

EDILAINE MARTINS SOLER

Resolução do problema de Fluxo de
Potência Ótimo com variáveis de
controle discretas

São Carlos

2011

EDILAINE MARTINS SOLER

**Resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo
com variáveis de controle discretas**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São de Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências, Programa de Engenharia Elétrica

Área de Concentração: Sistemas Elétricos de Potência

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Roberto Martins da Costa

São Carlos
2011

¹Trata-se da versão corrigida da tese. A versão original se encontra disponível na EESC/USP que aloja o Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica.

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

S686r Soler, Edilaine Martins
Resolução do problema de fluxo de potência ótimo com
variáveis de controle discretas / Edilaine Martins Soler;
orientador Geraldo Roberto Martins da Costa. -- São
Carlos, 2011.

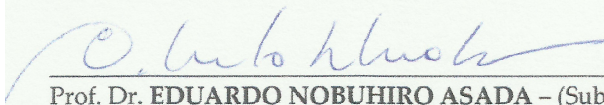
Tese (Doutorado-Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas
Elétricos de Potência) -- Escola de Engenharia de São
Carlos da Universidade de São Paulo, 2011.

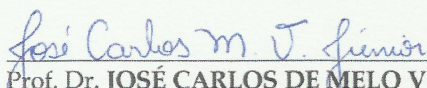
1. Fluxo de potência ótimo. 2. Variáveis discretas. 3.
Programação não linear. I. Título.

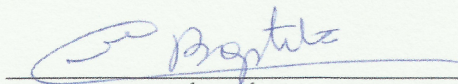
FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato(a): Bacharel EDILAINÉ MARTINS SOLER.

Tese defendida e julgada em 01/03/2011 perante a Comissão Julgadora:

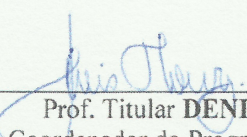

Prof. Dr. **EDUARDO NOBUHIRO ASADA** – (Substituto)
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) APROVADA

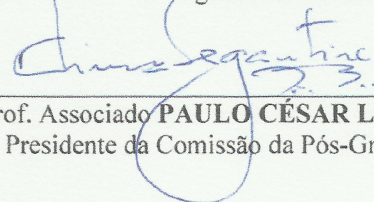

Prof. Dr. **JOSÉ CARLOS DE MELO VIEIRA JÚNIOR**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) APROVADA


Prof.^a. Dr.^a. **EDMÉA CÁSSIA BAPTISTA**
(Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”/UNESP/campus de Bauru) APROVADA


Prof. Associado **JOSÉ ROBERTO SANCHES MANTOVANI**
(Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”/UNESP/campus de Ilha Solteira) Aprovada


Prof. Associado **AURELIO RIBEIRO LEITE DE OLIVEIRA**
(Universidade Estadual de Campinas) APROVADA


Prof. Titular **DENIS VINÍCIUS COURY**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica


Prof. Associado **PAULO CÉSAR LIMA SEGANTINE**
Presidente da Comissão da Pós-Graduação da EESC

Aos meus pais... sem eles eu não
teria chegado até aqui.

Agradecimentos

À Deus, por guiar e iluminar os meus passos.

Ao Professor Dr. Geraldo Roberto Martins da Costa, pela excelente orientação, pela amizade e pela confiança depositada no desenvolvimento deste trabalho.

À minha mãe, ao meu pai e à minha irmã, por serem presentes em minha vida e me apoiarem nas minhas decisões.

Ao Gustavo, meu namorado, que sempre me apoiou e incentivou. Obrigada pelo seu respeito, compreensão, paciência, carinho e amor!

À minha sobrinha Liz, por alegrar a minha vida.

Às minhas grandes amigas Letícia, Analine e Aline, pelo apoio nesta fase, pelas risadas e pelos momentos de descontração.

Aos amigos do Laboratório de Análise de Sistemas de Energia Elétrica.

Aos professores do Departamento de Engenharia Elétrica da EESC.

À Jussara e à Marisa, da secretaria de pós-graduação, e a todos os funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica da EESC que, direta ou indiretamente, contribuíram com este trabalho.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - **FAPESP** e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - **CNPq** pela credibilidade e apoio financeiro.

Resumo

Soler, E. M. (2011). *Resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo com variáveis de controle discretas*. Tese (Doutorado), Departamento de Engenharia Elétrica, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

O objetivo de um problema de Fluxo de Potência Ótimo é determinar o estado de um sistema de transmissão de energia elétrica que otimize um dado desempenho do sistema, e satisfaça suas restrições físicas e operacionais. O problema de Fluxo de Potência Ótimo é modelado como um problema de programação não linear com variáveis discretas e contínuas. Na maioria das abordagens da literatura para a resolução de problemas de Fluxo de Potência Ótimo, os controles discretos são modelados como variáveis contínuas. Estas formulações estão longe da realidade de um sistema elétrico pois alguns controles podem somente ser ajustados por passos discretos. Este trabalho apresenta um método para tratar as variáveis discretas do problema de Fluxo de Potência Ótimo. Uma função, que penaliza a função objetivo quando as variáveis discretas assumem valores não discretos, é apresentada. Ao incorporar esta função na função objetivo, um problema de programação não linear com somente variáveis contínuas é obtido e a solução desse problema é equivalente à solução do problema original, que contém variáveis discretas e contínuas. O problema de programação não linear é resolvido pelo Método de Pontos Interiores com Filtro. Experimentos numéricos com os sistemas elétricos IEEE 14, 30, 118 e 300 Barras comprovam que a abordagem proposta é eficiente na resolução de problemas de Fluxo de Potência Ótimo.

Keywords: Fluxo de Potência Ótimo, variáveis discretas, programação não linear.

Abstract

Soler, E. M. (2011). *Resolution of Optimal Power Flow problem with discrete control variables*. Ph.D. Thesis, Departamento de Engenharia Elétrica, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

The aim of solving the Optimal Power Flow problem is to determine the state of an electric power transmission system that optimizes a given system performance, while satisfying its physical and operating constraints. The Optimal Power Flow problem is modeled as a large-scale mixed-discrete nonlinear programming problem. In most techniques existing in the literature to solve the Optimal Power Flow problems, the discrete controls are modeled as continuous variables. These formulations are unrealistic, as some controls can be set only to values taken from a given set of discrete values. This study proposes a method for handling the discrete variables of the Optimal Power Flow problem. A function, which penalizes the objective function when discrete variables assume non-discrete values, is presented. By including this penalty function into the objective function, a nonlinear programming problem with only continuous variables is obtained and the solution of this problem is equivalent to the solution of the initial problem that contains discrete and continuous variables. The nonlinear programming problem is solved by a Interior-Point Method with filter line-search. Numerical tests using the IEEE 14, 30, 118 and 300-Bus test systems indicate that the proposed approach is efficient in the resolution of OPF problems.

Keywords: Optimal Power Flow, discrete variables, nonlinear programming.

Lista de Figuras

2.1	Problema irrestrito com x_1 e x_2 discretas. Fonte: Fu, Fenton & Cleghorn (1991).	24
2.2	Problema restrito com x_1 e x_2 discretas. Fonte: Fu, Fenton & Cleghorn (1991).	24
2.3	Linearização de uma região não convexa	28
3.1	Efeito de γ e β na função $\Phi(y)$	34
3.2	$\gamma = 5$ e $\beta = 1$	35
3.3	$\gamma = 0,5$ e $\beta = 1$	35
3.4	$\gamma = 0,2$ e $\beta = 1$	35
3.5	Algoritmo PIMD	45
3.6	Curvas de nível da função objetivo aumentada de (3.22) - Exemplo Numérico.	47
5.1	Sistema elétrico IEEE 14 Barras.	64
5.2	Magnitude de Tensão nas barras - IEEE 14 Barras.	65
5.3	Ângulo de Tensão nas barras - IEEE 14 Barras.	66
5.4	Sistema elétrico IEEE 30 Barras.	67
5.5	Magnitude de Tensão nas barras - IEEE 30 Barras.	68
5.6	Ângulo de Tensão nas barras - IEEE 30 Barras.	69
5.7	Sistema elétrico IEEE 118 Barras.	70
5.8	Magnitude de Tensão nas barras - IEEE 118 Barras.	72
5.9	Ângulo de Tensão nas barras - IEEE 118 Barras.	73
5.10	<i>Taps</i> - IEEE 118 Barras.	73
5.11	Sistema elétrico IEEE 300 Barras.	75
5.12	Magnitude de Tensão nas barras - IEEE 300 Barras.	77
5.13	Ângulo de Tensão nas barras - IEEE 300 Barras.	78
5.14	<i>Taps</i> - IEEE 300 Barras.	79

Lista de Tabelas

3.1	Processo de convergência - Exemplo Numérico.	46
5.1	Processo de convergência - Valores para as variáveis discretas - IEEE 14 Barras.	65
5.2	Processo de convergência - Valores para as variáveis discretas - IEEE 30 Barras.	68
5.3	Conjunto dos valores discretos para as susceptâncias <i>shunt</i> - IEEE 118 Barras.	71
5.4	Valores das susceptâncias <i>shunt</i> na solução obtida - IEEE 118 Barras. . . .	74
5.5	Conjunto dos valores discretos para as susceptâncias <i>shunt</i> - IEEE 300 Barras.	76
5.6	Valores das susceptância <i>shunt</i> na solução obtida - IEEE 300 Barras. . . .	79
5.7	Comparação dos resultados - DICOPT.	81
5.8	Comparação dos resultados - BONMIN.	81

Sumário

1	Introdução	19
2	Métodos de otimização para problemas de programação não linear com variáveis discretas e contínuas	23
2.1	Arredondamento	23
2.2	Método <i>Branch-and-Bound</i>	24
2.3	Método <i>Outer Approximation</i>	26
2.4	PPL/PPNL baseado em <i>Branch-and-Bound</i>	28
2.5	Decomposição de Benders Generalizada	28
2.6	Método de Penalidade	29
2.7	Algoritmos de Planos de Cortes	30
2.8	Metaheurísticas	30
3	Método de Solução	33
3.1	Problema de Programação Não Linear equivalente ao Problema de Programação Não Linear com Variáveis Discretas e Contínuas	33
3.1.1	Efeito de γ e β na função $\Phi(y)$	34
3.2	Método de Pontos Interiores com Filtro	36
3.2.1	Método de Pontos Interiores	36
3.2.2	Solução do Problema Barreira	38
3.2.3	Busca Unidimensional com Filtro	40
3.2.4	Algoritmo de Pontos Interiores com Filtro	42
3.3	O pacote IPOPT	44
3.4	Algoritmo de Pontos Interiores Modificado-Discreto (Algoritmo PIMD)	44
3.5	Exemplo Numérico	46
4	Problema de Fluxo de Potência Ótimo	49
4.1	Formulação do Problema	49
4.2	Histórico	51
4.3	Variáveis discretas no Problema	55

5	Resultados Numéricos	63
5.1	Testes Numéricos	63
5.1.1	Sistema elétrico IEEE 14 Barras	64
5.1.2	Sistema elétrico IEEE 30 Barras	66
5.1.3	Sistema elétrico IEEE 118 Barras	69
5.1.4	Sistema elétrico IEEE 300 Barras	74
5.2	Análise dos Resultados	79
5.2.1	Algoritmo PIMD \times <i>Outer Approximation</i>	80
5.2.2	Algoritmo PIMD \times <i>Branch-and-bound</i>	81
6	Conclusões	83
	Referências Bibliográficas	85
A	Resultados	89
A.1	Sistema IEEE 118 Barras	89
A.2	Sistema IEEE 300 Barras	89
B	Dados dos Sistemas Elétricos	93
B.1	Sistema IEEE 14 Barras	93
B.2	Sistema IEEE 30 Barras	94
B.3	Sistema IEEE 118 Barras	95
B.4	Sistema IEEE 300 Barras	99

Capítulo 1

Introdução

A energia elétrica é uma das formas de energia mais utilizada no mundo, além de ser indispensável no dia a dia de toda a população, é essencial para o desenvolvimento econômico de um país. Os Sistemas de Energia Elétrica têm a função de fornecer energia elétrica aos usuários, com qualidade adequada, no instante em que for solicitada e englobam a geração, a transmissão e a distribuição de energia elétrica. O aumento da demanda de energia elétrica nas últimas décadas e o crescente número de interligações entre os sistemas elétricos existentes tornaram a operação e o controle destes sistemas uma tarefa extremamente complexa. Um modo eficiente para se determinar o estado do sistema é através da resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo (FPO), um modelo de otimização em que a rede elétrica é representada por um conjunto de equações e inequações algébricas.

O problema de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) teve sua origem na década de 60 (Carpentier (1962)), desde então, surgiram na literatura inúmeros trabalhos com propostas de modelagem e de abordagens de resoluções para este problema. O propósito do problema de FPO é determinar o estado ótimo de um sistema de transmissão de energia elétrica a fim de otimizar um determinado desempenho do sistema e satisfazer as restrições físicas e operacionais do Sistema de Energia Elétrica.

O problema de FPO é modelado como um Problema de Programação Não Linear com Variáveis Discretas e Contínuas (PPNLDC). A forma geral de um PPNLDC é:

$$\begin{array}{l} \text{Min} \quad f(x, y) \\ \text{s.a :} \quad \left\{ \begin{array}{l} h(x, y) = 0 \\ g(x, y) \geq 0 \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\ y_i \in D_{y_i}, i = 1, 2, \dots, n_y \end{array} \right. \end{array} \quad (1.1)$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n_x})$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n_y})$ são variáveis de decisão, D_{y_i} é o conjunto de valores discretos para a variável y_i , para $i = 1, 2, \dots, n_y$. As funções $f(x, y)$, $h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y), \dots, h_m(x, y))$ e $g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y), \dots, g_p(x, y))$ são funções não lineares. Os vetores $\underline{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ indicam os limites inferior e superior da variável x , respectivamente.

A presença de variáveis discretas, juntamente com a não linearidade das funções e restrições envolvidas em um problema de programação não linear, dificulta a busca por uma solução ótima. Problemas do tipo de (1.1) caracterizam os problemas de otimização mais difíceis de se resolver pois englobam características de Problemas de Programação Inteira Mista (PPIM) e de Problemas de Programação Não Linear (PPNL), e possuem características próprias que não aparecem nestes dois tipos de problemas.

Um PPNLDC é normalmente resolvido por métodos de programação inteira-mista, porém a complexidade computacional da abordagem combinatorial para as soluções possíveis de problemas deste tipo tende a aumentar exponencialmente com o número de variáveis discretas e, portanto, torna-se difícil a sua aplicação em problemas que envolvem um grande número de variáveis e restrições. Métodos como *Outer Approximation* (Leyffer (1993)), Decomposição de *Benders* (Geoffrion (1972)), *Branch-and-Bound* (Gupta & Ravindran (1985)) e algoritmos de Planos de Corte (Westerlund & Petersson (1995)) são métodos que requerem grande esforço computacional quando aplicados a problemas de grande porte, assim estes métodos podem se tornar inviáveis na resolução do problema de FPO. Um método muito utilizado no tratamento das variáveis discretas no problema de FPO é o arredondamento, este método pode nos levar a soluções não-ótimas e até mesmo a soluções que não pertencem à região factível do problema.

Devido à dificuldade de solução imposta pelas variáveis discretas em problemas de programação não linear, a maioria dos trabalhos da literatura considera todas as variáveis do problema de FPO como contínuas. Estas formulações estão longe da realidade de um sistema elétrico, pois algumas variáveis somente podem ser ajustadas através de passos discretos. Assim, tendo em vista a importância do problema de FPO e a necessidade de resolvê-lo, ajustando de maneira ótima as suas variáveis contínuas e discretas, propomos um método para resolução deste problema.

Neste trabalho apresentamos uma função que penaliza a função objetivo quando as variáveis discretas assumem valores não discretos. Ao incorporarmos esta função na função objetivo do problema original as variáveis discretas podem ser consideradas contínuas. Assim, um PPNL com variáveis apenas contínuas é obtido e a solução desse problema é equivalente à solução do problema original, que contém variáveis discretas e contínuas. O PPNL obtido é resolvido pelo Método de Pontos Interiores com Filtro (Wächter & Biegler (2006)). O método proposto permite encontrar soluções mais realistas para problemas de Fluxo de Potência Ótimo, e além disso, o mesmo algoritmo pode ser utilizado na resolução de outros problemas da área de engenharia que são exatamente modelados como PPNLDC.

Testes numéricos com os sistemas elétricos IEEE 14, 30, 118 e 300 Barras mostram que o método proposto é adequado para a resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo. As soluções foram comparadas com soluções obtidas por variantes dos Métodos *Outer-Approximation* e *Branch-and-Bound*.

O trabalho encontra-se dividido como segue: no Capítulo 2 são descritos os principais métodos de solução para problemas de programação não linear com variáveis contínuas e discretas. No Capítulo 3 apresentamos um Método de Solução para ajustar as variáveis discretas e contínuas em problemas de programação não linear. No Capítulo 4 descrevemos a formulação matemática do problema de FPO, apresentamos um breve histórico dos métodos de solução para o problema de FPO e descrevemos os métodos de solução existentes na literatura para tratar das variáveis discretas deste. No Capítulo 5 apresentamos os resultados obtidos com a aplicação do Método de Solução proposto ao problema de FPO. E finalmente, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões.

Capítulo 2

Métodos de otimização para problemas de programação não linear com variáveis discretas e contínuas

Grossmann (2002) e Arora, Huang & Hsieh (1994) descreveram as principais abordagens da literatura para resolução de PPNLDC. Baseado nestes trabalhos, neste capítulo descrevemos brevemente os métodos: Arredondamento, *Branch-and-Bound*, *Outer-Approximation*, PL/PPNL baseado em *Branch-and-Bound*, Decomposição de Benders, Penalidade, Algoritmos de Planos de Cortes e Metaheurísticas.

2.1 Arredondamento

Um método que pode ser utilizado para resolver problemas da forma de (1.1) é o Arredondamento (Ringertz (1988)). Inicialmente resolve-se o problema assumindo que todas as variáveis são contínuas, na solução obtida cada variável discreta é arredondada para o valor discreto mais próximo inferiormente ou para o valor discreto mais próximo superiormente (heurísticas podem ser usadas para auxiliar esta decisão), estas variáveis são mantidas fixas e um novo problema, com somente variáveis contínuas, é resolvido.

Este método pode nos levar a soluções incorretas e até mesmo a soluções que não pertencem à região factível do problema.

A Figura 2.1 apresenta as curvas de nível da função objetivo de um problema de programação não linear irrestrito com x_1 e x_2 variáveis discretas, X^{*C} indica a solução ótima do problema supondo x_1 e x_2 contínuas e X^{*D} indica a solução ótima do problema com x_1 e x_2 discretas. Nesta figura vemos claramente que a solução ótima discreta não é a solução contínua arredondada.

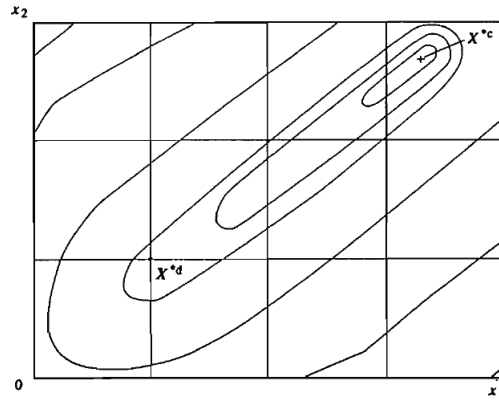


Figura 2.1: Problema irrestrito com x_1 e x_2 discretas. Fonte: Fu, Fenton & Cleghorn (1991).

Na Figura 2.2 é ilustrado um problema restrito de programação não linear com duas variáveis discretas. Nesta figura vemos que arredondar as soluções contínuas pode produzir pontos discretos que não pertencem a região factível.

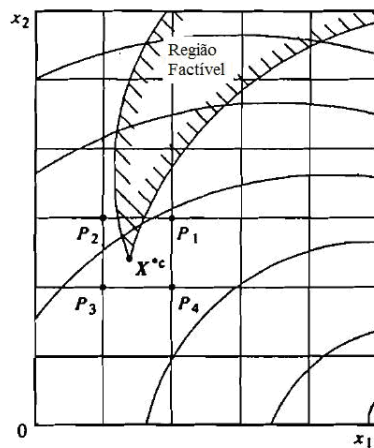


Figura 2.2: Problema restrito com x_1 e x_2 discretas. Fonte: Fu, Fenton & Cleghorn (1991).

2.2 Método *Branch-and-Bound*

O Método *Branch-and-Bound* foi originalmente proposto para PPIM. Gupta & Ravindran (1985) adaptaram o método para problemas cujas funções são não lineares. O Método *Branch-and-Bound* inicia resolvendo a relaxação contínua do Problema (1.1) dada por (2.1).

$$\begin{aligned}
& \text{Min } f(x, y) \\
& \text{s.a. : } \begin{cases} h(x, y) = 0 \\ g(x, y) \geq 0 \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\ \underline{y} \leq y \leq \bar{y} \end{cases} \quad (2.1)
\end{aligned}$$

onde $\underline{y} = (\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_{n_y})$, $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n_y})$ com $\underline{y}_i = \min D_{y_i}$ e $\bar{y}_i = \max D_{y_i}$, para $i = 1, 2, \dots, n_y$.

Seja $(x^*, y^*) = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n_x}^*, y_1^*, y_2^*, \dots, y_{n_y}^*)$ uma solução óptima deste problema. Se $y_i \in D_{y_i}$ para $i = 1, 2, \dots, n_y$ então (x^*, y^*) é uma solução óptima para o Problema (1.1). Caso contrário, a região factível do Problema (2.1) é dividida em duas sub-regiões (*branch*), fornecendo dois subproblemas. Escolhe-se $y_j^* \notin D_{y_j}$, e obtém-se os subproblemas:

$$\begin{aligned}
& \text{Min } f(x, y) \\
& \text{s.a. : } \begin{cases} h(x, y) = 0 \\ g(x, y) \geq 0 \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\ \underline{y} \leq y \leq \bar{y} \\ y_j \leq s_j^{inf} \end{cases} \quad (2.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Min } f(x, y) \\
& \text{s.a. : } \begin{cases} h(x, y) = 0 \\ g(x, y) \geq 0 \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\ \underline{y} \leq y \leq \bar{y} \\ y_j \geq s_j^{sup} \end{cases} \quad (2.3)
\end{aligned}$$

onde s_j^{inf} é o valor discreto mais próximo inferiormente de y_j^* e s_j^{sup} é o valor discreto mais próximo superiormente de y_j^* .

Cada subproblema é dito ser um nó da árvore *Branch-and-Bound*. A solução de cada subproblema fornece um limitante (*bound*) para a sub-região. Se a solução do subproblema é uma solução discreta, então esta sub-região não é mais explorada. Uma sub-região, em

que a melhor solução discreta encontrada até o momento é melhor que o seu limitante, é descartada, caso contrário esta é explorada recursivamente. Prosseguindo desta maneira uma árvore de subproblemas é criada. O método pára quando não há mais sub-regiões para serem exploradas.

A eficiência do método *Branch-and-Bound* depende da qualidade dos seus limitantes para que sub-regiões possam ser descartadas e o método não se torne exaustivo, e da facilidade de resolução dos subproblemas. Infelizmente, estes dois atributos são geralmente antagônicos, isto é, um subproblema de fácil resolução não fornece um limitante de qualidade. Outros fatores como a escolha da ordem para se resolver os subproblemas, e a escolha da variável para o *branching* também afetam a eficiência do método.

2.3 Método *Outer Approximation*

O Método *Outer Approximation* foi proposto por Duran & Grossmann (1986). Neste método a função objetivo e as restrições do problema original são linearizadas. Sucessivos problemas de programação não linear (com variáveis contínuas somente) são resolvidos e definem um problema linear, com variáveis contínuas e discretas, cuja solução é equivalente à solução do problema original. O Método *Outer Approximation* é aplicado na resolução de PPNLDC cuja relaxação contínua é convexa. Considere o PPNLDC dado por (2.4):

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad f(x, y) \\ & \text{s.a :} \quad \begin{cases} g(x, y) \leq 0 \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\ y_i \in D_{y_i}, i = 1, 2, \dots, n_y \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

em que $f(x, y)$ e $g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y), \dots, g_p(x, y))$ são funções não lineares convexas e continuamente diferenciáveis.

Descreveremos o Método *Outer Approximation* para problemas da forma de (2.4). Para isso considere o subproblema PNL(y^j) dado em (2.5), obtido ao fixar um valor para o vetor $y = y^j$ no problema (2.4).

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad f(x, y^j) \\ & \text{s.a :} \quad \begin{cases} g(x, y^j) \leq 0 \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5)$$

E considere o *Problema Mestre* PLDC^K, um problema linear com variáveis contínuas e discretas dado por (2.6).

$$\begin{array}{l}
\text{Min } \eta \\
\text{s.a : } \left\{ \begin{array}{l}
\eta \geq f^k + (\nabla f^k)^t \begin{pmatrix} x - x^k \\ y - y^k \end{pmatrix} \\
0 \geq g^k + (\nabla g^k)^t \begin{pmatrix} x - x^k \\ y - y^k \end{pmatrix} \\
\underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\
y_i \in D_{y_i}, i = 1, 2, \dots, n_y
\end{array} \right. \quad k = 0, 1, 2, \dots, K
\end{array} \quad (2.6)$$

onde x^k e y^k são valores fixos para x e y , $f^k = f(x^k, y^k)$ e $g^k = g(x^k, y^k)$.

O Método *Outer Approximation* se baseia na acumulação crescente de linearizações a fim de delimitar a função objetivo e a região factível do problema (2.4). O método inicia resolvendo o PNL(y^0) onde y^0 é o valor inicial fixado para o vetor y . Seja x^0 a solução desse problema. Ao linearizar a função objetivo e as restrições ativas desse problema no ponto (x^0, y^0) , obtém-se o problema PLDC⁰, que é uma relaxação linear do problema (2.4). Resolve-se o problema PLDC⁰ e seja $(x_{PLDC^0}^0, y_{PLDC^0}^0)$ a solução. Resolve-se então o problema PNL(y_1) com $y^1 = y_{PLDC^0}^0$, dado por (2.5). Seja x^1 a solução desse problema, adicionam-se as linearizações da função objetivo e das restrições ativas desse problema no ponto (x^1, y^1) no problema PLDC⁰ e obtém-se o problema PLDC¹. Resolvendo este problema obtém-se o ponto y^2 , e então o processo é repetido.

Os subproblemas PNL(y^K) fornecem limitantes superiores para a solução do PPNLDC (2.4) e os subproblemas PLDC^K fornecem limitantes inferiores. O algoritmo converge quando estes limitantes são iguais (considerando uma tolerância).

No caso de haver funções não convexas no problema (2.4) o problema PLDC^K não será uma relaxação do problema (2.4), pois as linearizações podem eliminar partes da região factível do problema (2.4), como pode ser observado na Figura 2.3. Heurísticas são associadas a este método para tratar as não convexidades das funções envolvidas, no entanto, não há garantias de que o ótimo global seja encontrado.

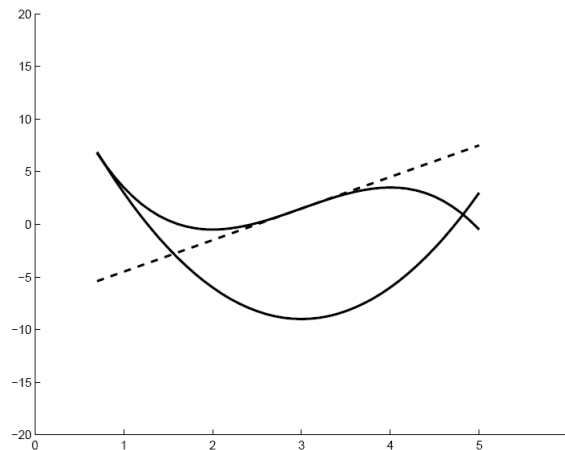


Figura 2.3: Linearização de uma região não convexa

2.4 PPL/PPNL baseado em *Branch-and-Bound*

O princípio deste método (Quesada & Grossmann (1992)) é o Método *Outer Approximation* descrito na Seção 2.3. No método *Outer Approximation* a cada iteração um problema linear com variáveis discretas e contínuas é resolvido, e isto é feito por meio do método *Branch-and-Bound*. Como estes problemas lineares estão relacionados entre si, neste método ao invés de em cada iteração resolver um problema por meio do *Branch-and-Bound*, atualiza-se a árvore de busca do *Branch-and-Bound* no decorrer das iterações.

Como visto no método *Outer Approximation*, as linearizações não são precisas quando há funções não convexas envolvidas.

2.5 Decomposição de Benders Generalizada

No Método de Decomposição de Benders Generalizada (Geoffrion (1972)) o PPNLDC dado por (2.4) é reformulado como um problema de programação linear com variáveis discretas e contínuas, assim como no método *Outer Approximation*. No entanto, para formular este problema de programação linear, o método de Decomposição de Benders faz uso da Teoria da Dualidade. A diferença entre o Método de Decomposição de Benders e o Método *Outer Approximation* está na formulação do Problema Mestre. As aproximações lineares feitas por esse método são menos eficientes que as aproximações lineares feitas pelo Método *Outer Approximation*. Segundo Duran & Grossmann (1986) foi observado na prática que o método *Outer Approximation* é superior ao Método de Decomposição de Benders. Em geral, para um mesmo problema, o número de iterações necessárias para o Método de Decomposição de Benders convergir é maior do que o número de iterações necessárias para a convergência do Método *Outer-Approximation*.

2.6 Método de Penalidade

Uma abordagem adotada para tratar as variáveis discretas em problemas de programação não linear é tratá-las como contínuas e penalizar a função objetivo quando estas variáveis assumem valores não discretos. Nesta linha, descrevemos o trabalho apresentado por Fu, Fenton & Cleghorn (1991). Os autores propuseram três funções que penalizam a função objetivo quando as variáveis discretas assumem valores não discretos. Assim, um problema de programação não linear com variáveis apenas contínuas é obtido e a solução desse problema é equivalente à solução do problema original. O algoritmo proposto resolve sucessivos problemas não lineares contendo apenas variáveis contínuas.

Considere o problema de programação não linear com variáveis contínuas e discretas dado por (1.1). Seja $p(y)$ uma função penalidade dada por:

$$p(y) = \gamma[Q(y)]^\beta. \quad (2.7)$$

em que γ e β são parâmetros que influenciam a amplitude e a forma da função $p(y)$, respectivamente.

Para $Q(y)$ definida como em a), ou em b) ou em c):

a) $Q(y) = \sum_{i=1}^{n_y} 4 \left(\frac{y_i - s_i^{inf}}{s_i^{sup} - s_i^{inf}} \right) \left(1 - \frac{y_i - s_i^{inf}}{s_i^{sup} - s_i^{inf}} \right)$, onde s_i^{inf} é o valor discreto mais próximo inferiormente de y_i e s_i^{sup} é o valor discreto mais próximo superiormente de y_i ;

b) $Q(y) = \sum_{i=1}^{n_y} 4q_i(1 - q_i)$, onde $q_i = \begin{cases} y_i - s_i^{inf}, & \text{se } s_i^{inf} \leq y_i \leq \frac{s_i^{inf} + s_i^{sup}}{2} \\ s_i^{sup} - y_i, & \text{se } \frac{s_i^{inf} + s_i^{sup}}{2} < y_i \leq s_i^{sup} \end{cases}$;

c) $Q(y) = \sum_{i=1}^{n_y} q_i$, onde $q_i = \begin{cases} 0, & \text{se } y_i \in D_{y_i} \\ \delta_i > 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$;

Temos que

$$p(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y_i \in D_{y_i}, i = 1, 2, \dots, n_{y_i} \\ \delta > 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Salientamos que estas funções penalidade são não diferenciáveis.

Consideram-se todas as variáveis do Problema (1.1) como contínuas ao adicionar a função penalidade $p(y)$ na função objetivo, e obtém-se um PPNL.

Escolhendo uma função penalidade como dado em (2.7) podemos alterar a amplitude e a forma de $p(y)$. Ao variarmos γ alteramos a amplitude de $p(y)$ e, ao variarmos β alteramos a forma de $p(y)$. Assim, o algoritmo proposto pelo autor, denominado Algoritmo IDCNLP (*Integer-Discrete-Continuous Non Linear Programming Problems*), resolve sucessivos Problemas Penalizados para diferentes valores de γ , com γ crescendo gradualmente. Como β altera apenas a forma da função penalidade este é mantido constante no decorrer das iterações. Para resolver o Problema Penalizado, um PPNL,

os autores propuseram um algoritmo que faz buscas locais na região factível do problema. Não há garantias de que a solução encontrada seja uma solução ótima para este problema. O algoritmo proposto para resolução do Problema Penalizado requer alto tempo de processamento.

A dificuldade imposta pelo método está em resolver o Problema Penalizado, pois como as funções penalidade apresentadas são não diferenciáveis não é possível a resolução deste por métodos que fazem uso do cálculo de derivadas.

2.7 Algoritmos de Planos de Cortes

Este método foi proposto por Westerlund & Petersson (1995) para resolver PPNLDC da forma de (2.4). O princípio deste método é resolver sucessivos problemas lineares com variáveis discretas e contínuas. Em cada iteração, restrições lineares são adicionadas ao problema linear com variáveis discretas e contínuas, estas restrições (cortes) eliminam parte da região factível deste problema que não pertencem à região factível do PPNLDC (2.4).

Os problemas lineares com variáveis discretas e contínuas resolvidos no decorrer das iterações desse método são da forma de (2.6). Se a solução obtida for infactível para o PPNLDC (2.4), as restrições violadas são linearizadas e adicionadas ao PLDC^K, obtendo-se assim um novo problema PLDC^{K+1}. O processo é repetido até que a solução obtida para o PLDC^K seja factível para o PPNLDC, ou seja, não viole nenhuma restrição desse problema (considerando uma tolerância).

Segundo Arora, Huang & Hsieh (1994) neste método é necessário um grande número de cortes (linearizações) até que a solução obtida para o problema linear com variáveis discretas e contínuas seja uma solução para o PPNLDC.

2.8 Metaheurísticas

As metaheurísticas são procedimentos que incluem heurísticas de construção e busca local, explorando o espaço de soluções. Estes métodos são capazes de encontrar soluções factíveis para problemas de programação não linear com variáveis discretas e contínuas, porém não são hábeis para garantir o grau de otimalidade da solução encontrada. Algoritmos Genéticos (Lin & Hajela (1992)) e *Simulated Annealing* (Kirkpatrick *et al.* (1983)) são exemplos de métodos metaheurísticos.

Os Algoritmos Genéticos são inspirados na Teoria de Darwin. De acordo com esta teoria, em uma população de indivíduos os mais aptos vivem e reproduzem mais e, portanto geram mais descendentes. As características desses indivíduos que os tornam mais aptos são herdadas pelos seus descendentes, que tendem a ser mais aptos do que seus progenitores. Nestes métodos testam-se várias soluções e usa-se a informação obtida

para conseguir soluções cada vez melhores. Um Algoritmo Genético, inicialmente, gera aleatoriamente um conjunto de soluções do problema (população). Cada uma destas soluções é avaliada, de modo que as melhores soluções para o problema são mantidas e as demais são descartadas (seleção). Essas soluções são utilizadas para gerar um novo conjunto de soluções do problema (mutação e cruzamento). É esperado que este novo conjunto de soluções seja melhor do que o anterior. Este processo é chamado de reprodução, e é repetido até que uma solução satisfatória seja encontrada.

O *Simulated Annealing* é análogo a um processo térmico, dito *annealing*, utilizado em metalurgia para obtenção de estados de baixa energia num sólido. O processo consiste em aumentar a temperatura do sólido para um valor máximo no qual ele se funde, e, em seguida, um resfriamento é realizado lentamente até que o material se solidifique, sendo acompanhado e controlado esse arrefecimento. Da mesma maneira, um Algoritmo *Simulated Annealing* substitui a solução atual por uma solução vizinha, escolhida de acordo com uma função objetivo e com uma variável T (Temperatura). Quanto maior for T , maior a componente aleatória que será incluída na próxima solução escolhida. À medida que o algoritmo progride, o valor de T é reduzido, começando o algoritmo a convergir para uma solução ótima, necessariamente local.

O método consiste em cada iteração escolher aleatoriamente um ponto vizinho do ponto corrente e avaliar sua factibilidade e o valor da função objetivo neste ponto. Se o ponto gerado é infactível, então este é descartado. Se o ponto gerado é factível calcula-se o valor da função objetivo neste ponto, se este valor é menor do que a melhor solução conhecida para esse problema, então este ponto passa a ser o ponto corrente (melhor solução). Se o ponto é factível, mas o valor da função objetivo neste ponto é maior do que a função objetivo no ponto corrente, então o ponto pode ser descartado ou aceito, isto depende da *probabilidade de aceitação* (valor de uma função densidade de probabilidade). Se a probabilidade de aceitação é maior do que um número p , então o ponto é aceito como ponto corrente, e o melhor valor para a função objetivo passa ser maior do que o melhor valor conhecido. Para o cálculo da função densidade de probabilidade, um parâmetro temperatura (T) é usado. A temperatura T assume inicialmente um valor elevado e no decorrer do processo este valor é gradativamente reduzido (resfriamento). A aceitação do ponto gerado é mais provável a altas temperaturas e bastante improvável a temperaturas reduzidas. O procedimento é finalizado quando a temperatura chega a um valor próximo de zero e nenhuma solução que piore o valor da melhor solução seja mais aceita. Para o sucesso do método é necessário um processo lento de redução da temperatura e isso resulta em tempos de processamento elevados.

Métodos Metaheurísticos requerem alto tempo computacional quando aplicados a problemas de grande porte, além disso, como esses métodos são baseados em uma busca por soluções, não é possível garantir que a solução encontrada seja um ponto ótimo.

No próximo capítulo é apresentado o Método de Solução desenvolvido neste trabalho para resolução de problemas de programação não linear com variáveis discretas e contínuas e aplicado na resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo.

Capítulo 3

Método de Solução

O método proposto neste trabalho consiste em resolver um Problema de Programação Não Linear (PPNL) cuja solução é equivalente a solução do Problema de Programação Não Linear com Variáveis Discretas e Contínuas (PPNLDC). O PPNL é obtido incorporando na função objetivo do problema original uma função que penaliza a função objetivo quando as variáveis discretas assumem valores não discretos. Ao incorporar esta função na função objetivo as variáveis discretas passam a ser tratadas como variáveis contínuas. A solução desse PPNL é equivalente a solução do PPNLDC. O PPNL é resolvido pelo Método de Pontos Interiores com Filtro proposto por Wächter & Biegler (2006).

3.1 Problema de Programação Não Linear equivalente ao Problema de Programação Não Linear com Variáveis Discretas e Contínuas

Considere um PPNLDC como dado em (1.1), com $f(x, y)$, $g(x, y)$ e $h(x, y)$ de classe C^2 .

Desenvolvemos uma função penalidade dada por:

$$\Phi(y) = \gamma \sum_{i=1}^{n_y} \left[\text{sen} \left(\frac{y_i}{s_i^{sup} - s_i^{inf}} \pi + \alpha \right) \right]^{2\beta} \quad (3.1)$$

em que:

$\gamma > 0$ é o fator de ajuste que determina a amplitude da função Φ ;

β é um número inteiro positivo;

s_i^{inf} é o valor discreto mais próximo inferiormente de y_i ;

s_i^{sup} é o valor discreto mais próximo superiormente de y_i .

α é uma constante tal que $0 \leq \alpha < \pi$ escolhida de modo que a função $\Phi(y)$ se anule somente nos valores discretos de y .

Temos que:

$$\Phi(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y_i \in D_{y_i}, i = 1, 2, \dots, n_y \\ \delta > 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

ou seja, $\Phi(y)$ assume valores positivos somente se y não assumir valores discretos. Assim, encontrar uma solução ótima para o Problema (1.1) é equivalente a resolver o Problema Modificado (3.2), o qual contém apenas variáveis contínuas:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad f(x, y) + \Phi(y) \\ & \text{s.a :} \quad \begin{cases} h(x, y) = 0 \\ g(x, y) \geq 0 \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\ \underline{y} \leq y \leq \bar{y} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

em que $\underline{y} = (\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_{n_y})$, com $\underline{y}_i = \min D_{y_i}$, para $i = 1, 2, \dots, n_y$, e $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n_y})$ com $\bar{y}_i = \max D_{y_i}$, para $i = 1, 2, \dots, n_y$.

Referimo-nos à função objetivo do Problema Modificado (3.2) dada por $f(x, y) + \Phi(y)$ como função objetivo aumentada, pois esta consiste da função objetivo do problema original acrescida da função $\Phi(y)$.

A Função penalidade (3.1) é contínua e diferenciável, assim o problema modificado (3.2) pode ser resolvido por métodos de otimização que fazem uso do cálculo de derivadas.

3.1.1 Efeito de γ e β na função $\Phi(y)$

É possível alterar a forma e a amplitude da função $\Phi(y)$ dada em (3.1) alterando os valores de β e γ , respectivamente. A Figura 3.1 ilustra a função penalidade $\Phi(y)$, para o caso unidimensional, para diferentes valores de γ e β . Nas Figuras 3.1 - 3.4 as notações d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 e d_6 , representam os valores discretos que a variável pode assumir.

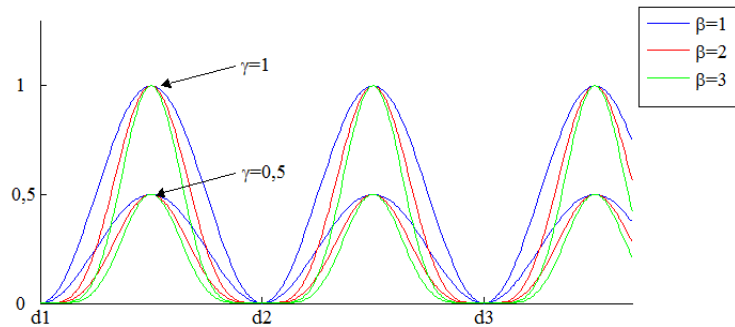


Figura 3.1: Efeito de γ e β na função $\Phi(y)$.

As Figuras 3.2, 3.3 e 3.4 ilustram a função objetivo aumentada, para o caso

unidimensional, para diferentes valores de γ . Estas figuras mostram que a função objetivo aumentada é fortemente influenciada pelo valor de γ .

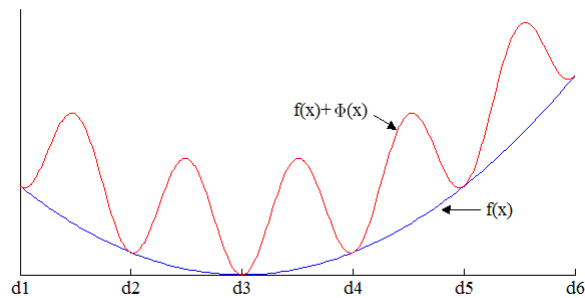


Figura 3.2: $\gamma = 5$ e $\beta = 1$.

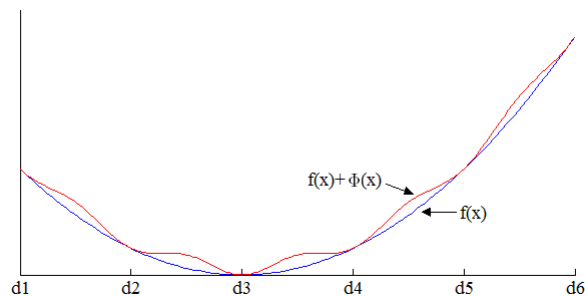


Figura 3.3: $\gamma = 0,5$ e $\beta = 1$.

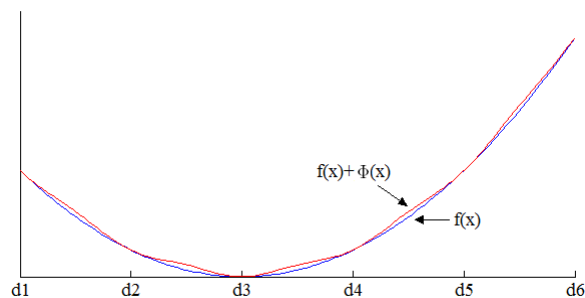


Figura 3.4: $\gamma = 0,2$ e $\beta = 1$.

A escolha de γ influencia na semelhança da função objetivo aumentada com a função objetivo do problema original. Para valores de γ grandes a função objetivo aumentada perde características da função objetivo original, como pode ser observado na Figura 3.2, neste caso a solução do Problema (3.2) pode não ser equivalente a solução do Problema (1.1). Para valores de γ muito pequenos a solução do Problema (3.2) pode não assumir valores discretos para as variáveis y e conseqüentemente a solução do Problema (3.2) não será equivalente a solução do Problema (1.1).

Os valores de β influenciam a forma da função objetivo aumentada, como pode ser observado na Figura 3.1.

Assim, para determinar corretamente o valor de γ , para o qual a solução ótima do Problema (3.2) é equivalente à solução ótima do Problema (1.1), propõe-se resolver sucessivos Problemas (3.2), para diferentes valores de γ , com γ crescendo gradualmente dado por: $\gamma^{(K+1)} = c\gamma^{(K)}$, onde c é uma constante definida com valor $1 < c < 2$, até que $|y_i^* - y_i^{*'}| < \epsilon$, para $i = 1, 2, 3, \dots, n_y$, onde $y_i^{*'}$ é o valor discreto mais próximo de y_i^* e ϵ é a tolerância de convergência.

Para resolver o PPNL (3.2) utilizamos o Algoritmo de Pontos Interiores com Filtro proposto por Wächter & Biegler (2006) o qual foi implementado no pacote IPOPT (*Interior Point OPTimizer*). Esse método é capaz de resolver problemas de programação não linear cujas funções podem ser não convexas, porém, é necessário que as funções sejam duas vezes diferenciáveis. Optou-se por esse método, pois Métodos de Pontos Interiores têm rápida convergência e variantes desses métodos têm sido amplamente aplicadas na resolução do problema de FPO contínuo, tendo sua eficiência comprovada para este problema (Quintana, Gomez & Martinez (1995), Baptista *et al.* (2006), Sousa (2006), entre outros). Na Seção 3.2 descrevemos o Método de Pontos Interiores com Filtro implementado no pacote IPOPT e utilizado na resolução do Problema Modificado (3.2).

3.2 Método de Pontos Interiores com Filtro

Para resolver o Problema Modificado (3.2) propomos utilizar o Método de Pontos Interiores com Filtro proposto por Wächter & Biegler (2006). Este método mostrou-se eficiente para resolver problemas da forma de (3.2). No método de Pontos Interiores com Filtro variáveis de folga ou de excesso, não negativas, são introduzidas nas restrições de desigualdade do PPNL, assim estas restrições são transformadas em restrições de igualdade. As restrições de não negatividade das variáveis de folga e excesso são tratadas pela Função Barreira. Obtém-se assim um Problema Barreira, um PPNL que possui restrições de igualdade somente. Para resolução do Problema Barreira associa-se uma Função Lagrangiana, aplicam-se as Condições Necessárias de Primeira Ordem e obtém-se um sistema não linear, o qual é resolvido pelo Método de Newton. As iterações do Método de Newton fornecem direções de busca para atualização das variáveis. No cálculo do tamanho do passo para atualização das variáveis é utilizada uma busca unidimensional com Filtro.

A seguir descrevemos o Método de Pontos Interiores com Filtro e apresentamos o seu algoritmo.

3.2.1 Método de Pontos Interiores

O Problema (3.2) pode ser reescrito na forma dada em (3.3), em que $z = (x, y)$ e $q(z) = f(x, y) + \Phi(y)$.

$$\begin{aligned}
& \text{Min } q(z) \\
& \text{s.a : } \begin{cases} h_j(z) = 0, & j = 1, 2, \dots, m \\ g_i(z) \geq 0, & i = 1, 2, \dots, p \\ \underline{z}_l \leq z \leq \bar{z}_l, & l = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Acrescentando variáveis de folga e de excesso transformamos as restrições de desigualdade do Problema (3.3) em restrições de igualdade, e obtemos assim o Problema (3.4).

$$\begin{aligned}
& \text{Min } q(z) \\
& \text{s.a : } \begin{cases} h_j(z) = 0, & j = 1, 2, \dots, m \\ g_i(z) - s_{1i} = 0, & i = 1, 2, \dots, p \\ -z_l + \bar{z}_l - s_{2l} = 0, & l = 1, 2, \dots, n \\ z_l - \underline{z}_l - s_{3l} = 0 \\ s_{1i} \geq 0 \\ s_{2l} \geq 0 \\ s_{3l} \geq 0 \end{cases} \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Os vetores $s_1 = (s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1p})$, $s_2 = (s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2n})$ e $s_3 = (s_{31}, s_{32}, \dots, s_{3n})$ são denominados vetores auxiliares.

As restrições de não negatividade das variáveis de folga e excesso são tratadas pela Função Barreira, assim, essas restrições são incorporadas na função objetivo do problema pela Função Barreira Logaritmica, obtendo-se assim o Problema Barreira (3.5), que possui somente restrições de igualdade.

$$\begin{aligned}
& \text{Min } \varphi_\mu(z, s_1, s_2, s_3) = q(z) - \mu \left(\sum_{i=1}^p \ln(s_{1i}) + \sum_{l=1}^n \ln(s_{2l}) + \sum_{l=1}^n \ln(s_{3l}) \right) \\
& \text{s.a : } \begin{cases} h_j(z) = 0, & j = 1, 2, \dots, m \\ g_i(z) - s_{1i} = 0, & i = 1, 2, \dots, p \\ -z_l + \bar{z}_l - s_{2l} = 0, & l = 1, 2, \dots, n \\ z_l - \underline{z}_l - s_{3l} = 0 \end{cases} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

em que $\mu > 0$ é o parâmetro de barreira.

A sequência de parâmetros μ_j , $j = 1, 2, 3, \dots$ gera uma sequência de problemas (3.5)

e uma sequência de soluções desses problemas $z^*(\mu_j)$. Se $\mu_j \rightarrow 0$ então $z^*(\mu_j) \rightarrow z^*$, em que z^* é um ótimo local do Problema (3.3).

O Método de Pontos Interiores consiste em encontrar uma solução aproximada para o Problema (3.5), com uma tolerância $\epsilon_{tol}^{\mu_j}$, para um valor fixo de $\mu = \mu_j$, esse parâmetro é decrescido e obtém-se μ_{j+1} , o problema barreira com $\mu = \mu_{j+1}$ é resolvido usando como ponto inicial a solução aproximada obtida para o problema barreira com $\mu = \mu_j$. O processo é repetido até que se obtenha uma solução para o problema (3.3), com uma tolerância ϵ_{tol} .

Os parâmetros $\epsilon_{tol}^{\mu_j}$ são calculados por:

$$\epsilon_{tol}^{\mu_j} = \kappa_{\epsilon} \mu_j \quad (3.6)$$

em que $\kappa_{\epsilon} > 0$ é uma constante.

O parâmetro de barreira é decrescido pela regra proposta por Wächter & Biegler (2006), dada em (3.7):

$$\mu_{j+1} = \max \left\{ \frac{\epsilon_{tol}}{10}, \min \{ \kappa_{\mu} \mu_j, \mu_j^{s_{\mu}} \} \right\} \quad (3.7)$$

com constantes $\kappa_{\mu} \in (0, 1)$, $s_{\mu} \in (1, 2)$. Na implementação utilizada são valores padrões $\kappa_{\epsilon} = 10$, $\kappa_{\mu} = 0,2$, $s_{\mu} = 1,5$, $\epsilon_{tol} = 10^{-8}$ e $\mu_0 = 0,1$. Estes valores foram determinados por Wächter & Biegler (2006).

3.2.2 Solução do Problema Barreira

Para resolver o Problema Barreira (3.5) para um determinado parâmetro de barreira $\mu = \mu_j$, associamos a este problema a Função Lagrangiana (3.8).

$$L(z, s_1, s_2, s_3, \lambda, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = q(z) - \mu \left(\sum_{i=1}^p \ln(s_{1i}) + \sum_{l=1}^n \ln(s_{2l}) + \sum_{l=1}^n \ln(s_{3l}) \right) \quad (3.8)$$

$$- \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(z) - \sum_{i=1}^p \pi_{1i} (g_i(z) - s_{1i}) - \sum_{l=1}^n \pi_{2l} (-z_l + \bar{z}_l - s_{2l}) - \sum_{l=1}^n \pi_{3l} (z_l - \underline{z}_l - s_{3l})$$

em que: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, $\pi_1 = (\pi_{11}, \pi_{12}, \dots, \pi_{1p})$, $\pi_2 = (\pi_{21}, \pi_{22}, \dots, \pi_{2n})$, $\pi_3 = (\pi_{31}, \pi_{32}, \dots, \pi_{3n})$ são os multiplicadores de Lagrange.

Aplicamos as Condições Necessárias de Primeira Ordem para a Função Lagrangiana ($\nabla L(z, s_1, s_2, s_3, \lambda, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$), que resulta no sistema de equações não lineares dado por (3.9).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z_l}(z) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial z_l}(z) - \sum_{i=1}^p \pi_{1i} \frac{\partial g_i}{\partial z_l}(z) + \pi_{2l} - \pi_{3l} &= 0, \quad l = 1, 2, \dots, n \\
\pi_{1i} - \frac{\mu}{s_{1i}} &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \\
\pi_{2l} - \frac{\mu}{s_{2l}} &= 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \\
\pi_{3l} - \frac{\mu}{s_{3l}} &= 0 \\
-h_j(z) &= 0, \\
g_i(z) - s_{1i} &= 0 \\
-z_l + \bar{z}_l - s_{2l} &= 0 \\
z_l - \underline{z}_l - s_{3l} &= 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

As variáveis do sistema (3.9) são as componentes dos vetores $z, s_1, s_2, s_3, \lambda, \pi_1, \pi_2, \pi_3$, em que z, s_1, s_2 e s_3 são as variáveis primais e $\lambda, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ são as variáveis duais.

Utiliza-se o Método de Newton para resolver o sistema não linear (3.9). Seja J a matriz Jacobiana associada a (3.9), temos que a solução do sistema linear (3.10) gera direções de busca $\Delta d = (\Delta z, \Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \Delta \lambda, \Delta \pi_1, \Delta \pi_2, \Delta \pi_3)$ para atualização das variáveis:

$$J \Delta d^T = -\nabla L. \tag{3.10}$$

Seja k o contador de iterações do Método de Newton. A partir de um ponto $z^{(k)}, s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)}, \lambda^{(k)}, \pi_1^{(k)}, \pi_2^{(k)}, \pi_3^{(k)}$, calcula-se a matriz J e o vetor ∇L neste ponto. Ao resolver o sistema linear (3.10), obtemos as direções de busca $\Delta z^{(k)}, \Delta s_1^{(k)}, \Delta s_2^{(k)}, \Delta s_3^{(k)}, \Delta \lambda^{(k)}, \Delta \pi_1^{(k)}, \Delta \pi_2^{(k)}, \Delta \pi_3^{(k)}$. Utilizando estas, as variáveis são atualizadas por:

$$\begin{aligned}
z^{(k+1)} &= z^{(k)} + \alpha_k \Delta z^{(k)} \\
s_1^{(k+1)} &= s_1^{(k)} + \alpha_k \Delta s_1^{(k)} \\
s_2^{(k+1)} &= s_2^{(k)} + \alpha_k \Delta s_2^{(k)} \\
s_3^{(k+1)} &= s_3^{(k)} + \alpha_k \Delta s_3^{(k)} \\
\lambda^{(k+1)} &= \lambda^{(k)} + \alpha_k \Delta \lambda^{(k)} \\
\pi_1^{(k+1)} &= \pi_1^{(k)} + \alpha_k^\pi \Delta \pi_1^{(k)} \\
\pi_2^{(k+1)} &= \pi_2^{(k)} + \alpha_k^\pi \Delta \pi_2^{(k)} \\
\pi_3^{(k+1)} &= \pi_3^{(k)} + \alpha_k^\pi \Delta \pi_3^{(k)}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

em que $\alpha_k, \alpha_k^\pi \in (0, 1]$ são os passos utilizados para atualização das variáveis.

O passo α_k^π utilizado para atualização das variáveis π_1, π_2 e π_3 é diferente do passo utilizado para atualização das demais variáveis. Wächter & Biegler (2006) constataram por meio de testes que esta estratégia produz melhores resultados.

Como $s_1, s_2, s_3, \pi_1, \pi_2, \pi_3 > 0$ em uma solução ótima do Problema Barreira (3.5), esta propriedade deve ser mantida em todas as iterações do Método de Newton. Portanto calcula-se os tamanhos máximos para os passos pelas regras (3.12) e (3.13). Escolhendo $\alpha_k \in (0, \alpha_k^{max}]$ e $\alpha_k^\pi \in (0, \alpha_k^{\pi max}]$ teremos $s_1^{(k+1)}, s_2^{(k+1)}, s_3^{(k+1)}, \pi_1^{(k+1)}, \pi_2^{(k+1)}, \pi_3^{(k+1)} > 0$.

$$\alpha_k^{\pi max} = \max\{\alpha \in (0, 1] : \pi^{(k)} + \alpha \Delta \pi^{(k)} \geq (1 - \tau_j) \pi^{(k)}\} \quad (3.12)$$

$$\alpha_k^{max} = \max\{\alpha \in (0, 1] : s^{(k)} + \alpha \Delta s^{(k)} \geq (1 - \tau_j) s^{(k)}\} \quad (3.13)$$

em que $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, $s = (s_1, s_2, s_3)$, $\Delta \pi = (\Delta \pi_1, \Delta \pi_2, \Delta \pi_3)$, $\Delta s = (\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3)$, e $\tau_j \in (0, 1)$ é calculado por $\tau_j = \max\{0, 99, 1 - \mu_j\}$.

Realizando experimentos numéricos Wächter & Biegler (2006) constataram que a escolha $\alpha_k^\pi = \alpha_k^{\pi max}$ é eficiente.

O passo $\alpha_k \in (0, \alpha_k^{max}]$ é calculado por uma procedimento de busca unidimensional explorando a sequência de valores decrescentes $\alpha_{k,l} = 2^{-l} \alpha_k^{max}$ (com $l=1,2,3,\dots$) por meio de uma variante do Método de Filtros proposto por Fletcher & Leyffer (2002). Esse procedimento é globalmente convergente (Wächter & Biegler (2005)). O método de busca unidimensional com filtro para o cálculo de α_k é descrito na Seção 3.2.3.

3.2.3 Busca Unidimensional com Filtro

Para simplificar a notação considere $w^{(k)} = (z^{(k)}, s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)})$, $\Delta w^{(k)} = (\Delta z^{(k)}, \Delta s_1^{(k)}, \Delta s_2^{(k)}, \Delta s_3^{(k)})$ e $c(w) = \max\{\|h(z)\|, \|g(z) - s_1\|, \|-z + \bar{z} - s_2\|, \|z - \underline{z} - s_3\|\}$, onde $\|\cdot\|$ denota a norma de um vetor. Seja $\Delta w^{(k)}$ calculado como em (3.10).

Para o cálculo de α_k será realizada uma busca unidimensional tomando como tamanho do passo os valores decrescentes $\alpha_{k,0} = \alpha_k^{max}$, $\alpha_{k,1} = 2^{-1} \alpha_k^{max}$, $\alpha_{k,2} = 2^{-2} \alpha_k^{max}$, $\alpha_{k,3} = 2^{-3} \alpha_k^{max}$, etc... até que o ponto $w^{(k)}(\alpha_{k,l}) = w^{(k)} + \alpha_{k,l} \Delta w^{(k)}$ seja considerado pelos critérios descritos a seguir uma solução melhor para o problema barreira quando comparada com o ponto atual.

Para a resolução do Problema Barreira (3.5) para $\mu = \mu_j$ considera-se este como um problema de dois objetivos: minimizar a função $\varphi_{\mu_j}(z, s_2, s_3)$ e minimizar a violação das restrições $c(w)$. Assim, o ponto $w^{(k)}(\alpha_{k,l})$ é considerado melhor que o ponto atual se fornece progresso com relação a algum dos objetivos, isto é, se satisfaz as condições (3.14) ou (3.15):

$$c(w^{(k)}(\alpha_{k,l})) \leq (1 - \gamma_c) c(w^{(k)}) \quad (3.14)$$

$$\text{ou } \varphi_{\mu_j}(w^{(k)}(\alpha_{k,l})) \leq \varphi_{\mu_j}(w^{(k)}) - \gamma_\varphi c(w^{(k)}) \quad (3.15)$$

onde γ_c e $\gamma_\varphi \in (0, 1)$ são constantes, cujo valor padrão é $\gamma_c = \gamma_\varphi = 10^{-5}$.

Se $w^{(k)}(\alpha_{k,l})$ satisfaz os critérios (3.14) ou (3.15) então $\alpha_{k,l}$ é considerado um passo aceitável. No entanto, para evitar que sejam escolhidos somente passos que forneçam pontos que apenas minimizem a violação das restrições do problema e convirjam para um ponto factível mas não ótimo, Wächter & Biegler (2006) propõem que os critérios (3.16) e (3.17), que garantem factibilidade e decréscimo de φ_{μ_j} , sejam verificados.

$$c(w^{(k)}) \leq c^{min} \quad (3.16)$$

$$e \quad \nabla\varphi_{\mu_j}(w^{(k)})^T \Delta w^{(k)} < 0 \quad e \quad \alpha_{k,l}[-\nabla\varphi_{\mu_j}(w^{(k)})^T \Delta w^{(k)}]^{s_\varphi} > c(w^{(k)})^{s_c} \quad (3.17)$$

com $c^{min} \in (0, \infty]$, $s_c > 1$ e $s_\varphi > 1$ constantes. Valores padrões para estas constantes são $c^{min} = 10^{-4} \max\{1, c(w^{(0)})\}$, com $w^{(0)}$ ponto inicial, $s_c = 1,1$ e $s_\varphi = 2,3$

Se as condições (3.16) e (3.17) são válidas é analisada se a Condição de Armijo (3.18) é válida, a qual garante que a redução na função φ_{μ_j} é proporcional ao tamanho do passo $\alpha_{k,l}$.

$$\varphi_{\mu_j}(w^{(k)}(\alpha_{k,l})) \leq \varphi_{\mu_j}(w^{(k)}(\alpha_{k,l})) + \eta_\varphi \alpha_{k,l} \nabla\varphi_{\mu_j}(w^{(k)})^T \Delta w^{(k)} \quad (3.18)$$

em que $\eta_\varphi \in (0, 1/2)$ é uma constante. O valor padrão para esta constante é $\eta_\varphi = 10^{-4}$.

As condições (3.14) e (3.15) definem um Filtro (Fletcher & Leyffer (2002)). Em cada iteração k do Método de Newton um Filtro F_k é um conjunto que contém os pares $(c, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ com $c \geq 0$, que não satisfazem as condições (3.14) e (3.15). O Filtro F_k armazena os valores de (c, φ) não aceitáveis. Assim, se durante uma busca unidimensional tem-se $(c(w^k(\alpha_{k,l})), \varphi(w^k(\alpha_{k,l}))) \in F_k$, o ponto $w^{(k)}(\alpha_{k,l})$ é rejeitado.

Na inicialização do algoritmo o filtro é dado por:

$$F_0 = \{(c, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : c \geq c^{max}\} \quad (3.19)$$

para algum $c^{max} > 0$, o que faz com que os pontos com uma violação maior que c^{max} sejam rejeitados pelo filtro. O valor padrão para c^{max} é $10^4 \max\{1, c(w^{(0)})\}$.

Se o ponto $w^{(k)}(\alpha_{k,l})$ não satisfaz as condições (3.16) e (3.17), ou a condição (3.18) então o filtro é atualizado por (3.20), pois desse modo garante-se que no decorrer das iterações a vizinhança deste ponto não será explorada pela busca. Se o ponto $w^{(k)}(\alpha_{k,l})$ satisfaz (3.16), (3.17) e (3.18) o filtro não é alterado.

$$F_{k+1} = F_k \cup \{(c, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : c \geq (1 - \gamma_c)c(w^{(k)}) \quad e \quad \varphi \geq \varphi_{\mu_j}(w^{(k)}) - \gamma_\varphi c(w^{(k)})\} \quad (3.20)$$

Se o passo $\alpha_{k,l}$ não for aceito (por não atender as condições (3.14)-(3.18) ou por ser

rejeitado pelo filtro), faz-se $\alpha_{k,l+1} = 2^{-1}\alpha_{k,l}$ e então é verificado se o ponto $w^{(k)}(\alpha_{k,l+1})$ é considerado um ponto melhor que o ponto atual $w^{(k)}$, repetindo-se o processo, iterativamente até obter-se um tamanho de passo aceitável, ou enquanto $\alpha_{k,l} > \alpha_k^{min}$, em que α_k^{min} é o tamanho de passo mínimo exigido.

É possível que nesta busca não seja obtido um tamanho de passo $\alpha_{k,l}$ aceitável, que forneça um ponto melhor que o ponto atual considerando os critérios descritos. Neste caso o algoritmo reverte para a *fase de restauração da factibilidade* em que o algoritmo tenta encontrar um novo ponto $w^{(k+1)}$ que é aceito pelo filtro e que as condições (3.14) e (3.15) são verificadas, para isso, nesta etapa do processo ignora-se a função objetivo do Problema Barreira e é resolvido um problema de otimização para minimizar a violação das restrições $c(w)$, com isso procura-se encontrar um ponto factível $w^{(k+1)}$ na vizinhança do ponto $w^{(k)}$.

O Algoritmo de Pontos Interiores com Filtro é apresentado a seguir.

3.2.4 Algoritmo de Pontos Interiores com Filtro

A seguir é apresentado de maneira resumida o Algoritmo de Pontos Interiores com Filtro proposto em Wächter & Biegler (2006), e implementado no pacote IPOPT, o qual foi utilizado na para resolver o Problema Modificado (3.2). Detalhes rigorosos sobre o método e a implementação podem ser obtidos em Wächter (2002), Wächter & Biegler (2006) e Wächter (2009).

Neste algoritmo $Erro(w^{(k)}, \lambda^{(k)}, \pi^{(k)})$ denota o erro de otimalidade do ponto $(w^{(k)}, \lambda^{(k)}, \pi^{(k)})$ no Problema (3.4), e é calculado pelo valor máximo da norma vetorial das equações obtidas ao aplicar as Condições Necessárias de Primeira Ordem para o Problema (3.4) no ponto $(w^{(k)}, \lambda^{(k)}, \pi^{(k)})$. E $Erro_{\mu_j}(w^{(k)}, \lambda^{(k)}, \pi^{(k)})$ é o erro de otimalidade do Problema (3.5), com $\mu = \mu_j$, para o ponto $(w^{(k)}, \lambda^{(k)}, \pi^{(k)})$, e é calculado pelo valor máximo da norma vetorial das equações (3.9) com $\mu = \mu_j$ no ponto $(w^{(k)}, \lambda^{(k)}, \pi^{(k)})$.

Algoritmo

Passo 1: *Inicialização.*

$$j = 0, k = 0, F_0 = \{(c, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : c \geq c^{max}\}, \mu_0 = 0, 1, \tau_0 = \{0, 99; 1 - \mu_0\}$$

$(w^{(0)}, \lambda^{(0)}, \pi^{(0)})$ ponto inicial

Passo 2: *Critério de Parada.*

$$\text{Se } Erro(w^{(k)}, \lambda^{(k)}, \pi^{(k)}) < \epsilon_{tol} \text{ então PARE}$$

Passo 3: *Convergência Problema Barreira.*

$$\text{Se } Erro_{\mu_j}(w^{(k)}, \lambda^{(k)}, \pi^{(k)}) < \epsilon_{tol}^{\mu_j} \text{ então}$$

$$\mu_{j+1} = \max \left\{ \frac{\epsilon_{tol}}{10}, \min \{ \kappa_{\mu} \mu_j, \mu_j^{s_{\mu}} \} \right\}$$

$$\tau_{j+1} = \max \{ 0, 99, 1 - \mu_{j+1} \}$$

$$j = j + 1$$

$$F_k = \{(c, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : c \geq c^{max}\}$$

Passo 4: *Direção de Busca.*

$$\text{Resolva o sistema } J\Delta d^T = -\nabla L$$

Passo 5: *Busca Unidimensional com filtro.*

5.1 *Inicializando a busca.*

$$\alpha_{k,0} = \alpha_k^{max}, l = 0;$$

5.2 *Calcule o novo ponto.*

$$w^{(k)}(\alpha_{k,l}) = w^{(k)} + \alpha_{k,l}\Delta w^{(k)}$$

5.3 *Filtro.*

Se $(c(w^{(k)}(\alpha_{k,l})), \varphi(w^{(k)}(\alpha_{k,l}))) \in F_k$ então rejeite o ponto e vá para o Passo 5.5

5.4 *Analizando se o ponto obtido é melhor que o ponto atual*

Caso 1: Se $c(w^{(k)}) \leq c^{min}$, $\nabla\varphi_{\mu_j}(w^{(k)})^T \Delta w^{(k)} < 0$ e $\alpha_{k,l}[-\nabla\varphi_{\mu_j}(w^{(k)})^T \Delta w^{(k)}]^{s_\varphi} > c(w^{(k)})^{s_c}$

Se $\varphi_{\mu_j}(w^{(k)}(\alpha_{k,l})) \leq \varphi_{\mu_j}(w^{(k)}(\alpha_{k,l})) + \eta_\varphi \alpha_{k,l} \nabla\varphi_{\mu_j}(w^{(k)})^T \Delta w^{(k)}$ então

$$w^{(k+1)} = w^{(k)}(\alpha_{k,l})$$

Vá para o Passo 6

Caso 2: Senão

Se $c(w^{(k)}(\alpha_{k,l})) \leq (1 - \gamma_c)c(w^{(k)})$ ou $\varphi_{\mu_j}(w^{(k)}(\alpha_{k,l})) \leq \varphi_{\mu_j}(w^{(k)}) - \gamma_\varphi c(w^{(k)})$ então

$$w^{(k+1)} = w^{(k)}(\alpha_{k,l})$$

Vá para o Passo 6

5.5 *Escolha do novo tamanho do passo α_k .*

$$\alpha_{k,l+1} = \frac{1}{2}\alpha_{k,l}$$

$$l = l + 1$$

Volte ao Passo 5.2

Passo 6: *Atualização das variáveis.*

$$\alpha_k = \alpha_{k,l}$$

$$\alpha_k^\pi = \alpha_k^{\pi max}$$

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \alpha_k \Delta \lambda^{(k)}$$

$$\pi^{(k+1)} = \pi^{(k)} + \alpha_k^\pi \Delta \pi^{(k)}$$

Passo 7: *Atualização do Filtro.*

Se $\nabla\varphi_{\mu_j}(w^{(k)})^T \Delta w^{(k)} > 0$ ou $\alpha_{k,l}[-\nabla\varphi_{\mu_j}(w^{(k)})^T \Delta w^{(k)}]^{s_\varphi} \leq c(w^{(k)})^{s_c}$ ou $\varphi_{\mu_j}(w^{(k)}(\alpha_{k,l})) > \varphi_{\mu_j}(w^{(k)}(\alpha_{k,l})) + \eta_\varphi \alpha_{k,l} \nabla\varphi_{\mu_j}(w^{(k)})^T \Delta w^{(k)}$ então

$$F_{k+1} = F_k \cup \{(c, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : c \geq (1 - \gamma_c)c(w^{(k)}) \text{ e } \varphi \geq \varphi_{\mu_j}(w^{(k)}) - \gamma_\varphi c(w^{(k)})\}$$

Senão

$$F_{k+1} = F_k$$

Passo 8: *Próxima Iteração.*

$$k = k + 1$$

Volte ao Passo 2

3.3 O pacote IPOPT

O Projeto COIN-OR (*COmputational INfrastructure for Operational Research*) é uma iniciativa para estimular o desenvolvimento de programas que auxiliem a comunidade científica que trabalha com pesquisa operacional. Os programas e seus códigos-fonte são distribuídos gratuitamente ([http : //www.coin – or.org](http://www.coin-or.org)). Entre outros, o projeto COIN-OR disponibiliza o pacote IPOPT. O IPOPT (*Interior Point OPTimizer*) é um pacote para resolver PPNL de grande porte que utiliza o Método de Pontos Interiores com Filtro proposto por Wächter & Biegler (2006) e descrito na Seção 3.2. Para resolver o Problema Modificado (3.2) foi utilizado este pacote.

3.4 Algoritmo de Pontos Interiores Modificado-Discreto (Algoritmo PIMD)

Para resolver um PPNLDC como dado em (1.1) propomos o Algoritmo de Pontos Interiores Modificado-Discreto apresentado na Figura 3.5.

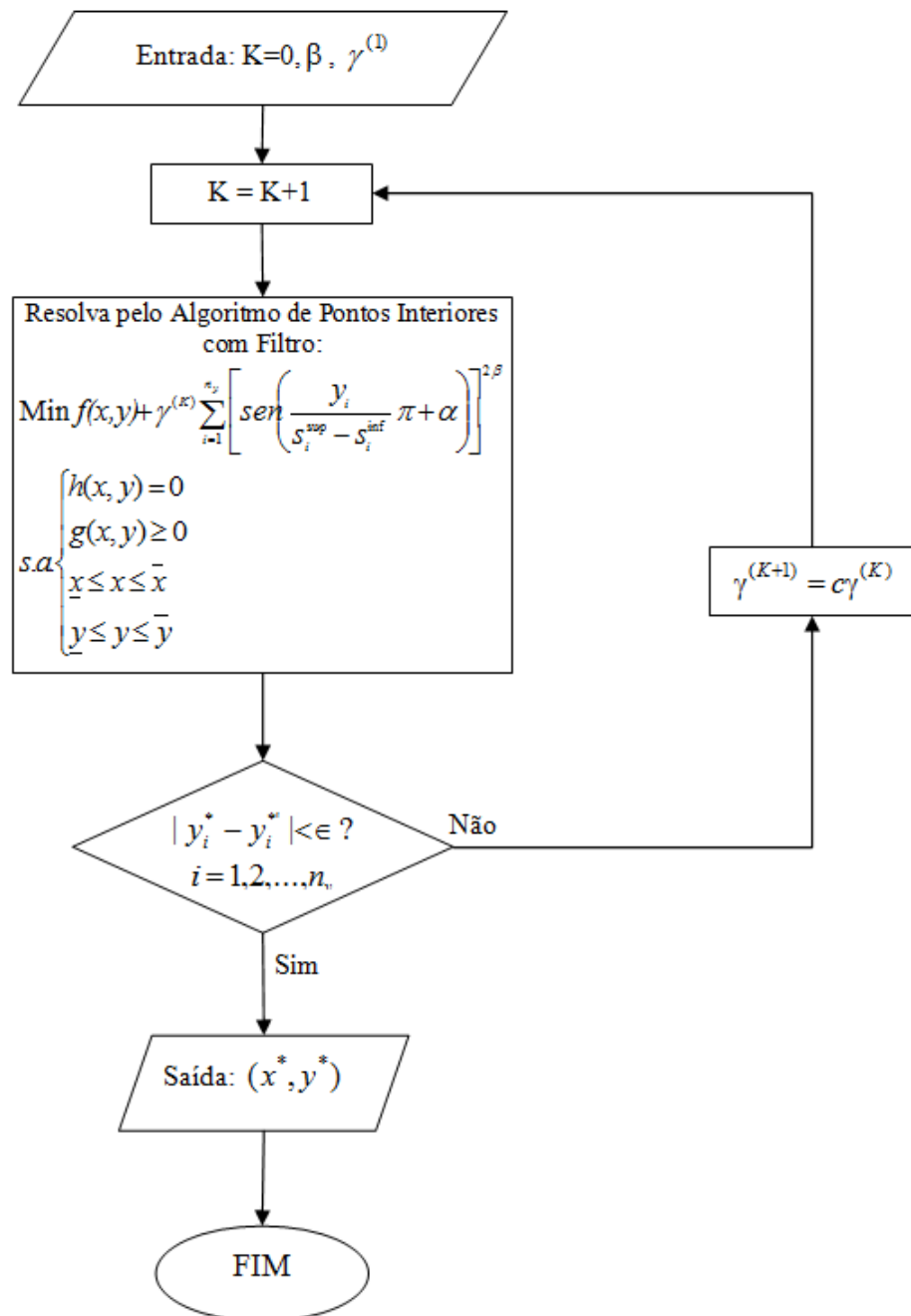


Figura 3.5: Algoritmo PIMD

No Algoritmo PIMD apresentado, em cada iteração um PPNL (Problema Modificado (3.2)) é resolvido. Se na solução obtida para este PPNL as variáveis y (variáveis discretas no problema original) assumem valores discretos, admitindo-se uma tolerância ϵ , o algoritmo é finalizado e esta é uma solução para o Problema (1.1). Caso contrário, a amplitude da penalidade $\gamma^{(K)}$ é atualizada e um novo PPNL é resolvido. O processo prossegue até que as variáveis y_i , $i = 1, 2, \dots, n_y$ assumam valores discretos segundo uma tolerância, ou seja, até que $|y_i^* - y_i^*| < \epsilon$, para $i = 1, 2, 3, \dots, n_y$, onde y_i^* é o valor discreto mais próximo de y_i^* e ϵ é a tolerância de convergência. Para atualizar a amplitude da função $\Phi(y)$ no decorrer das iterações fazemos: $\gamma^{(K+1)} = c\gamma^{(K)}$, em que c é uma constante

tal que $1 < c < 2$. Para c escolhido dessa maneira os valores de $\gamma^{(k)}$ crescem gradualmente no decorrer das iterações.

3.5 Exemplo Numérico

O Problema (3.21), adaptado de Bazaraa & Shetty (1993), será resolvido pelo Algoritmo PIMD, assumindo $\beta = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \\ \text{s.a :} \quad & \begin{cases} x_1^2 - x_2 = 0 \\ x_1 \in \{0, 8; 0, 9; 1; 1, 1; 1, 2\} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.21)$$

O problema modificado é dado por (3.22).

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 + \gamma \left[\text{sen} \left(\frac{x_1 \pi}{0, 1} \right) \right]^2 \\ \text{s.a :} \quad & \begin{cases} x_1^2 - x_2 = 0 \\ 0, 8 \leq x_1 \leq 1, 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Vamos considerar $\gamma^{(1)} = 0, 01$, $c = 1, 9$ e $\epsilon = 0, 001$ (tomamos ϵ como sendo 1% da discretização da variável x_1 o que obriga esta variável a assumir um valor bem próximo de um valor discreto). Na primeira iteração, resolvemos o Problema (3.22) para $\gamma^{(1)} = 0, 01$ e encontramos a solução $x_1^1 = 0, 9407$ e $x_2^1 = 0, 88490$. O valor discreto mais próximo de x_1^1 é $0, 9$ e temos $|0, 9407 - 0, 9| = 0, 0407 > \epsilon$. Atualizamos então γ , temos $\gamma^{(2)} = 0, 019$. Resolvemos (3.22) para $\gamma^{(2)}$ e obtemos a solução $x_1^2 = 0, 9292$ e $x_2^2 = 0, 8635$. O processo continua até a 8ª iteração, na qual ao resolvermos o Problema (3.22) para $\gamma^{(8)} = 0, 8938$ obtemos a solução $x_1^8 = 0, 9009$ e $x_2^8 = 0, 8116$ e temos $|0, 9009 - 0, 9| < \epsilon$, esta solução satisfaz os critérios de parada do algoritmo proposto. A solução discreta ótima deste problema é $x_1 = 0, 9$ e $x_2 = 0, 81$. A Tabela 3.1 apresenta as soluções obtidas para o Problema (3.22) no decorrer das iterações. A Figura 3.6 ilustra as curvas de nível da função objetivo aumentada no decorrer das iterações.

No próximo capítulo descrevemos a formulação do problema de Fluxo de Potência Ótimo, e descrevemos o principais métodos existentes na literatura para resolver este problema.

Tabela 3.1: Processo de convergência - Exemplo Numérico.

Iteração	γ	x_1	x_2	Erro
1	0,0100	0,9407	0,8849	0,0407
2	0,0190	0,9292	0,8635	0,0292
3	0,0361	0,9171	0,8411	0,0171
4	0,0686	0,9098	0,8278	0,0098
5	0,1303	0,9055	0,8200	0,0055
6	0,2476	0,9030	0,8155	0,0030
7	0,4705	0,9016	0,8130	0,0016
8	0,8939	0,9009	0,8116	0,0009

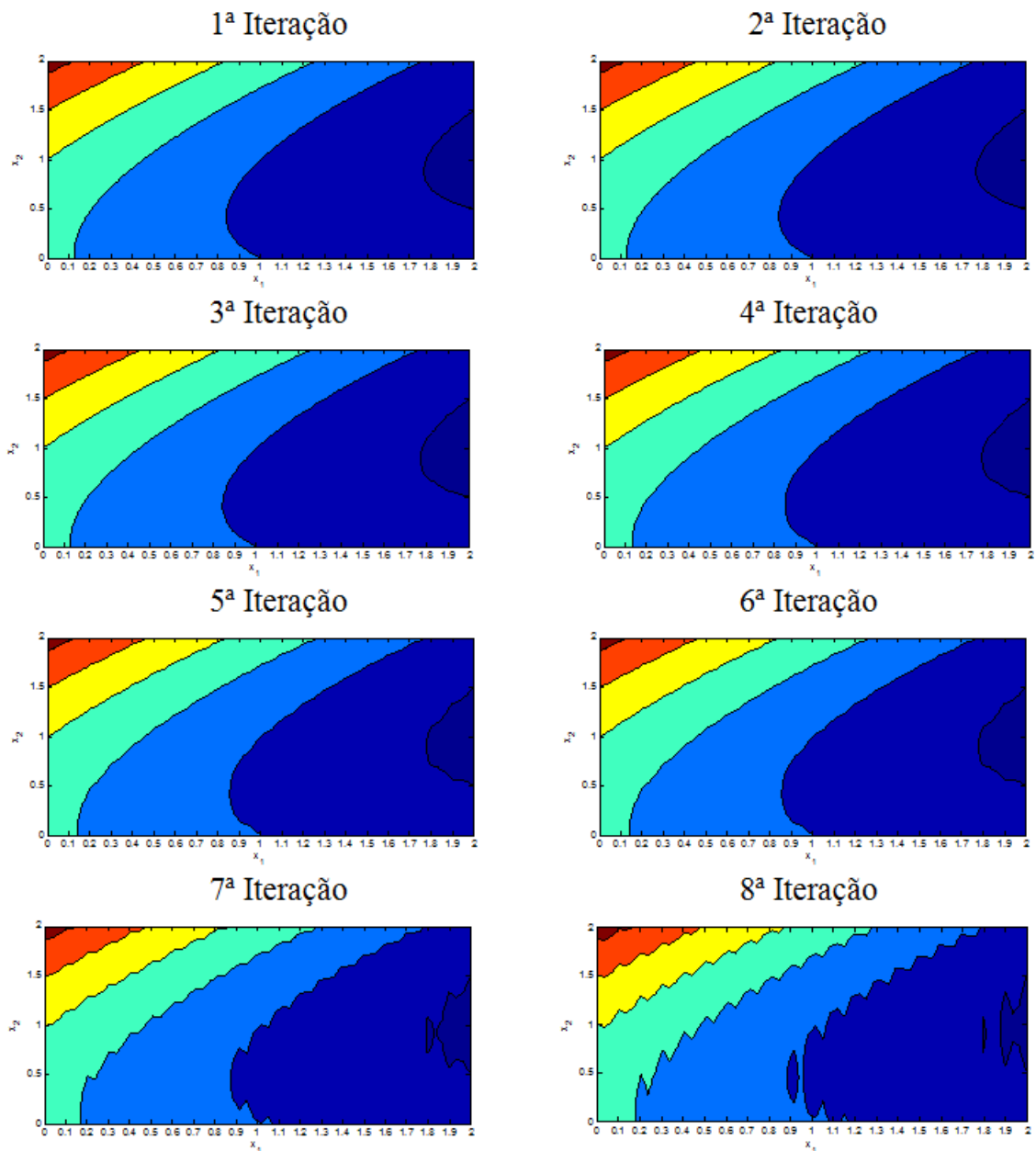


Figura 3.6: Curvas de nível da função objetivo aumentada de (3.22) - Exemplo Numérico.

Capítulo 4

Problema de Fluxo de Potência Ótimo

4.1 Formulação do Problema

O propósito de um problema de FPO é encontrar um ponto de operação para o sistema elétrico, que otimize um determinado critério e que satisfaça as suas restrições físicas e operacionais, ou seja, entre as inúmeras condições de operação possíveis para atender a demanda, o problema de FPO encontra o ponto de operação que otimiza um determinado critério da rede.

O problema de FPO é modelado matematicamente como um problema de programação não linear com variáveis contínuas e discretas. Na formulação adotada neste trabalho as variáveis de decisão do problema de FPO são: a magnitude de tensão das barras (V), o ângulo de tensão das barras (θ), o *tap* dos transformadores (t) e as susceptâncias *shunt* (b^{sh}), e o critério a ser otimizado é a minimização das perdas ativas nas linhas de transmissão. As restrições físicas e operacionais do sistema elétrico são representadas pelas restrições de igualdade e de desigualdade. As restrições de igualdade são as equações de fluxo de potência obtidas impondo-se as *Leis de Kirchhoff* à rede elétrica. As restrições de desigualdade representam restrições funcionais como a potência reativa nas barras de controle de reativos, potência ativa na barra *slack* e os fluxos ativos e reativos nas linhas de transmissão, entre outras.

O problema de FPO pode ser representado como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } f(t, V, \theta) \\
 & \text{s.a : } \begin{cases} \Delta P_i(t, V, \theta) = 0, & i = 1, 2, \dots, NBCCR \\ \Delta Q_j(t, V, \theta, b^{sh}) = 0, & j = 1, 2, \dots, NBC \\ \underline{Q}_k \leq Q_k(t, V, \theta, b^{sh}) \leq \overline{Q}_k, & k = 1, 2, \dots, NBCCR \\ \underline{V}_p \leq V_p \leq \overline{V}_p, & p = 1, 2, \dots, NB \\ t_l \in D_{t_l}, & l = 1, 2, \dots, NT \\ b_q^{sh} \in D_{b_q^{sh}}, & q \in \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_{NBSS}\} \end{cases} \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

em que:

NB é o número de barras do sistema elétrico;

NBC é o número de barras de carga;

$NBCCR$ é o número de barras de controle de reativo;

$NBCCR$ é o número de barras de carga e de controle de reativos;

NT é o número de transformadores com *tap* variável;

$NBSS$ é o número de barras conectadas com susceptância *shunt*;

$\{q_1, q_2, \dots, q_{NBSS}\}$ é o conjunto das barras conectadas com susceptância *shunt*;

\underline{Q}_k e \overline{Q}_k são os limites mínimos e máximos de geração de potência reativa, respectivamente;

\underline{V}_p e \overline{V}_p são os limites mínimos e máximos das magnitudes das tensões, respectivamente;

D_{t_l} é o conjunto de valores discretos que o *tap* do transformador l pode assumir;

$D_{b_q^{sh}}$ é o conjunto de valores discretos que a susceptância *shunt* q pode assumir;

Variáveis

$V = (V_1, V_2, \dots, V_{NB})$ é o vetor das magnitudes de tensão nas barras $1, 2, \dots, NB$;

$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{NB})$ é vetor dos ângulos de tensão nas barras $1, 2, \dots, NB$;

$t = (t_1, t_2, \dots, t_{NT})$ é o vetor dos *taps* dos transformadores $1, 2, \dots, NT$, respectivamente;

$b^{sh} = (b_{q_1}^{sh}, b_{q_2}^{sh}, \dots, b_{q_{NBSS}}^{sh})$ é o vetor das susceptâncias *shunt* $q_1, q_2, \dots, q_{NBSS}$, respectivamente;

As funções que aparecem no Problema (4.1) são descritas a seguir. Para isso considere:

Ω o conjunto de todas as linhas de transmissão;

Ω_k o conjunto de todas as barras vizinhas à barra k ;

g_{km} , b_{km} e b_{km}^{sh} a condutância e as susceptâncias da linha km ;

P_k^G e P_k^C as potências ativas geradas e consumidas, respectivamente;

Q_k^G e Q_k^C as potências reativas geradas e consumidas, respectivamente;

Com isso temos:

- $f(t, V, \theta)$ é uma função escalar que representa as perdas de potência ativa nas linhas

de transmissão e é dada por:

$$f(t, V, \theta) = \sum_{km \in \Omega} g_{km}(V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos \theta_{km}),$$

$$\theta_{km} = \theta_k - \theta_m.$$

- As equações de balanço do sistema elétrico são dadas por:

- Balanço de potência ativa para as barras de carga e de controle reativo:

$$\Delta P_i(t, V, \theta) = P_i^G - P_i^C - \sum_{m \in \Omega_i} P_{im}(t, V, \theta);$$

$$P_{im}(t, V, \theta) = (t_{im} V_i)^2 g_{im} - (t_{im} V_i) V_m (g_{im} \cos \theta_{im} + b_{im} \sin \theta_{im}).$$

- Balanço de potência reativa para as barras de carga:

$$\Delta Q_j(t, V, \theta, b^{sh}) = Q_j^G + b_j^{sh} V_j^2 - Q_j^C - \sum_{m \in \Omega_j} Q_{jm}(t, V, \theta);$$

$$Q_{jm} = -(t_{jm} V_j)^2 (b_{jm} + b_{jm}^{sh}) + (t_{jm} V_j) V_m (b_{jm} \cos \theta_{jm} - g_{jm} \sin \theta_{jm}).$$

- Geração de potência reativa injetada nas barras de controle de reativo:

$$Q_k(t, V, \theta, b^{sh}) = Q_k^C - b_k^{sh} V_k^2 + \sum_{m \in \Omega_k} -(t_{km} V_k)^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) + (t_{km} V_k) V_m (b_{km} \cos \theta_{km} - g_{km} \sin \theta_{km})$$

O modelo matemático do Problema de FPO, apresentado em (4.1), é de difícil resolução, pois é um problema de programação não linear, com funções não convexas, e com variáveis discretas e contínuas. A função objetivo em (4.1) representa as perdas ativas nas linhas de transmissão, essa função é não separável e não permite simplificações, segundo Monticelli & Liu (1992) este fato dificulta ainda mais a resolução do problema de FPO.

4.2 Histórico

Devido à dificuldade de solução imposta pelas variáveis discretas no problema de FPO, a maioria das abordagens de solução existentes na literatura ignoram a natureza discreta destas variáveis, tratando todas as variáveis do problema de FPO como contínuas. Nesta seção apresentamos essas abordagens de solução existentes na literatura.

Carpentier (1962) resolveu o problema de FPO utilizando as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Por meio da função Lagrangiana, o problema é transformado em um problema de programação não linear irrestrito. Ao aplicar as condições necessárias de

KKT para este problema irrestrito obtém-se um sistema não linear, que é resolvido pelo método de Gauss-Seidel. A solução deste sistema é a solução do problema.

O Método do Gradiente Reduzido para resolver o problema de FPO foi proposto por Dommel & Tinney (1968). Nesta técnica as variáveis do problema são divididas em variáveis de controle e variáveis dependentes. As restrições de desigualdade do problema de FPO são tratadas por parâmetros de penalidade. São atribuídos valores iniciais para as variáveis de controle. As variáveis dependentes são calculadas resolvendo as equações de fluxo de potência (restrições de igualdade do problema de FPO) pelo método de Newton. Calculado os valores das variáveis, calculam-se os multiplicadores de Lagrange associados ao problema resolvendo as equações obtidas ao derivar a função Lagrangiana em relação às variáveis dependentes. Se o valor do gradiente reduzido é maior do que a tolerância de convergência exigida, as variáveis de controle são atualizadas. O tamanho do passo para atualização das variáveis de controle é determinado por uma busca unidimensional. Utiliza-se a técnica do gradiente projetado para as variáveis de controle que atingem seus limites. Novamente as variáveis dependentes são calculadas resolvendo as equações de fluxo de potência pelo Método de Newton e o procedimento é repetido até que a tolerância de convergência exigida seja alcançada.

Sasson, Vitoria & Aboytes (1973) aplicaram o método da Função Penalidade ao problema de FPO. Funções que penalizam a função objetivo, se as restrições de igualdade ou de desigualdade do problema são violadas, são introduzidas na função objetivo, transformando o problema de FPO em um problema irrestrito. Em cada iteração do método o parâmetro de penalidade é aumentado e um problema irrestrito é resolvido. O processo é repetido até que todas as restrições sejam satisfeitas.

Na mesma linha dos autores anteriores, Sun *et al.* (1984) propuseram o Método de Newton com Penalidade. Esta abordagem para solução do problema de FPO tem como base a formulação de Newton e o desacoplamento do problema original em dois subproblemas (P- θ e Q-V) combinado com as condições necessárias de KKT. A cada iteração do método, a função Lagrangiana é aproximada por uma quadrática. As restrições de desigualdade são incorporadas à função Lagrangiana por meio dos multiplicadores de Lagrange e de termos de penalidade quadráticos. Essas restrições são divididas em dois conjuntos: conjunto das restrições penalizadas e o conjunto das restrições consideradas ativas na solução, sendo incorporadas as restrições ativas na função objetivo por meio de multiplicadores de Lagrange. O método do conjunto ativo foi utilizado para identificar as restrições ativas na solução. Uma solução para problema é obtida quando as condições necessárias de KKT são satisfeitas e as equações do fluxo de carga convencional estão dentro de uma determinada tolerância.

Granville (1994) propôs o Algoritmo Primal-Dual para o problema de Despacho Ótimo de Reativos, um caso particular do problema de FPO, em que os controles de ativos estão fixos. Neste método, ao incorporar variáveis de folga e excesso nas restrições de desigualdade estas são transformadas em restrições de igualdade. Uma Função Barreira Logarítmica é adicionada à função objetivo do problema garantindo assim a positividade das variáveis de folga e excesso, e associada a esta função tem-se um parâmetro de barreira. Com isso, obtém-se um problema com restrições de igualdade somente. São associados multiplicadores de Lagrange a cada uma das restrições de igualdade. Aplicando as Condições Necessárias de Primeira Ordem a este problema obtém-se um sistema de equações não lineares, o qual é resolvido pelo Método de Newton. Cada iteração do Método de Newton fornece direções de busca para atualização das variáveis primais e duais. O autor apresenta uma expressão para o cálculo do tamanho do passo para atualização destas variáveis. Este passo é calculado afim de manter as variáveis de folga e excesso estritamente positivas e satisfazer as Condições de KKT para os multiplicadores de Lagrange. O parâmetro de Barreira também é atualizado no decorrer das iterações e tende a zero. A maior dificuldade do método proposto está na escolha do valor inicial para o parâmetro de barreira, pois é um dado determinado empiricamente. O método foi aplicado a sistemas de 1832 e de 3467 barras e os resultados numéricos obtidos mostraram a eficiência do método.

O Método de Pontos Interiores usando coordenadas retangulares de tensão foi utilizado por Torres & Quintana (1998) para resolver o problema de FPO. Algumas variantes do FPO quando formuladas na forma retangular têm função objetivo quadrática e restrições quadráticas. Assim, as vantagens das funções quadráticas, como matriz Hessiana constante e expansão em série de Taylor até segunda ordem sem erro de truncamento, foram exploradas. Essas características quadráticas facilitam incorporar informações de alta ordem em um procedimento preditor-corretor que geralmente melhora o desempenho do Método de Pontos Interiores. Esse procedimento foi implementado no algoritmo. As versões do FPO retangular e polar convergem com o mesmo número de iterações e apresentaram um bom desempenho computacional.

Momoh, EL-Hawary & Adapa (1999a) e Momoh, EL-Hawary & Adapa (1999b) apresentaram uma revisão sobre as técnicas usadas para resolução do problema de FPO existentes na literatura até 1993. Segundo os autores, as técnicas usadas para resolução do problema de FPO podem ser classificadas em seis categorias: programação não-linear, programação quadrática, solução das condições de otimalidade baseadas em Newton, programação linear, versão híbrida de programação inteira e métodos de pontos interiores.

Costa (2002) propôs uma nova abordagem para o problema de Despacho Ótimo de Reativos (um caso particular do problema de FPO), baseado em uma Função Lagrangiana Aumentada. As condições necessárias de KKT são resolvidas pelo Método de Newton Modificado. A informação de segunda ordem do sistema original de equações é aproximada e a informação de primeira ordem é mantida intacta. Segundo o autor, o método proposto requer menos memória computacional que os demais algoritmos disponíveis. A eficiência da abordagem proposta foi verificada resolvendo os sistemas IEEE 30 barras e o brasileiro sul-sudeste.

Sousa *et al.* (2003) apresentaram uma nova abordagem para o problema de Despacho Ótimo de Reativos, que melhora o desempenho do Método de Newton. No método proposto, as restrições de desigualdade referentes aos limites para as magnitudes das tensões e para os *taps* dos transformadores são associadas à função objetivo por meio de uma Função Penalidade; as restrições de desigualdade referentes às injeções de potência reativa são tratadas pelo Método Primal-Dual Barreira Logarítmica. A Função Lagrangiana é construída e multiplicadores de Lagrange são associados as restrições de igualdade do problema. As Condições Necessárias de Primeira Ordem são aplicadas à Função Lagrangiana, gerando um sistema não linear, que é resolvido pelo Método de Newton e pela atualização dos termos de penalidade e de barreira. Testes computacionais com os sistemas CESP 53 barras e IEEE 118 barras comprovaram a eficiência do método proposto.

Uma abordagem para minimizar as perdas em sistemas elétricos de potência foi apresentada por Baptista *et al.* (2006). Neste método, as restrições de desigualdade referentes aos limites para as magnitudes das tensões e para os *taps* dos transformadores são tratadas pelo Método Primal-Dual Barreira Logarítmica, e as demais restrições de desigualdade são tratadas pelo método da Lagrangiana Aumentada. A função Lagrangiana agrega todas as restrições do problema. As Condições Necessárias de Primeira Ordem são aplicadas à Função Lagrangiana. O sistema não linear obtido é resolvido pelo Método de Newton. No decorrer das iterações do Método de Newton é feita a atualização das variáveis duais, do fator de penalidade e do parâmetro de barreira. Testes computacionais com os sistemas elétricos 162 barras e o brasileiro sul-sudeste mostram o bom desempenho do algoritmo.

O Método da Função Lagrangiana Barreira Modificada foi proposto por Sousa (2006) para resolução do problema de FPO reativo. Neste método, as restrições de desigualdade do problema são tratadas pela associação dos métodos de Barreira Modificada e Primal-Dual Barreira Logarítmica. As restrições de desigualdade são transformadas em igualdades introduzindo variáveis de folga positivas, e são relaxadas através do parâmetro

de barreira. Uma Função Lagrangiana é associada ao problema modificado. As Condições Necessárias de Primeira Ordem são aplicadas à Função Lagrangiana, gerando um sistema de equações não lineares, que é resolvido pelo Método de Newton. A relaxação das variáveis de folga resulta na expansão da região factível do problema original, permitindo que os limites das restrições de desigualdade sejam atingidos. O método foi aplicado aos sistemas CESP-440KV e brasileiro sul-sudeste, e os resultados obtidos comprovaram a eficiência do método.

4.3 Variáveis discretas no Problema

Alguns autores abordaram o problema de FPO considerando dois tipos de variáveis deste problema: discretas e contínuas.

Liu, Papalexopoulos & Tinney (1992) propuseram um algoritmo, que usa penalidade, para ajustar as variáveis discretas em um problema de FPO. O algoritmo proposto obriga os controles *shunt* associados com capacitores e reatores a assumirem valores discretos. O método consiste em tratar todas as variáveis do problema como contínuas e considerar apenas as restrições de igualdade do problema de FPO. São aplicadas as Condições Necessárias de Primeira Ordem para a Função Lagrangiana associada a este problema. O sistema resultante é resolvido pelo método de Newton. Em cada iteração do método de Newton um sistema linear é resolvido, e sua solução fornece passos para a atualização das variáveis. As iterações do método de Newton ocorrem comumente até que a penalidade seja introduzida na função objetivo.

A função penalidade usada consiste em uma aproximação linear da penalidade quadrática. Devido à natureza linear desta função penalidade, a matriz Hessiana, usada nas iterações do Método de Newton não é alterada. A função penalidade altera apenas o vetor gradiente usado nas iterações do Método de Newton. A penalidade, para cada variável discreta, é introduzida quando o passo obtido para a atualização dessa variável for suficientemente pequeno e as restrições de igualdade sejam satisfeitas (considerando uma tolerância).

As iterações do método de Newton prosseguem considerando as alterações que a função penalidade impõe ao sistema linear. No decorrer das iterações os fatores de penalidade, distintos para cada variável discreta, devem ser atualizados, no entanto, segundo os autores, se esta atualização ocorrer muito frequentemente o algoritmo pode não convergir. Assim, baseados em testes computacionais e nos conhecimentos dos autores, são definidas regras para a atualização do fator de penalidade. A medida que uma variável discreta assume um valor bem próximo de um valor discreto esta é fixada neste valor discreto. O algoritmo converge quando as restrições do problema de FPO estiverem satisfeitas e todas as variáveis discretas estiverem fixadas em valores discretos.

O método consiste basicamente de um arredondamento feito no decorrer das iterações do Método de Newton, pois a penalidade usada obriga as variáveis a se aproximarem de seus valores discretos mais próximos. O sucesso desse método depende de 'quando' e 'como' aplicar a penalidade apresentada no decorrer das iterações do método de Newton. Foram realizados testes computacionais em dois sistemas elétricos: 100 e 1700 barras.

Na linha das metaheurísticas, Bakirtzis *et al.* (2002) apresentaram um Algoritmo Genético "melhorado" para resolução do problema FPO com controles discretos. O algoritmo consiste em inicialmente gerar aleatoriamente um conjunto de soluções candidatas (população inicial), em que as variáveis de controle satisfazem seus limites mínimos e máximos e no caso de serem discretas, estas assumem valores discretos, porém estas soluções podem não satisfazer as demais restrições físicas e operacionais representadas no problema de FPO. Essas restrições são incluídas como penalidades na Função Aptidão, que mede o potencial de cada solução candidata. A Função Aptidão designa um valor para cada solução candidata. São realizadas as operações básicas de um algoritmo genético para as soluções candidatas: seleção, cruzamento e mutação, e em seguida operações avançadas e específicas para este problema.

O método foi testado para dois sistemas elétricos: IEEE 30 barras e IEEE RTS96, sistemas de pequeno e médio porte, respectivamente. Os resultados apresentados no trabalho são as melhores soluções obtidas para cada sistema elétrico após executar o algoritmo 20 vezes para cada caso. A desvantagem de um algoritmo genético é que não há garantias de que a solução obtida é uma solução ótima, e além disso, o tempo computacional requerido pelo algoritmo é muito alto o que inviabiliza a sua utilização para problemas de FPO de sistemas elétricos de grande porte. Segundo os autores, o tempo computacional requerido pelo método e a qualidade das soluções deterioram para problemas de FPO de grande porte.

Liu, Tso & Cheng (2002) apresentaram um algoritmo para resolver o problema de FPO reativo com variáveis discretas e contínuas, para sistemas elétricos de grande porte. O método proposto incorpora uma função penalidade em um algoritmo de pontos interiores primal-dual. A função penalidade apresentada neste trabalho é quadrática, e não é diferenciável nos pontos definidos como centros de vizinhança. O método proposto consiste em introduzir variáveis de folga e excesso nas restrições de desigualdade do problema, para transformar estas restrições em restrições de igualdade. A Função Lagrangiana associada ao problema modificado trata as restrições de não negatividade das variáveis de folga e excesso pela Função Barreira Logarítmica. A Função Lagrangiana Aumentada (FLA) é composta pela Função Lagrangiana acrescida da função penalidade. Ao aplicar as Condições Necessárias de Primeira Ordem obtém-se um sistema não linear. Aplicando o Método de Newton para este sistema obtém-se um sistema linear cuja solução são as

correções para as variáveis.

No método proposto, no decorrer das iterações, resolvem-se sucessivos sistemas lineares que fornecem as correções para atualização das variáveis. Inicialmente o sistema linear é resolvido assumindo que os parâmetros de penalidade são nulos para todas as variáveis, e estas são atualizadas. Após a convergência do algoritmo, as variáveis que não assumem valores discretos são penalizadas, isto é, a estas variáveis são associados parâmetros não nulos. Para as variáveis que assumem valores discretos o parâmetro de penalidade é nulo. O momento de introduzir a penalidade no decorrer das iterações afeta diretamente o bom desempenho do método. Se a penalidade é usada antecipadamente, a função objetivo é perturbada e assim obtém-se soluções não ótimas. Se a penalidade é introduzida quando o algoritmo já convergiu para a solução contínua, mais iterações do método serão necessárias para que se obtenha uma solução discreta.

Foram realizados testes computacionais com sistemas elétricos de 14, 30, 68, 118 e 538 barras. Os testes realizados mostram que o algoritmo encontra soluções discretas de boa qualidade em um tempo computacional aceitável.

Adibi *et al.* (2003) investigaram um método de solução para ajustar os *taps* dos transformadores, cujas posições devem assumir valores discretos. A princípio, a natureza discreta dos *taps* é ignorada e o problema de FPO com todas as variáveis contínuas é resolvido pelo Método da Função Lagrangiana Aumentada Barreira Modificada (FLABM). Este método consiste em associar ao problema de FPO a Função Lagrangiana Aumentada Barreira Modificada. As restrições de desigualdade do problema são incorporadas nesta função pela Função Barreira Modificada, e as restrições de igualdade são incorporadas na FLABM por uma função penalidade. São associados multiplicadores de Lagrange a todas as restrições. Com isso, um problema de otimização irrestrito, que consiste em minimizar a FLABM, é obtido. Partindo-se de um ponto inicial para as variáveis do problema de FPO, e de valores iniciais para os Multiplicadores de Lagrange, resolve-se o problema irrestrito associado aos multiplicadores de Lagrange. O problema irrestrito é resolvido aplicando-se as condições necessárias de primeira ordem, e o sistema resultante é resolvido pelo Método de Newton. Após a convergência do Método de Newton, um novo ponto é obtido. Os multiplicadores de Lagrange são atualizados e com isso tem-se um novo problema de otimização irrestrita. Assim, sucessivos problemas de otimização irrestrita são resolvidos.

As iterações do método prosseguem até que se obtenha um ponto em que as condições de segunda ordem sejam válidas. Com esse processo encontra-se uma solução para o problema de FPO com todas as variáveis contínuas. Os valores dos *taps* são arredondados para seus valores discretos mais próximos e um problema de FPO com valores fixos para os *taps* é resolvido pelo método da FLABM. Com isso, obtém-se uma solução com valores discretos para os *taps*. Foram realizados testes computacionais com o método proposto

para um sistema elétrico com 160 barras.

Em geral, arredondamento para os passos discretos mais próximos não minimiza a função objetivo em um problema de programação não linear, e pode ser impossível obter um ponto factível, pois, o arredondamento de variáveis discretas após a solução do FPO pode causar violação das restrições do problema que não podem ser completamente corrigidas pelas variáveis de controle contínuas.

Foi proposto por Ding & Wang (2004) um Método de Planos de Corte com Pontos Interiores para resolver o problema de FPO com controles discretos (PPNLDC). As variáveis discretas da formulação adotada para o FPO são as posições dos *taps* dos transformadores. O método resolve sucessivas linearizações do problema de FPO. Nos métodos de Planos de Cortes tradicionais os problemas lineares são resolvidos usando o método simplex, porém no algoritmo proposto é resolvido por um Método de Pontos Interiores.

O método basicamente consiste em resolver por um Método de Pontos Interiores o problema de FPO com as variáveis discretas fixas (PPNL), assim, obtém-se uma solução factível para o PPNLDC. O problema de FPO é então linearizado nesta solução factível, obtendo assim um Problema Linear (PL). Se este PL é infactível então o processo é finalizado pois o problema de FPO (PPNLDC) é infactível, caso contrário o PL é resolvido por um Método de Pontos Interiores. Se na solução obtida para o PL os *taps* assumem valores discretos, o problema de FPO, com estes valores fixos para os *taps*, é resolvido por um Método de Pontos Interiores, e as demais etapas do processo são repetidas. Se na solução obtida para o PL os *taps* não assumem valores discretos, um plano de corte é gerado para o PL, obtendo-se assim um novo PL que é novamente resolvido. Planos de cortes são gerados e adicionados nas restrições do PL até que uma solução com valores discretos para os *taps* seja obtida. Ao obter uma solução com valores discretos para os *taps*, o problema de FPO é resolvido com estas variáveis fixas por um método de pontos interiores, e as demais etapas do processo são repetidas. O algoritmo converge quando as soluções obtidas para o PPNLDC causam pequenas variações na função objetivo deste problema. Neste trabalho são detalhados os procedimentos adotados para gerar os planos de cortes, e identificar as variáveis básicas para o problema de FPO.

Os autores realizaram testes numéricos utilizando a abordagem proposta neste trabalho na resolução do problema de FPO com os sistemas IEEE 14, 57, 118 e 300 Barras. Os testes numéricos realizados constataram que o algoritmo proposto neste trabalho é mais rápido que os Métodos de Planos de Corte que fazem uso do simplex na resolução do PL quando aplicados ao problema de FPO. Para os sistemas IEEE 14, 57 e 118 o problema foi resolvido em baixo tempo computacional. Para o sistema IEEE 300 o tempo de processamento do algoritmo foi alto. Acredita-se que isso ocorreu, pois este sistema, diferentemente dos demais sistemas testados, possui uma grande quantidade de

transformadores com *tap* variável (variáveis discretas).

Lin *et al.* (2004) propõem um algoritmo que fornece uma solução suficientemente boa para o problema de FPO com controles discretos e contínuos. O objetivo do método é fornecer uma solução discreta satisfatória em baixo tempo computacional e não necessariamente uma solução ótima, superando as metodologias metaheurísticas em tempo de processamento. O algoritmo é baseado em um procedimento de busca. Primeiramente seleciona-se um grande conjunto de soluções candidatas. Para isso a relaxação contínua do FPO é resolvida. O conjunto de soluções candidatas é constituído de todas as possíveis combinações de arredondamento de cada variável na solução obtida, arredondamento para o valor discreto inferior mais próximo e arredondamento para o valor superior discreto mais próximo. Utilizando uma heurística baseada no Teorema de Sensibilidade são selecionadas as potenciais soluções, com isso reduz-se ainda mais o conjunto de soluções candidatas. Em seguida, é utilizado um modelo simplificado do FPO para selecionar um subconjunto dessas soluções candidatas, sendo que são selecionadas as soluções candidatas mais promissoras. Finalmente, as soluções mais promissoras são avaliadas utilizando o modelo exato do problema de FPO e assim, segundo os autores, obtém-se uma solução suficientemente boa para o problema de FPO com controles discretos e contínuos. O método foi testado com o problema de FPO para os sistemas IEEE 118 Barras e IEEE 244 Barras. A desvantagem da abordagem proposta é que a solução obtida não é uma solução ótima, é apenas a melhor solução entre as soluções obtidas por arredondamento das variáveis na solução do problema contínuo.

Na linha das metaheurísticas, AlRashidi & El-Hawary (2007) propuseram um Algoritmo de Otimização por Enxame de Partículas Híbrido na resolução do problema de FPO com variáveis de controle discretas e contínuas. O algoritmo híbrido combina Otimização por Enxame de Partículas com o algoritmo de Newton-Raphson para minimizar o erro nas equações de fluxo de potência (equações do modelo). As restrições de desigualdade são tratadas por um mecanismo que preserva a factibilidade. Para verificar a robustez do método este foi testado somente para o sistema elétrico IEEE 30 barras, para diferentes formulações do problema de FPO. Além disso, um estudo sobre os parâmetros utilizados no algoritmo é apresentado. Segundo os autores, o desempenho deste algoritmo na resolução do FPO depende do ajuste dos parâmetros utilizados e do critério a ser otimizado.

Liu *et al.* (2009) resolveram o problema de FPO com variáveis discretas pelo método Planos de Cortes Ponto Interior "melhorado". O método consiste em inicialmente resolver o problema de FPO considerando todas as variáveis contínuas. O problema de FPO é linearizado na solução obtida, obtém-se assim um Problema Linear (PL), a região factível

deste PL é uma relaxação do problema de FPO original. O PL é resolvido por um Método de Pontos Interiores. Se na solução obtida as variáveis originalmente discretas assumem valores discretos, temos uma solução ótima. Caso contrário, a base ótima é usada para gerar planos de corte que são adicionados ao PL, e novamente o PL é resolvido. Dessa maneira, planos de corte são adicionadas ao PL até que uma solução discreta seja obtida. Se a solução ótima do PL, resolvido por um Método de Pontos Interiores, é uma solução degenerada ou uma combinação convexa de soluções, ocorrerão falhas no momento de gerar os Planos de Corte, por isso os autores propõem um método para resolver este caso. São apresentados testes computacionais com os sistemas elétricos IEEE 5, 14, 24, 30, 57, 118 e 300 barras. O tempo de processamento do algoritmo foi muito alto na resolução do FPO para os sistemas IEEE 118 e 300 barras.

Capitanescu & Wehenkel (2010) apresentaram três abordagens de resolução para problema de FPO com variáveis de controle discretas. A primeira abordagem consiste em resolver a relaxação contínua do problema de FPO, e então no ponto obtido calcular a sensibilidade da função objetivo e das restrições do problema com relação às variáveis discretas. Essas informações são incorporadas em um PLIM cuja solução fornece valores para as variáveis discretas do problema de FPO. O problema de FPO com valores fixos para as variáveis discretas é resolvido, com isso obtém-se valores para as variáveis contínuas. Nesta solução é calculada a sensibilidade da função objetivo e das restrições do problema de FPO com relação às variáveis discretas e o procedimento é repetido até que o valor da função objetivo na solução o problema de FPO, com controles discretos, esteja suficientemente próximo do valor da função objetivo da relaxação contínua do problema de FPO. Para a resolução da relaxação contínua do problema de FPO utiliza-se um método de pontos interiores e para a resolução do PLIM utiliza-se um algoritmo *branch-and-cut*.

A segunda abordagem é análoga à primeira abordagem de resolução, enquanto na primeira é resolvido um PLIM para obtenção de valores para as variáveis discretas, nesta abordagem é utilizado um procedimento baseado em Função de Mérito.

A terceira abordagem explora os multiplicadores de Lagrange associados às restrições limitantes para as variáveis discretas. Os multiplicadores de Lagrange indicam a sensibilidade da função objetivo em relação às pequenas variações nas variáveis discretas nas possíveis direções, com isso são determinados valores para as variáveis discretas, estes valores são fixados e um PPNL é resolvido para obtenção de valores para as variáveis contínuas.

Foram realizados testes numéricos com o sistema IEEE 300 Barras e com sistemas de 60, 618 e 1203 barras. Os testes realizados com as abordagens de resolução propostas foram comparados com métodos de arredondamento. Pelos resultados obtidos os autores constataram que a segunda abordagem de resolução é superior às demais abordagens. Os três procedimentos consistem de métodos iterativos que fixam valores para as variáveis

discretas, valores estes determinados por métodos heurísticos, e então se resolve o problema de FPO otimizando as variáveis contínuas. As heurísticas apresentadas para determinar os valores das variáveis discretas exploram apenas a vizinhança dos valores discretos da solução atual obtida pelo algoritmo, assim dificilmente o ótimo global será encontrado.

No próximo capítulo são apresentados os testes numéricos realizados com o Algoritmo de Pontos Interiores Modificado-Discreto, proposto neste trabalho, aplicado na resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo.

Capítulo 5

Resultados Numéricos

5.1 Testes Numéricos

Para avaliar a eficiência do método de solução proposto foram realizados testes numéricos com o Algoritmo de Pontos Interiores Modificado-Discreto (Algoritmo 3.4), apresentado na Seção 3.4, aplicado ao problema de FPO. Os sistemas elétricos de potência usados para verificar a eficiência da abordagem proposta foram IEEE 14, 30, 118 e 300 barras. Os dados destes sistemas foram obtidos na página www.ee.washington.edu/research/pstca (acessado em outubro de 2009), e são listados no Apêndice B. O pacote IPOPT foi utilizado com a interface do GAMS - *General Algebraic Modeling System* (www.gams.com) para resolver o Problema Modificado do Algoritmo 3.4.

Todos os testes foram realizados em um microcomputador Pentium (R) - 3.20 GHz, com 2,00 GB de memória RAM, do Laboratório de Análise de Sistemas de Energia Elétrica (LASEE) - Departamento de Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC - USP),

Nos testes realizados com os Sistemas Elétricos IEEE 14 e 30 barras, os limites mínimos e máximos das magnitudes de tensão das barras do sistema foram $\underline{V}_p = 0,95p.u.$ e $\overline{V}_p = 1,1p.u.$, respectivamente. Para os Sistemas Elétricos IEEE 118 e 300 barras os limites mínimos e máximos das magnitudes de tensão das barras do sistema elétrico foram $\underline{V}_p = 0,9p.u$ e $\overline{V}_p = 1,1p.u.$, respectivamente. Nos testes realizados com os Sistemas IEEE 14, 30 e 118 barras foi definido que os *taps*, variáveis de natureza discreta, devem pertencer ao conjunto $\{0,96; 0,98; 1; 1,02; 1,04\}$. Nos testes com os Sistemas IEEE 300 Barras foi definido que os *taps* devem pertencer ao conjunto $\{0,9; 0,92; 0,94; 0,96; 0,98; 1; 1,02; 1,04; 1,06; 1,08; 1,1\}$. Os parâmetros que aparecem no Algoritmo 3.4 foram tomados como $c = 1,3$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ e $\epsilon = 0,0005$ em todos os testes, e foi tomado $\gamma^{(1)} = 10^{-5}$ para os testes com os sistemas elétricos IEEE 14 e 30 Barras, e $\gamma^{(1)} = 10^{-3}$ para os testes com os sistemas elétricos IEEE 118 e 300 Barras.

5.1.1 Sistema elétrico IEEE 14 Barras

O sistema elétrico IEEE 14 Barras tem as seguintes características:

- 1 barra de geração (*slack*);
- 4 barras de controle de reativo;
- 9 barras de carga;
- 20 linhas de transmissão;
- 3 transformadores com *tap* variável;
- 1 susceptância *shunt* variável.

O diagrama unifilar do sistema elétrico IEEE 14 Barras é apresentado na Figura 5.1.

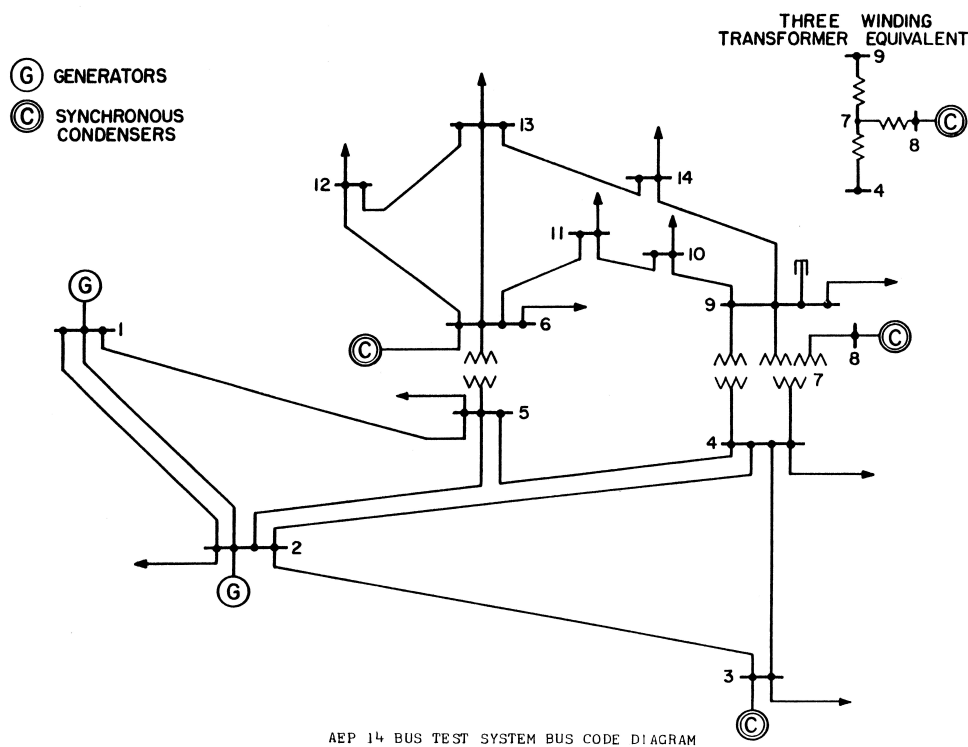


Figura 5.1: Sistema elétrico IEEE 14 Barras.

O modelo matemático do problema de FPO para o sistema elétrico IEEE 14 Barras possui:

- 22 restrições de igualdade;
- 42 restrições de desigualdade;
- 27 variáveis contínuas;

- 4 variáveis discretas.

Neste teste foi considerado que a susceptância *shunt* variável (b_9^{sh}) deve pertencer ao conjunto discreto $D_{b_9^{sh}} = \{0; 0, 15; 0, 3; 0, 45\}p.u.$. A Tabela 5.1 apresenta os valores dos *taps* e dos controles *shunt* (variáveis discretas do problema de FPO) obtidos em cada iteração. Como pode ser observado nesta tabela o Algoritmo PIMD forneceu uma solução discreta na 9ª iteração; isto é, o Problema Modificado (3.2) para o problema de FPO com $\gamma = \gamma^{(9)}$ fornece uma solução cujos *taps* e a susceptância *shunt* assumem valores discretos.

Tabela 5.1: Processo de convergência - Valores para as variáveis discretas - IEEE 14 Barras.

Iteração	γ	t_{47}	t_{49}	t_{56}	b_9^{sh}
1	1×10^{-5}	1,044	0,978	1,004	0,204
2	$1,3 \times 10^{-5}$	1,043	0,979	1,003	0,203
3	$1,69 \times 10^{-5}$	1,042	0,979	1,002	0,202
4	$2,197 \times 10^{-5}$	1,042	0,979	1,002	0,201
5	$2,856 \times 10^{-5}$	1,041	0,980	1,001	0,201
6	$3,713 \times 10^{-5}$	1,041	0,980	1,001	0,201
7	$4,827 \times 10^{-5}$	1,041	0,980	1,001	0,201
8	$6,275 \times 10^{-5}$	1,041	0,980	1,001	0,200
9	$8,157 \times 10^{-5}$	1,040	0,980	1,000	0,200

Os valores para as Magnitudes de Tensão e os Ângulos de Tensão na solução discreta obtida são apresentados nas Figuras 5.2 e 5.3. Nesta solução as perdas de potência ativa do sistema são 12,27MW. O tempo total de processamento do algoritmo foi 3,811 segundos.

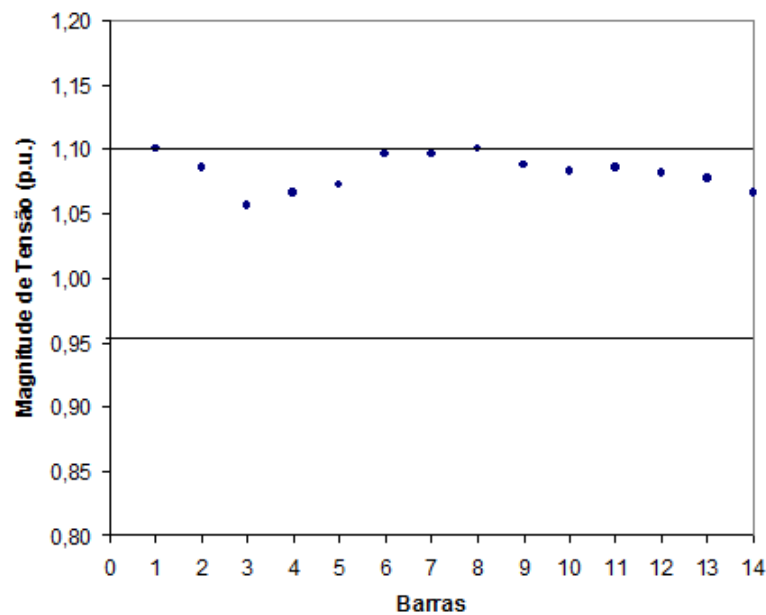


Figura 5.2: Magnitude de Tensão nas barras - IEEE 14 Barras.

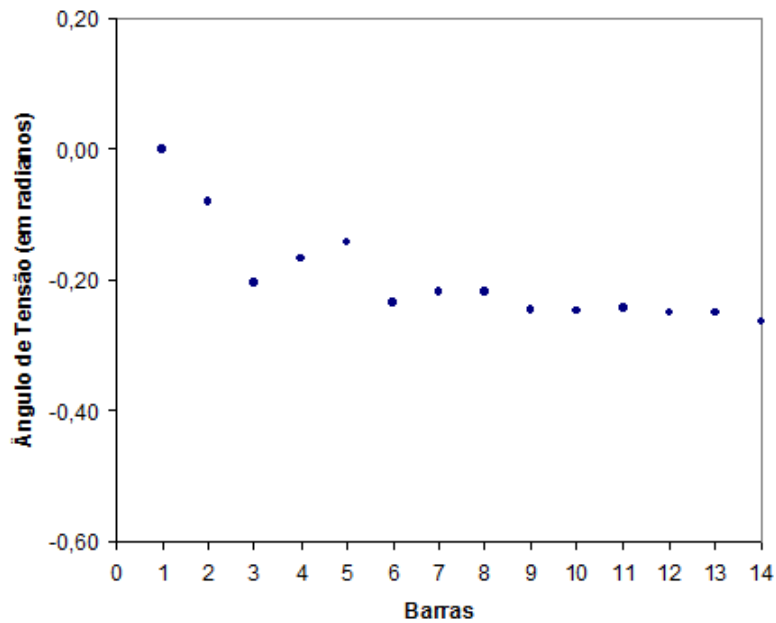


Figura 5.3: Ângulo de Tensão nas barras - IEEE 14 Barras.

5.1.2 Sistema elétrico IEEE 30 Barras

O sistema elétrico IEEE 30 Barras tem as seguintes características:

- 1 barra de geração (*slack*);
- 5 barras de controle de reativo;
- 24 barras de carga;
- 41 linhas de transmissão;
- 4 transformadores com *tap* variável;
- 2 susceptâncias *shunt* variáveis.

O diagrama unifilar do sistema elétrico IEEE 30 Barras é apresentado na Figura 5.4.

O modelo do problema de FPO para o sistema elétrico IEEE 30 Barras possui:

- 53 restrições de igualdade;
- 78 restrições de desigualdade;
- 59 variáveis contínuas;
- 6 variáveis discretas.

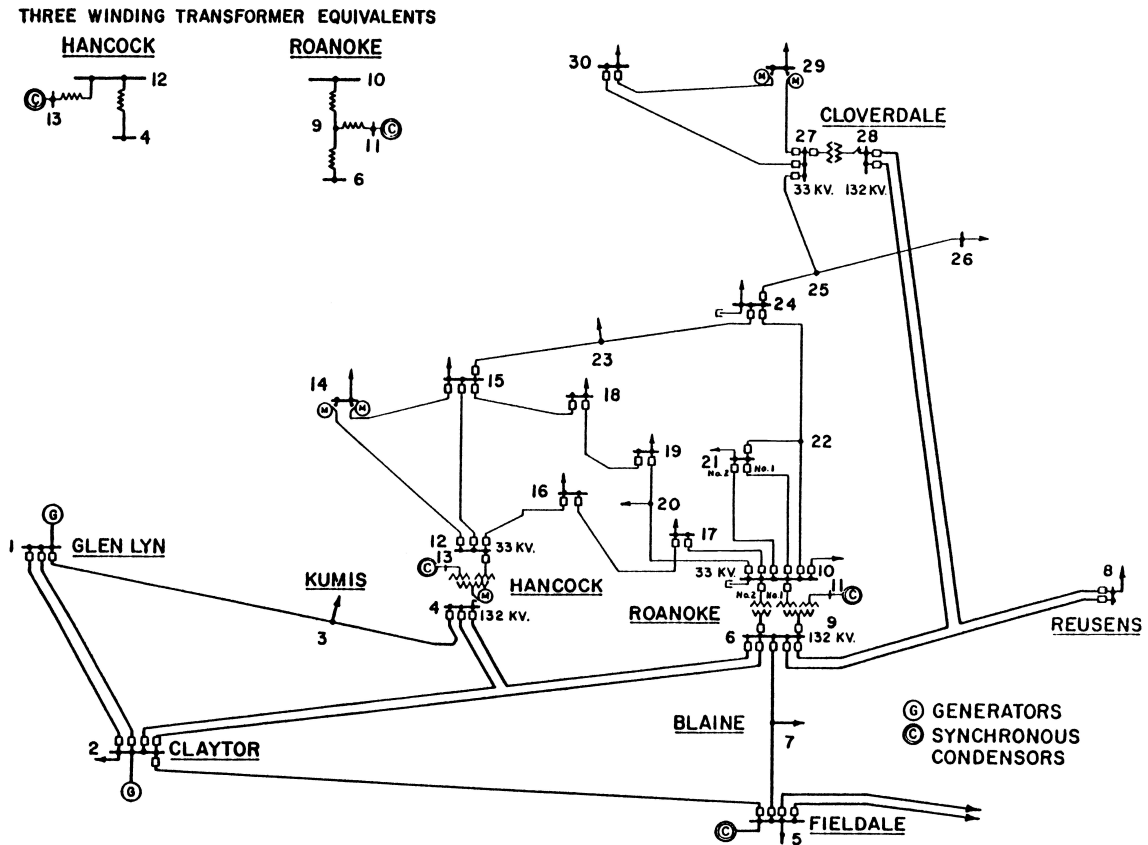


Figura 5.4: Sistema elétrico IEEE 30 Barras.

Neste teste foi considerado que as susceptâncias *shunt* devem pertencer aos conjuntos discretos $b_{10}^{sh} \in D_{b_{10}^{sh}} = \{0, 14; 0, 16; 0, 18; 0, 2; 0, 22\}p.u.$ e $b_{24}^{sh} \in D_{b_{24}^{sh}} = \{0; 0, 05; 0, 1; 0, 15\}p.u.$. A Tabela 5.2 apresenta os valores dos *taps* e das susceptâncias *shunt* (variáveis discretas do problema de FPO) obtidos em cada iteração. Como pode ser observado nesta tabela o Algoritmo PIMD forneceu uma solução discreta na 15^a iteração, para $\gamma = 3,937 \times 10^{-4}$.

Os valores para as Magnitudes de Tensão e os Ângulos de Tensão na solução discreta obtida são apresentados nas Figuras 5.2 e 5.3. Nesta solução as perdas de potência ativa do sistema são 16,07MW. O tempo total de processamento do algoritmo foi 3,342 segundos.

Tabela 5.2: Processo de convergência - Valores para as variáveis discretas - IEEE 30 Barras.

Iteração	γ	$t_{6,9}$	$t_{6,10}$	$t_{4,12}$	$t_{28,27}$	b_{10}^{sh}	b_{24}^{sh}
1	10^{-5}	0,981	0,960	0,988	1,025	0,184	0,111
2	$1,3 \times 10^{-5}$	0,979	0,960	0,985	1,026	0,220	0,106
3	$1,69 \times 10^{-5}$	0,981	0,960	0,999	1,037	0,220	0,105
4	$2,197 \times 10^{-5}$	0,981	0,960	0,999	1,038	0,220	0,105
5	$2,856 \times 10^{-5}$	0,981	0,960	0,999	1,038	0,220	0,104
6	$3,713 \times 10^{-5}$	0,980	0,960	0,999	1,038	0,220	0,103
7	$4,827 \times 10^{-5}$	0,980	0,960	1,000	1,039	0,220	0,103
8	$6,275 \times 10^{-5}$	0,980	0,960	1,000	1,039	0,220	0,102
9	$8,157 \times 10^{-5}$	0,980	0,960	1,000	1,039	0,220	0,102
10	$1,060 \times 10^{-4}$	0,980	0,960	1,000	1,039	0,220	0,102
11	$1,378 \times 10^{-4}$	0,980	0,960	1,000	1,040	0,220	0,101
12	$1,792 \times 10^{-4}$	0,980	0,960	1,000	1,040	0,220	0,101
13	$2,329 \times 10^{-4}$	0,980	0,960	1,000	1,040	0,220	0,101
14	$3,029 \times 10^{-4}$	0,980	0,960	1,000	1,040	0,220	0,101
15	$3,937 \times 10^{-4}$	0,980	0,960	1,000	1,040	0,220	0,100

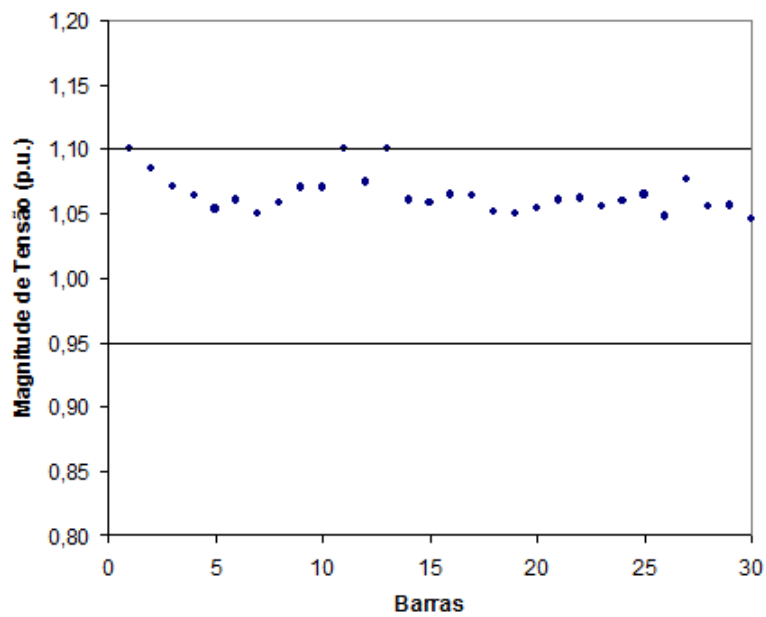


Figura 5.5: Magnitude de Tensão nas barras - IEEE 30 Barras.

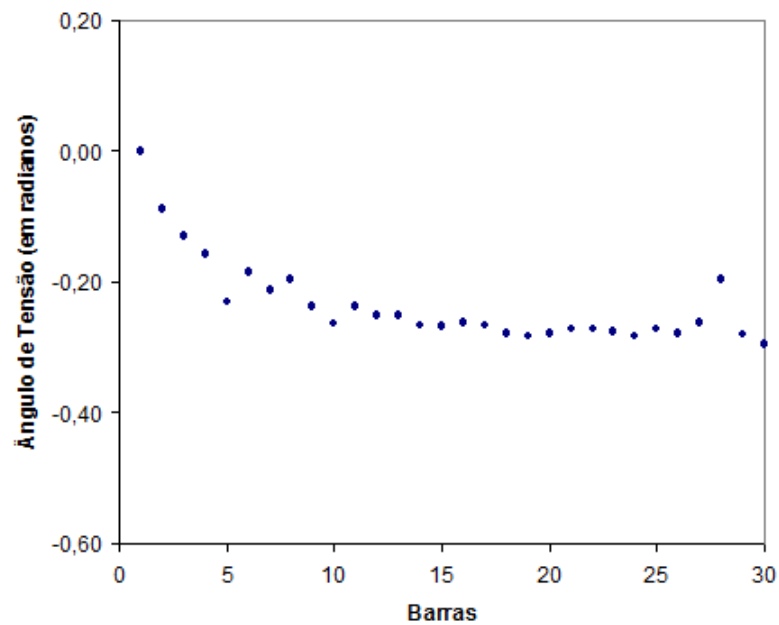


Figura 5.6: Ângulo de Tensão nas barras - IEEE 30 Barras.

5.1.3 Sistema elétrico IEEE 118 Barras

O sistema elétrico IEEE 118 Barras tem as seguintes características:

- 1 barra de geração (*slack*);
- 53 barras de controle de reativo;
- 64 barras de carga;
- 186 linhas de transmissão;
- 9 transformadores com *tap* variável;
- 14 susceptâncias *shunt* variáveis.

O diagrama unifilar do sistema elétrico IEEE 118 Barras é apresentado na Figura 5.7.

O modelo do problema de FPO para o sistema elétrico IEEE 118 Barras possui:

- 181 restrições de igualdade;
- 360 restrições de desigualdade;
- 235 variáveis contínuas;
- 23 variáveis discretas.

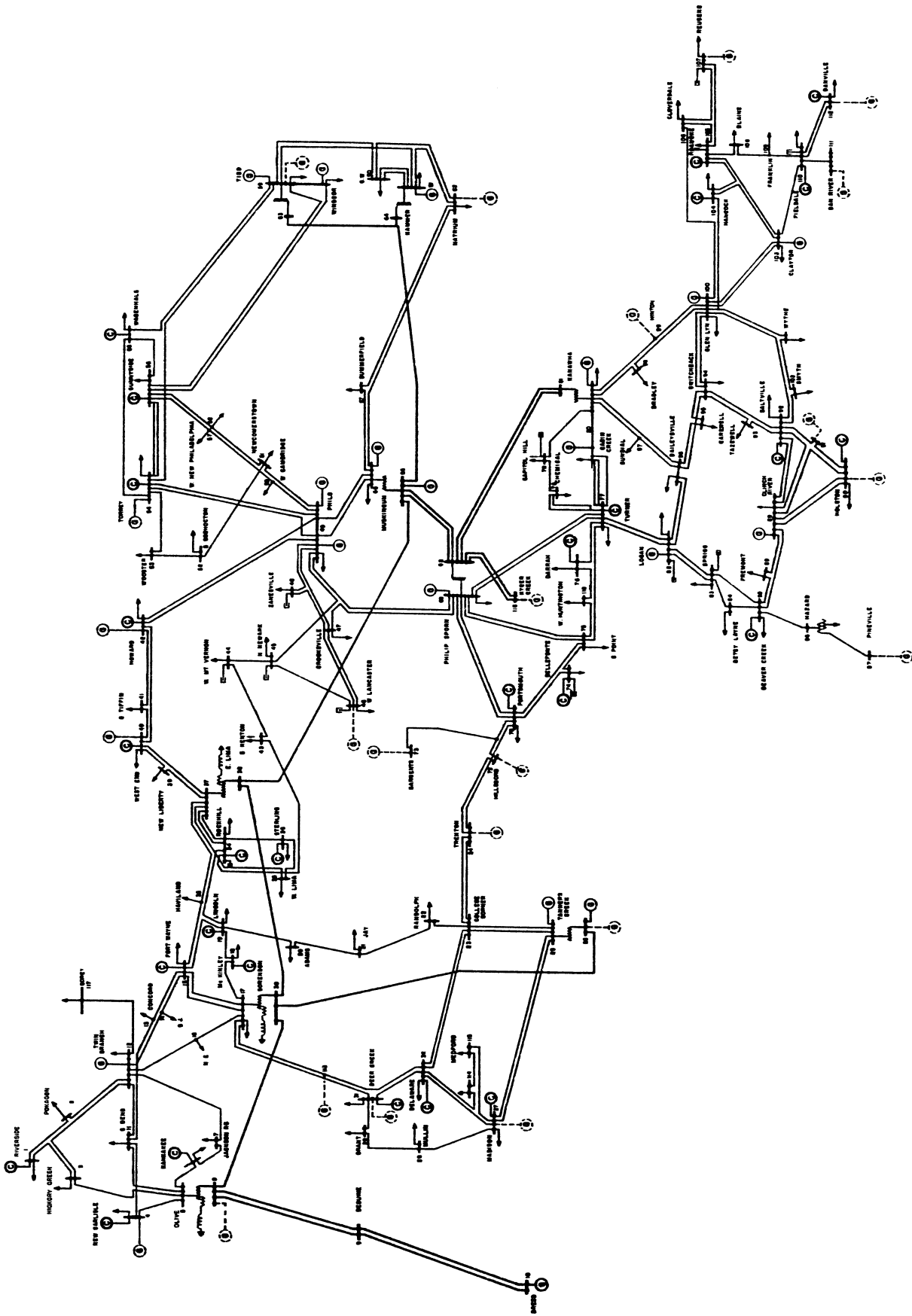


Figura 5.7: Sistema eléctrico IEEE 118 Barras.

Neste experimento, foi considerado que as susceptâncias *shunt* devem pertencer aos conjuntos discretos apresentados na Tabela 5.3.

Tabela 5.3: Conjunto dos valores discretos para as susceptâncias *shunt* - IEEE 118 Barras.

Variável	Conjunto Discreto (em p.u.)
b_5^{sh}	$D_{b_5^{sh}} = \{-0, 45; -0, 30; -0, 15; 0\}$
b_{34}^{sh}	$D_{b_{34}^{sh}} = \{0; 0, 15; 0, 3; 0, 45\}$
b_{37}^{sh}	$D_{b_{37}^{sh}} = \{-0, 45; -0, 30; -0, 15; 0\}$
b_{44}^{sh}	$D_{b_{44}^{sh}} = \{0; 0, 15; 0, 3; 0, 45\}$
b_{45}^{sh}	$D_{b_{45}^{sh}} = \{0; 0, 15; 0, 3; 0, 45\}$
b_{46}^{sh}	$D_{b_{46}^{sh}} = \{0; 0, 15; 0, 3; 0, 45\}$
b_{48}^{sh}	$D_{b_{48}^{sh}} = \{0; 0, 15; 0, 3; 0, 45\}$
b_{74}^{sh}	$D_{b_{74}^{sh}} = \{0; 0, 15; 0, 3; 0, 45\}$
b_{79}^{sh}	$D_{b_{79}^{sh}} = \{0; 0, 15; 0, 3; 0, 45\}$
b_{82}^{sh}	$D_{b_{82}^{sh}} = \{0; 0, 15; 0, 3; 0, 45\}$
b_{83}^{sh}	$D_{b_{83}^{sh}} = \{0; 0, 15; 0, 3; 0, 45\}$
b_{105}^{sh}	$D_{b_{105}^{sh}} = \{0; 0, 15; 0, 3; 0, 45\}$
b_{107}^{sh}	$D_{b_{107}^{sh}} = \{0; 0, 05; 0, 1; 0, 15\}$
b_{110}^{sh}	$D_{b_{110}^{sh}} = \{0; 0, 05; 0, 1; 0, 15\}$

O Algoritmo PIMD forneceu uma solução discreta na 12^a iteração. A tabela com os valores das variáveis discretas em cada iteração durante o processo de convergência é apresentada no Apêndice A. A solução obtida é apresentada nas Figuras 5.8, 5.9, 5.10 e na Tabela 5.4. Nesta solução as perdas de potência ativa do sistema são 110,90MW. O tempo total de processamento foi 13,766 segundos.

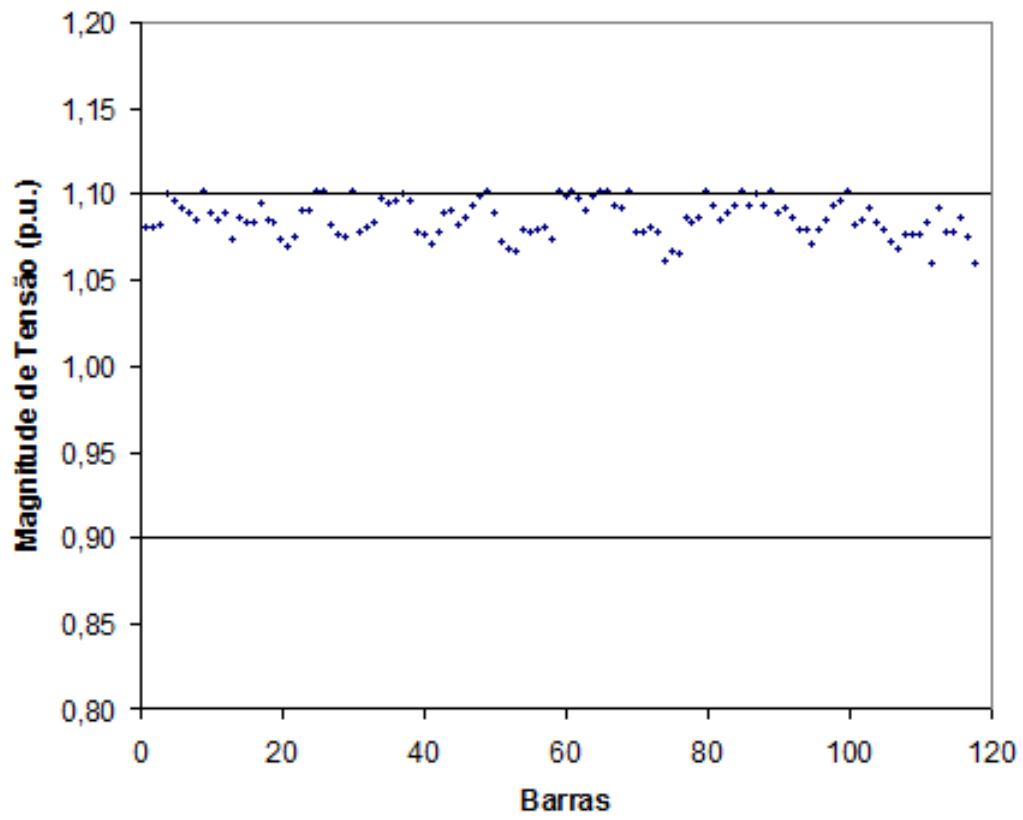


Figura 5.8: Magnitude de Tensão nas barras - IEEE 118 Barras.

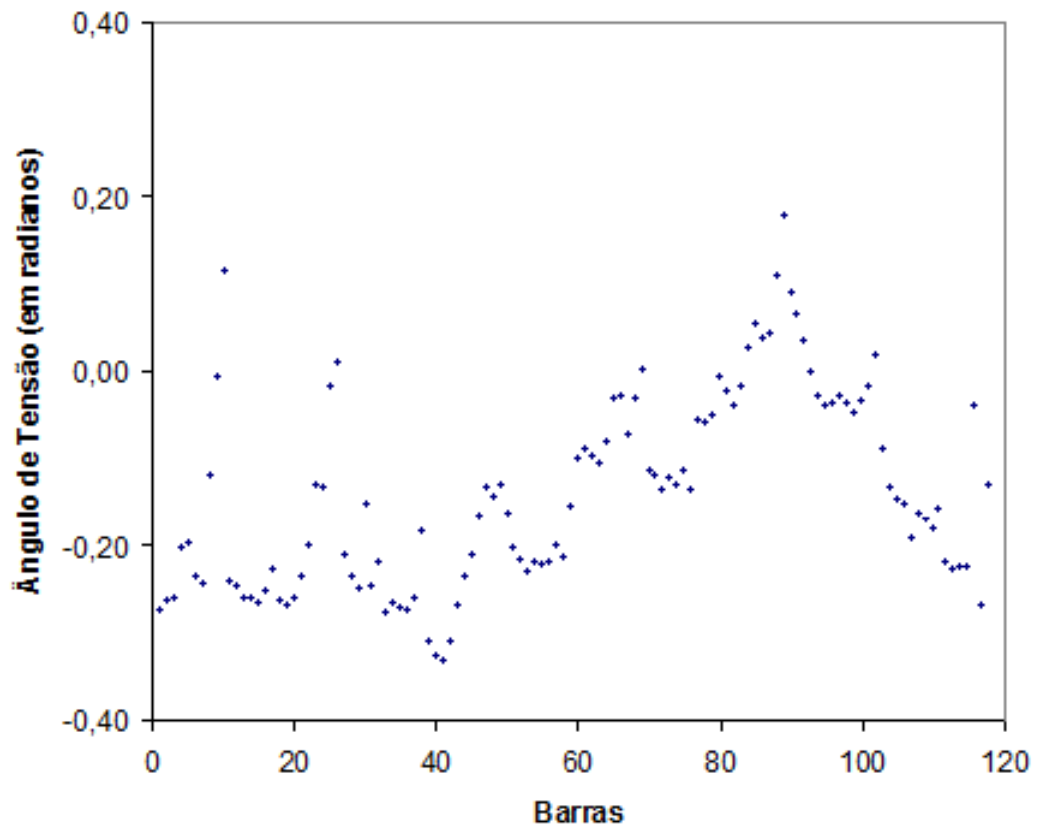


Figura 5.9: Ângulo de Tensão nas barras - IEEE 118 Barras.

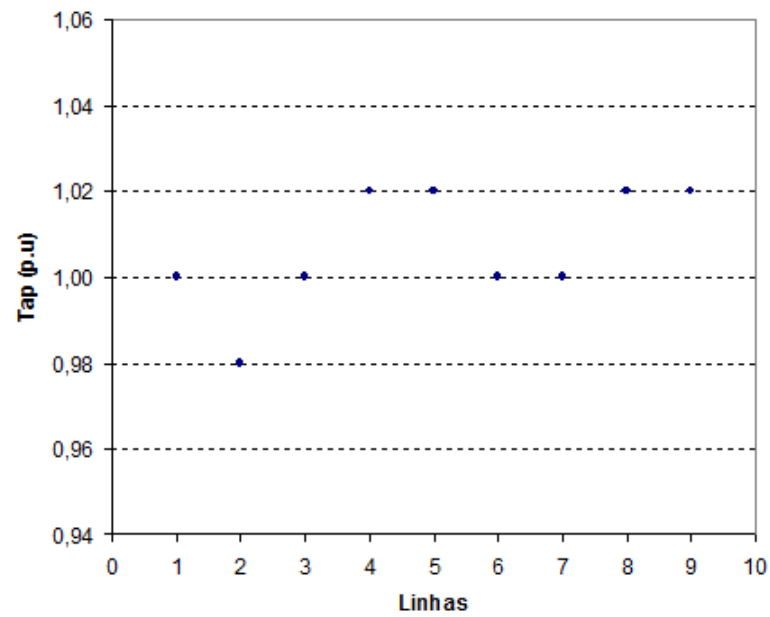


Figura 5.10: Taps - IEEE 118 Barras.

Tabela 5.4: Valores das susceptâncias *shunt* na solução obtida - IEEE 118 Barras.

b_5^{sh}	-0,300
b_{34}^{sh}	0,150
b_{37}^{sh}	-0,300
b_{44}^{sh}	0,150
b_{45}^{sh}	0,150
b_{46}^{sh}	0,150
b_{48}^{sh}	0,150
b_{74}^{sh}	0,150
b_{79}^{sh}	0,300
b_{82}^{sh}	0,300
b_{83}^{sh}	0,150
b_{105}^{sh}	0,150
b_{107}^{sh}	0,050
b_{110}^{sh}	0,100

5.1.4 Sistema elétrico IEEE 300 Barras

O sistema elétrico IEEE 300 Barras tem as seguintes características:

- 1 barra de geração (*slack*);
- 68 barras de controle de reativo;
- 231 barras de carga;
- 409 linhas de transmissão;
- 50 transformadores com *tap* variável;
- 14 susceptâncias *shunt* variáveis.

O diagrama unifilar do sistema elétrico IEEE 300 Barras é apresentado na Figura 5.11.

O modelo do problema de FPO para o sistema elétrico IEEE 300 Barras possui:

- 530 restrições de igualdade;
- 836 restrições de desigualdade;
- 599 variáveis contínuas;
- 64 variáveis discretas.

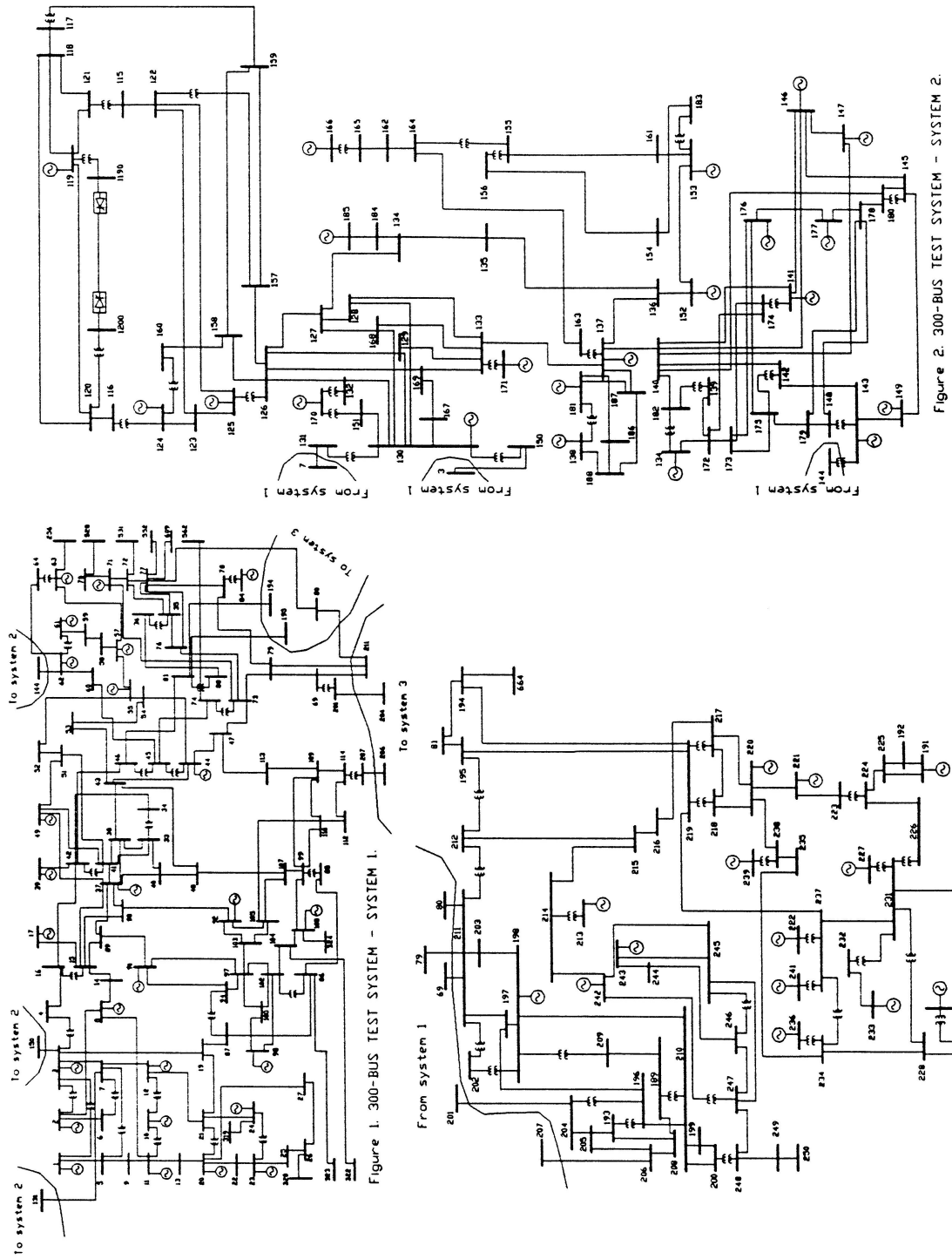


Figura 5.11: Sistema elétrico IEEE 300 Barras.

Foi considerado que as susceptâncias *shunt* devem pertencer aos conjuntos discretos apresentados na Tabela 5.5.

Tabela 5.5: Conjunto dos valores discretos para as susceptâncias *shunt* - IEEE 300 Barras.

Variável	Conjunto Discreto (em p.u.)
b_{96}^{sh}	$D_{b_{96}^{sh}} = \{0; 1, 5; 3; 4, 5\}$
b_{99}^{sh}	$D_{b_{99}^{sh}} = \{0; 0, 15; 0, 30; 0, 45; 0, 60\}$
b_{133}^{sh}	$D_{b_{133}^{sh}} = \{0; 0, 15; 0, 30; 0, 45\}$
b_{143}^{sh}	$D_{b_{143}^{sh}} = \{-4, 5; -3; -1, 5; 0\}$
b_{145}^{sh}	$D_{b_{145}^{sh}} = \{-4, 5; -3; -1, 5; 0\}$
b_{152}^{sh}	$D_{b_{152}^{sh}} = \{0; 0, 15; 0, 30; 0, 45; 0, 60\}$
b_{158}^{sh}	$D_{b_{158}^{sh}} = \{0; 0, 15; 0, 30; 0, 45; 0, 60\}$
b_{169}^{sh}	$D_{b_{169}^{sh}} = \{-4, 5; -3; -1, 5; 0\}$
b_{210}^{sh}	$D_{b_{210}^{sh}} = \{-4, 5; -3; -1, 5; 0\}$
b_{217}^{sh}	$D_{b_{217}^{sh}} = \{-4, 5; -3; -1, 5; 0\}$
b_{219}^{sh}	$D_{b_{219}^{sh}} = \{-4, 5; -3; -1, 5; 0\}$
b_{227}^{sh}	$D_{b_{227}^{sh}} = \{0; 0, 15; 0, 30; 0, 45; 0, 60\}$
b_{268}^{sh}	$D_{b_{268}^{sh}} = \{0; 0, 05; 0, 1; 0, 15\}$
b_{283}^{sh}	$D_{b_{283}^{sh}} = \{0; 0, 05; 0, 1; 0, 15\}$

O Algoritmo PIMD forneceu uma solução discreta na 25^a iteração. A tabela com os valores das variáveis discretas em cada iteração durante o processo de convergência é apresentada no Apêndice A. A solução discreta obtida é apresentada nas Figuras 5.12, 5.13 e 5.14, e na Tabela 5.6. Nesta solução as perdas de potência ativa do sistema são 343,01MW. O tempo total de processamento foi de 47,984 segundos.

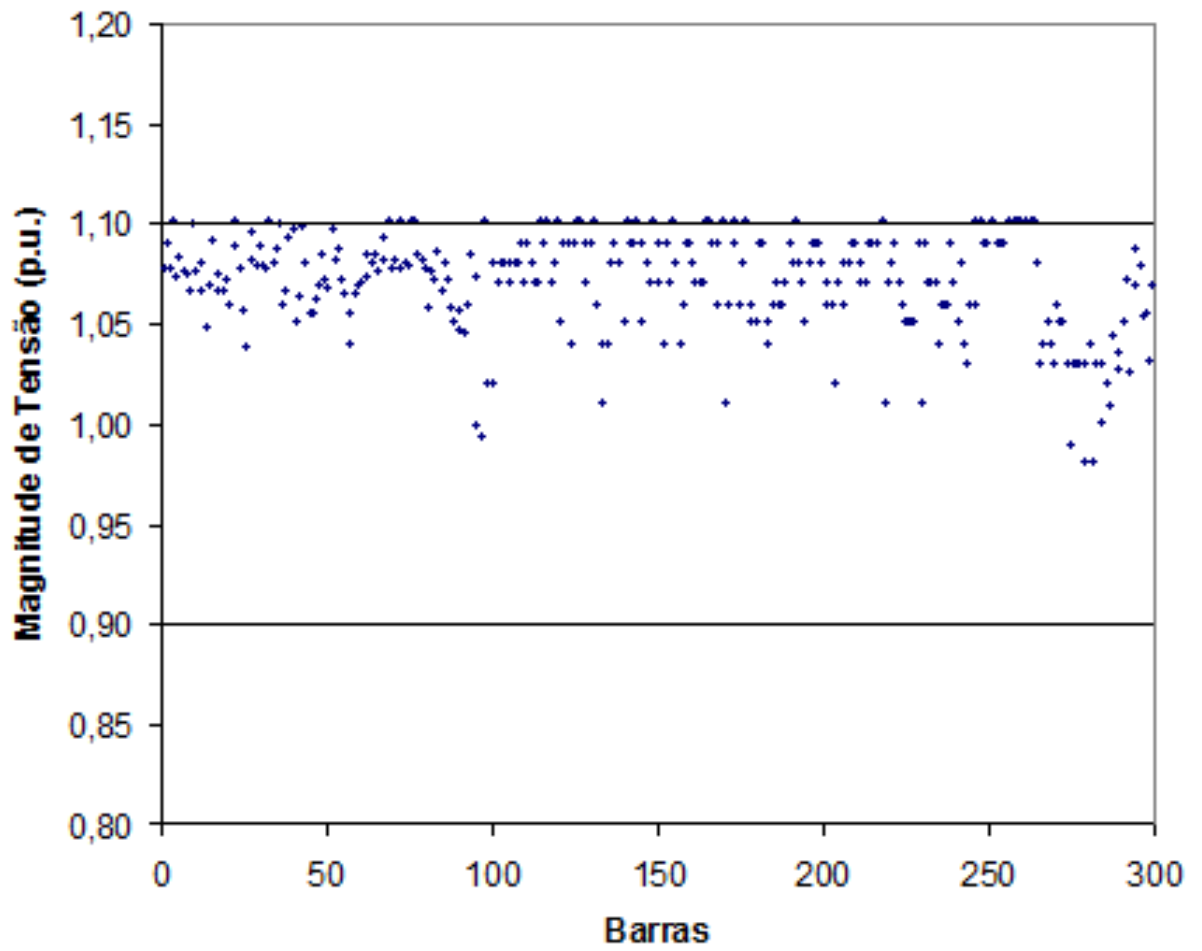


Figura 5.12: Magnitude de Tensão nas barras - IEEE 300 Barras.

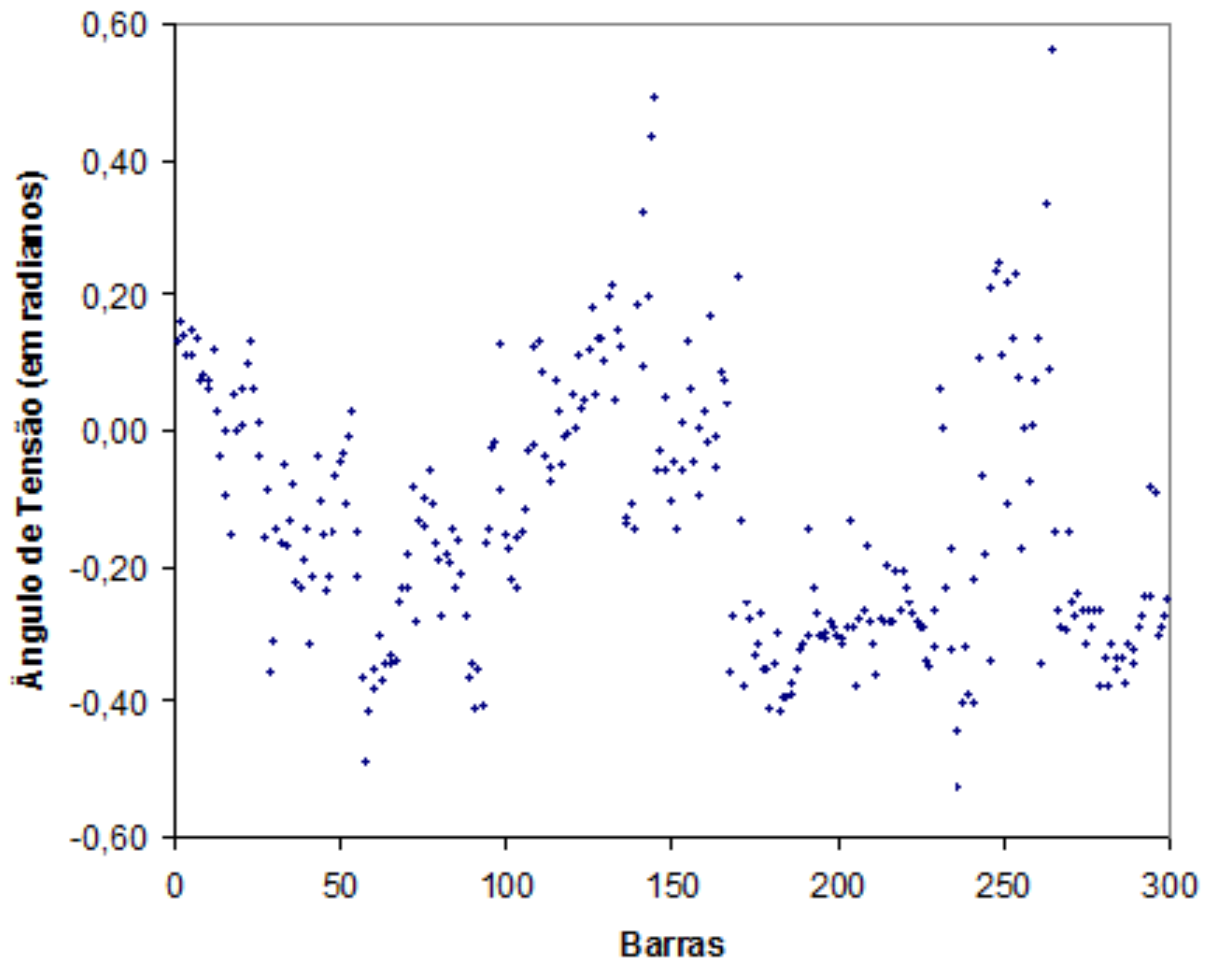


Figura 5.13: Ângulo de Tensão nas barras - IEEE 300 Barras.

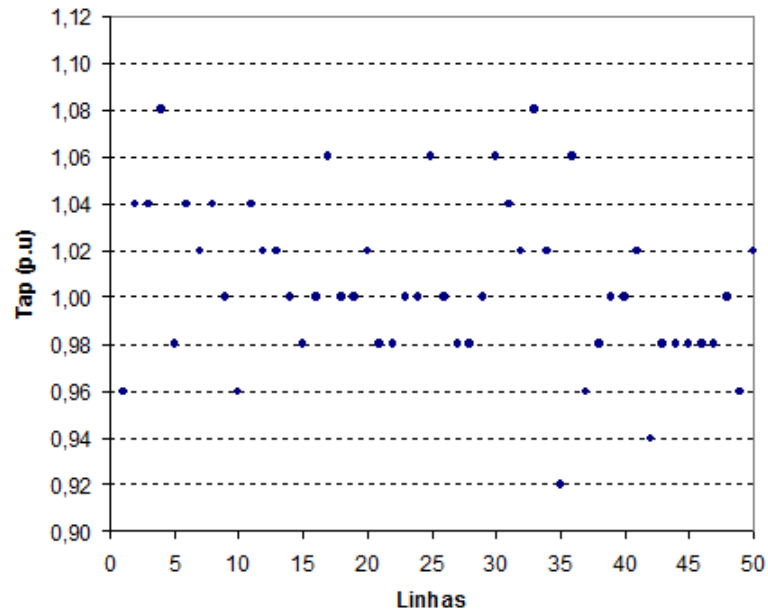


Figura 5.14: *Taps* - IEEE 300 Barras.

Tabela 5.6: Valores das susceptância *shunt* na solução obtida - IEEE 300 Barras.

b_{96}^{sh}	3,000
b_{99}^{sh}	0,450
b_{133}^{sh}	0,000
b_{143}^{sh}	-1,500
b_{145}^{sh}	0,000
b_{152}^{sh}	0,450
b_{158}^{sh}	0,450
b_{169}^{sh}	0,000
b_{210}^{sh}	-4,500
b_{217}^{sh}	-1,500
b_{219}^{sh}	-3,000
b_{227}^{sh}	0,450
b_{268}^{sh}	0,100
b_{283}^{sh}	0,000

5.2 Análise dos Resultados

Nos testes apresentados na Seção 5.1 verificamos que o Algoritmo PIMD, proposto neste trabalho, obriga as variáveis discretas do problema de FPO dos Sistemas Elétricos IEEE 14, 30, 118 e 300 Barras assumirem valores discretos. A solução obtida pelo algoritmo para o problema de FPO para o sistema IEEE 14 Barras coincide com a solução do problema contínuo arredondada. As soluções obtidas pelo algoritmo para os sistemas IEEE 30, 118 e 300 Barras diferem das soluções obtidas por arredondamento

das variáveis discretas para os seus valores discretos mais próximos. As perdas ativas nas linhas de transmissão são menores para estes casos nas soluções obtidas pelo Algoritmo PIMD proposto neste trabalho.

Para analisar a qualidade das soluções encontradas, o problema de FPO modelado com variáveis contínuas e discretas foi resolvido pelos Métodos *Branch-and-Bound* (foi utilizado o pacote BONMIN) e *Outer-Approximation* (foi utilizado o pacote DICOPT), e as soluções foram comparadas com as soluções obtidas pelo Algoritmo PIMD, apresentadas na Seção 5.1.

5.2.1 Algoritmo PIMD × *Outer Approximation*

O DICOPT (*DI*crete and *C*ontinuous *OPT*imizer) é um pacote para resolver problemas de programação não linear com variáveis inteiras e contínuas. O Algoritmo DICOPT é baseado em extensões do Método *Outer Approximation* e estratégias de relaxamento das restrições de igualdade. O DICOPT foi executado em interface com o *software* GAMS (www.gams.com/dd/docs/solvers/dicopt.pdf). O pacote é capaz de resolver problemas que envolvem funções não convexas, porém nestes casos não há garantias de que a solução obtida é um ótimo global.

A Tabela 5.7 apresenta os valores da função objetivo e o tempo total de processamento de cada método para cada um dos problemas testados, e a relação do tempo de processamento entre Algoritmo PIMD e pacote DICOPT, dada em porcentagem, calculada por:

$$t_{AD} = \frac{t_A}{t_D} * 100,$$

em que t_{AD} é a porcentagem do tempo consumido pelo Algoritmo PIMD sob o DICOPT, t_D é o tempo consumido pelo DICOPT na resolução do problema e t_A é o tempo de processamento do Algoritmo PIMD na resolução do problema. Nesta tabela vemos que o Algoritmo PIMD é competitivo pela qualidade das soluções obtidas e pelo tempo de processamento razoável. O tempo de processamento do pacote DICOPT foi melhor que o tempo de processamento do Algoritmo PIMD para os testes com os sistemas elétricos 30 e 118 Barras, no entanto as soluções obtidas pelo Algoritmo PIMD para estes sistemas fornecem valores menores para a função objetivo. No teste com o sistema IEEE 300 Barras o tempo de processamento do pacote foi limitado em 2 horas. Ressalta-se que o pacote DICOPT não encontrou uma solução discreta para o problema de FPO para o sistema IEEE 300 Barras neste tempo, enquanto o Algoritmo PIMD resolveu este problema eficientemente em 47 segundos, o que demonstra a eficiência do Algoritmo PIMD e a inviabilidade de utilização do pacote DICOPT para a resolução do problema de FPO de sistemas elétricos de grande porte.

Tabela 5.7: Comparação dos resultados - DICOPT.

Sistema Elétrico	Algoritmo PIMD		DICOPT		PIMD / DICOPT
	Perdas (MW)	tempo (s)	Perdas (MW)	tempo (s)	relação tempo (%)
IEEE 14 Barras	12,27	3,811	12,27	5,209	73,16
IEEE 30 Barras	16,07	3,342	16,11	1,391	240,26
IEEE 118 Barras	110,9	13,766	111,44	3,984	345,53
IEEE 300 Barras	343,01	47,984	–	7200	0,67

5.2.2 Algoritmo PIMD × *Branch-and-bound*

O BONMIN (*Basic Open-source Non-linear Mixed INteger programming*) é um pacote para resolver problemas de programação não linear com variáveis inteiras e contínuas, o qual é distribuído gratuitamente pelo projeto COIN-OR. Esse pacote possui cinco algoritmos disponíveis, dos quais utilizamos o algoritmo B-BB pois entre os algoritmos disponíveis no pacote este é o recomendado para se resolver problemas que envolvem funções não convexas. O algoritmo B-BB consiste do método *branch-and-bound* e utiliza o pacote IPOPT para resolver os PPNL da árvore de busca.

A Tabela 5.8 apresenta os valores da função objetivo e o tempo de processamento de cada método para cada um dos sistemas elétricos testados, e a relação do tempo de processamento entre Algoritmo PIMD e o pacote BONMIN, dada em porcentagem, calculado por:

$$t_{AB} = \frac{t_A}{t_B} * 100,$$

em que t_{AB} é a porcentagem do tempo consumido pelo Algoritmo PIMD sob o Algoritmo BONMIN, t_B é o tempo consumido pelo BONMIN na resolução do problema e t_A é o tempo consumido pelo Algoritmo PIMD na resolução do problema. Nesta tabela vemos que o Algoritmo PIMD é competitivo pela qualidade das soluções obtidas e pelo baixo tempo computacional.

Tabela 5.8: Comparação dos resultados - BONMIN.

Sistema Elétrico	Algoritmo PIMD		BONMIN		PIMD / BONMIN
	Perdas (MW)	tempo (s)	Perdas (MW)	tempo (s)	relação tempo (%)
IEEE 14 Barras	12,27	3,811	12,27	0,596	639,43
IEEE 30 Barras	16,07	3,342	16,07	2,406	138,90
IEEE 118 Barras	110,9	13,766	110,55	37,484	36,73
IEEE 300 Barras	343,01	47,984	345,13	375,172	12,79

Nos testes com os sistemas elétricos IEEE 14 e 30 Barras o pacote BONMIM resolveu o problema de FPO em tempo inferior ao Algoritmo PIMD, e em ambos os casos as soluções obtidas fornecem o mesmo valor para a função objetivo do problema. Nos testes com os sistemas elétricos IEEE 118 e 300 Barras o Algoritmo PIMD teve um desempenho melhor do que o pacote BONMIN. Ressaltamos que o tempo de processamento do pacote

BONMIN foi de mais de 6 minutos para a resolução do problema de FPO do sistema elétrico IEEE 300 Barras, enquanto que o Algoritmo PIMD resolveu este problema eficientemente em 47 segundos. O desempenho do Algoritmo PIMD foi superior ao desempenho do pacote BONMIN na resolução do problema de FPO para o sistema elétrico IEEE 300 Barras tanto pela qualidade da solução, quanto pelo baixo tempo computacional, o que comprova que o Algoritmo PIMD é mais eficiente que o pacote BONMIN na resolução do problema de FPO de sistemas elétricos de grande porte.

No próximo capítulo apresentamos as conclusões do trabalho e as perspectivas de continuidade deste.

Capítulo 6

Conclusões

O problema de Fluxo de Potência Ótimo é modelado como um problema de programação não linear com variáveis contínuas e discretas, de grande porte, não convexo e possui restrições de igualdade e desigualdade. Neste trabalho, foi apresentada uma nova abordagem de resolução deste problema.

Uma função que penaliza a função objetivo quando as variáveis discretas assumem valores não discretos foi apresentada. Esta função penalidade ao ser incorporada na função objetivo do problema permite que as variáveis discretas sejam consideradas contínuas. Assim, um problema de programação não linear com variáveis apenas contínuas (PPNL) é obtido e a solução desse problema é equivalente à solução do problema original. O PPNL obtido é resolvido por um Método de Pontos Interiores com Filtro.

Os testes numéricos realizados com os Sistemas Elétricos IEEE 14, 30, 118 e 300 Barras mostraram que a abordagem proposta é eficiente na resolução do problema de FPO, e que nas soluções obtidas os *taps* e as susceptâncias *shunt* assumem valores discretos. Nestes testes foram obtidas soluções de boa qualidade em baixo tempo computacional.

Os testes numéricos constataram que a função penalidade $\Phi(y)$, desenvolvida neste trabalho, e apresentada na Seção 3.1, ao ser incorporada na função objetivo do problema obriga as variáveis a assumirem valores discretos, permitindo assim que estas sejam consideradas de natureza contínua. Assim, o pacote IPOPT e conseqüentemente o Método de Pontos Interiores com Filtro, que resolvem apenas PPNL, foram utilizados para resolução de um PPNLDC.

A função penalidade $\Phi(y)$ pode ser incorporada nos métodos de solução da literatura para o problema de FPO que ignoram a natureza discreta dos controles do problema de FPO.

O Algoritmo de Pontos Interiores Modificado-Discreto apresentado neste trabalho tem muitas aplicações na área de engenharia pois muitos problemas são modelados como problemas de programação não linear com variáveis contínuas e discretas. No futuro, testes numéricos serão realizados com a abordagem de resolução proposta aplicada a outros problemas.

Este trabalho tem contribuições na área de Matemática e na área de Engenharia Elétrica. Na área de matemática pois desenvolveu-se uma função penalidade e uma nova abordagem de resolução para problemas de programação não linear com variáveis contínuas e discretas. E na área de Engenharia Elétrica, a aplicação do método de resolução ao problema de FPO, considerando os controles discretos deste modelo, permite estudos mais realistas no planejamento e na programação de operação de sistemas elétricos. O FPO é uma ferramenta essencial na tomada de decisões, dos administradores das concessionárias de energia elétrica, no processo de negociações no mercado desregulamentado. A implementação do FPO considerando variáveis discretas é fundamental para um perfeito conhecimento do desempenho da rede que considere suas principais características eletro-energéticas, e que possa, após essa representação detalhada, explorar os benefícios da otimização mantendo os requisitos da segurança.

Referências Bibliográficas

- Adibi, M. M., Polyak, R. A., Griva, I. A. & Mili, L. (2003). Optimal transformer tap selection using modified barrier-augmented lagrangian method. *IEEE Transactions on Power Systems*, **18**(1), 251–257.
- AlRashidi, M. R. & El-Hawary, M. E. (2007). Hybrid particle swarm optimization approach for solving the discrete opf problem considering the valve loading effects. *IEEE Transactions on Power Systems*, **22**(4), 2030–2038.
- Arora, J. S., Huang, M. W. & Hsieh, C. C. (1994). Methods for optimization of nonlinear problems with discrete variables: A review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **8**, 69–85. 10.1007/BF01743302.
- Bakirtzis, A. G., Biskas, P. N., Zoumas, C. E. & Petridis, V. (2002). Optimal power flow by enhanced genetic algorithm. *IEEE Transactions on Power Systems*, **17**(2), 229–236.
- Baptista, E. C., Belati, E. A., A., S. V. & Costa, G. R. M. (2006). Primal-dual logarithmic barrier and augmented lagrangian function to the loss minimization in power systems. *Electric Power Components and Systems*, **34**(7), 775–784.
- Bazaraa, M. S. & Shetty, C. M. (1993). *Nonlinear programming - theory and algorithms*. John Wiley & Sons, Inc., second edition.
- Capitanescu, F. & Wehenkel, L. (2010). Sensitivity-based approaches for handling discrete variables in optimal power flow computations. *IEEE Transactions on Power Systems*, **25**(4), 1780–1789.
- Carpentier, J. L. (1962). Contribution a l'Étude du dispatching Économique. *Bulletin de la Société Française des Electriciens*, **3**, 431–447.
- Costa, G. (2002). Modified newton method for reactive dispatching. *Electrical Power and Energy Systems*, **24**, 815–819.
- Ding, X. & Wang, X. (2004). Interior point cutting plane method for optimal power flow. *IMA Journal of Management Mathematics*, **15**(4), 355–368.
- Dommel, H. W. & Tinney, W. F. (1968). Optimal power flow solutions. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **PAS-87**(10), 1866–1876.
- Duran, M. & Grossmann, I. E. (1986). An outer-approximation algorithm for a class of mixed-integer nonlinear programs. *Mathematical Programming*, **36**, 307–339.
- Fletcher, R. & Leyffer, S. (2002). Nonlinear programming without a penalty function. *Mathematical Programming*, **91**(2), 239–269.

- Fu, J.-F., Fenton, R. G. & Cleghorn, W. L. (1991). A mixed integer-discrete-continuous programming method and its application to engineering design optimization. *Engineering Optimization*, **17**(4), 263–280.
- Geoffrion, A. M. (1972). Generalized benders decomposition. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **10**, 237–260.
- Granville, S. (1994). Optimal reactive dispatch through interior point method. *IEEE Transactions on Power Systems*, **9**(1), 136–146.
- Grossmann, I. (2002). Review of nonlinear mixed-integer and disjunctive programming techniques. *Optimization and Engineering*, **3**, 227–252.
- Gupta, O. K. & Ravindran, A. (1985). Branch and bound experiments in convex nonlinear integer programming. *Management Science*, **31**, 1533–1546.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D. & Vecchi, M. P. (1983). "optimization by Simulated Annealing". *Science*, **220**, 671–680.
- Leyffer, S. (1993). *Deterministic Methods for Mixed Integer Nonlinear Programming*. Ph.D. thesis, Department of Mathematics and Computer Science, University of Dundee.
- Lin, C.-Y. & Hajela, P. (1992). Genetic algorithms in optimization problems with discrete and integer design variables. *Engineering Optimization*, **19**, 309–327.
- Lin, S.-Y., Ho, Y.-C. & Lin, C.-H. (2004). An ordinal optimization theory-based algorithm for solving the optimal power flow problem with discrete control variables. *IEEE Transactions on Power Systems*, **19**(1), 276–286.
- Liu, E. W.-H., Papalexopoulos, A. D. & Tinney, W. F. (1992). Discrete shunt controls in a newton optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, **7**(4), 1509–1518.
- Liu, L., Wang, X., Ding, X. & Chen, H. (2009). A robust approach to optimal power flow with discrete variables. *IEEE Transactions on Power Systems*, **24**(3), 1182–1190.
- Liu, M., Tso, S. K. & Cheng, Y. (2002). An extended nonlinear primal-dual interior-point algorithm for reactive-power optimization of large-scale power systems with discrete control variables. *IEEE Transactions on Power Systems*, **17**(4), 982–991.
- Momoh, J. A., EL-Hawary, M. & Adapa, R. (1999a). A review of selected optimal power flow literature to 1993 - part i: Nonlinear and quadratic programming approaches. *IEEE Transactions on Power Systems*, **14**(1), 96–104.
- Momoh, J. A., EL-Hawary, M. & Adapa, R. (1999b). A review of selected optimal power flow literature to 1993 - part ii: Newton, linear programming and interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, **14**(1), 105–111.
- Monticelli, A. & Liu, W.-H. E. (1992). Adaptive movement penalty method for the newton optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, **7**(1), 21–24.
- Quesada, I. & Grossmann, I. E. (1992). "an LP/NLP based branch and bound algorithm for convex minlp optimization problems". *Computers and Chemical Engineering*, **16**, 937–947.

- Quintana, V. H., Gomez, A. & Martinez, J. L. (1995). Nonlinear optimal power flows by logarithmic-barrier primal-dual algorithm. *IEEE NAPS Meeting*.
- Ringertz, U. T. (1988). On methods for discrete structural optimization. *Engineering Optimization*, (13), 47–64.
- Sasson, A., Vilorio, F. & Aboytes, F. (1973). Optimal load flow solution using the hessian matrix. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **PAS-92**(1), 31–41.
- Sousa, V. A. (2006). *Resolução do problema de fluxo de potência ótimo reativo via método da Função Lagrangiana Barreira Modificada*. Ph.D. thesis, Departamento de Engenharia Elétrica, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- Sousa, V. A., Nunes, L., Belati, E. A. & Costa, G. (2003). A new approach type-newton for optimal reactive dispatch problem. *Power Engineering Society General Meeting - 2003*, pages 252–257.
- Sun, D., Ashley, B., Brewer, B., Hughes, A. & Tinney, W. (1984). "optimal power flow by Newton approach". *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **PAS-103**, 2864–2880.
- Torres, G. L. & Quintana, V. H. (1998). An interior point method for nonlinear optimal power flow using voltage rectangular coordinates. *IEEE Transactions on Power Systems*, **13**(4), 1211–1218.
- Wächter, A. (2002). *An Interior Point Algorithm for Large-Scale Nonlinear Optimization with Applications in Process Engineering*. Ph.D. thesis, Carnegie Mellon University.
- Wächter, A. (2009). Short tutorial: Getting started with ipopt in 90 minutes. In U. Naumann, O. Schenk, H. D. Simon, & S. Toledo, editors, *Combinatorial Scientific Computing*, number 09061 in Dagstuhl Seminar Proceedings, Dagstuhl, Germany. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, Germany.
- Wächter, A. & Biegler, L. T. (2005). Line search filter methods for nonlinear programming: Motivation and global convergence. *SIAM Journal on Optimization*, **16**(1), 1–31.
- Wächter, A. & Biegler, L. T. (2006). On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*, **1**, 25–57.
- Westerlund, T. & Petersson, F. (1995). A cutting plane method for solving convex minlp problems. *Computers and Chemical Engineering*, **19**, 131–136.

Apêndice A

Resultados

A.1 Sistema IEEE 118 Barras

A seguir são apresentados os valores das variáveis discretas durante o processo de convergência na resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo para o sistema elétrico IEEE 118 Barras.

Iteração	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$t_{8,5}$	1,001	1,001	1,001	1,001	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$t_{26,25}$	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980
$t_{30,17}$	1,001	1,001	1,001	1,001	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$t_{38,37}$	1,021	1,021	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020
$t_{63,59}$	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020
$t_{64,61}$	1,001	1,001	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$t_{65,66}$	1,001	1,001	1,001	1,001	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$t_{68,69}$	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020
$t_{81,80}$	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020	1,020
b_5^{sh}	0,298	-0,298	-0,299	-0,299	-0,299	-0,299	-0,300	-0,300	-0,300	-0,300	-0,300	-0,300
b_{34}^{sh}	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150
b_{37}^{sh}	0,300	-0,300	-0,300	-0,300	-0,300	-0,300	-0,300	-0,300	-0,300	-0,300	-0,300	-0,300
b_{44}^{sh}	0,003	0,002	0,002	0,147	0,148	0,148	0,149	0,149	0,149	0,149	0,149	0,150
b_{45}^{sh}	0,152	0,152	0,151	0,149	0,149	0,149	0,149	0,149	0,150	0,150	0,150	0,150
b_{46}^{sh}	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150
b_{48}^{sh}	0,148	0,148	0,149	0,149	0,149	0,149	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150
b_{74}^{sh}	0,146	0,147	0,148	0,148	0,149	0,149	0,149	0,149	0,150	0,150	0,150	0,150
b_{79}^{sh}	0,301	0,301	0,301	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300
b_{82}^{sh}	0,299	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300
b_{83}^{sh}	0,149	0,149	0,149	0,149	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150
b_{105}^{sh}	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150
b_{107}^{sh}	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050
b_{110}^{sh}	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100

A.2 Sistema IEEE 300 Barras

Os valores das variáveis discretas durante o processo de convergência, na resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo para o sistema elétrico IEEE 300 Barras, são apresentados na tabela seguinte.

Apêndice B

Dados dos Sistemas Elétricos

Neste apêndice são apresentados os dados e as condições iniciais dos sistemas elétricos utilizados nos testes numéricos. Em tipo da barra, nas tabelas referentes aos dados das barra, são denotadas por barras do tipo 0 as barras de carga, barras do tipo 1 as barras de controle de reativos, e barras do tipo 2 as barras de geração.

B.1 Sistema IEEE 14 Barras

Barra	Tipo	V	θ	Dados das barras						
				P^G	Q^G	Q	\bar{Q}	P^C	Q^C	b^{sh}
1	2	1,060	0,0000	0	0	-99,99	99,99	0,000	0,000	
2	1	1,045	-0,0873	0	0	-0,40	0,50	-0,183	0,127	
3	1	1,010	-0,2269	0	0	0,00	0,20	0,942	0,190	
4	0	1,019	-0,1745	0	0			0,478	-0,039	
5	0	1,020	-0,1536	0	0			0,076	0,016	
6	1	1,070	-0,2443	0	0	-0,06	0,24	0,112	0,075	
7	0	1,062	-0,2269	0	0			0,000	0,000	
8	1	1,090	-0,2269	0	0	-0,06	0,24	0,000	0,000	
9	0	1,056	-0,2618	0	0			0,295	0,166	0,19
10	0	1,051	-0,2618	0	0			0,090	0,058	
11	0	1,057	-0,2618	0	0			0,035	0,018	
12	0	1,055	-0,2618	0	0			0,061	0,016	
13	0	1,050	-0,2618	0	0			0,135	0,058	
14	0	1,036	-0,2792	0	0			0,149	0,050	

Linha	g	b	b^{sh}	t	
					Dados das linhas
1	2	4,9991	-15,2631	0,0264	
1	5	1,0259	-4,2350	0,0246	
2	3	1,1350	-4,7819	0,0219	
2	4	1,6860	-5,1158	0,0187	
2	5	1,7011	-5,1939	0,0170	
3	4	1,9860	-5,0688	0,0173	
4	5	6,8410	-21,5786	0,0064	
4	7	0,0000	-4,7819	0,0000	1,0225
4	9	0,0000	-1,7980	0,0000	1,0320
5	6	0,0000	-3,9679	0,0000	1,0730
6	11	1,9550	-4,0941	0,0000	
6	12	1,5260	-3,1760	0,0000	
6	13	3,0989	-6,1028	0,0000	
7	8	0,0000	-5,6770	0,0000	
7	9	0,0000	-9,0901	0,0000	
9	10	3,9020	-10,3654	0,0000	
9	14	1,4240	-3,0291	0,0000	
10	11	1,8809	-4,4029	0,0000	
12	13	2,4890	-2,2520	0,0000	
13	14	1,1370	-2,3150	0,0000	

B.2 Sistema IEEE 30 Barras

Barra	Tipo	V	θ	Dados das barras						
				P^G	Q^G	Q	\bar{Q}	P^C	Q^C	b^{sh}
1	2	1,053	0,0000	0	0	-99,99	99,99	0,000	0,000	
2	1	1,032	-0,0016	0	0	-0,40	0,50	-0,183	0,127	
3	0	1,018	-0,0024	0	0			0,024	0,012	
4	0	1,01	-0,0030	0	0			0,076	0,016	
5	1	1,01	-0,0044	0	0	-0,40	0,40	0,942	0,190	
6	0	1,004	-0,0035	0	0			0,000	0,000	
7	0	0,998	-0,0040	0	0			0,228	0,109	
8	1	1,01	-0,0037	0	0	-0,10	0,40	0,300	0,300	
9	0	1,017	-0,0045	0	0			0,000	0,000	
10	0	1,015	-0,0051	0	0			0,058	0,020	0,19
11	1	1,072	-0,0045	0	0	-0,06	0,24	0,000	0,000	
12	0	1,019	-0,0047	0	0			0,112	0,075	
13	1	1,057	-0,0047	0	0	-0,06	0,24	0,000	0,000	
14	0	1,005	-0,0051	0	0			0,062	0,016	
15	0	1,001	-0,0051	0	0			0,082	0,025	
16	0	1,01	-0,0051	0	0			0,035	0,018	
17	0	1,008	-0,0051	0	0			0,090	0,058	
18	0	0,994	-0,0052	0	0			0,032	0,009	
19	0	0,992	-0,0054	0	0			0,095	0,034	
20	0	0,997	-0,0052	0	0			0,022	0,007	
21	0	1,003	-0,0052	0	0			0,175	0,112	
22	0	1,004	-0,0051	0	0			0,000	0,000	
23	0	0,994	-0,0052	0	0			0,032	0,016	
24	0	0,994	-0,0052	0	0			0,087	0,067	0,043
25	0	1,001	-0,0051	0	0			0,000	0,000	
26	0	0,983	-0,0052	0	0			0,035	0,023	
27	0	1,013	-0,0049	0	0			0,000	0,000	
28	0	0,997	-0,0037	0	0			0,000	0,000	
29	0	0,993	-0,0054	0	0			0,024	0,009	
30	0	0,982	-0,0056	0	0			0,106	0,019	

Dados das linhas					
Linha	g	b	b^{sh}	t	
1	2	5,2246	-15,6467	0,0132	
1	3	1,2437	-5,0960	0,0102	
2	4	1,7055	-5,1974	0,0092	
3	4	8,1954	-23,5309	0,0021	
2	5	1,1360	-4,7725	0,0104	
2	6	1,6861	-5,1165	0,0094	
4	6	6,4131	-22,3112	0,0023	
5	7	2,9540	-7,4493	0,0051	
6	7	3,5902	-11,0261	0,0043	
6	8	6,2893	-22,0126	0,0023	
6	9	0,0000	-4,8077	0,0000	0,9634
6	10	0,0000	-1,7986	0,0000	1,0460
9	11	0,0002	-4,8077	0,0000	
9	10	0,0008	-9,0909	0,0000	
4	12	0,0000	-3,9063	0,0000	0,9852
12	13	0,0000	-7,1429	0,0000	
12	14	1,5266	-3,1734	0,0000	
12	15	3,0954	-6,0973	0,0000	
12	16	1,9520	-4,1044	0,0000	
14	15	2,4910	-2,2509	0,0000	
16	17	1,8826	-4,3935	0,0000	
15	18	1,8077	-3,6914	0,0000	
18	19	3,0757	-6,2188	0,0000	
19	20	5,8824	-11,7647	0,0000	
10	20	1,7848	-3,9854	0,0000	
10	17	3,9560	-10,3174	0,0000	
10	21	5,1019	-10,9807	0,0000	
10	22	2,6193	-5,4008	0,0000	
21	22	16,7746	-34,1277	0,0000	
15	23	1,9683	-3,9761	0,0000	
22	24	2,5405	-3,9544	0,0000	
23	24	1,4614	-2,9892	0,0000	
24	25	1,3099	-2,2876	0,0000	
25	26	1,2165	-1,8171	0,0000	
25	27	1,9693	-3,7602	0,0000	
28	27	0,0000	-2,5253	0,0000	1,0438
27	29	0,9955	-1,8810	0,0000	
27	30	0,6875	-1,2940	0,0000	

29	30	0,9121	-1,7234	0,0000
8	28	1,4440	-4,5408	0,0107
6	28	4,3628	-15,4636	0,0033

B.3 Sistema IEEE 118 Barras

Barra	Tipo	V	θ	Dados das barras				\bar{Q}	P^C	Q^C	b^{sh}
				P^G	Q^G	Q	\bar{Q}				
1	1	0,955	0,0000	0,000	0	-0,05	0,15	0,510	0,270		
2	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,200	0,090		
3	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,390	0,100		
4	1	0,998	0,0000	-0,090	0	-3,00	3,00	0,300	0,120		
5	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000	-0,40	
6	1	0,990	0,0000	0,000	0	-0,13	0,50	0,520	0,220		
7	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,190	0,020		
8	1	1,015	0,0000	-0,280	0	-3,00	3,00	0,000	0,000		
9	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000		
10	1	1,050	0,0000	4,500	0	-1,47	2,00	0,000	0,000		
11	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,700	0,230		
12	1	0,990	0,0000	0,850	0	-0,35	1,20	0,470	0,100		
13	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,340	0,160		
14	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,140	0,010		
15	1	0,970	0,0000	0,000	0	-0,10	0,30	0,900	0,300		
16	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,250	0,100		
17	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,110	0,030		
18	1	0,973	0,0000	0,000	0	-0,16	0,50	0,600	0,340		
19	1	0,962	0,0000	0,000	0	-0,08	0,24	0,450	0,250		
20	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,180	0,030		
21	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,140	0,080		
22	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,100	0,050		
23	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,070	0,030		
24	1	0,992	0,0000	-0,130	0	-3,00	3,00	0,000	0,000		
25	1	1,050	0,0000	2,200	0	-0,47	1,40	0,000	0,000		
26	1	1,015	0,0000	3,140	0	-10,00	10,00	0,000	0,000		
27	1	0,968	0,0000	-0,090	0	-3,00	3,00	0,620	0,130		
28	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,170	0,070		
29	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,240	0,040		
30	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000		
31	1	0,967	0,0000	0,070	0	-3,00	3,00	0,430	0,270		
32	1	0,963	0,0000	0,000	0	-0,14	0,42	0,590	0,230		
33	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,230	0,090		
34	1	0,984	0,0000	0,000	0	-0,08	0,24	0,590	0,260	0,14	
35	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,330	0,090		
36	1	0,980	0,0000	0,000	0	-0,08	0,24	0,310	0,170		
37	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000	-0,25	
38	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000		
39	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,270	0,110		
40	1	0,970	0,0000	-0,460	0	-3,00	3,00	0,200	0,230		
41	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,370	0,100		
42	1	0,985	0,0000	-0,590	0	-3,00	3,00	0,370	0,230		
43	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,180	0,070		
44	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,160	0,080	0,10	
45	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,530	0,220	0,10	
46	1	1,005	0,0000	0,190	0	-1,00	1,00	0,280	0,100	0,10	
47	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,340	0,000		
48	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,200	0,110	0,15	
49	1	1,025	0,0000	2,040	0	-0,85	2,10	0,870	0,300		
50	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,170	0,040		
51	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,170	0,080		
52	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,180	0,050		
53	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,230	0,110		
54	1	0,955	0,0000	0,480	0	-3,00	3,00	1,130	0,320		
55	1	0,952	0,0000	0,000	0	-0,08	0,23	0,630	0,220		
56	1	0,954	0,0000	0,000	0	-0,08	0,15	0,840	0,180		
57	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,120	0,030		
58	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,120	0,030		
59	1	0,985	0,0000	1,550	0	-0,60	1,80	2,770	1,130		
60	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,780	0,030		
61	1	0,995	0,0000	1,600	0	-1,00	3,00	0,000	0,000		
62	1	0,998	0,0000	0,000	0	-0,20	0,20	0,770	0,140		
63	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000		
64	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000		
65	1	1,005	0,0000	3,910	0	-0,67	2,00	0,000	0,000		
66	1	1,050	0,0000	3,920	0	-0,67	2,00	0,390	0,180		
67	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,280	0,070		

68	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000	
69	2	1,035	0,5323	0,164	0	-3,00	3,00	0,000	0,000	
70	1	0,984	0,0000	0,000	0	-0,10	0,32	0,660	0,200	
71	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000	
72	1	0,980	0,0000	-0,120	0	-1,00	1,00	0,000	0,000	
73	1	0,991	0,0000	-0,060	0	-1,00	1,00	0,000	0,000	
74	1	0,958	0,0000	0,000	0	-0,06	0,09	0,680	0,270	0,12
75	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,470	0,110	
76	1	0,943	0,0000	0,000	0	-0,08	0,23	0,680	0,360	
77	1	1,006	0,0000	0,000	0	-0,20	0,70	0,610	0,280	
78	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,710	0,260	
79	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,390	0,320	0,20
80	1	1,040	0,0000	4,770	0	-1,65	2,80	1,300	0,260	
81	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,000	0,000	
82	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,540	0,270	0,20
83	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,200	0,100	0,10
84	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,110	0,070	
85	1	0,985	0,0000	0,000	0	-0,08	0,23	0,240	0,150	
86	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,210	0,100	
87	1	1,015	0,0000	0,040	0	-1,00	10,00	0,000	0,000	
88	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,480	0,100	
89	1	1,005	0,0000	6,070	0	-2,10	3,00	0,000	0,000	
90	1	0,985	0,0000	-0,850	0	-3,00	3,00	0,780	0,420	
91	1	0,980	0,0000	-0,100	0	-1,00	1,00	0,000	0,000	
92	1	0,990	0,0000	0,000	0	-0,03	0,09	0,650	0,100	
93	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,120	0,070	
94	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,300	0,160	
95	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,420	0,310	
96	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,380	0,150	
97	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,150	0,090	
98	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,340	0,080	
99	1	1,010	0,0000	-0,420	0	-1,00	1,00	0,000	0,000	
100	1	1,017	0,0000	2,520	0	-0,50	1,55	0,370	0,180	
101	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,220	0,150	
102	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,050	0,030	
103	1	1,010	0,0000	0,400	0	-0,15	0,40	0,230	0,160	
104	1	0,971	0,0000	0,000	0	-0,08	0,23	0,380	0,250	
105	1	0,965	0,0000	0,000	0	-0,08	0,23	0,310	0,260	0,20
106	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,430	0,160	
107	1	0,952	0,0000	-0,220	0	-2,00	2,00	0,280	0,120	0,06
108	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,020	0,010	
109	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,080	0,030	
110	1	0,973	0,0000	0,000	0	-0,08	0,23	0,390	0,300	0,06
111	1	0,980	0,0000	0,360	0	-1,00	10,00	0,000	0,000	
112	1	0,975	0,0000	-0,430	0	-1,00	10,00	0,250	0,130	
113	1	0,993	0,0000	-0,060	0	-1,00	2,00	0,000	0,000	
114	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,080	0,030	
115	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,220	0,070	
116	1	1,005	0,0000	-1,840	0	-10,00	10,00	0,000	0,000	
117	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,200	0,080	
118	0	1,000	0,0000	0,000	0			0,330	0,150	

Dados das linhas				
Linha	<i>g</i>	<i>b</i>	<i>b^{sh}</i>	<i>t</i>
1	2	2,7803	-9,1667	0,0127
1	3	6,5677	-21,5867	0,0054
4	5	26,7698	-118,9768	0,0010
3	5	1,9682	-8,8201	0,0142
5	6	3,8919	-17,6609	0,0071
6	7	10,1366	-45,8352	0,0028
8	9	2,5641	-32,5851	0,5810
8	5	0,0000	-37,4532	0,0000
9	10	2,4914	-30,8547	0,6150
4	11	4,0424	-13,3069	0,0087
5	11	4,0092	-13,4694	0,0087
11	12	14,0822	-46,7814	0,0025
2	12	4,5123	-14,8640	0,0079
3	12	1,7321	-5,7260	0,0203
7	12	6,9921	-27,6432	0,0044
11	13	3,8179	-12,5152	0,0094
12	14	3,9372	-12,9470	0,0091
13	15	1,1399	-3,7446	0,0313
14	15	1,4315	-4,6914	0,0251
12	16	2,8629	-11,2627	0,0107
15	17	6,3342	-20,9700	0,0222
16	17	1,3160	-5,2207	0,0233
17	18	4,5530	-18,6930	0,0065
18	19	4,3820	-19,2885	0,0057
19	20	1,7593	-8,1681	0,0149

15	19	7,0740	-23,2262	0,0050	
20	21	2,4261	-11,2556	0,0108	
21	22	2,1227	-9,8519	0,0123	
22	23	1,2930	-6,0112	0,0202	
23	24	5,1865	-18,9021	0,0249	
23	25	2,3482	-12,0421	0,0432	
26	25	0,0000	-26,1780	0,0000	1,04167
25	27	1,1530	-5,9100	0,0882	
27	28	2,4886	-11,1400	0,0108	
28	29	2,5068	-9,9744	0,0119	
30	17	0,0000	-25,7732	0,0000	1,04167
8	30	1,6806	-19,6979	0,2570	
26	30	1,0724	-11,5282	0,4540	
17	31	1,7768	-5,8591	0,0200	
29	31	8,9091	-27,3046	0,0042	
23	32	2,2169	-8,0635	0,0587	
31	32	2,8139	-9,3010	0,0125	
27	32	3,6789	-12,1292	0,0096	
15	33	2,2459	-7,3525	0,0160	
19	34	1,1280	-3,7051	0,0316	
35	36	20,2057	-93,6811	0,0013	
35	37	4,2453	-19,1811	0,0066	
33	37	1,8962	-6,4881	0,0183	
34	36	10,9581	-33,7561	0,0028	
34	37	27,3339	-98,8225	0,0049	
38	37	0,0000	-26,6667	0,0000	1,06952
37	39	2,6169	-8,6415	0,0135	
37	40	1,8683	-5,2929	0,0210	
30	38	1,5661	-18,3851	0,2110	
39	40	4,6014	-15,1295	0,0078	
40	41	5,6159	-18,8618	0,0061	
40	42	1,5177	-5,0042	0,0233	
41	42	2,0597	-6,7819	0,0172	
43	44	0,9512	-3,8393	0,0303	
34	43	1,3784	-5,6102	0,0211	
44	45	2,5987	-10,4527	0,0112	
45	46	2,0013	-6,7843	0,0166	
46	47	2,1624	-7,2270	0,0158	
46	48	1,5280	-4,8051	0,0236	
47	49	4,4720	-14,6334	0,0080	
42	49	0,6533	-2,9514	0,0430	
42	49	0,6533	-2,9514	0,0430	
45	49	1,7416	-4,7359	0,0222	
48	49	6,2355	-17,5918	0,0063	
49	50	4,1929	-11,8092	0,0094	
49	51	2,2999	-6,4834	0,0171	
51	52	5,2461	-15,1956	0,0070	
52	53	1,4274	-5,7626	0,0203	
53	54	1,6885	-7,8327	0,0155	
49	54	0,8216	-3,2527	0,0369	
49	54	0,9422	-3,1551	0,0365	
54	55	3,1983	-13,3798	0,0101	
54	56	28,5452	-96,8498	0,0037	
55	56	19,4429	-59,9159	0,0019	
56	57	3,2642	-9,1930	0,0121	
50	57	2,3462	-6,6328	0,0166	
56	58	3,2642	-9,1930	0,0121	
51	58	4,3815	-12,3542	0,0089	
54	59	0,9127	-4,1609	0,0299	
56	59	1,1818	-3,5956	0,0285	
56	59	1,2632	-3,7597	0,0268	
55	59	0,9710	-4,4206	0,0282	
59	60	1,4390	-6,5820	0,0188	
59	61	1,3913	-6,3624	0,0194	
60	61	13,7559	-71,4248	0,0073	
60	62	3,7290	-17,0077	0,0073	
61	62	5,5368	-25,3883	0,0049	
63	59	0,0000	-25,9067	0,0000	1,04167
63	64	4,2195	-49,6413	0,1080	
64	61	0,0000	-37,3134	0,0000	1,01523
38	65	0,9181	-10,0582	0,5230	
64	65	2,9369	-32,8500	0,1900	
49	66	2,0525	-10,4794	0,0124	
49	66	2,0525	-10,4794	0,0124	
62	66	0,9670	-4,3734	0,0289	
62	67	1,7973	-8,1507	0,0155	
65	66	0,0000	-27,0270	0,0000	1,06952
66	67	2,0733	-9,3947	0,0134	
65	68	5,4272	-62,0251	0,3190	
47	69	1,0012	-3,2955	0,0355	

49	69	0,8589	-2,8253	0,0414	
68	69	0,0000	-27,0270	0,0000	1,06952
69	70	1,7617	-7,4579	0,0610	
24	70	0,0130	-2,4301	0,0510	
70	71	6,5785	-26,5383	0,0044	
24	72	1,1962	-4,8042	0,0244	
71	72	1,2969	-5,2342	0,0222	
71	73	4,0714	-21,2462	0,0059	
70	74	2,0982	-6,9226	0,0168	
70	75	1,9712	-6,4939	0,0180	
69	75	2,4509	-7,3831	0,0620	
74	75	6,8347	-22,5599	0,0052	
76	77	1,8597	-6,1989	0,0184	
69	77	2,7699	-9,0536	0,0519	
75	77	1,3793	-4,5878	0,0249	
77	78	22,5922	-73,7218	0,0063	
78	79	8,7914	-39,0019	0,0032	
77	80	6,4363	-18,3625	0,0236	
77	80	2,4728	-8,8314	0,0114	
79	80	3,0003	-13,5397	0,0094	
68	81	4,1370	-49,1568	0,4040	
81	80	0,0000	-27,0270	0,0000	1,06952
77	82	3,6501	-10,4481	0,0409	
82	83	7,6070	-24,9265	0,0190	
83	84	2,9301	-6,1884	0,0129	
83	85	1,8103	-6,2308	0,0174	
84	85	6,0149	-12,7668	0,0062	
85	86	2,1401	-7,5211	0,0138	
86	87	0,6459	-4,7335	0,0223	
85	88	1,8512	-9,4409	0,0138	
85	89	0,7836	-5,6721	0,0235	
88	89	2,6413	-13,5293	0,0097	
89	90	1,3622	-4,9438	0,0264	
89	90	2,2653	-9,4893	0,0530	
90	91	3,3272	-10,9508	0,0107	
89	92	3,7383	-19,0691	0,0274	
89	92	1,4808	-5,9570	0,0207	
91	92	2,1892	-7,1956	0,0163	
92	93	3,2838	-10,7934	0,0109	
92	94	1,7634	-5,7923	0,0203	
93	94	3,8084	-12,5010	0,0094	
94	95	6,4146	-21,0905	0,0056	
80	96	1,0351	-5,2920	0,0247	
82	96	5,2744	-17,2557	0,0272	
94	96	3,2507	-10,5012	0,0115	
80	97	2,0202	-10,3108	0,0127	
80	98	1,9460	-8,8304	0,0143	
80	99	1,0203	-4,6295	0,0273	
92	100	0,7103	-3,2338	0,0386	
94	100	4,8359	-15,7573	0,0302	
95	96	5,2063	-16,6540	0,0074	
96	97	2,1275	-10,8835	0,0120	
98	100	1,1809	-5,3247	0,0238	
99	100	2,5960	-11,7254	0,0108	
100	101	1,6593	-7,5597	0,0164	
92	102	3,7545	-17,0630	0,0073	
101	102	1,8708	-8,5177	0,0147	
100	103	5,3116	-17,4288	0,0268	
100	104	1,0332	-4,6735	0,0271	
103	104	1,7093	-5,8103	0,0204	
103	105	1,8279	-5,5520	0,0204	
100	106	1,0784	-4,0819	0,0310	
104	105	6,4839	-24,7569	0,0049	
105	106	4,3913	-17,1576	0,0072	
105	107	1,4601	-5,0416	0,0236	
105	108	4,6414	-12,5016	0,0092	
106	107	1,4601	-5,0416	0,0236	
108	109	11,1739	-30,6484	0,0038	
103	110	1,1367	-5,2706	0,0231	
109	110	4,2254	-11,5818	0,0101	
110	111	3,5574	-12,2084	0,0100	
110	112	5,2485	-13,5994	0,0310	
17	113	9,2029	-30,4403	0,0038	
32	113	1,3669	-4,5120	0,0259	
32	114	3,4371	-15,5817	0,0081	
27	115	2,8473	-12,8651	0,0099	
114	115	20,2732	-91,6703	0,0014	
68	116	17,7515	-242,6036	0,0820	
12	117	1,5907	-6,7690	0,0179	
75	118	5,7452	-19,0581	0,0060	

B.4 Sistema IEEE 300 Barras

Barra	Tipo	V	θ	Dados das barras					
				P^G	Q^G	Q	\bar{Q}	P^C	Q^C
1	0	1,028	0,1047	0,000	0	0	0	0,9	0,49
2	0	1,035	0,1396	0,000	0	0	0	0,56	0,15
3	0	0,997	0,1222	0,000	0	0	0	0,2	0
4	0	1,03	0,0873	0,000	0	0	0	0	0
5	0	1,019	0,0873	0,000	0	0	0	3,53	1,3
6	0	1,031	0,1222	0,000	0	0	0	1,2	0,41
7	0	0,993	0,1047	0,000	0	0	0	0	0
8	1	1,015	0,0349	-0,050	0	-0,1	0,1	0,58	0,14
9	0	1,003	0,0524	0,000	0	0	0	0,96	0,43
10	1	1,02	0,0175	-0,050	0	-0,2	0,2	1,48	0,33
11	0	1,005	0,0349	0,000	0	0	0	0,83	0,21
12	0	0,997	0,0873	0,000	0	0	0	0	0
13	0	0,997	-0,0175	0,000	0	0	0	0,58	0,1
14	0	0,999	-0,0873	0,000	0	0	0	1,6	0,6
15	0	1,034	-0,1571	0,000	0	0	0	1,27	0,23
16	0	1,031	-0,0524	0,000	0	0	0	0	0
17	0	1,064	-0,2269	0,000	0	0	0	5,61	2,2
18	0	0,981	0,0175	0,000	0	0	0	0	0
19	1	1,001	-0,0349	-0,100	0	-0,2	0,2	5,95	1,2
20	0	0,975	0,0349	0,000	0	0	0	0,77	0,01
21	0	0,996	-0,0349	0,000	0	0	0	0,81	0,23
22	0	1,05	0,0698	0,000	0	0	0	0,21	0,07
23	0	1,005	0,1047	0,000	0	0	0	0	0
24	0	1,023	0,0175	0,000	0	0	0	0,45	0,12
25	0	0,998	-0,0349	0,000	0	0	0	0,28	0,09
26	0	0,975	-0,0873	0,000	0	0	0	0,69	0,13
27	0	1,024	-0,2094	0,000	0	0	0	0,55	0,06
28	0	1,041	-0,1396	0,000	0	0	0	0	0
29	0	0,975	-0,4538	0,000	0	0	0	0	0
30	0	1,001	-0,4014	0,000	0	0	0	0	0
31	0	1,02	-0,1920	0,000	0	0	0	0,85	0,32
32	0	1,02	-0,2269	0,000	0	0	0	1,55	0,18
33	0	1,053	-0,1047	0,000	0	0	0	0	0
34	0	1,021	-0,2269	0,000	0	0	0	0,46	-0,21
35	0	1,029	-0,1745	0,000	0	0	0	0,86	0
36	0	1,044	-0,1222	0,000	0	0	0	0	0
37	0	1	-0,2967	0,000	0	0	0	0,39	0,09
38	0	1,008	-0,2967	0,000	0	0	0	1,95	0,29
39	0	1,021	-0,2618	0,000	0	0	0	0	0
40	0	1,034	-0,2094	0,000	0	0	0	0	0
41	0	0,977	-0,4014	0,000	0	0	0	0,58	0,12
42	0	1,001	-0,2793	0,000	0	0	0	0,41	0,19
43	0	1,047	-0,0524	0,000	0	0	0	0,92	0,26
44	0	1,025	-0,1396	0,000	0	0	0	-0,05	0,05
45	0	0,997	-0,2094	0,000	0	0	0	0,61	0,28
46	0	0,995	-0,3142	0,000	0	0	0	0,69	0,03
47	0	1,004	-0,2793	0,000	0	0	0	0,1	0,01
48	0	1,014	-0,2094	0,000	0	0	0	0,22	0,1
49	0	1,033	-0,1396	0,000	0	0	0	0,98	0,2
50	0	0,991	-0,1047	0,000	0	0	0	0,14	0,01
51	0	0,978	-0,0873	0,000	0	0	0	2,18	1,06
52	0	1,024	-0,1745	0,000	0	0	0	0	0
53	0	0,99	-0,0524	0,000	0	0	0	2,27	1,1
54	0	1,016	-0,0175	0,000	0	0	0	0	0
55	1	0,958	-0,3142	0,000	0	-0,25	0,25	0,7	0,3
56	0	0,948	-0,2269	0,000	0	0	0	0	0
57	0	0,962	-0,4538	0,000	0	0	0	0	0
58	0	0,951	-0,6109	0,000	0	0	0	0,56	0,2
59	0	0,979	-0,5236	0,000	0	0	0	1,16	0,38
60	0	0,969	-0,4712	0,000	0	0	0	0,57	0,19
61	0	0,977	-0,4538	0,000	0	0	0	2,24	0,71
62	0	0,996	-0,3840	0,000	0	0	0	0	0
63	1	0,963	-0,4712	0,000	0	-0,12	0,35	2,08	1,07
64	0	0,983	-0,4363	0,000	0	0	0	0,74	0,28
65	0	0,99	-0,4189	0,000	0	0	0	0	0
66	0	0,981	-0,4363	0,000	0	0	0	0,48	0,14
67	0	0,987	-0,4363	0,000	0	0	0	0,28	0,07
68	0	1,034	-0,3316	0,000	0	0	0	0	0
69	1	1,024	-0,2967	3,750	0	-2,4	2,4	0,37	0,13
70	0	0,987	-0,3142	0,000	0	0	0	0	0

71	0	0,99	-0,2443	0,000	0	0	0	0	0	
72	0	0,992	-0,1396	0,000	0	0	0	0	0	
73	0	1,015	-0,3665	0,000	0	0	0	0	0	
74	0	1,031	-0,1920	0,000	0	0	0	0,44	0	
75	0	1,027	-0,1920	0,000	0	0	0	0,66	0	
76	1	1,052	-0,1571	1,550	0	-0,11	0,96	0,17	0	
77	1	1,052	-0,1047	2,900	0	-1,53	1,53	0,16	0	
78	0	0,992	-0,1571	0,000	0	0	0	0,6	0	
79	0	1,018	-0,2269	0,000	0	0	0	0,4	0	
80	1	1	-0,2618	0,680	0	-0,3	0,56	0,67	0	
81	0	0,989	-0,3491	0,000	0	0	0	0,83	0	
82	0	1,006	-0,2443	0,000	0	0	0	0	0	
83	0	1	-0,2618	0,000	0	0	0	0,78	0	
84	0	1,028	-0,2094	0,000	0	0	0	0,32	0	
85	0	0,995	-0,2967	0,000	0	0	0	0,09	0	
86	0	1,022	-0,2269	0,000	0	0	0	0,5	0	
87	0	1,009	-0,2793	0,000	0	0	0	0,05	0	
88	1	0,99	-0,3491	1,170	0	-0,24	0,77	1,12	0	
89	0	0,974	-0,4538	0,000	0	0	0	0,31	0	
90	0	0,972	-0,4363	0,000	0	0	0	0,63	0	
91	0	0,972	-0,5061	0,000	0	0	0	0,2	0	
92	0	0,97	-0,4363	0,000	0	0	0	0,26	0	
93	0	0,974	-0,5061	0,000	0	0	0	0,18	0	
94	0	0,96	-0,2443	0,000	0	0	0	0	0	
95	0	1,024	-0,2269	0,000	0	0	0	0	0	
96	0	0,934	-0,0873	0,000	0	0	0	0	0	3,25
97	0	0,929	-0,0698	0,000	0	0	0	0,14	6,5	
98	1	1,043	0,0873	19,300	0	-5	15	0	0	
99	0	0,958	-0,1571	0,000	0	0	0	7,77	2,15	0,55
100	0	0,987	-0,2269	0,000	0	0	0	5,35	0,55	
101	0	0,972	-0,2443	0,000	0	0	0	2,29	0,12	
102	0	1	-0,3142	0,000	0	0	0	0,78	0,01	
103	1	1,023	-0,2269	2,400	0	-0,6	1,2	2,76	0,59	
104	1	1,01	-0,3142	0,000	0	-0,25	2	5,15	0,83	
105	0	0,997	-0,2269	0,000	0	0	0	0,58	0,05	
106	0	1	-0,1920	0,000	0	0	0	3,81	0,37	
107	0	1,002	-0,0873	0,000	0	0	0	0	0	
108	0	1,002	-0,0698	0,000	0	0	0	0	0	
109	0	1,019	0,1047	0,000	0	0	0	0	0	
110	0	0,986	0,1047	0,000	0	0	0	0	0	
111	0	1,004	0,0524	0,000	0	0	0	0	0	
112	0	1,001	-0,0873	0,000	0	0	0	0	0	
113	0	1,021	-0,1396	0,000	0	0	0	0	0	
114	0	1,019	-0,1222	0,000	0	0	0	1,69	0,42	
115	0	1,047	0,0349	0,000	0	0	0	0,55	0,18	
116	0	1,047	-0,0175	0,000	0	0	0	2,74	1	
117	1	1,054	-0,1047	-1,920	0	-1,25	3,5	8,27	1,35	
118	0	1,011	-0,0698	0,000	0	0	0	5,95	0,83	
119	0	1,042	-0,0524	0,000	0	0	0	3,88	1,15	
120	1	1,05	0	2,810	0	-0,5	0,75	1,45	0,58	
121	0	1,015	-0,0524	0,000	0	0	0	0,56	0,24	
122	1	1,043	0,0698	6,960	0	-1	3	0,89	0,35	
123	0	1,016	-0,0175	0,000	0	0	0	0	0	
124	0	1,008	0	0,000	0	0	0	0,24	0,14	
125	1	1,052	0,0698	0,840	0	-0,15	0,35	0	0	
126	1	1,052	0,1396	2,170	0	-0,5	1	0	0	
127	0	1,057	0	0,000	0	0	0	0,63	0,25	
128	1	1,073	0,0873	1,030	0	-0,25	0,5	0	0	
129	0	0,986	0,1047	0,000	0	0	0	0	0	
130	0	1,004	0,0698	0,000	0	0	0	0	0	
131	1	1,053	0,1571	3,720	0	-0,5	1,75	0,17	0,09	
132	1	1,043	0,1745	2,160	0	-0,5	0,9	0	0	
133	0	0,966	-0,0349	0,000	0	0	0	0,7	0,05	0,34
134	0	1,017	0,1222	0,000	0	0	0	2	0,5	
135	1	0,962	0,0873	0,000	0	-0,1	0,15	0,75	0,5	
136	0	0,984	-0,2094	0,000	0	0	0	1,23	-0,24	
137	0	0,998	-0,192	0,000	0	0	0	0	0	
138	0	0,986	-0,1745	0,000	0	0	0	0,33	0,16	
139	0	0,999	-0,2269	0,000	0	0	0	0	0	
140	0	1,036	0,1571	0,000	0	0	0	0,35	0,15	
141	0	0,991	0,3142	0,000	0	0	0	0,85	0,24	
142	0	1,041	0,0524	0,000	0	0	0	0	0	
143	0	0,983	0,1745	0,000	0	0	0	0	0	-2,12
144	0	1	0,4538	0,000	0	0	0	0	0	
145	0	0,997	0,5236	0,000	0	0	0	0	0	-1,03
146	0	0,971	-0,1222	0,000	0	0	0	3	0,96	
147	0	1,002	-0,0873	0,000	0	0	0	0	0	
148	0	0,987	-0,1222	0,000	0	0	0	0	0	
149	1	0,929	0	2,050	0	-0,4	0,9	4,82	2,05	
150	1	0,982	-0,1745	0,000	0	-0,5	1,5	7,64	2,91	

151	0	1,024	-0,1047	0,000	0	0	0	0,26	0	
152	0	0,983	-0,2269	0,000	0	0	0	1,63	0,43	0,53
153	0	1,062	-0,0524	0,000	0	0	0	0	0	
154	0	0,972	-0,1222	0,000	0	0	0	1,76	0,83	
155	1	1,052	0,0873	2,280	0	-0,45	0,9	0,05	0,04	
156	1	1,007	0,0175	0,840	0	-0,15	0,35	0,28	0,12	
157	0	0,939	-0,1222	0,000	0	0	0	4,27	1,74	
158	0	0,969	-0,1571	0,000	0	0	0	0,74	0,29	0,45
159	0	0,979	-0,0524	0,000	0	0	0	0,69	0,49	
160	0	1,051	-0,0175	0,000	0	0	0	0,73	0	
161	0	1,044	-0,0698	0,000	0	0	0	2,41	0,89	
162	0	0,971	0,1222	0,000	0	0	0	0,4	0,04	
163	0	1,038	-0,1222	0,000	0	0	0	1,37	0,17	
164	1	1,052	-0,0698	2,000	0	-0,5	0,8	0	0	
165	1	1,065	0,0349	12,000	0	-1	4	0,6	0,24	
166	1	1,065	0,0175	12,000	0	-1	4	0,6	0,24	
167	0	1,053	-0,0175	0,000	0	0	0	1,83	0,44	
168	0	0,997	-0,4538	0,000	0	0	0	0,07	0,02	
169	1	1,055	-0,3665	4,750	0	-3	3	0	0	-1,5
170	1	1,043	0,2094	19,730	0	-10	10	4,89	0,53	
171	0	0,937	-0,192	0,000	0	0	0	8	0,72	
172	0	0,989	-0,4538	0,000	0	0	0	0	0	
173	0	1,048	-0,3316	0,000	0	0	0	0	0	
174	0	1,035	-0,3665	0,000	0	0	0	0	0	
175	0	0,969	-0,4363	0,000	0	0	0	0,1	0,03	
176	0	0,99	-0,4189	0,000	0	0	0	0,43	0,14	
177	1	1,014	-0,3665	4,240	0	-2,6	2,6	0,64	0,21	
178	0	0,952	-0,4538	0,000	0	0	0	0,35	0,12	
179	0	0,954	-0,4538	0,000	0	0	0	0,27	0,12	
180	0	0,969	-0,4712	0,000	0	0	0	0,41	0,14	
181	0	0,99	-0,4363	0,000	0	0	0	0,38	0,13	
182	0	1,003	-0,384	0,000	0	0	0	0,42	0,14	
183	0	0,971	-0,4538	0,000	0	0	0	0,72	0,24	
184	0	0,983	-0,4538	0,000	0	0	0	0	-0,05	
185	0	0,999	-0,4712	0,000	0	0	0	0,12	0,02	
186	0	1,013	-0,4712	0,000	0	0	0	-0,21	-0,14	
187	0	0,992	-0,4538	0,000	0	0	0	0,07	0,02	
188	0	0,999	-0,4538	0,000	0	0	0	0,38	0,13	
189	0	0,978	-0,4189	0,000	0	0	0	0	0	
190	0	1,001	-0,4014	0,000	0	0	0	0,96	0,07	
191	0	1,013	-0,4014	0,000	0	0	0	0	0	
192	1	1,009	-0,2094	2,720	0	-1,5	1,5	0	0	
193	0	0,991	-0,3142	0,000	0	0	0	0,22	0,16	
194	0	0,986	-0,3491	0,000	0	0	0	0,47	0,26	
195	0	0,975	-0,4014	0,000	0	0	0	1,76	1,05	
196	0	1,021	-0,384	0,000	0	0	0	1	0,75	
197	0	1,007	-0,4014	0,000	0	0	0	1,31	0,96	
198	0	1,055	-0,3665	0,000	0	0	0	0	0	
199	1	1,008	-0,384	1,000	0	-0,6	0,6	2,85	1	
200	1	1	-0,384	4,500	0	-3,2	3,2	1,71	0,7	
201	1	1,049	-0,4014	2,500	0	-3	3	3,28	1,88	
202	0	0,996	-0,4014	0,000	0	0	0	4,28	2,32	
203	0	1	-0,384	0,000	0	0	0	1,73	0,99	
204	0	0,945	-0,192	0,000	0	0	0	4,1	0,4	
205	0	1,018	-0,384	0,000	0	0	0	0	0	
206	1	1	-0,4712	3,030	0	-3	3	5,38	3,69	
207	0	1,042	-0,3665	0,000	0	0	0	2,23	1,48	
208	0	1,049	-0,3491	0,000	0	0	0	0,96	0,46	
209	1	1,039	-0,2443	3,450	0	-2,5	2,5	0	0	
210	0	1,053	-0,3665	0,000	0	0	0	1,59	1,07	
211	0	1,041	-0,4014	0,000	0	0	0	4,48	1,43	
212	1	1	-0,4538	3,000	0	-5	5	4,04	2,12	
213	0	1,038	-0,3665	0,000	0	0	0	5,72	2,44	
214	0	1,009	-0,3665	0,000	0	0	0	2,69	1,57	
215	1	1,016	-0,2618	6,000	0	-3	3	0	0	
216	0	1,055	-0,3665	0,000	0	0	0	0	0	
217	1	1,009	-0,3665	2,500	0	-2	2	2,55	1,49	-1,5
218	1	1	-0,2793	5,500	0	-4	4	0	0	
219	0	1,023	-0,3491	0,000	0	0	0	0	0	-1,4
220	1	1,049	-0,2793	5,750	0	-6	6	0	0	
221	1	0,992	-0,3142	1,700	0	-0,4	1	0	0	
222	1	1,009	-0,3316	0,840	0	-0,4	0,8	0,08	0,03	
223	0	0,992	-0,3491	0,000	0	0	0	0	0	
224	0	0,971	-0,3665	0,000	0	0	0	0,61	0,3	
225	0	0,965	-0,384	0,000	0	0	0	0,77	0,33	
226	0	0,968	-0,384	0,000	0	0	0	0,61	0,3	
227	0	0,976	-0,4363	0,000	0	0	0	0,29	0,14	0,46
228	0	0,975	-0,4538	0,000	0	0	0	0,29	0,14	
229	0	1,019	-0,4189	0,000	0	0	0	-0,23	-0,17	
230	0	1,025	-0,3491	0,000	0	0	0	-0,33	-0,29	

231	0	1,015	0,0175	0,000	0	0	0	1,16	-0,24	
232	0	1,014	-0,0349	0,000	0	0	0	0,02	-0,13	
233	0	1	-0,3142	0,000	0	0	0	0,02	-0,04	
234	0	0,981	-0,2443	0,000	0	0	0	-0,15	0,26	
235	0	0,975	-0,4014	0,000	0	0	0	0,25	-0,01	
236	0	0,942	-0,5934	0,000	0	0	0	1,45	-0,35	
237	0	0,972	-0,6632	0,000	0	0	0	0,28	-0,2	
238	0	0,96	-0,5061	0,000	0	0	0	0,14	0,02	
239	0	1	-0,4014	0,000	0	0	0	-0,11	-0,01	
240	0	0,977	-0,4887	0,000	0	0	0	0,5	0,17	
241	0	0,958	-0,5061	0,000	0	0	0	0,3	0,01	
242	0	1,03	-0,2967	0,000	0	0	0	-1,14	0,77	
243	0	1,012	0,0698	0,000	0	0	0	1	0,29	
244	0	1,024	-0,1396	0,000	0	0	0	-1	0,34	
245	0	1,012	-0,2618	0,000	0	0	0	0	0	
246	0	0,965	-0,2618	0,000	0	0	0	0	0	
247	1	1,05	0,192	4,670	0	-2,1	2,1	0	0	
248	1	1,05	0,2094	6,230	0	-2,8	2,8	0	0	
249	1	1,032	0,2443	12,100	0	-4,2	4,2	0	0	
250	1	1,014	0,0873	2,340	0	-1	1	0	0	
251	1	1,05	0,2094	3,720	0	-2,24	2,24	0	0	
252	1	1,05	-0,1745	3,300	0	0	3,5	0	0	
253	1	1,05	0,1047	1,850	0	0	1,2	0	0	
254	1	1,029	0,2269	4,100	0	-2,24	2,24	0	0	
255	1	1,049	0,0349	5,000	0	-2	2	0	0	
256	1	1,014	-0,2443	0,370	0	0	0,42	0	0	
257	2	1,05	0	0,000	0	-99,99	99,99	0	0	
258	1	0,996	-0,1396	0,450	0	0	0,25	0	0	
259	1	1,021	-0,0524	1,650	0	-0,9	0,9	0	0	
260	1	1,014	0,0349	4,000	0	-1,5	1,5	0	0	
261	1	1,001	0,1047	4,000	0	0	1,5	0	0	
262	1	0,989	-0,4363	1,160	0	0	0,87	0	0	
263	1	1,05	0,3316	12,920	0	-1	6	0	0	
264	1	1,05	0,0524	7,000	0	-1,25	3,25	0	0	
265	1	1,014	0,6109	5,530	0	-2	3	0	0	
266	0	1,011	-0,192	0,000	0	0	0	0	0	
267	1	0,994	-0,3316	-0,040	0	-0,02	0,02	0	0	
268	0	0,983	-0,3491	0,000	0	0	0	0,03	0,01	0,02
269	0	0,976	-0,3491	0,000	0	0	0	0,01	0	
270	0	1,011	-0,192	0,000	0	0	0	0	0	
271	0	1,002	-0,2967	0,000	0	0	0	0	0	
272	0	0,991	-0,3316	0,000	0	0	0	0	0	
273	0	1,002	-0,2967	0,000	0	0	0	0	0	
274	0	0,988	-0,3316	0,000	0	0	0	0,05	0,02	
275	0	0,964	-0,384	0,000	0	0	0	0,02	0,01	
276	0	0,974	-0,3316	0,000	0	0	0	0	0	
277	0	0,97	-0,3665	0,000	0	0	0	0,01	0	
278	0	0,964	-0,3491	0,000	0	0	0	0	0	
279	0	0,965	-0,3491	0,000	0	0	0	0	0	
280	0	0,931	-0,4363	0,000	0	0	0	0,02	0,01	
281	0	0,944	-0,4189	0,000	0	0	0	0,01	0	
282	0	0,928	-0,4363	0,000	0	0	0	0,02	0,01	
283	0	0,997	-0,3665	0,000	0	0	0	0,02	0,01	0,02
284	0	0,95	-0,4014	0,000	0	0	0	0,02	0,01	
285	0	0,959	-0,4014	0,000	0	0	0	0,03	0,01	
286	0	0,957	-0,4014	0,000	0	0	0	0,02	0,01	
287	0	0,939	-0,4189	0,000	0	0	0	0,03	0,01	
288	0	0,963	-0,3665	0,000	0	0	0	0,01	0	
289	0	0,95	-0,384	0,000	0	0	0	0,01	0	
290	0	0,964	-0,3665	0,000	0	0	0	0,02	0,01	
291	0	0,978	-0,3491	0,000	0	0	0	0	0	
292	1	1	-0,3316	-0,360	0	-0,17	0,17	0	0	
293	0	0,978	-0,2967	0,000	0	0	0	0,3	0,23	
294	1	1	-0,3142	-0,260	0	-0,13	0,13	0	0	
295	1	1	-0,1222	0,500	0	-0,38	0,38	0	0	
296	1	1	-0,1396	0,080	0	-0,06	0,06	0	0	
297	0	0,975	-0,3491	0,000	0	0	0	0,01	0	
298	0	0,98	-0,3491	0,000	0	0	0	0,01	0	
299	0	0,979	-0,3316	0,000	0	0	0	0,04	0,01	
300	0	1,04	-0,3142	0,000	0	0	0	0,01	0	

Dados das linhas					
Linha	g	b	b^{sh}	t	
31	266	384,6154	-1923,0769	0,0000	0,9921
266	270	62,0636	-271,5283	0,0000	
266	271	0,1275	-2,2823	0,0000	1,0352
266	273	0,0857	-1,5361	0,0000	1,0215
270	292	0,1122	-2,6626	0,0000	1,0650
270	293	0,1122	-2,6626	0,0000	
270	294	0,1103	-2,6235	0,0000	
270	295	0,0000	-6,5789	0,0000	
270	296	0,0000	-1,2500	0,0000	
271	272	0,8694	-3,8576	0,0000	
271	268	0,4349	-1,9291	0,0000	
271	268	0,4349	-1,9291	0,0000	
273	267	0,3944	-2,2406	0,0000	
273	267	0,3944	-2,2406	0,0000	
267	274	6,8619	-8,9831	0,0000	
274	276	0,5189	-0,4467	0,0000	
274	275	0,0546	-0,3466	0,0000	
267	277	0,0478	-0,3030	0,0000	
276	278	0,0417	-0,2465	0,0000	
276	279	0,0455	-0,2689	0,0000	
272	297	0,0490	-0,3298	0,0000	
272	298	0,0712	-0,4755	0,0000	
272	268	0,8722	-3,8562	0,0000	
268	280	0,0329	-0,2088	0,0000	
268	281	0,0315	-0,1998	0,0000	
268	282	0,0320	-0,2030	0,0000	
268	291	7,7859	-6,6992	0,0000	
291	269	16,6370	-12,5538	0,0000	
269	288	0,0594	-0,3983	0,0000	
269	289	0,0343	-0,1767	0,0000	
269	290	0,0538	-0,5835	0,0000	
268	283	0,0666	-0,7126	0,0000	
268	284	0,0445	-0,2822	0,0000	
268	285	0,0547	-0,5927	0,0000	
268	286	0,0569	-0,3804	0,0000	
268	287	0,0490	-0,3298	0,0000	
273	299	0,2272	-0,9557	0,0000	
294	300	0,0000	-1,3333	0,0000	
1	5	27,0270	-162,1622	0,0000	
2	6	12,1951	-109,7561	0,0000	
2	8	7,8431	-35,2941	0,0270	
3	7	0,0000	-333,3333	0,0000	
3	18	1,6580	-14,3005	0,0695	
3	129	20,0000	-140,0000	0,0000	
4	16	5,4795	-52,0548	0,5635	
5	9	6,8415	-33,0673	0,0090	
7	12	12,1951	-109,7561	0,0350	
7	110	20,0000	-140,0000	0,0070	
8	11	3,5048	-16,0410	0,0165	
8	14	6,7253	-21,7279	0,0405	
9	11	7,8431	-35,2941	0,0065	
11	13	6,5574	-27,8689	0,0090	
12	20	8,7336	-65,5022	0,0590	
13	19	5,0336	-28,5235	0,0080	
14	15	7,1429	-21,4286	0,0485	
15	31	0,9889	-3,7731	0,0605	
15	74	1,3884	-3,4780	0,0175	
15	75	0,6809	-2,5747	0,0240	
16	36	4,0984	-45,0820	0,6400	
18	20	6,0976	-54,8780	0,0180	
18	72	1,9790	-12,1784	0,0755	
19	21	11,8959	-24,5353	0,0075	
19	26	1,7532	-4,7260	0,0490	
20	23	3,4130	-29,0102	0,1400	
21	22	3,4609	-7,3877	0,0250	
22	24	10,0956	-20,7226	0,0090	
23	231	1,4980	-14,5517	0,0670	
24	25	5,6809	-11,2040	0,0170	
25	26	2,7397	-7,3059	0,0325	
25	232	2,2935	-6,9337	0,0070	
27	28	0,0000	-15,8730	0,0000	
27	32	16,6389	-79,8669	0,0065	
27	34	6,8415	-33,0673	0,0100	
27	35	3,6881	-22,6554	0,0130	
28	36	15,3846	-123,0769	0,0210	
29	60	3,2051	-16,0256	0,0040	
29	63	25,8621	-60,3448	0,0010	

29	64	10,6270	-30,8183	0,0015
30	73	5,3691	-36,2416	0,0215
31	32	3,5196	-20,6775	0,0040
31	34	4,8035	-13,9738	0,0035
31	35	7,1633	-25,7880	0,0100
31	43	2,4818	-11,8248	0,0240
31	74	1,3615	-3,3903	0,0165
31	75	2,5630	-6,9255	0,0080
32	35	5,5827	-25,8200	0,0100
32	37	3,7240	-10,1245	0,0200
33	36	14,5208	-154,8887	0,2020
34	42	1,0659	-6,3135	0,0110
35	36	0,0000	-34,4828	0,0000
35	43	1,5968	-4,6922	0,0100
35	44	3,4902	-10,0203	0,0180
36	40	10,0000	-70,0000	0,4030
37	38	4,4369	-12,2867	0,0175
37	42	1,2231	-3,3733	0,0160
37	46	7,6923	-23,0769	0,0080
38	41	3,4682	-10,7900	0,0195
38	47	3,5714	-10,7143	0,0185
39	52	4,0462	-23,6994	0,1560
39	62	3,0030	-18,0180	0,2055
40	68	2,7949	-23,4768	0,3450
41	61	2,1914	-6,1107	0,0365
41	92	2,7262	-7,4811	0,0065
42	87	5,5941	-13,8733	0,0035
43	44	3,1642	-9,5948	0,0215
44	45	2,7925	-8,2264	0,0245
45	48	3,7873	-11,2218	0,0180
46	47	4,1989	-12,2607	0,0175
47	48	2,9576	-8,7037	0,0235
48	49	1,9826	-5,1546	0,0410
49	50	5,4016	-9,3941	0,0180
49	55	0,5069	-1,7121	0,0355
50	51	11,8890	-34,3461	0,0025
51	53	11,5607	-75,1445	0,0075
52	54	2,0901	-15,0952	0,2425
54	56	1,4183	-9,3077	0,1015
54	123	20,0000	-140,0000	0,0065
55	236	0,8750	-5,6791	0,0130
57	190	0,9039	-4,1117	0,0140
57	66	1,8716	-5,7615	0,0115
58	59	2,9028	-9,0711	0,0310
58	237	1,2798	-7,8963	0,0140
59	60	1,9505	-7,0976	0,0340
59	61	3,1030	-9,0353	0,0235
60	64	2,2805	-11,0224	0,0055
60	238	0,6754	-5,0918	0,0000
61	63	5,6911	-15,4472	0,0150
61	66	5,9445	-17,1731	0,0090
62	73	5,3691	-36,2416	0,0250
62	240	0,6918	-4,8694	0,1895
63	64	7,6010	-20,4276	0,0020
64	65	27,0270	-162,1622	0,0035
64	67	2,7473	-13,7363	0,0190
64	239	1,1201	-3,3640	0,0145
64	241	1,5227	-4,1416	0,0110
65	66	11,5385	-42,3077	0,0055
65	69	0,0000	-27,7778	0,0000
66	190	0,6581	-2,4929	0,0255
67	190	1,8436	-8,9667	0,0290
68	173	3,1782	-29,9659	0,2650
68	174	3,1782	-29,9659	0,2650
70	71	1,9231	-15,3846	0,0640
71	72	1,3647	-10,5766	0,0915
71	234	2,5641	-20,5128	0,0460
74	76	2,8711	-7,2694	0,0070
75	77	1,0224	-5,5591	0,0120
76	78	1,3512	-3,4185	0,0155
76	79	3,4305	-12,0069	0,0195
77	84	0,9006	-6,8256	0,0085
77	86	1,9422	-10,5107	0,0060
78	79	1,0708	-1,6448	0,0215
79	82	6,6808	-16,0947	0,0035
79	83	3,8353	-9,2854	0,0060
79	84	2,7926	-7,0980	0,0075
80	82	5,1370	-13,6986	0,0035
80	83	2,1523	-7,6597	0,0075
81	87	2,5197	-6,4182	0,0085

81	88	100,0000	-200,0000	0,0010
81	89	0,3534	-2,7799	0,0220
81	90	1,5255	-5,3088	0,0110
82	83	9,4118	-22,3529	0,0020
83	85	7,2330	-10,7653	0,0135
84	86	4,5184	-14,7444	0,0040
85	88	3,3516	-5,7329	0,0220
85	233	2,5416	-7,1627	0,0075
86	87	1,5213	-11,1562	0,0055
86	90	0,8503	-2,1663	0,0235
88	235	1,5183	-4,2675	0,0130
89	90	1,8062	-4,7477	0,0105
89	92	1,1754	-3,2206	0,0155
89	93	0,6553	-2,3628	0,0180
90	91	0,7743	-2,2031	0,0250
91	93	8,2806	-20,4579	0,0030
94	101	8,8026	-48,6588	0,0020
95	99	0,1817	-9,5294	0,0005
96	97	30,7692	-553,8462	0,0085
97	98	0,0000	-36,9004	0,0000
97	245	0,0000	-1,6226	0,0000
245	99	0,0000	2,7049	0,0000
97	100	0,0259	-3,4303	0,0000
98	99	0,0000	-29,4985	0,0000
98	100	0,0000	-17,1821	0,0000
101	102	1,3144	-3,8131	0,0145
101	104	0,6705	-2,5492	0,0270
102	103	2,7964	-8,3581	0,0585
102	104	2,1384	-6,3523	0,0745
104	105	1,5446	-50,7144	0,0000
105	106	3,5223	-24,1782	0,1250
105	108	0,9301	-8,9449	0,0925
105	111	0,6855	-5,8438	0,1605
105	136	1,9802	-19,8020	0,1650
105	137	2,6069	-18,2143	0,1675
105	148	1,2080	-8,4708	0,0855
106	107	1,7538	-17,1517	0,0475
106	113	4,2499	-29,1421	0,1040
106	147	1,7538	-17,1517	0,0475
107	109	1,2922	-12,8062	0,0630
107	112	6,8556	-50,8899	0,0150
108	109	1,3303	-13,1634	0,0610
108	112	5,9937	-53,0867	0,0150
109	111	5,8928	-60,4007	0,0130
109	130	6,1787	-59,9695	0,0130
109	146	1,2439	-12,4864	0,0635
109	147	1,2566	-12,6301	0,0625
112	116	12,1620	-83,7030	0,1445
112	147	6,8556	-50,8899	0,0150
112	148	5,9937	-53,0867	0,0150
112	150	1,9598	-98,9711	0,0000
113	114	4,9032	-33,4101	0,0900
113	163	2,6588	-25,9746	0,1290
114	115	2,2956	-15,7161	0,1925
115	116	1,5476	-11,0186	0,2700
115	131	3,6074	-25,1230	0,4765
116	119	11,3456	-86,2265	0,1420
116	160	42,3370	-287,8916	0,0105
116	165	3,0635	-66,0832	0,0630
116	167	42,3370	-287,8916	0,0105
118	151	1,0467	-4,1867	0,0405
119	120	1,6823	-11,7202	0,0615
119	121	1,1652	-8,6775	0,3420
119	124	0,4045	-2,9120	0,2595
119	125	0,4588	-3,2341	0,2315
119	126	0,3933	-2,8086	0,2690
119	161	16,0692	-110,0124	0,0595
120	125	0,5570	-4,3396	0,1710
121	122	1,8265	-17,3516	0,3835
122	124	1,2435	-12,8160	0,0595
122	128	1,5076	-10,7905	0,0675
124	125	2,4081	-16,6587	0,0435
124	128	0,9354	-6,4832	0,1115
125	126	2,8148	-19,4336	0,0370
127	157	2,0098	-5,8643	0,0370
127	158	0,7953	-2,2734	0,0380
131	132	1,4658	-10,2395	0,0705
132	140	6,3977	-33,5004	0,0950
133	135	1,3389	-2,4240	0,0200
133	162	0,8061	-3,0622	0,0225

134	140	3,2863	-16,9692	0,1940
136	138	8,2747	-101,3653	0,0345
137	138	3,5337	-34,7281	0,0950
137	139	3,2186	-21,8473	0,1385
141	143	2,2461	-30,5095	0,1180
141	144	2,9827	-40,5972	0,8310
142	143	1,6533	-19,3137	1,7985
144	145	1,3216	-81,2793	0,0000
146	148	5,6236	-55,6111	0,0145
151	152	0,2799	-2,0262	0,0315
151	153	1,0740	-4,2537	0,0155
152	153	0,6870	-2,8357	0,0245
152	154	0,7407	-3,0780	0,0215
152	155	0,6333	-1,7661	0,0345
154	155	0,6473	-2,5965	0,0240
154	158	0,7584	-3,0453	0,0270
155	156	3,3456	-11,0498	0,0235
156	157	2,8956	-11,0474	0,0250
157	158	1,3499	-5,0284	0,0145
157	159	6,9459	-33,0217	0,0420
160	117	0,9799	-49,4855	0,0000
160	166	5,7929	-120,2028	0,0575
163	164	4,1220	-40,3957	0,0820
165	167	9,4023	-115,5138	0,0575
166	167	9,4023	-115,5138	0,0575
167	117	0,9799	-49,4855	0,0000
168	187	3,2628	-9,3929	0,0000
168	188	6,6890	-10,0334	0,0000
169	210	80,0000	-440,0000	3,1000
169	219	0,0000	-36,3636	0,0000
170	171	1,2970	-20,7523	0,0000
171	204	23,5294	-105,8824	0,0000
172	184	7,5075	-10,5105	0,0000
172	187	2,6040	-6,8898	0,0000
173	198	3,7459	-34,5590	0,2500
173	242	1,8957	-28,0409	0,1800
174	198	3,7459	-34,5590	0,2500
175	176	7,7951	-22,2717	0,0020
175	189	4,0209	-10,8565	0,0050
176	177	2,7027	-16,2162	0,0045
176	190	8,2192	-21,9178	0,0030
177	181	0,5689	-1,1790	0,0000
177	182	4,0965	-20,9376	0,0125
177	189	3,4910	-12,7422	0,0040
177	190	2,6080	-8,3608	0,0160
178	179	3,1665	-5,6248	0,0045
178	189	3,3322	-8,4972	0,0025
179	189	3,5302	-5,5786	0,0070
180	183	2,5376	-3,7450	0,0000
182	190	2,7925	-16,4758	0,0040
183	184	6,8249	-10,0890	0,0000
184	185	1,0409	-1,5373	0,0000
185	186	5,2225	-6,6533	0,0000
185	187	1,0220	-1,7927	0,0000
191	194	2,2254	-12,4559	0,0430
192	193	1,7238	-26,2024	0,0000
193	194	4,9255	-53,6014	0,0100
193	221	12,6167	-90,8403	0,0010
194	195	7,0284	-38,8905	0,0130
195	196	1,6090	-19,9912	0,0090
196	197	0,0000	-21,9298	0,0000
196	198	1,5947	-56,4521	0,0100
196	199	1,7224	-25,1987	0,4160
198	216	90,0901	-540,5405	2,6000
199	197	1,5703	-20,5411	0,2150
199	200	1,1478	-33,8594	0,2515
199	217	67,4536	-193,9292	0,2010
200	202	168,5393	-730,3371	0,5000
201	216	0,5295	-19,4408	0,1650
203	204	2,3832	-15,2526	0,2400
203	205	27,4487	-117,0182	0,4300
204	170	0,2687	-16,3890	0,0000
205	210	1,1119	-47,1436	0,0000
206	210	0,4038	-21,1787	0,0930
207	208	23,9596	-109,7100	0,6400
207	210	0,3089	-10,8964	0,0000
207	213	1,5641	-34,6516	0,4050
208	169	0,0000	-15,9744	0,0000
210	211	4,1973	-144,8059	0,6820
210	216	270,2703	-1621,6216	1,7850

211	212	0,7218	-20,5933	0,0000	
213	214	0,2981	-38,6077	0,0720	
213	216	0,8106	-36,7468	0,0000	
214	217	500,0000	-1500,0000	0,4000	
220	216	2,1061	-64,8667	0,0000	
219	230	16,1464	-231,4316	0,0045	
221	224	1,1219	-11,6428	0,0000	
221	226	2,0924	-13,5071	0,0000	
222	223	8,9340	-24,9729	0,0000	
222	224	0,9700	-5,3679	0,0000	
223	225	5,7080	-16,1287	0,0000	
224	225	2,8012	-13,0604	0,0000	
224	226	0,7793	-4,5868	0,0000	
225	226	1,5554	-7,4577	0,0000	
226	227	2,5792	-7,3219	0,0000	
227	228	3,1029	-8,8754	0,0000	
228	229	1,6092	-4,8512	0,0000	
3	1	0,0000	-19,2308	0,0000	1,0560
3	2	0,0000	-19,2308	0,0000	1,0460
3	4	0,0000	-200,0000	0,0000	1,0299
7	5	0,0000	-25,6410	0,0000	1,0549
7	6	0,0000	-25,6410	0,0000	1,0428
10	11	0,0000	-11,2360	0,0000	0,9560
12	10	0,0000	-18,8679	0,0000	
15	17	14,4391	-23,1473	0,0000	1,0460
16	15	0,6920	-26,2976	0,0000	1,0299
20	19	0,0000	-71,4286	0,0000	
23	22	0,0000	-15,6250	0,0000	1,0604
30	29	0,0000	-21,2766	0,0000	0,9901
39	38	0,0000	-50,0000	0,0000	0,9921
39	40	0,0000	-47,6190	0,0000	1,0000
54	53	0,0000	-16,9492	0,0000	1,0256
55	56	0,0000	-26,3158	0,0000	0,9833
61	62	0,0000	-40,9836	0,0000	1,0000
68	73	0,0000	-50,0000	0,0000	1,0000
70	81	0,0000	-20,8333	0,0000	1,0000
71	83	0,0000	-20,8333	0,0000	1,0000
72	78	0,0000	-21,7391	0,0000	0,9852
93	186	0,0000	-6,7114	0,0000	1,0341
95	103	15,7671	-52,7592	0,0000	
100	94	0,0000	-35,7143	0,0000	0,9524
101	136	1,3141	-51,2484	0,0000	1,0000
109	110	0,0000	-55,5556	0,0000	0,9506
109	129	0,0000	-71,4286	0,0000	0,9506
111	149	0,6184	-24,8602	0,0000	
120	153	0,6590	-16,5575	0,0000	1,0256
121	154	0,9655	-20,0338	-0,0435	1,0000
122	123	0,0000	-12,0048	0,0000	0,9662
122	127	0,9433	-26,9211	0,0000	1,0460
124	159	1,5083	-54,9036	0,0000	1,0000
130	149	0,6503	-25,4936	0,0000	
132	162	0,6601	-15,6216	0,0000	0,9320
134	135	1,2195	-39,0244	0,0000	
138	96	0,0000	-62,5000	0,0000	0,9524
139	103	0,7645	-25,2294	0,0000	
142	116	0,8806	-26,0119	-0,0285	1,0204
143	134	1,6841	-43,2244	-0,0165	1,046
161	118	1,7472	-76,2959	0,0000	0,952
168	189	0,0000	-3,9683	0,0000	0,971
172	175	0,0000	-4,2194	0,0000	0,971
174	191	0,5969	-27,3094	0,0000	1,015
179	227	0,0000	-4,5455	0,0000	1,000
180	57	0,0000	-10,2041	0,0000	0,971
181	190	0,0000	-7,8125	0,0000	0,990
183	246	0,4760	-4,8553	-0,0060	0,952
188	177	0,5753	-4,6685	0,0000	
190	191	19,0066	-77,2935	0,0000	1,000
197	198	0,7973	-28,2261	-0,0050	1,031
202	203	3,1439	-51,0886	-0,1820	1,000
208	209	0,9064	-30,0932	0,0000	
213	215	1,9512	-62,4390	0,0000	
217	218	1,9512	-62,4390	0,0000	
175	246	0,2500	-49,9988	0,0000	
98	243	1,8868	-43,3962	0,0000	1,0
99	244	0,0000	-43,4783	0,0000	1,1
248	2	4,6694	-68,1733	0,0000	
249	3	0,0000	-95,2381	0,0000	
260	53	0,0000	-42,0168	0,0000	
261	54	0,0000	-31,1526	0,0000	
265	145	0,0000	-64,9351	0,0000	

254	23	0,0000	-34,6021	0,0000
247	1	0,0000	-51,2821	0,0000
263	109	0,0000	-51,8135	0,0000
250	11	0,0000	-52,0833	0,0000
253	22	0,0000	-43,4783	0,0000
257	43	0,0000	-80,6452	0,0000
264	118	0,0000	-59,8802	0,0000
251	12	0,0000	-32,0513	0,0000
252	17	0,0000	-60,6061	0,0000
255	33	0,0000	-31,6456	0,0000
259	49	0,0000	-18,6916	0,0000
256	38	0,0000	-5,5006	0,0000
258	48	0,0000	-5,0994	0,0000
262	59	0,0000	-14,4928	0,0000
