**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

Yuri Cândido da Silva Ribeiro

**Estimativa da Região de Estabilidade via Funções
Energia Generalizadas**

São Carlos

2017

Yuri Cândido da Silva Ribeiro

**Estimativa da Região de Estabilidade via Funções
Energia Generalizadas**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas Elétricos de Potência

Orientador: Prof. Dr. Luís Fernando Costa Alberto

Trata-se da versão corrigida da tese. A versão original se encontra disponível na EESC/USP que aloja o Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica.

**São Carlos
2017**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

R484e Ribeiro, Yuri Cândido da Silva
 Estimativa da Região de Estabilidade via Funções
Energia Generalizadas / Yuri Cândido da Silva Ribeiro;
orientador Luís Fernando Costa Alberto. São Carlos,
2017.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas
Elétricos de Potência -- Escola de Engenharia de São
Carlos da Universidade de São Paulo, 2017.

1. Função Energia Generalizada. 2. Região de
Estabilidade. 3. Região de Atração. 4. CUEP. 5. Closest
UEP. 6. Sum of Squares. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **YURI CÂNDIDO DA SILVA RIBEIRO**.

Título da tese: "Estimativa da região de estabilidade via funções energia generalizadas".

Data da defesa: 25/08/2017.

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**
(Orientador)
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Associado **Paulo Sergio Pereira da Silva**
(Escola Politécnica/EP-USP)

APROVADO

Profa. Dra. **Grace Silva Deaecto**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Aprovado

Prof. Dr. **Fabiolo Moraes Amaral**
(Instituto Federal da Bahia/IFBA)

APROVADO

Prof. Associado **Daniel Smania Brandão**
(Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação/ICMC)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica:
Prof. Associado **Luis Fernando Costa Alberto**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Luis Fernando Costa Alberto**

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer à minha família por todo o apoio que me foi conferido durante a minha formação pessoal e profissional. Aos meus pais, Celina e Manoel, por terem se preocupado em me fornecer uma base consistente de valores sobre os quais pude construir minha personalidade. Ao meu irmão Ney pelo companheirismo tanto nas horas de lazer quanto nas horas de estudo.

À minha esposa Amanda pela dedicação, compreensão e ajuda durante a elaboração deste trabalho. Sua companhia me trouxe força e disposição nos momentos difíceis. Sem ela, nada teria o mesmo brilho.

Agradeço ao prof. Luis por sua orientação e sua disposição em conduzir discussões frutíferas e repletas de ideias que contribuíram de maneira fundamental para o resultado deste trabalho.

Deixo registrado o meu agradecimento à Tecumseh do Brasil Ltda. por todo o suporte que me foi conferido durante a elaboração deste trabalho e pela consciência da importância da formação científica de seus colaboradores e do contato com a universidade.

Agradeço a todos os professores e funcionários desta instituição e de todas pelas quais passei pois, certamente, todos contribuíram de forma importante para a minha formação pessoal e acadêmica.

“Aqueles que se enamoram da prática sem teoria são como navegadores que entram em um navio sem leme nem bússola, nunca tendo certeza do seu destino.”

Leonardo da Vinci

RESUMO

RIBEIRO, Y. C. S. **Estimativa da Região de Estabilidade via Funções Energia Generalizadas**. 2017. 142p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

Neste trabalho são desenvolvidos métodos computacionais para estimar a região de estabilidade e parte relevante da fronteira da região de estabilidade de conjuntos atrativos de sistemas dinâmicos não lineares. Tais métodos são baseados na teoria das Funções Energia Generalizadas (FEG) e, portanto, podem ser aplicados a uma classe mais ampla de problemas quando comparados aos métodos baseados em Função Energia (FE). Os fundamentos teóricos desenvolvidos neste trabalho e que dão suporte aos métodos propostos garantem que as estimativas obtidas sejam sempre conservadoras (no sentido de que elas são sempre subconjuntos da região de estabilidade verdadeira) e, portanto, possuam elevado grau de confiança ao concluir sobre a estabilidade do sistema. Os métodos apresentados consistem em extensões dos métodos *Closest UEP* e *CUEP*, utilizados na análise de estabilidade transitória de sistemas elétricos de potência, para sistemas que admitem FEG. Embora os métodos *Closest UEP* e *CUEP* forneçam estimativas de forma rápida e precisa, sua aplicação está limitada à existência de uma Função Energia (FE) para o sistema, o que consiste em uma forte limitação. Muitos sistemas não admitem FE e, mesmo quando se pode provar a existência de uma FE, a impossibilidade de exibi-la impede a aplicação dos métodos citados. Outra contribuição deste trabalho consiste em um método computacional que permite a obtenção de uma FEG para sistemas polinomiais. O método apresentado também é aplicado a uma classe de problemas não polinomiais, provenientes da modelagem de sistemas elétricos de potência, mediante uma mudança não linear de variáveis que permite a construção de um sistema polinomial equivalente. Através dos métodos apresentados, visa-se disponibilizar métodos computacionais que permitam a obtenção de estimativas rápidas e precisas e que possam ser aplicados a uma ampla classe de sistemas: aqueles que admitem FEG. Com isso, almeja-se não somente contribuir para o desenvolvimento de métodos para análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência mas, também, disponibilizá-los a outras áreas do conhecimento.

Palavras-chave: Função Energia Generalizada. Região de Estabilidade. Região de Atração. *CUEP*. *Closest UEP*. *Sum of Squares*.

ABSTRACT

RIBEIRO, Y. C. S. **Estability Region Estimate using Generalized Energy Functions.** 2017. 142p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

In this work, we develop computational methods to estimate stability regions and the relevant part of stability boundary of attracting sets of nonlinear dynamical systems. Such methods are based on Generalized Energy Function (GEF) theory and, therefore, can be applied to a larger class of problems than those based on Energy Functions (EF). The theoretical foundations developed in this work, which support the proposed methods, ensure that the estimates are always conservative (in the sense that they are subsets of the true stability region), providing high confidence level when asserting the stability of a system. The presented methods are extensions of the *Closest UEP* and the *CUEP* methods, used in the assessment of stability of electrical power systems, to the systems that admit GEF. Even though the *Closest UEP* and *CUEP* methods provide estimates in a fast and accurate way, they are only applicable to systems that admit EFs, which consists in a strong limitation for their usage. Many systems do not admit EF and, even if it is possible to prove the existence of an EF, the impossibility to exhibit it in the form of elementary mathematical functions prevents the application of such methods. Other contribution of this work is a computational method to obtain a GEF for polynomial systems. We also applied the presented method to a class of non polynomial systems arising from electrical power system models, after a nonlinear change of variables that provides an equivalent polynomial system. By means of the proposed methods, we aim to offer computational methods to allow fast and accurate stability region estimates which could be used in a broad class of dynamical systems: those that admit GEF. This way, we plan to contribute for the development of methods used in the assessment of stability of electrical power systems and make such tools available to systems from other areas of science.

Keywords: Generalized Energy Function. Stability Region. Region of Attraction. CUEP. Closest UEP. Sum of Squares.

LISTA DE SIGLAS

BCU *Boundary Controlling UEP* - Ponto de Equilíbrio Instável de Controle de Fronteira

BFGS Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno

CUEP *Controlling Unstable Equilibrium Point* - Ponto de Equilíbrio Instável de Controle

Closest UEP *Closest Unstable Equilibrium Point* - Ponto de Eq. Inst. de Menor Energia

CC Conjunto de Controle - Representação em Matriz Simétrica Completa

FE Função Energia

FEG Função Energia Generalizada

FEL Função Energia Local

FL Função de Lyapunov

LMI *Linear Matrix Inequality* - Desigualdade Matricial Linear

PEBS *Potential Energy Boundary Surface* - Superfície de Fronteira da Energia Potencial

PEAE Ponto de Equilíbrio Assintoticamente Estável

RRT *Rapidly-exploring Random Tree* - Árvore Aleatória de Exploração Rápida

SOS *Sum of Squares* - Soma de Quadrados

SDP *Semidefinite Programming* - Programação Semidefinida

SOSP *Sum of Squares Programming* - Programação em Soma de Quadrados

SMR *Symmetric Matrix Representation* - Representação em Matriz Simétrica

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	17
1	PRELIMINARES	23
1.1	Definições e Notações	23
1.2	Região de Estabilidade	26
1.3	Região de Quase-estabilidade	27
1.4	Propriedades Dinâmicas da Fronteira da Região de Quase-estabilidade	29
1.5	Funções Energia	33
1.6	Funções Energia e a Região de Estabilidade	35
1.7	Funções Energia Generalizadas - FEG	36
1.8	Função Energia Generalizada e a Região de Estabilidade	38
1.9	Exemplo	40
2	ESTIMATIVA DA REGIÃO DE QUASE-ESTABILIDADE USANDO FEG	43
2.1	Introdução	43
2.2	Conjuntos Limites de Sistemas que Admitem FEG	44
2.3	Estimativas para a Região de Quase-estabilidade	51
2.4	Algoritmo Conceitual	56
2.5	Implementação do Algoritmo Conceitual	58
2.6	Exemplos	60
2.7	Conclusão	72
2.8	Próximos passos	72
3	ESTIMATIVA DE PARTE RELEVANTE DA FRONTEIRA DA REGIÃO DE QUASE-ESTABILIDADE PARA SISTEMAS QUE ADMITEM FEG	75
3.1	Introdução	75
3.2	Fundamentos Teóricos do Método	76
3.3	O Conjunto de Controle	78
3.4	Estimativa de Parte Relevante da Fronteira da Região de Quase-estabilidade	79
3.5	Implementação do Método	80
3.6	Algoritmo Conceitual	80
3.7	Exemplo de Aplicação	82
3.8	Conclusões	90

3.9	Passos Futuros	90
4	UTILIZAÇÃO DE SOSP PARA ENCONTRAR FEG	91
4.1	Introdução	91
4.1.1	Programação Semidefinida - SDP	92
4.1.2	Soma de Quadrados - Sum of Squares - SOS	93
4.1.3	Positivstellensatz de Stengle	94
4.2	Função Energia Generalizada (FEG) para Sistemas Polinomiais	97
4.2.1	Alternativas para a Condição G3	98
4.3	Utilizando SOSP para Encontrar uma FEG	102
4.3.1	Formulação usando o Positivstellensatz de Stengle	104
4.4	Obtendo estimativas da Região de Estabilidade	109
4.5	Exemplo de Aplicação em Sistemas Não Polinomiais	116
4.6	Conclusões	121
4.7	Próximos Passos	121
	CONCLUSÃO	123
	REFERÊNCIAS	125
	APÊNDICE A – ALGORITMOS COMPUTACIONAIS	133
A.1	Introdução	133
A.2	Métodos de Otimização	133
A.2.1	Algoritmo BFGS Projetado	135
A.2.2	Algoritmo Active-set	136
A.3	Rapidly-exploring Random Tree - RRT	137
	ÍNDICE	141

INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos surgem na modelagem de diversos processos naturais, sejam eles físicos, químicos, biológicos, econômicos, etc, e se caracterizam pelo conhecimento da forma com que suas variáveis evoluem com o tempo.

Embora existam diversas formas de se exprimir a regra de evolução de um sistema, neste texto trataremos especificamente do estudo daqueles que podem ser modelados por equações diferenciais ordinárias. Nestes casos, suas soluções descrevem a evolução do estado do sistema a medida em que o tempo passa.

Embora a solução das equações diferenciais que modela o sistema permita a descrição completa de como as suas variáveis evoluem com o tempo, em várias aplicações, temos apenas interesse em conhecer o comportamento das soluções a longo prazo, ou seja, do estado para o qual o sistema evolui transcorrido um tempo suficientemente grande. Em diversas áreas, existem técnicas com esse objetivo, por exemplo, podemos citar a análise DC para circuitos elétricos, o cálculo de autovetores de matrizes de transição e os teoremas de estabilidade assintótica global.

Na maioria dos sistemas, “quase todas” as órbitas evoluem para um subconjunto próprio do espaço de estados. Tais conjuntos desempenham papel fundamental no estudo da dinâmica do sistema, pois, representam o comportamento a longo prazo de “quase todas” as soluções (ver definições na seção 1.1).

De forma intuitiva, um conjunto atrativo é um conjunto de estados do sistema que atrai as soluções em suas proximidades. Em outras palavras, se o estado atual do sistema está próximo ao conjunto atrativo, então os estados do sistema evoluem de forma a se aproximar cada vez mais dele. A *região de estabilidade* (também conhecida por: *região de atração*, *domínio de atração* ou *bacia de atração*) do conjunto atrativo é o conjunto de todos os estados que são atraídos para o conjunto atrativo. Assim, a dinâmica do conjunto atrativo representa o comportamento assintótico de todas as soluções com condição inicial contida em sua região de estabilidade.

Na grande maioria das aplicações, a região de estabilidade de um conjunto atrativo é um subconjunto próprio do espaço de estados e, portanto, nem todas as trajetórias do sistema evoluem para o conjunto atrativo. Neste caso dizemos que o conjunto atrativo não é *globalmente atrativo* e o estudo da sua região de estabilidade se torna importante.

O estudo da região de estabilidade de conjuntos atrativos aparece em diversas aplicações. Um exemplo é o estudo da imunização de uma população com respeito a uma dada doença (ver (HETHCOTE; ZHIEN; SHENGBING, 2002)). Neste caso, deseja-se determinar uma forma de interferir no estado atual do sistema de modo a levá-lo a

um estado de imunização completa. Procedimentos como campanhas de conscientização, vacinação ou quarentena, devem ser feitos de forma a colocar a população em um estado que evolua para a completa imunização.

Outro exemplo é o controle automático de voo (ver (CHAKRABORTY; SEILER; BALAS, 2011)). Neste outro exemplo, deseja-se definir o estado que uma aeronave deve apresentar para que o controle automático de voo consiga estabilizá-la com segurança. Para determinar o sucesso do controle, deve-se verificar se o estado atual da aeronave está dentro da região de estabilidade do ponto correspondente ao voo estável.

Uma outra aplicação importante consiste do estudo de estabilidade transitória de sistemas elétricos de potência. O conhecimento da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável permite concluir imediatamente se o sistema é capaz de alcançar um novo ponto de operação aceitável após ser submetido a um distúrbio (ver (CHIANG; WU; VARAIYA, 1987)).

Em todos os exemplos citados, a capacidade em se atingir os objetivos e a qualidade da resposta obtida pela análise estão vinculadas à qualidade da estimativa da região de estabilidade do conjunto atrativo. Vale ressaltar que, mesmo em sistemas descritos por equações simples, a região de estabilidade pode apresentar estrutura complicada. Ver, por exemplo, (CHUA, 1992) e (GREBOGI; OTT; YORKE, 1987). Sendo assim, determinar com precisão a região de estabilidade é uma tarefa complicada, em geral.

Por esta razão, vários métodos têm sido explorados para se obter estimativas da região de estabilidade. Estes métodos podem ser divididos em dois grandes grupos: os que utilizam Função de Lyapunov (FL) ou Função Energia (FE) e os que usam outro tipo de técnica.

A maioria dos métodos no primeiro grupo obtém estimativas para a região de estabilidade (ou parte dela) através de conjuntos de nível de uma FL ou de uma FE. Alguns utilizam aproximações em série de Taylor para a função de Lyapunov, obtendo uma sequência de estimativas que se aproximam da região de estabilidade verdadeira (ver (CHIANG; S.THORP, 1989; VANNELLI; VIDYASAGAR, 1985)). Outros utilizam métodos de otimização para maximizar a área de regiões elípticas contidas na região de estabilidade (ver (DAVISON; KURAK, 1971; TIBKEN, 2000; TIBKEN; FAN, 2006)).

No grupo dos métodos que não estão baseados em funções de Lyapunov, existem, por exemplo, os métodos que fazem uso de integração reversa (ver (GENESIO; TARTAGLIA; VICINO, 1985; LOCCUFIER; NOLDUS, 2000)), os que utilizam “*tracking functions*” (ver (HEWIT; STOREY, 1967)) e aqueles que realizam aproximações locais da fronteira da região de estabilidade através de hiperplanos (ver (YEE; SPALDING, 1977)) ou superfícies (ver (VENKATASUBRAMANIAN; JI, 1997; SAHA et al., 1997; CHENG; MA, 2003)).

Alguns desses métodos foram desenvolvidos apenas para sistemas polinomiais, o

que exige uma aproximação do sistema original por um sistema polinomial antes da sua aplicação. Outros foram desenvolvidos para utilização em sistemas de ordem dois, não sendo clara a sua capacidade de adaptação para sistemas de mais alta ordem. Além disso, aqueles que envolvem otimização requerem esforço computacional elevado e necessitam de estimativas iniciais para a função de Lyapunov (mesmo que locais).

Motivados pelo problema da análise de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência, técnicas que utilizam FE para obter estimativas para a região de estabilidade foram desenvolvidas (ver (CHIANG, 2011)). Estas técnicas se baseiam na relação entre a FE e o comportamento dinâmico das soluções na fronteira da região de estabilidade. Então, foram desenvolvidos métodos computacionais para obter estimativas conservadoras¹ para a região de estabilidade (ou de parte relevante dela) que podem ser aplicados na solução de problemas práticos.

O método do *Closest Unstable Equilibrium Point* (Closest UEP) (ver (CHIANG; THORP, 1989)) obtém a melhor estimativa para a região de estabilidade na forma de um conjunto de nível de uma dada FE, e o método do *Controlling Unstable Equilibrium Point* (CUEP) fornece uma estimativa para parte relevante da fronteira da região de estabilidade através de uma curva de nível de uma FE (ver (CHIANG, 1991; CHIANG; WU; VARAIYA, 1987)).

Embora estes métodos sejam simples e conduzam a resultados precisos (porém conservadores), eles se aplicam apenas a sistemas que admitem FE.

Não existe um procedimento sistemático para encontrar FE e, mesmo nos casos em que podemos provar a sua existência, a impossibilidade de exibir sua expressão analítica em termos de funções elementares proíbe a aplicação de métodos baseados em FE.

Infelizmente, muitos sistemas não admitem FE. A existência de uma FE implica em sérias restrições à dinâmica das soluções, de fato, toda solução limitada converge para um ponto de equilíbrio quando o tempo tende a infinito (ver (CHIANG; WU; VARAIYA, 1987)). Consequentemente, sistemas com dinâmica mais complicada, como órbitas periódicas ou soluções caóticas, não admitem FE. Por exemplo, em (CHIANG, 1989) foi provado que os modelos de sistemas elétricos de potência considerando perdas não admitem FE.

É neste contexto que o conceito de Função Energia Generalizada (FEG) foi introduzido em (ALBERTO; CHIANG, 2012a; ALBERTO; CHIANG, 2012b). Embora funções energia generalizadas sejam mais fáceis de serem encontradas e possam ser admitidas por uma classe bastante geral de sistemas, é necessário encontrar resultados que deem suporte a métodos para o estudo da região de estabilidade dos sistemas que as admitem.

¹ Ao longo deste texto, o termo “estimativa conservadora” será utilizado para enfatizar o fato de que a estimativa obtida está, garantidamente, contida na região de estabilidade verdadeira. Portanto, na análise de sistemas onde a segurança é fundamental, trata-se de uma qualidade desejável para a estimativa obtida.

Desde o surgimento do conceito de [FEG](#), diversos trabalhos têm sido desenvolvidos, mostrando o potencial desta ferramenta na obtenção de estimativas para a região de estabilidade de conjuntos atrativos. Ver por exemplo, ([CHIANG; ALBERTO, 2015](#)) e ([ALBERTO; CHIANG, 2012b](#)).

No entanto, a ausência de um procedimento sistemático e de resultados gerais que suportem o processo de obtenção da estimativa exigem que cada caso de estudo seja analisado de forma individual, levando em consideração informações particulares a respeito do sistema e dependendo da habilidade do analista.

Outra dificuldade encontrada na utilização de técnicas de análise baseadas em [FEG](#) reside, exatamente, na obtenção de uma [FEG](#) para sistemas em geral. Alguns trabalhos presentes na literatura têm contribuído no sentido de fornecer [FEGs](#) para classes amplas de sistemas (ver, por exemplo, ([SIQUEIRA; ALBERTO; BRETAS, 2015](#))), no entanto, novamente, a experiência do analista tem sido fundamental neste processo.

Contribuição

Neste trabalho, estuda-se as relações entre a existência de uma [FEG](#) e as propriedades dinâmicas dos sistemas que as admite. Além disso, são desenvolvidos os fundamentos teóricos que suportam métodos sistemáticos de estimativa da região de quase-estabilidade.

Em particular, dois algoritmos são propostos. O primeiro fornece uma estimativa global para a região de quase-estabilidade na forma de um conjunto de nível de uma [FEG](#), no sentido de estender o método do [Closest UEP](#) para a classe dos sistemas que admitem [FEG](#). O segundo fornece uma estimativa de parte relevante da fronteira da região de quase-estabilidade e consiste em uma extensão do método [CUEP](#) para sistemas que admitem [FEG](#). Além disso, uma possível implementação computacional dos algoritmos é apresentada e discutida na forma de exemplos.

Através do desenvolvimento destes algoritmos, almeja-se não só contribuir para a evolução dos métodos diretos aplicados ao estudo de estabilidade transitória de sistemas elétricos de potência, mas também permitir que outras áreas do conhecimento possam fazer uso de técnicas similares pois tratam-se de ferramentas para a análise de estabilidade de sistemas sujeitos a perturbações.

Finalmente, um método computacional para obtenção de [FEGs](#) para sistemas polinomiais é proposto. Este método, baseado em métodos originalmente desenvolvidos para obtenção de [FLs](#), converte a busca por uma [FEG](#) para um dado sistema polinomial em um problema de factibilidade de *Sum of Squares* ([SOS](#)). Ele visa contribuir na construção de um método sistemático para a obtenção de [FEGs](#) e disponibilizar as ferramentas de estimativa da região de quase-estabilidade para uma classe ampla de sistemas. Também, é discutido um processo para a conversão de um sistema não polinomial em um sistema

polinomial através de uma mudança não linear de variáveis já conhecida na literatura e que é aplicável a uma classe de sistemas provenientes da modelagem de sistemas elétricos de potência.

Organização do texto

No Capítulo 1, é apresentada uma revisão dos conceitos matemáticos que serão utilizados para o desenvolvimento dos demais capítulos, assim como uma apresentação dos principais resultados, referentes ao tema deste trabalho, presentes na literatura. O leitor que estiver familiarizado com o estudo da região de estabilidade e de quase-estabilidade, sob o ponto de vista da teoria de FE e de FEG, pode saltar diretamente para o Capítulo 2.

Os Capítulos 2, 3 e 4 constituem as contribuições deste trabalho.

No Capítulo 2, são desenvolvidos os fundamentos teóricos de um método para obtenção de uma estimativa conservadora da região de quase-estabilidade com base na existência de uma FEG. Além disso, um algoritmo conceitual é apresentado e uma possível implementação computacional é discutida.

O Capítulo 3, é dedicado ao desenvolvimento de um método para estimativa de parte relevante da fronteira da região de quase-estabilidade através de uma curva de nível de uma FEG. Também neste caso, os fundamentos teóricos apresentados garantem que a estimativa é conservadora. Um algoritmo conceitual e uma possível implementação computacional é apresentada e discutida na forma de um exemplo.

No Capítulo 4 é apresentado um método para encontrar uma FEG para sistemas polinomiais utilizando programação em SOS. O método apresentado também é estendido para sistemas não polinomiais através de uma mudança não linear de variáveis presente na literatura.

Finalmente, no Apêndice A são apresentados os algoritmos utilizados durante as implementações computacionais realizadas no decorrer do trabalho. Os algoritmos utilizados são conhecidos e, por isso, foram movidos para os apêndices.

A Figura 1 mostra como os capítulos estão relacionados.

Figura 1 – Diagrama dos capítulos. Conexões tracejadas indicam que os capítulos fazem referência um ao outro. As setas indicam dependência.

1 PRELIMINARES

Neste capítulo faremos uma breve revisão de conceitos matemáticos que serão utilizados nos capítulos decorrentes. O conteúdo deste capítulo consiste de resultados presentes na literatura, exceto pela seção 1.3, onde a forma de construção do conceito de região de quase-estabilidade difere daquela apresentada em (CHIANG; FEKIH-AHMED, 1996).

Na seção 1.1, serão exibidos alguns resultados e definições da teoria de sistemas dinâmicos. A seção 1.2 discute o conceito de região de estabilidade e, assim como a seção 1.3, que apresenta o conceito de região de quase-estabilidade, contém a definição de objetos fundamentais para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

Um maior detalhamento sobre as propriedades da fronteira da região de quase-estabilidade é apresentado na seção 1.4.

Na seção 1.5, uma revisão do conceito de Função Energia (FE) e suas aplicações é apresentada. Tal revisão é realizada com intuito de permitir a comparação da teoria de FE com a teoria de Função Energia Generalizada (FEG), apresentada na seção 1.7.

1.1 Definições e Notações

Considere a seguinte equação diferencial,

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (1.1)$$

onde $\dot{x}(t)$ denota a derivada de $x(t)$ com respeito a variável t e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$.

Denotaremos por $t \mapsto \Phi(t, x_0)$, a única solução do sistema de equações diferenciais (1.1) satisfazendo $\Phi(0, x_0) = x_0$.

Definição 1.1 (Ponto de Equilíbrio). Se $x \in \mathbb{R}^n$ é tal que $f(x) = 0$, diremos que x é um *ponto de equilíbrio* do sistema (1.1).

Definição 1.2 (Órbita Periódica). Se x não é um ponto de equilíbrio do sistema (1.1) e existe $T > 0$ tal que $\Phi(t + T, x) = \Phi(t, x)$ para todo $t > 0$, diremos que $\Phi(t, x)$ é uma *órbita periódica* do sistema (1.1) com período T .

Definição 1.3 (Ponto de Equilíbrio Estável). Um ponto de equilíbrio $x \in \mathbb{R}^n$ será dito um *ponto de equilíbrio estável* se, para cada vizinhança aberta V de x , existir uma vizinhança aberta $U \subset V$ de x de maneira que $\Phi(t, x_0) \in V$ para todo $x_0 \in U$ e para todo $t > 0$.

Definição 1.4 (Ponto de Equilíbrio Instável). Um ponto de equilíbrio $x \in \mathbb{R}^n$ que não é um ponto de equilíbrio estável (ver definição 1.3) será denominado *ponto de equilíbrio instável*.

Definição 1.5 (Ponto de Equilíbrio Assintoticamente Estável). Um ponto de equilíbrio estável x (ver definição 1.3) será denominado *assintoticamente estável* se, para todo $x_0 \in U$ (como na definição de ponto de equilíbrio estável), $\Phi(t, x_0) \rightarrow x$ à medida que $t \rightarrow \infty$.

Definição 1.6 (Conjunto Invariante). Dado um conjunto $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, diremos que γ é um *conjunto invariante* se, para todo $x \in \gamma$, $\Phi(t, x) \in \gamma$ para todo $t \in (a, b)$ onde (a, b) é o intervalo maximal de definição da solução $\Phi(t, x)$.

Definição 1.7 (Conjunto Positivamente Invariante). Dado um conjunto $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, diremos que γ é um *conjunto positivamente invariante* se, para todo $x \in \gamma$, $\Phi(t, x) \in \gamma$ para todo $t > 0$.

Definição 1.8 (Conjunto Atrativo). Um conjunto fechado e invariante σ é chamado *conjunto atrativo* se existe uma vizinhança aberta U de σ tal que, para todo $x_0 \in U$, $\Phi(t, x_0) \in U$ para todo $t \geq 0$ e $\Phi(t, x_0) \rightarrow \sigma$ à medida que $t \rightarrow \infty$.

Definição 1.9 (Conjunto ω -limite). Dado o sistema (1.1) e um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, define-se o conjunto ω -limite de x_0 e denota-se por $\omega(x_0)$ o conjunto

$$\omega(x_0) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} |\phi(t_n, x_0) - y| = 0 \right\}.$$

Definição 1.10 (Conjunto Limite Positivo). Chamamos de *conjunto limite positivo* o fecho da união de todos os conjuntos ω -limites, ou seja,

$$L_+(f) = \overline{\bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \omega(x)}.$$

Definição 1.11 (Ponto de Equilíbrio Hiperbólico). Dizemos que um ponto de equilíbrio x é um *ponto de equilíbrio hiperbólico* do sistema (1.1), quando a derivada da função f , avaliada em x , não possuir autovalores com parte real nula.

Se $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico, existem subespaços vetoriais $E^u \subset \mathbb{R}^n$ e $E^s \subset \mathbb{R}^n$ tais que $Df(E^s) = E^s$, $Df(E^u) = E^u$, $E^u \oplus E^s = \mathbb{R}^n$ e existem constantes $\lambda \in (0, 1)$ e $\mu > 1$ tais que $|Df(p)x - Df(p)y| < \lambda|x - y|$ para todo $x, y \in E^s$ e $|Df(p)x - Df(p)y| > \mu|x - y|$ para todo $x, y \in E^u$.

Dizemos que um ponto de equilíbrio x é de *tipo- k* quando E^u é um subespaço de dimensão k .

Uma definição mais geral pode ser construída para caracterizar quando um conjunto compacto e invariante é hiperbólico (ver (KATOK; HASSELBLATT, 1997)).

Definição 1.12 (Conjunto Hiperbólico). Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto invariante com respeito ao sistema (1.1). Se existem números reais $\lambda < 1 < \mu$ tais que, para todo $x \in \Lambda$ possamos encontrar uma decomposição $\mathbb{R}^n = E_x^0 \oplus E_x^+ \oplus E_x^-$ onde $f(x) \in E_x^0$, $\dim(E_x^0) = 1$, $D_x\Phi(t, x)E_x^+ = E_{\Phi(t, x)}^+$, $D_x\Phi(t, x)E_x^- = E_{\Phi(t, x)}^-$ e

$$\left\| D_x\Phi(t, x)|_{E_x^-} \right\| \leq \lambda^t, \quad \left\| D_x\Phi(-t, x)|_{E_x^+} \right\| \leq \mu^{-t},$$

então Λ é chamado de conjunto *hiperbólico*.

Algumas propriedades importantes dos conjuntos hiperbólicos estão enunciadas no seguinte resultado.

Teorema 1.13. *Seja Λ um conjunto hiperbólico para o sistema (1.1), λ e μ como na Definição 1.12 e $t_0 > 0$. Então, para cada $x \in \Lambda$, existem variedades $W_{loc}^s(x)$ e $W_{loc}^u(x)$, respectivamente chamadas variedades local estável e variedade local instável de x , tais que*

1. $T_x W_{loc}^s(x) = E_x^-$ e $T_x W_{loc}^u(x) = E_x^+$;
2. $\Phi(t, W_{loc}^s(x)) \subset W_{loc}^s(\Phi(t, x))$ para todo $t \geq t_0$;
3. $\Phi(-t, W_{loc}^u(x)) \subset W_{loc}^u(\Phi(-t, x))$ para todo $t \geq t_0$;
4. Para todo $\delta > 0$, existe uma constante $\kappa(\delta)$ tal que

$$d(\Phi(t, x), \Phi(t, y)) < \kappa(\delta)(\lambda + \delta)^t d(x, y),$$

para todo $y \in W_{loc}^s(x)$ e $t > 0$ e,

$$d(\Phi(-t, x), \Phi(-t, y)) < \kappa(\delta)(\mu - \delta)^{-t} d(x, y),$$

para todo $y \in W_{loc}^u(x)$ e $t > 0$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (KATOK; HASSELBLATT, 1997).

Definição 1.14 (Conjunto Estável). Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto invariante. O *conjunto estável* de Λ , denotado por $\mathcal{W}^s(\Lambda)$, é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^n$ tais que seus conjuntos ω -limites sejam não vazios e estejam contidos em Λ , ou seja,

$$\mathcal{W}^s(\Lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n : \omega(x) \subset \Lambda, \omega(x) \neq \emptyset\}.$$

1.2 Região de Estabilidade

A determinação da região de estabilidade de um conjunto atrativo em um sistema dinâmico é um problema relevante em diversas áreas do conhecimento. Saber se o estado atual de um sistema se encontra no interior da região de atração de algum conjunto atrativo significa conhecer o comportamento do sistema após transcorrido o período transitório.

Alguns casos relevantes de aplicação deste tipo de informação foram citados na introdução, onde o conhecimento da região de estabilidade de um Ponto de Equilíbrio Assintoticamente Estável (PEAE) fornece conclusões importantes sobre o comportamento assintótico do sistema de forma rápida e precisa.

Se σ é um conjunto atrativo, por definição, existe uma vizinhança U tal que todas as soluções iniciando em algum ponto pertencente a ela tendem para σ conforme o tempo tende ao infinito. Uma pergunta natural surge: qual o maior conjunto com tal propriedade? Essa questão motiva a seguinte definição.

Definição 1.15 (Região de Estabilidade). Seja σ um conjunto atrativo para o sistema (1.1). Ao conjunto $A(\sigma)$, definido por

$$A(\sigma) = \{x \in \mathbb{R}^n : \omega(x) \neq \emptyset, \omega(x) \subset \sigma\},$$

daremos o nome de *região de estabilidade* de σ .

No decorrer desta seção, veremos algumas propriedades importantes da região de estabilidade de um conjunto atrativo. Como por exemplo, a região de estabilidade de um conjunto atrativo σ é sempre um conjunto não vazio porque σ está contido nela. Além disso, a vizinhança U da Definição 1.8 também está contida na região de estabilidade de σ .

A seguir, vamos enunciar um resultado bem conhecido na literatura, para tanto, vamos denotar por $\mathcal{B}_\varepsilon(y)$, a bola de raio ε com centro no ponto y ,

$$\mathcal{B}_\varepsilon(y) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \varepsilon\}.$$

Afirmção 1.16. Se σ é um conjunto atrativo de (1.1), então $A(\sigma) \subset \mathbb{R}^n$ é sempre um conjunto aberto e invariante. Além disso, se σ é um conjunto conexo, então $A(\sigma)$ também é um conjunto conexo.

Demonstração. Como σ é um conjunto atrativo, existe $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que para todo $x \in U$, $\phi(t, x) \rightarrow \sigma$ quando $t \rightarrow \infty$. Dado $y \in A(\sigma)$, existe $t_y \in \mathbb{R}$, tal que $z = \phi(t_y, y) \in U$. Como U é aberto, existe $\varepsilon > 0$, tal que $\mathcal{B}_\varepsilon(z) \subset U$. Pela continuidade das soluções com relação a condições iniciais, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in \mathcal{B}_\delta(y)$, $\phi(t_y, x) \in \mathcal{B}_\varepsilon(z)$. Portanto, $\mathcal{B}_\delta(y) \subset A(\sigma)$ o que prova que $A(\sigma)$ é aberto.

A invariância de $A(\sigma)$ decorre diretamente da definição de $A(\sigma)$, pois, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\omega(\phi(t, x)) \subset \sigma$.

A conexidade de $A(\sigma)$ decorre da existência de um caminho que conecta qualquer ponto de $A(\sigma)$ a uma vizinhança de σ (ver página 155 (MUNKRES, 1975)). De fato, tome $x_1, x_2 \in A(\sigma)$. Então, existem t_1 e t_2 tais que $y_1 = \phi(t_1, x_1) \in U$ e $y_2 = \phi(t_2, x_2) \in U$. Se σ é um conjunto conexo, então U também pode ser tomado conexo, logo existe um caminho σ que conecta y_1 e y_2 . A junção de $\phi(t, x_1)$, σ e $\phi(t, x_2)$ forma um caminho que conecta x_1 a x_2 . $\square$

A *fronteira da região de estabilidade* do conjunto atrativo σ será denotada por $\partial A(\sigma)$. Em (CHIANG; HIRSCH; WU, 1988) é mostrado que $\partial A(\sigma)$ é um conjunto fechado e invariante.

Diante da importância em se conhecer a região de estabilidade, surge a necessidade de resultados que permitam descrevê-la através das características dinâmicas dos pontos em sua fronteira. Tais resultados são chamados de *resultados de caracterização*. Embora conhecer precisamente a região de estabilidade seja uma tarefa complicada, tais resultados são utilizados para determinar aproximações locais ou para detectar quando uma curva intersecta a fronteira da região de estabilidade (ver (CHIANG, 2011)).

O seguinte teorema de caracterização da região de estabilidade para uma classe bastante geral de sistemas dinâmicos foi enunciado em (ALBERTO; CHIANG, 2012a).

Teorema 1.17. *Seja σ um conjunto atrativo do sistema (1.1) e suponha que*

C1. O conjunto limite positivo restrito à fronteira da região de estabilidade, $L_+(f|_{\partial A(\sigma)})$, seja composto por uma quantidade enumerável de conjuntos compactos invariantes $\{\Lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$;

C2. Toda trajetória na fronteira da região de estabilidade seja limitada para $t > 0$.

Então $\partial A(\sigma) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{W}^s(\Lambda_i)$.

Embora resultados como o Teorema 1.17 possam ser aplicados em contextos bem gerais, a fronteira da região de estabilidade pode apresentar estruturas complexas e muito diferentes de um sistema para outro. Por esse motivo, os resultados de caracterização normalmente colocam hipóteses adicionais sobre o sistema, o que restringe a abrangência de métodos baseados neles. Como será abordado nos capítulos 2 e 3, a introdução de técnicas baseadas em FEG evita a adição de hipóteses muito fortes sobre a dinâmica do sistema sob análise.

1.3 Região de Quase-estabilidade

Nesta seção, veremos que o conceito de região de estabilidade possui alguns problemas de ordem prática. Por esta razão, o conceito de *região de quase-estabilidade* foi introduzido em (ZABORSZKY et al., 1988).

Como motivação para o desenvolvimento do conceito de região de quase-estabilidade, vejamos um exemplo em que a região de estabilidade, tal como definida, não captura o tipo de propriedade que desejamos. O exemplo a seguir foi extraído de (CHIANG; FEKIH-AHMED, 1996).

Exemplo 1.18: Considere o sistema definido pela equação diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left\{ \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 3 \right) \left[x^2 + y^2 + (y - 2)\sqrt{x^2 + y^2} - 2y + 1,5 \right] + y \right\} x \\ \dot{y} &= \left\{ \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 3 \right) \left[x^2 + y^2 + (y - 2)\sqrt{x^2 + y^2} - 2y + 1,5 \right] y \right\} - x^2.\end{aligned}$$

A região de estabilidade deste sistema é mostrada na Figura 2. Pode-se observar que os pontos x_u , x_1 , x_f e x_c pertencem à fronteira da região de estabilidade $A(x_s)$. Além disso, as suas variedades estáveis $W^s(x_c)$, $W^s(x_1)$, x_u e x_f , delimitam a região de estabilidade $A(x_s)$.

Observe que, embora o ponto x_u seja um ponto de equilíbrio, um sistema que se encontra no estado representado por este ponto é levado à região de estabilidade do ponto x_s mediante perturbações. Na prática, é impossível que um sistema permaneça operando exatamente sobre x_u . Logo, o ponto de equilíbrio x_u se comporta como se fosse parte da região de estabilidade de x_s . A mesma conclusão pode ser obtida quando se analisa o ponto x_1 e sua variedade estável.

Em termos mais gerais, existem pontos da fronteira da região de estabilidade que estão contidos no interior do fecho da região de estabilidade. Tais pontos, embora pertençam à fronteira, possuem uma vizinhança tal que “quase todos” os pontos dela estão em $A(x_s)$.

Figura 2 – Região de estabilidade do exemplo 1.18.

Motivados pelo exemplo 1.18, a região de quase-estabilidade foi definida em (CHIANG; FEKIH-AHMED, 1996).

Definição 1.19 (Região de Quase-estabilidade). Seja σ um conjunto atrativo para o sistema (1.1). Define-se

$$A_q(\sigma) = \text{int}(\overline{A(\sigma)}), \quad (1.2)$$

chamada *região de quase-estabilidade* do conjunto σ e denota-se por $\partial A_q(\sigma)$ a sua fronteira topológica.

Em (CHIANG; FEKIH-AHMED, 1996) é mostrado que, se σ é um conjunto atrativo, então a sua região de quase-estabilidade $A_q(\sigma)$ é um conjunto aberto invariante e a fronteira da região de quase-estabilidade $\partial A_q(\sigma)$ é um conjunto fechado e invariante.

Como ilustra o exemplo 1.18, a definição de região de estabilidade permite certos comportamentos dinâmicos patológicos que não condizem com a nossa intuição a seu respeito. A definição de região de quase-estabilidade teve sua concepção motivada pela expectativa com respeito ao comportamento dinâmico dos pontos que, na prática, se comportam como se estivessem na região de estabilidade.

1.4 Propriedades Dinâmicas da Fronteira da Região de Quase-estabilidade

A seguir são introduzidas algumas definições úteis para o enunciado dos próximos resultados. Estas definições podem ser encontradas em (HIRSCH; SMALE, 1974).

Definição 1.20 (Elemento Crítico). Dado o sistema (1.1), dizemos que o conjunto γ é um *elemento crítico* de (1.1), se γ for um ponto de equilíbrio (ver definição 1.1) ou uma órbita periódica (ver definição 1.2).

Um *hiperplano* de $\mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial afim de dimensão $n - 1$. Ou seja, dado $E \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial de dimensão $n - 1$ e um vetor $u \in \mathbb{R}^n$, um hiperplano é o conjunto de pontos que podem ser escritos na forma $u + v$, com $v \in E$.

Uma *seção de Poincaré* Σ no ponto x_0 para o sistema (1.1) é um conjunto aberto contido em um hiperplano H tal que $x_0 \in \Sigma$ e Σ é transversal a f . Transversalidade significa que $f(x) \notin H$, para todo $x \in \Sigma$. A Figura 3 ilustra a definição.

Seja γ uma órbita periódica do sistema 1.1. Seja Σ uma seção de Poincaré no ponto $x_0 \in \gamma$. Devido à continuidade com respeito às condições iniciais, existe $\Sigma_0 \subset \Sigma$ tal que, para todo $x \in \Sigma_0$, existe $t_x > 0$ tal que $\phi(t_x, x) \in \Sigma$. Para evitar ambiguidades, suponha que t_x seja o primeiro $t > 0$ tal que $\phi(t_x, x) \in \Sigma$. A função $h : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ tal que $h(x) = \phi(t_x, x)$ é chamada *aplicação de Poincaré* ou *aplicação de primeiro retorno*. A Figura 4 mostra um exemplo de aplicação de primeiro retorno.

Definição 1.21 (Órbita Periódica Hiperbólica). Dizemos que uma órbita periódica γ é uma *órbita periódica hiperbólica* quando, para qualquer $x_0 \in \gamma$ e seção transversal Σ no ponto x_0 , a derivada da aplicação de Poincaré Dh no ponto x_0 não possuir autovalores de módulo unitário.

Figura 3 – Seção de Poincaré.

Figura 4 – Aplicação de Poincaré ou aplicação de primeiro retorno.

Dizemos que duas subvariedades $M, N \subset \mathbb{R}^n$ se *intersectam transversalmente* no ponto x quando $T_x M$ e $T_x N$ geram $\mathbb{R}^n$. Para mais detalhes, ver página 177 de (LIMA, 2011).

A proposição enunciada a seguir fornece uma caracterização para os elementos críticos contidos na fronteira da região de estabilidade. Esta caracterização é bastante geral e permite que sejam elaborados testes computacionais para detectar quando um elemento crítico pertence à fronteira da região de estabilidade.

Por coerência, o enunciado foi transcrito exatamente como está apresentado em (CHIANG; FEKIH-AHMED, 1996), no entanto, ele poderia ser enunciado em termos da região de quase-estabilidade, uma vez que $\partial(\overline{A(\sigma)}) = \partial A_q(\sigma)$ e $\overline{(A(\sigma))^c} = (A_q(\sigma))^c$.

Proposição 1.22. *Seja σ conjunto atrativo de (1.1) e $A(\sigma)$ sua região de estabilidade. Seja γ um elemento crítico hiperbólico de (1.1). Então:*

1. *Se $\gamma \in \partial(\overline{A(\sigma)})$ então $\{W^u(\gamma) - \gamma\} \cap \overline{A(\sigma)^c} \neq \emptyset$;*
2. *Se $\{W^u(\gamma) - \gamma\} \cap \overline{A(\sigma)^c} \neq \emptyset$ e $\{W^u(\gamma) - \gamma\} \cap \overline{A(\sigma)} \neq \emptyset$ então $\gamma \in \partial(\overline{A(\sigma)})$.*

Embora a Proposição 1.22 possa ser aplicada em um contexto bastante geral, podemos obter uma tese mais forte com a adição de algumas hipóteses a respeito do sistema.

Proposição 1.23. *Seja σ um conjunto atrativo do sistema (1.1) e suponha que:*

- A1. *Todos os elementos críticos em $\partial A(\sigma)$ sejam hiperbólicos;*
- A2. *Para quaisquer dois elementos críticos γ_1 e γ_2 contidos em $\partial A(\sigma)$, $W^u(\gamma_1)$ e $W^s(\gamma_2)$ se intersectam transversalmente;*
- A3. *Se $\{\phi(t, x) : t \in \mathbb{R}\} \subset \partial A(\sigma)$, então existe um elemento crítico $\bar{\gamma} \in \partial A(\sigma)$, de tal forma que $\phi(t, x) \rightarrow \bar{\gamma}$ quando $t \rightarrow \infty$.*

Se $\gamma \in \partial(\overline{A(\sigma)})$ é um elemento crítico hiperbólico do sistema (1.1), então $\{W^u(\gamma) - \gamma\} \cap \overline{A(\sigma)^c} \neq \emptyset$.

Através da Proposição 1.23, provada em (CHIANG; FEKIH-AHMED, 1996), é possível enunciar um resultado¹ que fornece uma importante informação a respeito do comportamento dinâmico dos elementos críticos que se encontram sobre a fronteira da região de quase-estabilidade.

Proposição 1.24. *Seja σ um conjunto atrativo de (1.1) e $A_q(\sigma)$ sua região de quase-estabilidade. Se as hipóteses A1, A2 e A3 da Proposição 1.23 forem satisfeitas e $\gamma \in \partial A_q(\sigma)$ é um elemento crítico hiperbólico, então:*

1. $\gamma \in \partial A(\sigma)$;
2. $W^u(\gamma) \cap \overline{A(\sigma)^c} \neq \emptyset$.

¹ Em (CHIANG, 2011) e em (CHIANG; FEKIH-AHMED, 1996), o conceito de fronteira da região de quase-estabilidade é construído de forma diferente. A tese da Proposição 1.24 é utilizada para definir quando um elemento crítico pertence à fronteira da região de quase-estabilidade. Em seguida, os teoremas são utilizados para demonstrar que um elemento crítico pertence à fronteira da região de estabilidade se e somente se pertence à fronteira da região de quase-estabilidade, desde que as hipóteses A1, A2 e A3 da Proposição 1.23 estejam satisfeitas. Aqui, optou-se por apresentar os conceitos de forma aparentemente mais intuitiva.

Demonstração. O item 1 fica provado se observado que, para qualquer conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, $\partial U = \partial \text{int} U$ e $\partial \bar{U} \subset \partial U$. O item 2 é provado pela aplicação direta da Proposição 1.23. $\square$

Note que a Proposição 1.24 confirma que o comportamento dinâmico dos elementos críticos na fronteira da região de quase-estabilidade coincide com a nossa intuição. A proposição afirma que os elementos críticos contidos em $\partial A_q(\sigma)$ são aqueles que estão “entre” a região de estabilidade e seu complementar. Ou seja, arbitrariamente próximos a eles, existem pontos de $A(\sigma)$ e pontos de $(\overline{A(\sigma)})^c$.

Vejamos algumas observações a respeito das hipóteses $A1$, $A2$ e $A3$ da Proposição 1.23. Para tanto, considere a seguinte definição.

Definição 1.25 (Propriedade Genérica). Dado um conjunto, dizemos que uma propriedade é *genérica* entre seus elementos, quando o subconjunto de elementos que satisfazem essa propriedade contém um conjunto aberto e denso.

De forma intuitiva, se um dado sistema não possui uma propriedade genérica, existe um sistema praticamente igual a ele (com parâmetros arbitrariamente próximos) com a mesma propriedade. Por outro lado, se um sistema possui uma propriedade genérica, perturbações suficientemente pequenas não fazem com que ele a perca. Para uma discussão sobre propriedades genéricas, ver página 158 de (HIRSCH; SMALE, 1974).

As hipóteses $A1$ e $A2$ são propriedades genéricas para sistemas dinâmicos não lineares (ver (PEIXOTO, 1967)). Isso significa que, na prática, muitas vezes as hipóteses $A1$ e $A2$ são admitidas como satisfeitas pelo sistema e não são verificadas.

Infelizmente, o mesmo não se aplica à hipótese $A3$. Ela não é genérica. Além disso, sua verificação é difícil pois implica na necessidade de se conhecer os conjuntos limites contidos na fronteira da região de estabilidade. Para sistemas com dinâmica complexa, estes conjuntos podem ser órbitas periódicas ou conjuntos caóticos, por exemplo.

Este fator motivou a busca por formas de se substituir a hipótese $A3$ por hipóteses mais simples. Uma destas iniciativas se concretiza através do uso de Funções Energia (FE) conforme discutido na seção 1.5. Neste caso, a verificação da hipótese $A3$ é substituída pela busca por uma FE para o sistema. Na verdade, esta tarefa também não é simples e, muitas vezes, o sistema em estudo nem mesmo admite uma FE.

Uma nova forma de contornar esta dificuldade surge com a utilização de Funções Energia Generalizadas. Este conceito foi introduzido em (ALBERTO; CHIANG, 2012a) e consiste da principal motivação desse trabalho. Na seção 1.7 são exibidos alguns resultados que, baseados na existência deste tipo de função auxiliar, permitem obter conclusões a respeito da região de estabilidade. A utilização de FEG no estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares será discutida nos capítulos 2 e 3.

1.5 Funções Energia

Concluir sobre a estabilidade assintótica de uma trajetória em um sistema dinâmico não linear sem proceder com a integração das equações diferenciais que modelam o sistema consiste na ideia central dos métodos que serão estudados neste trabalho.

Em muitos sistemas físicos, essa avaliação pode ser realizada utilizando-se diretamente da energia total do sistema. Por exemplo, a partir do conhecimento da energia total (energia cinética mais energia potencial) de um objeto em movimento, é possível concluir imediatamente se ele pode transpor uma barreira potencial. Basta comparar a energia total do sistema e a energia necessária para transpor a barreira.

Nestes casos, se x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são as variáveis de estado do sistema, a energia total $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função somente das variáveis de estado.

Em sistemas mais gerais, para os quais não se tem uma formulação da energia que possibilite essa verificação, o papel da energia pode ser realizado por uma função auxiliar que, calculada ao longo das trajetórias, permite extrair conclusões sobre o conjunto ω -limite das trajetórias.

O conceito de Função Energia (FE) foi introduzido com este objetivo. De fato, a existência de uma FE implica na hipótese não genérica A3 da Proposição 1.23 apresentado na seção 1.3 (ver (CHIANG; HIRSCH; WU, 1988)). Mais do que isso, sistemas com FE só possuem pontos de equilíbrio como elementos críticos.

Infelizmente, mesmo em sistemas que admitem uma FE, a FE não pode ser expressa apenas como função das variáveis de estado porque também possui dependência com a trajetória do sistema no espaço de estados. Este, por exemplo, é o caso de sistemas elétricos de potência, se forem consideradas as perdas nas linhas de transmissão (ver (ALBERTO; CHIANG, 2012b; ATHAY; PODMORE; VIRMANI, 1979; CHIANG, 1989)).

Por esta razão, muitas vezes, são utilizadas as chamadas Funções Energia Numéricas que aproximam a parcela de energia dependente da trajetória supondo uma trajetória retilínea no espaço de estados (ver (KHAN; CHANDA; KONAR, 2013)). Esta aproximação faz com que uma Função Energia Numérica não seja, de fato, uma FE e, portanto, não exista rigor na sua utilização em conjunto com métodos baseados em FE (ver (ALBERTO; CHIANG, 2007)).

O objetivo deste capítulo é exibir resultados que vinculem a existência de uma FE com características da região de estabilidade de um PEAE.

Definição 1.26 (Função de Lyapunov). Seja x_s um ponto de equilíbrio de (1.1) e seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto contendo x_s . Se $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e diferenciável tal que:

$$\text{L1. } V(x_s) = 0;$$

$$\text{L2. } V(x) > 0, \text{ para todo } x \in U \text{ e } x \neq x_s;$$

$$\text{L3. } \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0, \text{ para todo } x \in U,$$

então, dizemos que V é uma *função de Lyapunov* para o sistema (1.1). Além disso, se U puder ser tomado igual a $\mathbb{R}^n$, dizemos que V é uma *função de Lyapunov global*.

Observe que o item L3 da definição 1.26 implica que a função V é não-crescente ao longo de trajetórias. De fato, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e se V cumpre com o item L3:

$$\frac{\partial}{\partial t}(V \circ \phi(t, x_0)) = \nabla V(\phi(t, x_0)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x_0) = \nabla V(\phi(t, x_0)) \cdot f(\phi(t, x_0)) \leq 0.$$

O teorema a seguir permite obter conclusões sobre a estabilidade assintótica de uma trajetória com base na existência de uma função de Lyapunov. Para sua demonstração ver página 193 de (HIRSCH; SMALE, 1974).

Teorema 1.27. *Seja x_s um ponto de equilíbrio de (1.1). Se existe uma função de Lyapunov $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para x_s , então, x_s é um ponto de equilíbrio estável. Além disso, se*

$$\text{L3'. } \nabla V(x) \cdot f(x) < 0,$$

para todo $x \in U - \{x_s\}$, então x_s é assintoticamente estável.

Quando uma função de Lyapunov cumpre com a hipótese L3' do Teorema 1.27, dizemos que é uma *função de Lyapunov estrita*.

Observe que a existência de uma função de Lyapunov é condição suficiente para que um ponto de equilíbrio seja estável (ou assintoticamente estável, no caso de uma função de Lyapunov estrita), porém, não é uma condição necessária. Na verdade, a existência de funções de Lyapunov globais para um sistema, implica em sérias restrições a sua dinâmica. Sendo assim, além de não existir uma maneira sistemática para encontrar tais funções, elas nem mesmo existem para sistemas com dinâmica mais complicada.

Isso motiva a busca por outras funções auxiliares que permitam conclusões sobre a estabilidade dos pontos de equilíbrio, mas que, ao mesmo tempo, não imponham muitas restrições a dinâmica do sistema. Uma tentativa nesta direção é ilustrada na definição a seguir.

Definição 1.28 (Função Energia). Considere o sistema (1.1). Se $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e diferenciável tal que:

$$\text{E1. Para todo } x_0 \in \mathbb{R}^n, \nabla V(\phi(t, x_0)) \cdot f(\phi(t, x_0)) \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

E2. Se $f(x_0) \neq 0$, então $\{t \in \mathbb{R} : \nabla V(\phi(t, x_0)) \cdot f(\phi(t, x_0)) = 0\}$ tem medida nula;

E3. Para toda trajetória $\phi(t, x_0)$, se $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |V(\phi(t, x_0))| < \infty$, então $\phi(t, x_0)$ é limitada para todo $t > 0$;

então, dizemos que V é uma *função energia* para (1.1).

Embora a Definição 1.28 possua uma certa semelhança com a Definição 1.26, uma FE é menos restritiva com respeito à dinâmica do sistema que a admite quando comparada a uma FL global. Em particular, elas podem ser admitidas por sistemas com vários pontos de equilíbrio.

Na próxima seção são exibidos alguns resultados que permitem extrair informações sobre a região de estabilidade de um conjunto atrativo através de uma FE para o sistema.

1.6 Funções Energia e a Região de Estabilidade

O objetivo principal desta seção é mostrar que a existência de uma FE implica na hipótese A3 da Proposição 1.23. Desta forma, pode-se substituir a necessidade em se verificar a condição A3 pela busca por uma FE para o sistema sob análise. O primeiro resultado fornece uma importante informação sobre o comportamento assintótico de sistemas que possuem uma FE.

Teorema 1.29. *Se o sistema (1.1) admite uma função energia V , então toda solução limitada converge para um ponto de equilíbrio.*

Em (CHIANG; WU; VARAIYA, 1987), o Teorema 1.29 é enunciado de uma forma mais forte. Na verdade, não é necessário que V seja uma função energia, basta que ela cumpra com as exigências E1 e E2 da definição de FE (ver definição 1.28).

Este resultado assegura que a existência de uma FE para um sistema restringe fortemente o comportamento dinâmico de suas soluções. De fato, se um sistema admite FE, sua dinâmica não pode conter, por exemplo, órbitas periódicas ou caos (ver (ALBERTO; CHIANG, 2012a)). Logo, se um sistema apresenta algumas destas características dinâmicas, então ele não admite uma FE.

O resultado a seguir fornece um resultado mais forte para as trajetórias na fronteira da região de estabilidade.

Teorema 1.30. *Se o sistema (1.1) admite uma função energia V e $x_s \in \mathbb{R}^n$ é um PEAE de (1.1), então toda solução na fronteira da região de estabilidade $\partial A(x_s)$ é limitada e converge para um ponto de equilíbrio em $\partial A(x_s)$ quando $t \rightarrow \infty$.*

O Teorema 1.30, provado em (CHIANG; HIRSCH; WU, 1988), permite uma caracterização da região de estabilidade que pode ser enunciada através de um corolário. Este resultado foi extraído de (CHIANG, 2011), página 65.

Corolário 1.31. *Se o sistema (1.1) admite uma função energia V e $x_s \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (1.1), então se $E \subset \mathbb{R}^n$, é o conjunto de todos os pontos de equilíbrio de (1.1),*

$$\partial A(x_s) \subseteq \bigcup_{x \in E \cap \partial A(x_s)} \mathcal{W}^s(x).$$

Vale ressaltar que, $\mathcal{W}^s(x)$ é o conjunto estável de x . No caso em que o sistema (1.1) satisfaz à hipótese A1, ou seja, todos os pontos de equilíbrio são hiperbólicos, $\mathcal{W}^s(x)$ possui uma estrutura de variedade diferenciável e denotamos por $W^s(x)$.

O Corolário 1.31 sugere que uma boa aproximação da região de estabilidade pode ser obtida através da integração das equações do sistema (1.1), em sentido reverso, a partir da vizinhança em $\partial A(x_s)$ dos pontos de equilíbrio em $\partial A(x_s)$. Essa abordagem é semelhante à desenvolvida em (GENESIO; TARTAGLIA; VICINO, 1985).

Além disso, ele motiva o desenvolvimento de outros métodos para o estudo da região de estabilidade através da estimativa das variedades estáveis dos pontos de equilíbrio pertencentes a sua fronteira. Um desses métodos realizam esta aproximação através de superfícies quadráticas obtidas pela aproximação do campo f por sua expansão em série de Taylor de segunda ordem (ver (CHENG; MA, 2003)). Outro propõe aproximações quadráticas através de mudanças de coordenadas que desacoplam a parte linear do campo (ver (VENKATASUBRAMANIAN; JI, 1997)). Mais um exemplo de aproximação quadrática pode ser encontrada em (SAHA et al., 1997).

Uma outra contribuição importante do Teorema 1.30 na teoria de regiões de estabilidade é o fato dele afirmar que a existência de uma FE implica na hipótese A3 da Proposição 1.23. Embora a hipótese A3 seja mais geral do que a existência de uma FE, a busca por uma FE se torna uma alternativa à complicada tarefa de se verificar a hipótese A3.

1.7 Funções Energia Generalizadas - FEG

Na seção anterior, vimos que a existência de uma FE implica na hipótese A3 da Proposição 1.23 e, portanto, permite que os resultados de caracterização da fronteira da região de estabilidade possam ser aplicados a sistemas que admitem FE sem a necessidade da verificação da hipótese A3.

Em contrapartida, a existência de uma FE para um sistema tem implicações sobre o comportamento dinâmico de suas soluções. De fato, toda solução limitada converge para

um ponto de equilíbrio quando o tempo tende para infinito. Consequentemente, sistemas que possuem órbitas periódicas ou soluções caóticas não admitem FE (ver (CHIANG, 1989)).

É neste contexto que o conceito de Função Energia Generalizada (FEG) foi introduzido em (ALBERTO; CHIANG, 2012a; ALBERTO; CHIANG, 2012b). Embora funções energia generalizadas sejam mais fáceis de serem encontradas e possam ser admitidas por uma classe bastante geral de sistemas, é necessário desenvolver uma teoria que permita o estudo da estabilidade dos sistemas que as admitem.

Um importante benefício da utilização de métodos baseados em FEG é a possibilidade de extrair informações acerca da dinâmica do sistema sem a necessidade de se conhecer os conjuntos invariantes na fronteira da região de estabilidade. Métodos que usam FEG exigem a análise de conjuntos bem mais simples, como mostrado mais adiante.

Dada uma função de classe $\mathcal{C}^1$, $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, considere o conjunto

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \nabla V(x) \cdot f(x) \geq 0 \right\}.$$

Definição 1.32. Dizemos que uma função de classe $\mathcal{C}^1$, $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função energia generalizada* para o sistema (1.1) quando:

- G1. O conjunto C possuir um número finito de componentes conexas;
- G2. O conjunto C for limitado;
- G3. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se $V(\phi(t, x))$ for limitada para $t \geq 0$ então $\phi(t, x)$ também for limitada para todo $t \geq 0$.

No caso de uma FEG, em contraste com uma FE, permite-se que sua avaliação ao longo de trajetórias, possua intervalos de tempo com comportamento crescente.

Essa característica torna a FEG mais “flexível”, fazendo com que seja admitida por uma classe maior de sistemas quando comparadas a FE. Além disso, essa característica gera maior liberdade de escolha para funções energia generalizadas tornando sua busca mais simples e com maior chance de sucesso.

Sob o ponto de vista das aplicações, dependendo de informações adicionais sobre funções f e V , G1 e G2 podem ser assumidas sem verificação adicional. Por exemplo, se V e f são funções polinomiais, então G1 e G2 podem ser garantidas através do cumprimento de uma desigualdade (ver capítulo 4).

Contudo, a condição G3 não é fácil de ser verificada e, normalmente, seu cumprimento é assegurado através uma exigência mais forte, mas de simples verificação. Por exemplo, em (SIQUEIRA; ALBERTO; BRETAS, 2015) é enunciado um resultado que fornece

uma condição suficiente para o cumprimento da hipótese $G3$. Um outro exemplo será discutido no Capítulo 4, no caso em que V e f são funções polinomiais e cumprem com uma determinada desigualdade, $G3$ fica satisfeita.

Na seção seguinte, são exibidos alguns resultados que permitem conclusões sobre o comportamento dinâmico dos sistemas que possuem [FEG](#).

1.8 Função Energia Generalizada e a Região de Estabilidade

Nesta seção, serão exibidos alguns resultados que vinculam a existência de uma [FEG](#) com características dinâmicas do sistema e das soluções sobre a fronteira da região de estabilidade.

O primeiro resultado, provado em ([ALBERTO; CHIANG, 2012a](#)), tem como objetivo fornecer informações sobre o comportamento assintótico das soluções do sistema (1.1) supondo que ele admita uma [FEG](#).

Teorema 1.33. *Seja V uma [FEG](#) para o sistema (1.1) e considere o conjunto*

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V(x) \cdot f(x) = 0\}.$$

Para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$, suponha que a solução $\phi(t, x_0)$ seja limitada para $t > 0$. Então,

1. *Ou existe um valor $L \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\omega(x_0) \subset \{M \cap V^{-1}(L)\}$$

2. *Ou existe ao menos uma componente conexa C_j do conjunto C tal que $\omega(x_0) \cap C_j \neq \emptyset$.*

A Figura 5 mostra o comportamento geral das soluções limitadas de um sistema que admite [FEG](#). De acordo com o Teorema 1.33, as órbitas limitadas deste sistema devem acumular na fronteira do conjunto C ou, pelo menos, em um conjunto que intersecta C .

Figura 5 – Comportamento geral das órbitas limitadas de um sistema que admite [FEG](#).

O teorema enunciado a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em (ALBERTO; CHIANG, 2012a), contribui de forma importante na construção de um método direto que faça uso de funções energia generalizadas.

Teorema 1.34. *Seja σ um conjunto atrativo e V uma função energia generalizada para o sistema (1.1). Então toda trajetória em $\partial A(\sigma)$ é limitada para $t > 0$.*

O Teorema 1.34 afirma que um sistema que admite FEG, necessariamente, cumpre com a hipótese C2 do Teorema 1.17. Sendo assim, de forma similar ao que foi feito no caso das funções energia, a simples existência de uma FEG implica em hipóteses difíceis de serem verificadas nos teoremas de caracterização, permitindo a substituição da verificação destas hipóteses pela busca por uma FEG.

Através do Teorema 1.33 e do Teorema 1.34, podemos enunciar o seguinte Teorema apresentado em (ALBERTO; CHIANG, 2012a).

Teorema 1.35. *Seja σ um conjunto atrativo e V uma FEG para o sistema (1.1). Então, toda trajetória $\phi(t, x_0) \subset \partial A(\sigma)$:*

1. *Ou converge para a maior coleção de conjuntos invariantes contidos em $M \cap \partial A(\sigma)$ quando $t \rightarrow \infty$;*
2. *Ou existe uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $t_n \rightarrow \infty$ e $\phi(t_n, x_0) \in C \cap \partial A(\sigma)$. Além disso, existe k tal que $\omega(x_0) \cap C_k \neq \emptyset$.*

Este resultado fornece uma relevante informação a respeito da localização dos conjuntos ω -limites de um sistema que admite FEG. De fato, existem dois comportamentos possíveis para as órbitas contidas na fronteira da região de estabilidade: ou ela intersecta pelo menos uma componente conexa C_j de forma recorrente ou ela acumula na fronteira do conjunto C (ver Figura 5).

Vejamos agora o resultado principal do capítulo, apresentado em (ALBERTO; CHIANG, 2012a).

Teorema 1.36. *Suponha que o sistema (1.1) admita uma função energia generalizada V e possua um conjunto atrativo σ . Além disso, suponha que seu conjunto limite positivo restrito à fronteira da região de estabilidade $L_+(f|_{\partial A(\sigma)})$ seja composto por uma quantidade enumerável de conjuntos compactos invariantes $\{\Lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Então,*

$$\partial A(\sigma) \subset \bigcup_i \mathcal{W}^s(\Lambda_i).$$

Além disso, cada componente compacta Λ_i intersecta alguma componente conexa C_j .

Vale lembrar que, nos casos em que Λ_i é um conjunto hiperbólico, o conjunto estável $\mathcal{W}^s(\Lambda_i)$ é, de fato, a variedade estável $W^s(\Lambda_i)$.

O Teorema 1.36 decorre do Teorema 1.17, do Teorema 1.34 e do Teorema 1.35. Para demonstração completa, ver Teorema 4.4 de (ALBERTO; CHIANG, 2012a).

Na seção seguinte é mostrado, através de um exemplo, como os resultados apresentados aqui podem ser utilizados na análise da região de estabilidade de sistemas com dinâmica bastante complexa.

1.9 Exemplo

O exemplo mostrado aqui foi discutido em (ALBERTO; CHIANG, 2012a) e ilustra quão complexa pode ser a região de estabilidade de um sistema dinâmico não linear. Ele será utilizado para ilustrar como uma FEG pode ser usada na obtenção de informações sobre a região de estabilidade.

Exemplo 1.37: Considere o seguinte sistema de equações diferenciais não lineares,

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{(\sigma - \alpha c^2)x - \sigma y}{1 + \alpha c^2} \\ \dot{y} = \frac{(1 - \alpha c^2)y + xz - rx}{1 + \alpha c^2}, \\ \dot{z} = \frac{(b - \alpha c^2)z - xy}{1 + \alpha c^2} \end{cases} \quad (1.3)$$

onde, $c^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ e $\alpha = 0,0001$.

O sistema (1.3) possui sete pontos de equilíbrio:

$$\begin{aligned} x_1 &= (315,3; -0,6555; 27,98) \\ x_2 &= (-315,3; 0,6555; 27,98) \\ x_3 &= (8,397; 8,323; 27,10) \\ x_4 &= (-8,397; -8,323; 27,10) \\ x_5 &= (0; 0; 163,3) \\ x_6 &= (0; 0; -163,3) \\ x_7 &= (0; 0; 0). \end{aligned}$$

Dos quais, os pontos x_1 e x_2 são assintoticamente estáveis.

Como apresentado em (ALBERTO; CHIANG, 2012a), uma FEG para o sistema é dada por:

$$V(x, y, z) = a(x - x_s)^2 + c(y - y_s)^2 + d(z - z_s)^2, \quad (1.4)$$

onde $a = 2$, $c = d = 8$, $x_s = -315,32$, $y_s = 0,65$ e $z_s = 28$.

O conjunto C tal como na definição 1.32 possui apenas uma componente conexa, além dos pontos de equilíbrio. A Figura 6 mostra o conjunto C .

Figura 6 – O conjunto C para o sistema (1.3) considerando a FEG dada por (1.4). O conjunto invariante caótico Λ , que pertence à fronteira da região de estabilidade do ponto x_2 , intersecta a fronteira de C (ver Teorema 1.35).

O Teorema 1.34 e o Teorema 1.35 afirmam que toda trajetória contida na fronteira da região de estabilidade é limitada e seu conjunto ω -limite deve intersectar o conjunto C . No caso deste exemplo, aparentemente, “quase todas” as órbitas contidas na fronteira da região de estabilidade convergem para um conjunto invariante caótico Λ quando o tempo tende a infinito.

Neste tipo de abordagem, evita-se a necessidade de conhecer o conjunto invariante Λ , através do conhecimento do conjunto C . O conjunto C é um conjunto facilmente obtido através da FEG. No desenvolvimento de métodos baseados em funções energia generalizadas, é desejável que esta vantagem seja explorada.

2 ESTIMATIVA DA REGIÃO DE QUASE-ESTABILIDADE USANDO FEG

2.1 Introdução

A região de estabilidade desempenha um importante papel no estudo do comportamento assintótico das soluções de sistemas dinâmicos. Aplicações do conceito de região de estabilidade aparecem em diversas áreas da ciência como, por exemplo, no estudo da imunização de uma população em relação a uma dada doença (ver (HETHCOTE; ZHIEN; SHENGBING, 2002)), no projeto de controle automático de voo (ver (CHAKRABORTY; SEILER; BALAS, 2011)) e na análise de estabilidade transitória de sistemas elétricos de potência (ver (CHIANG; WU; VARAIYA, 1987)).

Determinar com precisão a região de estabilidade de um conjunto atrativo de um sistema dinâmico não linear é, em geral, um problema difícil. Por essa razão, diversos métodos computacionais foram desenvolvidos para obter estimativas da região de estabilidade.

Desde a introdução do conceito de Função Energia Generalizada (FEG) em 2012, vários trabalhos têm sido desenvolvidos para resolver diferentes problemas relativos à estabilidade de sistemas dinâmicos. A avaliação da estabilidade de sistemas de energia elétrica com conversores de potência (SIQUEIRA; ALBERTO; BRETAS, 2015) e o projeto de sistemas de controle (ALBERTO; CHIANG, 2012b) são alguns exemplos de como esta ferramenta pode ser usada para resolver problemas práticos (ver (CHIANG; ALBERTO, 2015), para outros exemplos).

Os trabalhos acima mencionados discutem a caracterização da fronteira da região de estabilidade (ver (ALBERTO; CHIANG, 2012a)), bem como alguns resultados de estimativa para classes particulares de sistemas (SIQUEIRA; ALBERTO; BRETAS, 2015). Métodos promissores foram apresentados nesses trabalhos mostrando que a teoria de FEG se aplica a várias situações, sugerindo a extensão de métodos baseados em FE para sistemas dinâmicos mais gerais.

A teoria desenvolvida neste capítulo constitui as bases de um método computacional para obter estimativas da região de estabilidade. Este método computacional é uma extensão do método *Closest UEP*, que é aplicado a sistemas que admitem FE, à classe de sistemas que admitem FEG.

No método proposto, a estimativa é obtida sem a necessidade de computar as trajetórias do sistema (ou seja, sem resolver as equações diferenciais do modelo) e sem conhecer a natureza dos conjuntos invariantes na fronteira da região de estabilidade. Estas características evitam tarefas difíceis e com custo computacional elevado durante a obtenção da estimativa.

Na seção 2.2 serão discutidas as implicações da existência de uma FEG na dinâmica do sistema que a admite. Em seguida, na seção 2.3, usaremos estas implicações para extrair informações que permitam a construção de um algoritmo para a estimativa da região de quase-estabilidade de um conjunto atrativo.

Um algoritmo conceitual para a estimativa da região de quase-estabilidade será apresentado na seção 2.4 e uma discussão sobre sua implementação será realizada na seção 2.5. A seção 2.6 é dedicada a ilustrar a aplicação do algoritmo de estimativa através de exemplos.

Finalmente, são apresentadas as conclusões, na seção 2.7, e os próximos passos no desenvolvimento do método proposto, na seção 2.8.

2.2 Conjuntos Limites de Sistemas que Aditem FEG

Considere o sistema de equações diferenciais autônomas,

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.1)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e $\dot{x}$ denota a derivada de x com respeito à variável t . Vamos denotar por $t \mapsto \Phi(t, x_0)$, a única solução de (2.1) satisfazendo $\Phi(0, x_0) = x_0$.

Dada uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, seja $H \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto definido por,

$$H = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) > 0\}}, \quad (2.2)$$

onde $\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}(V \circ \Phi(t, x)) = \nabla V(x) \cdot f(x)$.

De forma intuitiva, o conjunto H é o fecho do conjunto formado por todos os pontos $x \in \mathbb{R}^n$ nos quais a função V cresce ao longo das trajetórias do sistema.

Denotaremos, de agora em diante, o conjunto das componentes conexas de H por $\{H_i\}_{i \in \Gamma}$, onde $\Gamma \subset \mathbb{N}$.

Outros trabalhos (ver (ALBERTO; CHIANG, 2012a; PARASTEGARI; KHODABAKHSHIAN, 2010)) enunciam resultados parecidos com os resultados desta seção utilizando o conjunto C (definido na seção 1.7) ao invés do conjunto H . No entanto, entendemos que o conjunto H é mais adequado para a implementação computacional pois, diferente do conjunto C , não contém pontos isolados e conjuntos “magros” (com interior vazio).

Outra diferença importante da abordagem apresentada aqui é que a teoria construída a partir do conjunto H fornece informações mais detalhadas a respeito da localização dos conjuntos ω -limites das soluções do sistema sob análise, como será visto ao longo desta seção. Em contrapartida, diferente do conjunto C , o conjunto H pode não conter todos os pontos de equilíbrio do sistema.

Note que, $H = \overline{\text{int}C}$. Logo, $H \subset C$ e, portanto, $\partial H \subset \partial C$.

Para ilustrar como o conjunto H pode fornecer informações sobre os pontos de equilíbrio do sistema (2.1), considere o seguinte resultado.

Proposição 2.1. *Seja V uma FEG para o sistema (2.1). Se $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico de (2.1) e $\nabla V(x) \neq 0$, então existe uma componente conexa H_i de H tal que $x \in \partial H_i$.*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ um ponto de equilíbrio para o sistema (2.1) e considere $n(x)$ o vetor dado por,

$$n(x) = \nabla \dot{V}(x) = (Df)^T(x) \nabla V(x) + D^2V(x)f(x). \quad (2.3)$$

Neste caso, como $f(x) = 0$,

$$n(x) = (Df)^T(x) \nabla V(x).$$

Uma vez que x é um ponto de equilíbrio hiperbólico, todos os autovalores da derivada $Df(x)$ possuem parte real diferente de zero. Além disso, por hipótese, $\nabla V(x) \neq 0$. Portanto, $n(x) \neq 0$.

A expansão em série de Taylor de $\dot{V}$ próxima a x é dada por,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x+h) &= \dot{V}(x) + \nabla \dot{V}(x) \cdot h + \mathcal{O}(|h|^2) \\ &= n(x) \cdot h + \mathcal{O}(|h|^2). \end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, e $h = \varepsilon n(x)$ temos,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x+h) &= n(x) \cdot h + \mathcal{O}(|h|^2) = \varepsilon |n(x)|^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \dot{V}(x-h) &= n(x) \cdot h + \mathcal{O}(|h|^2) = -\varepsilon |n(x)|^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Então, $x+h \in H$ e $x-h \notin H$.

Como $\varepsilon > 0$ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, $x \in \partial H_i$ para algum $i \in \Gamma$. $\square$

A Proposição 2.1 permite concluir que, em sistemas em que todos os pontos de equilíbrio são hiperbólicos, todos os pontos de equilíbrio estão na fronteira de alguma componente conexa do conjunto H , exceto aqueles que coincidem com pontos críticos de V . Como já observado anteriormente, as componentes conexas do conjunto H possuem interior não vazio, o que as tornam mais facilmente detectáveis sob o ponto de vista computacional.

Agora, considere a seguinte definição.

Definição 2.2 (Ponto crítico não degenerado). Dizemos que um ponto x é um *ponto crítico não degenerado* de $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ quando $\nabla V(x) = 0$ e a matriz da segunda derivada da função V no ponto x possuir determinante diferente de zero.

Com a Definição 2.2, podemos enunciar um resultado que relaciona o conjunto H e os pontos críticos de uma FEG para o sistema (2.1).

Proposição 2.3. *Seja V uma FEG para o sistema (2.1). Se $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto crítico não degenerado de V tal que $f(x) \neq 0$. Então existe uma componente conexa H_i de H tal que $x \in \partial H_i$.*

A demonstração da Proposição 2.3 é muito similar à demonstração da Proposição 2.1 e será omitida.

O próximo resultado fornece uma informação importante sobre a fronteira da região de quase-estabilidade. Ela garante que todas as soluções sobre a fronteira da região de quase-estabilidade são limitadas e, portanto, tem um conjunto ω -limite não vazio.

Proposição 2.4. *Seja V uma FEG para o sistema (2.1) e σ um conjunto atrativo. Então, para todo $x \in \partial A_q(\sigma)$, a solução $t \rightarrow \Phi(t, x)$ é limitada para $t > 0$.*

A prova deste resultado segue imediatamente do Teorema 4.2 de (ALBERTO; CHIANG, 2012a) (reproduzido no capítulo 1 como Teorema 1.34), uma vez que $\partial A_q(\sigma) \subset \partial A(\sigma)$.

Finalmente, com o objetivo de obter uma descrição completa entre a relação do conjunto H e os pontos de equilíbrio do sistema (2.1), considere $G \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto,

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V(x) = 0, f(x) = 0\},$$

composto por todos os pontos de $\mathbb{R}^n$ que são, simultaneamente, pontos críticos de V e pontos de equilíbrio do sistema.

O seguinte teorema afirma que, sob hipóteses bastante razoáveis, todas as soluções limitadas do sistema aproximam-se do conjunto H ou do conjunto G à medida que o tempo tende ao infinito.

Teorema 2.5. *Considere o sistema (2.1). Suponha que $L_+(f)$ seja um conjunto hiperbólico e que $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma FEG para o sistema tal que todos seus pontos críticos sejam não degenerados. Então, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $\Phi(t, x)$ é limitada para $t > 0$,*

$$\omega(x) \cap (\partial H \cup G) \neq \emptyset.$$

Demonstração. Como a solução $\Phi(t, x)$ é limitada para $t > 0$, $\omega(x)$ é um conjunto não vazio, compacto, invariante e conexo (ver Proposição 1.4 de (PALIS JR.; MELO, 1982)).

Agora, vamos dividir a prova em três casos exaustivos:

- a – Existe $t^* > 0$ tal que $\Phi(t, x) \notin \text{int}(H)$ para todo $t > t^*$;
- b – Existe $t^* > 0$ tal que $\Phi(t, x) \in \text{int}(H)$ para todo $t > t^*$;
- c – Existem sequências de tempos $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\Phi(t_n, x) \notin \text{int}(H)$, $\Phi(s_n, x) \in \text{int}(H)$, $t_n \rightarrow \infty$, $s_n \rightarrow \infty$.

Caso a – Sem perda de generalidade, podemos tomar $t^* = 0$ e supor que $\Phi(t, x) \notin \text{int}(H)$ para todo $t > 0$. Então, $t \mapsto V(\Phi(t, x))$ é uma função não crescente para $t > 0$ e limitada. Assim, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $V(\Phi(t, x)) \rightarrow L$ como $t \rightarrow \infty$.

Seja $p \in \omega(x)$. Então, existe $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\Phi(t_n, x) \rightarrow p$ e $V(\Phi(t_n, x)) \rightarrow L$. Portanto, pela continuidade de V , temos que $V(p) = L$. Como $p \in \omega(x)$ foi tomado arbitrariamente, $V(\omega(x)) = \{L\}$. Além disso, uma vez que $\omega(x)$ é invariante, temos que $\dot{V}(\omega(x)) = \{0\}$.

Como $\dot{V}(p) = 0$, temos que

$$\omega(x) \subset G \cup M_e \cup M_c \cup M_p,$$

onde $M_e = \{x \in M : f(x) = 0, \nabla V(x) \neq 0\}$, $M_c = \{x \in M : f(x) \neq 0, \nabla V(x) = 0\}$ e $M_p = \{x \in M : f(p) \cdot \nabla V(x) = 0, f(x) \neq 0, \nabla V(x) \neq 0\}$.

Se $p \in G$, não há o que provar. Se $p \in M_e$ ou $p \in M_c$, a Proposição 2.1 ou a Proposição 2.3 leva à tese do teorema, respectivamente.

O último caso é quando $p \in M_p$, ou seja, $f(p) \neq 0$, $\nabla V(p) \neq 0$ e $f(p) \cdot \nabla V(x) = 0$.

Por hipótese, $L_+(f)$ é um conjunto hiperbólico. Portanto, existem subespaços E_p^+ , E_p^- e E_p^0 , tais que $f(p) \in E_p^0$ e $E_p^+ \oplus E_p^- \oplus E_p^0 = \mathbb{R}^n$. Além disso, existem variedades W^s e W^u tais que $T_p W^s = E_p^-$ e $T_p W^u = E_p^+$ (ver Teorema 1.13).

Considere $\Pi_+ : \mathbb{R}^n \rightarrow E_p^+$ a projeção ortogonal sobre o subespaço E_p^+ e $\Pi_- : \mathbb{R}^n \rightarrow E_p^-$, a projeção ortogonal sobre o subespaço E_p^- .

Como $f(p) \cdot \nabla V(p) = 0$ e $\nabla V(p) \neq 0$, segue que, $\Pi_+(\nabla V(p)) \neq 0$ ou $\Pi_-(\nabla V(p)) \neq 0$. Vamos assumir que $\Pi_+(\nabla V(p)) \neq 0$. O outro caso segue analogamente.

Seja $\mu > 1$ a constante da definição de conjunto hiperbólico (ver definição 1.12) e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, de tal forma que $\mu - \varepsilon > 1$. Como $T_p W^u = E_p^+$, o Teorema 1.13 conclui que existe $u \in W^u$ tal que $(u - p) \cdot \nabla V(p) > 0$ e

$$|\Phi(-t, u) - \Phi(-t, p)| < \kappa(\varepsilon)(\mu - \varepsilon)^{-t}|u - p|,$$

para todo $t > 0$, onde $\kappa(\varepsilon)$ é uma constante que depende da escolha de ε .

Uma vez que $(u - p) \cdot \nabla V(p) > 0$, temos $V(u) > V(p)$. Por outro lado, temos que $V(\Phi(-t, u)) \rightarrow V(p)$ quando $t \rightarrow \infty$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $t_u > 0$ tal que $\Phi(-t_u, u) \in H$.

Agora, considere $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em W^u tais que $|u_n - p| = 1/n$. Assim, podemos definir a sequência de pontos $y_n = \Phi(-t_{u_n}, u_n) \in H$. Pela construção acima, $d(y_n, \omega(x)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Como $\{y_n\}$ é uma sequência de pontos de H e H é um conjunto compacto, $\{y_n\}$ possui uma subsequência convergente que converge para um ponto $\bar{y} \in \omega(x) \cap H$.

Uma vez que $\Phi(t, x) \notin \text{int}(H)$ para todo $t > 0$, temos $\bar{y} \in \partial H$ e, portanto, $\omega(x) \cap \partial H \neq \emptyset$.

No caso em que $\Pi_-(\nabla V(p)) \neq 0$, observe que $\Pi_-(-\nabla V(p)) = -\Pi_-(\nabla V(p))$, uma vez que Π_- é um operador linear. Então, podemos proceder com uma construção similar para a sequência $\{y_n\}$ tomando $u \in W^s$ tal que $(u - p) \cdot \nabla V(p) < 0$ e

$$|\Phi(t, u) - \Phi(t, p)| < \kappa(\varepsilon)(\lambda + \varepsilon)^t |u - p|,$$

para todo $t > 0$, onde $\kappa(\varepsilon)$ é uma constante, $\lambda \in (0, 1)$ é como na definição de conjunto hiperbólico e $\varepsilon > 0$ é tal que $\lambda + \varepsilon < 1$.

Caso b – Sem perda de generalidade, podemos tomar $t^* = 0$ e assumir que $\Phi(t, x) \in \text{int}(H)$ para todo $t > 0$. Assim, a função $t \mapsto V(\Phi(t, x))$ é limitada e crescente. Portanto, ela converge para algum número real L . Similar ao caso (a), $\omega(x) \subset G \cup M_e \cup M_c \cup M_p$.

Seja $p \in \omega(x)$. Analogamente ao caso (a), se $p \in G$ não há o que provar e se $p \in M_c \cup M_e$ a prova decorre diretamente da aplicação da Proposições 2.1 ou da Proposição 2.3. Então podemos nos ater ao caso em que $p \in M_p$. Assim, $\Pi_+(\nabla V(p)) \neq 0$ ou $\Pi_-(\nabla V(p)) \neq 0$.

Quando $\Pi_+(\nabla V(p)) \neq 0$, podemos tomar $u \in W^u$ tal que $(u - p) \cdot \nabla V(p) < 0$ e

$$|\Phi(-t, u) - \Phi(-t, p)| < \kappa(\varepsilon)(\mu - \varepsilon)^{-t} |u - p|,$$

para todo $t > 0$, onde $\kappa(\varepsilon)$ é uma constante, $\mu > 1$ e ε é suficientemente pequeno para que $\mu - \varepsilon > 1$.

Uma vez que $V(\Phi(-t, u)) \rightarrow V(p)$ conforme $t \rightarrow \infty$ e $V(u) < V(p)$, podemos construir uma sequência de pontos $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como no caso (a), tal que $y_n \notin H$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\Phi(t, x) \in H$ para todo $t > 0$, temos que $\omega(x) \subset H$. Uma vez que H é um conjunto compacto e, por construção, $d(y_n, \omega(x)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, existe uma subsequência convergente de $\{y_n\}$ que converge para $\bar{y} \in \partial H \cap \omega(x)$. Logo, $\omega(x) \cap \partial H \neq \emptyset$.

No caso em que $\Pi_- \nabla V(p) \neq 0$, a prova segue de maneira análoga a do caso (a).

Caso c – Neste caso, podemos admitir $t_n < s_n < t_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como o número de componentes conexas de H é finito, temos subsequências $\{t_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{s_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tais que, para alguma componente conexa H_i , temos $\Phi(t_{n_k}, x) \in \text{int}(H_i)$, $\Phi(s_{n_k}, x) \notin \text{int}(H_i)$ com $t_{n_k} < s_{n_k} < t_{n_k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Pela continuidade das soluções, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe r_k tal que $t_{n_k} < r_k \leq s_{n_k}$ e $\Phi(r_k, x) \in \partial H_i$. Seja $y_k = \Phi(r_k, x)$. Como H_i é um conjunto compacto, existe uma subsequência $\{y_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $y_{k_j} \rightarrow \bar{y} \in \partial H_i$. Portanto, $\bar{y} \in \omega(x)$ e $\omega(x) \cap \partial H_i \neq \emptyset$, concluindo a prova. $\square$

As hipóteses sobre o sistema, exigidas no Teorema 2.5, são bastante razoáveis em muitos casos. De fato, dentre as funções de classe $\mathcal{C}^2$, a propriedade de que todos os seus pontos críticos sejam não degenerados é genérica (ver (ARNOLD et al., 1998)).

Infelizmente, não se pode afirmar o mesmo sobre a propriedade de que o conjunto $L_+(f)$ seja hiperbólico. No entanto, esta propriedade é também genérica em contextos menos gerais, por exemplo, quando $L_+(f)$ é composto apenas de pontos de equilíbrio e órbitas periódicas (ver (PEIXOTO, 1967)).

Verificar se o conjunto $L_+(f)$ é hiperbólico é uma tarefa bastante complicada e, nas aplicações práticas, deve ser garantida através de propriedades do sistema. Por exemplo, em sistemas planares essa propriedade é genérica e, na maioria dos casos, é assumida como satisfeita e não é verificada.

Teorema 2.5 fornece informações relevantes a respeito do comportamento assintótico das trajetórias de um sistema que admite FEG. De fato, todas as soluções limitadas, necessariamente, aproximam-se dos conjuntos ∂H ou G conforme o tempo evolui. Além disso, os pontos de equilíbrio devem estar localizados sobre a fronteira do conjunto H ou coincidir com um ponto crítico da função V . Figura 7 mostra o comportamento geral das trajetórias do sistema em relação aos conjuntos H e G .

Outra importante consequência do Teorema 2.5 pode ser enunciada na forma do seguinte corolário.

Corolário 2.6. *Seja $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto atrativo para o sistema (2.1). Suponha que $L_+(f)$ seja um conjunto hiperbólico e que $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma FEG para o sistema tal que todos os seus pontos críticos sejam não degenerados. Então, para todo $x \in \partial A_q(\sigma)$,*

$$\omega(x) \cap (\partial H \cup G) \neq \emptyset.$$

A demonstração do Corolário 2.6 segue diretamente da Proposição 2.4 e do Teorema 2.5.

Figura 7 – Comportamento geral das trajetórias de um sistema que admite FEG. Genericamente, toda órbita limitada de um sistema que admite FEG deve convergir para a fronteira do conjunto H , para um ponto de equilíbrio pertencente ao conjunto G ou para um conjunto limite que intersecta H .

O Corolário 2.6 sugere que o conhecimento do conjunto $H \cup G$ é suficiente para inferir o comportamento assintótico das órbitas do sistema (2.1) na fronteira da região de quase-estabilidade sob análise. Isso se deve ao fato de que, a menos dos pontos críticos de V , o conjunto limite positivo intersecta o conjunto ∂H .

Observação 2.7. O Teorema 4.3 apresentado em (ALBERTO; CHIANG, 2012a), fornece informação similar a respeito do comportamento assintótico das trajetórias de sistemas que admitem FEG. O Teorema 2.5, através da adição de hipóteses bastante gerais sobre f e V , permite uma tese mais forte enunciada em termos de $H \cup G$ ao invés de enunciada em termos do conjunto C . Na prática, o Teorema 2.5 exclui a possibilidade de que as soluções do sistema se acumulem sobre componentes conexas “magras” do conjunto C , ou seja, aquelas que possuem interior vazio, a menos que sejam pontos de equilíbrio.

Observação 2.8. Uma extensão natural do conceito de FE para sistema com dinâmica mais complicada, é utilizar funções que sejam constantes nos conjuntos invariantes. Quando o sistema possui órbitas periódicas, por exemplo, esta abordagem resulta em funções auxiliares com pontos críticos degenerados. Isso significa que, além de serem funções bastante particulares, elas não são robustas no sentido de que perdem a propriedade de serem constantes em conjuntos invariantes mediante perturbações.

Dado $L \in \mathbb{R}$, define-se o conjunto de nível

$$S_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq L\}.$$

Dado um conjunto $\sigma \in \mathbb{R}^n$, usaremos a notação $S_L(\sigma)$ para nos referir à componente conexa de S_L que contém σ . Por abuso de notação, se $x \in \mathbb{R}^n$, usaremos $S_L(x)$ para nos

referir a $S_L(\{x\})$. Note que, se σ é um conjunto conexo e L é grande o suficiente, a componente conexa $S_L(\sigma)$ existe e é única.

Diferentemente de como ocorre para os conjuntos de nível de uma FE, os conjuntos de nível de uma FEG não são, em geral, positivamente invariantes. De fato, a presença do conjunto H faz com que a energia generalizada possa aumentar ao longo das órbitas do sistema, permitindo que ela transponha as fronteiras dos conjuntos de nível.

Assim como no caso da teoria de estabilidade de Lyapunov, também em nosso caso, encontrar conjuntos de nível da FEG que sejam positivamente invariantes é fundamental. O resultado a seguir fornece uma condição suficiente para que uma componente conexa de um conjunto de nível de uma FEG seja positivamente invariante.

Teorema 2.9. *Considere que o sistema (2.1) admita uma FEG, $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que para algum $L \in \mathbb{R}$, exista uma componente conexa $S_L(x)$, do conjunto de nível S_L , tal que $\partial S_L(x) \cap H = \emptyset$. Então, $S_L(x)$ é positivamente invariante.*

Demonstração. Seja $x \in S_L$ e suponha, por absurdo, que exista $t_1 > 0$ tal que $\Phi(t_1, x) \notin S_L(x)$. Portanto, existem $t^* \in [0, t_1]$ e $\tau > 0$ tais que $\Phi(t^*, x) \in \partial S_L(x)$ e $\Phi(t^* + t, x) \notin S_L$, para todo $t \in (0, \tau)$.

Seja d a distância entre o conjunto H e ∂S_L . Como H é um conjunto compacto e ∂S_L é um conjunto fechado, $d > 0$. Tome $\varepsilon \in (0, \tau)$ tal que $|\Phi(t, x) - \Phi(t^*, x)| < d$ para todo $t \in (t^*, t^* + \varepsilon)$. Assim, $\Phi(t, x) \notin H$ e $\dot{V}(\Phi(t, x)) \leq 0$, para todo $t \in (t^*, t^* + \varepsilon)$.

Como $\Phi(t^* + t, x) \notin S_L$ para todo $t \in (0, \tau)$, temos que $V(\Phi(t^* + \varepsilon, x)) > L = V(\Phi(t^*, x))$, assim,

$$\begin{aligned} 0 &< V(\Phi(t^* + \varepsilon, x)) - V(\Phi(t^*, x)) \\ &= \int_{t^*}^{t^* + \varepsilon} \dot{V}(\Phi(\xi, x)) d\xi \leq 0. \end{aligned}$$

Levando a uma contradição. □

Um resultado similar ao Teorema 2.9 é apresentado em (CHIANG; ALBERTO, 2015) (Teorema 11.3, página 212). No entanto, o Teorema 2.9 é mais forte que o apresentado em (CHIANG; ALBERTO, 2015) porque está enunciado em termos do conjunto H ao invés do conjunto C .

2.3 Estimativas para a Região de Quase-estabilidade

Nesta seção, vamos mostrar como os resultados da seção 2.2 podem ser usados para obter uma estimativa para a região de quase-estabilidade de um dado conjunto atrativo.

Em (ALBERTO, 2000), um procedimento para se aproximar um conjunto atrativo por um conjunto de nível de uma FEG foi desenvolvido. Através do procedimento apresentado no referido trabalho, um conjunto de nível positivamente invariante que contém o conjunto atrativo pode ser usado como uma aproximação para ele. Este conjunto de nível oferece conclusões importantes sobre a dinâmica do sistema sem a necessidade de se conhecer em detalhes a geometria do conjunto atrativo.

Os resultados nesta seção são desenvolvidos sobre a hipótese de existência de tal aproximação, a qual é bastante razoável em muitos casos. O próximo resultado afirma que, sobre essa hipótese, é possível “aumentar” o conjunto de nível, utilizado para aproximar o conjunto atrativo, até que sua fronteira toque o conjunto H ou o conjunto G , para obter uma estimativa para a região de quase-estabilidade do conjunto atrativo.

Proposição 2.10. *Seja σ um conjunto atrativo para o sistema (2.1) e V uma função energia generalizada. Considere que o conjunto limite positivo $L_+(f)$ seja um conjunto hiperbólico e que todos os pontos críticos de V sejam não degenerados. Além disso, suponha que para algum $L \in \mathbb{R}$, exista uma componente conexa $S_L(\sigma)$ de S_L tal que $\sigma \subset S_L(\sigma) \subset A_q(\sigma)$ e que $\partial S_L(\sigma) \cap H = \emptyset$. Então, para todo $K > L$, tal que $(S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)) \cap H = \emptyset$ e $\nabla V(x) \neq 0$ para todo $x \in S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)$, tem-se que $S_K(\sigma) \subset A_q(\sigma)$.*

Demonstração. Como $(S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)) \cap H = \emptyset$, do Teorema 2.9, $S_K(\sigma)$ é um conjunto positivamente invariante. Similarmente, $S_L(\sigma)$ é também um conjunto positivamente invariante.

Assuma, por absurdo, que $S_K(\sigma) \not\subset A_q(\sigma)$. Como $S_L(\sigma) \subset S_K(\sigma)$ e $S_K(\sigma)$ é um conjunto conexo, existe $p \in \partial A_q(\sigma) \cap (S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma))$.

Como $S_L(\sigma) \subset A_q(\sigma)$, $\partial A_q(\sigma)$ é um conjunto invariante (ver (CHIANG; FEKIH-AHMED, 1996)) e $\Phi(t, p)$ é limitada (ver Teorema 4.2 de (ALBERTO; CHIANG, 2012a)), $\Phi(t, p) \subset S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)$ para todo $t > 0$ e, portanto, $\omega(p) \subset \overline{S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)}$.

Uma vez que $\overline{S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)} = (S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)) \cup \partial S_L(\sigma)$ e, por hipótese, $S_L(\sigma) \subset A_q(\sigma)$, tem-se que $\omega(p) \cap \partial S_L(\sigma) = \emptyset$. Assim, $\omega(p) \subset S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)$.

Pelo Corolário 2.6, $(\partial H \cup G) \cap (S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)) \neq \emptyset$ e, das hipóteses, tem-se $G \cap (S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)) \neq \emptyset$.

Por outro lado, por hipótese, $\nabla V(x) \neq 0$ para todo $x \in S_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)$ chegando a um absurdo pela definição do conjunto G . $\square$

A Figura 8 ilustra o resultado da Proposição 2.10.

Observação 2.11. Em alguns casos, a hipótese de que $S_L(\sigma) \subset A_q(\sigma)$ não precisa ser verificada. Nestes casos, o conjunto de nível $S_K(\sigma)$ fornece uma estimativa para a região de quase-estabilidade do maior conjunto atrativo contido em $S_L(\sigma)$. A existência de conjuntos

Figura 8 – Estimativa para região de estabilidade do conjunto σ obtida após “aumentar” o conjunto de nível $S_L(\sigma)$ até que sua fronteira contenha um ponto de $H \cup G$ (ver Proposição 2.10). À esquerda, a fronteira de $S_K(\sigma)$ contém um ponto de G e, à direita, um ponto de H .

Figura 9 – Caso em que $\overline{R_K(\sigma)}$ é diferente do conjunto $S_K(\sigma)$.

através de pontos diferentes de σ , contidos em $S_L(\sigma)$, nem sempre é relevante do ponto de vista prático, desde que o conjunto $S_L(\sigma)$ represente estados aceitáveis para o sistema, do ponto de vista da aplicação.

Observação 2.12. A demonstração da Proposição 2.10 pode ser utilizada para provar um resultado similar, obtido trocando-se A_q por A no enunciado da Proposição 2.10.

Um resultado um pouco diferente, mas com o mesmo propósito, será enunciado a seguir. Para que possamos enunciar o resultado, considere o conjunto,

$$R_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}.$$

De forma análoga ao caso do conjunto S_L , a componente conexa do conjunto R_L que contém o conjunto σ será denotada por $R_L(\sigma)$. E, por abuso de notação, o conjunto $R_L(\{x\})$ será denotado por $R_L(x)$.

O resultado a seguir é enunciado em termos de $R_K(\sigma)$ porque, em alguns casos, o conjunto $\overline{R_K(\sigma)}$ é diferente do conjunto $S_K(\sigma)$. Um exemplo desse fato é ilustrado na Figura 9.

Corolário 2.13. *Sobre as mesmas hipóteses da Proposição 2.10, para todo $K > L$ tal que $(R_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma)) \cap H = \emptyset$ e $\nabla V(x) \neq 0$ para todo $x \in (R_K(\sigma) \setminus S_L(\sigma))$, temos que $\overline{R_K(\sigma)} \subset \overline{A_q(\sigma)}$.*

Demonstração. Seja $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente de números reais tais que $K_i > L$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $K_i \rightarrow K$ conforme $i \rightarrow \infty$. Como $S_{K_i}(\sigma) \subset R_K(\sigma)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, da Proposição 2.10, $S_{K_i}(\sigma) \subset A_q(\sigma)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Considere o conjunto $\bigcup_i S_{K_i}(\sigma)$ constituído da união infinita enumerável dos conjuntos fechados encaixados $S_{K_i}(\sigma)$.

Afirmamos que $\bigcup_i S_{K_i}(\sigma) = R_K(\sigma)$. De fato, se $x \in \bigcup_i S_{K_i}(\sigma)$ então $x \in S_{K_i}(\sigma)$ para algum $i \in \mathbb{N}$. Portanto, $V(x) \leq K_i < K$ e, assim, $x \in R_K(\sigma)$. Por outro lado, $x \in R_K(\sigma)$, $V(x) < K$ e, como $K_i \rightarrow K$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $K_i > V(x)$. Portanto, $x \in S_{K_i}(\sigma)$ e $x \in \bigcup_i S_{K_i}(\sigma)$.

Concluimos que $R_K(\sigma) \subset A_q(\sigma)$ e assim, $\overline{R_K(\sigma)} \subset \overline{A_q(\sigma)}$. $\square$

O Corolário 2.13 afirma que, sob certas hipóteses, o mínimo da função V dentre todas as componentes conexas do conjunto $H \cup G$ que não intersectam o conjunto $S_L(\sigma)$ é tal que o seu conjunto de nível fornece uma estimativa para a região de estabilidade do conjunto atrativo σ .

Para o enunciado do próximo resultado, considere os conjuntos

$$P_i = \{x \in \partial H_i : x \text{ é mínimo local de } V|_{\partial H_i}\}, \quad (2.4)$$

$$K_i = \{V(p) : p \in P_i, V(p) > L, \sigma \subset \overline{R_{V(p)}(p)}\} \quad (2.5)$$

e

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V(x) = 0, V(x) > L, \sigma \subset \overline{R_{V(x)}(x)}\}. \quad (2.6)$$

Finalmente, sob a luz da Proposição 2.10, podemos enunciar o seguinte teorema, que permite vislumbrar a implementação de um algoritmo para estimar a região de quase-estabilidade.

Teorema 2.14. *Considere as mesmas hipóteses da Proposição 2.10 e que $\nabla V(x) \neq 0$, para todo $x \in \partial S_L(\sigma)$. Sejam P_i , K_i e Q , os conjuntos definidos respectivamente em (2.4), (2.5) e (2.6). Então, o conjunto $\overline{R_K(\sigma)}$, onde $K = \min\{\bigcup_i K_i \cup V(Q)\}$, é uma estimativa para $\overline{A_q(\sigma)}$, ou seja, $\overline{R_K(\sigma)} \subset \overline{A_q(\sigma)}$. Por outro lado, se $\bigcup_i K_i \cup Q = \emptyset$ então, $A_q(\sigma) = \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Seja $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V(x) = 0\}$ e considere $\delta = d(H \cup \Delta, \partial S_L(\sigma))$.

Como H e Δ são conjuntos compactos (ver definição 1.32), $\partial S_L(\sigma)$ é um conjunto fechado e, por hipótese $\partial S_L(\sigma) \cap (H \cup \Delta) = \emptyset$, tem-se $\delta > 0$. Logo, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $(S_{L+\varepsilon_1}(\sigma) \setminus S_L(\sigma)) \cap (H \cup \Delta) = \emptyset$.

Usando a Proposição 2.10, temos que $S_{L+\varepsilon_1}(\sigma) \subset A_q(\sigma)$.

Uma vez que $(S_{L+\varepsilon_1}(\sigma) \setminus S_L(\sigma)) \cap (H \cup \Delta) = \emptyset$, temos que $d(H \cup \Delta, \partial S_{L+\varepsilon_1}(\sigma)) > 0$ e, repetindo o argumento anterior, é possível escolher $\varepsilon_2 > 0$ tal que $S_{L+\varepsilon_1+\varepsilon_2}(\sigma) \subset A_q(\sigma)$.

Agora, suponha que a sequência monótona crescente definida por $B_n = L + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ seja limitada. Então, $B_n \rightarrow B \in \mathbb{R}$, quando $n \rightarrow \infty$. O caso em que $\{B_n\}$ não é limitada será discutido posteriormente.

Pelo Corolário 2.13, temos que $\overline{R_B(\sigma)} \subset \overline{A_q(\sigma)}$.

Além disso, podemos supor que $d(H \cup \Delta, \overline{R_B(\sigma)}) = 0$. De fato, se $d(H \cup \Delta, \overline{R_B(\sigma)}) > 0$, o processo anterior poderia ser continuado e uma nova sequência de números reais maiores que B poderia ser construída de forma a convergir para um novo valor. Vale notar que, se $d(H \cup \Delta, \overline{R_B(\sigma)}) > 0$ então $\overline{R_B(\sigma)} = S_B(\sigma)$, pelo Teorema da Forma Local das Submersões (ver (LIMA, 2000)).

Portanto, existe $y \in \overline{R_B(\sigma)}$ tal que $y \in (H \cup \Delta)$.

(a) Se $y \in \Delta$, como $V(y) > L$ e $y \in \overline{R_B(\sigma)}$, segue que $y \in Q$. Note que $y \in \overline{R_B(\sigma)}$ implica em $\sigma \subset \overline{R_B(y)}$.

(b) Se $y \in H$, como $(S_{B_n}(\sigma) \setminus S_L(\sigma)) \cap (H \cup \Delta) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $y \in \partial H$ e, além disso, y é um ponto de mínimo local de $V|_{\partial H}$. Portanto, existe um índice i tal que $y \in P_i$. Como $\sigma \subset \overline{R_B(y)}$, temos $V(y) \in K_i$.

Como $K = \min\{\bigcup_i K_i \cup V(Q)\}$, temos que $K \leq V(y) = B$. Por outro lado, como $(S_{B_n}(\sigma) \setminus S_L(\sigma)) \cap (H \cup \Delta) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $K = B$.

Assim $\overline{R_K(\sigma)} = \overline{R_B(\sigma)}$, portanto $\overline{R_K(\sigma)} \subset \overline{A_q(\sigma)}$.

Para completar a prova, note que se $\bigcup_i K_i \cup Q = \emptyset$, os casos (a) e (b) resultam em um absurdo. Logo, não existe $y \in \overline{R_B(\sigma)} \cap (H \cup \Delta)$. Sendo assim, $d(H \cup \Delta, \overline{R_B(\sigma)}) > 0$ qualquer que seja a sequência $\{B_n\}$. Isso implica que $\{B_n\}$ pode ser escolhida de forma que seja ilimitada.

No caso em que a sequência $\{B_n\}$ é ilimitada. Como, por construção, $S_{B_n}(\sigma) \subset A_q(\sigma)$, temos que $A_q(\sigma) = \mathbb{R}^n$. $\square$

Uma observação importante com respeito ao Teorema 2.14 é que a garantia de existência para o nível K que aproxima a região de estabilidade do conjunto atrativo está apoiada na existência do nível L . A existência do nível L é uma hipótese bastante razoável, tendo em vista que σ é um conjunto atrativo e, portanto, existe uma vizinhança dele na qual toda a solução iniciando dentro desta vizinhança, converge para σ .

A restrição de que $\sigma \subset S_{V(p)}(p)$ na definição do conjunto K_i , faz com que componentes conexas do conjunto H que estejam em níveis de energia generalizada mais baixos não comprometam a estimativa obtida. Em muitos casos, o conjunto H possui

componentes conexas fora da região de estabilidade com nível de energia generalizada mais baixo do que aqueles atingidos na fronteira da região de quase-estabilidade. Nestes casos, ao se procurar mínimos da FEG na fronteira de H , existe uma grande chance de que os pontos encontrados estejam nestas componentes conexas. Porém, como o nível de energia generalizada nestas componentes é menor que a energia na fronteira, a componente conexa associada a esse nível que contém σ não sai da região de estabilidade. Portanto, a restrição $S_{V(p)}(p)$ elimina estes pontos da análise. Ver, por exemplo, Figura 22 do exemplo 2.17.

Do ponto de vista prático, o Teorema 2.14 sugere a construção de um algoritmo para a estimativa da região de quase-estabilidade do conjunto atrativo σ .

2.4 Algoritmo Conceitual

Nesta seção, vamos propor um algoritmo conceitual para estimativa da região de quase-estabilidade utilizando os resultados desenvolvidos na seção 2.3.

Considere o sistema de equações diferenciais definido em (2.1) e suponha que ele admita uma função energia generalizada V . Considere ainda a existência de um conjunto atrativo σ cuja região de estabilidade se deseja estimar. E seja $x_0 \in \sigma$ um ponto conhecido inicialmente.

A ideia central do algoritmo consiste em obter uma estimativa inicial para o conjunto atrativo através de um nível da FEG e, em seguida, expandir esse conjunto de nível, tomando níveis maiores, até que sua fronteira “toque” o conjunto H ou G .

Sendo assim, em linhas gerais, podemos executar os seguinte passos para obter a estimativa desejada,

- (1) Encontrar todas as componentes conexas do conjunto H ;
- (2) Obter uma estimativa para σ através de um nível de V ;
- (3) Selecionar as componentes de $H \cup G$ que não intersectam a estimativa de σ ;
- (4) Obter um conjunto de nível de V que contém a estimativa de σ e cujo interior não intersecte as componentes conexas de $H \cup G$ selecionadas no item (3).

De acordo com o Teorema 2.14, os passos descritos acima podem ser detalhados para possibilitar suas implementações, da seguinte forma,

- (1.1) Encontre todas as componentes conexas de H , denotadas por $\{H_i\}_{i \in \Gamma}$;
- (2.1) Selecione as componentes H_i tais que $H_i \cap \sigma \neq \emptyset$. Este conjunto será denotado por $\{H_i\}_{i \in \Lambda}$;

- (2.2) Encontre $L = \min\{V(x) : \partial S_{V(x)}(\sigma) \cap H = \emptyset, H_i \subset S_{V(x)}, \forall i \in \Lambda\}$. Vamos denotar por $\{H_i\}_{i \in \Sigma}$ as componentes conexas de H contidas em S_L . Se $\Lambda = \emptyset$ então, σ é um ponto de equilíbrio e $L = V(\sigma)$;
- (3.1) Encontre todos os pontos contidos em P_i com $i \in (\Gamma \setminus \Sigma)$;
- (3.2) Encontre todos os pontos pertencentes a Q ;
- (4.1) Calcule $K_i = V(P_i)$ com $i \in (\Gamma \setminus \Sigma)$;
- (4.2) Defina $K = \min\{\bigcup_{i \in \Gamma \setminus \Sigma} K_i \cup V(Q)\}$. O ponto que pertence a $\bigcup_{i \in \Gamma \setminus \Sigma} P_i \cup Q$ tal que V avaliado nele é igual a K será chamado x_c .
- (4.3) Verifique se σ está contido em $S_K(x_c)$. Caso contrário, repita do passo (4.1) removendo o ponto x_c de P_i ou Q . Então, repita (4.2) e (4.3) com os novos valores de x_c e K ;
- (4.4) Estime a região de estabilidade de σ pelo conjunto $R_{V(x_c)}(\sigma)$.

As componentes conexas do conjunto H possuem interior não vazio, isso faz com que sua detecção, do ponto de vista computacional, seja mais eficiente do que a das componentes conexas do conjunto C . Mesmo assim, a etapa (1.1) do algoritmo não é trivial e, em geral, demanda esforço computacional elevado.

Os passos (2.1) e (2.2) são usados para obter uma estimativa do conjunto atrativo em termos de um conjunto de nível invariante de V . Esta abordagem foi discutida em (ALBERTO, 2000).

Em vários casos, pode-se encontrar $\Lambda = \Sigma$. No entanto, para satisfazer a condição $S_{V(x)}(\sigma) \cap H = \emptyset$, pode ser necessário incluir outros índices de componentes conexas em Σ (ver Figura 10).

Ao restringir os índices dos conjuntos P_i considerados no passo (3.1), evitamos cálculos desnecessários uma vez que $K_i = \emptyset$ para todo $i \in \Sigma$ (ver definição do conjunto K_i no Teorema 2.14).

No passo (4.2), define-se x_c como o ponto pertencente ao conjunto $\bigcup_{i \in \Gamma \setminus \Sigma} P_i \cup Q$ para o qual o valor K é atingido. Genericamente, este ponto é único, porém, existem casos em que simetrias existentes no problema fazem com que existam múltiplos pontos com tal propriedade. Nestes casos, qualquer ponto de $\bigcup_{i \in \Gamma \setminus \Sigma} P_i \cup Q$ onde o valor K é atingido é uma escolha válida para x_c (ver exemplo 2.15).

O passo (4.3) é usado para garantir a condição $\sigma \subset S_{V(p)}(p)$, exigida nas definições dos conjuntos K_i e Q no Teorema 2.14. Uma vez que este passo requer esforço computacional, optamos por verificar essa condição após encontrar um “bom candidato” para x_c , ao invés de verificá-la durante a construção do conjunto K_i e Q . No entanto, deve-se notar

Figura 10 – Exemplo de situação quando $\Lambda = \{1\}$ é diferente de $\Sigma = \{1,2\}$.

que o conjunto K_i encontrado na etapa (4.1) e o conjunto Q definido da etapa (3.2) não são iguais aos respectivos conjuntos definidos no teorema.

Finalmente, Teorema 2.14 garante que no passo (4.4) uma estimativa conservadora para a região de quase-estabilidade de σ seja obtida.

2.5 Implementação do Algoritmo Conceitual

Na seção anterior, um algoritmo conceitual para obter estimativas para a região de estabilidade foi proposto. Mesmo que o algoritmo tenha sido desenvolvido com a base teórica fornecida pelos resultados da seção 2.3, sob o ponto de vista de implementação, é preciso executar algumas etapas difíceis para obter a estimativa.

Nesta seção, vamos discutir a implementação do algoritmo, dando algumas sugestões sobre como executar os passos propostos na seção anterior.

No passo (1.1) do algoritmo conceitual proposto na seção 2.4, temos que detectar todos as componentes conexas de H . Existem vários desafios em realizar esta tarefa. Encontrar componentes “pequenas”, verificar se dois pontos pertencem à mesma componente conexa e distinguir as componentes “próximas”, são apenas alguns exemplos desses desafios.

Neste trabalho, a primeira tarefa para implementar a etapa (1.1) foi realizada aplicando um algoritmo de otimização para encontrar máximos locais de $\dot{V}$. Após encontrar um máximo local, se a avaliação de $\dot{V}$ neste ponto resultar positiva, então ele está contido no conjunto H . Vários pontos selecionados aleatoriamente foram usados como condições iniciais para o problema de otimização. Teoricamente, se o número de condições iniciais aleatórias for grande o suficiente, o algoritmo encontrará todas as componentes H_i . Na prática, definir o número máximo de condições iniciais não é fácil e depende da dimensão do problema.

Existem diversos algoritmos de otimização descritos na literatura e que poderiam ser aplicados nesta etapa do algoritmo. Na implementação realizada durante esse trabalho

foi utilizado o algoritmo *BFGS Projetado* (ver (FLETCHER, 1987)). Veja a seção A.2 para uma breve discussão sobre os algoritmos de otimização testados.

Outra tarefa importante envolvida no passo (1.1), é verificar se um dado ponto está dentro de uma determinada componente conexa H_i . Este procedimento é necessário para decidir quando dois pontos contidos em H pertencem à mesma componente conexa.

Do ponto de vista computacional, esta verificação pode ser feita procurando um caminho conectando o ponto dado a algum outro ponto dentro de H_i . De fato, conexidade por caminhos implica em conexidade (ver página 155 de (MUNKRES, 1975)). Para encontrar um caminho conectando os pontos sob avaliação, aplicamos um algoritmo comumente usado em *Motion Planning* chamado *Rapidly-exploring Random Tree* (RRT) (ver seção A.3).

Ao final do passo (1.1), o objetivo é que pelo menos um ponto dentro de cada componente conexa de H seja conhecido.

Para executar o passo (2.1), primeiramente, encontramos pontos contidos no conjunto atrativo que estejam dentro de H . Esses pontos podem ser encontrados através da avaliação de $\dot{V}$ sobre trajetórias contidas no conjunto atrativo. Em seguida, verificamos se estes pontos podem ser conectados, através de um caminho, a qualquer um dos pontos contidos em H_i , obtidos no passo (1.1).

Nos passos (2.2) e (3.1), temos que usar algoritmos de otimização sujeitos a restrições. Na verdade, é necessário encontrar máximos e mínimos da função V restritos à fronteira dos conjuntos H_i . Neste trabalho, utilizamos o algoritmo *Active-set* (ver seção A.2.2) através da função *fmincon* do MATLAB®.

Iniciamos o passo (2.2) assumindo $\Sigma = \Lambda$. Em seguida, definimos o valor L como sendo o máximo valor que a função V atinge sobre todos os conjuntos $\bigcup_{i \in \Sigma} \partial H_i$. Então, um teste de conexidade deve ser executado em todos os conjuntos da forma $H_i \cup S_L(\sigma)$ para cada $i \in (\Gamma \setminus \Sigma)$. Isto pode ser conseguido aplicando o algoritmo RRT para procurar um caminho que conecte σ a H_i sem deixar o conjunto $H_i \cup S_L(\sigma)$. Se o caminho puder ser encontrado, $H_i \cup S_L(\sigma)$ é conexo e o índice i deve ser adicionado ao conjunto Σ . O passo (2.2) deve ser repetido até que o teste de conexidade falhe.

No passo (3.1), tomamos diversos pontos aleatórios no espaço de estados e os projetamos sobre a fronteira dos conjuntos H_i com $i \in (\Gamma \setminus \Sigma)$. A partir dos pontos encontrados, um processo de otimização é aplicado com a intenção de encontrar pontos de mínimo local de V restritos à fronteira de H . Após esse passo, ficam determinados os pontos P_i , para $i \in (\Gamma \setminus \Sigma)$.

O passo (3.2) não é fácil e requer grande esforço computacional, a menos que informações adicionais sobre a função V estejam disponíveis. No entanto, procurar pontos críticos de V é mais fácil do que procurar por pontos de equilíbrio de f (ver (LEE; CHIANG,

2004; MASUDA; KURIHARA, 2008)), o que é requerido em outros algoritmos para obter estimas para a fronteira da região de estabilidade (veja (CHIANG, 2011; ALBERTO, 2006)). Nas implementações realizadas durante este trabalho, o passo (3.2) foi executado através da solução do sistema de equações $\nabla V = 0$, a partir de diversas condições iniciais aleatórias. A função *fsolve* do MATLAB[®] foi utilizada na solução do sistema.

O passo (4.1) pode ser feito apenas avaliando V sobre os pontos encontrados nas etapas anteriores. De acordo com o Teorema 2.14, se nenhum ponto for encontrado nas etapas (3.1) e (3.2), todas as trajetórias do sistema entram no conjunto de nível L de V e, portanto, σ é um conjunto globalmente atrativo.

O passo (4.3) requer um teste de conexidade semelhante ao descrito no passo (2.2). O algoritmo RRT pode ser usado para encontrar um caminho que conecta σ e x_c dentro do conjunto $S_K(x_c)$. Se o caminho for encontrado, $\sigma \subset S_K(x_c)$ uma vez que $S_K(x_c)$ é um conjunto positivamente invariante (ver demonstração do Teorema 2.10).

2.6 Exemplos

Exemplo 2.15: Considere o sistema de equações diferenciais obtido através da reversão do sistema de Van der Pol (ver (VAN DER POL, 1934)),

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x - y + x^2y \end{cases} \quad (2.7)$$

Neste sistema, a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e sua região de atração é delimitada por uma única órbita periódica.

A seguinte FEG para o sistema (2.7) é obtida através do procedimento que será descrito no Capítulo 4.

$$\begin{aligned} V(x,y) = & 0,023286x^2 - 0,012922xy + 0,015219y^2 - 0,00439x^4 \\ & + 0,000047672x^3y - 0,0025328x^2y^2 + 0,00088775xy^3 \\ & - 0,00024802y^4. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Após a aplicação do passo (1.1) do algoritmo conceitual apresentado na seção 2.4, foram encontrados quatro maximizadores para a função V , dada em (2.8). O resultado da aplicação do método BFGS projetado utilizando pontos aleatoriamente escolhidos no espaço de fase é mostrado na Figura 11. A linha tracejada corresponde à fronteira da região de estabilidade, incluída na figura apenas como referência para o leitor.

Figura 11 – À esquerda, os pontos marcados com $\times$ foram usados como condição inicial para o método de maximização [BFGS](#) projetado. Os pontos indicados por $+$, são os maximizadores encontrados pelo método usando todas as condições iniciais indicadas. À direita uma [RRT](#) usada para identificar se o ponto c_2 e c_3 estão na mesma componente conexa. A linha tracejada corresponde à fronteira da região de estabilidade, incluída na figura apenas por questões orientativas ao leitor.

Os pontos encontrados no passo (1.1) foram

$$\begin{aligned} c_1 &= (-1,4186; 1,8652), \\ c_2 &= (1,4186; -1,8641), \\ c_3 &= (2,5135; 5,8490), \\ c_4 &= (-2,5134; -5,8495). \end{aligned}$$

Em seguida, testes de conexidade usando [RRT](#) devem ser executados entre os pontos encontrados no passo anterior para identificar quais deles pertencem à mesma componente conexa.

Na Figura 11, é ilustrado o teste para verificação se os pontos c_2 e c_3 estão na mesma componente conexa do conjunto H . No caso ilustrado, a [RRT](#) começa no ponto c_3 e busca por um caminho que chegue ao ponto c_2 , restrito ao conjunto H . A restrição é obtida usando a função $\dot{V}$ como função de colisão no algoritmo [RRT](#) (ver seção A.3).

No passo (2.1), são buscadas componentes conexas que contenham o conjunto atrativo sob análise. Neste passo, para cada ponto encontrado no passo (1.1), é gerada uma [RRT](#) que tenta conectá-los ao conjunto atrativo, neste caso, a origem. A Figura 12 mostra as quatro árvores geradas neste passo. Como resultado, nenhuma componente de H intersecta a origem. Sendo assim, o passo (2.2) não precisa ser executado e tomamos $L = V(0,0) = 0$.

O próximo passo do algoritmo, consiste em procurar por pontos de mínimos locais da função V restrita a fronteira de H . Para executar essa tarefa, pontos tomados aleatoriamente

Figura 12 – À esquerda, uma RRT que parte de c_2 e tenta chegar até a origem sem sair da componente conexa de H que contém c_2 . À direita, todas as quatro árvores geradas a partir de cada ponto c_i e que tentam chegar a origem, sem sucesso.

Figura 13 – À esquerda, um ponto aleatório x é projetado sobre a fronteira da componente conexa de H na direção do ponto c_3 . Tomado p como condição inicial em um algoritmo de minimização para V restrita à mesma fronteira, o ponto s é encontrado. À direita, um teste usando RRT foi realizado para verificar se o ponto s pertence à fronteira da componente conexa que contém c_3 .

no espaço são projetados na fronteira dos conjuntos H_i de forma a fornecerem condições iniciais para o algoritmo de otimização *Active-set* discutido na seção A.2.2.

Em caso de sucesso do algoritmo de otimização, é ainda necessário testar se o ponto encontrado pertence à fronteira da componente conexa de interesse. A Figura 13 ilustra um caso em que o teste resulta em afirmativo, ou seja, o ponto de mínimo local encontrado pertence à fronteira da componente conexa de interesse.

Na Figura 14 é mostrado um caso em que o algoritmo de otimização salta para outra componente conexa durante o processo iterativo. Neste caso, o ponto encontrado pertence à fronteira de uma componente conexa diferente daquela em que foi tomada a

Figura 14 – À esquerda, um ponto aleatório x é projetado sobre a fronteira da componente conexa de H na direção do ponto c_2 . Tomado p como condição inicial em um algoritmo de minimização para V restrita à mesma fronteira, o ponto s é encontrado. À direita, um teste usando [RRT](#) é realizado para verificar se o ponto s pertence à fronteira da componente conexa que contém c_2 .

condição inicial. Neste caso, a [RRT](#) falha ao tentar conectar o ponto de mínimo encontrado e a componente conexa a qual pertence a condição inicial.

Os pontos de mínimos locais encontrados nesta etapa foram

$$\begin{aligned} x_1 &= (-0,9878; 0,9461), \\ x_2 &= (-0,9687; -0,9655), \\ x_3 &= (0,9687; 0,9655), \\ x_4 &= (0,9878; -0,9461), \\ x_5 &= (-3,3707; -5,7230), \\ x_6 &= (3,3707; 5,7230), \end{aligned}$$

onde $V(x_1) = V(x_4) = 0,0410$, $V(x_2) = V(x_3) = 0,0185$ e $V(x_5) = V(x_6) = -0,6902$.

O passo (3.2) foi realizado através da busca por soluções do sistema $\nabla V(x) = 0$. Os pontos encontrados foram

$$\begin{aligned} q_1 &= (0,843; 6,288), \\ q_2 &= (-0,843; -6,288), \\ q_3 &= (-1,417; 2,543), \\ q_4 &= (1,417; -2,543), \\ q_5 &= (1,437; 0,8212), \\ q_6 &= (-1,437; -0,8212), \\ q_7 &= (0; 0), \end{aligned}$$

Figura 15 – À esquerda, todos os pontos encontrados nos passos (3.1) e (3.2) do algoritmo apresentado na seção 2.4. À direita, uma RRT tenta encontrar um caminho entre o ponto x_2 e a origem, com sucesso.

onde, $V(q_1) = V(q_2) = 0,2749$, $V(q_3) = V(q_4) = 0,1097$, $V(q_5) = V(q_6) = 0,0216$ e $V(q_7) = 0$. Portanto,

$$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}.$$

No passo (4.1), os conjuntos K_i com $i \in (\Gamma \setminus \Sigma)$ são obtidos através da avaliação da FEG nos pontos obtidos no passo (3.1). Temos assim,

$$K_1 = \{V(x_1)\} = \{0,0410\},$$

$$K_2 = \{V(x_4)\} = \{0,0410\},$$

$$K_3 = \{V(x_3)\} = \{0,0185\},$$

$$K_4 = \{V(x_2)\} = \{0,0185\}.$$

No passo (4.2), selecionamos o ponto de menor energia generalizada dentre os pontos encontrados nos passos (3.1) e (3.2), denominado x_c . Neste caso, $x_c = x_2$ e $K = 0,0185$. Em seguida, verificamos se existe um caminho que o conecta à origem sem sair do conjunto $S_K(x_c)$, através de um teste usando RRT como mostra a Figura 15.

Tomando $K = V(x_2)$, o algoritmo fornece os valores $L = 0$ e $K = 0,0185$. Eles correspondem, respectivamente, ao nível de V que contém a origem e ao nível de V que melhor aproxima a região de estabilidade da origem.

A Figura 16 mostra a estimativa obtida e a fronteira da região de quase-estabilidade verdadeira.

Exemplo 2.16: Neste exemplo, considera-se um sistema elétrico de potência composto por um gerador síncrono conectado a um barramento infinito. O diagrama do sistema é

Figura 16 – Resultado da aplicação do algoritmo apresentado na seção 2.4 ao exemplo 2.15. A componente conexa $S_K(\sigma)$ do conjunto de nível S_K é uma estimativa conservadora para a região de quase-estabilidade $A_q(\sigma)$.

Figura 17 – Sistema elétrico de potência formado por um gerador síncrono conectado a um barramento infinito.

mostrado na Figura 17.

Adotando o modelo clássico para a máquina síncrona, o seguinte conjunto de equações diferenciais descreve o comportamento dinâmico do sistema,

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega \\ \dot{\omega} = 31,447(0,9724 - 1,5853 \sin(\delta) + 0,0249 \cos(\delta) - 0,02\omega), \end{cases} \quad (2.9)$$

onde δ é o ângulo de defasagem da força eletromotriz da máquina com respeito ao ângulo da tensão do barramento infinito e ω é a frequência relativa entre a força eletromotriz da máquina e a frequência da tensão do barramento infinito.

Em (SIQUEIRA; ALBERTO; BRETAS, 2015), a seguinte FEG é exibida para o

Figura 18 – Estimativa para a região de quase-estabilidade do exemplo 2.16, obtida pelo algoritmo da seção 2.4.

sistema (2.9),

$$\begin{aligned} V(\delta, \omega) = & 0,0159\omega^2 - 0,9723\delta - 1,5853 \cos(\delta) - 0,0019\omega \\ & - 4,8870 \times 10^{-5}\omega \cos(\delta) + 0,0031\omega \sin(\delta) + 1,8940. \end{aligned} \quad (2.10)$$

A aplicação do algoritmo da seção 2.4 fornece $L = 0,0518$ e $K = 0,7147$. A Figura 18 mostra a estimativa da região de quase-estabilidade obtida pelo conjunto de nível $S_K(\sigma)$.

Neste caso, a presença de uma componente conexa do conjunto H na vizinhança do conjunto atrativo σ fornece uma aproximação para σ através do conjunto de nível positivamente invariante $S_L(\sigma)$. Neste caso, não é preciso conhecer a dinâmica do conjunto atrativo. Ele pode ser constituído de apenas um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, órbitas periódicas ou até mesmo conjuntos com dinâmica caótica.

Exemplo 2.17: Neste exemplo, o sistema analisado no exemplo 2.16 vai ser modificado através da utilização do modelo de um eixo do gerador, ao invés do modelo clássico. Este exemplo foi extraído de (SIQUEIRA; ALBERTO; BRETAS, 2015).

Considere o modelo de terceira ordem, dado pela equação,

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega \\ \dot{\omega} = 31,4465 \left(1 - 0,0224E^2 + 0,0224E \sin(\delta) - 1,4382E \cos(\delta) - 0,04\omega \right) \\ \dot{E} = 0,14 \left(2,2857 - 2,8568E + 1,4282 \cos(\delta) + 0,0224 \sin(\delta) \right), \end{cases} \quad (2.11)$$

onde, E é a tensão induzida no estator do gerador, δ é o ângulo de defasagem da tensão E

com respeito ao ângulo da tensão do barramento infinito, ω é a frequência relativa entre a tensão E e a frequência da tensão do barramento infinito.

Considere a função,

$$U(E, \delta, \omega) = 0,0159\omega^2 + 1,4284E^2 - \delta - 2,2857E - 1,4282E \cos(\delta) - 0,0113\omega (1 - P_e(\delta, E)) + 2,7008, \quad (2.12)$$

com,

$$P_e(\delta, E) = 0,0224E^2 - 0,0224E \cos(\delta) + 1,4282E \sin(\delta).$$

Em (SIQUEIRA; ALBERTO; BRETAS, 2015) é provado que a função $U(E, \delta, \omega)$, definida em (2.12), é uma FEG para o sistema (2.11).

O sistema (2.11), definido em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, possui dois equilíbrios: um PEAE e um ponto do tipo sela. Dado que toda trajetória do sistema é limitada, podemos ainda considerá-lo definido em uma variedade compacta (eventualmente adicionando mais um equilíbrio repulsor no infinito). De acordo com o Teorema 5.1 de (ARAÚJO; PACÍFICO, 2007), tem-se que, genericamente, o sistema é *singular Axioma A sem ciclos* e, além disso, como o ponto de sela não pertence ao conjunto não errante, tem-se que o conjunto limite positivo é genericamente hiperbólico. Então, vamos assumir que o conjunto limite positivo seja hiperbólico.

Durante a execução do passo (1.1) do algoritmo apresentado na seção 2.4, o processo de otimização aplicado para encontrar pontos de máximos locais de $\dot{V}(x)$ a partir de condições iniciais aleatórias, resultou nos pontos

$$\begin{aligned} x_1 &= (0,6092; -0,2304; 1,2166), \\ x_2 &= (1,7712; -0,1715; 0,7071). \end{aligned}$$

O resultado negativo obtido após a tentativa de se encontrar um caminho conectando x_1 e x_2 dentro do conjunto H , sugere fortemente que x_1 e x_2 pertencem a duas componentes conexas diferentes de H , as quais denominaremos por H_1 e H_2 . Isso completa o passo (1.1).

A Figura 19 mostra o resultado do algoritmo RRT quando aplicado na tentativa de encontrar um caminho conectando x_1 e x_2 contido em H .

O PEAE do qual estamos interessados em estimar a região de estabilidade é o ponto

$$x_0 = (0,6064; 0; 1,2154),$$

e, portanto, $\sigma = \{x_0\}$.

No passo seguinte, outro teste de conexidade precisa ser aplicado entre cada ponto encontrado no passo (1.1) e σ . Duas árvores foram construídas iniciando nos pontos x_1 e

Figura 19 – Resultado do algoritmo RRT na tentativa de encontrar um caminho conectando x_1 a x_2 sem deixar o conjunto H . Os pontos representam os nós da árvore.

Figura 20 – O algoritmo RRT tentando encontrar caminhos conectando x_1 a σ e conectando x_2 a σ sem deixar H . Os pontos representam os nós de cada árvore.

x_2 , respectivamente, em direção a σ , sem deixar o conjunto H . A primeira foi bem sucedida em alcançar σ mas a segunda, não. A Figura 20 mostra as árvores resultantes após esses processos.

Com base nos resultados dos testes de conexidade, concluímos que $H_1 \cap \sigma \neq \emptyset$ e que, muito provavelmente, $H_2 \cap \sigma = \emptyset$. Portanto, assumiremos $\Lambda = \{1\}$, concluindo o passo (2.1).

Prosseguindo com o algoritmo proposto, devemos encontrar um maximizador para a energia generalizada sobre a fronteira das componentes conexas de H que possuem intersecção não vazia com σ . Embora qualquer algoritmo de maximização global com restrição possa ser utilizado neste passo, na implementação realizada neste trabalho,

Figura 21 – Processo envolvido durante o passo (2.2): escolha aleatoriamente x_{rand} , projete-o sobre ∂H_1 e encontre um máximo local de $\dot{V}$ sobre ∂H_1 . A linha tracejada representa a direção da projeção.

esta tarefa foi realizada tomando vários pontos aleatórios dentro do espaço de estado, projetando-os sobre a fronteira de H_1 e usando-os como condição inicial em um processo de otimização para maximizar V restrita a ∂H_1 .

A projeção pode ser realizada através de *ray-casting*, a partir do ponto escolhido aleatoriamente em direção ao ponto x_1 , até que a avaliação de $\dot{V}$ resulte zero. Por exemplo, na Figura 21, o ponto $x_{rand} = (-0,3509; 1,435; 0,5469)$ foi escolhido aleatoriamente e, a projeção dele sobre ∂H_1 , resultou no ponto $x_{proj} = (0,5849; -0,1888; 1,201)$.

Em seguida, o processo de maximização de V restrita a ∂H_1 fornece o maximizador local

$$x_{max} = (0,5718; -0,3526; 1,2526),$$

onde, $V(x_{max}) = 0,0048$.

A Figura 21 mostra os pontos envolvidos neste processo.

Dependendo da rotina de otimização utilizada, não podemos garantir que o ponto x_{max} pertença à fronteira da mesma componente conexa do ponto x_{proj} . O processo de otimização pode “saltar” para outra componente conexa durante as iterações. Portanto, depois de encontrar o ponto x_{max} , precisamos executar um teste de conexidade para ter certeza de que ele está na mesma componente conexa de x_{proj} .

Para definir L , o passo (2.2) requer que $\partial S_L(\sigma) \cap H \neq \emptyset$. É claro que H_1 está contido no conjunto de nível $V(x) \leq 0,0048$ mas, precisamos ter certeza de que H_2 não intersecta o conjunto de nível $V(x) = 0,0048$.

Vamos assumir que $L = 0,0048$ e tentar encontrar um caminho conectando H_2 a σ

sem sair $H \cup S_L$. Neste caso, o algoritmo *RRT* fica restrito à região onde a função

$$G(x) = \max \{ \dot{V}(x), L - V(x) \}$$

é não negativa.

Uma vez que nenhum caminho pôde ser encontrado, consideramos $L = 0,0048$, S_L como uma aproximação para o conjunto atrativo e $\Sigma = \Lambda = 1$. Isso conclui o passo (2.2).

Depois de usar um procedimento similar ao executado no passo (2.2), devemos procurar mínimos locais da função V sobre a fronteira de H_2 . Vários pontos selecionados aleatoriamente no espaço de estados e projetados sobre ∂H_2 foram usados como condição inicial para o algoritmo de otimização para minimizar V restrito a ∂H_2 . Após várias tentativas, apenas dois pontos foram encontrados. Assim,

$$P_2 = \{p_{21}, p_{22}\} = \{(1,6847; -0,1502; 0,7336), (1,8499; -0,1406; 0,6821)\},$$

concluindo o passo (3.1).

Durante o passo (3.2), os seguintes pontos críticos de V foram encontrados,

$$\begin{aligned} q_1 &= (0,619; -0,004; 1,207) \\ q_2 &= (1,749; -0,006; 0,712). \end{aligned}$$

Como $V(q_1) = -7,2 \times 10^{-5}$ e $V(q_2) = 0,2290$, temos, $Q = \{q_2\}$.

O passo (4.1) é realizado através da avaliação da função V nos pontos do conjunto P_2 , resultando em $K_2 = \{0,2274; 0,2252\}$.

Do passo (4.2) obtemos $K = \min(K_2 \cup V(Q)) = 0,2252$ e definimos x_c como o ponto de $P_2 \cup Q$ no qual o mínimo é atingido, ou seja,

$$x_c = p_{22} = (1,8499; -0,1406; 0,6821).$$

O passo (4.3) requer outro teste de conexidade. A Figura 22 mostra a árvore resultante, construída pelo algoritmo *RRT* iniciada em x_c , tentando alcançar σ e confinada à componente conexa $S_K(x_c)$. Como o algoritmo não foi capaz de encontrar um caminho sujeito a essas restrições, consideramos que a componente conexa $S_K(x_c)$ do conjunto de nível S_K não contém σ .

De acordo com o algoritmo proposto, devemos remover o ponto x_c atual do conjunto K_2 e retornar ao passo (4.1). Após repetir os passos (4.1) e (4.2), o novo valor obtido para K é 0,2274 atingido no novo ponto $x_c = p_{21} = (1,6847; -0,1502; 0,7336)$.

Usando os novos valores para x_c e K , como mostra a Figura 23, o resultado do teste de conexidade é positivo, levando à conclusão de que $\sigma \subset S_K(x_c)$.

Figura 22 – Teste de conexidade usando [RRT](#) aplicado entre σ e x_c (representado por um asterisco e um círculo, respectivamente). Os pontos representam nós da árvore confinados ao nível S_K . A linha tracejada representa o limite de $S_K(x_c)$.

Figura 23 – Teste de conexidade usando [RRT](#) aplicado entre σ e x_c (representado por um asterisco e um círculo, respectivamente). Os pontos representam nós da árvore confinados ao nível S_K . A linha tracejada representa o limite de $S_K(x_c)$.

Pelo Teorema 2.14, uma estimativa conservadora para a região de quase-estabilidade de σ é dada pela componente conexa $S_K(x_c)$.

A Figura 24 mostra a estimativa da região de quase-estabilidade obtida pelo nível $S_K(\sigma)$, juntamente com a região de estabilidade verdadeira.

Figura 24 – Estimativa da região de quase-estabilidade encontrada pelo algoritmo proposto aplicado ao exemplo 2.17.

2.7 Conclusão

Neste capítulo, foi desenvolvido um método para estimativa da região de quase-estabilidade usando FEG. A teoria que suporta o método garante que a estimativa obtida seja sempre conservadora (no sentido de que a estimativa é sempre um subconjunto da região de quase-estabilidade verdadeira), permitindo seu uso para resolver problemas relacionados à estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares onde a segurança da estimativa precisa ser garantida.

A implementação do método também foi discutida. Mostramos como usar algoritmos computacionais utilizados em *Motion Planning* e em otimização para realizar as etapas necessárias para obter a estimativa.

A teoria desenvolvida fornece as bases de um método direto para a avaliação da estabilidade que pode ser aplicado a uma classe bastante geral de sistemas dinâmicos: aqueles que admitem Função Energia Generalizada.

2.8 Próximos passos

Nesta seção são listadas algumas possibilidades de melhoria para o método proposto e que podem ser avaliadas em estudos futuros.

1. Parâmetros para o algoritmo de RRT.

Para que o algoritmo de RRT forneça resultados confiáveis nos testes de conectividade, alguns parâmetros precisam ser ajustados, como por exemplo, a distância entre os nós,

tolerâncias e números máximos de iteração (ver seção A.3).

Alguns ajustes precisaram ser feitos individualmente nos exemplos numéricos apresentados neste trabalho. Os ajustes dependem basicamente da dimensão do sistema sendo analisado e do tamanho da região do espaço de estados que se deseja analisar.

Uma sugestão para estudos futuros é o ajuste automático dos parâmetros do algoritmo RRT com base nos dados do sistema.

2. Caracterização dos conjuntos H_i que intersectam a fronteira.

Neste trabalho, mostramos como é possível obter estimativas conservadoras para a região de estabilidade de um conjunto atrativo com base no conhecimento dos conjuntos G e H .

Uma informação que poderia contribuir para a obtenção de estimativas menos conservadoras é conhecer quais componentes conexas do conjunto H ou G intersectam a fronteira da região de estabilidade. Desta forma, poderíamos eliminar as demais componentes da análise e nos fixar nas componentes de interesse.

3. Aplicar algoritmos de otimização global.

Em vários momentos, durante implementação do algoritmo conceitual, houve a necessidade de encontrar mínimos ou máximos globais de funções restritas a determinados conjuntos. Nestes casos, aplicamos algoritmos de otimização (ver seção A.2 repetidas vezes com diferentes condições iniciais (aleatórias) na busca de um ponto ótimo global.

Uma possibilidade de melhoria na performance e na robustez do algoritmo computacional é a substituição deste tipo de procedimento por um algoritmo de otimização global.

3 ESTIMATIVA DE PARTE RELEVANTE DA FRONTEIRA DA REGIÃO DE QUASE-ESTABILIDADE PARA SISTEMAS QUE ADMITEM FEG

3.1 Introdução

No estudo de estabilidade de sistemas sujeitos a perturbações, é comum a necessidade de conhecer o tempo máximo em que uma determinada perturbação pode ser aplicada para que, após retirada, o sistema evolua para um estado desejado.

No decorrer deste capítulo, vamos considerar o estudo de sistemas regidos por equações do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = g(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \text{ onde } g(t, x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), t \in [0, t_s] \\ f(x), t > t_s \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde $\tilde{f}$ e f são funções de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ nele próprio. Vamos denotar por $t \mapsto \Phi(t, x_0)$, a única solução de (3.1) satisfazendo $\Phi(0, x_0) = x_0$.

Este tipo de modelo surge, tipicamente, no estudo do impacto de determinadas perturbações na dinâmica de um dado sistema. O sistema se encontra no estado x_0 quando é submetido a uma perturbação de duração igual a t_s . Durante a perturbação, sua dinâmica é regida pelo campo de vetores $\tilde{f}$. Depois disso, a perturbação é removida e o sistema se comporta com dinâmica regida pela função f .

Por isso, os subsistemas $\dot{x} = \tilde{f}(x)$ e $\dot{x} = f(x)$ serão denominados, respectivamente, sistema *perturbado* e sistema *pós-perturbação*.

Suponha que a dinâmica do sistema pós-perturbação possua um conjunto atrativo σ que corresponda a um comportamento desejável para o sistema em regime permanente. Dizemos que o sistema (3.1) *suporta a perturbação*, quando sua solução evolui para σ quando $t \rightarrow \infty$. Para que isso ocorra, é necessário e suficiente que, no instante t_s , a solução do sistema perturbado $\dot{x} = \tilde{f}(x)$ esteja contida na região de quase-estabilidade $A_q(\sigma)$ com respeito ao sistema pós-perturbação $\dot{x} = f(x)$.

A análise de estabilidade deste tipo de sistema consiste em determinar se o sistema suporta a perturbação com duração t_s . A pergunta que surge naturalmente é: como podemos determinar a máxima duração da perturbação para que o sistema ainda a suporte?

Esta pergunta pode ser respondida se pudermos detectar o instante em que a solução do sistema perturbado $\dot{x} = \tilde{f}(x)$ intersecta a fronteira da região de quase-estabilidade $\partial A_q(\sigma)$ com respeito à dinâmica pós-perturbação. Para tanto, basta que consigamos uma estimativa para uma parte relevante de $\partial A_q(\sigma)$, ou seja, na direção da trajetória do sistema perturbado.

A necessidade de se obter tal estimativa, mais precisamente aquela que surge

quando se estuda perturbações causadas por faltas em sistemas elétricos de potência, deu origem a um método chamado *Controlling Unstable Equilibrium Point* (CUEP) (ver (CHIANG; WU; VARAIYA, 1987)). Porém, o método CUEP está fundamentado na teoria das FE (ver (CHIANG, 2011)) e depende da existência de tal função para que possa ser aplicado ao sistema sob análise.

A existência de uma FE para um sistema tem implicações sobre o comportamento dinâmico de suas soluções. De fato, toda solução limitada converge para um ponto de equilíbrio quando o tempo tende para infinito. Consequentemente, sistemas que possuem órbitas periódicas ou soluções caóticas não admitem FE (ver (CHIANG, 1989)).

É neste contexto que o conceito de Função Energia Generalizada (FEG) foi introduzido em (ALBERTO; CHIANG, 2012a; ALBERTO; CHIANG, 2012b). Embora funções energia generalizadas sejam mais fáceis de serem encontradas e possam ser admitidas por uma classe bastante geral de sistemas, é necessário encontrar resultados que deem suporte a métodos para a análise da estabilidade em sistemas que as admitem.

Neste capítulo, um método para estimar partes relevantes da fronteira da região de quase-estabilidade inspirado no método CUEP é proposto para sistemas dinâmicos que admitem FEG.

Na seção 3.2 são apresentados os resultados que compõem os fundamentos teóricos do método de estimativa desenvolvido na seção 3.4. Outro conceito fundamental para a técnica proposta é a definição de Conjunto de Controle (CC), que é apresentada na seção 3.3.

Na seção 3.5 é discutida a implementação do método através de um algoritmo conceitual, apresentado na subseção 3.6 e, na seção 3.7, o algoritmo é aplicado a um exemplo numérico.

3.2 Fundamentos Teóricos do Método

Nesta sessão serão apresentados alguns resultados que visam a construção de um algoritmo conceitual similar àquele usado no método CUEP, porém aplicável a sistemas que admitem FEG.

Como visto na seção 1.7, a simples existência de uma FEG tem implicações importantes sobre o comportamento das trajetórias do sistema (ver (ALBERTO; CHIANG, 2012a)). Por exemplo, toda trajetória sobre a fronteira da região de estabilidade é limitada e converge para um conjunto que intersecta a fronteira do conjunto C (ver Teorema 4.3 de (ALBERTO; CHIANG, 2012a) reproduzido neste trabalho como o Teorema 1.35).

No decorrer deste capítulo, a região de quase-estabilidade $A_q(\sigma)$ e sua fronteira $\partial A_q(\sigma)$ estarão se referindo à dinâmica do sistema pós-perturbação, pois, σ é um conjunto atrativo do sistema $\dot{x} = f(x)$.

Definição 3.1. Considere o sistema (3.1). Ao menor tempo t tal que $\Phi(t, x_0) \in \partial A_q(\sigma)$ e $\Phi(t + \varepsilon, x) \notin \overline{A_q(\sigma)}$ para $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, dá-se o nome de *tempo crítico* e denota-se por t_c . Além disso, $\Phi(t_c, x)$ é chamado *exit point*.

Para garantir a existência do *tempo crítico* e do *exit-point*, é necessário supor que o ponto x_0 pertença a $A_q(\sigma)$ e que a trajetória do sistema perturbado se afaste de σ tanto quanto necessário para cruzar a fronteira de $A_q(\sigma)$.

Ambas hipóteses são bastante razoáveis em diversas aplicações. A primeira, porque é desejável que o sistema pós-perturbação evolua para um comportamento “próximo” ao estado inicial x_0 e a segunda, porque normalmente este estudo é realizado diante de grandes perturbações que levam o sistema a condições muito diferentes das iniciais.

O objetivo do método que vamos desenvolver é obter uma estimativa conservadora para a parte relevante da fronteira da região de quase-estabilidade. Ou seja, a trajetória do sistema perturbado deve intersectar a estimativa da parte relevante da fronteira da região de quase-estabilidade antes de intersectar a fronteira verdadeira. Desta forma, uma das mais importantes características da técnica é a sua certeza ao concluir que o sistema suporta uma dada perturbação.

O desenvolvimento do método que será apresentado está fortemente baseado no Teorema 2.5 que garante que todas as órbitas contidas na fronteira da região de quase-estabilidade se aproximam de $H \cup G$ à medida que o tempo tende para infinito.

Dado um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$, definimos o conjunto

$$\Psi(B) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \overline{\Phi_f^+(t, x)} \cap B \neq \emptyset \right\},$$

onde $\Phi_f^+(t, x)$ denota a trajetória futura de x com respeito à dinâmica pós-perturbação, ou seja, $\Phi_f^+(t, x) = \{\Phi_f(t, x), t \geq 0\}$, onde $\Phi_f(t, x)$ é a única solução de $\dot{x} = f(x)$ tal que $\Phi_f(0, x) = x$.

O Teorema 2.5 pode ser reescrito utilizando a notação acima, da seguinte forma.

Teorema 3.2. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ tal que o sistema $\dot{x} = f(x)$ possua um conjunto atrativo σ e $L_+(f|_{A_q(\sigma)})$ seja um conjunto hiperbólico. Suponha ainda que exista uma FEG para o sistema pós-perturbação, denotada por $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e tal que todos os seus pontos críticos sejam não degenerados. Então*

$$\partial A_q(\sigma) \subset \bigcup_{i \in \Lambda} \Psi(H_i) \bigcup \Psi(G),$$

onde $\Lambda = \{i \in \mathbb{N} : H_i \cap \partial A_q(\sigma) \neq \emptyset\}$.

Demonstração. Da definição de $\Psi(x)$ e do Corolário 2.6, temos

$$\partial A_q(\sigma) \subset \Psi(\partial H \cup G).$$

Além disso, temos-se que $\Psi(\partial H \cup G) \subset \Psi(\partial H) \cup \Psi(G)$.

Para completar a prova, tome $x \in \partial A_q(\sigma) \cap \Psi(\partial H)$.

Pelo Teorema 1.34, temos que $\omega(x) \neq \emptyset$. Portanto, existe uma sequência crescente de tempos $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $p \in \partial H$ tais que $\Phi(t_i, x) \rightarrow p$ quando $i \rightarrow \infty$. Note que se $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é limitada, então existe $t^* > 0$ tal que $t_i \rightarrow t^*$ e $p = \Phi(t^*, x)$. Se $\{t_i\}$ é ilimitada, então $t_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$ e $p \in \omega(x)$.

Uma vez que $p \in \partial H$, existe uma componente conexa H_j de H tal que $p \in \partial H_j$. Portanto, $x \in \Psi(\partial H_j)$.

Como $\partial A_q(\sigma)$ é um conjunto fechado e invariante pela dinâmica pós-perturbação, temos $p \in \partial A_q(\sigma)$. Então, $H_j \cap \partial A_q(\sigma) \neq \emptyset$, e, portanto, $j \in \Lambda$. $\square$

A proposição enunciada a seguir fornece uma informação fundamental a respeito dos conjuntos ω -limite das órbitas do sistema pós-perturbação contidas na fronteira da região de quase-estabilidade. Esta informação será importante para a definição do conceito de CC, apresentado mais adiante.

Proposição 3.3. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ tal que o sistema $\dot{x} = f(x)$ possua um conjunto atrativo σ e $L_+(f|_{A_q(\sigma)})$ seja um conjunto hiperbólico. Suponha ainda que exista uma FEG para o sistema pós-perturbação, denotada por $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e tal que todos os seus pontos críticos sejam não degenerados. Se, para algum $x \in \partial A_q(\sigma)$, $\Phi_f^+(x) \cap H = \emptyset$, então $\omega(x) \subset \partial H_i$, para algum $i \in \Lambda = \{i \in \mathbb{N} : H_i \cap \partial A_q(\sigma) \neq \emptyset\}$ ou $\omega(x)$ é um ponto de equilíbrio do sistema pós-perturbação.*

Demonstração. Tome $x \in \partial A_q(\sigma)$. Pelo Teorema 3.9 de (CHIANG; FEKIH-AHMED, 1996), temos que $\partial A_q(\sigma)$ é invariante e, portanto, $\Phi_f^+(x) \subset \partial A_q(\sigma)$. Do Teorema 1.34, segue que $\omega(x)$ é um conjunto invariante não-vazio e conexo. E, pelo Corolário 2.6, temos que $\omega(x) \cap (\partial H \cup G) \neq \emptyset$.

Por hipótese, $\Phi_f^+(x) \cap H = \emptyset$ e, portanto, $t \mapsto V(\Phi(t, x))$ é uma função não-crescente limitada por baixo (ver Proposição 4.1 de (ALBERTO; CHIANG, 2012a)). Seja $L \in \mathbb{R}$ o limite de $V(\Phi(t, x))$ quando $t \rightarrow \infty$. Como $\omega(x)$ é invariante, $V(\omega(x)) = L$ implicando $\dot{V}(\omega(x)) = 0$. Portanto, $\omega(x) \subset (\partial H \cup G)$.

Como $\omega(x)$ é um conjunto conexo, $\omega(x) \subset G$ ou $\omega(x) \subset \partial H_i$, para alguma componente conexa H_i de H . Para completar a prova, observe que, como $\partial A_q(\sigma)$ é um conjunto invariante e fechado, $\omega(x) \subset \partial A_q(\sigma)$ e, assim, $i \in \Lambda$. $\square$

3.3 O Conjunto de Controle

Nesta seção, vamos definir o conceito de Conjunto de Controle (CC) relativo a um ponto de $A_q(\sigma)$. Neste contexto, considere um sistema tal como descrito em (3.1) de tal

forma que as hipóteses do Teorema 3.2 sejam satisfeitas.

Para cada $x \in \partial A_q(\sigma)$, seja $\{H_j\}_{j \in \Lambda_x}$ o conjunto de todas as componentes conexas de H tais que $H_j \cap \partial A_q(\sigma) \neq \emptyset$ e $x \in \Psi(H_j)$.

Se $\Lambda_x = \emptyset$, pela Proposição 3.3, $\omega(x)$ é um ponto de equilíbrio. Neste caso, este ponto de equilíbrio será definido como o CC relativo a x .

Se $\Lambda_x \neq \emptyset$, para cada $j \in \Lambda_x$, temos que $\omega(x) \cap H_j \neq \emptyset$ ou $\Phi^+(x) \cap H_j \neq \emptyset$. Se $\Phi^+(x) \cap H_j \neq \emptyset$, seja $t_j = \min\{t > 0 : \Phi(t, x) \in H_j\}$ e defina o CC relativo a x como sendo a componente H_j para a qual o menor t_j ocorra. Se $\Phi^+(x) \cap H_j = \emptyset$, pela Proposição 3.3, Λ_x é um conjunto unitário. Neste caso, a única componente conexa H_j com $j \in \Lambda_x$ é definido como o CC relativo a x .

Vamos denotar por C_x o conjunto de controle relativo ao ponto $x \in \partial A_q(\sigma)$.

Naturalmente, se o ponto $x \in H_i$ para algum $i \in \Lambda$, então $C_x = H_i$.

3.4 Estimativa de Parte Relevante da Fronteira da Região de Quase-estabilidade

Nesta seção, veremos como o conceito de conjunto de controle definido na seção 3.3 juntamente com o Teorema 3.2 pode ser usado para se obter estimativas conservadoras de partes relevantes da fronteira da região de quase-estabilidade.

Para isso, comecemos com a definição de *parte relevante* da fronteira da região de quase-estabilidade neste contexto.

Definição 3.4. A *parte relevante* da fronteira da região de quase-estabilidade é o conjunto dos pontos de $\partial A_q(\sigma)$ para os quais o conjunto de controle é o mesmo do *exit-point*.

Considere $\bar{x} \in \partial A_q(\sigma)$ e defina o *valor crítico de energia*

$$K_{\bar{x}} = \min_{x \in \partial C_{\bar{x}}} V(x). \quad (3.2)$$

Note que $V(\bar{x}) \geq K_{\bar{x}}$ para qualquer $\bar{x} \in \partial A_q(\sigma)$.

Utilizando o valor crítico de energia, é possível encontrar um conjunto de nível da FEG tal que a trajetória do sistema perturbado necessariamente intersecta sua fronteira antes de atingir a fronteira da região de quase-estabilidade. Este fato é enunciado na forma do teorema a seguir.

Teorema 3.5. *Seja σ um conjunto atrativo para a equação pós-perturbação de (3.1) e seja $A_q(\sigma)$ sua região de quase-estabilidade. Considere ainda que $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma FEG para o sistema pós-perturbação de (3.1) tal que todos os seus pontos críticos sejam não degenerados. Suponha ainda que o conjunto $L_+(f|_{A_q(\sigma)})$ seja um conjunto hiperbólico. Se $x_0 \in A_q(\sigma)$, o ponto $\bar{x}$ for um ponto sobre a trajetória do sistema perturbado tal que $\bar{x} \in \partial A_q(\sigma)$ e se $V(x_0) < K_{\bar{x}}$, então a trajetória do sistema perturbado intersecta*

o conjunto de nível $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = K_{\bar{x}}\}$ antes de atingir a fronteira da região de quase-estabilidade.

Demonstração deste resultado segue diretamente das propriedades dos objetos definidos nesta seção e será omitida.

3.5 Implementação do Método

Embora do ponto de vista teórico, o Teorema 3.5 forneça uma maneira de obter uma estimativa para a parte relevante da fronteira da região de quase-estabilidade, para que a estimativa possa ser obtida, é necessária uma forma de detectar quando a trajetória do sistema perturbado se aproxima da fronteira da região de quase-estabilidade.

A dificuldade em se realizar tal detecção também é encontrada no método CUEP (ver (CHIANG; WU; VARAIYA, 1987; CHIANG, 2011)), onde é superada através de métodos computacionais que permitem uma estimativa preliminar para a fronteira. Tal estimativa está baseada nos métodos: *Potential Energy Boundary Surface* (PEBS) (ver (KAKIMOTO; OHSAWA; HAYASHI, 1978; KAKIMOTO et al., 1984)) e *Boundary Controlling UEP* (BCU) (ver (CHIANG, 1995)).

O leitor pode se perguntar: por que aplicar um método para estimar uma parte da fronteira da região de quase-estabilidade quando, *a priori*, se precisa de uma estimativa preliminar? A resposta está nas vantagens em se obter uma estimativa conservadora. Através dela, é possível garantir se o sistema é capaz de suportar a perturbação.

Uma classe importante de sistemas em que tal estimativa inicial pode ser encontrada, é a dos sistemas quase-hamiltonianos. Neste caso, as curvas de nível da função hamiltoniana associada podem ser usadas para fornecer a estimativa inicial da fronteira. Ver seção 3.7.

Se o ponto $\bar{x}$ da definição de conjunto de controle estiver suficientemente próximo da fronteira verdadeira, existe uma boa chance de que o conjunto de controle possa ser encontrado, permitindo a aplicação do Teorema 3.5, como veremos na seção seguinte.

3.6 Algoritmo Conceitual

Nesta seção, serão empregadas as ideias desenvolvidas na seção 3.2 para construir um algoritmo conceitual que permita a estimativa do tempo máximo em que uma perturbação pode ser aplicada a um sistema de tal forma que ele suporte a perturbação.

- (1.1) Encontre as componentes conexas do conjunto H ;
- (2.1) Integre o sistema perturbado até que a solução se aproxime da estimativa inicial da fronteira da região de quase-estabilidade do conjunto atrativo σ . Defina este ponto como $\bar{x}$;

- (2.2) Integre o sistema pós-perturbação até que a solução toque ou esteja suficientemente próxima de algum H_i ou ponto de equilíbrio. Defina este conjunto ou ponto de equilíbrio como o conjunto de controle $C_{\bar{x}}$.
- (3.1) Encontre o menor valor de energia na fronteira de $C_{\bar{x}}$. Ele será o valor de energia crítica $K_{\bar{x}}$.
- (3.2) Se $V(x_0) < K_{\bar{x}}$, então a trajetória do sistema perturbado intersecta o conjunto de nível $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = K_{\bar{x}}\}$ antes de atingir a fronteira da região de quase-estabilidade e o primeiro instante para o qual a trajetória do sistema perturbado intersecta este conjunto de nível fornece uma estimativa conservadora para o tempo crítico t_c .

O passo (1.1), pode ser executado da mesma forma como foi sugerida a execução do passo (1.1) na seção 2.5.

De posse de uma aproximação para a fronteira da região de quase-estabilidade, que pode ser obtida, por exemplo pela PEBS no caso de sistemas elétricos de potência ou por uma curva de nível da função hamiltoniana no caso de sistemas quase-hamiltonianos, o passo (2.1) pode ser executado através da integração numérica do sistema perturbado.

Ao final do passo (2.1), encontramos uma aproximação para o *exit-point*, denotada por $\bar{x}$.

O passo (2.2) pode ser realizado procedendo-se com a integração numérica do sistema pós-perturbação até que a trajetória toque ou se aproxime de um ponto de equilíbrio ou de alguma componente conexa de H . Tal componente de H ou ponto de equilíbrio será o conjunto de controle, denotado por $C_{\bar{x}}$.

Na implementação computacional deste passo, para detectar a proximidade com um ponto de equilíbrio, deve-se monitorar o módulo do campo de vetores f que, ao se tornar menor que um valor limite, indica que a trajetória está suficientemente próxima de um ponto de equilíbrio. Esta ideia é utilizada no método BCU para procurar o CUEP (ver (CHIANG, 2011)).

No caso da teoria de FEG, também é necessário detectar se a trajetória se aproxima ou intersecta o conjunto H . Neste caso, durante o processo de integração, deve-se monitorar o valor da função $\dot{V}$. Novamente, um valor limite para a função $\dot{V}$ deve ser imposto de forma que, quando ultrapassado, indique proximidade com o conjunto H .

Nas duas situações acima, o processo de integração será interrompido em um ponto próximo ao conjunto H ou a um ponto de equilíbrio. Denominaremos esse ponto como *ponto de aproximação* e denotaremos por x_a .

Não existe garantia de que o ponto de aproximação pertença a $H \cup G$, por isso, em seguida um algoritmo para encontrar raízes de equações não lineares deve ser empregado

para resolver a equação $\dot{V}(x) = 0$ tomando como ponto inicial $x = x_a$. Denotaremos essa raiz por x_r .

Neste ponto é sugerido um teste de validação sobre a raiz encontrada. Se a solução x_r estiver distante da condição inicial x_a , há grande chance de que x_r não esteja no conjunto de controle desejado. Se um ponto de equilíbrio for encontrado próximo o suficiente, ele deve ser considerado pertencente ao conjunto de controle $C_{\bar{x}}$. Abordagem similar também é utilizada no método [BCU](#).

Outro ponto que merece destaque é que devido à natureza repulsora da fronteira da região de quase-estabilidade, a trajetória do sistema pós-perturbação se afasta dela conforme a integração é executada. Este fator reduz a chance de se encontrar o conjunto de controle.

Para minimizar o efeito repulsor da fronteira, o processo de integração numérica no passo (2.2) pode ser modificado de forma a incorporar um passo corretor. Uma possível estratégia é utilizar um processo chamado de *shadowing* ou *stability-boundary-following*. Projetando os pontos encontrados durante o processo de integração na direção da estimativa inicial da região de quase-estabilidade através de *ray-casting* (ver ([TREINEN; VITTAL; KLIEMANN, 1996](#))).

O passo (3.1) consiste na aplicação de um método de otimização que minimize o valor da função V sujeita a restrição de que $\dot{V}(x) = 0$. Na implementação realizada durante esse trabalho, foi utilizada a função *fmincon* do MATLAB®. Veja a seção [A.2](#) para mais detalhes.

A principal dificuldade neste passo reside na necessidade de se obter o mínimo global da função V na fronteira do conjunto de controle. Algoritmos de minimização global podem ser utilizados, porém, deve-se evitar que eles saltem para outras componentes conexas durante o processo de otimização. Durante a implementação realizada neste trabalho, a chance de encontrar o mínimo global foi aumentada através da realização de diversos processos de minimização com condições iniciais aleatórias.

Ao final do passo (3.1), o processo de otimização fornece o valor crítico de energia generalizada $K_{\bar{x}}$ e um ponto x_c sobre a fronteira do conjunto de controle tal que $V(x_c) = K_{\bar{x}}$.

Finalmente, no passo (3.2), se $V(x_c) > V(x_0)$, estimativas conservadoras para o *exit-point* e para o tempo crítico podem ser encontradas através da avaliação dos valores assumidos pela FEG durante a integração do sistema perturbado no passo (2.1). Note que, através do armazenamento dos valores assumidos pela FEG durante o passo (2.1) pode-se evitar uma nova integração do sistema perturbado para a obtenção do tempo crítico.

3.7 Exemplo de Aplicação

Exemplo 3.6:

Considere a função $U(x,y) = y^3 - y + x^2 + y^2$ e o sistema quase-hamiltoniano,

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 3y^2 + 2y - 1 \\ \dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial x} - 0,05(y^2 + 1) = -2x - 0,05(y^2 + 1). \end{cases} \quad (3.3)$$

O retrato de fase do sistema (3.3) é mostrado na Figura 25. Os pontos $p_0 = (-1/18, 1/3)$ e $p_1 = (-1/10, -1)$ são, respectivamente, um **PEAE** e um ponto de equilíbrio do tipo sela.

Figura 25 – Retrato de fase do sistema quase-hamiltoniano definido por (3.3). Os pontos $p_0 = (-1/18, 1/3)$ e $p_1 = (-1/10, -1)$ são respectivamente um equilíbrio assintoticamente estável e um ponto de sela.

A Figura 26 mostra o gráfico da função U . Os pontos $x_0 = (0, 1/3)$ e $x_1 = (0, -1)$ são, respectivamente, um mínimo local e um ponto crítico do tipo sela da função U .

Suponha que o sistema (3.3) esteja em estado de equilíbrio, correspondente ao ponto p_0 quando uma perturbação ocorre e que, durante a perturbação, o sistema seja regido pela seguinte equação diferencial,

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y^2 + 2y \\ \dot{y} = -2x - 0,05(y^2 + 1) \end{cases} \quad (3.4)$$

Se a perturbação for mantida por pouco tempo, de tal forma que a solução do sistema perturbado iniciando em p_0 não saia da região de quase-estabilidade (com respeito

Figura 26 – Gráfico da função $U(x,y) = y^3 - y + x^2 + y^2 - 2$. Em destaque, o ponto de mínimo local $x_0 = (0, 1/3)$ e o ponto de sela $x_1 = (0, -1)$.

ao sistema pós-perturbação) do ponto p_0 , o sistema consegue retornar ao estado de equilíbrio inicial após a remoção da perturbação. A Figura 27 ilustra esta situação.

No entanto, se a perturbação for mantida por tempo suficiente para que o estado do sistema saia da região de quase-estabilidade de p_0 , o sistema não é capaz de se recuperar da perturbação. Esta situação está ilustrada na Figura 28.

Figura 27 – À esquerda, a trajetória do sistema no caso em que ele suporta a perturbação ($t_s = 3,3s$). À direita, o comportamento das variáveis de estado ao longo do tempo para a mesma situação. As linhas tracejadas mostram o comportamento das variáveis de estado durante a perturbação e as linhas contínuas, após a perturbação ser removida.

Sendo assim, conhecer a fronteira da região de quase-estabilidade do ponto p_0 desempenha um papel fundamental na análise da estabilidade do sistema diante de uma

Figura 28 – À esquerda, a trajetória do sistema no caso em que ele não suporta a perturbação e perde estabilidade ($t_s = 3,49s$). À direita, o comportamento das variáveis de estado ao longo do tempo para a mesma situação. As linhas tracejadas mostram o comportamento das variáveis de estado durante a perturbação e as linhas contínuas, após a perturbação ser removida.

perturbação.

De fato, como o sistema (3.3) é um sistema quase-hamiltoniano, o conjunto de nível da função U ao qual pertence o ponto de sela x_1 fornece uma estimativa para a fronteira da região de quase-estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável p_0 . Embora, a estimativa não seja conservadora.

A Figura 29 mostra como a estimativa obtida através do nível $U(x,y) = U(x_1) = 1$ se compara com a fronteira da região de quase-estabilidade verdadeira. Observe que a trajetória do sistema perturbado cruza a fronteira da região de quase-estabilidade antes de intersectar a curva de nível $U(x,y) = U(x_1)$.

Através da técnica desenvolvida no Capítulo 4 a seguinte FEG foi encontrada para o sistema (3.3),

$$\begin{aligned}
 V(x,y) = & 0,97412x - 15,916y + 15,937x^2 - 0,63886xy + 15,939y^2 \\
 & + 0,37897x^3 + 0,83606xy^2 + 15,877y^3 - 0,0044571x^4 \\
 & + 0,3245yx^3 - 0,021474x^2y^2 + 0,65585y^3x - 0,016513y^4 \\
 & - 0,091357x^5 - 0,43623x^3y^2 + 0,021988x^2y^3 - 0,3403y^4x \\
 & + 0,027735y^5.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

A Figura 30 mostra a existência de duas componentes conexas do conjunto H , uma adjacente ao ponto p_0 , denominada H_0 e outra adjacente a p_1 , denominada H_1 .

Partindo da estimativa inicial fornecida pela curva de nível de U a qual pertence o ponto x_1 , é possível realizar o passo (2.1) do algoritmo conceitual apresentado em 3.6. O ponto sobre a trajetória do sistema perturbado que intersecta a curva de nível $U(x,y) = 1$ é uma estimativa inicial para o *exit-point* e será denotado por $\bar{x}$.

Figura 29 – Comparação entre a estimativa da fronteira da região de quase-estabilidade do ponto p_0 fornecida pelo conjunto de nível $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : U(x,y) = U(x_1)\}$ e a fronteira verdadeira.

Figura 30 – Localização das componentes conexas do conjunto H associado ao sistema (3.3) e à FEG definida por (3.5).

No passo (2.2), a partir do ponto $\bar{x}$, deve-se proceder com a integração do sistema pós-perturbação, até que a solução encontre ou se aproxime do conjunto H ou de um ponto de equilíbrio. Como descrito na seção 3.6, será utilizado o processo de *shadowing* durante a integração e o critério de parada da integração será baseada no módulo do campo de vetores f e no valor da função $\dot{V}$.

Neste exemplo foi utilizado o limite mínimo para o módulo do campo de vetores igual a 0,3 e o limite máximo para a função $\dot{V}$ igual a $-0,01$. Em particular, neste exemplo o critério de parada através do módulo do campo de vetores foi atendido primeiro.

A Figura 31 ilustra a realização dos passos (2.1) e (2.2) para este exemplo. A Figura 32 mostra o comportamento das funções U e $\dot{V}$ durante a execução dos passos (2.1) e (2.2). Neste ponto do passo (2.2), o ponto de aproximação $x_a = (0,07375862, -0,9670155)$ foi encontrado.

Figura 31 – Trajetória do sistema perturbado até que o nível de $U(x,y) = U(x_1)$ seja atingido e trajetória do sistema pós-perturbação até que o ponto x_a .

Em seguida, busca-se por uma solução da equação $\dot{V}(x) = 0$ nas imediações do ponto x_a . Aplicando diretamente a função *fsolve* do MATLAB[®], obtém-se o ponto $x_c = (0,02427443, -0,9578435)$. Como a distância entre x_a e x_c é menor que 0,1, eles estão suficientemente próximos para que possamos considerar x_c como pertencente ao conjunto de controle de $\bar{x}$. O ponto x_c encontrado, é mostrado na Figura 31.

Sendo assim, a componente conexa H_1 é o conjunto de controle associado à trajetória do sistema sob falta. De fato, toda órbita na fronteira converge para algum ponto desta componente conexa.

No passo (3.1), um algoritmo de otimização é aplicado para minimizar V restrita à fronteira de H_1 . Esse passo foi executado, neste exemplo, através da função *fmincon* do

Figura 32 – O sistema perturbado é integrado até que a função U , avaliada ao longo da trajetória, atinja o nível $U(x_1) = 1$. Depois, o sistema pós-perturbação é integrado até que a função V seja maior que $-0,01$ ou até que o módulo de f seja menor que $f_{min} = 0,3$. O instante $\bar{t}$ corresponde ao tempo em que o ponto $\bar{x}$ é atingido.

MATLAB[®]. O valor mínimo para V encontrado foi $K_{\bar{x}} = 15,79445$, atingido no ponto $x_{min} = (-0,0447, -0,9415)$. Esse ponto é mostrado na Figura 31.

Como $V(p_0) = -2,958382$ é menor que $K_{\bar{x}}$, de acordo com o passo (3.2), a componente conexa do conjunto de nível $V(x) = K_{\bar{x}}$ que contém o ponto p_0 é uma estimativa conservadora para a região de quase-estabilidade de p_0 . Além disso, o instante para o qual a trajetória do sistema perturbado atinge o valor crítico de energia encontrado é $t_c = 3,4329s$.

Observação 3.7. No método BCU, utilizado para encontrar o CUEP no estudo da estabilidade transitória de sistemas elétricos de potência, a estimativa inicial para o *exit-point* também é obtida através da avaliação de uma função escalar ao longo da trajetória do sistema perturbado. Esta função escalar é denominada Energia Potencial e o *exit-point* é aproximado pelo primeiro ponto de máximo local da função Energia Potencial ao longo da trajetória do sistema perturbado. No caso estudado no exemplo 3.6 a estimativa inicial não é um ponto de máximo local da função U ao longo da trajetória do sistema perturbado, como mostra a Figura 32.

As Figuras 33 e 34 mostram a comparação entre a região de quase-estabilidade verdadeira e a estimativa encontradas pelo algoritmo proposto na seção 3.6. Note que, a trajetória do sistema perturbado intersecta a estimativa obtida antes de cruzar a fronteira

da região de quase-estabilidade real, indicando uma estimativa conservadora. O mesmo não ocorre utilizando a curva de nível da função U .

Figura 33 – Comparação entre a estimativa da fronteira da região de quase-estabilidade do ponto p_0 fornecida pelo algoritmo da seção 3.6 e a fronteira verdadeira.

Figura 34 – Comparação entre a estimativa da fronteira da região de quase-estabilidade do ponto p_0 fornecida pelo algoritmo da seção 3.6 e a fronteira verdadeira.

3.8 Conclusões

O método apresentado se mostra bem sucedido na obtenção de estimativas conservadoras para partes relevantes da fronteira da região de quase-estabilidade para sistemas dinâmicos que admitem FEG. Uma vez que a classe de sistemas que admitem FEG é mais ampla do que aquela que admite FE, acredita-se que com o surgimento de métodos como o apresentado neste trabalho, técnicas bastante eficazes e eficientes para análise de estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares se tornem disponíveis para sistemas com dinâmica mais complicada.

3.9 Passos Futuros

Nesta seção são listadas algumas possibilidades de melhoria para o método proposto e que podem ser avaliadas em estudos futuros.

1. Ajustar automaticamente os parâmetros do algoritmo de *shadowing*.

Como discutido na seção 3.6, o algoritmo de *shadowing* auxilia no processo de encontrar o conjunto de controle. No entanto, dois limiares precisam ser ajustados para que se obtenha uma resposta confiável.

Uma sugestão para implementações futuras é determinar os valores para o limite mínimo do módulo do campo de vetores e o limite máximo da função $\dot{V}$ durante a execução do passo (2.2) de forma automática, com base nas funções f e V .

2. Utilizar algoritmos de otimização global.

Assim como no caso do algoritmo apresentado na seção 2.4, neste capítulo também foi necessário buscar pelo mínimo global de uma função restrita a um determinado conjunto.

Estudar possíveis algoritmos de otimização global que possam ser empregados no passo (3.1) aumentaria a chance de se encontrar o ponto de mínimo global para V na fronteira do conjunto de controle.

Um cuidado extra deve ser tomado para que o algoritmo fique restrito à fronteira do conjunto de controle e não salte para outras componentes de H durante o processo de otimização.

4 UTILIZAÇÃO DE SOSP PARA ENCONTRAR FEG

4.1 Introdução

Nos capítulos 2 e 3, foi mostrado como uma Função Energia Generalizada (FEG) pode ser utilizada no estudo do comportamento assintótico de sistemas dinâmicos não lineares. No entanto, embora o conceito de FEG tenha sido introduzido no sentido de aumentar a classe de problemas que pudessem ser analisados através de métodos diretos, a tarefa de encontrar uma FEG para um dado sistema não é simples.

Embora FEGs tenham sido desenvolvidas para classes particulares de sistemas dinâmicos (ver, por exemplo, (ALBERTO; CHIANG, 2012b) e (SIQUEIRA; ALBERTO; BRETAS, 2015)), não existe uma abordagem sistemática para encontrá-las e o sucesso em exibi-las, assim como no caso das Funções Energia (FE) e das Funções de Lyapunov (FL), depende da experiência do analista e, geralmente, consiste em um procedimento de tentativa e erro.

Neste capítulo, será apresentado um método computacional para encontrar automaticamente FEGs para a classe de sistemas polinomiais usando *Sum of Squares Programming* (SOSP). Esta tarefa será realizada através da conversão do problema de encontrar uma FEG em um problema de factibilidade de *Sum of Squares* (SOS).

Inicialmente vamos desenvolver o método para sistemas polinomiais, no entanto, também discutiremos um exemplo de como estendê-lo a uma classe de sistemas não polinomiais utilizando uma mudança de variáveis não linear presente na literatura.

Nas seções 4.1.1, 4.1.2 e 4.1.3, será feita uma revisão de alguns conceitos matemáticos que contribuem para o entendimento da teoria desenvolvida no restante do capítulo. A maioria deles foi extraída de (CHESI, 2011), que pode ser utilizado como leitura complementar.

Na seção 4.2, são apresentados resultados que estabelecem a base teórica para converter a busca por uma FEG para um sistema polinomial em um problema de factibilidade de SOSP.

Na seção 4.3, os resultados desenvolvidos na seção 4.2 são utilizados na formulação de problemas de SOSP que podem ser resolvidos computacionalmente.

Em seguida, na seção 4.4, uma restrição é adicionada à formulação dos problemas de factibilidade. O objetivo desta restrição é que a FEG encontrada seja mais adequada para a obtenção de estimativas da região de estabilidade de um Ponto de Equilíbrio Assintoticamente Estável (PEAE).

Na seção 4.5, o método para obtenção de FEG através de problemas de factibilidade

SOS é aplicado em uma classe de problemas não polinomiais que surgem da modelagem de sistemas elétricos de potência. Neste caso, uma técnica já conhecida na literatura é utilizada para transformar o problema original em um problema polinomial, através de uma mudança de variáveis não linear.

Finalmente, nas seções 4.6 e 4.7 são apresentadas as conclusões e os próximos passos a serem desenvolvidos na técnica proposta.

4.1.1 Programação Semidefinida - SDP

Seja $\mathbb{R}^{n \times n}$ o conjunto das matrizes $n \times n$ cujos elementos são números reais. O subconjunto de $\mathbb{R}^{n \times n}$ composto das matrizes simétricas $n \times n$ será denotado por $\mathcal{S}^n$.

Definição 4.1 (Matriz Positiva Definida). Dizemos que $A \in \mathcal{S}^n$ é uma matriz positiva definida, quando, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tem-se que $x^T A x > 0$. Quando A é positiva definida, denotaremos por $A \succ 0$.

Definição 4.2 (Matriz Positiva Semidefinida). Dizemos que $A \in \mathcal{S}^n$ é uma matriz positiva semidefinida, quando, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ tem-se que $x^T A x \geq 0$. Quando A é positiva semidefinida, denotaremos por $A \succeq 0$.

Problemas que envolvem a busca por funções polinomiais podem ser convertidos em problemas de Programação Semidefinida – *Semidefinite Programming* (SDP) – através da representação de polinômios por matrizes.

Seja $\mathcal{P}_n$ o conjunto formado por todas as funções polinomiais $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N}$, vamos denotar por $b_{pol}(x, k)$ o vetor formado pelos monômios de grau menor ou igual a k na variável x definidos por indução,

$$b_{pol}(x, k+1) = (b_{pol}(x, k), x_1 y_1(x, k), x_2 y_2(x, k), \dots, x_n y_n(x, k)),$$

onde $y_i(x, k)$ é o subvetor de $b_{pol}(x, k)$ formado pelos elementos a partir do termo x_i^k .

Por exemplo, seja $x = (x_1, x_2)$, então,

$$\begin{aligned} b_{pol}(x, 1) &= (1, x_1, x_2), \quad y_1(x, 1) = (x_1, x_2), \quad y_2(x, 1) = (x_2) \\ b_{pol}(x, 2) &= (1, x_1, x_2, x_1 x_1, x_1 x_2, x_2 x_2), \quad y_1(x, 2) = (x_1^2, x_1 x_2, x_2^2), \quad y_2(x, 2) = (x_2^2) \\ b_{pol}(x, 3) &= (1, x_1, x_2, x_1^2, x_1 x_2, x_2^2, x_1 x_1^2, x_1 x_1 x_2, x_1 x_2^2, x_2 x_2^2) \end{aligned}$$

Definição 4.3 (SMR). Considere $f \in \mathcal{P}_n$, tal que $\deg(f) = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Dizemos que uma matriz simétrica M é uma Representação em Matriz Simétrica – *Symmetric Matrix Representation* (SMR) – de f com respeito a um vetor $b_{pol}(x, k)$, quando,

$$f(x) = b_{pol}(x, k)^T M b_{pol}(x, k). \quad (4.1)$$

Em geral, a representação de uma função polinomial através da expressão (4.1) não é única, ou seja, uma mesma função polinomial pode possuir mais de uma **SMR** associada, mesmo com respeito ao mesmo vetor de monômios $b_{pol}(x, k)$.

Portanto, faz sentido definir o conjunto de todas as **SMRs** de f com respeito a $b_{pol}(x, k)$,

$$\text{CSMR}(f) = \{M \in \mathcal{S}^n : f(x) = b_{pol}(x, k) M b_{pol}(x, k)^T\}. \quad (4.2)$$

Note que, se A e B pertencem a $\text{CSMR}(f)$, dados dois números reais α e β ,

$$\begin{aligned} b_{pol}(x, k)(\alpha A + \beta B)b_{pol}(x, k)^T &= \alpha b_{pol}(x, k) A b_{pol}(x, k)^T + \beta b_{pol}(x, k) B b_{pol}(x, k)^T \\ &= \alpha f(x) + \beta f(x). \end{aligned}$$

Então, $b_{pol}(x, k)(\alpha A + \beta B)b_{pol}(x, k)^T = f(x)$, se e somente se $\alpha + \beta = 1$, ou seja, $\alpha A + \beta B \in \text{CSMR}(f)$, se e somente se, $\alpha + \beta = 1$, implicando que o conjunto $\text{CSMR}(f)$ é, na verdade, um subespaço afim de $\mathcal{S}^n$. Logo, ele pode ser escrito da seguinte forma,

$$\text{CSMR}(f) = F + \mathcal{L}(f),$$

onde F é uma **SMR** qualquer de f e $\mathcal{L}(f) \subset \mathcal{S}^n$ é um subespaço vetorial.

Seja $l = \dim \mathcal{L}(f)$ e $B = b_1, b_2, \dots, b_l$ uma base para $\mathcal{L}(f)$, então, a função

$$\begin{aligned} L &: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathcal{L}(f) \\ x &= (x_1, x_2, \dots, x_l) \mapsto L(x) = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_l b_l, \end{aligned}$$

é uma parametrização para $\mathcal{L}(f)$.

4.1.2 Soma de Quadrados - Sum of Squares - SOS

Definição 4.4 (Soma de Quadrados – *Sum of Squares*). Dizemos que uma função polinomial $f \in \mathcal{P}_n$ é uma *Soma de Quadrados – Sum of Squares* (**SOS**) – quando existem funções polinomiais $g_i \in \mathcal{P}_n$ de forma que,

$$f(x) = \sum_{i=0}^n g_i^2(x).$$

Denotaremos o conjunto das funções polinomiais de $\mathcal{P}_n$ que são **SOS** por $\mathcal{SOS}_n$

Segue imediatamente da definição que, se f é uma **SOS**, então $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Porém a recíproca não é verdadeira (ver (PUTINAR, 1993; CHESI, 2011)). De fato, Motzkin exibiu um exemplo de função polinomial não-negativa e que não é uma **SOS** (ver (CHESI, 2007)):

$$M(x, y, z) = x^4 y^2 + x^2 y^4 - 3x^2 y^2 + 1.$$

Um importante resultado que permite converter o problema de encontrar funções **SOS** em um problema de factibilidade de uma Desigualdade Matricial Linear – *Linear Matrix Inequality* (**LMI**) – é enunciado a seguir.

Teorema 4.5. *Seja $f \in \mathcal{P}_n$, $l = \dim(\mathcal{L}(f))$, $F \in \text{CSMR}(f)$ e considere $L : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathcal{L}(f)$, uma parametrização para $\mathcal{L}(f)$. Então, f é uma *SOS* se e somente se existe um vetor $\alpha \in \mathbb{R}^l$ tal que,*

$$F + L(\alpha) \succ 0.$$

A demonstração desse resultado pode ser encontrada na página 14 de (CHESI, 2011).

A possibilidade de usar um algoritmo computacional que permite encontrar uma função *SOS* faz com que este tipo de função venha sendo empregada em diversos problemas (ver (PRAJNA, 2006; PAPACHRISTODOULOU; PRAJNA, 2002; PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU, 2003; PRAJNA; PARRILO; RANTZER, 2004)).

Para citar um exemplo (PAPACHRISTODOULOU; PRAJNA, 2005; PARRILO, 2000), suponha que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja uma função polinomial e considere o sistema de equações diferenciais induzido por ela, $\dot{x} = f(x)$. O problema de encontrar uma função de Lyapunov $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, para este sistema, pode ser convertido em um problema de encontrar uma função *SOS* positiva definida, tal que sua derivada ao longo de trajetórias seja negativa definida. Tais restrições podem ser denotadas da seguinte forma,

$$-\nabla V \cdot f - \varepsilon \in \mathcal{SOS}_n \quad (4.3a)$$

$$V - \varepsilon \in \mathcal{SOS}_n, \quad (4.3b)$$

onde $\varepsilon(x) = \eta|x|^2$, com $\eta > 0$ pequeno.

Existem várias ferramentas computacionais que podem ser usadas para resolver problemas formulados através de *SOSP*. Nos exemplos de aplicação contidos neste texto, foi utilizado o pacote livre SOSTOOLS (PAPACHRISTODOULOU et al., 2013) para MATLAB® que, por sua vez, usa os pacotes livres SeDuMi (STURM, 2001; PöLIK, 2005) ou SDPT3 (TOH; TütüNCü; TODD, 2006) para solução de problemas de *SDP*.

4.1.3 Positivstellensatz de Stengle

Nesta seção será apresentado um importante teorema da geometria algébrica que será utilizado na formulação de um problema de factibilidade que permite encontrar uma *FEG*. Para uma leitura mais completa sobre o tema, ver (BOCHNAK; COSTE; ROY, 1998) e (CHESI, 2011).

O procedimento usado neste trabalho está baseado em trabalhos que usam técnicas similares para encontrar *FL* para sistemas polinomiais (ver, por exemplo, (ANGHEL; MILANO; PAPACHRISTODOULOU, 2013; CHESI, 2011; PARRILO, 2000)).

Para proceder com o enunciado do resultado, são necessárias algumas definições.

Definição 4.6 (Anel). Um dado conjunto $\mathcal{A}$, munido de uma operação de adição, denotada por $+$, e uma operação de multiplicação, denotada por $\cdot$, é dito um *anel*, quando as operações possuem as seguintes propriedades:

- A1. Para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- A2. Existe um elemento $0 \in \mathcal{A}$ tal que, para todo $x \in \mathcal{A}$, $0 + x = x$ e $x + 0 = x$.
- A3. Para todo $x \in \mathcal{A}$, existe um elemento $z \in \mathcal{A}$ tal que $x + z = 0$ e $z + x = 0$.
- A4. Para todo $x, y \in \mathcal{A}$, $x + y = y + x$.
- A5. Para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- A6. Existe um elemento $1 \in \mathcal{A}$ tal que, para todo $x \in \mathcal{A}$, $1 \cdot x = x$ e $x \cdot 1 = x$.
- A7. Para todo $x, y \in \mathcal{A}$, $x \cdot y = y \cdot x$.
- A8. Para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$, $z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$.

Definição 4.7 (Anel de polinômios). O conjunto dos polinômios com coeficientes reais em n variáveis, munido das operações usuais de adição e multiplicação de polinômios, é um anel, chamado de *anel de polinômios*.

Definição 4.8 (Monóide Multiplicativo). O *monóide multiplicativo* gerado pelos polinômios $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathcal{P}_n$ é o conjunto,

$$\text{mulmon}(p_1, p_2, \dots, p_k) = \left\{ q(x) = \prod_{i=1}^k p_i^{d_i}(x) : d_i \in \{0, 1, 2, \dots\} \right\},$$

ou seja, é o conjunto formado por todos os produtos finitos dos polinômios $p_1, p_2, \dots, p_k$.

Observe que o polinômio constante igual a 1 sempre pertence a qualquer monóide multiplicativo.

Outra definição necessária é a de *cone* no anel de polinômios.

Definição 4.9 (Cone). Um *cone* $\mathcal{C}$ contido no anel dos polinômios $\mathcal{P}_n$, é um subconjunto de $\mathcal{P}_n$, tal que,

- 1. Se $p, q \in \mathcal{C}$ então $p + q \in \mathcal{C}$;
- 2. Se $p, q \in \mathcal{C}$ então $pq \in \mathcal{C}$;
- 3. Se $p \in \mathcal{P}_n$ então $p^2 \in \mathcal{C}$.

Segue diretamente da definição 4.9 que o menor cone contido em $\mathcal{P}_n$ é o conjunto dos polinômios SOS. Além disso, dado um conjunto qualquer de polinômios, pode-se definir o menor cone que contenha este conjunto.

Definição 4.10 (Cone gerado). O cone gerado pelos polinômios $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathcal{P}_n$ é o conjunto,

$$\text{cone}(p_1, \dots, p_k) = \left\{ q(x) = \sum_{i=1}^m s_i(x) r_i(x) : m \in \mathbb{N}, s_i(x) \in \mathcal{SOS}_n, r_i(x) \in \text{mulmon}(p_1, \dots, p_k) \right\}.$$

A proposição a seguir fornece uma definição equivalente para o cone gerado por um conjunto de polinômios e que pode ser mais facilmente utilizada durante a implementação numérica.

Proposição 4.11. *Sejam $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathcal{P}_n$, então,*

$$\text{cone}(p_1, p_2, \dots, p_k) = \left\{ q(x) = \sum_{i=1}^{2^k} s_i(x) r_i(x) : s_i(x) \in \mathcal{SOS}_n, r_i(x) \in M(p_1, p_2, \dots, p_k) \right\},$$

onde,

$$M(p_1, p_2, \dots, p_k) = \left\{ q(x) = \prod_{j=1}^k p_j^{d_j}(x) : d_j \in \{0, 1\} \right\}.$$

Demonstração. Tome $q(x) \in \text{cone}(p_1, p_2, \dots, p_k)$. Então, existem polinômios $s_i \in \mathcal{SOS}_n$ e $r_i(x) \in \text{mulmon}(p_1, p_2, \dots, p_k)$, tais que $q(x) = \sum_{i=1}^{2^k} s_i(x) r_i(x)$. Além disso, para cada i , existem $d_{i,1}, d_{i,2}, \dots, d_{i,k} \in \mathbb{N}$, tais que, $r_i(x) = \prod_{j=1}^k p_j^{d_{i,j}}(x)$.

Assim, pode-se escrever, $r_i(x) = \prod_{j=1}^k p_j^{c_{i,j}}(x) \prod_{j=1}^k p_j^{e_{i,j}}(x)$, onde $e_{i,j} = d_{i,j} \bmod 2$ e $c_{i,j} = d_{i,j} - e_{i,j}$.

Como $c_{i,j}$ é par, segue que $p_j^{c_{i,j}}(x) \in \mathcal{SOS}_n$. Logo $r_i(x) = \prod_{i=1}^k \sigma_j(x) m_j(x)$, com $m_j(x) \in M(p_1, p_2, \dots, p_k)$ e $\sigma_j(x) \in \mathcal{SOS}_n$. Uma vez que $M(p_1, p_2, \dots, p_k)$ possui 2^k elementos, tem-se que $q(x)$ pode ser escrito da forma $q(x) = \sum_{i=1}^{2^k} s_i(x) m_i(x)$ com $s_i(x) \in \mathcal{SOS}_n$ e $m_i(x) \in M(p_1, p_2, \dots, p_k)$. Logo

$$\text{cone}(p_1, p_2, \dots, p_k) \subset \left\{ q(x) = \sum_{i=1}^{2^k} s_i(x) r_i(x) : s_i(x) \in \mathcal{SOS}_n, r_i(x) \in M(p_1, p_2, \dots, p_k) \right\}.$$

A continência recíproca é imediata pois, $M(p_1, p_2, \dots, p_k) \subset \text{mulmon}(p_1, p_2, \dots, p_k)$. $\square$

Para o enunciado do resultado objetivo desta seção, resta ainda uma definição,

Definição 4.12 (Ideal gerado). O ideal gerado pelos polinômios $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathcal{P}_n$ é o conjunto,

$$\text{ideal}(p_1, p_2, \dots, p_k) = \left\{ q(x) = \sum_{i=1}^k r_i(x) p_i(x) : r_i(x) \in \mathcal{P}_n \right\}.$$

O seguinte resultado fornece uma relação entre as propriedades geométricas dos conjuntos algébricos e as estruturas algébricas geradas pelas funções polinomiais que definem esses conjuntos. Este resultado foi enunciado por Stengle em (STENGLE, 1974), onde a demonstração pode ser encontrada. Veja também teorema 4.4.2 de (BOCHNAK; COSTE; ROY, 1998).

Teorema 4.13 (Positivstellensatz de Stengle). *Considere as funções polinomiais*

$$f_1, f_2, \dots, f_s, g_1, g_2, \dots, g_m, h_1, h_2, \dots, h_l \in \mathcal{P}_n,$$

e defina o conjunto,

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} f_i(x) \geq 0, i = 1, 2, \dots, s \\ g_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, m \\ h_k(x) \neq 0, k = 1, 2, \dots, l \end{array} \right\}.$$

Então,

$$K = \emptyset \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists \tilde{f} \in \text{cone}(f_1, \dots, f_s), \tilde{g} \in \text{ideal}(g_1, \dots, g_m), \tilde{h} \in \text{mulmon}(h_1, \dots, h_l) \\ \text{tais que, } \tilde{f} + \tilde{g} + \tilde{h}^2 = 0. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

4.2 FEG para Sistemas Polinomiais

Como visto na seção anterior 4.1.2, a busca por uma função de Lyapunov para um sistema de equações diferenciais polinomiais pode ser convertido no problema de encontrar uma função SOS sujeita a algumas restrições e que pode ser resolvido utilizando-se de ferramentas computacionais SOSP.

Nesta seção, uma técnica semelhante será desenvolvida com a intenção de buscar uma FEG para um dado sistema polinomial de equações diferenciais.

Dada uma função polinomial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, considere o sistema de equações diferenciais induzido por f ,

$$\dot{x} = f(x). \quad (4.5)$$

Denotaremos por $t \mapsto \Phi(t, x_0)$, a única solução do sistema (4.5) tal que $\Phi(0, x_0) = x_0$.

Dada uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definimos o conjunto

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) \geq 0\}, \quad (4.6)$$

onde $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x)$.

Assim como foi definido na seção 1.7, uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, é uma FEG para o sistema (4.5) se,

G1. O conjunto C possuir um número finito de componentes conexas;

G2. O conjunto C for limitado;

G3. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se $V(\Phi(t, x))$ for limitada para $t \geq 0$ então $\Phi(t, x)$ também for limitada para todo $t \geq 0$.

Observação 4.14. A restrição G1 fica automaticamente satisfeita no caso em que f e V são funções polinomiais. De fato, todo conjunto semi-algébrico, ou seja, definido através de uma desigualdade de funções polinomiais, é composto, no máximo, de um número finito de componentes conexas (teorema 5.2.2 de (BASU; POLLACK; ROY, 2003)). Além disso, a restrição G2 fica satisfeita se e somente se existir $M > 0$ tal que,

$$\dot{V}(x) < 0, \text{ se } |x| > M.$$

A verificação da condição G3 é, em geral, difícil. Por isso, resultados auxiliares precisam ser construídos de forma a substituir a condição G3 por condições suficientes e de verificação mais simples.

4.2.1 Alternativas para a Condição G3

Nesta seção, vamos enunciar alguns resultados que tem como objetivo substituir a condição G3 da definição 1.32 por condições de mais simples verificação.

Definição 4.15 (Sistema Positivamente Completo). Considere o sistema (4.5). Se, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, a solução do sistema $t \mapsto \Phi(t, x)$ está definida para todo $t > 0$, diremos que o sistema é *positivamente completo*.

Da teoria de equações diferenciais, sabe-se que, se o intervalo maximal de definição de uma solução é finito, então essa órbita é ilimitada. Sendo assim, ser positivamente completo é uma propriedade natural dos sistemas que surgem nas aplicações. Normalmente, soluções ilimitadas em tempo finito, significam variação infinita de energia em tempo finito. Por essa razão, muitos dos sistemas dinâmicos provenientes da modelagem de sistemas físicos são positivamente completos (ver (KRSTIC, 2010)).

Uma das possíveis alternativas para a verificação da condição G3 pode ser enunciada no seguinte resultado.

Proposição 4.16. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função polinomial tal que o sistema $\dot{x} = f(x)$ seja positivamente completo. Considere ainda $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. Se existirem constantes $\delta > 0$ e $M > 0$ tais que*

$$\dot{V}(x) < -\delta, \text{ se } |x| > M, \tag{4.7}$$

*então, a função V é uma *FEG* para o sistema $\dot{x} = f(x)$.*

Demonstração. Pelas discutido na Observação 4.14, as condições G1 e G2 ficam satisfeitas diretamente a partir das hipóteses. Resta provar que a completude positiva do sistema implica na condição G3.

De fato, suponha por absurdo, que as hipóteses sejam satisfeitas mas que G3 não seja satisfeita, ou seja, que exista algum x_0 tal que a solução $t \mapsto \Phi(t, x_0)$ seja ilimitada e $V(\Phi(t, x_0))$ seja limitada quando $t \rightarrow \infty$.

Como $\Phi(t, x_0)$ é ilimitada, existe uma sequência $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que, quando $i \rightarrow \infty$, tem-se que $t_i \rightarrow \infty$ e $|\Phi(t_i, x_0)| \rightarrow \infty$.

Segue da continuidade de $x \mapsto \dot{V}(x)$, que a Equação (4.7) é equivalente a,

$$\dot{V}(x) \leq -\delta, \text{ se } |x| \geq M, \quad (4.8)$$

Neste ponto, a prova será dividida em dois casos exaustivos:

- (a) Existe um $\tau > 0$ tal que $\Phi(t, x_0) \notin \text{int}\mathcal{B}_M(0)$ para todo $t > \tau$;
- (b) Para todo $t > 0$, existe um $\tau > t$ tal que $\Phi(\tau, x_0) \in \text{int}\mathcal{B}_M(0)$,

onde $\text{int}\mathcal{B}_M(0)$ denota o interior do conjunto $\mathcal{B}_M(0)$, a bola de raio M e centro em 0.

De forma intuitiva, no caso (a), a solução deixa o interior conjunto $\mathcal{B}_M(0)$ em algum tempo e não retorna mais. No caso (b), embora a solução seja ilimitada, ela sempre retorna para $\text{int}\mathcal{B}_M(0)$.

Caso a - Pelo teorema do valor médio, dado $t > \tau$, existe algum $\theta \in (\tau, t)$ tal que,

$$V(\Phi(t, x_0)) - V(\Phi(\tau, x_0)) = \left(\nabla V(\Phi(\theta, x_0)) \cdot f(\Phi(\theta, x_0)) \right) (t - \tau).$$

Então, por (4.7),

$$V(\Phi(t, x_0)) < V(\Phi(\tau, x_0)) - \delta(t - \tau).$$

Como a solução está definida para todo $t > \tau$, $V(\Phi(t, x_0)) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \infty$ configurando um absurdo.

Caso b - Como o bordo da bola $\mathcal{B}_M(0)$, denotado por $\partial\mathcal{B}_M(0)$ é compacto, tome,

$$S = \sup_{x \in \partial\mathcal{B}_M(0)} V(x) \quad \text{e} \quad I = \inf_{x \in \partial\mathcal{B}_M(0)} V(x).$$

Considere sequências de tempos $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{\sigma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tais que a solução $t \mapsto \Phi(t, x_0)$ deixa o conjunto $\text{int}\mathcal{B}_M(0)$ para todo $t = \tau_i$ e entra no conjunto $\text{int}\mathcal{B}_M(0)$ para todo $t = \sigma_i$.

Além disso, as sequências podem ser escolhidas de tal forma que $\tau_i < t_i < \sigma_i < \tau_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Assim,

$$\begin{aligned} S - I &\geq V(\Phi(\tau_i, x_0)) - V(\Phi(\sigma_i, x_0)) \\ &= - \int_{\tau_i}^{\sigma_i} \nabla V(\Phi(\xi, x_0)) \cdot f(\Phi(\xi, x_0)) \, d\xi \\ &\geq \delta(\sigma_i - \tau_i). \end{aligned}$$

Logo, existe uma constante $L > 0$, que não depende de i , tal que,

$$\sigma_i - \tau_i \leq \frac{S - I}{\delta} < L. \quad (4.9)$$

Seja $y_i = \Phi(\tau_i, x_0)$ uma sequência de pontos sobre $\partial\mathcal{B}_M(0)$ e seja $\tilde{y} \in \partial\mathcal{B}_M(0)$ um ponto de acumulação desta sequência.

Considere a solução $t \mapsto \Phi(t, \tilde{y})$. Segue da completude positiva que $\Phi(t, \tilde{y})$ é definida para todo $t > 0$. Seja $J > 0$ tal que $|\Phi(t, \tilde{y})| < J$ para todo $t \in (0, L)$.

Pela continuidade com respeito às condições iniciais, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\zeta > 0$ tal que, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ onde $|x - \tilde{y}| < \zeta$, temos que $|\Phi(t, x) - \Phi(t, \tilde{y})| < \varepsilon$ para todo $t \in (0, L)$.

Como a solução $t \mapsto \Phi(t, x_0)$ é ilimitada, seja $k > 0$, grande o suficiente para que $|\Phi(t_i, x_0)| > J + \varepsilon$ para todo $i > k$.

Uma vez que $\tilde{y}$ é um ponto de acumulação para a sequência $y_{i \in \mathbb{N}}$, existe $s > k$ tal que $|y_s - \tilde{y}| < \zeta$.

Portanto, temos que

$$t_s - \tau_s < \sigma_s - \tau_s < L,$$

e

$$\begin{aligned} |\Phi(t_s - \tau_s, y_s) - \Phi(t_s - \tau_s, \tilde{y})| &= |\Phi(t_s, x_0) - \Phi(t_s - \tau_s, \tilde{y})| \\ &> |\Phi(t_s, x_0)| - |\Phi(t_s - \tau_s, \tilde{y})| \\ &> J + \varepsilon - J = \varepsilon, \end{aligned}$$

chegando a um absurdo. □

Sendo assim, a exigência de que o sistema de equações diferenciais seja positivamente completo, é suficiente para garantir que uma função V , polinomial, respeitando a condição (4.7), seja uma *FEG* para um sistema de equações diferenciais polinomiais. Observe, no entanto, que esta não é uma condição necessária.

Observação 4.17. A condição (4.7), implica que o conjunto C esteja contido no interior do conjunto $\mathcal{B}_M(0)$. Do ponto de vista das aplicações, quanto menor o valor de M , menor o volume do conjunto C , o que pode melhorar a qualidade das informações que se deseja obter sobre a dinâmica do sistema através da *FEG* encontrada.

O resultado que enunciaremos a seguir também fornece uma alternativa à verificação da condição G3. Ele elimina a exigência da completude positiva do fluxo induzido pela função polinomial f através da imposição de condições mais restritivas à função V .

Proposição 4.18. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, funções polinomiais. Se existem constantes $\delta > 0$ e $M > 0$ tais que*

$$\dot{V}(x) < -\delta(|f(x)|^2 + 1), \text{ se } |x| \geq M, \quad (4.10)$$

então V é uma FEG para o sistema $\dot{x} = f(x)$.

Demonstração. Assim como na demonstração da Proposição 4.16, as condições G1 e G2 ficam satisfeitas diretamente à partir das hipóteses (ver Observação 4.14).

Para provar que a condição G3 também fica satisfeita, tome $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que a função $t \mapsto V(\Phi(t, x_0))$ seja limitada para $0 \leq t < \beta$ e considere que $[0, \beta)$ seja o intervalo maximal de definição para a solução $t \mapsto \Phi(t, x_0)$. Neste caso, podemos ter $\beta = +\infty$.

Considere o conjunto $T_1 \subset [0, \beta)$, dado por,

$$T_1 = \{x \in [0, \beta) : |f(\Phi(t, x_0))| \geq 1\},$$

e $T_2 \subset [0, \beta)$, dado por,

$$T_2 = \{x \in [0, \beta) : |f(\Phi(t, x_0))| < 1\}.$$

Se $[a, b] \subset [0, \beta)$ é um intervalo qualquer, tal que $\Phi(t, x_0) \notin \mathcal{B}_M(0)$ para todo $t \in [a, b]$, temos

$$\begin{aligned} V(\Phi(a, x_0)) - V(\Phi(b, x_0)) &= - \int_a^b \dot{V}(\Phi(\xi, x_0)) d\xi \\ &> \delta \int_a^b |f(\Phi(\xi, x_0))|^2 d\xi + \delta(b - a) \\ &\geq \delta \int_{T_1 \cap [a, b]} |f(\Phi(\xi, x_0))|^2 d\xi + \delta(b - a) \\ &\geq \delta \int_{T_1 \cap [a, b]} |f(\Phi(\xi, x_0))| d\xi + \delta(b - a) \\ &= \delta \int_a^b |f(\Phi(\xi, x_0))| d\xi - \delta \int_{T_2 \cap [a, b]} |f(\Phi(\xi, x_0))| d\xi + \delta(b - a) \\ &\geq \delta \int_a^b |f(\Phi(\xi, x_0))| d\xi - \delta \int_{T_2 \cap [a, b]} 1 d\xi + \delta(b - a) \\ &\geq \delta \int_a^b |f(\Phi(\xi, x_0))| d\xi - \delta(b - a) + \delta(b - a) \\ &\geq \delta \left| \int_a^b f(\Phi(\xi, x_0)) d\xi \right| \\ &= \delta |\Phi(b, x_0) - \Phi(a, x_0)|. \end{aligned}$$

Então, toda porção da solução $\Phi(t, x_0)$ que se encontra fora do conjunto $\mathcal{B}_M(0)$ é limitada. Assim, $\Phi(t, x_0)$ é limitada e, portanto, G3 fica satisfeita. $\square$

Utilizando a mesma estrutura da prova da Proposição 4.18, outro resultado pode ser obtido se alterarmos a restrição (4.10) para,

$$\dot{V}(x) < -\delta|f(x)|, \text{ se } |x| \geq M. \quad (4.11)$$

Embora a condição (4.11) possa ser útil em um cenário mais geral, neste trabalho, utilizaremos a condição (4.10), pois nossa intenção é formular o problema de encontrar uma *FEG* em termos de desigualdades polinomiais que possam ser convertidas em restrições para problemas de *SOSP*.

4.3 Utilizando *SOSP* para Encontrar uma *FEG*

Nesta seção será discutido como os resultados apresentados na seção 4.2 podem ser utilizados na construção de problemas de factibilidade envolvendo *SOS* que permitem encontrar uma *FEG* para um dado sistema polinomial.

Considere o seguinte problema de otimização,

Problema de Otimização 4.19. Dada uma função polinomial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

Encontrar: $K = \inf_{V,z}$

Tal que: $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja polinomial
 $-\dot{V}(x) - |x|^2 + z \geq 0$

A Proposição 4.16, nos permite demonstrar o seguinte resultado.

Proposição 4.20. *Seja K uma solução para o Problema 4.19 e V^* um minimizador. Considere, ainda, que o sistema $\dot{x} = f(x)$ seja positivamente completo. Se $K > 0$, então V^* é uma *FEG* para o sistema.*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x|^2 > K + \delta$, para algum $\delta > 0$. Então, $|x|^2 - K > \delta$ e, portanto, para que a restrição do problema seja satisfeita, tem-se que, $\dot{V}(x) < -\delta$. Segue que, $\dot{V}(x) < -\delta$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| > \sqrt{K + \delta}$. Aplicando-se a Proposição 4.16, conclui-se a prova. $\square$

Minimizar o número z implica em se obter o menor raio M para o qual a condição (4.7) fica satisfeita. Isso faz com que o problema de otimização vise a minimização do volume do conjunto C .

Exemplo 4.21: Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias, chamado de *sistema de Van der Pol*,

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + x \\ \dot{y} = -x; \end{cases} \quad (4.12)$$

Este sistema possui uma órbita periódica atrativa, que denotaremos por σ . De fato, pode ser mostrado que $A(\sigma) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (ver (HIRSCH; SMALE, 1974)) e, portanto, que $A_q(\sigma) = \mathbb{R}^2$.

Sendo assim, todas as soluções estão definidas para todo $t > 0$, ou seja, o sistema é positivamente completo.

Devido à presença da órbita periódica, este sistema não admite uma Função Energia global (ver seção 1.7), no entanto, a busca por uma *FEG* polinomial utilizando o problema de otimização 4.19 fornece a seguinte função,

$$\begin{aligned}
 V_1(x,y) = & 0,93751 + 0,99868x^2 - 0,97597xy + 0,94291y^2 + 0,12362 \times 10^{-3}x^3 \\
 & - 0,18497 \times 10^{-3}x^2y - 0,52883 \times 10^{-6}xy^2 - 0,25282 \times 10^{-4}y^3 \\
 & - 0,63285 \times 10^{-4}x^5 + 0,19133 \times 10^{-3}x^4y + 0,39134 \times 10^{-5}x^3y^2 \\
 & + 0,12504 \times 10^{-3}x^2y^3 + 0,40096 \times 10^{-8}xy^4 + 0,49623 \times 10^{-4}y^5 \\
 & + 0,88381 \times 10^{-2}x^6 - 0,42892 \times 10^{-1}x^5y + 0,95698 \times 10^{-1}x^4y^2 \\
 & - 0,42854 \times 10^{-1}x^3y^3 + 0,58403 \times 10^{-1}x^2y^4 - 0,73351 \times 10^{-6}xy^5 \\
 & + 0,19459 \times 10^{-1}y^6.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Além disso, como resultado tem-se $K = 2,03$.

A função $V_1(x,y)$, definida em (4.13), tem seu gráfico mostrado na Figura 35. Na mesma figura é mostrado o conjunto C e a sua relação com o nível da função $|x|^2$ que contém todas as componentes conexas de C .

O maior valor assumido pela função $V_1(x,y)$ no conjunto C é 4. Então, o Teorema 2.9 permite concluir que, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, temos que o conjunto de nível $V_1(x,y) = 4 + \delta$ é positivamente invariante. Portanto, toda solução que entra neste conjunto de nível, necessariamente, converge para o maior conjunto invariante contido nele. Sendo assim, o conjunto de nível $V_1(x,y) = 4$ fornece, em um certo sentido, uma estimativa para o conjunto atrativo σ (ver (ALBERTO, 2000)).

Figura 35 – À esquerda, o gráfico da função $V_1(x,y)$ definida no exemplo 4.21. À direita, o conjunto C associado e sua relação com a região de estabilidade da órbita periódica σ e a curva de nível $|x|^2 = K$, neste caso, para $K = 2,03$, encontrado através da solução do problema de otimização.

4.3.1 Formulação usando o Positivstellensatz de Stengle

Nesta seção será utilizado Positivstellensatz de Stengle (ver seção 4.1.3) para melhorar a formulação do problema de otimização no que diz respeito a aumentar os graus de liberdade e, assim, ampliar o espaço da busca por soluções.

Como foi discutido na seção 4.2, para que uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma *FEG* para um sistema de equações diferenciais polinomiais positivamente completo, é suficiente que exista um número real $M > 0$ tal que, para alguma $\delta > 0$,

$$\dot{V}(x) < -\delta, \text{ se } |x| > M. \quad (4.14)$$

Considere o conjunto,

$$C_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) \geq -\delta\}.$$

Neste caso, para atender à restrição imposta por (4.14), é suficiente exigir que o conjunto C_δ esteja contido na bola de raio M e centro na origem, denotada por $\mathcal{B}_M(0)$. Ou, de forma equivalente, pode-se escrever,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) \geq -\delta\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 \geq M^2\} = \emptyset,$$

ou ainda,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) \geq -\delta, |x|^2 \geq M^2\} = \emptyset. \quad (4.15)$$

Usando o Teorema 4.13, com $f_1 = \dot{V} + \delta$, $f_2 = |x|^2 - M^2$, $g_1 = 0$ e $h_1 = 1$, obtém-se que a expressão (4.15) é satisfeita, se e somente se,

$$-1 \in \text{cone}(\dot{V} + \delta, |x|^2 - M^2).$$

Pela definição 4.10, é equivalente dizer que existem funções $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathcal{SOS}_n$ tais que,

$$\begin{aligned} -1 &= s_1(x) + s_2(x)(\dot{V}(x) + \delta) \\ &+ s_3(x)(|x|^2 - M^2) \\ &+ s_4(x)(\dot{V}(x) + \delta)(|x|^2 - M^2) \end{aligned} \quad (4.16)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Como pode-se observar, um problema inicialmente formulado de forma geométrica, através de relações de pertinência entre conjuntos algébricos, se torna, através da utilização

do Teorema 4.13, um problema de busca por funções polinomiais que cumprem com certas restrições.

Este problema pode ser resolvido através de ferramentas desenvolvidas para solução de problemas de factibilidade e otimização de funções polinomiais, como foi discutido no início desta seção. Em nosso caso, o fato das funções s_1, s_2, s_3, s_4 e V serem incógnitas, torna o problema não linear. Portanto, a equação (4.16) não pode ser utilizada em um problema de factibilidade que possa ser resolvido usando as ferramentas computacionais disponíveis de *SOSP*.

Para eliminar as não linearidades do problema, é preciso restringir o espaço de busca das soluções, por exemplo, fazendo $s_4(x) = 0$ e $s_2(x) = 1$. Restando, assim,

$$s_1(x) + (\dot{V}(x) + \delta) + s_3(x)(|x|^2 - M^2) + 1 = 0. \quad (4.17)$$

Como $s_1(x) \in \mathcal{SOS}_n$, é equivalente dizer que,

$$-(\dot{V}(x) + \delta) - s_3(x)(|x|^2 - M^2) - 1 \in \mathcal{SOS}_n. \quad (4.18)$$

Para que a expressão (4.18) possa ser utilizada como restrição em um problema de factibilidade, o valor de M deve ser fixado. Como M aparece multiplicado por $s_3(x)$, ele não pode ser incluído como variável do problema de factibilidade.

Para encontrar o menor valor de M para o qual a restrição (4.18) seja cumprida, deve-se iniciar com um valor grande o suficiente para M e proceder com um processo de dicotomia, através da resolução de vários problemas de factibilidade sujeitos a restrição.

Considere o problema de factibilidade,

Problema de Factibilidade 4.22. Dados $M > 0$ e $\delta > 0$,

Encontrar: $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, polinomial e $s_3(x) \in \mathcal{SOS}_n$,

Tal que: $-(\dot{V}(x) + \delta) - s_3(x)(|x|^2 - M^2) - 1 \in \mathcal{SOS}_n$.

A discussão presente nesta seção permite enunciar o seguinte resultado.

Teorema 4.23. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função polinomial tal que o sistema de equações diferenciais $\dot{x} = f(x)$ seja positivamente completo. Para um dado $\delta > 0$ e $M > 0$, se o par de funções polinomiais (V, s_3) é uma solução para o Problema 4.22, então V é uma *FEG* para o sistema $\dot{x} = f(x)$.*

A demonstração do Teorema 4.23 pode ser obtida através da utilização da Proposição 4.16 e do fato de que a expressão (4.18) implica na expressão (4.7).

Uma consequência imediata da existência de uma solução para o Problema 4.22 é que a caracterização da fronteira da região de estabilidade, obtida em (ALBERTO; CHIANG,

2012a), pode ser aplicada ao sistema (4.5). Mais precisamente, se γ é um conjunto atrativo para o sistema (4.5), então a fronteira da região de estabilidade de γ está contido na união das variedades estáveis dos conjuntos ω -limite contidos na fronteira da região de estabilidade.

Exemplo 4.24: Considere o mesmo sistema do exemplo 4.21

Através da aplicação do Problema de 4.22, obtemos o valor de $M = 4,54$ e a *FEG*,

$$\begin{aligned} V_2(x,y) = & 0,27718x^2 - 0,93187xy - 0,17959y^2 - 0,18561x^3 \\ & + 0,37781yx^2 + 0,0013541xy^2 + 0,20998y^3 + 0,43193x^4 \\ & - 0,56013yx^3 + 1,0415x^2y^2 - 0,0022499y^3x + 0,5197y^4. \end{aligned} \quad (4.19)$$

A função $V_2(x,y)$ definida em (4.19), tem seu gráfico mostrado na Figura 36, onde também são exibidas as componentes conexas do conjunto C associado.

O nível da função V que melhor aproxima o conjunto atrativo, para o caso da *FEG* encontrada, é o conjunto de nível $V(x,y) = 2,8$, também mostrado na Figura 36. A linha pontilhada corresponde à estimativa do conjunto atrativo obtida no exemplo 4.21.

Figura 36 – À esquerda, o gráfico da função $V_2(x,y)$ definida no exemplo 4.24. À direita, o conjunto C e sua relação com a região de estabilidade da órbita periódica σ . A linha pontilhada corresponde à estimativa do conjunto atrativo obtida através da *FEG* encontrada no exemplo 4.21.

Observação 4.25. Os exemplos 4.21 e 4.24 ilustram como as soluções encontradas através do Problema 4.22 fornecem resultados melhores do que aquelas obtidas através do Problema 4.19, mesmo quando restringimos o grau da função V à valores menores. Tal melhoria se deve à formulação usando o Teorema 4.13 que adiciona a função s_3 à restrição do problema.

Removendo a hipótese de completude positiva, o mesmo procedimento utilizado para construir o problema de factibilidade 4.22 pode ser aplicado usando a Proposição

4.18 ao invés da Proposição 4.16, conduzindo à formulação do seguinte problema de factibilidade,

Problema de Factibilidade 4.26. Dados $M > 0$ e $\delta > 0$,

Encontrar: $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ polinomial e $s_3 \in \mathcal{SOS}_n$

Tal que: $-\dot{V}(x) - \delta(|f(x)|^2 + 1) - s_3(x)(|x|^2 - M^2) - 1 \in \mathcal{SOS}_n$.

Além disso, pode-se formular o seguinte resultado.

Teorema 4.27. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função polinomial. Dados $\delta > 0$ e $K > 0$, se o par de funções polinomiais (V, s_3) é uma solução para o Problema 4.26, então V é uma *FEG* para $\dot{x} = f(x)$.*

A demonstração do Teorema 4.27 segue da Proposição 4.18 e do fato de que a condição imposta no Problema 4.26 implica na condição (4.10).

Observação 4.28. Vale a pena ressaltar que a formulação apresentada aqui através da utilização do Positivstellensatz de Stengle é mais geral que aquelas que utilizam o *S-procedure*. De fato, no caso em que $\dot{V}$ é uma função quadrática, a formulação utilizando o *S-procedure* (ver (PÓLIK; TERLAKY, 2007)) pode ser recuperada através de escolhas particulares para as funções h , s_1 , s_2 , s_3 e s_4 . Para uma discussão mais detalhada, ver (PARRILO, 2000).

Exemplo 4.29: Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias,

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + 0,1(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2) \\ \dot{y} = (x-1)(x+1)x + 0,1(y-2)(y+2)y; \end{cases} \quad (4.20)$$

Este sistema possui dois pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis, $p_0 = (-1,0)$ e $p_2 = (1,0)$. Além disso, a origem é um ponto de equilíbrio do tipo sela, denotado por p_1 .

Uma órbita periódica repulsora e a variedade estável do ponto de equilíbrio p_1 delimitam a região de estabilidade dos dois pontos de equilíbrio p_0 e p_2 , como mostra o retrato de fase do sistema, exibido na Figura 37.

Assim como no exemplo 4.21, a presença da órbita periódica faz com que este sistema não admita uma Função Energia global, no entanto, a solução do Problema 4.26 fornece o valor de $M = 2,55$ e a seguinte *FEG* para o sistema,

$$\begin{aligned} V_3(x,y) &= 3,0068x^2 + 0,53233xy - 3,7734y^2 - 3,0693x^4 + 3,587yx^3 \\ &+ 3,9954y^2x^2 - 0,91379xy^3 - 1,7522y^4 - 0,88605x^6 + 0,50836yx^5 \\ &- 1,557y^2x^4 - 0,3859x^3y^3 - 0,27188y^4x^2 - 0,2626 \times 10^{-4}xy^5 \\ &- 0,67556 \times 10^{-1}y^6. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Figura 37 – Retrato de fase do sistema do exemplo 4.29.

A função $V_3(x,y)$ definida em (4.21), tem seu gráfico mostrado na Figura 38. Na mesma figura é mostrado o conjunto C associado, a fronteira da região de estabilidade e o nível da função $|x|^2$ que contém todas as componentes conexas de C .

Figura 38 – À esquerda, o gráfico da função $V_3(x,y)$ definida no exemplo 4.29. À direita, o conjunto C e sua relação com a região de estabilidade do ponto p_0 e com a curva de nível $|x|^2 = M^2$, para $M = 2,55$, encontrado através de sucessivas soluções do Problema 4.26.

4.4 Obtendo estimativas da Região de Estabilidade

Funções Energia Generalizadas podem ser usadas para obter estimativas para a região de estabilidade de sistemas dinâmicos, especialmente aqueles que não admitem Funções Energia (ver (SIQUEIRA; ALBERTO; BRETAS, 2015) e (BRETAS; ALBERTO, 2003)).

Nesta seção, será desenvolvido um método para estimar a região de estabilidade de um Ponto de Equilíbrio Assintoticamente Estável (PEAE) de um sistema dinâmico não linear usando o teoria de FEG e problemas de factibilidade envolvendo SOS.

Seja V uma FEG para o sistema (4.5). Dado $L \in \mathbb{R}$, considere S_L o conjunto,

$$S_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq L\}$$

chamado *conjunto de nível L* de V e denotaremos por $S_L(p)$ a componente conexa de S_L contendo o ponto p .

Nos exemplos da seção 4.3, todas as componentes conexas do conjunto C tocam o conjunto atrativo. Por essa razão, as funções energia generalizadas encontradas para os sistemas respectivos não são interessantes no sentido de se obter estimativas da região de estabilidade (ver capítulo 2).

Digamos que o sistema (4.5) possua um PEAE p . Com o objetivo de obter estimativas para a região de estabilidade de p , vamos impor uma restrição adicional na busca por uma FEG: que a componente conexa de C que contenha p seja composta apenas pelo ponto p .

De fato, tal restrição equivale a exigir que a FEG encontrada seja uma Função Energia Local (FEL) para o ponto p . Esta propriedade permite obter estimativas para a região de estabilidade de p , como enuncia o resultado a seguir.

Proposição 4.30. *Seja $p \in \mathbb{R}^n$ um PEAE para o sistema (4.5) e $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma FEG. Se existe $L > V(p)$ tal que $S_L(p) \cap C = \{p\}$ e $S_L(p)$ é um conjunto limitado, então $S_L(p) \subset A(p)$.*

A demonstração da Proposição 4.30 segue diretamente do Princípio da Invariância de LaSalle (ver (LASALLE, 1967)). De fato, uma vez que $S_L(p)$ é um conjunto limitado e $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \in S_L(p) \setminus \{p\}$, o Princípio da Invariância de LaSalle permite concluir que, para todo $q \in S_L(p)$, $\omega(q) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$ e que $\omega(q) \subset S_L(p)$. Assim, $\omega(q) = \{p\}$.

Observação 4.31. Exigir que a componente conexa do conjunto C que contenha a origem seja composta apenas pela origem é uma restrição bastante forte para uma FEG. No entanto, a formulação utilizada aqui pode ser usada pra construir restrições mais fracas e

que permitam o estudo da região de estabilidade de conjuntos atrativos mais gerais, que não sejam *PEAEs*. Tal abordagem será deixada como sugestão para trabalhos futuros.

Por simplicidade, doravante, vamos assumir $p = 0$.

Considere a seguinte família de funções a um parâmetro,

$$\begin{aligned} h_\alpha &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto h_\alpha(x) = |x|^2 - \alpha|x|^4, \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Quando $\alpha > 0$, a função h_α se anula na origem e na esfera de raio $1/\sqrt{\alpha}$ com centro na origem. Ela é positiva para $0 < |x| < 1/\sqrt{\alpha}$ e negativa para $|x| > 1/\sqrt{\alpha}$.

O gráfico da função $h_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, para $\alpha = 0,4$, é mostrado na Figura 39. Além disso são exibidos os conjuntos de nível $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h_\alpha(x,y) = 0\}$ para $\alpha \in \{0,2; 0,4; 0,8\}$.

Figura 39 – À esquerda, o gráfico da função $h_\alpha(x,y)$ para $\alpha = 0,4$ definida na equação (4.22). À direita, os conjuntos de nível $h_\alpha(x,y) = 0$ para $\alpha \in \{0,2; 0,4; 0,8\}$.

Um novo problema de otimização pode ser formulado a partir do Problema 4.19, adicionando uma nova restrição em termos da função h_α ,

Problema de Otimização 4.32.

Encontrar: $M = \inf_{V,z,\alpha} z + \alpha$

Tal que: $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja polinomial,

$$-\dot{V}(x) - |x|^2 + z \geq 0$$

$$-\dot{V}(x) - h_\alpha(x) \geq 0$$

Note que, embora a dependência de h_α não esteja explícita na desigualdade inserida, a família h_α depende linearmente de α . Isso é fundamental para que o problema possa ser resolvido através de ferramentas disponíveis de *SOSP*.

Como pode ser observado na Figura 39, em uma vizinhança da origem, a função h_α é não-negativa. Além disso, o raio desta vizinhança depende do valor de α . A proposição a seguir, garante que, a interseção desta vizinhança com o conjunto C é formada apenas pela origem.

Proposição 4.33. *Seja M uma solução para o Problema 4.32 e sejam α^* , z^* e V^* , minimizadores. Se f é tal que o sistema $\dot{x} = f(x)$ é positivamente completo, $M > 0$ e $\alpha^* > 0$, então V^* é uma FEG para o sistema e, além disso, existe $\beta > 0$ tal que,*

$$C \cap \mathcal{B}_\beta(0) = \{0\}.$$

Demonstração. Segue da proposição 4.20 que V^* é uma FEG para o sistema. Resta mostrar que existe $\beta > 0$ tal que $C \cap \mathcal{B}_\beta(0) = \{0\}$. De fato, tome $x \in C$. Da segunda desigualdade do Problema 4.32, segue que $h_{\alpha^*}(x) \leq 0$. Logo, $|x| = 0$ ou $|x| \geq \sqrt{1/\alpha^*}$. Como $\alpha^* > 0$, tomando $\beta < \sqrt{1/\alpha^*}$, conclui-se que se $x \in C \cap \mathcal{B}_\beta(0)$ então $x = 0$. $\square$

Observação 4.34. Observe que a restrição adicional imposta no Problema 4.32 é parecida com aquela utilizada em trabalhos que usam SOSP para encontrar estimativas da região de estabilidade através funções de Lyapunov locais (ver (PERMENTER; WAMPLER; TEDRAKE, 2013)). No entanto, encontrar uma FEG para um dado sistema permite não apenas extrair informações sobre a região de estabilidade mas também sobre a dinâmica global do sistema, como enuncia, por exemplo, o Teorema 2.5.

Exemplo 4.35: Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias,

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^3 - x - 0,1x^5 \\ \dot{y} = x - 0,1y^5 \end{cases} \quad (4.23)$$

O retrato de fase do sistema (4.23) é mostrado na Figura 40.

Os pontos p_0 , p_2 e p_4 são pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis. Os pontos p_1 e p_3 são pontos de equilíbrio do tipo sela.

Todas as órbitas são limitadas para $t > 0$ e, portanto, o sistema é positivamente completo. Além disso a região de estabilidade da origem fica delimitada pelas variedades estáveis dos pontos de sela p_1 e p_3 .

Após a aplicação do problema de otimização 4.32, foram obtidos os valores $z^* = 12,50$, $\alpha^* = 0,719$ e a FEG,

$$\begin{aligned} V_4(x,y) &= 2,5329x^2 + 1,4693xy + 2,1879y^2 - 0,26063x^4 - 1,7405x^3y \\ &- 0,027927x^2y^2 - 0,84616xy^3 - 0,35323y^4 + 0,0090951x^6 \\ &+ 0,09501x^5y + 0,20257x^4y^2 - 0,57599x^3y^3 + 0,94684x^2y^4 \\ &- 0,54448xy^5 + 0,22726y^6. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Figura 40 – Retrato de fase do sistema dinâmico do exemplo 4.35 .

A função $V_4(x,y)$ definida em (4.24), tem seu gráfico mostrado na Figura 41. Na mesma figura é mostrado o conjunto C e o nível da função $|x|^2$ que contém todas as componentes conexas de C . Além disso, é exibida a estimativa para a região de estabilidade do ponto p_0 , obtida através da teoria desenvolvida no capítulo 2 e da *FEG* encontrada.

Figura 41 – À esquerda, o gráfico da função $V_4(x,y)$ definida no exemplo 4.35. À direita, o conjunto C , a curva de nível $|x|^2 = z^*$, para $z^* = 12,50$, e a estimativa para a região de estabilidade de p_0 obtida através de V_4 .

Como foi visto, o objetivo da restrição que envolve a família h_α é fazer com que exista uma vizinhança da origem $U \subset \mathbb{R}^n$, de tal forma que $C \cap U = \{0\}$. Uma vez que

$\dot{V}(0) = 0$, para que a nova restrição possa ser satisfeita na origem, foi necessário escolher a família de funções h_α de forma que $h_\alpha(0) = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Para aumentar a chance de encontrar uma [FEG](#), vamos proceder de forma análoga à seção [4.3.1](#) e reescrever a nova restrição utilizando o Teorema [4.13](#). Neste caso, vamos exigir que, para algum $\alpha > 0$, tenhamos

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 \leq \alpha\} = \{0\},$$

ou equivalentemente,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha - |x|^2 \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 \neq 0\} = \emptyset.$$

Usando o Teorema [4.13](#), obtém-se a sentença equivalente,

$$\exists \tilde{f} \in \text{cone}(\dot{V}, \alpha - |x|^2), \tilde{h} \in \text{mulmon}(|x|^2), \text{ tais que, } \tilde{f}(x) + \tilde{h}^2(x) = 0.$$

Que, por sua vez, equivale à existência de funções polinomiais $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathcal{SOS}_n$ e de um número natural k tais que,

$$s_1(x) + s_2(x)\dot{V}(x) + s_3(x)(\alpha - |x|^2) + s_4(x)\dot{V}(x)(\alpha - |x|^2) + |x|^{4k} = 0.$$

De forma análoga ao que foi feito na seção [4.3.1](#), para buscar funções polinomiais sujeitas a esta restrição usando ferramentas de [SOSP](#), é necessário remover suas não linearidades. Para isso, vamos tomar $s_2(x) = 1$ e $s_4(x) = 0$. Finalmente, passando o termo $s_1(x)$ para o segundo membro, tem-se,

$$-\dot{V}(x) - s_3(x)(\alpha - |x|^2) - |x|^{4k} \in \mathcal{SOS}_n. \quad (4.25)$$

A não linearidade referente ao termo $s_3(x)(\alpha - |x|^2)$ não precisa ser eliminada. O menor valor de α para o qual o problema possui solução será encontrado através de um processo de dicotomia baseado em sucessivas soluções do problema de factibilidade,

Problema de Factibilidade 4.36. Dados $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $M > 0$ e $k \in \mathbb{N}$

Encontrar: $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ polinomial e $s_1, s_2 \in \mathcal{SOS}^n$

Tal que: $-(\dot{V}(x) + \delta) - s_1(x)(|x|^2 - M^2) - 1 \in \mathcal{SOS}_n$
 $-\dot{V}(x) - s_2(x)(\alpha - |x|^2) - |x|^{4k} \in \mathcal{SOS}_n$

Sob a luz da discussão anterior, podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 4.37. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função polinomial de tal forma que o sistema $\dot{x} = f(x)$ seja positivamente completo e a origem seja um [PEAE](#). Dados $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $M > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, se a tripla de funções polinomiais (V, s_1, s_2) é uma solução para o Problema [4.36](#), então V é uma [FEG](#) para o sistema $\dot{x} = f(x)$. Além disso, o conjunto de nível $S_L(0)$, onde $L = \min\{V(x) : |x|^2 = \alpha\}$, é uma estimativa para a região de estabilidade da origem.*

Demonstração. Segue do Teorema 4.23 que V é uma *FEG* para o sistema $\dot{x} = f(x)$.

Para provar que $S_L(0)$ é uma estimativa para a região de estabilidade da origem, observe que a origem é um *PEAE*, logo existe uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que cada solução começando em U tende para origem quando $t \rightarrow \infty$.

Uma vez que $\alpha > 0$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \alpha - |x|^2 = 0\}$ é uma esfera e, portanto, L é um número real bem definido.

Segue da discussão apresentada nesta seção, que o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \alpha - |x|^2 \geq 0\}$ intersecta o conjunto C somente na origem. Assim, existe uma vizinhança aberta $B \subset U$ da origem tal que $B \cap C = \{0\}$. Como $\dot{V}(x) < 0$ e $\Phi(t, x) \rightarrow 0$ para todos $x \in B \setminus \{0\}$, a origem é um mínimo local V em B e existe $l > V(0)$ tal que $S_l(0)$ é limitado.

Além disso, como todo ponto crítico de V pertence a C , temos que $\nabla V(x) \neq 0$ para todo $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0, \alpha - |x|^2 > 0\}$. Assim, a componente conexa $S_l(0)$ cresce continuamente à medida que l aumenta, até que ela toca o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 = \alpha\}$, quando $l = L$. Logo, $S_L(0)$ é um conjunto limitado. A prova é concluída com a aplicação da Proposição 4.30. $\square$

Exemplo 4.38: Considere o mesmo sistema do exemplo 4.35.

Sucessivas soluções para o problema de factibilidade 4.36, de tal forma a encontrar o menor valor para α e M tais que o problema seja factível, fornece $\alpha = 1,472$ e $M = 3,47$. Além disso, para estes valores de α e M , com $\delta = 0,0001$ e $k = 1$, a seguinte *FEG* é encontrada,

$$\begin{aligned} V_5(x, y) = & 121,88x^2 + 34,869xy + 88,723y^2 - 7,295x^4 - 75,406x^3y \\ & + 14,521y^2x^2 - 18,919xy^3 - 14,451y^4 + 1,702x^6 + 3,682yx^5 \\ & + 12,63y^2x^4 - 14,989y^3x^3 + 24,718y^4x^2 - 19,255xy^5 + 23,261y^6. \end{aligned} \quad (4.26)$$

A função $V_5(x, y)$ definida em (4.26), tem seu gráfico mostrado na Figura 42. Na mesma figura é mostrado o conjunto C e a sua relação com o nível da função $|x|^2$ que contém todas as componentes conexas de C . A estimativa da região de estabilidade obtida através da *FEG* encontrada é também mostrada na Figura 42.

Analogamente, a restrição adicional dada pela Equação (4.25) pode ser adicionada ao Problema 4.26 conduzindo ao seguinte problema de factibilidade.

Problema de Factibilidade 4.39. Dados $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $M > 0$ e $k \in \mathbb{N}$

Encontrar: $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ polinomial e $s_1, s_2 \in \mathcal{SOS}^n$

Tal que: $-\dot{V}(x) - \delta(|f(x)|^2 + 1) - s_1(x)(|x|^2 - M^2) - 1 \in \mathcal{SOS}_n$
 $-\dot{V}(x) - s_2(x)(\alpha - |x|^2) - |x|^{2k} \in \mathcal{SOS}_n$

Figura 42 – À esquerda, o gráfico da função $V_5(x,y)$ definida no exemplo 4.38. À direita, o conjunto C , a estimativa obtida para a região de estabilidade da origem e a curva de nível $|x|^2 = M^2$, para $M = 3,54$.

Além disso, o seguinte teorema pode ser provado.

Teorema 4.40. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função polinomial de tal forma que a origem seja um [PEAE](#) para o sistema $\dot{x} = f(x)$. Dados, $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $M > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, se a tripla de funções polinomiais (V, s_1, s_2) for uma solução para o Problema 4.39, então V é uma [FEG](#) para o sistema $\dot{x} = f(x)$. Além disso, a componente conexa $S_L(0)$, onde $L = \min\{V(x) : |x|^2 = \alpha\}$, é uma estimativa para a região de estabilidade da origem.*

A prova do Teorema 4.40 é muito similar à prova do Teorema 4.37 e será omitida.

Exemplo 4.41: Considere o mesmo sistema do exemplo 4.29.

Sucessivas soluções para o problema de factibilidade 4.39, de tal forma a encontrar os menores valores para α e M tais que o problema seja factível, fornece $\alpha = 0,75$ e $M = 4,239$. Além disso, para estes valores de α e M , com $\delta = 0,001$ e $k = 1$, a seguinte [FEG](#) é encontrada,

$$\begin{aligned}
 V_6(x,y) = & 27,542x^2 + 1,0804xy + 14,148y^2 - 13,543x^3 - 4,8039x^2y \\
 & + 11,3xy^2 + 0,92144y^3 + 3,4087x^4 - 10,915yx^3 + 12,574y^2x^2 \\
 & + 2,7285xy^3 + 4,1856y^4 - 5,2382x^6 + 8,1009yx^5 - 7,4264y^2x^4 \\
 & + 3,1785x^3y^3 - 4,4109y^4x^2 - 0,00446xy^5 - 0,46274y^6.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

A função $V_6(x,y)$ definida em (4.27), tem seu gráfico mostrado na Figura 43. Na mesma figura é mostrado o conjunto C , o nível da função $|x|^2$ que contém todas as componentes conexas de C e a estimativa da região de estabilidade obtida através da função V_6 .

Figura 43 – À esquerda, o gráfico da função $V_6(x,y)$ definida no exemplo 4.41. À direita, o conjunto C , a estimativa da região de estabilidade da origem e a curva de nível $|x|^2 = M^2$, com $M = 4,239$, encontrado através de sucessivas soluções do problema 4.39.

4.5 Exemplo de Aplicação em Sistemas Não Polinomiais

Nesta seção, vamos exibir um exemplo de aplicação no qual a técnica desenvolvida neste capítulo será utilizada em um sistema não polinomial.

Com esse objetivo, usaremos uma mudança não linear de variáveis para transformar o sistema não polinomial em um sistema polinomial. A técnica usada aqui é a mesma utilizada em (ANGHEL; MILANO; PAPACHRISTODOULOU, 2013) na busca por funções de Lyapunov locais para sistemas elétricos de potência.

Considere o sistema elétrico de potência formado por um gerador síncrono conectado a um barramento infinito. O diagrama do sistema é mostrado na Figura 44.

Figura 44 – Diagrama do sistema elétrico de potência formado por uma máquina síncrona conectada a um barramento infinito. Todas as grandezas estão expressas em p.u.

Adotando o modelo clássico para a máquina síncrona, o seguinte conjunto de equações diferenciais descreve o comportamento dinâmico do sistema,

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega \\ \dot{\omega} = 31,447(0,9724 - 1,5853 \sin(\delta) + 0,0249 \cos(\delta) - 0,02\omega), \end{cases} \quad (4.28)$$

onde δ é o ângulo de defasagem da força eletromotriz da máquina com respeito ao ângulo da tensão do barramento infinito e ω é a frequência relativa entre a força eletromotriz da máquina e a frequência da tensão do barramento infinito.

O sistema de equações diferenciais (4.28) possui dois pontos de equilíbrio,

$$x_0 = (0,6759; 0) \text{ e } x_1 = (2,4970; 0),$$

respectivamente, um **PEAE** e um ponto de equilíbrio do tipo sela.

Para simplificar a modelagem do problema, vamos proceder com uma translação na variável δ de forma que o **PEAE** esteja sobre a origem. Assim, o novo sistema de equações diferenciais se torna,

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega \\ \dot{\omega} = 31,447(0,9724 - 1,5853 \sin(\delta + \delta_0) + 0,0249 \cos(\delta + \delta_0) - 0,02\omega), \end{cases} \quad (4.29)$$

onde $\delta_0 = 0,6759$.

Escrevendo,

$$\sin(\delta + \delta_0) = \sin(\delta) \cos(\delta_0) + \cos(\delta) \sin(\delta_0)$$

e

$$\cos(\delta + \delta_0) = \cos(\delta) \cos(\delta_0) - \sin(\delta) \sin(\delta_0),$$

temos o sistema equivalente,

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega \\ \dot{\omega} = 31,447(0,9724 - 1,2523 \sin(\delta) - 0,9724 \cos(\delta) - 0,02\omega). \end{cases} \quad (4.30)$$

Para transformar o sistema (4.30) em um sistema de equações polinomiais, procede-se com a seguinte mudança não linear de variáveis,

$$\begin{aligned} x &= \sin(\delta) \\ y &= 1 - \cos(\delta) \\ z &= \omega. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Com essa escolha, $\delta = 0$ e $\omega = 0$ implica em $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.

Vejamos que,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{d}{dt} \sin(\delta) = \omega \cos(\delta) = z(1 - y) \\ \dot{y} &= \frac{d}{dt} (1 - \cos(\delta)) = \omega \sin(\delta) = zx \\ \dot{z} &= \frac{d}{dt} \omega = 31,447(0,9724(1 - \cos(\delta)) - 1,2523 \sin(\delta) - 0,02\omega) \\ &= 31,447(0,9724y - 1,2523x - 0,02z). \end{aligned}$$

Além disso, a seguinte relação deve ser respeitada,

$$\sin^2(\delta) + \cos^2(\delta) = 1 \implies x^2 + y^2 - 2y = 0. \quad (4.32)$$

Portanto, para garantir que a resposta obtida pelo modelo nas novas variáveis seja equivalente àquela obtida com o modelo original, é necessário resolver as equações diferenciais, nas novas variáveis, restritas à subvariedade de $\mathbb{R}^3$ definida pela equação (4.32).

Sendo assim, modelo da máquina contra o barramento infinito, após a mudança de variáveis, fica descrito pelo seguinte sistema de equações algébrico-diferenciais,

$$\begin{cases} \dot{x} = z(1 - y) \\ \dot{y} = zx \\ \dot{z} = 31,447(0,9724y - 1,2523x - 0,02z) \\ 0 = x^2 + y^2 - 2y \end{cases} \quad (4.33)$$

Note que, a dinâmica de interesse está restrita ao cilindro definido por $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e, todas as soluções do sistema são limitadas no cilindro pois, para ω suficientemente grande, $\dot{\omega} \approx -0,6289\omega$.

De acordo com a observação 4.14, uma função $V(\delta, \omega)$ é uma *FEG* para o sistema (4.30) se existir $M > 0$ tal que,

$$\{(\delta, \omega) : \dot{V}(\delta, \omega) \geq 0\} \subset \{(\delta, \omega) : \omega^2 \geq M\}. \quad (4.34)$$

Seja $H \subset \mathbb{R}^3$, o cilindro definido por $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e considere a função $T : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow H$, definida pelas funções (4.31). Seja $U : H \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $U(x, y, z) = V(T^{-1}(x, y, z))$. Note que $T^{-1} : H \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ fica bem definida.

Vejamos que, se o sistema (4.30) for escrito da forma $\dot{X} = f(X)$ com $X \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ e $f(X) = (f_1(X), f_2(X))$, então $\dot{V}(X) > 0$, significa que

$$\frac{\partial V(\delta, \omega)}{\partial \delta} f_1(\delta, \omega) + \frac{\partial V(\delta, \omega)}{\partial \omega} f_2(\delta, \omega) > 0.$$

Que equivale a,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \circ T(\delta, \omega) \frac{\partial x}{\partial \delta}(\delta, \omega) + \frac{\partial U}{\partial y} \circ T(\delta, \omega) \frac{\partial y}{\partial \delta}(\delta, \omega) \right) f_1(\delta, \omega) + \frac{\partial U}{\partial z} \circ T(\delta, \omega) \frac{\partial z}{\partial \omega}(\delta, \omega) f_2(\delta, \omega) > 0.$$

Nas novas variáveis,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \delta} f_1 \right) \circ T^{-1}(x, y, z) \right] + \frac{\partial U}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \delta} f_1 \right) \circ T^{-1}(x, y, z) \right] \\ + \frac{\partial U}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial \omega} f_2 \right) \circ T^{-1}(x, y, z) \right] > 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Por outro lado, tomando $Y = (x, y, z)$, temos que, em H ,

$$\dot{Y} = \frac{dY}{dX} \dot{X} = JT f(X).$$

e, nas novas variáveis,

$$\dot{Y} = (JT \cdot f) \circ T^{-1}(Y)$$

Sendo assim, o sistema equivalente a (4.30), dado pela equação (4.33), pode ser escrito da forma,

$$\begin{cases} \dot{Y} = h(Y), \\ 0 = x^2 + y^2 - 2y \end{cases} \quad (4.36)$$

onde, em nosso caso,

$$h(Y) = (JT \cdot f) \circ T^{-1}(Y) = \left(\frac{\partial x}{\partial \delta} f_1 + \frac{\partial y}{\partial \delta} f_1 + \frac{\partial z}{\partial \omega} f_2 \right) \circ T^{-1}(Y). \quad (4.37)$$

A desigualdade (4.35), pode reescrita da forma,

$$\nabla U(x, y, z) \cdot h(x, y, z) > 0,$$

e portanto, $\dot{V}(\delta, \omega) > 0$ se e somente se $\dot{U} \circ T(\delta, \omega) > 0$.

Assim, a restrição (4.34) é equivalente a

$$\{(x, y, z) : \dot{U}(x, y, z) \geq 0, \ g(x, y, z) = 0\} \subset \{(x, y, z) : z^2 \geq M\},$$

onde $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2y$.

De forma equivalentemente,

$$\{(x, y, z) : \dot{U}(x, y, z) \geq 0, \ z^2 \geq M, \ g(x, y, z) = 0\} = \emptyset.$$

Pelo Teorema 4.13, obtemos a seguinte restrição equivalente,

$$\exists \tilde{f} \in \text{cone}(\dot{U}, z^2 - M) \text{ e } \tilde{g} \in \text{ideal}(g), \text{ tais que } \tilde{f} + \tilde{g} = -1.$$

Que equivale à existência de funções $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathcal{SOS}_3$ e $p_1 \in \mathcal{P}_3$ tais que,

$$s_1 + s_2 \dot{U} + s_3(z^2 - M) + s_4 \dot{U}(z^2 - M) + p_1 g = -1.$$

De forma análoga aos exemplos anteriores, fazendo $s_4 = 0$ e $s_2 = 1$, tem-se,

$$s_1 + \dot{U} + s_3(z^2 - M) + p_1 g + 1 = 0,$$

ou ainda,

$$-\dot{U} - s_3(z^2 - M) - p_1 g - 1 \in \mathcal{SOS}_3. \quad (4.38)$$

Com o objetivo de obter uma *FEG* que possibilite a estimativa da região de estabilidade do *PEAE* situado na origem, vamos adicionar uma restrição como desenvolvida na seção 4.4. Neste caso, vamos exigir que exista uma vizinhança da origem, em H , tal que $\dot{U} < 0$ para todo ponto contido nela, exceto na origem, onde $\dot{U}$ se anula.

Tal exigência será escrita da seguinte forma,

$$\{(x, y, z) : \dot{U}(x, y, z) \geq 0, x^2 + y^2 \leq K, g(x, y, z) = 0\} = \{0\}.$$

A não utilização da variável z na restrição $x^2 + y^2 \leq K$ foi adotada para evitar que exista uma componente conexa do conjunto C que dê a volta no cilindro H . Tal estratégia aumenta a chance de obter uma *FEG* que forneça estimativas menos conservadoras.

Procedendo de forma similar ao desenvolvimento da restrição (4.38) e à seção 4.4, é equivalente supor que existe $k \in \mathbb{N}$ e funções $s_5 \in \mathcal{SOS}_3$ e $p_2 \in \mathcal{P}_3$ tais que,

$$-\dot{U} - s_5(K - x^2 - y^2) - p_2 g - |x|^{4k} \in \mathcal{SOS}_3. \quad (4.39)$$

Finalmente, as restrições (4.38) e (4.39) podem ser utilizadas na formulação do seguinte problema de factibilidade.

Problema de Factibilidade 4.42. Dados $M > 0$, $k \in \mathbb{N}$ e $K > 0$

Encontrar: $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, polinomial, $s_3, s_5 \in \mathcal{SOS}_3$ e $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_3$,

Tal que: $-\dot{U} - s_3(z^2 - M) - p_1 g - 1 \in \mathcal{SOS}_3$
 $-\dot{U} - s_5(K - x^2 - y^2) - p_2 g - |x|^{4k} \in \mathcal{SOS}_3$

Após a resolução do Problema 4.42 sucessivas vezes, na intenção de encontrar o menor valor de M e o maior valor de K para o qual o problema seja factível, a função

$$\begin{aligned} V_7 = & -0,8322 \times 10^{-2} y^2 z - 0,32699 \times 10^{-2} x^2 z - 0,16867 x y^2 + 0,15604 x^2 y \\ & + 0,14557 \times 10^{-10} x y z^2 + 0,19633 \times 10^{-2} x y^2 z - 0,14923 \times 10^{-2} x^2 y z \\ & - 0,12045 \times 10^{-1} x y z - 0,1317 x y^3 - 0,14923 \times 10^{-2} y^3 z + 0,19426 x^2 y^2 \\ & + 0,19633 \times 10^{-2} x^3 z - 0,1317 x^3 y + 0,99716 \times 10^{-2} y z - 0,34363 x y \\ & + 0,13737 \times 10^{-1} x z + 0,63016 x^2 + 0,13266 y^2 + 0,20692 \times 10^{-1} z^2 \\ & + 0,70449 \times 10^{-2} x^2 z^2 + 0,40306 \times 10^{-11} y z^3 - 0,96419 \times 10^{-2} y z^2 \\ & - 0,51798 \times 10^{-10} x z^3 + 0,70449 \times 10^{-2} y^2 z^2 + 0,60266 \times 10^{-14} x + 0,3814 y \\ & + 0,15609 \times 10^{-14} z - 0,60617 \times 10^{-1} x^3 + 0,12233 y^3 - 0,15602 \times 10^{-3} z^3 \\ & + 0,10809 x^4 + 0,86168 \times 10^{-1} y^4 + 0,30968 \times 10^{-4} z^4 - 0,82271 \times 10^{-3} x z^2, \end{aligned} \quad (4.40)$$

é encontrada, para $M = 60000$, $K = 1,5$ e $k = 0$.

Considere a função $V_8(\delta, \omega) = V_7(T(\delta, \omega))$. Na Figura 45 é mostrado o gráfico de V_8 bem como o conjunto C associado.

Figura 45 – À esquerda, o gráfico da função $V_8(\delta, \omega)$. À direita, o conjunto C associado e a estimativa para a região de estabilidade de p_0 obtida através de V_8 .

Observe que, na Figura 45 aparecem duas componentes conexas do conjunto C . Uma composta apenas da origem e a outra contendo o ponto p_1 , equilíbrio instável do sistema.

4.6 Conclusões

Neste capítulo foi proposto um método sistemático para encontrar uma FEG para um dado sistema polinomial baseado em programação SOS. Além disso, mostramos que o mesmo método pode ser aplicado a sistemas não polinomiais se eles forem transformados em um polinomial através de uma mudança de variáveis.

O método proposto representa um passo na direção de desenvolver procedimentos sistemáticos para a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos usando FEG, uma vez que propõe algumas ideias sobre como obter tal função de forma automática e computacional.

A capacidade de encontrar FEG para sistemas polinomiais permite que a teoria para obtenção de estimativas da região de estabilidade e caracterização da fronteira da região de estabilidade (ver (ALBERTO; CHIANG, 2012a)) se torne disponível para esta importante classe de sistemas dinâmicos.

4.7 Próximos Passos

Embora os resultados apresentados neste capítulo tenham se mostrado bastante interessantes para a utilização em aplicações práticas, podemos listar alguns pontos que podem ser melhorados:

1. Determinação do grau das funções incógnitas.

Durante a formulação do problema dentro da ferramenta de otimização, é necessário fixar o grau das funções incógnitas. Escolher os graus adequadamente é fundamental para a convergência do algoritmo.

Uma forma sistemática de se escolher estes graus seria uma contribuição importante neste método.

2. Escolha da função “limitante”.

A função limitadora para o conjunto C (ver exemplo 4.21) poderia ter sido escolhida de forma diferente. Nos exemplos citados neste capítulo, foram utilizadas funções simples como $|x|^2$, no entanto, funções mais adequadas à geometria do conjunto C poderiam ter sido utilizadas para encontrar funções V que forneçam melhores estimativas para a região de estabilidade.

Uma questão relevante é se poderíamos escolher as funções usadas para limitar os conjuntos C de forma mais adequada com base no campo f .

3. Enfraquecer as exigências sobre a *FEG* encontrada.

Na seção 4.4 foram desenvolvidas restrições adicionais para que a *FEG* encontrada permita a estimativa da região de estabilidade de um *PEAE*. Tais restrições são muito fortes e só funcionam quando a origem é um *PEAE*.

Desenvolver restrições mais fracas que permitam a existência de componentes conexas do conjunto C em uma vizinhança da origem e que contenham pontos diferentes da origem, permitem o estudo de conjunto atrativos mais complicados e consiste em uma sugestão para trabalhos futuros.

CONCLUSÃO

Neste trabalho foram apresentados dois métodos para estimativa da região de quase-estabilidade de conjuntos atrativos de sistemas dinâmicos não lineares através da utilização de Função Energia Generalizada (FEG).

O método apresentado no capítulo 2 fornece uma estimativa conservadora para a região de quase-estabilidade globalmente, isto significa que a estimativa obtida é um subconjunto da região de quase-estabilidade real.

No capítulo 3, foi apresentado um método que fornece uma estimativa conservadora para parte relevante da fronteira da região de quase-estabilidade. Neste caso, embora a estimativa seja apenas de uma parte da fronteira, a garantia do conservadorismo da estimativa permite sua utilização no estudo de estabilidade transitória de sistemas elétricos de potência, como é o caso do método CUEP.

Ambos métodos permitem a extensão de ferramentas importantes na análise de estabilidade de sistemas dinâmicos para um contexto bastante geral, o dos sistemas que admitem FEG.

Embora a classe de sistemas que admitem FEG seja bastante ampla, encontrar a FEG ainda pode ser uma tarefa complicada. No capítulo 4 uma tentativa para atacar esse problema foi discutida.

Transformar o problema de encontrar uma FEG em um problema de factibilidade de programação em *Sum of Squares* (SOS) permite a utilização de ferramentas de SDP na busca por esse tipo de função auxiliar.

Através das ferramentas apresentadas neste trabalho, esperamos contribuir para o desenvolvimentos de algoritmos computacionais que possam realizar a análise de estabilidade transitória de sistemas não lineares de forma automática e confiável. Além disso, esperamos tornar disponível tais ferramentas comumente utilizadas em sistemas elétricos de potência a outras áreas do conhecimento.

REFERÊNCIAS

- ALBERTO, L. F. C. **O Princípio de Invariância de LaSalle estendido aplicado ao estudo de coerência de geradores e à análise de estabilidade transitória multi-'swing'**. abr. 2000. Tese (PhD Thesis) — Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, abr. 2000.
- ALBERTO, L. F. C. **Caracterização e estimativas da área de atração de sistemas dinâmicos não lineares**. 2006. Tese (Tese de Livre Docência) — Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.
- ALBERTO, L. F. C.; CHIANG, H.-D. Uniform approach for stability analysis of fast subsystem of two-time scale nonlinear systems. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 17, n. 11, p. 4195–4203, 2007.
- _____. Characterization of stability region for general autonomous nonlinear dynamical systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 57, n. 6, p. 1564–1569, 2012.
- _____. Towards development of generalized energy functions for electric power systems. **IEEE Power and Energy Society General Meeting**, p. 1–6, 2012.
- ANGHEL, M.; MILANO, F.; PAPACHRISTODOULOU, A. Algorithmic construction of Lyapunov functions for power system stability analysis. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**, v. 60, n. 9, p. 2533 – 2546, 2013.
- ARAÚJO, V.; PACÍFICO, M. J. Three dimensional flows. In: **26 Colóquio Brasileiro de Matemática**. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2007. (Publicações Matemáticas do IMPA).
- ARNOLD, V. et al. **Singularity Theory I**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1998. (Encyclopedia of Mathematical Sciences, 6).
- ATHAY, T.; PODMORE, R.; VIRMANI, S. A practical method for the direct analysis of transient stability. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. 98, n. 2, p. 573–584, 1979.
- BASU, S.; POLLACK, R. M.; ROY, M.-F. **Algorithms in Real Algebraic Geometry**. [S.l.]: Springer, 2003.
- BOCHNAK, J.; COSTE, M.; ROY, M.-F. **Real Algebraic Geometry**. [S.l.]: Springer, 1998.
- BRETAS, N. G.; ALBERTO, L. F. C. Lyapunov function for power systems with transfer conductances: extension of the invariance principle. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 18, n. 2, p. 769–777, May 2003. ISSN 0885-8950.
- BROYDEN, C. G. The convergence of a class of double-rank minimization algorithms 1. general considerations. **Journal of Applied Mathematics**, v. 6, n. 1, p. 76–90, 1970.
- CHAKRABORTY, A.; SEILER, P.; BALAS, G. J. Nonlinear region of attraction analysis for flight control verification and validation. **Control Engineering Practice**, v. 19, n. 4, p. 335–345, 2011.

- CHENG, D.; MA, J. Calculation of stability region. **Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control**, p. 5615–5620, 2003.
- CHESE, G. On the gap between positive polynomials and sos of polynomials. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 52, n. 6, p. 1066–1072, 2007.
- _____. **Domain of Attraction**. [S.l.]: Springer, 2011.
- CHIANG, H.-D. Study of the existence of energy functions for power systems with losses. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 36, n. 11, p. 1423–1429, 1989.
- _____. Analytical results on direct methods for power system transient stability analysis. **Control and Dynamic Systems: Advances in Theory and Application**, v. 43, p. 275–334, 1991.
- _____. The BCU method for direct stability analysis of electric power systems: Theory and applications. **IMA Volumes in Mathematics and Its Applications**, SPRINGER VERLAG KG, v. 64, p. 39–39, 1995.
- _____. **Direct Methods for Stability analysis of Electric Power Systems**. [S.l.]: Wiley, 2011.
- CHIANG, H.-D.; ALBERTO, L. F. C. **Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015.
- CHIANG, H.-D.; FEKIH-AHMED, L. Quasi-stability regions of nonlinear dynamical systems: Theory. **IEEE Transaction on circuits and systems - I: Fundamental theory and applications**, v. 43, n. 8, p. 627–635, 1996.
- CHIANG, H.-D.; HIRSCH, M. W.; WU, F. F. Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 33, n. 1, p. 16–27, 1988.
- CHIANG, H.-D.; S.THORP, J. Stability regions of nonlinear dynamical systems: a constructive methodology. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 34, n. 12, p. 1229–1241, 1989.
- CHIANG, H. D.; THORP, J. S. The closest unstable equilibrium point method for power system dynamic security assessment. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 36, n. 9, p. 1187–1200, Sep 1989.
- CHIANG, H.-D.; WU, F. F.; VARAIYA, P. P. Foundations of direct methods for power system transient stability analysis. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 34, n. 2, p. 160–173, 1987.
- CHUA, L. O. A zoo of strange attractors from the canonical chua's circuits. In: **Circuits and Systems, 1992., Proceedings of the 35th Midwest Symposium on**. [S.l.: s.n.], 1992. v. 2, p. 916–926.
- DAVISON, E. J.; KURAK, E. M. A computational method for determining quadratic Lyapunov functions for nonlinear systems. **Automatica**, n. 7, p. 627–636, 1971.

DEBYE, P. Näherungsformeln für die zylinderfunktionen für große werte des arguments und unbeschränkt veränderliche werte des index. **Mathematische Annalen**, v. 67, n. 4, p. 535–558, 1909. English translation in: DEBYE, P. **The Collected Papers of Peter J. W. Debye**: Interscience Publishers, 1954.

FLETCHER, R. A new approach to variable metric algorithms. **Computer Journal**, v. 13, p. 317–322, 1970.

_____. **Practical Methods of Optimization**. 2nd. ed. New York: John Wiley & Sons, 1987.

GENESIO, R.; TARTAGLIA, M.; VICINO, A. On the estimation of asymptotic stability regions: state of the art and new proposals. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 30, n. 8, p. 747–755, 1985.

GILL, P. E. et al. Procedures for optimization problems with a mixture of bounds and general linear constraints. **ACM Transactions on Mathematical Software**, ACM, New York, NY, USA, v. 10, n. 3, p. 282–298, 1984. ISSN 0098-3500.

GILL, P. E.; MURRAY, W.; WRIGHT, M. **Numerical linear algebra and optimization**. [S.l.]: Addison-Wesley, 1991.

GILL, P. E.; MURRAY, W.; WRIGHT, M. H. **Practical optimization**. London: Academic press, 1981.

GOLDFARB, D. A family of variable metric updates derived by variational means. **Mathematics of Computation**, v. 24, n. 109, p. 23–26, 1970.

GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Chaos, strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics. **Science, New Series**, v. 238, n. 4827, p. 632–638, October 1987.

HETHCOTE, H.; ZHIEN, M.; SHENGBING, L. Effects of quarantine in six endemic models for infectious diseases. **Mathematical Biosciences**, v. 180, p. 141–160, 2002.

HEWIT, J.; STOREY, C. Computer program for obtaining regions of practical stability for second-order autonomous systems. **Procedings of IEE**, v. 114, n. 9, p. 1347–1350, 1967.

HIRSCH, M. W.; SMALE, S. **Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra**. [S.l.]: New York, Academic Press., 1974.

HOOKE, R.; JEEVES, T. A. "direct search" solution of numerical and statistical problems. **J. ACM**, ACM, New York, NY, USA, v. 8, n. 2, p. 212–229, abr. 1961.

KAKIMOTO, N. et al. Transient stability analysis of large-scale power system by Lyapunov's direct method. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, PAS-103, n. 1, p. 160–167, Jan 1984. ISSN 0018-9510.

KAKIMOTO, N.; OHSAWA, N. Y.; HAYASHI, M. Transient stability analysis of electric power system via Lur'e type Lyapunov function. **Transactions IEE Japan**, v. 98, p. 566–604, 1978.

- KATOK, A. B.; HASSELBLATT, B. **Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems**. New York, NY, USA: U.K. Cambridge University Press, 1997. (Encyclopedia of mathematics and its applications, v. 54).
- KELLEY, C. **Implicit Filtering**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011.
- KHAN, C. M.; CHANDA, C. K.; KONAR, S. C. Study of transient stability by transient energy function. **National Conference on Advancement of Computing in Engineering Research (ACER)**, p. 377–385, 2013.
- KRSTIC, M. Input delay compensation for forward complete and strict-feedforward nonlinear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 55, n. 2, p. 287–303, Feb 2010.
- LASALLE, J. P. An invariance principle in the theory of stability. In: LASALLE, J. P.; HALE, J. K. (Ed.). **Differential Equations and Dynamical Systems**. New York: Academic Press, 1967. p. 277–286.
- LAVALLE, S. M. **Rapidly-exploring random trees: A new tool for path planning**. [S.l.], 1998.
- LAVALLE, S. M.; KUFFNER JR., J. J. Randomized kinodynamic planning. **The International Journal of Robotics Research**, v. 20, n. 5, p. 378–400, May 2001.
- LEE, J.; CHIANG, H.-D. A dynamical trajectory-based methodology for systematically computing multiple optimal solutions of general nonlinear programming problems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 49, n. 6, p. 888–899, June 2004.
- LIMA, E. L. **Curso de Análise, Volume 2**. 6. ed. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000. (Projeto Euclides).
- _____. **Variedades Diferenciáveis**. [S.l.]: IMPA, 2011.
- LOCCUFIER, M.; NOLDUS, E. A new trajectory reversing method for estimating stability regions of autonomous nonlinear systems. **Nonlinear Dynamics**, v. 21, n. 3, p. 265–288, 2000.
- MASUDA, K.; KURIHARA, K. Global optimization by equilibrium-point search of gradient-based dynamical system. **Electronics and Communications in Japan**, v. 91, n. 1, p. 19–31, August 2008.
- MATTHIES, H.; STRANG, G. The solution of nonlinear finite element equations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 14, n. 11, p. 1613–1626, 1979.
- MUNKRES, J. R. **Topology: A First Course**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1975.
- NELDER, J. A.; MEAD, R. A simplex method for function minimization. **The Computer Journal**, v. 7, n. 4, p. 308, 1965.
- NOCEDAL, J. Updating quasi-newton matrices with limited storage. **Math. Comp.**, v. 35, p. 773–782, 1980.

- PALIS JR., J.; MELO, W. de. **Geometric Theory of Dynamical Systems: an Introduction**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1982. Translated by: A. K. Manning.
- PAPACHRISTODOULOU, A. et al. **SOSTOOLS - Sum of Squares Optimization Toolbox for MATLAB**. [S.l.], 2013. Disponível em: <<http://www.cds.caltech.edu/sostools>>.
- PAPACHRISTODOULOU, A.; PRAJNA, S. On the construction of lyapunov functions using the sum of squares decomposition. In: IEEE. **Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on**. [S.l.], 2002. v. 3, p. 3482–3487.
- _____. A tutorial on sum of squares techniques for systems analysis. **IEEE American Control Conference**, v. 4, p. 2686 – 2700, 2005.
- PARASTEGARI, M.; KHODABAKHSHIAN, A. Construction of lyapunov function based on solving linear matrix inequality and its application to assess the transient stability of a multi-machine power system in the presence of svc. **Proceedings of Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE)**, p. 919–924, 2010.
- PARRILO, P. A. **Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization**. 5 2000. Tese (Doutorado) — California Institute of Technology, Pasadena, CA, 5 2000.
- PEIXOTO, M. On an approximation theorem of Kupka and Smale. **Journal of Differential Equations**, v. 3, n. 2, p. 214 – 227, 1967. ISSN 0022-0396.
- PERMENTER, F.; WAMPLER, C.; TEDRAKE, R. A numerical algebraic geometry approach to regional stability analysis of polynomial systems. In: IEEE. **American Control Conference (ACC), 2013**. [S.l.], 2013. p. 2127–2132.
- PóLIK, I. **Addendum to the SeDuMi User Guide - Version 1.1**. [S.l.], 2005. Disponível em: <<http://sedumi.ie.lehigh.edu/>>.
- PóLIK, I.; TERLAKY, T. A survey of the s-lemma. **SIAM Review**, v. 49, n. 3, p. 371–418, 2007.
- POWELL, M. J. D. A hybrid method for nonlinear equations. In: RABINOWITZ, P. (Ed.). **Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations**. New York: Gordon and Breach, 1970. p. 87–114.
- _____. A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations. In: WATSON, G. (Ed.). **Numerical Analysis. Lecture Notes in Mathematics**. Berlin Heidelberg: Springer, 1978. v. 630.
- PRAJNA, S. Barrier certificates for nonlinear model validation. **Automatica**, v. 42, n. 1, p. 117 – 126, 2006.
- PRAJNA, S.; PAPACHRISTODOULOU, A. Analysis of switched and hybrid systems-beyond piecewise quadratic methods. In: IEEE. **American Control Conference, 2003. Proceedings of the 2003**. [S.l.], 2003. v. 4, p. 2779–2784.
- PRAJNA, S.; PARRILO, P. A.; RANTZER, A. Nonlinear control synthesis by convex optimization. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 49, n. 2, p. 310–314, 2004.

PUTINAR, M. Positive polynomials on compact semi-algebraic sets. **Ind. Univ. Math.**, v. 42, p. 969–984, 1993.

ROSEN, J. B. The gradient projection method for nonlinear programming. part i. linear constraints. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 8, n. 1, p. 181–217, 1960.

_____. The gradient projection method for nonlinear programming. part ii. nonlinear constraints. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 9, n. 4, p. 514–532, 1961.

SAHA, S. et al. Stability boundary approximation of a power system using the real normal form of vector fields. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 12, n. 2, p. 797–802, 1997.

SHANNO, D. F. Conditioning of quasi-newton methods for function minimization. **Mathematics of Computation**, v. 24, n. 111, p. 647–656, 1970.

SHKOLNIK, A. C. **Sample-Based Motion Planning in High-Dimensional and Differentially-Constrained Systems**. February 2010. Tese (Ph.D. Thesis) — Massachusetts Institute of Technology, February 2010.

SHKOLNIK, A. C.; TEDRAKE, R. Path planning in 1000+ dimensions using a task-space voronoi bias. In: **Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation**. Piscataway, NJ, USA: IEEE Press, 2009. (ICRA'09), p. 2892–2898.

SIQUEIRA, D. S.; ALBERTO, L. F. C.; BRETAS, N. G. Generalized energy functions for a class of lossy networking preserving power system models. In: **2015 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 926–929. ISSN 0271-4302.

STEIHAUG, T. The conjugate gradient method and trust regions in large scale optimization. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, SIAM, v. 20, n. 3, p. 626–637, 1983.

STENGLE, G. A nullstellensatz and a positivstellensatz in semialgebraic geometry. **Mathematische Annalen**, v. 207, p. 87–98, 1974.

STURM, J. F. **Using SeDuMi 1.02, a Matlab Toolbox for Optimization Over Symmetric Cones**. [S.l.], 2001. Disponível em: <<http://sedumi.ie.lehigh.edu/>>.

TIBKEN, B. Estimation of the domain of attraction for polynomial systems via lmis. **Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control**, p. 3860–3864, 2000.

TIBKEN, B.; FAN, Y. Computing the domain of attraction for polynomial systems via bmi optimization methods. **Proceedings of the American Control Conference**, p. 117–122, 2006.

TOH, K. C.; TütüNCü, R. H.; TODD, M. J. **On the implementation and usage of SDPT3 – a Matlab software package for semidefinite-quadratic-linear programming, version 4.0**. [S.l.], 2006. Disponível em: <<http://www.math.nus.edu.sg/~mattohkc/sdpt3.html>>.

TREINEN, R. T.; VITTAL, V.; KLIEMANN, W. An improved technique to determine the controlling unstable equilibrium point in a power system. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, v. 43, n. 4, p. 313–323, Apr 1996. ISSN 1057-7122.

VAN DER POL, B. The nonlinear theory of electric oscillations. **Proceedings of the Institute of Radio Engineers**, v. 22, n. 9, p. 1051–1086, Sept 1934.

VANNELLI, A.; VIDYASAGAR, M. Maximal lyapunov functions and domains of attraction for autonomous nonlinear systems. **Automatica**, v. 21, n. 1, p. 69–80, 1985.

VENKATASUBRAMANIAN, V.; JI, W. Numerical approximation of (n-1)-dimensional stable manifolds in large systems such as the power system. **Automatica**, v. 33, n. 10, p. 1877–1883, 1997.

YEE, H.; SPALDING, B. D. Transient stability analysis of multimachine power systems by the method of hyperplanes. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. 1, n. 96, p. 276–284, 1977.

ZABORSZKY, J. et al. On the phase portrait of a class of large nonlinear dynamic systems such as the power system. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 33, n. 1, p. 4–15, 1988.

APÊNDICE A – ALGORITMOS COMPUTACIONAIS

A.1 Introdução

Durante a implementação computacional dos algoritmos conceituais apresentados nas seções 2.4 e 3.6, algumas técnicas computacionais já existentes na literatura foram aplicadas.

Vale a pena destacar duas técnicas utilizadas durante esta implementação: o método de otimização *BFGS Projetado* e o algoritmo de *Pathfinding* chamado *Rapidly-exploring Random Tree* (RRT). Estes métodos foram utilizados, respectivamente para a localização de máximos e mínimos locais da função $\dot{V}$ e para a detecção de conjuntos conexos.

A.2 Métodos de Otimização

No primeiro passo dos algoritmos conceituais apresentados nas seções 2.4 e 3.6, é preciso encontrar todas as componentes conexas do conjunto H . Este passo não é simples, principalmente no que diz respeito à necessidade de se encontrar todas as componentes.

Embora possam ser desenvolvidas outras maneiras de se encontrar essas componentes conexas, neste trabalho utilizamos um algoritmo de otimização para encontrar máximos locais da função $\dot{V}$. Sempre que um máximo local de $\dot{V}$ é encontrado e o valor da função neste ponto é positivo, então este ponto pertence ao interior de alguma componente conexa de H .

Neste sentido, os métodos de otimização possuem um papel importante na implementação dos algoritmos conceituais apresentados. Na verdade, são necessárias buscas por máximos e mínimos locais em vários passos dos algoritmos, inclusive sujeitas a restrições, em alguns casos.

Vários métodos de otimização estão descritos na literatura e a maioria deles poderia ser utilizada para obter os resultados encontrados neste trabalho. Durante a construção de programas que implementam os algoritmos propostos, foram testados os seguintes algoritmos de otimização: *Nelder-Mead* (ver (NELDER; MEAD, 1965)), *Implicit Filtering* (ver (KELLEY, 2011)), *Hooke-Jeeves* (ver (HOOKE; JEEVES, 1961)), *Steepest Descent* (ver (DEBYE, 1909)), *BFGS* com baixo armazenamento de memória (ver (MATTHIES; STRANG, 1979) e (NOCEDAL, 1980)), *Trust Region* com *Dogleg* simples (ver (POWELL, 1970)), Gradiente Conjugado de *Steihaug* (ver (STEIHAUG, 1983)), Método de Projeção de Gradiente (ver (ROSEN, 1960) e (ROSEN, 1961)) e *BFGS* Projetado (ver (FLETCHER, 1987)).

Um método bastante promissor para encontrar múltiplos pontos de mínimo locais

de uma função escalar foi proposta em (LEE; CHIANG, 2004). Tal método visa, através de uma busca sistemática, encontrar todos os pontos de mínimo locais da função escalar. Embora, assim como todos os outros métodos, não exista garantia de que todos os mínimos ou máximos locais serão encontrados, este método tem maior chance de realizar tal tarefa quando comparados a outros métodos.

Mesmo diante de tal fato, neste trabalho foi utilizado o método *BFGS Projetado* aplicado a partir de uma coleção aleatória de condições iniciais. Teoricamente, se o número de condições iniciais for suficientemente grande, todas as componentes conexas de H seriam encontradas. Na prática, é necessário intuir um número de condições iniciais suficientemente grande levando ainda em consideração a dimensão do problema proposto.

Os métodos *Nelder-Mead*, *Implicit Filtering* e *Hooke-Jeeves* não precisam do gradiente da função que está sendo otimizada. No entanto, nos testes realizados durante o trabalho, eles não foram bem sucedidos na tentativa de encontrar todas as componentes conexas do conjunto H .

O método *Trust Region* com *Dogleg* simples e o método do Gradiente Conjugado de *Steihaug* apresentaram problemas em encontrar pontos de máximo em regiões onde a segunda derivada possui autovalores com módulos muito diferentes.

O método *Steepest Descent* que busca pelo maximizador seguindo o gradiente da função objetivo, não foi capaz de encontrar todas as componentes, mesmo com um número elevado de condições iniciais aleatórias.

O Método de Projeção de Gradiente apresentou problemas durante a etapa de *line search*, discutida na seção A.2.1. No sistema avaliado, o algoritmo falhou em convergir para um ponto de máximo local.

Após o teste de todos os métodos citados acima, aquele que apresentou maior chance de encontrar todas as componentes conexas do conjunto H foi o método *BFGS* projetado. Este método é do tipo *quase-Newton* uma vez que uma iteração do tipo *BFGS* é usada para aproximar a segunda derivada da função objetivo. Este método é discutido com um pouco mais de detalhes na seção A.2.1.

A versão do mesmo método com limitação de memória não foi bem sucedida nos testes executados durante este trabalho, porém, após o ajuste de alguns parâmetros, ela poderia ser utilizada para sistemas com dimensão elevada.

O método proposto em (LEE; CHIANG, 2004) não foi testado por possuir uma implementação mais complexa. O objetivo deste trabalho é propor uma possível implementação para o algoritmo conceitual, sem a pretensão de apresentar uma solução contendo todas as melhores práticas para a implementação numérica.

Nas etapas que requerem otimização sujeitas a restrições, utilizamos o método

de otimização *Active-set* através da função *fmincon* do MATLAB®. Este algoritmo é analisado na seção A.2.2.

Nas seções seguintes, apresentamos uma breve discussão sobre os principais métodos de otimização utilizados.

A.2.1 Algoritmo BFGS Projetado

Grande parte dos algoritmos de otimização de funções escalares, chamados de *métodos baseados em modelo*, estão fundamentados na solução de sucessivos problemas de minimização do seguinte modelo quadrático

$$q_k(x) = f(x_k) + \nabla f(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k) \cdot D^2 f(x_k)(x - x_k), \quad (\text{A.1})$$

onde $D^2 f(x_k)$ é representado por uma matriz positiva definida.

A solução deste problema fornece uma direção $p_k = x - x_k$ sobre a qual, em seguida, um processo de *line search* deve ser conduzido para encontrar o próximo ponto do processo iterativo, x_{k+1} .

Quando o problema não é restrito, o ponto x_{k+1} pode ser qualquer ponto de $\mathbb{R}^n$. No entanto, quando o problema é restrito a uma região retangular, devem ser fornecidos dois vetores $l \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^n$, de forma que os pontos x , encontrados durante o processo iterativo, respeitem condições do tipo $x_i \geq l_i$ e $x_i \leq u_i$, para todo $i = \{1, 2, \dots, n\}$. Aos pontos que respeitam essas condições, dá-se o nome de *pontos factíveis*.

No caso de problemas restritos à regiões retangulares, é preciso utilizar um algoritmo de *line search projetado*, onde o ponto x_{k+1} não é procurado ao longo na reta definida por x_k e p_k , encontrado na solução da equação (A.1), mas ao longo da curva linear por partes

$$\psi(\alpha) = f(P(x_k + \alpha p_k)), \quad \alpha > 0,$$

onde $P(x)$ é o ponto factível mais próximo do ponto x .

A solução de sistemas do tipo (A.1) implica no conhecimento da segunda derivada da função objetivo. Porém, nem sempre esta derivada está disponível ou pode ser facilmente computada.

Métodos de otimização do tipo *quase-Newton* são aqueles que estimam a segunda derivada da função objetivo através de aproximações sucessivas.

Uma das técnicas mais comumente empregadas para aproximação da segunda derivada é o método BFGS, apresentado em (BROYDEN, 1970), (FLETCHER, 1970), (GOLDFARB, 1970) e (SHANNO, 1970).

Neste método a segunda derivada em cada iteração é aproximada pela matriz H_k obtida a partir de um múltiplo da matriz identidade, λI com $\lambda > 0$, e procedendo com

um processo iterativo sobre a equação

$$H_{k+1} = H_k + \frac{1}{\gamma \cdot \delta} \gamma_k \gamma_k^T - \frac{1}{\delta \cdot H_k \delta_k} (H_k \delta_k)(H_k \delta_k)^T,$$

onde

$$\gamma_k = g_{k+1} - g_k \quad \text{e} \quad \delta_k = x_{k+1} - x_k.$$

Mais detalhes sobre a estimativa da segunda derivada através de iterações do tipo **BFGS** podem ser encontrados em (POWELL, 1978).

No algoritmo A.1, a função ATUALIZA-H(H_{k-1}, x_k, x_{k-1}), tem como objetivo encontrar uma nova estimativa para a segunda derivada da função objetivo f através de uma iteração do tipo **BFGS**.

Algoritmo A.1: BFGS projetado

```

1: while  $|x_{k+1} - x_k| < \text{tol}$ 
2:    $H_k \leftarrow \text{ATUALIZA-H}(H_{k-1}, x_k, x_{k-1})$ 
3:    $p_k \leftarrow \text{RESOLVE-PQ}(H_k, x_k)$ 
4:    $x_{k+1} \leftarrow \text{BUSCA-DE-LINHA}(x_k, p_k)$ 
5: end-while

```

A função RESOLVE-PQ(H_k, x_k) tem como objetivo encontrar a solução do problema quadrático associado, descrito por (A.1). E, finalmente, a função BUSCA-DE-LINHA(x_k, p_k) tem como objetivo encontrar o ponto $x_{k+1} = x_k + \alpha p_k$ através de um algoritmo de *line search*. O critério de parada para a busca de linha usada neste trabalho é uma condição de *Armijo*. Nesse tipo de condição, a busca é encerrada quando é encontrado um valor de α que satisfaz

$$f(x + \alpha p) \leq f(x) + \kappa \alpha \nabla g(x) \cdot p,$$

onde x é o ponto inicial da busca, p é o vetor direcional da busca, $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$ é uma constante e $g(x)$ é vetor gradiente de f em x .

A.2.2 Algoritmo Active-set

O algoritmo de otimização *Active-set* foi utilizado com o objetivo minimizar uma função escalar sujeita a uma restrição.

No caso do algoritmo conceitual apresentado na seção 2.4, este método é utilizado nos passos (2.2) e (3.1) onde é preciso encontrar máximos e mínimos locais da FEG restrita à fronteira do conjunto H , respectivamente.

De forma mais clara, em (2.2), é preciso encontrar pontos de máximo local da função $V|_{\partial H}$ e, no passo (3.1), pontos de mínimo local da função $V|_{\partial H}$. Ver Teorema 2.5.

Similarmente ao caso do algoritmo **BFGS** discutido na seção A.2.1, este método também usa iterações do tipo **BFGS** para aproximar a segunda derivada da função objetivo.

No entanto, devido a presenças das restrição no problema de otimização, o modelo de segunda ordem minimizado a cada iteração tem a forma

$$\begin{cases} q_k(x_k) = f(x_k) + \nabla f(x_k) \cdot p_k + \frac{1}{2} p_k \cdot H_k(x_k) p_k \\ \nabla g_i(x_k) \cdot p_k + g_i(x_k) = 0, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

onde, $p_k = x - x_k$, H_k é a aproximação da segunda derivada de $f(x)$ como foi discutida na seção A.2.1 e $g_i(x)$ são as funções que exprimem as restrições do problemas de otimização, da forma $g_i(x) = 0$, para todo i .

A solução deste problema quadrático fornece uma direção de busca, que é utilizada no processo de *line search*, assim como no caso do algoritmo discutido em A.2.1.

O pseudo-código deste algoritmo é, em linhas gerais, o mesmo mostrado em A.1. A diferença está na função RESOLVE-PQ(H_k, x_k), que tem como objetivo encontrar a solução do problema quadrático definido por (A.2).

No caso do método *Active-set*, a solução do problema quadrático com restrição é obtida através da construção de uma sequência de pontos factíveis (aqueles que respeitam a todas as restrições) que converge para a solução do problema quadrático (ver (GILL; MURRAY; WRIGHT, 1981)).

Durante o processo de construção da sequência, a direção de busca para o próximo ponto, deve ser tomada de forma a não violar as condições impostas pelas restrições do problema. O conjunto de restrições é armazenado durante o processo iterativo na forma de uma matriz A_k , que define o espaço permitido para as direções de busca, chamado *Active-set*.

Mais detalhes sobre esse método podem ser encontrados em (GILL et al., 1984) e (GILL; MURRAY; WRIGHT, 1991).

A.3 Rapidly-exploring Random Tree - RRT

Detectar se dois pontos estão em uma mesma componente conexa é uma tarefa fundamental em várias partes do algoritmo de estimativa proposto na seção 2.4. Por exemplo, no passo (1.1), sempre que dois pontos de máximo local da função $\dot{V}$ forem encontrados e tiverem valor de energia generalizada positiva, um testes deve ser conduzido para se determinar se eles estão na mesma componente conexa do conjunto H ou se representam componentes conexas distintas.

Como H é o fecho de um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, conexidade por caminhos equivale à conexidade (ver (MUNKRES, 1975)). Assim, dois pontos pertencem à mesma componente conexa se e somente se existe um caminho (curva contínua) contido na componente conexa e que conecta os dois pontos.

Para verificar a existência do caminho, podemos utilizar algoritmos de *Pathfinding* utilizados em técnicas de *Motion Planning*. Em particular, um método bastante eficaz e largamente usado é o algoritmo chamado **RRT** apresentado em (LAVALLE, 1998) e (LAVALLE; KUFFNER JR., 2001). Este algoritmo possui variantes para aumentar a velocidade de resposta e reduzir a dependência da sua performance quando a dimensão do problema é elevada (ver (SHKOLNIK; TEDRAKE, 2009)).

Neste algoritmo, uma árvore de pontos é construída a partir de um ponto inicial de forma que, cada ponto, denominado *nó*, é conectado a outro ponto através de um segmento de reta, chamado *aresta*. A árvore deve ser construída de forma a respeitar as restrições impostas ao problema, seus nós e suas arestas devem estar contidas em um subconjunto do espaço, chamado *conjunto livre*, normalmente definido como conjunto de nível de uma função.

A cada iteração um novo ponto p é escolhido aleatoriamente no espaço e o nó mais próximo a ele é determinado, digamos q . Então, toma-se o ponto x sobre o segmento de reta $\overline{pq}$ tal que $|x - q|$ seja igual a um número fixado previamente e que define o comprimento das arestas. O ponto x e a aresta $\overline{xq}$ é acrescentada à árvore, desde que, ambos estejam contidos no *conjunto livre*.

O algoritmo **RRT** usual exige que a árvore possua uma estrutura que permita a otimização do caminho, em caso de ser bem sucedido na iniciativa de encontrar algum. Tal estrutura pode ser eliminada no caso em que estamos discutindo pois, o objetivo do algoritmo é apenas encontrar um caminho, sem a necessidade de minimizar seu comprimento. Isso permite a utilização de variantes do algoritmo **RRT** com menor uso de memória e maior velocidade. O algoritmo utilizado neste trabalho é mostrado na listagem A.2.

Além disso, o algoritmo apresentado aqui possui uma modificação introduzida em (SHKOLNIK, 2010). Ele escolhe, com uma probabilidade P , o ponto de destino da árvore ao invés de uma amostra aleatória do espaço. Isso faz com que se aumente a probabilidade de que a árvore cresça na direção do ponto de destino e, em geral, aumenta a velocidade de convergência do método, principalmente em espaços de dimensão elevada.

No algoritmo A.2 são utilizadas algumas funções auxiliares. A função denominada $\text{INCOMPLETA}(T, q_{obj})$ deve retornar um valor verdadeiro quando a árvore T chega suficientemente próximo do ponto objetivo q_{obj} . Um valor de distância mínima deve ser usado para decidir quando isso ocorre. A função $\text{RAND}()$ é aquela que retorna um número real aleatório entre 0 e 1.

Outra função auxiliar citada é a função $\text{AMOSTRA}()$. Ela é usada para tomar um ponto aleatório dentro do espaço $\mathbb{R}^n$ que será usado para definir a direção de crescimento da árvore. Restrições podem ser aplicadas para que ela retorne apenas pontos dentro de

determinadas regiões, com a intensão de melhorar a distribuição das direções de crescimento da **RRT**.

Além delas, a função auxiliar $\text{ESTENDER}(T, q_{\text{aleat}})$ tem como objetivo aumentar a **RRT** de acordo com o pseudo-código listado no algoritmo A.3. Neste algoritmo a função $\text{MAIS-PROXIMO}(T, q)$ retorna o ponto da árvore T com menor distância para o ponto q fornecido como parâmetro.

A função $\text{CONTROLE}(q_{\text{prox}}, q)$ aplica o controle de passo. De fato, o ponto q pode estar muito afastado do ponto q_{prox} e, neste caso, para melhorar o refinamento da árvore, é interessante que o ponto q não seja adicionado a ela. A função $\text{CONTROLE}(q_{\text{prox}}, q)$ vai, então, retornar um ponto com distância definida a partir do ponto q_{prox} , na direção do ponto q , através do truncamento do segmento de reta que conecta esses dois pontos.

Outra função invocada no algoritmo é a função $\text{SEM-COLISAO}(q_{\text{prox}}, q_{\text{novo}})$. Ela tem como objetivo verificar se o segmento de reta que conecta os pontos fornecidos como argumento estão contidos no conjunto livre. Especificamente, ela retorna verdadeiro quando o segmento está totalmente contido no conjunto livre.

Algoritmo A.2: $\text{RRT}(q_{\text{ini}}, q_{\text{obj}})$

```

1:  $T.\text{init}(q_{\text{ini}})$ 
2: while  $\text{INCOMPLETA}(T, q_{\text{obj}})$  and  $T.\text{size} < K$ 
3:   if  $\text{RAND}() > P$  then
4:      $q_{\text{aleat}} \leftarrow \text{AMOSTRA}() \in \mathbb{R}^n$ 
5:   else
6:      $q_{\text{aleat}} \leftarrow q_{\text{obj}}$ 
7:   end-if
8:    $\text{ESTENDER}(T, q_{\text{aleat}})$ 
9: end-while
```

Algoritmo A.3: $\text{ESTENDER}(T, q)$

```

1:  $q_{\text{prox}} \leftarrow \text{MAIS-PROXIMO}(T, q)$ 
2:  $q_{\text{novo}} \leftarrow \text{CONTROLE}(q_{\text{prox}}, q)$ 
3: if  $\text{SEM-COLISAO}(q_{\text{prox}}, q_{\text{novo}})$  then
4:    $T.\text{add}(q_{\text{novo}})$ 
5: end-if
```

ÍNDICE

- órbita periódica, 19, 23, 29, 32, 35, 37, 49, 60, 66, 76, 102, 107
 - hiperbólica, 29
- Active-set, 59, 62, 137
- algoritmo, 54, 56, 66–68, 76, 80, 85, 88, 94, 122, 123, 133, 135–138
 - de otimização, 58, 59, 62, 70, 72, 73, 87, 90, 133, 135
- anel, 95
 - de polinômios, 95
- aplicação
 - de Poincaré, 29
 - de primeiro retorno, 29
- bacia de atração, 17
- BCU, 80–82, 88
- BFGS, 133–136
- Closest UEP, 19, 20, 43
- comportamento assintótico, 17, 35, 38, 49, 50, 91
- cone, 95
 - gerado, 96
- conjunto
 - ω -limite, 24, 33, 39, 41, 44, 46, 78, 106
 - atrativo, 17, 18, 24, 26, 31, 35, 39, 52, 106, 109, 123
 - conexo, 26, 59, 137
 - conexo por caminhos, 59, 137
 - de controle, 76, 78–82, 87, 90
 - de nível, 19, 50, 52, 85, 106, 108–110, 112, 114, 115, 138
 - estável, 25, 36, 39
 - hiperbólico, 25
 - invariante, 24, 41
 - limite positivo, 24, 27
 - livre, 138, 139
 - positivamente invariante, 24, 51, 52, 60, 66
- CSMR, 93, 94
- CUEP, 19, 20, 76, 80, 81, 88, 123
- domínio de atração, 17
- elemento crítico, 29–31, 33
- energia, 33
- exit-point, 77, 79, 81, 82, 85, 88
- fmincon, 59, 82, 87
- fronteira
 - da região de estabilidade, 19, 27, 30, 32, 35, 36, 39, 41, 43, 60, 105, 108, 121
 - da região de quase-estabilidade, 20, 21, 31, 46, 50, 56, 64, 75–77, 79, 80, 84, 85, 89, 90, 123
- fsolve, 60, 87
- função
 - de Lyapunov, 18, 34, 91, 94, 97, 111, 116
 - energia, 18, 19, 23, 32, 33, 35–37, 76, 90, 91, 103, 107, 109
 - energia generalizada, 19–21, 23, 27, 32, 37–39, 41, 60, 65, 67, 72, 76, 85, 90, 91, 94, 97, 100, 102–104, 106, 107, 109, 111, 113–115, 118, 120, 121, 123, 136
 - energia numérica, 33
 - hamiltoniana, 80, 81
 - polinomial, 37, 92, 93, 98, 105, 107, 113, 115
- hiperplano, 29
- ideal gerado, 96

- line search, 134–137
- matriz
- positiva definida, 92
 - positiva semidefinida, 92
 - simétrica, 92
- modelo clássico, 65, 116
- modelo de um eixo, 66
- monóide multiplicativo, 95
- Motion Planning, 59, 72, 138
- Pathfinding, 133, 138
- PEBS, 80, 81
- perturbação, 75, 77, 80, 83, 84
- ponto
- crítico, 59
 - crítico do tipo sela, 83
 - crítico não degenerado, 46, 49
 - de aproximação, 81, 87
 - de equilíbrio, 23, 33, 35–37, 40, 44, 46, 49, 59, 79, 81, 86
 - de equilíbrio assintoticamente estável, 18, 24, 26, 33, 34, 40, 67, 83, 85, 91, 107, 109, 111, 113, 117, 120
 - de equilíbrio do tipo sela, 83, 107, 117
 - de equilíbrio estável, 23, 34
 - de equilíbrio hiperbólico, 24, 45
 - de equilíbrio instável, 24
 - de mínimo local, 61, 63, 83, 133, 136
 - de máximo local, 58, 88, 133, 134, 136
 - factível, 135
- Positivstellensatz, 97, 104
- Princípio da Invariância de LaSalle, 109
- problema
- de factibilidade, 20, 91, 102, 105, 107, 109, 113–115, 120, 123
 - de otimização, 102–105, 110, 111, 137
- propriedade genérica, 32, 49
- ray-casting, 69, 82
- região
- de atração, 17
 - de estabilidade, 17–19, 23, 26–28, 35, 36, 40, 43, 107, 109, 111–115, 120–122
 - de quase-estabilidade, 20, 21, 23, 27, 29–31, 54, 56, 66, 71, 72, 75, 83, 88, 123
- RRT, 59, 70, 72, 133, 138, 139
- S-procedure, 107
- SDP, 94
- SDPT3, 94
- seção de Poincaré, 29
- SeDuMi, 94
- shadowing, 82, 86, 90
- sistema
- de Van der Pol, 60, 102
 - dinâmico, 17, 23, 26, 27, 43, 76, 90, 121
 - dinâmico não linear, 32, 33, 40, 72, 90, 91, 123
 - elétrico de potência, 18–21, 33, 64, 76, 88, 92, 116, 123
 - não polinomial, 116, 121
 - pós-perturbação, 75, 81, 82, 86
 - perturbado, 75, 77, 80–82, 88
 - polinomial, 18, 21, 91, 94, 97, 100, 102, 116, 121
 - positivamente completo, 98, 100, 102–105, 111, 113
 - quase-hamiltoniano, 80, 81, 83, 85
- SMR, 92, 93
- solução limitada, 19, 35, 36, 38, 46
- SOS, 20, 21, 91, 93, 94, 109, 121, 123
- SOSTOOLS, 94
- stability-boundary-following, 82
- tempo crítico, 77, 81, 82
- valor crítico de energia, 79, 81, 82, 88