Power Systems, IEEE Transactions on, 6(3):914 –921, agosto de 1991.

Apêndice A

Análise das Funções Energia para o Sistema Máquina - Barramento Infinito

Neste apêndice as funções escalares auxiliares, propostas por Alberto e Chiang em 2008 [2], utilizadas na aplicação do método TTS-CUEP no sistema máquina - barramento (vide capítulo 4 deste trabalho) serão estudadas a fim de comprovar sua validade como funções energia para do SEP sob estudo.

A.1 Função Energia do Sistema Original Π_ε

Considere o sistema máquina - barramento infinito, descrito na escala de tempo rápida, modelo pelo seguinte conjunto de equações diferenciais ordinárias singularmente perturbado:

$$\Pi_\varepsilon : \begin{cases} \frac{dE'_q}{d\tau} = \varepsilon \left[E_{FD} - \frac{(x_d + X_{linha(eq)})}{(x'_d + X_{linha(eq)})} E'_q + \frac{(x_d - x'_d)}{(x'_d + X_{linha(eq)})} V_\infty \cos(\delta) \right] \\ \frac{d\delta}{d\tau} = \omega \\ M \frac{d\omega}{d\tau} = P_m - \frac{V_\infty E'_q \sin(\delta)}{(x'_d + X_{linha(eq)})} - D\omega \end{cases} \quad (A.1)$$

Seja a função escalar V_ε , com a qual se deseja estudar a região de estabilidade do sistema Π_ε , dada por:

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(E'_q, \delta, \omega) = & \frac{M\omega^2}{2} - P_m\delta - \frac{V_\infty E'_q \cos(\delta)}{x'_d + X_{linha(eq)}} + \\ & + \frac{x_d + X_{linha(eq)}}{(x'_d + X_{linha(eq)})(x_d - x'_d)} \frac{E_q'^2}{2} - \frac{E'_q E_{FD}}{x_d - x'_d} \end{aligned} \quad (A.2)$$

Para que a função escalar V_ε seja uma função esta deve satisfazer as condições descritas

na definição (2.3.2). Dito isto, primeiramente deve-se mostrar que $\dot{V}_\varepsilon(\phi_\varepsilon(E'_q, \delta, \omega, t)) \leq 0$.

Logo, utilizando a regra da cadeia conclui-se que:

$$\frac{dV_\varepsilon}{d\tau} = \frac{dV_\varepsilon}{dE'_q} \frac{dE'_q}{d\tau} + \frac{dV_\varepsilon}{d\delta} \frac{d\delta}{d\tau} + \frac{dV_\varepsilon}{d\omega} \frac{d\omega}{d\tau} \quad (\text{A.3})$$

Avaliando as derivadas de V_ε em relação a E'_q , δ e ω tem-se:

$$\frac{dV_\varepsilon}{dE'_q} = -\frac{-V_\infty \cos(\delta)}{x'_d + X_{linha(eq)}} + \frac{(x_d + X_{linha(eq)})E'_q}{(x'_d + X_{linha(eq)})(x_d - x'_d)} - \frac{E_{FD}}{x_d - x'_d} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{dV_\varepsilon}{d\delta} = -P_m + \frac{V_\infty E'_q \sin(\delta)}{x'_d + X_{linha(eq)}} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{dV_\varepsilon}{d\omega} = M\omega \quad (\text{A.6})$$

Após algumas manipulações algébricas obtém-se:

$$\frac{dV_\varepsilon}{d\delta} \frac{d\delta}{d\tau} + \frac{dV_\varepsilon}{d\omega} \frac{d\omega}{d\tau} = -D\omega^2 \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{dV_\varepsilon}{dE'_q} \frac{dE'_q}{d\tau} = \frac{-1}{\varepsilon(x_d - x'_d)} \left(\frac{dE'_q}{d\tau} \right)^2 \quad (\text{A.8})$$

Com isso, calculando (A.3):

$$\frac{dV_\varepsilon}{d\tau} = -D\omega^2 - \frac{1}{\varepsilon(x_d - x'_d)} \left(\frac{dE'_q}{d\tau} \right)^2 < 0 \quad (\text{A.9})$$

Assim, a condição (i) da definição (2.3.2) está satisfeita.

A segunda condição para que a função escalar V_ε seja uma função energia é que se $\mathbf{x} \notin E_\varepsilon$, então o conjunto $\{t \in \mathbb{R} : \dot{V}_\varepsilon(\phi_\varepsilon(E'_q, \delta, \omega, t)) = 0\}$ tem medida zero sobre $\mathbb{R}$.

Dito isto, suponha que exista um intervalo $[t_1, t_2]$ tal que para $\forall t \in [t_1, t_2]$ a derivada de V_ε com relação a τ se anula. Portanto, igualando a derivada de V_ε , com relação a τ , a zero:

$$\frac{dV_\varepsilon}{d\tau} = -D\omega^2 - \frac{1}{\varepsilon(x_d - x'_d)} \left(\frac{dE'_q}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (\text{A.10})$$

Conclui-se, então, que $\dot{V}_\varepsilon(\phi_\varepsilon(E'_q, \delta, \omega, t)) = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$ e $\frac{dE'_q}{d\tau} = 0$, que implica, das equações (A.1), que $\delta = \text{constante}$ e que $\sin(\delta) = \frac{P_m(x'_d + X_{linha(eq)})}{V_\infty E'_q}$. Assim, segue que $(E'_q, \delta, \omega) \in E_\varepsilon$, e portanto a condição (ii) da definição (2.3.2) está satisfeita.

Por fim, deve-se mostrar que se a trajetória do sistema $\phi_\varepsilon(E'_q, \delta, \omega, t)$ tem um valor limitado de $V_\varepsilon(\phi_\varepsilon(E'_q, \delta, \omega, t))$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, então $\phi_\varepsilon(\phi(E'_q, \delta, \omega, t))$ também é limitada.

A partir da derivada de E'_q , com relação a τ , pode-se aplicar a fórmula da variação das constantes¹ obtendo então:

$$E'_q(\tau) = E'_q(0)e^{-\frac{x_d + X_{linha(eq)}}{x'_d + X_{linha(eq)}}(\varepsilon\tau)} + \int_0^\tau e^{-\frac{x_d + X_{linha(eq)}}{x'_d + X_{linha(eq)}}(\tau-s)\varepsilon} \left[\varepsilon \left(E_{FD} + \frac{x_d - x'_d}{x'_d + X_{linha(eq)}} V_\infty \cos(\delta(s)) \right) \right] ds \quad (A.13)$$

Considerando que:

$$\left\| \left[\varepsilon \left(E_{FD} + \frac{x_d - x'_d}{x'_d + X_{linha(eq)}} V_\infty \cos(\delta(\tau)) \right) \right] \right\| \leq a, \quad a \in \mathbb{R} \quad (A.14)$$

Obtém-se:

$$\|E'_q(\tau)\| \leq \|E'_q(0)\| + \frac{x'_d + X_{linha(eq)}}{x_d + X_{linha(eq)}} a \quad (A.15)$$

Logo concluí-se que $E'_q(\tau)$ é limitado.

De modo análogo, a partir da derivada de ω , com relação a τ , novamente aplica-se a fórmula da variação das constantes:

$$\omega(\tau) = \omega(0)e^{-\frac{D}{M}\tau} + \int_0^\tau e^{-\frac{D}{M}(\tau-s)} \left[P_m - \frac{V_\infty E'_q \sin(\delta(s))}{x'_d + X_{linha(eq)}} \right] ds \quad (A.16)$$

Considerando, então, que:

$$\left\| \left[P_m - \frac{V_\infty E'_q \sin(\delta(s))}{x'_d + X_{linha(eq)}} \right] \right\| \leq b, \quad b \in \mathbb{R} \quad (A.17)$$

¹ Considere a equação $\frac{dy}{dt} = f(y, t)$, se $f(y, t)$ depende linearmente de y pode-se escrever:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

Definindo, então, o problema de valor inicial:

$$P.V.I. \begin{cases} \frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (A.11)$$

Pode-se escrever a solução do P.V.I. na forma [51]:

$$y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t -p(s)ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t -p(s)ds} g(s)ds. \quad (A.12)$$

Obtém-se:

$$\|\omega(\tau)\| \leq \|\omega(0)\| + \frac{M}{D} b \quad (\text{A.18})$$

Verifica-se, portanto, que $\omega(\tau)$ também é limitado.

Finalmente, suponha que V_ε seja limitada superior e inferiormente por constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} c_1 < \frac{M\omega^2}{2} - P_m\delta - \frac{V_\infty E'_q \cos(\delta)}{x'_d + X_{linha(eq)}} + \\ + \frac{x_d + X_{linha(eq)}}{(x'_d + X_{linha(eq)})(x_d - x'_d)} \frac{E_q'^2}{2} - \frac{E'_q E_{FD}}{x_d - x'_d} < c_2 \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Lembrando que $E'_q(\tau)$ e $\omega(\tau)$ são limitados pode-se concluir que:

$$\left\| \frac{V_\infty E'_q \cos(\delta)}{x'_d + X_{linha(eq)}} \right\| < c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R} \quad (\text{A.20})$$

$$\left\| \frac{E_{FD} E'_q}{x_d - x'_d} \right\| < c_4, \quad c_4 \in \mathbb{R} \quad (\text{A.21})$$

Portanto, tem-se que:

$$c_1 - \frac{M\omega^2}{2} - \frac{x_d + X_{linha(eq)}}{(x'_d + X_{linha(eq)})(x_d - x'_d)} \frac{E_q'^2}{2} - c_3 - c_4 < -P_m\delta < c_2 + c_3 + c_4 \quad (\text{A.22})$$

Logo, se $-P_m\delta$ é limitado, então, tem-se que $\delta(\tau)$ é limitado e a condição (iii) da definição (2.3.2) está satisfeita, provando enfim que a função V_ε é uma função energia para o sistema original Π_ε .

A.2 Função Energia do Subsistema Rápido $\Pi_{BLS}(E'_q)$

Considere a família de subsistemas rápidos de fronteira:

$$\Pi_{BLS}(E'_q) : \begin{cases} \frac{d\delta}{d\tau} = \omega \\ M \frac{d\omega}{d\tau} = P_m - \frac{V_\infty E'_q \sin(\delta)}{(x'_d + X_{linha(eq)})} - D\omega \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Seja a função escalar $V_{(F)}$, com a qual se deseja estudar a região de estabilidade de cada sistema $\Pi_{BLS}(E'_q)$, dada por:

$$V_{(F)}(E'_q, \delta, \omega) = \frac{M\omega^2}{2} - P_m\delta - \frac{V_\infty E'_q \cos(\delta)}{x'_d + X_{linha(eq)}} \quad (\text{A.24})$$

Novamente, para que a condição (i) da definição (2.3.2) seja satisfeita para a função escalar $V_{(F)}$, utiliza-se a regra da cadeia e conclui-se que:

$$\frac{dV_{(F)}}{d\tau} = \frac{dV_{(F)}}{dE'_q} \frac{dE'_q}{d\tau} + \frac{dV_{(F)}}{d\delta} \frac{d\delta}{d\tau} + \frac{dV_{(F)}}{d\omega} \frac{d\omega}{d\tau} \quad (\text{A.25})$$

Lembrando que para cada subsistema rápido $\Pi_{BLS}(E'_q)$ a variável E'_q é constante temos que $\frac{dE'_q}{d\tau} = 0$ e portanto:

$$\frac{dV_{(F)}}{d\tau} = \frac{dV_{(F)}}{d\delta} \frac{d\delta}{d\tau} + \frac{dV_{(F)}}{d\omega} \frac{d\omega}{d\tau} \quad (\text{A.26})$$

Avaliando as derivadas de $V_{(F)}$, em relação a δ e ω verifica-se que:

$$\frac{dV_{(F)}}{d\delta} = -P_m + \frac{V_\infty E'_q \text{sen}(\delta)}{x'_d + X_{linha(eq)}} \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{dV_{(F)}}{d\omega} = M\omega \quad (\text{A.28})$$

Após algumas manipulações algébricas obtém-se:

$$\frac{dV_{(F)}}{d\delta} \frac{d\delta}{d\tau} + \frac{dV_{(F)}}{d\omega} \frac{d\omega}{d\tau} = -D\omega^2 \quad (\text{A.29})$$

$$(\text{A.30})$$

Com isso, calculando (A.26):

$$\frac{dV_{(F)}}{d\tau} = -D\omega^2 < 0 \quad (\text{A.31})$$

Assim, a condição (i) da definição (2.3.2) está satisfeita para a função escalar $V_{(F)}$.

Para que a condição (ii) da definição (2.3.2) seja satisfeita, primeiramente, suponha que exista um intervalo $[t_1, t_2]$ tal que para $\forall t \in [t_1, t_2]$ a derivada de $V_{(F)}$ com relação a τ se anula. Portanto, igualando a derivada de $V_{(F)}$, com relação a τ , a zero:

$$\frac{dV_{(F)}}{d\tau} = -D\omega^2 = 0 \quad (\text{A.32})$$

Conclui-se, então, que $\dot{V}_{(F)}(\phi_0(E'_q, \delta, \omega, t)) = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$ o que implica que $\delta =$ constante e consequentemente, das equações (A.23), tem-se que $(E'_q, \delta, \omega) \in E_{\Pi_{BLS}(E'_q)}$, e deste modo a condição (ii) da definição (2.3.2) está satisfeita.

De modo semelhante ao discutido anteriormente, a fim de se provar que a condição (iii) da definição (2.3.2) é satisfeita para a função escalar $V_{(F)}$, a partir da derivada de ω ,

com relação a τ , aplica-se a fórmula da variação das constantes:

$$\begin{aligned} \omega(\tau) &= \omega(0)e^{-\frac{D}{M}\tau} + \\ &+ \int_0^\tau e^{-\frac{D}{M}(\tau-s)} \left[P_m - \frac{V_\infty E'_q \text{sen}(\delta(s))}{x'_d + X_{linha(eq)}} \right] ds \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Considerando, então, que:

$$\left\| \left[P_m - \frac{V_\infty E'_q \text{sen}(\delta(s))}{x'_d + X_{linha(eq)}} \right] \right\| \leq a, \quad a \in \mathbb{R} \quad (\text{A.34})$$

Obtém-se:

$$\|\omega(\tau)\| \leq \|\omega(0)\| + \frac{M}{D} a \quad (\text{A.35})$$

Verifica-se, desta maneira, que $\omega(\tau)$ é limitado.

Suponha, então, que $V_{(F)}$ seja limitada superior e inferiormente por constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, logo:

$$c_1 < \frac{M\omega^2}{2} - P_m\delta - \frac{V_\infty E'_q \cos(\delta)}{x'_d + X_{linha(eq)}} < c_2 \quad (\text{A.36})$$

Lembrando que $\omega(\tau)$ é limitado e que E'_q é constante para cada subsistema rápido de fronteira, pode-se concluir que:

$$\left\| \frac{V_\infty E'_q \cos(\delta)}{x'_d + X_{linha(eq)}} \right\| < c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R} \quad (\text{A.37})$$

Segue, então, que:

$$c_1 - \frac{M\omega^2}{2} - c_3 < -P_m\delta < c_2 + c_3 \quad (\text{A.38})$$

Logo, se $-P_m\delta$ é limitado, então, tem-se que $\delta(\tau)$ é limitado e a condição (iii) da definição (2.3.2) está satisfeita, provando assim que a função $V_{(F)}$ é uma função energia para cada membro da família de subsistemas rápidos de fronteira $\Pi_{BLS}(E'_q)$.

A.3 Função Energia do Subsistema Lento Σ_0

Considere o subsistema lento:

$$\Sigma_0 : \begin{cases} \frac{dE'_q}{dt} = E_{FD} - \frac{(x_d + X_{linha(eq)})}{(x'_d + X_{linha(eq)})} E'_q + \frac{(x_d - x'_d)}{(x'_d + X_{linha(eq)})} V_\infty \cos(\delta) \\ 0 = \omega \\ 0 = P_m - \frac{V_\infty E'_q \sin(\delta)}{(x'_d + X_{linha(eq)})} \end{cases} \quad (A.39)$$

Seja a função escalar $V_{(S)}$, com a qual se deseja estudar a região de estabilidade de cada sistema Σ_0 , dada por:

$$\begin{aligned} V_{(S)}(E'_q, \delta) = & -(x_d - x'_d) P_m \delta - \frac{x_d - x'_d}{x'_d + X_{linha(eq)}} V_\infty E'_q \cos(\delta) + \\ & + \frac{x_d + X_{linha(eq)}}{x'_d + X_{linha(eq)}} \frac{E_q'^2}{2} - E'_q E_{FD} \end{aligned} \quad (A.40)$$

Para que a função escalar $V_{(S)}$ satisfaça a condição (i) da definição (2.3.2), inicialmente, utiliza-se a regra da cadeia e verifica-se que:

$$\frac{dV_{(S)}}{dt} = \frac{dV_{(S)}}{dE'_q} \frac{dE'_q}{dt} + \frac{dV_{(S)}}{d\delta} \frac{d\delta}{dt} \quad (A.41)$$

Avaliando a derivada de $V_{(S)}$, em relação a E'_q , obtém-se:

$$\frac{dV_{(S)}}{dE'_q} = -E_{FD} - \frac{(x_d - x'_d) V_\infty \cos(\delta)}{x'_d + X_{linha(eq)}} + \frac{(x_d + X_{linha(eq)}) E'_q}{x'_d + X_{linha(eq)}} = -\frac{dE'_q}{dt} \quad (A.42)$$

Calculando a derivada de $V_{(S)}$, em relação a δ , tem-se:

$$\frac{dV_{(S)}}{d\delta} = -(x_d - x'_d) \left(P_m - \frac{V_\infty E'_q \sin(\delta)}{x'_d + X_{linha(eq)}} \right) = 0 \quad (A.43)$$

Com isso, calculando (A.41):

$$\frac{dV_{(S)}}{dt} = - \left(\frac{dE'_q}{dt} \right)^2 < 0 \quad (A.44)$$

Assim, a condição (i) da definição (2.3.2) está satisfeita para a função escalar $V_{(S)}$.

Com isso, para que a condição (ii) da definição (2.3.2) seja satisfeita, primeiramente, suponha que exista um intervalo $[t_1, t_2]$ tal que para $\forall t \in [t_1, t_2]$ a derivada de $V_{(S)}$ com

relação a t se anula. Portanto, igualando a derivada de $V_{(S)}$, com relação a t , a zero:

$$\frac{dV_{(S)}}{dt} = - \left(\frac{dE'_q}{dt} \right)^2 = 0 \quad (\text{A.45})$$

Verifica-se, portanto, que $\dot{V}_{(S)}(\varphi_0(E'_q, \delta, t)) = 0 \Leftrightarrow \frac{dE'_q}{dt} = 0$ o que implica em $(E'_q, \delta) \in E_0$, e deste modo a condição (ii) da definição (2.3.2) está satisfeita para a função escalar $V_{(S)}$.

Finalmente, deve-se mostrar que se a condição (iii) da definição (2.3.2) é satisfeita para a função escalar $V_{(S)}$. Para tanto, utilizando a fórmula da variação das constantes, obtém-se:

$$\begin{aligned} E'_q(t) &= E'_q(0) e^{-\frac{x_d + X_{linha(eq)} t}{x'_d + X_{linha(eq)}} + \\ &+ \int_0^t e^{-\frac{x_d + X_{linha(eq)}(t-s)}{x'_d + X_{linha(eq)}} \left[E_{FD} + \frac{x_d - x'_d}{x'_d + X_{linha(eq)}} V_\infty \cos(\delta(s)) \right] ds \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Considerando que:

$$\left\| \left[E_{FD} + \frac{x_d - x'_d}{x'_d + X_{linha(eq)}} V_\infty \cos(\delta(t)) \right] \right\| \leq a, \quad a \in \mathbb{R} \quad (\text{A.47})$$

Obtém-se:

$$\|E'_q(\tau)\| \leq \|E'_q(0)\| + \frac{x'_d + X_{linha(eq)}}{x_d + X_{linha(eq)}} a \quad (\text{A.48})$$

Logo conclui-se que $E'_q(t)$ é limitado.

Suponha, então, que a função escalar $V_{(S)}$ seja limitada superior e inferiormente por constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, logo:

$$\begin{aligned} c_1 &< -(x_d - x'_d) P_m \delta - \frac{x_d - x'_d}{x'_d + X_{linha(eq)}} V_\infty E'_q \cos(\delta) + \\ &+ \frac{x_d + X_{linha(eq)}}{x'_d + X_{linha(eq)}} \frac{E_q'^2}{2} - E'_q E_{FD} < c_2 \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Lembrando que E'_q é limitado pode-se concluir que:

$$\left\| \frac{(x_d - x'_d) V_\infty E'_q \cos(\delta)}{x'_d + X_{linha(eq)}} \right\| < c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R} \quad (\text{A.50})$$

$$\|E'_q E_{FD}\| < c_4, \quad c_4 \in \mathbb{R} \quad (\text{A.51})$$

Verifica-se, assim, que:

$$c_1 - \frac{x_d + X_{linha(eq)}}{x'_d + X_{linha(eq)}} \frac{E_q'^2}{2} - c_3 - c_4 < -(x_d - x'_d)P_m\delta < c_2 + c_3 + c_4 \quad (A.52)$$

Logo, se $-(x_d - x'_d)P_m\delta$ é limitado, então, tem-se que $\delta(t)$ é limitado e a condição (iii) da definição (2.3.2) está satisfeita, provando assim que a função $V_{(S)}$ é uma função energia para o subsistema lento Σ_0 .

Apêndice B

Dados Estáticos e Dinâmicos dos SEPs Estudados

B.1 Introdução

Neste apêndice serão descritos os dados estáticos (comummente necessários ao cálculo do fluxo de potência) e dinâmicos (parâmetros dos modelos dos geradores síncronos utilizados nas análises de estabilidade) dos sistemas elétricos de potência tomados como exemplo no capítulo 6 deste trabalho.

B.2 Dados do Sistema Kundur Modificado

As tabelas B.1 e B.2 a seguir listam os dados estáticos, comummente utilizados para a resolução do fluxo de potência do SEP, do sistema Kundur modificado (vide figura 6.1), utilizado nas análises apresentadas neste trabalho.

Tabela B.1: Dados estáticos de barra do sistema Kundur modificado (considera-se $V_{base} = 230$ kV, $S_{base} = 100$ MVA).

Barra #	V (p.u.)	Ângulo (graus)	P_{ger} (MW)	Q_{ger} (MVar)	P_{carga} (MW)	Q_{carga} (MVar)	B_{shunt} (MVar)
1	1,000	0,00°	-54,75	-11,68	0,00	0,00	0,00
2	1,030	13,11°	1274,00	280,62	0,00	0,00	0,00
3	1,030	30,84°	1040,00	297,07	0,00	0,00	0,00
4	1,030	15,33°	1001,00	417,86	0,00	0,00	0,00
5	1,002	0,52°	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	1,006	1,29°	0,00	0,00	150,00	0,00	0,00
7	1,000	-4,81°	0,00	0,00	967,00	100,00	200,00
8	0,990	-7,66°	0,00	0,00	150,00	0,00	0,00

Barra #	V (p.u.)	Ângulo (graus)	P_{ger} (MW)	Q_{ger} (MVar)	P_{carga} (MW)	Q_{carga} (MVar)	B_{shunt} (MVar)
9	0,968	-5,55°	0,00	0,00	1767,00	100,00	350,00
10	0,976	5,78°	0,00	0,00	150,00	0,00	0,00
11	0,996	21,11°	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabela B.2: Dados estáticos de linha do sistema Kundur modificado (considera-se $V_{base} = 230$ kV, $S_{base} = 100$ MVA).

Linha	R(p.u.)	X(p.u.)	b _c (p.u.)	Tap
1 - 5	0,0000	0,017	0,000	1,00
2 - 6	0,0000	0,017	0,000	1,00
3 - 11	0,0000	0,017	0,000	1,00
4 - 10	0,0000	0,017	0,000	1,00
5 - 6	0,0025	0,025	0,044	1,00
6 - 7	0,0010	0,010	0,018	1,00
7 - 8	0,0110	0,110	0,193	1,00
7 - 8	0,0110	0,110	0,193	1,00
8 - 9	0,0110	0,110	0,193	1,00
8 - 9	0,0110	0,110	0,193	1,00
9 - 10	0,0010	0,010	0,018	1,00
10 - 11	0,0025	0,025	0,044	1,00

A tabela B.3 apresenta os dados dos parâmetros dinâmicos, relativos aos modelos dos geradores síncronos conectados ao SEP, utilizados na análise do sistema Kundur modificado.

Tabela B.3: Dados dinâmicos dos geradores do sistema Kundur modificado (considera-se $V_{base} = 230$ kV, $S_{base} = 100$ MVA).

Gerador (barra)	r_{arm} (p.u.)	x_d (p.u.)	x_q (p.u.)	x'_d (p.u.)	x'_q (p.u.)	τ'_{do} (s)	M (s ²)
2	$2,01 \cdot 10^{-6}$	$1,51 \cdot 10^{-3}$	$1,43 \cdot 10^{-3}$	$2,52 \cdot 10^{-4}$	$4,62 \cdot 10^{-4}$	8,00	0,310
3	$2,01 \cdot 10^{-6}$	$1,51 \cdot 10^{-3}$	$1,43 \cdot 10^{-3}$	$2,52 \cdot 10^{-4}$	$4,62 \cdot 10^{-4}$	8,00	0,295
4	$2,01 \cdot 10^{-6}$	$1,51 \cdot 10^{-3}$	$1,43 \cdot 10^{-3}$	$2,52 \cdot 10^{-4}$	$4,62 \cdot 10^{-4}$	8,00	0,295

B.3 Dados do Sistema IEEE 14 Barras Modificado

Nas tabelas B.4-B.6 estão apresentados os dados estáticos e dinâmicos referentes ao sistema IEEE 14 barras modificado (vide figura 6.2), utilizado como exemplo neste trabalho.

Tabela B.4: Dados estáticos de barra do sistema IEEE 14 barras modificado (considera-se $V_{base} = 100$ kV, $S_{base} = 100$ MVA).

Barra #	V (p.u.)	Ângulo (graus)	P_{ger} (MW)	Q_{ger} (MVar)	P_{carga} (MW)	Q_{carga} (MVar)	B_{shunt} (MVar)
1	1,060	0,00°	92,75	5,39	0,00	0,00	0,00
2	1,045	1,61°	40,00	3,12	21,70	12,70	0,00
3	1,010	-2,53°	100,00	-18,89	94,20	19,00	0,00
4	1,070	-7,03°	30,00	33,76	11,20	7,50	0,00
5	1,090	-7,53°	0,00	20,89	0,00	0,00	0,00
6	1,033	-4,94°	0,00	0,00	47,80	-3,90	0,00
7	1,056	-7,53°	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8	1,040	-4,24°	0,00	0,00	7,60	1,60	0,00
9	1,048	-8,87°	0,00	0,00	29,50	16,60	19,00
10	1,044	-8,83°	0,00	0,00	9,00	5,80	0,00
11	1,053	-8,06°	0,00	0,00	3,50	1,80	0,00
12	1,055	-7,97°	0,00	0,00	6,10	1,60	0,00
13	1,049	-8,12°	0,00	0,00	13,50	5,80	0,00
14	1,030	-9,55°	0,00	0,00	14,90	5,00	0,00

Tabela B.5: Dados estáticos de linha do sistema IEEE 14 barras modificado (considera-se $V_{base} = 100$ kV, $S_{base} = 100$ MVA).

Linha	R(p.u.)	X(p.u.)	b _c (p.u.)	Tap
1 - 2	0,019	0,059	0,053	1,00
1 - 8	0,054	0,223	0,049	1,00
2 - 3	0,047	0,198	0,044	1,00
2 - 6	0,058	0,176	0,034	1,00
2 - 8	0,057	0,174	0,035	1,00
3 - 6	0,067	0,171	0,013	1,00
6 - 8	0,013	0,042	0,00	1,00
6 - 7	0,00	0,209	0,00	1,00
6 - 9	0,00	0,556	0,00	1,00
8 - 4	0,00	0,252	0,00	1,00
4 - 11	0,095	0,199	0,00	1,00
4 - 12	0,0123	0,256	0,00	1,00
4 - 13	0,066	0,130	0,00	1,00
7 - 5	0,00	0,176	0,00	1,00
7 - 9	0,00	0,110	0,00	1,00

Linha	R(p.u.)	X(p.u.)	b _c (p.u.)	Tap
9 - 10	0,032	0,084	0,00	1,00
9 - 14	0,127	0,270	0,00	1,00
10 - 11	0,082	0,192	0,00	1,00
12 - 13	0,221	0,200	0,00	1,00
13 - 14	0,171	0,348	0,00	1,00

Tabela B.6: Dados dinâmicos dos geradores do sistema IEEE 14 barras modificado (considera-se $V_{base} = 100$ kV, $S_{base} = 100$ MVA).

Gerador (barra)	r_{arm} (p.u.)	x_d (p.u.)	x_q (p.u.)	x'_d (p.u.)	x'_q (p.u.)	τ'_{do} (s)	M (s ²)
2	0,00	1,39	0,00	1,25	0,00	8,00	0,053
3	0,00	0,91	0,00	0,75	0,00	8,00	0,026
4	0,00	1,63	0,00	1,5	0,00	8,00	0,014
5	0,00	1,32	0,00	1,2	0,00	8,00	0,067