UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**Estudo da Estabilidade de Tensão em Duas Escalas de
Tempo por Métodos Diretos – Análise Quase Estática**

Edwin Choque Pillco

São Carlos – São Paulo

2015

EDWIN CHOQUE PILLCO

**Estudo da Estabilidade de Tensão em Duas Escalas de
Tempo por Métodos Diretos – Análise Quase Estática**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de
São Carlos, da Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos para a obtenção do
título de Doutor em Ciências, Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Área de Concentração: Sistemas Elétricos de
Potência.

Orientador: Prof. Dr. Luís Fernando Costa Alberto

Co-Orientador: Prof. Dr. Newton Geraldo Bretas

São Carlos – São Paulo

2015

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

C545e Choque Pillco, Edwin
Estudo da Estabilidade de Tensão em Duas Escalas de
Tempo por Métodos Diretos - Análise Quase Estática /
Edwin Choque Pillco; orientador Luís Fernando Costa
Alberto; coorientador Newton Geraldo Bretas. São
Carlos, 2015.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas
Elétricos de Potência -- Escola de Engenharia de São
Carlos da Universidade de São Paulo, 2015.

1. Estabilidade de Tensão. 2. Sistemas
Singulamente Perturbados. 3. Sistemas Elétricos de
Potência. 4. Região de Estabilidade. 5. Métodos
Diretos. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **EDWIN CHOQUE PILLCO**.

Título da tese: "Estudo da estabilidade de tensão em duas escalas de tempo por método diretos – análise quase estática".

Data da defesa: 10/08/2015

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Titular **Newton Geraldo Bretas**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Walmir de Freitas Filho**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

APROVADO

Prof. Dr. **Glauco Nery Taranto**
(Universidade Federal do Rio de Janeiro/UFRJ)

APROVADO

Prof. Dr. **Percival Bueno de Araujo**
(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/UNESP – Ilha Solteira)

aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica:
Prof. Associado **Luis Fernando Costa Alberto**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Paulo César Lima Segantine**

Agradecimentos

A minha família por estar sempre ao meu lado.

Ao Professor Luís Fernando Costa Alberto por sua orientação, por todo apoio, disposição durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas do (LACOSEP) pela amizade, em especial à Edson Aparecido Rozas Theodoro, Ana Cecilia Moreno Alamo, Adriano Lima Abrantes, Taylon Gomes Landgraf, Alexandre Prodóssimo Sohn, Breno Elias Bretas de Carvalho Brasil e Daniel Rodrigo Falconi.

A todos os professores cujos ensinamentos me permitiram realizar esta pesquisa, em especial aos Professores Rodrigo Andrade Ramos, João Bosco Augusto London Júnior e Ruy Alberto Corrêa Altafim.

A meu amigo Rubén Romero Lázaro pela confiança e amizade.

A Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo pela oportunidade de realizar o curso de doutorado.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pela bolsa de estudo concedida e pelo apoio financeiro para a realização desta pesquisa.

RESUMO

Choque Pillco, Edwin (2015). Estudo da Estabilidade de Tensão em Duas Escalas de Tempo por Métodos Diretos – Análise Quase Estática. Tese de Doutorado / Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

O objetivo geral deste trabalho é a extensão dos métodos diretos para o estudo de estabilidade de tensão em sistemas de potência. Devido à diversidade dos dispositivos com distinta velocidade de atuação, propriedades de escalas de tempo foram exploradas para viabilizar essa extensão. O presente trabalho de pesquisa tem como contribuições (i) o estabelecimento de uma metodologia geral para análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência em escalas de tempo e (ii) a extensão dos métodos diretos para a análise de estabilidade em escalas de tempo de sistemas de potência. Com base na teoria dos sistemas singularmente perturbados, propõe-se um algoritmo geral de análise de estabilidade em escalas de tempo de sistemas elétricos de potência e estabelecem-se os fundamentos teóricos deste algoritmo que validam a decomposição da análise de estabilidade em escalas de tempo. Assim, a análise de estabilidade de um sistema elétrico de potência pode ser decomposta na análise de estabilidade de seus correspondentes subsistemas rápido e lento, de menor ordem. Estes fundamentos preenchem uma lacuna que existia entre as análises de estabilidade no curto-prazo e médio-prazo e estabelece uma relação entre elas. Em particular, o método quase estático (QSS) para análise de estabilidade na escala de médio prazo, que pressupõe que as dinâmicas rápidas são estáveis e a análise de estabilidade transitória são casos particulares do algoritmo proposto. A partir dos fundamentos da decomposição da análise de estabilidade em escalas de tempo, estenderam-se os métodos diretos de análise de estabilidade, em particular o método CUEP, inicialmente desenvolvidos para análises de estabilidade transitória, para o problema de análise de estabilidade no médio prazo via decomposição da análise em escalas de tempo. Essa extensão é importante na medida em que os métodos diretos são rápidos, e viabilizam o desenvolvimento de técnicas de análise de estabilidade de tensão que sejam adequadas para aplicações em tempo real. A metodologia proposta foi testada em sistemas de potência de pequeno porte com bons resultados na avaliação de tempos de atuação dos equipamentos de controle e proteção, fornecendo também um melhor entendimento dos mecanismos de estabilização dos sistemas de potência analisados.

Palavras-Chave: Estabilidade de Tensão, Sistemas Singularmente Perturbados, Sistemas Elétricos de Potência, Região de Estabilidade, Métodos Diretos.

ABSTRACT

Choque Pillco, Edwin (2015). Voltage Stability Analysis on Two Time Scales by Direct Methods - Quasi Steady State Analysis. Doctoral Thesis / Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

The aim of this study is the extent of direct methods for the study of voltage stability in power systems. Because of the diversity of devices with different speed of action, time-scales properties were explored to enable this extension. This research work has as contributions (i) establishing a general methodology for stability analysis of electric power systems on time scales and (ii) the extent of direct methods for the analysis of stability in time-scales scales of electric power systems. Based on the theory of singularly perturbed systems, we propose a general algorithm of stability analysis in time-scales electric power systems and develop the theoretical foundations of this algorithm to validate the decomposition of stability analysis in time scales. Thus, the stability analysis of a power system can be decomposed in the stability analysis of their corresponding fast and slow subsystems of lower order. These fundamentals fill the gap that existed between the stability analysis in the short-term and mid-term and establishes a relationship between them. In particular, the quasi steady state method (QSS) for stability analysis of the mid-term scale, which presupposes that the fast dynamics are stable and transient stability analysis are particular cases of the algorithm proposed. From the fundamentals of decomposition of time scales stability analysis, the direct methods of stability analysis will be extended, in particular CUEP method initially developed for transient stability analysis, for the mid-term stability problem via time-scale analysis. This extension is important because the direct methods are fast, and enable the development of voltage stability analysis techniques that are suitable for real time applications. The proposed methodology was tested in small power systems with good results in the evaluation of operating times of the control and protection equipment, also providing a better understanding of the stabilization mechanisms of the analyzed power systems.

Keywords: Voltage Stability, Singular Perturbed Systems, Electric Power Systems, Stability Region, Direct Methods.

Lista de Figuras

1.1	Evolução da estabilidade de tensão no sistema elétrico de potência	 3
1.2	Decomposição em escalas de tempo do sistema elétrico de potência	 7
2.1	Tubo construído em torno da solução $\mathbf{y}(t, \lambda_0)$	 19
2.2	Trajetórias do subsistema rápido são restringidas a um hiperplano de dimensão m	 31
2.3	Interpretação geométrica do Teorema 2.9	 33
2.4	Interpretação geométrica do Teorema 2.10	 33
2.5	Interpretação geométrica do Teorema 2.13	 36
3.1	Colapso de tensão devido a uma grande perturbação	 42
3.2	Diagrama conceitual de análise de estabilidade pelo método das escalas de tempo	 44
3.3	Diagrama conceitual de análise do subsistema rápido	 45
3.4	Diagrama conceitual de análise do subsistema lento	 46
3.5	Diagrama conceitual da análise da atuação de equipamentos de controle ou proteção	 47
3.6	Interpretação geométrica do Teorema 3.1	 51
3.7	Relação entre a análise de estabilidade transitória convencional e o algoritmo proposto	 54
3.8	Relação entre a análise de estabilidade de médio prazo convencional (método QSS) e o algoritmo proposto	 55
3.9	Sistema barra infinita, gerador modelo clássico e carga dinâmica	 59
3.10	Evolução das dinâmicas do sistema original em escalas de tempo (Π_ϵ) para a Contingência #1 (SEP4B instável)	 62
3.11	Trajetórias dos subsistemas rápidos U_1 e U_2 para a Contingência #1 (SEP4B instável)	 63
3.12	Evolução das dinâmicas lentas na Contingência #1 (SEP4B instável)	 64
3.13	Trajetórias dos subsistemas rápidos de U_1 e U_2 na Contingência #2 (SEP4B instável)	 66
3.14	Evolução das dinâmicas do sistema original em escalas de tempo (Π_ϵ) para a Contingência #3 (SEP4B estável)	 67
3.15	Sistema elétrico de potência de cinco barras	 68
3.16	Modelo do AVR e a carga exponencial	 68

3.17	Evolução das dinâmicas do sistema em escalas de tempo $(\Pi_\epsilon)_{(r_k)}$ (SEP5B estável)	 70
3.18	Evolução no tempo das dinâmicas dos subsistemas rápido e lento Contingência #1 (SEP5B estável)	 71
3.19	Evolução das dinâmicas do modelo em escalas de tempo e subsistema rápido Contingência #2 (SEP5B instável)	 72
4.1	Região de estabilidade de $\mathbf{x}_s$ e tempo crítico de abertura t_{cr}	 77
4.2	Análise de estabilidade pelo método CUEP	 78
4.3	Interpretação geométrica do algoritmo do método BCU	 82
4.4	Ilustração geométrica do <i>exit-point</i> e o CUEP do subsistema rápido $(\Pi_F) U_{j+1}$	 86
4.5	Ilustração geométrica do <i>exit-point</i> e o CUEP do subsistema lento $(\Sigma_0) U_{j+1}$	 87
4.6	Interpretação geométrica do método CUEP do subsistema rápido quando uma comutação é detectada nos Blocos 4 ou 5 do algoritmo geral para análise de estabilidade proposta na Figura 3.2	 88
4.7	Interpretação geométrica do método CUEP do subsistema lento quando a análise atinge pela primeira vez o Bloco 2 do algoritmo geral para análise de estabilidade proposta na Figura 3.2	 89
4.8	Retrato de fase das dinâmicas rápidas dos sistemas em escalas de tempo U_1 e U_2	 92
4.9	Evolução das dinâmicas do sistema em escalas de tempo (3.13), Contingência #3	 92

Lista de Tabelas

3.1 Dinâmicas do sistema elétrico de potência em relação às escalas de tempo		40
3.2 Contingências a serem analisadas, sistema de potência de quatro barras		60
3.3 Sequência de análise do algoritmo proposto para a Contingência #1 (SEP4B instável).....		65
3.4 Sequência de análise do algoritmo proposto para a Contingência #2 (SEP4B instável).....		66
3.5 Sequência de análise do algoritmo proposto para a Contingência #3 (SEP4B estável)		67
3.6 Contingências a ser analisadas, sistema elétrico de potência de cinco barras		69
3.7 Sequência da análise de estabilidade para a Contingência #1 (SEP5B estável)		71
3.8 Sequência da análise de estabilidade para Contingência #2 (SEP5B instável)		72

Lista de Abreviaturas e Siglas

SEP	Sistemas Elétricos de Potência
AVR	do inglês <i>Automatic Voltage Regulator</i>
SVC	do inglês <i>Static Var Compensator</i>
FACTS	do inglês <i>Flexible Alternating Current Transmission System</i>
OLTC	do inglês <i>On Load Tap Changer</i>
OXL	do inglês <i>OverExcitation Limiter</i>
AGC	do inglês <i>Automatic Generation Control</i>
QSS	do inglês <i>Quasi Steady State</i>
CUEP	do inglês <i>Controlling Unstable Equilibrium Point</i>
CPFLOW	do inglês <i>Continuation Power Flow</i>
TSA	do inglês <i>Transient Stability Assessment</i>
BCU	do inglês <i>Boundary Controlling Unstable Equilibrium Point</i>
TTS	do inglês <i>Two-Time Scales</i>
uep	do inglês <i>Unstable Equilibrium Point</i>
asep	do inglês <i>Asymptotically Stable Equilibrium Point</i>
CCT	do inglês <i>Critical Clearing Time</i>
CST	do inglês <i>Critical Switching Time</i>
SR	do inglês <i>Stability Region</i>
HVDC	do inglês <i>High Voltage Direct Current</i>
CQSS	do inglês <i>Continuation-based Quasi Steady State</i>

SEP4B Sistema Elétrico de Potência de quatro barras

SEP5B Sistema Elétrico de Potência de cinco barras

Sumário

Agradecimentos	vii
Resumo	ix
Abstract	xi
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xv
Lista de Abreviaturas e Siglas	xvii

1. Introdução	1
1.1 Estabilidade de Tensão em Sistemas Elétricos de Potência	1
1.2 A Decomposição em Escalas de Tempo do Sistemas Elétricos de Potência.....	6
1.3 Métodos Diretos para Análise de Estabilidade de Sistemas Elétricos de Potência	8
1.4 Objetivos e Contribuições do Trabalho	9
1.4.1 Organização da Tese	11
2. Sistemas Dinâmicos Singularmente Perturbados	13
2.1 Sistemas Dinâmicos	13
2.1.1 Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade	15
2.2 A Continuidade das Soluções dos Sistemas Dinâmicos com Relação às Condições Iniciais de seus Estados e Parâmetros	17
2.3 Sistemas Singularmente Perturbados	20
2.3.1 O Teorema de Tikhonov para intervalo de tempo finito	24

2.3.2	O Teorema de Tikhonov para tempo infinito	26
2.4	Região de Estabilidade de Sistemas Singularmente Perturbados	28
2.4.1	Caracterização da Região de Estabilidade de Sistemas Singularmente Perturbados	31
2.4.2	Aproximação da Parte Relevante da Fronteira da Região de Estabilidade de Sistemas Singularmente Perturbados	35
3.	Análise de Estabilidade de Sistemas Elétricos de Potência em Duas Escalas de Tempo	37
3.1	Introdução	38
3.2	Escala de Tempo nos Sistemas Elétricos de Potência	39
3.3	Fundamentos para Análise de Estabilidade de Sistemas Elétricos de Potência em Duas Escalas de Tempo	42
3.3.1	Algoritmo Geral para a Decomposição da Análise de Estabilidade do Sistema Elétrico de Potência em Duas Escalas de Tempo	43
3.3.2	Hipóteses e Teoremas Fundamentais para Análise de Estabilidade dos Sistemas Elétricos de Potência em Duas Escalas de Tempo	48
3.4	Relação entre as Análises de Estabilidade Convencionais e a Metodologia em Escalas de Tempo Proposta	53
3.4.1	Análise de Estabilidade Transitória (Escala Rápida)	53
3.4.2	Análise de Estabilidade de Médio ou Longo Prazo (Escala Lenta)	54
3.5	Aplicações Numéricas	58
3.5.1	Sistema Elétrico de Potência de quatro barras (SEP4B)	59
3.5.2	Sistema Elétrico de Potência de cinco barras (SEP5B)	68
4.	Métodos Diretos para Análise da Estabilidade em Escalas de Tempo de Sistemas Elétricos de Potência	73
4.1	Introdução	73
4.2	Principais Metodologias dos Métodos Diretos (CUEP e BCU)	76
4.3	Aplicação dos Métodos Diretos na Análise de Estabilidade de Sistemas Elétricos de Potência em Duas Escalas de Tempo	82
4.4	Aplicações Numéricas	90

4.4.1 Sistema Elétrico de Potência de quatro barras	90
5. Conclusões e Perspectivas Futuras	95
5.1 Comentários Finais e Conclusões	95
5.2 Perspectivas Futuras	97
5.3 Publicações Referentes ao Trabalho de Pesquisa	97
Referências Bibliográficas	99

Capítulo 1

Introdução

1.1 Estabilidade de Tensão em Sistemas Elétricos de Potência

O problema de estabilidade de tensão em sistemas elétricos de potência (SEP) tem como principal origem a expansão modesta dos sistemas de transmissão e geração de energia em contraste com o aumento, cada vez maior, do consumo de energia nas últimas décadas, forçando os sistemas a operar perto de seus limites de carregamento. Há um número de fatores que contribuíram para esse cenário como, por exemplo, restrições ambientais e incremento do consumo de energia em áreas críticas onde é inadequada ou dispendiosa a construção de novas usinas [1, 2].

A necessidade de estudar estabilidade de tensão justifica-se no fato de que, nas últimas décadas, diversos eventos que levaram muitos sistemas elétricos de potência do mundo ao colapso de tensão [2, 3], originando problemas de colapsos parciais da rede ou até blecautes (colapso total), foram registrados. Como consequência, os termos “instabilidade de tensão” e “colapso de tensão” passaram a aparecer na literatura e na discussão do planejamento e operação dos sistemas elétricos de potência [3].

Quedas ou incrementos de tensão nas barras do sistema podem causar desestabilização dos controles e violação de limites. Além disso, afetam os clientes finais, prejudicando as máquinas com problemas de isolamento, superaquecimento, interrompendo processos contínuos de produção, etc. e produzindo em geral grandes perdas econômicas. Em face dessa perspectiva, manter um perfil de tensão adequado com um fator de segurança que depende do tipo de aplicação é cada vez mais importante [1].

Os mecanismos que levam um sistema elétrico de potência a um problema de estabilidade de tensão são muito complexos e variados e podem estar relacionados com problemas na geração, transmissão e distribuição. Além disso, problemas de estabilidade de tensão podem ser causados

tanto por variações lentas e previsíveis de carga quanto por grandes perturbações inesperadas. Por esse motivo, controles de tensão, compensações de potência reativa, relés de proteção e a operação nos centros de controle, todos eles influem com maior ou menor intensidade na estabilidade de tensão [2].

Grandes perturbações (ex. curto-circuito) podem acarretar problemas de estabilidade de tensão (incluindo incrementos súbitos de carga ou de transferência de potência). Neste caso, a instabilidade usualmente se manifesta inicialmente por um decréscimo monótono da tensão e que posteriormente evolui para uma queda brusca de tensão. Análises de bifurcações Sela-nó e Hopf são usualmente utilizadas para explicar estes fenômenos. O fenômeno de sobretensão e instabilidade como a autoexcitação de máquinas rotativas não é levado em consideração neste trabalho porque as sobretensões estão mais relacionadas a problemas específicos de máquinas elétricas do que com problemas no sistema elétrico de potência. Além disso, problemas de instabilidade oscilatória devido a ajustes inadequados nos controladores (controle de *tap*, AVR, SVC, etc.) [4] não são investigados neste trabalho.

Como o problema de estabilidade de tensão pode estar relacionado com uma grande diversidade de eventos na rede, o conceito de estabilidade de tensão tem significados diferentes para os engenheiros dependendo do tipo de evento. Por exemplo, pode estar relacionado com um evento rápido quando motores de indução, ar condicionado ou ligações do tipo HVDC são responsáveis pelo colapso, ou pode estar relacionado com um evento lento quando comutadores mecânicos de *tap* em transformadores, limitadores de corrente de excitação, etc são a causa do problema [2].

No curto prazo, ou seja, em intervalos desde milissegundos até alguns segundos, após a ocorrência de uma (grande) perturbação, o estudo de estabilidade é conhecido como estabilidade transitória. Nesta fase, dinâmicas de geradores, AVR e dispositivos FACTS são relevantes para a análise. Após o período transitório, temos a análise de estabilidade de médio prazo (*mid-term stability analysis*). Nesta fase, vários segundos e até mesmo alguns minutos são considerados na análise e dinâmicas de outros dispositivos como, por exemplo, OLTC, OXL, AGC e controle secundário de tensão passam a ter grande importância [4].

Por fim, a análise de estabilidade de longo prazo (*long-term stability analysis*) está relacionada com variações lentas de carga e geração, e intervalos de tempo de algumas horas são usualmente considerados. No longo prazo, a falta de capacidade para transferir potência reativa desde as fontes de geração reativa (capacitores, SVCs, etc.) e usinas até as cargas durante condições normais de operação é um dos fatores que mais contribuem para problemas de estabilidade de tensão [4].

Figura 1.1: Evolução da estabilidade de tensão no sistema elétrico de potência

Considerando a influência das dinâmicas dos equipamentos do sistema elétrico de potência ao longo do tempo, a análise de estabilidade de tensão em sistemas elétricos de potência é usualmente dividida em escalas de tempo. A Figura 1.1 [4] mostra um agrupamento dos equipamentos segundo a escala de tempo de suas dinâmicas. Analisando o histórico dos problemas de instabilidade ou colapso de tensão registrados no mundo, verifica-se que a instabilidade de tensão é usualmente caracterizada pela seguinte sequência de eventos [3]:

1. Ocorre uma perturbação no sistema, tais como pequenas e graduais mudanças das cargas ou grandes e súbitas perturbações, como a perda de uma grande unidade de geração ou uma linha de transmissão sobrecarregada. Às vezes, uma falta “sem importância” pode desencadear uma sequência de distúrbios que eventualmente levam ao colapso do sistema elétrico de potência.
2. Após a perturbação o sistema apresenta incapacidade de atender a demanda de potência reativa. Um colapso de tensão se relaciona frequentemente com linhas sobrecarregadas, tal que o transporte de potência reativa às áreas adjacentes não é possível e qualquer solicitação adicional de potência reativa leva o sistema ao colapso de tensão.
3. O colapso de tensão se manifesta geralmente como um decaimento lento do perfil de tensões, como resultado de um processo que compromete ações e interações de muitos dispositivos, controles e sistemas de proteção. A escala de tempo do colapso de tensão pode ser desde alguns milissegundos até vários minutos.

O colapso de tensão é fortemente influenciado por condições e características do sistema. A seguir, enumeram-se os principais fatores que contribuem à instabilidade/colapso de tensão:

- Carregamento elevado das linhas de transmissão.
- Longas distâncias entre os centros de geração e carga.

- Ação do OLTC durante condições de baixa tensão.
- Cargas com dinâmicas desfavoráveis frente a quedas de tensão.
- Coordenação deficiente entre múltiplos equipamentos de controle e sistemas de proteção.

O problema de colapso de tensão pode ser agravado pelo excessivo uso de capacitores shunt, pois a compensação shunt tem limitações do ponto de vista da estabilidade de tensão e controle, como [3]: (1) Em um sistema elétrico de potência com muita compensação shunt, a regulação de tensão é deficiente; (2) Uma excessiva compensação reativa provoca instabilidade, pois o sistema elétrico de potência perde seu ponto de equilíbrio estável; (3) A potência reativa gerada pelo capacitor shunt é proporcional ao quadrado da tensão, então durante condições de baixa tensão o fornecimento de reativos decresce aumentando a severidade do problema. A compensação reativa pode ser mais eficiente mediante a ação coordenada de capacitores shunt, *Static Var Compensator* (SVC) e compensadores síncronos.

Em resumo, após uma perturbação, a instabilidade de tensão se manifesta frequentemente pela queda nos perfis de tensão do sistema como consequência do incremento da demanda de potência reativa. Os controles e sistemas de proteção atuam, vide Figura 1.1, com a finalidade de recuperar o perfil de tensões e levar o sistema a um novo ponto de equilíbrio. Persistindo o problema, e com os dispositivos em seus limites de operação, acontece o colapso de tensão na rede.

O problema de estabilidade em um sistema elétrico de potência é único, mas devido às limitações das ferramentas de análise e a sua complexidade, este é usualmente dividido em subproblemas. As técnicas existentes para o estudo de estabilidade de tensão são usualmente divididas em estáticas e dinâmicas. A análise estática é usualmente empregada para estudos de estabilidade quando as variações no sistema são lentas e graduais. Esta análise só envolve a solução de equações algébricas é computacionalmente mais rápida que os métodos dinâmicos.

Os métodos dinâmicos para estudo de estabilidade do sistema elétrico de potência empregam a integração numérica do conjunto de equações diferenciais que modelam o sistema elétrico de potência. Estes métodos são úteis nas análises de variações rápidas, em intervalos de tempo desde alguns milissegundos (ex. dinâmicas subtransitórias dos geradores) até vários segundos [4]. A integração numérica favorece a localização exata no tempo dos diferentes eventos que levam a uma instabilidade de tensão. Esta informação é útil em uma análise *a posteriori* (ou *post-mortem*) e para a coordenação de proteção e controle do sistema. Estes tipos de simulações precisam de maior tempo computacional e de engenharia para análise de resultados [4], então, usualmente a análise dinâmica dos problemas de estabilidade é complementada com o uso de ferramentas de análise estática.

Na ocorrência de uma grande perturbação, problemas de instabilidade ou colapso podem acontecer devido à instabilidade das dinâmicas rápidas ou lentas. Nesse caso, a solução do modelo dinâmico dos sistemas de potência via integração numérica é o mais adequado na análise de estabilidade de tal forma que ambas dinâmicas sejam contempladas. Porém, por causa da característica de escalas de tempo das dinâmicas do sistema elétrico de potência, os passos de integração durante a simulação devem ser pequenos para evitar erros numéricos na representação das dinâmicas rápidas. Isso torna a análise dinâmica via integração numérica inadequada para o estudo de um grande número de contingências, na determinação dos limites de estabilidade, na análise e projeto de controles preventivos e em aplicações de análise em tempo real.

Técnicas numéricas de integração em conjunto com métodos computacionais sofisticados de controle do passo de integração são usadas para reduzir o esforço computacional na análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência, porém isso não é suficiente para viabilizar análises de estabilidade em tempo real [5]. A forma convencional de reduzir a complexidade do problema de estabilidade é subdividi-lo segundo o período de tempo de análise. Tradicionalmente temos a análise de estabilidade transitória e de médio prazo [3, 4]. Essa divisão explora a decomposição em escalas de tempo para simplificar os modelos, usualmente complexos, dos equipamentos do sistema elétrico de potência.

O método QSS (do inglês *Quasi Steady State*) [1, 6] explora parcialmente a decomposição em escalas de tempo do sistema elétrico de potência com o intuito de analisar casos de instabilidade associados a dinâmicas lentas [1, 4] no médio ou longo prazo. Este método pressupõe que as dinâmicas rápidas sejam estáveis, podendo levar a conclusões erradas de estabilidade na análise de sistemas elétricos de potência [1, 6, 7].

Várias suposições teóricas não são usualmente verificadas quando se executa um programa de análise QSS. Por exemplo: (i) o sistema reduzido obtido a partir da simplificação do equacionamento das variáveis rápidas pode dar origem a singularidades que não são testadas durante a simulação, (ii) o modelo para dinâmicas lentas usualmente contempla dinâmicas de chaveamento, como é o caso de transformadores equipados com *taps* variáveis em carga (OLTC), que excitam as dinâmicas rápidas, cuja estabilidade não é usualmente avaliada, (iii) a teoria de decomposição do sistema em escalas de tempo, segundo o teorema de Tikhonov [8], requer a satisfação de alguns requisitos que não são testados durante as simulações.

A Teoria de Sistemas Singularmente Perturbados [8, 9], no entanto, permite explorar de forma completa a decomposição em escalas de tempo na análise de estabilidade, fornecendo conclusões acertadas a respeito de estabilidade a partir da análise dos subsistemas rápido e lento. Esta

decomposição tem a vantagem de fornecer um maior entendimento da interação entre as dinâmicas do sistema e seus correspondentes modos instáveis.

Neste trabalho, os fundamentos da decomposição da análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência em escalas de tempo serão investigados e um algoritmo geral para esta decomposição será apresentado. A partir destes fundamentos, os métodos diretos de análise de estabilidade, e em particular o método CUEP, serão estendidos para o problema de análise de estabilidade em escalas de tempo. Esta extensão é importante na medida em que os métodos diretos aceleram as análises de estabilidade e viabilizam o desenvolvimento de técnicas de análise de estabilidade de tensão que sejam adequadas para aplicações em tempo real.

1.2 A Decomposição em Escalas de Tempo do Sistema Elétrico de Potência

Com a crescente complexidade da operação dos sistemas elétricos de potência e a necessidade de fornecimento ininterrupto de energia, o número de contingências a serem analisadas em problemas de segurança de sistemas elétricos de potência incrementou-se consideravelmente, requerendo cada vez mais, métodos de análise mais rápidos e confiáveis. Uma grande variedade dos métodos de análise de estabilidade de tensão é descrita em [2, 4]. Por sua simplicidade, os métodos estáticos ganharam grande popularidade com relação aos métodos dinâmicos, apesar de sua menor exatidão e incapacidade de sua aplicação no problema dinâmico com variações rápidas.

O método quase estático ou método QSS para análise de estabilidade começou a ganhar popularidade entre os engenheiros pela considerável redução de esforço computacional e a boa exatidão obtida nas simulações para análise de estabilidade de tensão em sistemas elétricos de potência de pequeno e grande porte. O método QSS explora parcialmente a decomposição em escalas de tempo para análise das dinâmicas lentas em sistemas elétricos de potência [1, 6, 7, 10, 11]. Em [12], apresenta-se um diagrama que mostra a ideia geral da decomposição em escalas de tempo das equações que descrevem o comportamento de um sistema elétrico de potência, vide Figura 1.2. A variável $\mathbf{x}$ representa os estados dinâmicos lentos e $\mathbf{y}$ as dinâmicas rápidas do sistema elétrico de potência, $\mathbf{u}$ as entradas de controle e ε é uma constante escalar positiva pequena.

Em uma primeira aproximação do sistema completo $\textcircled{1}$, admite-se $\varepsilon \rightarrow 0$. Nesse caso, a segunda equação muda de tipo diferencial a algébrica, correspondente aos equilíbrios das dinâmicas rápidas. As componentes lentas de $\mathbf{y}$ podem ser calculadas como função das dinâmicas lentas $\mathbf{x}_s$, definindo-

se assim o sistema algébrico diferencial ② denominado subsistema lento, também chamado de representação QSS, e usado para estudos de médio ou longo prazo. O subsistema rápido ③ é obtido por um reescalonamento do tempo ($\tau=t/\varepsilon$) e admitindo-se novamente $\varepsilon \rightarrow 0$. Neste novo subsistema, a dinâmica lenta $\mathbf{x}_s$ é tratada como constante $\mathbf{x}_{s0}$. Em geral, esse modelo pode ser empregado na análise de estabilidade das dinâmicas rápidas.

Figura 1.2: Decomposição em escalas de tempo do sistema elétrico de potência

Na literatura, a aproximação lenta do sistema elétrico de potência (subsistema S) é conhecida como aproximação QSS e está sendo introduzida também na análise da margem de carregamento em conjunto com o CPFLOW [5], análise de bifurcações e colapso de tensão [1], redução de sistemas Híbridos AC/DC em relação com suas escalas de tempo [13], etc. O modelo QSS propicia uma redução do esforço computacional de integração numérica na medida em que passos de integração maiores podem ser empregados.

Apesar das vantagens computacionais que a análise QSS oferece em estudos de médio ou longo prazo e do fato da análise QSS estar fundamentada em considerações naturais e muitas vezes razoáveis do ponto de vista prático, as hipóteses clássicas da teoria de sistemas dinâmicos não lineares com duas escalas de tempo não são verificadas para garantir a validade da análise de estabilidade de tensão pelo método QSS. O teorema de Tikhonov [8], por exemplo, estuda a decomposição da dinâmica do sistema singularmente perturbado nas dinâmicas do sistema lento e rápido. Dentre outras hipóteses, o teorema de Tikhonov estabelece a decomposição admitindo que singularidades não existam na variedade de restrição. No problema de estabilidade de tensão, por sua vez, esta suposição é usualmente violada pela presença de pontos singulares.

Neste trabalho, investigamos a decomposição completa da análise de estabilidade em escalas de tempo e, em particular, fornecemos as condições necessárias para que o método QSS forneça resultados coerentes e confiáveis.

1.3 Métodos Diretos para Análise de Estabilidade de Sistemas Elétricos de Potência

Os métodos diretos (ou métodos energéticos) foram desenvolvidos inicialmente para a análise de estabilidade transitória. Esses métodos determinam a estabilidade do sistema sem precisar da resolução explícita do conjunto de equações diferenciais que modelam o sistema pós-falta. Essa abordagem é atrativa do ponto de vista de operação em tempo real e tem recebido atenção considerável desde os primeiros trabalhos de Magnusson e Aylett [14, 15] que usaram energia para avaliação da estabilidade transitória do sistema [3, 16].

Muitas metodologias foram propostas para a análise de estabilidade transitória (TSA do inglês *Transient Stability Assessment*) baseadas no uso de energia, dentre elas, o método CUEP proposto por ATHAY et al [17] fornece bons resultados. O método CUEP foi inicialmente baseado em argumentos heurísticos. Sua fundamentação teórica foi desenvolvida por CHIANG [18] em termos da teoria de sistemas dinâmicos e mostrou-se que o método CUEP fornece bons resultados na análise de estabilidade transitória [3].

Devido à necessidade de viabilizar o cálculo correto do CUEP, surge o método BCU, fundamentado em teoria matemática. O método BCU calcula de forma eficiente o CUEP, e é aplicado com muito sucesso na análise de estabilidade transitória de sistemas reais de grande porte. Esse método é a base do software comercial TEPCO-BCU que apresenta grandes vantagens na avaliação de estabilidade de sistemas elétricos de potência em tempo real [19, 20, 21].

O sistema elétrico de potência experimenta continuamente perturbações, logo são planejados e operados para suportar a ocorrência de determinadas faltas. Para assegurar que eles suportem determinadas contingências, estas são periodicamente analisadas. Estas análises são compostas por análises estáticas, que avaliam se o sistema pós-falta operará dentro de limites nominais de operação, e análises dinâmicas, que avaliam a estabilidade do sistema pós-falta via integração numérica das equações diferenciais que modelam o sistema elétrico de potência [16, 20]. Estas tarefas demandam muito esforço computacional e tempo de engenharia, além de serem usualmente feitas *off-line*, fornecendo resultados com grande margem de segurança [16].

Os métodos diretos, devido a sua capacidade de avaliar a estabilidade dos sistemas elétricos de potência sem precisar da integração numérica do sistema pós-falta, podem ser empregados na análise de estabilidade em tempo real, reduzindo as margens conservadoras de operação por um fator de até 10 vezes em relação à análise *off-line* convencional, na medida em que existe uma

grande quantidade de contingências irrelevantes para as condições reais de operação, segundo mostram os relatos de aplicação em [19, 20].

Além da rapidez na análise de estabilidade do sistema, os métodos diretos também proporcionam informação quantitativa do grau de estabilidade do sistema. Podem fornecer informações úteis para escolha de ações preventivas de controle, quando o sistema elétrico de potência é considerado instável, e para a seleção de ações de controle no caso em que o sistema está operando perto de seus limites de operação. Essas vantagens os tornam muito atrativos quando margens de estabilidade de distintas contingências devem ser comparadas ou quando os limites de operação do sistema para a estabilidade transitória devem ser calculados com rapidez.

Como originalmente os métodos diretos foram desenvolvidos para o problema de análise de estabilidade transitória, estender seu emprego para o problema de análise de estabilidade de tensão em médio prazo é desejável. Essa extensão não é uma tarefa trivial, embora na literatura já existam alguns trabalhos que procuram estender os métodos diretos para o problema de longo prazo [22]. Problemas de singularidades na análise dos subsistemas lentos, por exemplo, precisam ser investigados. Definir o CUEP de um sistema de equações algébrico diferenciais também é um problema a ser resolvido. Além disso, os modelos híbridos ou algébrico-diferenciais usados para representar dinâmicas discretas e contínuas nos problemas de longo prazo impossibilitam a aplicação dos métodos diretos, por exemplo, nos casos em que modos instáveis nas dinâmicas de curto prazo induzam instabilidade nas dinâmicas de longo prazo e vice-versa, ou quando exista instabilidade em ambas dinâmicas após uma grande perturbação.

Neste trabalho, os métodos diretos, em particular o método CUEP, para análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência, inicialmente desenvolvidos para análises de estabilidade de curto-prazo, são estendidos para o problema de análise de estabilidade de médio prazo explorando as propriedades de escalas de tempo. Essa extensão explora as relações entre a região de estabilidade dos subsistemas rápido e lento com o sistema elétrico de potência original para decompor a análise de estabilidade, via métodos diretos, dos subsistemas lento e rápido.

1.4 Objetivos e Contribuições do Trabalho

A motivação principal desta tese é estender a aplicação dos métodos diretos de análise de estabilidade, inicialmente desenvolvidos para análises de estabilidade transitória, para o problema de análise de estabilidade de tensão na escala de tempo de médio prazo. Para atingir essa tarefa,

dois objetivos principais foram estabelecidos neste trabalho de pesquisa. O primeiro consiste em estabelecer uma metodologia geral para análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência pelo método das escalas de tempo, na qual o método QSS, usado para análise de estabilidade na escala de longo prazo [1], seja um caso particular. Os fundamentos teóricos e as hipóteses sob as quais a decomposição da análise de estabilidade em escala de tempo é válida serão estabelecidos.

A extensão dos métodos diretos para análise de estabilidade de sistemas de potência em escalas de tempo, e em particular seu emprego como ferramenta de análise de estabilidade na escala de longo prazo é o segundo objetivo deste trabalho. A extensão dos métodos diretos, inicialmente desenvolvidos para análises de estabilidade transitória, não é trivial. O modelo do sistema elétrico de potência para estudos de estabilidade de tensão (na escala de médio prazo) é um sistema dinâmico não linear híbrido que contempla dinâmicas contínuas e discretas em diferentes escalas de tempo. Os métodos diretos tradicionais ainda não contam com uma metodologia capaz de explorar escalas de tempo e lidar com dinâmicas discretas. Neste trabalho, alguns dos problemas que surgem na aplicação de métodos diretos ao problema de estabilidade de tensão na escala de médio prazo foram resolvidos.

As contribuições deste projeto de pesquisa estão associadas com a aplicação do método das escalas de tempo e a extensão dos métodos diretos, para a decomposição da análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência em escalas de tempo. O método QSS, usado para a análise de estabilidade na escala de longo prazo, aparecerá como um caso particular do método das escalas de tempo desenvolvido neste trabalho. Dentre estas contribuições podemos citar: (i) O estabelecimento de relações teóricas entre as análises de estabilidade transitória e de médio prazo, (ii) A definição do CUEP para o subsistema lento, (iii) O desenvolvimento de um algoritmo para determinar o CUEP de um subsistema rápido quando precedido de uma perturbação de dinâmica lenta.

O problema de análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência é único, mas, com o intuito de reduzir sua complexidade, divisões sob critérios de velocidade de atuação das dinâmicas do sistema elétrico de potência são realizadas, e assim, as análises de estabilidade transitória e de médio prazo aparecem na literatura. Porém, estas abordagens não consideram a interação entre as dinâmicas envolvidas em cada análise e, devido a isso conclusões erradas podem ser obtidas. Neste trabalho de pesquisa, como consequência do estabelecimento dos fundamentos do algoritmo de análise de estabilidade em escalas de tempo, a lacuna existente entre as análises de curto e médio prazo é preenchida e a interação entre as análises de estabilidade transitória e de médio prazo é avaliada.

O método CUEP é uma metodologia de análise que foi inicialmente proposta para análise de estabilidade transitória. A extensão desta metodologia para a análise de estabilidade de longo prazo (subsistema lento) exige considerar, dentre outras coisas, a possibilidade de existência de singularidades na variedade dos equilíbrios do subsistema rápido.

1.4.1 Organização da Tese

Este texto está dividido em cinco capítulos. No Capítulo 2, uma breve introdução aos principais conceitos de sistemas dinâmicos relevantes para o desenvolvimento deste trabalho é apresentada. Em particular, apresenta-se a teoria de decomposição em escalas de tempo de sistemas singularmente perturbados e os métodos diretos para análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência.

No Capítulo 3, uma metodologia geral para a análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência em escalas de tempo é proposta, os fundamentos teóricos desta modelagem são desenvolvidos e exemplos são utilizados para ilustrar a aplicação do algoritmo proposto.

No Capítulo 4, os métodos diretos são introduzidos na análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência na escala de longo prazo como ferramenta de análise do algoritmo geral para análise de estabilidade proposto no Capítulo 3. Um exemplo é utilizado para ilustrar sua confiabilidade e boa exatidão nesse tipo de análise. Finalmente, no Capítulo 5, conclusões, trabalhos futuros e publicações obtidas são relatados.

Capítulo 2

Sistemas Dinâmicos Singularmente Perturbados

Uma revisão bibliográfica dos conceitos básicos da Teoria dos Sistemas Dinâmicos com ênfase na Teoria de Sistemas Singularmente Perturbados é realizada neste capítulo. Esta revisão tem o intuito de apresentar os principais conceitos matemáticos que serão usados no desenvolvimento da análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência em escalas de tempo nos próximos capítulos.

Uma breve introdução aos conceitos gerais de sistemas dinâmicos não lineares e região de estabilidade é apresentada no início do capítulo. Em seguida, o teorema que mostra a continuidade das soluções de um sistema dinâmico com relação às condições iniciais de seus estados e parâmetros é apresentado. Na sequência, expõe-se a teoria dos Sistemas Singularmente Perturbados. Explora-se o caso geral da decomposição do sistema singularmente perturbado não autônomo padrão em seus correspondentes subsistemas rápido e lento e apresenta-se o Teorema de Tikhonov para tempo finito e infinito. Mais informações a respeito destes tópicos podem ser encontradas em [8, 23].

O capítulo é encerrado com a apresentação da teoria de caracterização da fronteira da região de estabilidade dos sistemas singularmente perturbados desenvolvida em [24]. Em particular, a relação entre a fronteira da região de estabilidade de um sistema em escalas de tempo e a fronteira da região de estabilidade dos subsistemas rápido e lento é explorada.

2.1 Sistemas Dinâmicos

No estudo da estabilidade dos sistemas elétricos de potência são introduzidos diferentes conceitos matemáticos relacionados ao estudo dos sistemas dinâmicos. Com o intuito de

uniformizar a notação matemática e tornar este texto autocontido, nesta seção apresentam-se os conceitos principais a serem utilizados no desenvolvimento das propostas estudadas nos próximos capítulos. Para estudos de estabilidade, os sistemas elétricos de potência podem ser modelados por um sistema autônomo de equações diferenciais, ou seja, o campo vetorial não depende explicitamente do tempo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ é uma aplicação de classe $\mathbf{C}^1$. A exigência que $\mathbf{f}$ seja de classe $\mathbf{C}^1$ é uma condição suficiente à existência e unicidade das soluções. O ponto $\mathbf{x}_i$ é um ponto de equilíbrio de (2.1) se $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$. Define-se $\mathbf{E}$ como o conjunto de todos os pontos de equilíbrio de (2.1), $\mathbf{E} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n: \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$.

A derivada de $\mathbf{f}$ calculada no ponto $\mathbf{x}_i$ é chamada matriz jacobiana em $\mathbf{x}_i$ e será denotada por $\mathbf{J}(\mathbf{x}_i)$. Um ponto de equilíbrio é hiperbólico se $\mathbf{J}(\mathbf{x}_i)$ não possui autovalores com parte real nula. A inércia de uma matriz $\mathbf{M}$ é definida por $\text{In}(\mathbf{M}) = [n_s, n_u, n_c]$, onde n_s é o número de autovalores com parte real positiva, n_u é o número de autovalores com parte real negativa e n_c com parte real nula.

Define-se o tipo de um ponto de equilíbrio hiperbólico como sendo o número de autovalores de $\mathbf{J}(\mathbf{x}_i)$ com parte real positiva. Se o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_i$ tem exatamente um autovalor com parte real positiva, ele é chamado ponto de equilíbrio tipo um, do mesmo modo é definido o ponto de equilíbrio tipo dois, etc. O conjunto de pontos de equilíbrio tipo um será denotado por $\mathbf{E}_1$. Um ponto de equilíbrio hiperbólico $\mathbf{x}_i$ é assintoticamente estável (asep do inglês *asymptotically stable equilibrium point*), se todos os autovalores de $\mathbf{J}(\mathbf{x}_i)$ têm parte real negativa, caso contrário $\mathbf{x}_i$ é um ponto de equilíbrio instável (uep do inglês *unstable equilibrium point*). Se todos os autovalores de $\mathbf{J}(\mathbf{x}_i)$ tem parte real positiva, ele é chamado fonte.

A solução de (2.1) começando em $\mathbf{x}$ no tempo $t=0$ é denotada por $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$. Veja que $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$. Dizemos que $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ é um ponto errante de $\boldsymbol{\varphi}$ se existe uma vizinhança $\mathbf{U}$ de $\mathbf{p}$ e um número $t_0 > 0$ tais que $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p}, t) \cap \mathbf{U} = \emptyset$ para todo $|t| > t_0$, caso contrário dizemos que $\mathbf{p}$ é ponto não-errante. Para o ponto de equilíbrio assintoticamente estável, $\mathbf{x}_s$, existe uma região no espaço de estados para o qual as trajetórias convergem a $\mathbf{x}_s$. Ela é chamada região de estabilidade (SR do inglês *Stability Region*) de $\mathbf{x}_s$, denotada por $\mathbf{A}(\mathbf{x}_s)$ e formalmente definida como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_s) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n / \lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_s \right\} \quad (2.2)$$

$\mathbf{A}(\mathbf{x}_s)$ também pode ser definida como o conjunto de todas as condições iniciais que produzem trajetórias que se aproximam de $\mathbf{x}_s$ quando o tempo tende ao infinito. A fronteira da área de atração será denotada por $\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}_s)$ e o fecho por $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_s)$. Por outro lado, define-se como a fronteira de quase

estabilidade de $\mathbf{x}_s$ como a fronteira do fecho de $\mathbf{A}(\mathbf{x}_s)$. O comportamento de longo prazo da trajetória pode ser estudado pelos seus conjuntos ω -limite, denotado $\omega(\mathbf{x})$. O ponto $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ pertence ao conjunto ω -limite de $\mathbf{x}$ se existe uma sequência de tempos $\{t_i\}$ com $t_i \rightarrow +\infty$ quando, $i \rightarrow \infty$, tal que: $\mathbf{y} = \lim_{i \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t_i)$. Analogamente, o conjunto α -limite $\alpha(\mathbf{x})$ é definido similarmente tomando sequências de tempo tal que $t_i \rightarrow -\infty$. Estes conjuntos têm a propriedade de serem fechados e invariantes.

Seja $\mathbf{x}_i$ um ponto de equilíbrio hiperbólico de (2.1). Suas variedades estáveis e instáveis são definidas respectivamente por:

$$\begin{aligned} W^s(\mathbf{x}_i) &= \{\mathbf{x}: \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{x}_i \text{ quando } t \rightarrow +\infty\} \text{ e} \\ W^u(\mathbf{x}_i) &= \{\mathbf{x}: \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{x}_i \text{ quando } t \rightarrow -\infty\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

É importante salientar que as variedades estáveis e instáveis dos pontos de equilíbrio são conjuntos invariantes.

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas variedades em $\mathbb{R}^n$. As variedades de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ satisfazem a condição de transversalidade se elas não se interceptam ou se, em cada ponto $\mathbf{x} \in (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$, o espaço tangente de $\mathbf{A}$ e de $\mathbf{B}$ gera o espaço tangente de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbf{x}$:

$$T_{\mathbf{x}}(\mathbf{A}) + T_{\mathbf{x}}(\mathbf{B}) = \mathbb{R}^n \text{ para } \mathbf{x} \in (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \quad (2.4)$$

2.1.1 Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade

Para o estudo pretendido, admite-se que o campo vetorial $\mathbf{f}$ de (2.1) satisfaça as seguintes hipóteses:

- H1) Todos os pontos de equilíbrio são hiperbólicos.
- H2) Toda trajetória limitada converge para um ponto de equilíbrio,
- H3) As variedades estáveis e instáveis dos pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade satisfazem a condição de transversalidade.

Essas suposições sobre o campo vetorial tem o intuito de torná-lo "bem comportado". A hipótese H1) é uma propriedade genérica dos sistemas dinâmicos de classe C^1 , e pode ser verificada para um sistema particular pela computação direta dos autovalores da matriz jacobiana do campo vetorial $\mathbf{f}$ de (2.1) calculada nos equilíbrios. A propriedade H2) é também genérica, embora não seja fácil de verificar. A hipótese H3) não é uma propriedade genérica, porém em muitos sistemas dinâmicos pode ser verificada mediante o uso de uma função energia "V" [25], que tem algumas semelhanças com funções de Lyapunov [8], ou pela análise direta [25]. A existência de uma função

energia restringe o conjunto dos pontos não-errantes a pontos de equilíbrio, logo não poderão existir ciclos limites. Portanto, os elementos críticos são constituídos apenas por pontos de equilíbrio. Além disso, a suposição de hiperbolicidade garante que todos os pontos de equilíbrio são isolados.

Uma vez estabelecida a terminologia e as propriedades do campo vetorial, apresenta-se a seguir um conjunto de teoremas desenvolvidos por Chiang, H. D. et al. [25, 26] com o intuito de caracterizar a região de estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares.

Teorema 2.1: Caracterização dos equilíbrios na fronteira de estabilidade

Seja $A(\mathbf{x}_s)$ a região de estabilidade de um ponto de equilíbrio estável $\mathbf{x}_s$ do sistema (2.1). Seja $\mathbf{x}_u \neq \mathbf{x}_s$ um ponto de equilíbrio hiperbólico. Se as hipóteses (H1)-(H3) são válidas, então:

- (i) $\mathbf{x}_u \in \partial A(\mathbf{x}_s)$ se e só se $W^u(\mathbf{x}_u) \cap A(\mathbf{x}_s) \neq \emptyset$;
- (ii) $\mathbf{x}_u \in \partial A(\mathbf{x}_s)$ se e só se $W^s(\mathbf{x}_u) \subset \partial A(\mathbf{x}_s)$

O Teorema 2.1 caracteriza um ponto de equilíbrio que está na fronteira de estabilidade em termos de suas variedades estáveis e instáveis, determinando assim que a fronteira de estabilidade está composta apenas por trajetórias e pontos de equilíbrio. Como consequência direta do Teorema 2.1, o teorema seguinte oferece uma caracterização completa da fronteira de estabilidade.

Teorema 2.2: Caracterização da fronteira da região de estabilidade

Se o sistema dinâmico não linear (2.1) satisfaz (H1) e (H2) e $\mathbf{x}_i$, $i=1,2,\dots$ são pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade $\partial A(\mathbf{x}_s)$ do ponto de equilíbrio assintoticamente estável $\mathbf{x}_s$, então:

$$\partial A(\mathbf{x}_s) \subseteq \bigcup_i W^s(\mathbf{x}_i)$$

Se adicionalmente, o sistema (2.1) satisfaz a hipótese (H3), então:

$$\partial A(\mathbf{x}_s) = \bigcup_i W^s(\mathbf{x}_i)$$

Todo ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_i$ na fronteira da região de estabilidade é um ponto de equilíbrio instável; logo, $\mathbf{x}_i$ é de tipo maior ou igual a 1. O seguinte teorema, apresentado em Chiang, H. D. et al. [27] oferece uma completa caracterização da fronteira de quase estabilidade em termos das variedades estáveis dos pontos de equilíbrio hiperbólicos de tipo 1.

Teorema 2.3: Caracterização da fronteira de quase estabilidade

Se o sistema dinâmico não linear (2.1) satisfaz (H1)-(H3) e $\mathbf{x}_i$, $i=1,2,\dots$ são pontos de equilíbrio tipo 1 na fronteira de quase estabilidade $\partial \bar{A}(\mathbf{x}_s)$ do ponto de equilíbrio assintoticamente estável $\mathbf{x}_s$, então:

$$\partial \bar{A}(\mathbf{x}_s) = \bigcup_i \bar{W}^s(\mathbf{x}_i) \quad (2.5)$$

O Teorema 2.3 afirma que a fronteira da região de quase estabilidade é completamente caracterizada pela união dos fechados das variedades estáveis dos pontos de equilíbrio tipo 1 na fronteira da região de quase estabilidade. Uma implicação prática deste resultado é que a análise de equilíbrios com tipos maiores a um não é necessária no estudo da região de estabilidade.

2.2 A Continuidade das Soluções dos Sistemas Dinâmicos com Relação às Condições Iniciais de seus Estados e Parâmetros

Nesta seção, reproduzimos o teorema da continuidade das soluções de um sistema dinâmico com relação às condições iniciais de seus estados e parâmetros, como é proposto em Khalil, H. K. [8]. Seja o sistema de equações diferenciais não lineares, não autônomo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.6)$$

e suponha que $\mathbf{f}$ dependa continuamente de um conjunto de parâmetros constantes; isto é, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda)$, onde $\lambda \in \mathbb{R}^p$. Os parâmetros constantes podem representar parâmetros físicos do sistema, erros na modelagem ou mudanças nos valores dos parâmetros devido ao envelhecimento.

Seja $\varphi(t, \lambda_0) = \mathbf{x}(t, \lambda_0)$ a solução de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda_0)$ definida em $[t_0, t_1]$, com $\mathbf{x}(t_0, \lambda_0) = \mathbf{x}_0$. A solução é dita depender continuamente de λ se para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall \lambda$ na bola $\{\lambda \in \mathbb{R}^p / \|\lambda - \lambda_0\| < \delta\}$, a equação $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda)$ tem solução única definida em $[t_0, t_1]$, com $\mathbf{x}(t_0, \lambda) = \mathbf{x}_0$, e satisfaz $\|\mathbf{x}(t, \lambda) - \mathbf{x}(t, \lambda_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_1]$.

Dependência contínua nos estados iniciais e dependência contínua nos parâmetros pode ser estudada simultaneamente. Começaremos com um resultado simples que estuda a proximidade das soluções entre um sistema perturbado e o sistema original.

Teorema 2.4: Seja $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ contínua por partes em t e Lipschitz em $\mathbf{x}$ em $[t_0, t_1] \times \mathbf{W}$ com a constante de Lipschitz L , onde $\mathbf{W} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e conexo. Sejam $\mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{z}(t)$ soluções de:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}) + \mathbf{g}(t, \mathbf{z}), \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$$

tal que $\mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t) \in \mathbf{W}$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Suponha que:

$$\|\mathbf{g}(t, \mathbf{x})\| \leq \mu, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [t_0, t_1] \times \mathbf{W}$$

para algum $\mu > 0$. Então,

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\| \leq \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\| \exp[L(t - t_0)] + \frac{\mu}{L} \{\exp[L(t - t_0)] - 1\} \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Prova.- As soluções $\mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{z}(t)$ são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{z}_0 + \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(s, \mathbf{z}(s)) + \mathbf{g}(s, \mathbf{z}(s))] ds \end{aligned}$$

Subtraindo as duas equações e tomando a norma resulta:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\| &\leq \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\| + \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{z}(s))\| ds + \int_{t_0}^t \|\mathbf{g}(s, \mathbf{z}(s))\| ds \\ &\leq \gamma + \mu(t - t_0) + \int_{t_0}^t L \|\mathbf{y}(s) - \mathbf{z}(s)\| ds \end{aligned}$$

onde $\gamma = \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\|$. Aplicando a desigualdade de Gronwall-Bellman (veja Khalil, H. K. [8], pag. 651-652) para a função $\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\|$ resulta:

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\| \leq \gamma + \mu(t - t_0) + \int_{t_0}^t L[\gamma + \mu(s - t_0)] \exp[L(t - s)] ds$$

Integrando o lado direito por partes, obtemos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\| &\leq \gamma + \mu(t - t_0) - \gamma - \mu(t - t_0) + \gamma \exp[L(t - t_0)] + \int_{t_0}^t \mu \exp[L(t - s)] ds \\ &= \gamma \exp[L(t - t_0)] + \frac{\mu}{L} \{\exp[L(t - t_0)] - 1\} \end{aligned}$$

completando a prova do teorema. ■

Com ajuda do Teorema 2.4, podemos provar o teorema da continuidade das soluções com relação às condições iniciais dos estados e parâmetros ou teorema da perturbação regular.

Teorema 2.5: Continuidade das soluções com relação às condições iniciais dos estados e parâmetros

Seja $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda)$ contínua em $(t, \mathbf{x}, \lambda)$ e localmente Lipschitz em $\mathbf{x}$ (uniformemente em t e λ) em $[t_0, t_1] \times D \times \{|\lambda - \lambda_0| \leq c\}$, onde $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e conexo. Seja $\mathbf{y}(t, \lambda_0)$ uma solução de

$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x},\lambda_0)$ com $\mathbf{y}(t_0,\lambda_0)=\mathbf{y}_0 \in \mathbf{D}$. Suponha que $\mathbf{y}(t,\lambda_0)$ esteja definida e pertença a $\mathbf{D} \forall t \in [t_0, t_1]$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se

$$\|\mathbf{z}_0 - \mathbf{y}_0\| < \delta \quad \text{e} \quad \|\lambda - \lambda_0\| < \delta$$

então existe solução única $\mathbf{z}(t,\lambda)$ de $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x},\lambda)$ definida em $[t_0, t_1]$, com $\mathbf{z}(t_0,\lambda)=\mathbf{z}_0$ e $\mathbf{z}(t,\lambda)$, tal que:

$$\|\mathbf{z}(t,\lambda) - \mathbf{y}(t,\lambda_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Prova.- Pela continuidade de $\mathbf{y}(t,\lambda_0)$ em t e a compacidade de $[t_0, t_1]$, sabemos que $\mathbf{y}(t,\lambda_0)$ é limitada em $[t_0, t_1]$. Define-se o "tubo" $\mathbf{U}$ em torno da solução $\mathbf{y}(t,\lambda_0)$ (veja Fig. 2.1) por:

$$\mathbf{U} = \{(t, \mathbf{x}) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n / \|\mathbf{x} - \mathbf{y}(t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon\}$$

Suponha que $\mathbf{U} \subset [t_0, t_1] \times \mathbf{D}$; se não estiver, basta substituir ε por $\varepsilon_1 < \varepsilon$ tal que seja suficientemente pequeno para garantir que $\mathbf{U} \subset [t_0, t_1] \times \mathbf{D}$ e continuar a prova com ε_1 . O conjunto $\mathbf{U}$ é compacto; então, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda)$ é Lipschitz em $\mathbf{x}$ sob $\mathbf{U}$ com constante de Lipschitz L . Pela continuidade de $\mathbf{f}$ em λ , para qualquer $\alpha > 0$, existe $\beta > 0$ (com $\beta < c$) tal que:

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda_0)\| < \alpha \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbf{U} \quad \forall \|\lambda - \lambda_0\| < \beta$$

Tomando $\alpha < \varepsilon$ e $\|\mathbf{z}_0 - \mathbf{y}_0\| < \alpha$, pelo teorema local de existência e unicidade, existe uma solução única $\mathbf{z}(t, \lambda)$ de $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda_0)$ em algum intervalo de tempo $[t_0, t_0 + \Delta]$. A solução começa dentro do conjunto $\mathbf{U}$, e enquanto esta permanecer no conjunto $\mathbf{U}$ pode ser estendida. Mostraremos, pela escolha de α suficientemente pequeno, que a solução permanece em $\mathbf{U}$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Em particular, seja τ a primeira vez em que a solução deixa o tubo $\mathbf{U}$. Mostraremos que podemos fazer com que $\tau > t_1$. No intervalo $[t_0, \tau]$, as condições do Teorema 2.4 são satisfeitas com $\mu = \alpha$. Então,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}(t, \lambda) - \mathbf{y}(t, \lambda_0)\| &< \alpha \exp[L(t - t_0)] + \frac{\alpha}{L} \{\exp[L(t - t_0)] - 1\} \\ &< \alpha \left(1 + \frac{1}{L}\right) \exp[L(t - t_0)] \end{aligned}$$

Figura 2.1: Tubo construído em torno da solução $\mathbf{y}(t,\lambda_0)$

Escolhendo $\alpha \leq \varepsilon \exp[-L(t_1 - t_0)] / (1 + L)$ garantimos que a solução $\mathbf{z}(t, \lambda)$ não pode deixar $\mathbf{U}$ durante o intervalo $[t_0, t_1]$. Portanto, $\mathbf{z}(t, \lambda)$ está definida em $[t_0, t_1]$ e satisfaz $\|\mathbf{z}(t, \lambda) - \mathbf{y}(t, \lambda_0)\| < \varepsilon$. Tomando $\delta = \min\{\alpha, \beta\}$ a prova do teorema é completada. ■

2.3 Sistemas Singularmente Perturbados

A Teoria dos Sistemas Singularmente Perturbados estuda sistemas dinâmicos mediante sua decomposição em subsistemas, conforme as diferentes escalas de tempo em que suas dinâmicas ocorrem [8]. Esta teoria foi inicialmente proposta para solucionar problemas de mecânica celestial, no estudo do movimento dos planetas do sistema solar, e se fundamenta na possibilidade de dar uma descrição aproximada do sistema em estudo, mediante um sistema simplificado ou “ideal”, que permita estudar correta e adequadamente o sistema completo [28].

A teoria de sistemas singularmente perturbados foi aplicada em diversas áreas da matemática e engenharia. Em Kokotovic, P. V. et al [29] e Pai, M. A. et al [30] por exemplo, descrevem-se aplicações em problemas de controle ótimo e estabilidade de sistemas elétricos de potência respectivamente. Em [31], admite-se que as equações algébricas do fluxo de potência são produto de uma simplificação baseada em escalas de tempo em que os efeitos dos transitórios eletromagnéticos (ex. linhas de transmissão) que ocorrem na escala dos microssegundos, são desprezados. Esta simplificação reduz o conjunto das equações diferenciais do modelo completo das linhas de transmissão a um conjunto de equações algébricas empregado nos estudos de fluxo de carga dos sistemas elétricos de potência [32, 33].

O método das escalas de tempo tem sido aplicado no estudo dos sistemas elétricos de potência, em [32] por exemplo, o método é usado para explicar em detalhe os modelos da máquina síncrona (um e dois eixos), em [9] apresenta-se uma proposta para a modelagem e análise da estabilidade dos sistemas elétricos de potência, em [2] discutem-se os problemas de estabilidade em sistemas elétricos de potência agrupando as dinâmicas da rede em escalas de tempo e em [1, 6, 7, 10, 11] aplica-se esta metodologia no estudo de problemas de estabilidade de longo ou médio prazo.

A metodologia empregada na decomposição em duas escalas de tempo (TTS do inglês *Two-Time Scales*), subsistema rápido e lento, requer a satisfação de algumas hipóteses que permitam estabelecer a proximidade entre as soluções dos sistemas reduzidos e do sistema completo [1]. Considere o sistema singularmente perturbado não linear:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon) \quad \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi}(\varepsilon) \quad (2.7)$$

$$\varepsilon \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon) \quad \mathbf{z}(t_0) = \boldsymbol{\eta}(\varepsilon) \quad (2.8)$$

onde $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ são continuamente diferenciáveis para $(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon) \in [0, t_1] \times \mathbf{D}_x \times \mathbf{D}_z \times [0, \varepsilon_0]$, $\mathbf{D}_x \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{D}_z \subset \mathbb{R}^m$ são conjuntos conexos abertos e $\boldsymbol{\xi}(\varepsilon)$, $\boldsymbol{\eta}(\varepsilon)$ são funções de classe C^1 em ε e $t_0 \in [0, t_1]$. No sistema (2.7)-(2.8), como ε é um parâmetro pequeno e positivo, o vetor $\mathbf{x}$ corresponde às dinâmicas lentas e o vetor $\mathbf{z}$ corresponde às dinâmicas rápidas.

Quando $\varepsilon=0$ em (2.7)-(2.8), a dimensão das equações de estado reduz-se de $m+n$ para n , pois (2.8) é transformada em uma equação algébrica:

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, 0) \quad (2.9)$$

Suponha que (2.9) tenha $k \geq 1$ raízes reais isoladas:

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}_i(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.10)$$

para cada $(t, \mathbf{x}) \in [0, t_1] \times \mathbf{D}_x$. Esta hipótese assegura a existência de um modelo reduzido local de dimensão n bem definido correspondente a cada raiz de (2.9). Para obter o modelo i -ésimo reduzido, substitui-se (2.10) em (2.7), com $\varepsilon=0$, e temos:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), 0) \quad (2.11)$$

Na equação (2.11) foi suprimido o subscrito “ i ” de $\mathbf{h}$, isso ficará claro a partir do contexto de que raiz de (2.9) estamos usando. O modelo (2.11) é denominado modelo reduzido, lento ou quase estático, devido à variável $\mathbf{z}$, cuja velocidade $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}/\varepsilon$ pode ser grande quando ε é pequeno e $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$, converge rapidamente a uma raiz de (2.9) que é um equilíbrio de (2.8).

Sejam $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ e $\mathbf{z}(t, \varepsilon)$ as soluções do sistema (2.7)-(2.8). No modelo reduzido (2.11), só podemos especificar n condições iniciais, devido à dimensão do modelo. Usualmente, o estado inicial de $\mathbf{x}$ é mantido na obtenção do modelo reduzido:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), 0) \quad \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{\xi}(0) \quad (2.12)$$

A solução deste sistema será denotada por $\bar{\mathbf{x}}(t)$. Como a dinâmica $\mathbf{z}$ foi excluída do modelo reduzido e substituída por seu "estado quase estático" $\mathbf{h}(t, \mathbf{x})$, a informação de $\mathbf{z}$ pode ser obtida pela substituição da solução de (2.12) em:

$$\bar{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{h}(t, \bar{\mathbf{x}}(t))$$

que descreve o comportamento lento de $\mathbf{z}$ quando $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$. Em contraste à variável original $\mathbf{z}$, que começa em t_0 desde um determinado $\boldsymbol{\eta}(\epsilon)$, a componente lenta $\bar{\mathbf{z}}$ não é livre para começar a partir de um valor determinado, e poderia haver uma grande discrepância entre seu valor inicial $\bar{\mathbf{z}}(t_0) = \mathbf{h}(t_0, \bar{\mathbf{x}}_0)$ e o estado inicial $\boldsymbol{\eta}(\epsilon)$. Então $\bar{\mathbf{z}}(t)$ não pode ser uma aproximação uniforme de $\mathbf{z}(t, \epsilon)$ para todo tempo. O melhor que pode ser esperado é que a estimativa

$$\mathbf{z}(t, \epsilon) - \bar{\mathbf{z}}(t) = O(\epsilon)^{(1)}$$

seja válida num intervalo excluindo t_0 , isto é, para $t \in [t_b, t_1]$, onde $t_b > t_0$. Por outro lado, é razoável esperar que a estimativa $\mathbf{z}(t, \epsilon) - \bar{\mathbf{z}}(t) = O(\epsilon)$ seja uniforme para todo $t \in [t_0, t_1]$, pois

$$\mathbf{x}(t_0, \epsilon) - \bar{\mathbf{x}}(t_0) = \boldsymbol{\xi}(\epsilon) - \boldsymbol{\xi}(0) = O(\epsilon)$$

Se o erro $\mathbf{z}(t, \epsilon) - \bar{\mathbf{z}}(t)$ é da ordem $O(\epsilon)$ no intervalo $[t_b, t_1]$, então pode-se afirmar que no intervalo inicial $[t_0, t_b]$, a variável $\mathbf{z}$ aproxima-se a $\bar{\mathbf{z}}(t)$. Além disso, lembrando que a velocidade de $\mathbf{z}$ pode ser grande, pois $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}/\epsilon$, então se $\epsilon = 0$ em (2.8), temos que as dinâmicas rápidas $\mathbf{z}$ tornam-se a instantâneas sempre que $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$. Logo não pode-se afirmar que $\mathbf{z}$ converge para seu estado quase estático $\bar{\mathbf{z}}$, a menos que certas condições de estabilidade sejam satisfeitas. A análise a seguir estabeleceu tais condições.

É conveniente para a análise fazer a seguinte mudança de variáveis:

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{h}(t, \mathbf{x}) \quad (2.13)$$

que translada o estado quase estático de $\mathbf{z}$ para a origem. Nas novas variáveis $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, o sistema completo fica:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), \epsilon), \quad \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi}(\epsilon) \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), \epsilon) - \epsilon \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \\ &\quad - \epsilon \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), \epsilon) \quad \mathbf{y}(t_0) = \boldsymbol{\eta}(\epsilon) - \mathbf{h}(t_0, \boldsymbol{\xi}(\epsilon)) \end{aligned} \quad (2.15)$$

O estado quase estático de (2.15) é agora $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, que quando é substituído em (2.14) origina o modelo reduzido (2.12). Para analisar (2.15), observe que $\epsilon \dot{\mathbf{y}}$ pode permanecer finito ainda quando ϵ tende a zero e $\dot{\mathbf{y}}$ tende ao infinito. Fazendo:

$$\epsilon \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{d\mathbf{y}}{d\tau} \quad \text{tem-se} \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\epsilon}$$

(1) Chama-se $O(\epsilon)$ como a ordem do erro. Sejam $\delta_1(\epsilon)$ e $\delta_2(\epsilon)$ aplicações de $\epsilon \in \mathbf{R}$, então $\delta_1(\epsilon) = O(\delta_2(\epsilon))$ se existe uma constante positiva k e c tal que $|\delta_1(\epsilon)| \leq k|\delta_2(\epsilon)|$, $\forall |\epsilon| < c$

e usando $\tau=0$ como o valor inicial de $t=t_0$. Temos que a nova variável de tempo $\tau=(t-t_0)/\varepsilon$ é alongada; isto é, se ε tende a zero, τ tende para infinito ainda para um t finito minimamente maior a t_0 e uma diferença fixa (independente de ε). Na escala de tempo τ , (2.15) é representada por:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} = & \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \\ & - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), \varepsilon), \quad \mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\eta}(\varepsilon) - \mathbf{h}(t_0, \boldsymbol{\xi}(\varepsilon)) \end{aligned} \quad (2.16)$$

As variáveis t e $\mathbf{x}$ na equação anterior terão variação lenta na escala de tempo de τ . Elas são determinadas por:

$$t = t_0 + \varepsilon \tau \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(t_0 + \varepsilon \tau, \varepsilon)$$

Fazendo $\varepsilon=0$, congelam-se estas variáveis em $t=t_0$ e $\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}_0$, e reduz-se (2.16) ao sistema autônomo:

$$\frac{dy}{d\tau} = \mathbf{g}(t_0, \boldsymbol{\xi}_0, \mathbf{y} + \mathbf{h}(t_0, \boldsymbol{\xi}_0), 0) \quad \mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\eta}(0) - \mathbf{h}(t_0, \boldsymbol{\xi}_0) = \boldsymbol{\eta}_0 - \mathbf{h}(t_0, \boldsymbol{\xi}_0) \quad (2.17)$$

que tem um ponto de equilíbrio em $\mathbf{y}=0$. Se esse ponto de equilíbrio é assintoticamente estável e $\mathbf{y}(0)$ pertence a sua região de estabilidade, é razoável esperar que a solução de (2.17) atingirá uma vizinhança $O(\varepsilon)$ da origem durante o intervalo $[t_0, t_b]$. Além deste intervalo, precisa-se de uma propriedade de estabilidade que garanta que $\mathbf{y}(\tau)$ permaneça perto de zero enquanto os parâmetros lentos $(t, \mathbf{x})$ se afastem de seus valores iniciais $(t_0, \boldsymbol{\xi}_0)$. Se a origem de (2.17) é exponencialmente estável, uniformemente em seus parâmetros “fixos” $(t_0, \boldsymbol{\xi}_0)$, então esta permanecerá exponencialmente estável quando esses parâmetros são substituídos pela variação lenta das variáveis $(t, \mathbf{x})$ [8].

Admite-se que a solução $\bar{\mathbf{x}}(t)$ do problema reduzido (2.12) seja definida para $t \in [0, t_1]$ e $\bar{\mathbf{x}}(t) \in \mathbf{D}_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^n$, para algum domínio $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}$. Reescreve-se (2.17) como:

$$\frac{dy}{d\tau} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), 0) \quad (2.18)$$

onde $(t, \mathbf{x}) \in [0, t_1] \times \mathbf{D}_{\mathbf{x}}$ são tratados como parâmetros fixos. Este modelo é conhecido como *boundary-layer model*, *boundary-layer system* ou subsistema rápido. A diferença entre os subsistemas rápidos (2.17) e (2.18) é que o primeiro é uma avaliação de (2.18) para um tempo e estado inicial.

Se o subsistema rápido (2.17) é exponencialmente estável, uniformemente com relação a $t \in [t_0, t_1]$ e $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_1$, (em que $\mathbf{D}_1 \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto conexo contendo a origem) e se o campo

vetorial "g" é suficientemente regular, então o Teorema de Tikhonov (veja [8], pag. 361) mostra, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, que as trajetórias do sistema singularmente perturbado podem ser aproximadas pela composição das trajetórias do subsistema lento e rápido, isto é, existem constantes positivas μ e ε^* tais que para toda condição inicial satisfazendo $\|\mathbf{z}_0 - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)\| \leq \mu$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, o sistema (2.7)–(2.8) tem uma única trajetória $\mathbf{x}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$, $\mathbf{z}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ definida no intervalo $[t_0, t_1]$ satisfazendo:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \bar{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{O}(\varepsilon) \\ \mathbf{z}_\varepsilon(t) - \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}(t)) - \bar{\mathbf{y}}(t/\varepsilon) &= \mathbf{O}(\varepsilon)\end{aligned}$$

uniformemente com relação a $t \in [t_0, t_1]$, onde $(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}(t)))$ é a trajetória do sistema reduzido (2.12) e $\bar{\mathbf{y}}(t/\varepsilon)$ é a trajetória do subsistema rápido (2.17).

O Teorema de Tikhonov justifica a decomposição dinâmica em um intervalo de tempo finito. Entretanto, se uma hipótese de estabilidade exponencial do subsistema lento é adicionada, então o resultado é verdadeiro para $t \geq t_0$. A seguir será analisado e enunciado o teorema de Tikhonov para tempo finito e infinito na forma como é apresentado em [8].

2.3.1 O Teorema de Tikhonov para intervalo de tempo finito

Antes de apresentar o teorema de Tikhonov, precisamos estabelecer a propriedade de estabilidade exponencial na origem, uniformemente nos parâmetros “fixos”, do sistema (2.18).

Definição 2.1.- O ponto de equilíbrio $\mathbf{y} = 0$ do modelo (2.18) é exponencialmente estável, uniformemente em $(t, \mathbf{x}) \in [0, t_1] \times D_{\mathbf{x}}$, se existem constantes positivas k , γ e ρ_0 tal que as soluções de (2.18) satisfaçam:

$$\|\mathbf{y}(\tau)\| \leq k\|\mathbf{y}(0)\|\exp(-\gamma\tau), \quad \forall \|\mathbf{y}(0)\| < \rho_0, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, t_1] \times D_{\mathbf{x}}, \quad \forall \tau \geq 0 \quad (2.19)$$

Exceto para casos triviais, em que a solução do modelo (2.18) possa ser conhecida, a verificação da estabilidade exponencial na origem poderá ser feita por linearização ou análise de Lyapunov. Pode-se mostrar que se a matriz jacobiana $[\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{y}]$ satisfizer a condição de autovalor:

$$\operatorname{Re} \left[\lambda \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), 0) \right\} \right] \leq -c < 0, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, t_1] \times D_{\mathbf{x}} \quad (2.20)$$

então existem constantes k , γ e ρ_0 para as quais (2.19) é satisfeita. Este, de fato, é um resultado local, isto é, a constante ρ_0 é usualmente muito pequena. Alternativamente, pode-se mostrar que se existe uma função de Lyapunov $V(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ que satisfaz:

$$c_1 \|y\|^2 \leq V(t, x, y) \leq c_2 \|y\|^2 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} g(t, x, y + h(t, x), 0) \leq -c_3 \|y\|^2 \quad (2.22)$$

para $(t, x, y) \in [0, t_1] \times D_x \times D_y$, em que $D_y \subset \mathbb{R}^m$ é um domínio que contém a origem, então (2.19) é satisfeito com a estimativa:

$$\rho_0 = \rho \sqrt{c_1/c_2}, \quad k = \sqrt{c_1/c_2}, \quad \gamma = \frac{c_3}{2c_2} \quad (2.23)$$

no qual $B_\rho \subset D_y$.

A seguir será enunciado o Teorema de Tikhonov para tempo finito.

Teorema 2.6.- Considere o sistema singularmente perturbado dado por (2.7) e (2.8) e seja $z = h(t, x)$ uma raiz isolada de (2.9). Suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas para todo:

$$[t, x, z - h(t, z), \varepsilon] \in [0, t_1] \times D_x \times D_y \times [0, \varepsilon_0]$$

para algum domínio $D_x \subset \mathbb{R}^n$ e $D_y \subset \mathbb{R}^m$, no qual D_x é convexo e D_y contém a origem:

- A primeira derivada parcial das funções f, g com relação a (x, z, ε) e a primeira derivada parcial de g com relação a t são contínuas. A função $h(t, x)$ e a Jacobiana $[\partial g(t, x, z, 0)/\partial z]$ têm primeira derivada parcial contínua com relação a suas variáveis. As condições iniciais $\xi(\varepsilon)$ e $\eta(\varepsilon)$ são funções de classe C^1 em ε .
- O sistema reduzido (2.12) tem solução única $\bar{x} \in S$ para $t \in [t_0, t_1]$, onde S é um subconjunto compacto de D_x .
- A origem é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável do sistema (2.18), uniformemente em (t, x) ; seja $R_y \subset D_y$ a região de estabilidade de (2.17) e Ω_y um subconjunto compacto de R_y .

Então, existe uma constante positiva ε^* tal que, para todo $\eta_0 - h(t_0, \xi_0) \in \Omega_y$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, o sistema singularmente perturbado (2.7) e (2.8) tem solução única $x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)$ em $[t_0, t_1]$, e:

$$x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon) \quad (2.24)$$

$$z(t, \varepsilon) - h(t, \bar{x}(t)) - \hat{y}(t/\varepsilon) = O(\varepsilon) \quad (2.25)$$

são uniformes no intervalo $t \in [t_0, t_1]$, onde $\hat{y}(\tau)$ é solução da equação (2.17). Além disso, dado qualquer $t_0 > t_0$, existe $\varepsilon^{**} \leq \varepsilon^*$ tal que:

$$z(t, \varepsilon) - h(t, \bar{x}(t)) = O(\varepsilon) \quad (2.26)$$

é uniforme no intervalo $t \in [t_0, t_1]$ sempre que $\varepsilon < \varepsilon^*$. ■

Na prova deste teorema, as propriedades de estabilidade do subsistema rápido são usadas para mostrar que:

$$\|y(t, \varepsilon)\| \leq k_1 \exp[-\alpha(t - t_0)/\varepsilon] + \varepsilon \delta$$

O limite superior anterior é empregado em (2.14) para demonstrar (2.24), que é plausível, pois $\int_0^t \exp(-\alpha s/\varepsilon) ds$ é $O(\varepsilon)$. A prova é encerrada com a análise do erro de (2.15) na escala de tempo τ para mostrar (2.25) e (2.26).

2.3.2 O Teorema de Tikhonov para tempo infinito

O teorema de Tikhonov para tempo finito (Teorema 2.6) é válido só em intervalos de tempo $O(1)$. Este fato pode ser visto a partir da prova deste teorema em [8]. Em particular, nessa prova estabelece-se:

$$\|x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t)\| \leq \varepsilon k_3 [1 + t_1 - t_0] \exp[-L_6(t_1 - t_0)]$$

Para qualquer tempo finito t_1 , a estimativa anterior é $O(\varepsilon)$, mas não é $O(\varepsilon)$ uniformemente em t para todo $t \geq t_0$. Para que isso seja verdade, precisamos mostrar que:

$$\|x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t)\| \leq \varepsilon k \quad \forall t \in [t_0, \infty)$$

Isso é feito sob algumas condições adicionais de estabilidade. Na extensão do Teorema 2.6 para tempo infinito, precisamos que o sistema reduzido (2.11) tenha um ponto de equilíbrio exponencialmente estável na origem e usamos a função de Lyapunov para estimar sua região de estabilidade. Além disso, precisamos definir um tipo de função, conhecida como função de classe K e classe $K\mathcal{L}$ [8] e enunciar um teorema auxiliar que estabelece condições adicionais a serem satisfeitas pela função de Lyapunov associada ao subsistema lento (2.11).

Definição 2.2- A função contínua $\alpha: [0, \alpha) \rightarrow [0, \infty)$ é dita pertencer à classe K , se é estritamente crescente e $\alpha(0)=0$. É dito pertencer à classe K_∞ se $\alpha=\infty$ e $\alpha(r) \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow \infty$.

Definição 2.3- A função contínua $\beta: [0, \alpha) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é dita pertencer à classe $K\mathcal{L}$, se para cada s fixo, $\beta(r, s)$ pertence à classe K com relação a r e, para cada r fixo, $\beta(r, s)$ é decrescente com relação a s e $\beta(r, s) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$.

Teorema 2.7.- Seja $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ um ponto de equilíbrio de $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$, onde $\mathbf{f}: [0,\infty)\times\mathbf{D}\rightarrow\mathbf{R}^n$ é contínua por partes em t e localmente Lipschitz em $\mathbf{x}$ em $[0,\infty)\times\mathbf{D}$, em que $\mathbf{D}\subset\mathbf{R}^n$ é um domínio que contém a origem $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Seja $V: [0,\infty)\times\mathbf{D}\rightarrow\mathbf{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que:

$$W_1(\mathbf{x}) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq W_2(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -W_3(\mathbf{x})$$

$\forall t \geq 0$ e $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}$, onde $W_1(\mathbf{x})$, $W_2(\mathbf{x})$ e $W_3(\mathbf{x})$ são funções contínuas e definidas positivas em $\mathbf{D}$. Então, $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ é uniformemente assintoticamente estável. Além disso, se r e c são escolhidos tal que $B_r = \{\|\mathbf{x}\| \leq r\} \subset \mathbf{D}$ e $c < \min_{\|\mathbf{x}\|=r} W_1(\mathbf{x})$, então cada trajetória que começa em $\{\mathbf{x} \in B_r / W_2(\mathbf{x}) \leq c\}$ satisfaz:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t-t_0) \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

para alguma função β de classe $\mathcal{KL}$. Finalmente, se $\mathbf{D}=\mathbf{R}^n$ e $W_1(\mathbf{x})$ é radialmente ilimitada, então $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ é globalmente uniformemente assintoticamente estável. ■

A seguir será enunciado o Teorema de Tikhonov para tempo infinito.

Teorema 2.8.- Considere o problema singularmente perturbado (2.7) e (2.8) e seja $\mathbf{z}=\mathbf{h}(t,\mathbf{x})$ uma raiz isolada de (2.9). Suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas para todo:

$$[t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{h}(t, \mathbf{z}), \varepsilon] \in [0, \infty) \times \mathbf{D}_x \times \mathbf{D}_y \times [0, \varepsilon_0]$$

para algum domínio $\mathbf{D}_x \subset \mathbf{R}^n$ e $\mathbf{D}_y \subset \mathbf{R}^m$, no qual $\mathbf{D}_x$ e $\mathbf{D}_y$ contém suas respectivas origens:

- Em qualquer subconjunto compacto de $\mathbf{D}_x \times \mathbf{D}_y$, a primeira derivada parcial das funções $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ com relação a $(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon)$ e a primeira derivada parcial de $\mathbf{g}$ com relação a t são contínuas e limitadas, $\mathbf{h}(t, \mathbf{x})$ e $[\partial \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, 0) / \partial \mathbf{z}]$ tem sua primeira derivada parcial limitada com relação a suas variáveis, e $[\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), 0) / \partial \mathbf{x}]$ é Lipschitz em $\mathbf{x}$, uniformemente em t . As condições iniciais $\xi(\varepsilon)$ e $\eta(\varepsilon)$ são funções de classe C^1 em ε .
- A origem é ponto de equilíbrio exponencialmente estável do sistema reduzido (2.11); existe uma função de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ que satisfaz as condições do Teorema 2.7 para (2.11) em $(t, \mathbf{x}) \in [0, \infty) \times \mathbf{D}_x$ e $\{W_1(\mathbf{x}) \leq c\}$ é um subconjunto compacto de $\mathbf{D}_x$.
- A origem é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável do subsistema rápido (2.18), uniformemente em $(t, \mathbf{x})$; seja $\mathcal{R}_y \subset \mathbf{D}_y$ a região de atração de (2.17) e Ω_y um subconjunto compacto de $\mathcal{R}_y$.

Então, para cada conjunto compacto $\Omega_{\mathbf{x}} \subset \{W_2(\mathbf{x}) \leq \rho c, 0 < \rho < 1\}$ existe uma constante positiva ε^* tal que para todo $t_0 \geq 0$, $\xi_0 \in \Omega_{\mathbf{x}}$, $\eta_0 - \mathbf{h}(t_0, \xi_0) \in \Omega_{\mathbf{y}}$, e $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, o problema singularmente perturbado (2.7)-(2.8) tem solução única $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$, $\mathbf{z}(t, \varepsilon)$ em $[t_0, \infty)$, e

$$\mathbf{x}(t, \varepsilon) - \bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{O}(\varepsilon) \quad (2.27)$$

$$\mathbf{z}(t, \varepsilon) - \mathbf{h}(t, \bar{\mathbf{x}}(t)) - \hat{\mathbf{y}}(t/\varepsilon) = \mathbf{O}(\varepsilon) \quad (2.28)$$

uniformemente em $t \in [t_0, \infty)$, em que $\bar{\mathbf{x}}(t)$ e $\hat{\mathbf{y}}(\tau)$ são soluções do problema reduzido (2.12) e do subsistema rápido (2.17) respectivamente. Além disso, dado $t_b > t_0$, existe $\varepsilon^{**} \leq \varepsilon^*$ tal que:

$$\mathbf{z}(t, \varepsilon) - \mathbf{h}(t, \bar{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{O}(\varepsilon) \quad (2.29)$$

uniformemente para $t \in [t_b, \infty)$ para todo $\varepsilon < \varepsilon^{**}$. ■

Se o sistema reduzido (2.11) é autônomo, o conjunto $\Omega_{\mathbf{x}}$ no Teorema 2.8 pode ser qualquer subconjunto compacto de sua região de atração. Isto é consequência do Teorema Inverso de Lyapunov (veja *Converse Lyapunov Theorem* em [8], pag. 167) que proporciona uma função de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ tal que qualquer subconjunto compacto da região de atração está no interior de um conjunto compacto da forma $\{V(\mathbf{x}) \leq c\}$.

2.4 Região de Estabilidade de Sistemas Singularmente Perturbados

Nesta seção, uma revisão da teoria da caracterização da região de estabilidade de sistemas singularmente perturbados é apresentada. Mais informações sobre esta teoria podem ser encontradas em [23, 24].

Consideramos que os sistemas elétricos de potência possuem escalas de tempo e são modelados por um conjunto de equações diferenciais não lineares singularmente perturbadas e autônomas:

$$(\Sigma_{\varepsilon}) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \varepsilon \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) & \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0 \end{cases} \quad (2.30)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^m$. As funções $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ e $\mathbf{g}: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ são de classe C^1 e ε é um número real não negativo e pequeno, então $\mathbf{x}$ é o vetor das dinâmicas lentas enquanto $\mathbf{z}$ é o vetor das dinâmicas rápidas. Consideremos sua correspondente versão na escala de tempo rápida $\tau = t/\varepsilon$:

$$(\Pi_\varepsilon) \begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) & \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0 \end{cases} \quad (2.31)$$

O ponto $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ é um ponto de equilíbrio de (Σ_ε) se $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*) = \mathbf{0}$. Um ponto de equilíbrio é hiperbólico se todos os autovalores da matriz Jacobiana:

$$J_\varepsilon = \begin{bmatrix} D_{\mathbf{x}}\mathbf{f} & D_{\mathbf{z}}\mathbf{f} \\ \frac{1}{\varepsilon} D_{\mathbf{x}}\mathbf{g} & \frac{1}{\varepsilon} D_{\mathbf{z}}\mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

calculada no ponto de equilíbrio, não pertencem ao eixo imaginário. Um ponto de equilíbrio hiperbólico é um ponto de equilíbrio de tipo k se existem exatamente k autovalores de J_ε no semi-plano direito do plano complexo. As variedades estável e instável de um ponto de equilíbrio $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ de (Σ_ε) serão denotadas por $\mathbf{W}_{(\Sigma_\varepsilon)}^s(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ e $\mathbf{W}_{(\Sigma_\varepsilon)}^u(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ respectivamente. O subíndice (Σ_ε) será usado para indicar que estas são variedades invariantes com relação ao sistema (Σ_ε) .

Sejam $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ e $\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon(\tau, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ as trajetórias dos sistemas (Σ_ε) e (Π_ε) respectivamente iniciando em $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$. É evidente que $\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon(\tau, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) = \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(\varepsilon\tau, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$. Suponha que $(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (Σ_ε) , então o conjunto:

$$\mathbf{A}_\varepsilon(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m / \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}) \rightarrow (\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s) \text{ quando } t \rightarrow \infty\} \quad (2.33)$$

denota a coleção de todas as condições iniciais de (Σ_ε) cujas trajetórias convergem para $(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ quando $t \rightarrow \infty$. Esse conjunto é chamado região de estabilidade (ou região de atração) do ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$. Nosso interesse está em estudar o comportamento de $\mathbf{A}_\varepsilon(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e sua relação com a estabilidade dos subsistemas rápido e lento associados.

A.- O Subsistema Lento

O subsistema lento (Σ_0) é obtido fazendo-se $\varepsilon = 0$ em (Σ_ε) o qual é representado pelo seguinte conjunto de equações algébrico-diferenciais (EAD):

$$(\Sigma_0) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \\ \mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \end{cases} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.34)$$

A equação algébrica $\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ restringe a dinâmica do sistema lento (Σ_0) a um conjunto Γ em $\mathbf{R}^{n+m}$, mais precisamente $\Gamma = \{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m / \mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\}$. Denotamos por $\boldsymbol{\varphi}_0(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ a trajetória do subsistema lento (Σ_0) iniciando em $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) \in \Gamma$ e por,

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \Gamma / \boldsymbol{\varphi}_0(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) \rightarrow (\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s) \text{ quando } t \rightarrow \infty\} \quad (2.35)$$

a região de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ com relação ao subsistema lento (Σ_0) . A região de estabilidade do subsistema lento $\mathbf{A}_0(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ é um subconjunto de dimensão n da variedade de restrição Γ , enquanto a região de estabilidade $\mathbf{A}_\varepsilon(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ do sistema original é um subconjunto de dimensão $n+m$ de $\mathbf{R}^{n+m}$. Em consequência, a região de estabilidade do subsistema lento não é uma aproximação da região de estabilidade do sistema original (Σ_ε) para ε pequeno.

B.- O Subsistema Rápido

O subsistema rápido (Π_F) (ou *boundary-layer-system*) é obtido formalmente fazendo $\varepsilon=0$ em (Π_ε) . No subsistema rápido, a variável $\mathbf{x}$ é “congelada”. Então, este pode ser tomado como uma família de subsistemas, tal que para cada valor fixo de $\mathbf{x}$ um novo sistema dinâmico é definido como:

$$(\Pi_F(\mathbf{x})) \left\{ \frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \right. \quad (2.36)$$

Sejam $\Phi_0(\tau, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ a trajetória de (Π_F) começando em $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ e

$$\mathbf{A}_F(\mathbf{x}, \mathbf{z}^*) = \{(\mathbf{z} \in \mathbf{R}^m / \Phi_0(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{z}) \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{z}^*) \text{ quando } t \rightarrow \infty\} \quad (2.37)$$

a região de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável $\mathbf{z}^*$ de $(\Pi_F(\mathbf{x}))$. Então, $\mathbf{A}_F(\mathbf{x}, \mathbf{z}^*)$ representa uma família de regiões de estabilidade associadas com a família de subsistemas rápidos, ambos parametrizados pela variável lenta $\mathbf{x}$. A relação entre a região de estabilidade do sistema original (Σ_ε) e as regiões de estabilidade dos dois subsistemas simplificados, rápido e lento, será investigada. As fronteiras topológicas destes conjuntos serão respectivamente denotadas por $\partial \mathbf{A}_\varepsilon(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$, $\partial \mathbf{A}_0(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ e $\partial \mathbf{A}_F(\mathbf{x}, \mathbf{z}^*)$.

C.- A Variedade de Restrição

A variedade de restrição (ou *constraint manifold*) Γ desempenha um papel essencial no estabelecimento de uma relação entre a região de estabilidade do sistema original (Σ_ε) e os subsistemas simplificados (Σ_0) e $(\Pi_F(\mathbf{x}))$. A variedade de restrição Γ é um conjunto de pontos de equilíbrio do subsistema rápido (Π_F) e $E = \{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbf{R}^{n+m} / \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{0}, \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{0}\}$ é o conjunto de equilíbrios do sistema original (Σ_ε) que é um subconjunto de Γ .

Normalmente, o conjunto Γ é uma variedade de classe C^1 composta de várias componentes conexas disjuntas [34]. Seja $NH \subset \Gamma$ o conjunto de pontos de equilíbrio não hiperbólicos de Γ , que são os pontos de Γ em que $D_z \mathbf{g}$ tem pelo menos um autovalor no eixo imaginário. NH é uma variedade de dimensão $n-1$ que separa cada uma das componentes de Γ em componentes conexas Γ_i

tal que $\Gamma \setminus NH = \cup_i \Gamma_i$ [34]. Em cada componente conexa Γ_i , o número de autovalores de $D_{\mathbf{z}}\mathbf{g}$ no semi-plano direito é constante.

Figura 2.2: Trajetórias do subsistema rápido são restringidas a um hiperplano de dimensão m .

O conjunto conexo Γ_i é uma componente de tipo k se a matriz $D_{\mathbf{z}}\mathbf{g}$, avaliada em cada ponto de Γ_i , tem k autovalores no semi-plano complexo direito e $m-k$ no semi-plano complexo esquerdo. Se todos os autovalores $D_{\mathbf{z}}\mathbf{g}$ calculados nos pontos de Γ_i tem parte real negativa, então Γ_i é chamada componente estável de Γ . Caso contrário, é chamada componente instável. Observe, que se $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ situa-se na componente Γ_i de tipo k que pertence a Γ , então $\mathbf{z}^*$ é um ponto de equilíbrio tipo k de $(\Pi_F(\mathbf{x}^*))$. A Figura 2.2 mostra uma componente estável Γ_s de Γ e uma componente instável Γ_u de tipo 1 que pertence a Γ . Os pontos em Γ_s são ponto de equilíbrio assintoticamente estável da família de subsistemas rápidos enquanto pontos em Γ_u são pontos de equilíbrio de tipo 1 da família dos subsistemas rápidos.

2.4.1 Caracterização da Região de Estabilidade de Sistemas Singularmente Perturbados

Nesta seção, será investigado como a região de estabilidade e a fronteira da região de estabilidade dos subsistemas rápido e lento podem proporcionar uma aproximação da fronteira da região de estabilidade do sistema original (Σ_ϵ).

Começamos estudando a relação dos pontos de equilíbrio hiperbólicos na fronteira da região de estabilidade do sistema original (Σ_ϵ) com aqueles dos subsistemas rápido e lento. Finalmente, aproximações de partes relevantes da região de estabilidade do sistema original (Σ_ϵ) são desenvolvidas em termos da região de estabilidade e fronteira da região de estabilidade dos subsistemas rápido e lento, para maiores detalhes acerca das demonstrações dos teoremas apresentados nesta seção, vide [23].

O seguinte lema estabelece a relação entre os pontos de equilíbrio do subsistema lento com os correspondentes do sistema original (Σ_ϵ).

Lema 2.1: Tipo de estabilidade dos equilíbrios

Seja $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ um ponto de equilíbrio tipo j do subsistema lento (Σ_0) que pertence à componente Γ_i de tipo k de Γ , então existe $\epsilon^* > 0$ tal que $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico tipo $(j+k)$ do sistema original (Σ_ϵ) $\forall \epsilon \in (0, \epsilon^*)$.

Uma consequência trivial do Lema 2.1 é que pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis no sistema original (Σ_ϵ) devem pertencer à componente estável Γ_s de Γ . O Lema 2.1 também mostra que a hipótese (H1) para o subsistema lento (Σ_0) é uma condição suficiente para garantir a hipótese (H1) no sistema original (Σ_ϵ) para ϵ suficientemente pequeno.

O Teorema 2.3 afirma que, na prática, só os pontos de equilíbrio de tipo 1 desempenham um papel crucial na caracterização da fronteira de estabilidade dos sistemas dinâmicos. O seguinte corolário é uma consequência direta do Lema 2.1 que estabelece a possível localização e propriedades de estabilidade destes pontos de equilíbrio.

Corolário 2.1: Localização e estabilidade de pontos de equilíbrio tipo 1

Se o subsistema lento (Σ_0) satisfaz a hipótese (H1), então o ponto de equilíbrio instável tipo 1 $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u)$ do sistema (Σ_ϵ) deve pertencer, para ϵ suficientemente pequeno, a uma componente estável ou a uma componente de tipo 1 de Γ . Com efeito, se $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u)$ encontra-se na componente estável Γ_s , então $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u)$ é um ponto de equilíbrio tipo 1 do subsistema lento (Σ_0) e um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x}_u)$). Caso contrário, $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u)$ é um ponto de equilíbrio tipo 1 do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x}_u)$) e um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do subsistema lento (Σ_0) em Γ_u .

O Corolário 2.1 afirma que os pontos de equilíbrio tipo 1 do sistema original (Σ_ϵ) devem encontrar-se em uma componente estável ou uma componente de tipo 1 de Γ . Isto é, só componentes estáveis ou tipo 1 de Γ são relevantes para a caracterização da região de estabilidade do sistema original (Σ_ϵ). Os seguintes dois teoremas estabelecem a relação entre os pontos de equilíbrio hiperbólicos que se encontram na fronteira da região de estabilidade do sistema original (Σ_ϵ) com aqueles que se encontram na fronteira da região de estabilidade dos subsistemas rápido e lento.

Teorema 2.9: Pontos de equilíbrio na fronteira de estabilidade do subsistema lento (Σ_0)

Considere o sistema original (Σ_ϵ) satisfazendo as hipóteses (H1)-(H2) para ϵ suficientemente pequeno. Suponha que $(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do subsistema

lento (Σ_0) na componente estável Γ_s . Se o ponto de equilíbrio hiperbólico $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u)$ do subsistema lento (Σ_0) encontra-se na fronteira de estabilidade $\partial A_0(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ do subsistema lento (Σ_0) em Γ_s , então $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u)$ encontra-se na fronteira de estabilidade $\partial A_\varepsilon(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ do sistema original (Σ_ε) para ε suficientemente pequeno.

Figura 2.3: Interpretação geométrica do Teorema 2.9. (a) o ponto de equilíbrio instável de tipo 1 $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u)$ pertence à fronteira de estabilidade do subsistema lento como consequência do Teorema 2.9, (b) o mesmo ponto de equilíbrio instável de tipo 1 $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u)$ também pertence à fronteira de estabilidade do sistema original (Σ_ε) para ε suficientemente pequeno.

Figura 2.4: Interpretação geométrica do Teorema 2.10. Na esquerda, $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}^*)$ pertence à região de estabilidade do subsistema lento e $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u)$ pertence à fronteira da região de estabilidade do subsistema rápido, portanto, na direita, o equilíbrio $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u)$ pertence à fronteira de estabilidade do sistema original (Σ_ε) para ε suficientemente pequeno.

Teorema 2.10: Pontos de equilíbrio na fronteira de estabilidade do subsistema rápido (Π_F)

Considere o sistema original (Σ_ε) satisfazendo as hipóteses (H1)-(H2) para ε suficientemente pequeno. Seja $(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do subsistema lento (Σ_0) na componente estável Γ_s . Se o ponto de equilíbrio hiperbólico $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u)$ do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x}_u)$) encontra-se na fronteira de estabilidade $\partial A_F(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}^*)$ do ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}^*)$ do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x}_u)$), e $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}^*)$ encontra-se na região de estabilidade $A_0(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s) \subset \Gamma_s$ do

subsistema lento (Σ_0), então $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u)$ encontra-se na fronteira de estabilidade $\partial A_\varepsilon(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ do sistema original (Σ_ε).

Os Teoremas 2.9 e 2.10 afirmam que a tarefa de verificar se o ponto de equilíbrio instável está na fronteira de estabilidade do sistema original (Σ_ε) pode ser decomposta em tarefas que verifiquem se ele está na fronteira de estabilidade dos subsistemas rápido ou lento. O Teorema 2.9 oferece uma metodologia para saber se o ponto de equilíbrio instável na componente estável Γ_s encontra-se na fronteira de estabilidade do sistema original (Σ_ε) pela verificação se o mesmo ponto de equilíbrio está na fronteira da região de estabilidade do subsistema lento (Σ_0). Por outro lado, o Teorema 2.10 proporciona uma metodologia para verificar se o ponto de equilíbrio instável na componente instável Γ_u de Γ pertence à fronteira da região de estabilidade de (Σ_ε), para ε suficientemente pequeno. A Figura 2.3 ilustra o resultado do Teorema 2.9 enquanto a Figura 2.4 ilustra o resultado do Teorema 2.10.

Associando os Teoremas 2.1 e 2.9, obtemos a seguinte condição para verificar se um ponto de equilíbrio instável encontra-se na fronteira da região de estabilidade do sistema original (Σ_ε) em termos da variedade instável deste equilíbrio no subsistema lento (Σ_0).

Teorema 2.11: Equilíbrios na fronteira da região de estabilidade

Seja $(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ um ponto de equilíbrio hiperbólico assintoticamente estável do subsistema lento (Σ_0) na componente estável Γ_s . Seja $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u) \neq (\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ um ponto de equilíbrio hiperbólico do subsistema lento em Γ_s . Se o subsistema lento (Σ_0) satisfaz as hipóteses (H1)-(H3) e o sistema original (Σ_ε) satisfaz as hipóteses (H1)-(H2), para ε suficientemente pequeno, então:

- (i) $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u) \in \partial A_\varepsilon(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ para ε suficientemente pequeno se $W_{(\Sigma_0)}^u(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u) \cap A_0(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s) \neq \emptyset$;
- (ii) $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u) \in \partial A_\varepsilon(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ para ε suficientemente pequeno se e só se $W_{(\Sigma_0)}^s(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u) \subset \partial A_0(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$

Computacionalmente, verificar a interseção da variedade instável de um equilíbrio do subsistema lento com a região de estabilidade do subsistema lento garante, para ε pequeno, que o ponto de equilíbrio instável pertence à fronteira da região de estabilidade do sistema original (Σ_ε).

Teorema 2.12: Equilíbrios na fronteira da região de estabilidade

Seja $(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ um ponto de equilíbrio hiperbólico assintoticamente estável do subsistema lento (Σ_0) na componente estável Γ_s . Seja $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u) \neq (\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ um ponto de equilíbrio hiperbólico do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x}_u)$). Se o subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x}_u)$) satisfaz as hipóteses (H1)-(H3) e o sistema original (Σ_ε) satisfaz as hipóteses (H1)-(H2), para ε suficientemente pequeno, então:

- (i) $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u) \in \partial A_\varepsilon(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ para ε suficientemente pequeno se $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}^*) \in A_0(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ e $W_{(\Pi_F(\mathbf{x}_u))}^u(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u) \cap A_F(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}^*) \neq \emptyset$;

- (ii) $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u) \in \partial A_\varepsilon(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ para ε suficientemente pequeno se $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}^*) \in A_0(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ e
- $$W_{(\Pi_F(\mathbf{x}_u))}^s(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u) \subset \partial A_F(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}^*)$$

2.4.2 Aproximação da Parte Relevante da Fronteira da Região de Estabilidade de Sistemas Singularmente Perturbados

A seguir será estabelecida a relação entre a fronteira da região de estabilidade do sistema original (Σ_ε) e a fronteira da região de estabilidade e região de estabilidade dos subsistemas rápido e lento. Esta relação não oferece uma caracterização completa da fronteira da região de estabilidade do sistema original (Σ_ε) em termos da região de estabilidade e fronteira da região de estabilidade dos subsistemas rápido e lento, mas oferece uma boa aproximação da parte relevante da fronteira da região de estabilidade em termos desses conjuntos. As demonstrações dos teoremas nesta seção podem ser encontradas em [23].

Teorema 2.13: Proximidade da fronteira da região de estabilidade do subsistema lento (Σ_0) e sistema original (Σ_ε)

Considere que o sistema original (Σ_ε) satisfaça as hipóteses (H1)-(H3), para ε suficientemente pequeno, e que o subsistema lento associado (Σ_0) satisfaça a hipótese (H1). Sejam $(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ um ponto de equilíbrio hiperbólico assintoticamente estável e $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u)$ um ponto de equilíbrio tipo 1 que encontra-se na fronteira da região de estabilidade $\partial A_0(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ do subsistema lento (Σ_0) . Seja $S \subset W_{(\Sigma_0)}^s(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u)$ um subconjunto conexo e compacto de dimensão $n-1$ da fronteira da região de estabilidade do subsistema lento (Σ_0) contendo $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u)$. Seja N uma vizinhança de S em $\mathbb{R}^{n+m}$ e, para cada $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}}) \in S$, seja $F_{\hat{\mathbf{x}}} = W_{(\Pi_F(\hat{\mathbf{x}}))}^s(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}}) \cap N$, a interseção da região de estabilidade $(\Pi_F(\hat{\mathbf{x}}))$ com N . Então, dado $\eta > 0$, existe $\varepsilon^* > 0$ tal que $\cup_{(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}}) \in S} F_{\hat{\mathbf{x}}}$ é um conjunto de dimensão $(n+m-1)$ que é η -próximo à fronteira da região de estabilidade $\partial A_\varepsilon(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s) \cap N$ do sistema original $(\Sigma_\varepsilon) \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$.

O Teorema 2.13 oferece uma aproximação da fronteira da região de estabilidade do sistema original (Σ_ε) , para ε suficientemente pequeno, pela união da região de estabilidade do subsistema rápido (Π_F) e a fronteira de estabilidade do subsistema lento (Σ_0) . A Figura 2.5 ilustra os resultados do Teorema 2.13.

O Teorema 2.14, oferece uma aproximação da fronteira da região de estabilidade $\partial A_\varepsilon(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ do sistema em escalas de tempo (Σ_ε) , para ε suficientemente pequeno, pela união da fronteira da região de estabilidade do subsistema rápido (Π_F) e a região de estabilidade do subsistema lento (Σ_0) .

Figura 2.5: Interpretação geométrica do Teorema 2.13. O ponto de equilíbrio instável $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u)$ tipo 1 pertence à fronteira da região de estabilidade do subsistema lento (Σ_0) e, como consequência, pertence à fronteira da região de estabilidade do sistema original (Σ_ε) para ε suficientemente pequeno. O conjunto S , um subconjunto da região de estabilidade do subsistema lento (Σ_0) e a união de conjuntos $F_{\hat{x}}$ proporciona uma aproximação da fronteira da região de estabilidade do sistema original (Σ_ε) .

Teorema 2.14: Proximidade da fronteira da região de estabilidade do subsistema rápido (Π_F) e sistema original (Σ_ε)

Considere que o sistema original (Σ_ε) satisfaça as hipóteses (H1)-(H3), para ε suficientemente pequeno, e que o subsistema lento (Σ_0) associado satisfaça a hipótese (H1). Sejam $(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ um ponto de equilíbrio hiperbólico assintoticamente estável e $(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u)$ um ponto de equilíbrio tipo 1 na componente Γ_u de tipo 1 de Γ do sistema original (Σ_ε) que se encontra na fronteira da região de estabilidade $\partial A_\varepsilon(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ do sistema em escalas de tempo (Σ_ε) para ε suficientemente pequeno. Seja $Q \subset A_{(\Sigma_0)}(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u)$ um subconjunto conexo e compacto de dimensão n da região de estabilidade $A_{(\Sigma_0)}(\mathbf{x}_u, \mathbf{z}_u)$ de (Σ_0) em Γ_u . Seja N uma vizinhança de Q em $\mathbb{R}^{n+m}$ e para cada $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}}) \in Q$, define-se o conjunto de dimensão $(m-1)$ $G_{\hat{x}} = \mathbf{W}_{(\Pi_F(\hat{x}))}^s(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}}) \cap N$. Então, dado $\eta > 0$, existe $\varepsilon^* > 0$ tal que $\bigcup_{(\hat{x}, \hat{z}) \in Q} G_{\hat{x}}$ é um conjunto de dimensão $(n+m-1)$ que é η -próximo à fronteira de estabilidade $\partial A_\varepsilon(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s) \cap N$ de (Σ_ε) $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$.

Capítulo 3

Análise de Estabilidade de Sistemas Elétricos de Potência em Duas Escalas de Tempo

O principal objetivo deste capítulo é estabelecer os fundamentos para a análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência pelo método das Escalas de Tempo. Uma metodologia geral para análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência no contexto das escalas de tempo é proposta. Esta metodologia é abrangente, pois tem como caso particular as análises de estabilidade transitória e a análise QSS de médio ou longo prazo tradicionais.

Na Seção 3.1, uma introdução geral e justificativas para a análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência pela decomposição em escalas de tempo é apresentada, mostrando-se a necessidade de estabelecer uma metodologia com sólida base matemática, para este tipo de análise. Na Seção 3.2, abordam-se os critérios de classificação das dinâmicas de sistemas elétricos de potência no contexto das escalas de tempo, em dinâmicas rápidas e lentas segundo sua resposta no tempo. Estas classificações são suportadas pela descrição de diversos cenários de falta ou acionamento de equipamentos reportadas na literatura [4].

Na Seção 3.3, um algoritmo geral para análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência é proposto. Este algoritmo tem como caso particular as análises de estabilidade transitória e de médio (ou longo) prazo tradicionais. Mediante a aplicação da teoria dos sistemas dinâmicos e sistemas singularmente perturbados, os fundamentos do algoritmo proposto são estabelecidos. A necessidade do algoritmo proposto nessa seção está baseada na falta de relação que atualmente se observa entre as análises de estabilidade transitória (escala rápida) e estabilidade de médio ou longo prazo (escala lenta) tradicionais [1, 2, 3, 4]. Nessas análises, a ideia é dividir a complexidade do problema de estabilidade em subproblemas simplificados, porém a relação entre a evolução das dinâmicas analisadas, por separado, nesses subproblemas não é clara, fato que pode levar a conclusões erradas e dificulta o entendimento das ações preventivas ou corretivas a serem realizadas que evitem o colapso ou ajudem no restabelecimento do sistema elétrico de potência.

Entre as principais características do algoritmo proposto temos: (i) propiciar um melhor entendimento do processo de instabilidade que leva o sistema de elétrico de potência ao colapso, (ii) fazer uma clara decomposição do sistema de elétrico de potência em subsistemas de menor ordem e complexidade, (iii) o algoritmo é conceitual e portanto independente das ferramentas de avaliação de estabilidade, assim simulação numérica e métodos diretos podem ser utilizados na avaliação de estabilidade.

Nas Seções 3.4 e 3.5, descrevem-se as análises de estabilidade transitória e de médio ou longo prazo de sistemas elétricos de potência respectivamente. Essas descrições são realizadas contrastando as metodologias convencionais propostas na literatura com o algoritmo proposto na Seção 3.3, evidenciando assim a origem dos erros que normalmente acontecem nessas análises como produto de admitir a independência de seus resultados, isto é, instabilidades transitórias não originam instabilidades de médio ou longo prazo e vice-versa.

Finalmente, na Seção 3.6, o capítulo é encerrado com testes do algoritmo proposto em sistemas elétricos de potência de pequeno porte. Para implementação do algoritmo foram empregadas técnicas de integração numérica (simulação numérica) para avaliar a estabilidade dos subsistemas rápido e lento correspondentes.

3.1 Introdução

Explorando as características de múltiplas escalas de tempo, ou seja, a coexistência das dinâmicas rápidas e lentas, dos modelos dinâmicos do sistema elétrico de potência [1, 2, 9], a análise de estabilidade do sistema original pode ser decomposta na análise de estabilidade de dois subsistemas simplificados, o subsistema rápido e lento. Muitas vantagens podem ser obtidas como resultado dessa decomposição. Do ponto de vista computacional, estimativas menos conservadoras da região de estabilidade e tempo crítico de abertura são usualmente obtidas e bom entendimento das dinâmicas e modos instáveis é obtido [35]. Do ponto de vista numérico, o esforço computacional é usualmente reduzido e os algoritmos de integração numérica tornam-se muito bem condicionados.

Os engenheiros já se beneficiam da decomposição em escalas de tempo dividindo a análise de estabilidade do sistema elétrico de potência em análise transitória (ou rápida), médio e longo prazo, porém a relação entre elas não é clara. Em particular, a análise de estabilidade no curto prazo usualmente usa um modelo simplificado do sistema elétrico de potência que não pode garantir sua

estabilidade no médio e longo prazo. Por outro lado, a análise de estabilidade no médio e longo prazo é realizada sob a hipótese de que as dinâmicas rápidas sejam estáveis ou equivalentemente o subsistema rápido seja estável. Consequentemente, existe uma brecha entre a análise de estabilidade de curto e médio ou longo prazo. Em particular, não existe a garantia de que a combinação de uma análise de estabilidade desacoplada no curto e médio prazo possa ser conclusiva na determinação da estabilidade do sistema elétrico de potência original [1, 36].

Na análise de estabilidade de tensão, por exemplo, diferentes cenários de instabilidade podem se originar como consequência da coexistência de dispositivos rápidos e lentos [1, 2]. Problemas de estabilidade de tensão podem ser causados por perturbações nas variáveis rápidas e problemas de estabilidade transitória podem coexistir com problemas de estabilidade de tensão [35].

Neste capítulo, fechamos a brecha que existe entre a análise de estabilidade de curto e médio prazo propondo um algoritmo geral que decompõe a análise de estabilidade de um sistema elétrico de potência em duas escalas de tempo. Com o suporte da teoria dos sistemas singularmente perturbados e conceitos da teoria de região de estabilidade, o algoritmo proposto integra a análise de estabilidade no curto e médio prazo num único algoritmo, que tem a análise transitória e o método QSS como casos particulares. Além disso, propomos um algoritmo que claramente indica o chaveamento entre a análise rápida e lenta acelerando a verificação da estabilidade dos modelos do sistema elétrico de potência em escalas de tempo e evitando aproximações heurísticas, normalmente usadas na literatura, para comutar entre a simulação QSS e o modelo de simulação completa [37].

3.2 Escalas de Tempo nos Sistemas Elétricos de Potência

O problema geral de estabilidade dos sistemas elétricos de potência é único, mas devido à sua complexidade, ele é dividido em subproblemas [3], estabelecendo hipóteses que simplifiquem a análise para cada um deles. Estudar a estabilidade do sistema elétrico de potência no contexto das escalas de tempo tem como vantagens um melhor entendimento de como as dinâmicas contribuem para a estabilidade do sistema elétrico de potência no decorrer do tempo e uma redução do esforço computacional de análise.

Uma classificação específica das dinâmicas dos equipamentos com relação à sua influência no tempo após a ocorrência de uma falta ou perturbação (nas escalas de segundos, minutos ou horas) é apresentada em [4] e mostrada a seguir:

- (i) Transitórios eletromecânicos de geradores, reguladores, motores de indução, etc. e dinâmicas de dispositivos de eletrônica de potência (SVC, HVDC, etc.) atuam na escala de tempo rápida, ou seja, no intervalo de poucos segundos.
- (ii) Dispositivos discretos, como comutadores sob carga de transformadores e limitadores de sobre-excitação de geradores atuam em intervalos de algumas dezenas de segundos.
- (iii) Processos de recuperação de carga levam vários minutos ou horas.

A escala de tempo (i) é chamada escala transitória (*transient time*) enquanto as escalas (ii) e (iii) compõem a escala de médio e longo prazo (*mid-term* e *long-term*). Transitórios eletromagnéticos nas linhas de transmissão e máquinas síncronas, como por exemplo, componentes DC de correntes de curto-circuito, se dissipam muito rápido para serem considerados na análise de estabilidade de tensão. Por esse motivo, admite-se que os transitórios eletromagnéticos extinguem-se rapidamente tal que tensões e correntes passam ser analisados como fasores variantes no tempo.

A Tabela 3.1 relaciona os diversos dispositivos do sistema elétrico de potência com o problema de estabilidade de tensão, que é decomposto em escalas de tempo transitório (curto prazo) e de médio e longo prazo. Além disso, devido à importância de alguns tipos de cargas na análise de estabilidade em escalas de tempo, elas também são incluídas na classificação da Tabela 3.1.

Os problemas de instabilidade de tensão devido às dinâmicas lentas são muito comuns [1, 2], esse fato justifica o interesse do estudo na escala de longo prazo para esse problema. Diante desse fato, o método QSS foi desenvolvido [6, 7, 9, 10, 11], salientando sua vantagem de reduzir o esforço computacional quando comparado a métodos tradicionais que consideram a análise em conjunto de todas as dinâmicas. Supondo válida a decomposição em escalas de tempo das dinâmicas do sistema elétrico de potência, então a aproximação QSS é aceita e a instabilidade do sistema elétrico de potência pode ser decomposta em vários cenários bem definidos.

Escala de Tempo	Componentes do sistema	Carga
Longo Prazo	Geração horária	Cíclica
Médio Prazo	Comutadores Sob Carga (OLTC), Limitadores de Sobre Excitação (OXL), Capacitores/Indutores Chaveados, Controle Secundário de Tensão, ...	Termostáticas
Transitório	Geradores, Regulador de Tensão (AVR), Compensador Estático (SVC), Reguladores HVDC, ...	Motores de Indução
Instantâneo	Rede	Estáticas

Tabela 3.1: Dinâmicas do sistema elétrico de potência em relação às escalas de tempo

Para ilustrar a natureza das escalas de tempo atuando na dinâmica de um sistema elétrico de potência, considere a Figura 3.1 e o sistema de potência (Σ_e) (2.30) modelado no contexto das escalas de tempo. A variável " z " representa às dinâmicas rápidas que podem ser representadas pelo valor da tensão em barra (Tabela 3.1) [4, 10] e " x " a dinâmica lenta que representa uma variação lenta da carga. Inicialmente, o sistema elétrico de potência encontra-se em uma condição de equilíbrio estável S_0 e acontecem os eventos segundo a seguinte sequência:

- (1) Acontece uma grande perturbação e o sistema recupera a estabilidade ($S_0 \rightarrow S_1$).
- (2) Uma segunda perturbação acontece e o sistema elétrico de potência perde o equilíbrio de operação.
- (3) Devido a essa perda de equilíbrio, uma lenta evolução instável das dinâmicas acontece até que o sistema elétrico de potência colapse. Neste caso, a instabilidade nas dinâmicas lentas levam o sistema elétrico de potência até uma bifurcação sela-nó das dinâmicas rápidas, que originam um súbito colapso do sistema elétrico de potência.

A sequência de eventos é mostrada na Figura 3.1 mediante os gráficos das funções f e g . As duas perturbações são representadas por mudanças discretas no sistema de equações de tal forma que g muda para g_0 , g_1 e g_2 . Por simplicidade, vamos supor que f não é afetada pelas perturbações, isto é, a curva $f=0$ permanece invariante. Os pontos de equilíbrio de cada novo sistema, após cada perturbação, são os pontos de interseção das variedades de equilíbrio das dinâmicas rápidas $g_0=0$, $g_1=0$, $g_2=0$ com $f=0$.

O equilíbrio estável inicial S_0 é a interseção superior de $g_0=0$ com $f=0$. A primeira perturbação muda g_0 para g_1 e os transitórios resultantes indicados na Figura 3.1 levam rapidamente o sistema de potência para a variedade de equilíbrio das dinâmicas rápidas $g_1=0$, e então as dinâmicas lentas levam o sistema elétrico de potência até o novo equilíbrio S_1 . Por simplicidade, admite-se um tempo suficiente para recuperar a estabilidade do sistema elétrico de potência até que o ponto de equilíbrio S_1 seja atingido. Note que a primeira perturbação reduz a margem de estabilidade de tensão pois o sistema está agora mais "perto" da bifurcação sela-nó (nariz da curva PV).

A segunda perturbação muda g_1 para g_2 . As dinâmicas transitórias rapidamente levam o sistema elétrico de potência para a variedade de equilíbrio das dinâmicas rápidas $g_2=0$. Como o novo sistema com $g_2=0$ não tem pontos de equilíbrio, as dinâmicas lentas evoluem sobre a curva $g_2=0$. Na Figura 3.1, a trajetória avança na curva $g_2=0$ para à direita. Então, o sistema de potência atingirá um ponto de bifurcação sela-nó das dinâmicas rápidas, e se afastará da variedade de equilíbrio das dinâmicas rápidas $g_2=0$ com um transitório rápido que provoca o colapso do sistema. Esta perturbação é uma mudança rápida de um sistema com dois equilíbrios para outro sem equilíbrios.

Porém, se consideramos a perturbação como uma mudança gradual, o sistema passaria através de uma bifurcação sela-nó no qual os equilíbrios se unem e desaparecem [8].

Figura 3.1: Colapso de tensão devido a uma grande perturbação

3.3 Fundamentos para Análise de Estabilidade de Sistemas Elétricos de Potência em Duas Escalas de Tempo

Explorando as características de múltiplas escalas de tempo, a coexistência de dinâmicas lenta e rápida, a análise da estabilidade do sistema elétrico de potência pode ser decomposta na análise de estabilidade de dois subsistemas simplificados: os subsistemas rápido e lento [1, 2, 9]. Muitas vantagens podem ser obtidas como resultado desta decomposição. Do ponto de vista analítico, estimativas menos conservadoras da região de estabilidade e tempos críticos de abertura são usualmente obtidos e um conhecimento profundo das dinâmicas e modos instáveis do sistema elétrico de potência é adquirido [38]. Do ponto de vista numérico, o esforço computacional para análise é geralmente reduzido e os algoritmos de integração numérica tornam-se melhor condicionados.

Os engenheiros já se beneficiam do método das escalas de tempo, dividindo a análise de estabilidade do sistema de potência em análises de curto, médio e longo prazo, no entanto, a relação entre estas análises não é clara. A análise de estabilidade de curto prazo geralmente emprega um modelo simplificado para o sistema de potência e não pode garantir a estabilidade no médio ou longo prazo. Por outro lado, a análise de estabilidade no médio ou longo prazo é executada com a suposição de que as variáveis rápidas, ou, equivalentemente, as variáveis de curto prazo são estáveis. Consequentemente, há uma lacuna entre a análise de estabilidade de curto e longo prazo. Em particular, não há garantia de que a combinação de uma análise de estabilidade

dissociada na faixa de curto e médio prazo possa ser conclusiva para a estabilidade do modelo original do sistema de potência [36].

Na análise da estabilidade de tensão, por exemplo, diferentes mecanismos de instabilidade podem surgir como consequência da coexistência de dispositivos lentos e rápidos [1, 2]. Os problemas de estabilidade de tensão geralmente estão associados a dinâmicas lentas e o modelo QSS é usualmente empregado para estudar esse problema. No entanto, problemas de estabilidade de tensão podem ser gatilhados por perturbações nas variáveis rápidas e problemas de estabilidade transitória podem coexistir com problemas de estabilidade de tensão [38].

O algoritmo proposto integra a análise de estabilidade de curto e médio prazo em um único algoritmo, que tem a análise de estabilidade transitória e a análise QSS como casos particulares. Três modos instáveis são identificados automaticamente pelo algoritmo: (i) modos instáveis associados com a dinâmica rápida, (ii) modos instáveis associados com a dinâmica lenta e (iii) bifurcação do ponto de equilíbrio rápido induzido pela evolução da dinâmica lenta. Além disso, o algoritmo indica claramente a sequência de comutação necessária entre a análise rápida e lenta, acelerando a avaliação da estabilidade de modelos de sistemas elétricos de potência em duas escalas de tempo e evitando abordagens heurísticas, normalmente empregadas na literatura, para alternar entre a simulação QSS e o modelo de simulação completa [39].

Nesta seção, um algoritmo geral para análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência que decompõe a análise de estabilidade de um sistema elétrico de potência na análise de estabilidade de dois subsistemas o subsistema rápido e lento é proposto. Além disso, os fundamentos do algoritmo em escalas de tempo proposto serão estabelecidos à luz da teoria dos sistemas singularmente perturbados e da teoria de região de estabilidade apresentados no Cap. 2.

3.3.1 Algoritmo Geral para a Decomposição da Análise de Estabilidade do Sistema Elétrico de Potência em Duas Escalas de Tempo

Nesta seção, um algoritmo geral que decompõe a análise da estabilidade dos sistemas elétricos de potência em escalas de tempo é proposto, seus fundamentos serão discutidos na seção seguinte. Após uma grande perturbação, várias operações de comutação podem ocorrer pela atuação dos dispositivos de controle ou proteção. Após cada comutação, a topologia da rede muda e um "novo sistema dinâmico" é originado. Suponha que cada novo sistema dinâmico possa ser modelado na forma de um sistema em escalas de tempo (Σ_ϵ) (2.30) e decomposto em subsistemas, lento (Σ_0) (2.34) e uma família de subsistemas rápidos ($\Pi_F(\mathbf{x})$) (2.36).

Figura 3.2: Diagrama conceitual de análise de estabilidade pelo método das escalas de tempo

Os principais Blocos do algoritmo proposto para a decomposição da análise de estabilidade em escalas de tempo, estão apresentados na Figura 3.2. Nessa figura, a análise de cada "novo sistema dinâmico", originado após cada comutação, é representado pelos grandes retângulos pontilhados U_1 , U_2 , ..., o sistema pré-falta é representado por U_0 .

Dada uma falta ou perturbação, o algoritmo começa com a análise do subsistema rápido do primeiro sistema dinâmico U_1 . Para cada novo sistema dinâmico U_j , o algoritmo começa sempre pela análise do subsistema rápido no Bloco 1. Em caso determine-se a estabilidade do subsistema rápido, o algoritmo prossegue para a análise da estabilidade do subsistema lento no Bloco 2. Se o subsistema lento também é estável, então o algoritmo prossegue para a análise da comutação dos equipamentos de controle ou proteção do sistema no Bloco 5. Embora a estabilidade dos subsistemas rápido e lento esteja garantida, a estabilidade do sistema original em escalas de tempo (Σ_ϵ) só pode ser garantida via teoria de sistemas singularmente perturbados se não ocorrerem mais ações de comutação.

No Bloco 5, a existência de ações de comutação é verificada. Se não houver ações de comutação, então a análise é encerrada com a conclusão de que o sistema original em escalas de

tempo (Σ_e) é estável. Caso contrário, a topologia do sistema muda e o algoritmo prossegue para a análise de estabilidade do novo sistema dinâmico U_{j+1} . Se os subsistemas, rápido ou lento, são classificados como instáveis nos correspondentes Blocos 1 ou 2, em seguida o algoritmo prossegue para a análise de comutação nos Blocos 3 ou 4. Caso não haja comutação, a análise é encerrada com a conclusão de que o subsistema rápido ou lento e também o sistema original em escalas de tempo (Σ_e) são instáveis. Se ocorrer comutação, o algoritmo procede para a análise de estabilidade do sistema dinâmico U_{j+1} , e o mesmo procedimento é repetido.

A seguir, será feita uma descrição em detalhes de cada um dos principais Blocos da Figura 1. Os detalhes da análise de estabilidade do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x})$) feito nos Blocos 1 e 3 são apresentados na Figura 3.3, enquanto os detalhes da análise de estabilidade do sistema lento (Σ_0) feito nos Blocos 2 e 4 são apresentados na Figura 3.4. A Figura 3.5 descreve o procedimento para a análise da comutação dos dispositivos no Bloco 5. Suponha que o sistema dinâmico U_j está sob análise e seja $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ a condição inicial do sistema U_j . O ponto inicial $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ pode ser tanto o estado pré-perturbação ou o ponto de equilíbrio pré-falta, quando $j=1$, ou determinado pelo ponto final da trajetória do sistema anterior U_{j-1} , no tempo de comutação t_j .

Figura 3.3: Diagrama conceitual de análise do subsistema rápido

No Bloco 1, a análise de estabilidade do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x}_0)$) é dividida em duas tarefas principais, ver Figura 3.3. Na primeira, a existência de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável $\mathbf{z}_{ef}^f$ do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x}_0)$) é verificada. Se existir, então o algoritmo verifica, se a

condição inicial do subsistema rápido $\mathbf{z}_0$ está dentro da região de estabilidade $\mathbf{A}_F(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_{ef}^f)$ do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x}_0)$). Se ambas verificações resultam positivas, então o subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x}_0)$) é estável e o algoritmo prossegue para a análise do subsistema lento no Bloco 2.

Figura 3.4: Diagrama conceitual de análise do subsistema lento

Figura 3.5: Diagrama conceitual da análise da atuação de equipamentos de controle ou proteção

O Bloco 2 verifica a estabilidade do subsistema lento (Σ_0). Este bloco é atingido só quando o subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x}_0)$) é classificado como estável. O Bloco 2 também é dividido em duas tarefas principais, ver Figura 3.4. Se um ponto de equilíbrio assintoticamente estável ($\mathbf{x}_{eq}^s, \mathbf{z}_{eq}^s$) do subsistema lento (Σ_0) existe e se o ponto inicial da trajetória do sistema lento (Σ_0), ou seja, o ponto

de equilíbrio do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x}_0)$) ($\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_{eq}^s$) está no interior da região de estabilidade $A_0(\mathbf{x}_{eq}^s, \mathbf{z}_{eq}^s)$ do subsistema lento (Σ_0), então o subsistema lento (Σ_0) é classificado como estável.

Neste ponto, se as análises de estabilidade dos subsistemas rápido ($\Pi_F(\mathbf{x}_0)$) e lento (Σ_0) resultam positiva, então podemos concluir que a condição inicial ($\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0$) está dentro da região de estabilidade $A_\varepsilon(\mathbf{x}_{eq}^s, \mathbf{z}_{eq}^s)$ do ponto de equilíbrio assintoticamente estável ($\mathbf{x}_{eq}^s, \mathbf{z}_{eq}^s$) do sistema original em escalas de tempo (Σ_ε) para ε suficientemente pequenos e a análise segue para o Bloco 5, ver Figura 3.5. No Bloco 5, o algoritmo verifica a existência da atuação dos dispositivos de controle ou proteção. Se nenhuma atuação adicional for detectada, então a análise é encerrada com a conclusão de que o sistema original em escalas de tempo (Σ_ε) é estável.

Caso alguns dos subsistemas (rápido ($\Pi_F(\mathbf{x}_0)$) ou lento (Σ_0)) seja classificado como instável nos Blocos 1 ou 2, a existência da atuação de dispositivos de controle ou proteção, tais como a abertura de disjuntores ou comutação de capacitores, é verificada. Caso nenhuma operação de comutação exista, o cenário instável não pode ser revertido e a análise é encerrada com a conclusão de que o sistema original em escalas de tempo (Σ_ε) é instável. Além disso, o algoritmo identifica se o modo instável está associado com a dinâmica rápida ou lenta. Caso ocorra operação de comutação, a trajetória do subsistema correspondente é avaliada até o tempo de comutação t_{j+1} nos Blocos 3, 4 ou 5. Neste momento, a condição inicial para a análise do novo sistema U_{j+1} é determinada e o algoritmo prossegue para a análise do subsistema rápido do próximo sistema dinâmico U_{j+1} , isto é, a estabilidade do sistema dinâmico originado após a comutação.

Se alguma operação de comutação é detectada na análise do Bloco 4, então o subsistema lento (Σ_0) será integrado até o tempo de comutação t_{j+1} . A trajetória do subsistema lento (Σ_0) ao longo do conjunto de restrições Γ é composto por pontos de equilíbrio da família dos subsistemas rápidos ($\Pi_F(\mathbf{x})$). De acordo com o Teorema de Tikhonov [8], essa trajetória é uma boa aproximação da trajetória do sistema original em escalas de tempo (Σ_ε) se esses pontos de equilíbrio são exponencialmente estáveis uniformemente com relação à variável $\mathbf{x}$ lenta.

A estabilidade dos pontos de equilíbrio dos subsistemas rápidos ($\Pi_F(\mathbf{x})$) ao longo da trajetória do subsistema lento (Σ_0) deve ser monitorada no Bloco 4. A variável lenta $\mathbf{x}$ é um parâmetro do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x})$) e bifurcações podem ocorrer como consequência de variações de $\mathbf{x}$. Estas bifurcações podem originar o desaparecimento do ponto de equilíbrio do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x})$), devido, por exemplo, a uma bifurcação sela-nó, ou a perda da propriedade de estabilidade do ponto de equilíbrio do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x})$), devido por exemplo, a uma bifurcação de Hopf. Estas bifurcações são um sinal do começo de um comportamento imprevisível do sistema e

quando forem detectados, conclui-se que o modelo do sistema original (Σ_ϵ) em escalas de tempo é instável.

O algoritmo proposto é geral e conceitual, portanto, independente da sua implementação numérica. Diferentes abordagens podem ser utilizadas para a avaliação da estabilidade nos Blocos 1 e 2. A abordagem clássica de estabilidade seria a integração numérica das equações diferenciais dos subsistemas rápido e lento. Outra abordagem seria o emprego de métodos diretos, em particular, os métodos TTS CUEP [40] e TTS BCU [41] são métodos diretos para a análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência especialmente concebidos para aproveitar as vantagens dos modelos em escalas de tempo do sistema elétrico de potência.

Neste capítulo, a abordagem clássica, baseada na integração numérica das equações diferenciais, será empregada para testar o algoritmo proposto em pequenos sistemas elétricos de potência na Seção 3.5. É importante salientar que a integração numérica do sistema original em escalas de tempo (Σ_ϵ) não é necessária, sendo suficiente uma sequência de integrações numéricas dos subsistemas rápido ($\Pi_F(\mathbf{x})$) e lento (Σ_0). Esta característica do algoritmo proposto tem a vantagem de acelerar a análise, pela seleção adequada de passos de tempo de integração para os subsistemas lento (Σ_0) e rápido ($\Pi_F(\mathbf{x})$).

A análise de estabilidade transitória é um caso particular deste algoritmo e está incluída nos Blocos 1 e 3. Na análise de estabilidade transitória, admite-se que o sistema em falta é instável e a avaliação da estabilidade do subsistema rápido de U_1 não é realizada. A verificação da estabilidade do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x})$) pós-falta (sistema U_2) é a principal tarefa na análise de estabilidade transitória. O método QSS [1, 9] é também um caso particular deste algoritmo geral. No algoritmo QSS, admite-se que os subsistemas rápidos ($\Pi_F(\mathbf{x})$) são sempre estáveis, e a verificação da estabilidade dos equilíbrios rápidos ao longo da trajetória do subsistema lento (Σ_0) no Bloco 4 não é geralmente realizada. Na verdade, os resultados do método QSS coincidem com o algoritmo proposto quando todas as avaliações de estabilidade para os subsistemas rápidos ($\Pi_F(\mathbf{x})$) nos Blocos 1 e 4 resultem positivas.

3.3.2 Hipóteses e Teoremas Fundamentais para Análise de Estabilidade do Sistema Elétrico de Potência em Duas Escalas de Tempo

Nesta seção, os fundamentos da decomposição da análise de estabilidade em escalas de tempo proposta no algoritmo da Figura 3.2 serão desenvolvidos. A decomposição da análise de estabilidade de sistemas singularmente perturbados em escalas de tempo não é nova. Funções de Lyapunov compostas, que são somas ponderadas de funções de Lyapunov do subsistema lento e

rápido, muitas vezes são utilizados para estudar a estabilidade do sistema original usando as informações da estabilidade dos subsistemas lento e rápido [42]. Funções de Lyapunov vetoriais é uma outra abordagem [43]. Neste trabalho de pesquisa, outra abordagem será seguida para o estudo das relações globais entre a região de estabilidade do sistema singularmente perturbado com as regiões de estabilidade dos subsistemas lento e rápido.

Os fundamentos do algoritmo proposto são estabelecidos em duas etapas. Em primeiro lugar, será estabelecida uma relação entre os pontos de equilíbrio do sistema singularmente perturbado (Σ_ϵ) e aqueles dos subsistemas rápido ($\Pi_F(\mathbf{x})$) e lento (Σ_0). Então, explorando a teoria dos sistemas singularmente perturbados [8] e teoria de região de estabilidade [25], uma relação dinâmica entre as regiões de estabilidade do sistema singularmente perturbado (Σ_ϵ) e dos subsistemas rápido ($\Pi_F(\mathbf{x})$) e lento (Σ_0) será obtida.

No algoritmo proposto na Seção 3.3.1, a busca de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema singularmente perturbado (Σ_ϵ) divide-se na busca dos pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis dos subsistemas lento (Σ_0) e rápido ($\Pi_F(\mathbf{x})$) (Blocos 1 e 2). As justificativa para essa divisão está baseada em uma relação entre os pontos de equilíbrio do sistema singularmente perturbado (Σ_ϵ) com aqueles dos subsistemas rápido ($\Pi_F(\mathbf{x})$) e lento (Σ_0).

O **Lema 2.1** (vide Capítulo 2, Seção 2.4.1), proposto em [24], estabelece uma relação entre os tipos dos pontos de equilíbrio hiperbólico dos subsistemas lento (Σ_0) e rápido ($\Pi_F(\mathbf{x})$) com o tipo dos pontos de equilíbrio do sistema original em escalas de tempo (Σ_ϵ). Pelo **Lema 2.1**, concluímos que se o ponto de equilíbrio $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ encontra-se na componente Γ_i de tipo k de Γ , então $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ é um ponto de equilíbrio de tipo k do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x}^*)$). Por conseguinte, o **Lema 2.1** implica que o tipo do ponto de equilíbrio hiperbólico do sistema original em escalas de tempo (Σ_ϵ) é a soma dos tipos dos pontos de equilíbrio dos subsistemas lento (Σ_0) e rápido ($\Pi_F(\mathbf{x}^*)$). Por outro lado, como consequência do **Lema 2.1**, temos os seguintes dois corolários.

Corolário 3.1

Se todos os pontos de equilíbrio do subsistema lento (Σ_0) são hiperbólicos, então cada ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema singularmente perturbado (Σ_ϵ) pertence a uma componente estável Γ_s de Γ , para ϵ suficientemente pequeno.

Corolário 3.2

Seja $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável hiperbólico do subsistema lento (Σ_0) na componente estável (tipo zero) Γ_s de Γ , então $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável hiperbólico do sistema singularmente perturbado (Σ_ϵ) para ϵ suficientemente pequeno.

O **Corolário 3.1** afirma que a existência de uma componente estável Γ_s de Γ é uma condição necessária para a existência de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema singularmente perturbado (Σ_ϵ) . Considerando, que $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do subsistema rápido $(\Pi_F(\mathbf{x}^*))$ se e somente se $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ encontra-se na componente estável Γ_s de Γ , então a existência de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do subsistema rápido $(\Pi_F(\mathbf{x}^*))$ garante a existência de uma componente estável Γ_s de Γ . Portanto, a conclusão da existência de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do subsistema rápido na análise do Bloco 1 da Figura 3.3 garante a existência de uma componente estável Γ_s de Γ .

A partir das equações (Σ_ϵ) (2.30) e (Σ_0) (2.34), conclui-se que os sistemas (Σ_ϵ) e (Σ_0) têm os mesmos pontos de equilíbrio, ou seja, um ponto $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ é um equilíbrio de (Σ_0) se e somente se é um ponto de equilíbrio do sistema singularmente perturbado (Σ_ϵ) para todo $\epsilon > 0$.

O **Corolário 3.2** indica que se $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável hiperbólico do subsistema lento (Σ_0) na componente estável Γ_s de Γ , então $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ também é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável hiperbólico do sistema singularmente perturbado (Σ_ϵ) para ϵ suficientemente pequeno. Por conseguinte, a conclusão da existência de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do subsistema lento (Σ_0) na análise do Bloco 2 da Figura 3.4 assegura a existência de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema singularmente perturbado (Σ_ϵ) para ϵ suficientemente pequeno.

A análise de estabilidade do sistema em escalas de tempo (Σ_ϵ) é também dividida na análise da estabilidade dos subsistemas rápido $(\Pi_F(\mathbf{x}))$ e lento (Σ_0) . Os fundamentos para esta divisão baseiam-se nos resultados do **Teorema 3.1**, que estabelece a relação entre a região de estabilidade do sistema em escalas de tempo (Σ_ϵ) com as regiões de estabilidade dos subsistemas lento (Σ_0) e rápido $(\Pi_F(\mathbf{x}))$. Resultados semelhantes também foram obtidos em [44]. O **Teorema 3.1** estabelece que a conclusão de estabilidade do subsistema rápido $(\Pi_F(\mathbf{x}))$ na análise do Bloco 1, mais a conclusão de estabilidade do subsistema lento (Σ_0) implica estabilidade do sistema singularmente perturbado original (Σ_ϵ) para ϵ suficientemente pequeno. Para esse propósito, as hipóteses (H1)-(H3) (vide Capítulo 2, Seção 2.1.1) são estabelecidas sobre os sistemas dinâmicos em estudo.

Teorema 3.1: Estabilidade dos subsistemas rápido $(\Pi_F(\mathbf{x}))$ e lento (Σ_0) implica estabilidade do sistema singularmente perturbado original (Σ_ϵ)

Considere o sistema singularmente perturbado (Σ_ϵ) satisfazendo as condições (H1)-(H2) para ϵ suficientemente pequeno. Seja $(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do subsistema lento (Σ_0) na componente estável Γ_s de Γ . Se $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}^*) \in \Gamma_s$ pertence à região de estabilidade $\mathbf{A}_0(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s) \subset \Gamma_s$

do subsistema lento (Σ_0) e $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ pertence à região de estabilidade do subsistema rápido $A_F(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}^*)$ então $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ pertence à região de estabilidade $A_\varepsilon(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ do sistema singularmente perturbado (Σ_ε).

Dem.: Como $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) \in A_F(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}^*)$, isto é, $\Phi_0(\tau, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) \rightarrow (\mathbf{x}_0, \mathbf{z}^*)$ quando $\tau \rightarrow \infty$, então dado $\rho > 0$, existe um tempo $T_1(\rho) > 0$ tal que $(\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{z}}) = \Phi_0(T_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) \in B_{\rho/2}(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}^*)$. Da continuidade das soluções do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x}_0)$) com relação a seus parâmetros [8], **Teorema 2.5**, mostra-se a existência de um $\varepsilon^{**} > 0$ tal que $\Phi_\varepsilon(T_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) \in B_{\rho/2}(\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{z}}) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^{**})$. Portanto, da desigualdade triangular, $\Phi_\varepsilon(T_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) \in B_\rho(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}^*) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^{**})$, veja Figura 3.6.

Por outro lado, sabemos que $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}^*) \in A_0(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$, isto é, $\varphi_0(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}^*) \rightarrow (\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ quando $t \rightarrow \infty$. Logo, dado $v > 0$, arbitrariamente pequeno, existe um tempo $T_2 > 0$ tal que $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}) = \varphi_0(T_2, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}^*) \in B_{v/2}(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$. Como v pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, aplicando o teorema de Tikhonov para intervalo de tempo finito [8], **Teorema 2.6**, no subsistema lento (Σ_0), mostra-se a existência de um $\hat{\varepsilon} > 0$ tal que $\varphi_\varepsilon(T_2, \Phi_\varepsilon(T_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)) \in B_{v/2}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}) \quad \forall \varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon})$. Portanto, da desigualdade triangular, $\varphi_\varepsilon(T_2, \Phi_\varepsilon(T_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)) \in B_v(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s) \quad \forall \varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon})$, veja Figura 3.6.

A escolha de v suficientemente pequeno e a estabilidade exponencial de $(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ com relação ao subsistema lento (Σ_0), garante, pelo teorema de Tikhonov para tempo infinito [8], **Teorema 2.8**, que $\varphi_\varepsilon(t, \varphi_\varepsilon(T_2, \Phi_\varepsilon(T_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)))$ é limitada para $t \geq 0$ e permanece perto de $(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ para ε suficientemente pequeno. Como o sistema singularmente perturbado (Σ_ε) satisfaz as hipóteses (H1)-(H2), então $\varphi_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) \rightarrow (\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ quando $t \rightarrow \infty$ para ε suficientemente pequeno, completando a demonstração. ■

Se Blocos 1 e 2 classificam os subsistemas rápido ($\Pi_F(\mathbf{x}_0)$) e lento (Σ_0) de U_j como estáveis, então todas as condições do Teorema 3.1 são satisfeitas. Portanto, a condição inicial, isto é, o estado final do sistema anterior U_{j-1} está dentro da região de estabilidade do sistema em escalas U_j , justificando a divisão da análise de estabilidade destes blocos.

Figura 3.6: Interpretação geométrica do **Teorema 3.1**. Se $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ pertence a região de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}^*)$ do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x}_0)$) e $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}^*)$ pertence a região de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ do subsistema lento (Σ_0), então $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ pertence a região de estabilidade do sistema em escalas de tempo original (Σ_ε) para ε suficientemente pequeno.

Longe de Γ , as dinâmicas do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x})$) têm maior influência que as dinâmicas do subsistema lento (Σ_0). Na escala de tempo rápido τ , o sistema (Π_ε) pode ser visto como uma perturbação regular do subsistema rápido (Π_0), e a continuidade de soluções com relação a seus parâmetros prova que as trajetórias do sistema original (Π_ε) estão perto das trajetórias do subsistema rápido (Π_0) para ε suficientemente pequeno. Portanto, se a trajetória do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x})$) se aproxima de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do subsistema rápido na componente estável Γ_s de Γ , então a trajetória do sistema original também se aproxima da componente estável Γ_s de Γ .

A variedade Γ é um conjunto de pontos de equilíbrio da família de subsistemas rápidos ($\Pi_F(\mathbf{x})$). Na verdade, para cada $\mathbf{x}$ fixo, há um ponto de equilíbrio do sistema rápido em Γ . Se os pontos de equilíbrio dos subsistemas rápidos ($\Pi_F(\mathbf{x})$) são exponencialmente estáveis, uniformemente com relação à variável lenta $\mathbf{x}$, então perto de Γ , o teorema de Tikhonov [8] decompõe as dinâmicas do sistema em escalas de tempo (Σ_ε) nas dinâmicas dos subsistemas de dinâmicas rápidas e lentas. Assim, a estabilidade do subsistema rápido é uma hipótese do teorema de Tikhonov [8], que é essencial para garantir a decomposição das trajetórias em escalas de tempo nas proximidades de Γ . Portanto, antes de verificar a estabilidade do subsistema lento, a estabilidade do sistema rápido deve ser avaliada para assegurar que:

- (i) as trajetórias se aproximam de uma componente estável e
- (ii) as trajetórias permaneçam perto de Γ enquanto as dinâmicas lentas evoluem.

Isso explica porque a estabilidade do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x})$) deve ser avaliada antes da estabilidade do subsistema lento (Σ_0) no algoritmo da Figura 3.2. Também explica porque devemos avaliar a estabilidade local dos pontos de equilíbrio do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x})$) ao longo da solução do sistema lento no Bloco 4.

A avaliação da estabilidade no Bloco 4 pode ser feita pela análise de estabilidade local dos pontos de equilíbrio dos subsistemas rápidos ($\Pi_F(\mathbf{x})$). A trajetória do subsistema lento (Σ_0) desloca-se em Γ , que é composta pelos pontos de equilíbrio da família dos subsistemas rápidos ($\Pi_F(\mathbf{x})$). Ao longo desta trajetória, o ponto de equilíbrio do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x})$) pode sofrer uma bifurcação local como consequência de mudanças nas variáveis lentas, que são consideradas como parâmetros pelo subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x})$). Essas bifurcações locais podem levar a mudanças na propriedade de estabilidade do ponto de equilíbrio do subsistema rápido ($\Pi_F(\mathbf{x})$), sinalizando o início de um comportamento imprevisível nas dinâmicas rápidas. No algoritmo proposto, a análise é terminada sempre na ocorrência destes eventos com a conclusão de que o sistema é instável.

3.4 Relação entre as Análises de Estabilidade Convencionais e a Metodologia em Escalas de Tempo Proposta

O problema de estabilidade de sistemas elétricos de potência é único, porém, devido a sua complexidade, é usualmente dividido em subproblemas mais simples [3]. Entre os principais problemas de estabilidade temos: (i) estabilidade do ângulo do rotor, (ii) estabilidade de frequência e (iii) estabilidade de tensão [4]. Em cada subproblema são considerados critérios adicionais como a intensidade da perturbação (pequena ou grande) e o período de análise, estabelecendo assim simplificações adicionais [4]. O intuito de classificar os problemas de estabilidade é simplificar as tarefas de análise de estabilidade, enfocando-as na análise de um grupo determinado de dinâmicas, admitindo que durante o período de análise as outras dinâmicas permanecem estáveis ou não são influenciadas por aquelas que são consideradas de interesse.

Entretanto, esse tipo de hipótese pode levar a conclusões erradas pois, em geral, a evolução de uma dinâmica lenta (ou de médio prazo) pode induzir instabilidade nas dinâmicas estáveis rápidas (ou transitórias) e vice-versa [4]. Uma abordagem mais abrangente da análise de estabilidade de tensão em sistemas elétricos de potência devido a grandes perturbações é realizada mediante a análise transitória e de médio prazo [1, 4]. Nessas análises o critério das escalas de tempo é claramente empregado, analisando as dinâmicas segundo sua velocidade de evolução em períodos de tempo determinados. A seguir é realizada uma discussão das análises de estabilidade (transitória e de médio prazo) convencionais para problemas de estabilidade de tensão devido a grandes perturbações e sua relação com o algoritmo geral de estabilidade proposto na Seção 3.3.

3.4.1 Análise de Estabilidade Transitória (Escala Rápida)

Estabilidade de tensão na escala transitória ou de curto prazo envolve dinâmicas rápidas agindo, tais como motores de indução, cargas eletronicamente controladas, conversores HVDC entre outras. O período de estudo de interesse é da ordem de vários segundos e a análise requer a solução adequada de equações diferenciais do sistema; semelhante à análise de estabilidade de ângulo do rotor das máquinas síncronas [4]. Entretanto, a modelagem dinâmica das cargas é em geral essencial, e em contraste com a estabilidade de ângulo de rotor, curtos-circuitos perto das cargas têm grande importância. Apesar disso, o termo estabilidade transitória de tensão não é usado em geral na literatura [4].

No caso de análise de estabilidade de tensão na escala rápida, as dinâmicas lentas são consideradas como constantes durante todo o período de análise, isto é, o sistema elétrico de potência é representado por $(\Pi_F(\mathbf{x}))$ (2.36), e assim a análise de estabilidade transitória

convencional é identificada no algoritmo geral proposto na Seção 3.3, segundo a Figura 3.7, que ilustra o processo de análise de estabilidade das dinâmicas rápidas após a ocorrência de uma perturbação.

Figura 3.7: Relação entre a análise de estabilidade transitória convencional e o algoritmo proposto

Quando se admite que as dinâmicas lentas são estáveis em todo o período, isso implica que a evolução das dinâmicas rápidas não influencia as dinâmicas lentas e conclusões erradas acerca da estabilidade do sistema elétrico de potência podem ser obtidas. A Figura 3.7 evidencia o caso em que o sistema elétrico de potência pode colapsar devido a uma instabilidade na dinâmica lenta induzida pela instabilidade nas dinâmicas rápidas. Mais precisamente, pela análise de estabilidade na escala rápida do sistema elétrico de potência, para um período de tempo curto de análise, não é possível afirmar a estabilidade do sistema elétrico de potência, pois a evolução instável da dinâmica lenta pode levar o sistema de potência ao colapso em um tempo maior ao analisado.

3.4.2 Análise de Estabilidade de Médio ou Longo Prazo (Escala Lenta)

O estudo da estabilidade de tensão na escala de médio ou longo prazo envolve a análise de equipamentos de atuação lenta tais como o OLTC dos transformadores, cargas termostáticas controladas, o OXL dos geradores, entre outros. Além dos curtos-circuitos, neste caso o incremento elevado de carga por um período de tempo longo pode ser também considerada como uma perturbação. O período de estudo de interesse neste caso pode se estender até vários minutos ou horas, e simulações de longo prazo são necessárias na análise do desempenho do sistema dinâmico

[4]. A estabilidade de tensão neste caso é geralmente relacionada com a falta do fornecimento de energia aos equipamentos, em vez da intensidade da perturbação inicial.

Figura 3.8: Relação entre a análise de estabilidade de médio prazo convencional (método QSS) e o algoritmo proposto

Os problemas de instabilidade de tensão na escala de longo prazo são devidos à perda do equilíbrio (quando por exemplo as cargas tentam restabelecer sua potência), a um ponto de operação pós-falta com instabilidade na dinâmica lenta, ou a uma trajetória em falta abandonando a região de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável pós-falta (i.e., quando a ação corretiva é realizada com demora). Usualmente neste caso, técnicas de análise estática são usadas para a estimação das margens de estabilidade, incluindo análises de sensibilidade e análises de múltiplas condições do sistema em um grande número de cenários. Essas análises são complementadas com simulação QSS numérica do sistema elétrico de potência [4].

No caso da análise de estabilidade de tensão na escala de longo prazo, admite-se que as dinâmicas rápidas já atingiram seus correspondentes equilíbrios e o sistema elétrico de potência é representado por (Σ_0) (2.34). Esse modelo é conhecido na literatura como modelo QSS do sistema elétrico de potência [1]. A Figura 3.8 ilustra a sequência de análise convencional nesta escala de tempo observa-se os Blocos 1 e 3 são desconsiderados na análise. Isso pode levar a conclusões erradas, pois instabilidades nas dinâmicas rápidas podem ser induzidas pela evolução das dinâmicas lentas. Bifurcações sela-nó e Hopf podem ocorrer no subsistema rápido, além disso, após a atuação de cada equipamento, a estabilidade do subsistema rápido precisa ser verificada, pois ao

mudar o sistema dinâmico, pelo acionamento de um equipamento lento, instabilidades na escala rápida podem ocorrer, ocorrência que não será detectada na análise convencional QSS.

O método de análise QSS é usado frequentemente como ferramenta de análise de estabilidade de tensão na escala de longo prazo [1, 4], pois explora as características de escala de tempo dos modelos do sistema elétrico de potência para obter uma aproximação do comportamento do sistema elétrico de potência sobre determinadas condições. Uma forma prática de ver a aproximação QSS, consiste em substituir as dinâmicas de curto prazo por sua correspondente equação de equilíbrio ou simplesmente zerando as derivadas destas dinâmicas [1, 4], resultado o sistema de equações (Σ_0) (2.34), que é preferido para a análise de longo prazo com relação ao sistema original (Σ_ϵ) (2.30) devido à redução do esforço computacional. Esta redução ocorre pelo uso de grandes passos de integração na simulação em comparação com os passos de integração necessários para integrar o correspondente modelo do sistema original (Σ_ϵ) (2.30).

O método QSS é uma ferramenta de análise dinâmica do sistema elétrico de potência que consegue grande redução do esforço computacional (ou do tempo de simulação) em relação a uma simulação de dinâmica completa, pois pode empregar passos de integração maiores devido à ausência de transitórios (ou dinâmicas rápidas). Porém, o incremento do passo de integração deve ser feito cuidadosamente, pois cada vez que isto acontece o erro entre a simulação completa e a QSS é maior podendo levar a resultados errados [11].

Segundo KURITA, A. et al [6], o método de simulação de dinâmica completa e o método QSS se complementam. O primeiro é usado como referência devido ao emprego de modelos detalhados (ou completos) dos equipamentos do sistema elétrico de potência, em casos de simulações de cenários especiais nos quais o tipo de perturbação é desconhecido a priori ou quando há risco de perda de estabilidade do subsistema de curto prazo (ou durante o período transitório). Por outro lado, quando a análise é enfocada nas dinâmicas de longo prazo, o método QSS apresenta muitas vantagens na análise de sistemas de grande porte devido à redução do tempo de simulação.

Em [6] são encontrados os primeiros relatos acerca de um software com base no método QSS. Embora este seja um artigo de divulgação do software “EXSTAB”, importantes comentários sobre as vantagens e deficiências do método podem ser encontrados. A seguir, apresenta-se um resumo das características do método QSS e algumas questões em aberto que se apresentam na literatura.

- a) Em [5, 6, 7, 10, 11, 45], mostra-se que o método QSS tem como maior vantagem o menor tempo de simulação quando comparado a uma simulação dinâmica completa, com bons

resultados e estabilidade numérica das aproximações algébricas das equações das máquinas e cargas dinâmicas, mesmo para sistemas muito estressados.

- b) Em [6], propõem-se testes de máxima taxa de variação de tensão discreta e contínua, margens de potência ativa e reativa, e excessiva variação do ângulo da máquina para avaliar a validade da aplicação do método QSS. Eles consideram que quando estes limites pré-estabelecidos são atingidos, então uma forte influência das dinâmicas rápidas sobre o comportamento do sistema elétrico de potência está presente e, portanto suas equações diferenciais não podem ser substituídas por suas correspondentes equações de equilíbrio.

Em [10], propõe-se a análise da matriz jacobiana do subsistema rápido, estabelecendo que durante uma simulação QSS:

- (i) A singularidade da matriz jacobiana (ou o ponto de bifurcação sela-nó) do subsistema rápido implica na impossibilidade do uso do método QSS, pois isto significa que a decomposição em escalas de tempo perdera sua validade.
 - (ii) Uma bifurcação de Hopf (autovalores imaginários da matriz jacobiana) do subsistema rápido também sinaliza um limite de aplicação do método QSS. Isto indicaria possível perda de estabilidade do subsistema rápido devido ao aparecimento de oscilações das dinâmicas rápidas. Sua detecção só pode ser feita via análise dos autovalores em janelas de tempo durante a simulação QSS.
- c) Em [6], descreve-se como os métodos de dinâmica completa e QSS podem ser comutados entre eles com a finalidade de reduzir o tempo de simulação (ou análise). Considera-se que a análise transitória tem um tempo máximo de 5s geralmente. Após esta fase, a simulação pode mudar para um algoritmo QSS ou voltar a uma simulação de dinâmica completa se os critérios descritos em (b) forem verificados.

Em [46], estuda-se o uso comutado do método QSS e a simulação de dinâmica completa para o caso restrito de análise de estabilidade de tensão, estabelecendo que o instante para comutar de uma simulação de dinâmica completa para uma de tipo QSS deve ser no momento em que as oscilações de frequência sejam nulas ou pequenas. Embora explorem a aplicação deste critério num sistema real de grande porte, exploram uma condição empírica que não se pode generalizar para qualquer sistema elétrico de potência. Além disso, em [10] são estabelecidos critérios para validar a aplicação da decomposição em escalas de tempo relacionando os pontos de bifurcação e singularidades dos subsistemas rápido e lento com o sistema em escalas de tempo original, então comutar para uma simulação de dinâmica completa quando o sistema dinâmico está perto desses pontos característicos não tem sentido pois isso indica um alto grau de degradação do sistema elétrico de potência e resultados errados podem ser obtidos.

- d) Em [47] é feita uma extensão do método QSS para incluir dinâmicas de frequência de longo prazo na análise, onde oscilações do ângulo do rotor do gerador síncrono, com períodos da ordem dos 25s após uma perturbação, são estudados. Para isto, modelam-se os reguladores de velocidade e turbinas dos geradores e apresentam-se simulações de um sistema elétrico de potência real. Embora os resultados obtidos não sejam satisfatórios, e precisem agregar blocos adicionais específicos ao caso em estudo para compensar atrasos da resposta QSS, é um trabalho preliminar que mostra a versatilidade do método.
- e) Em [48] é feita uma extensão do método QSS para análises de oscilações inter-área lentas. Analisam um sistema de médio porte e concentram-se principalmente na modelagem do AVR e regulador de velocidade de uma turbina a vapor, devido a sua grande influência sobre os modos inter-área. Resultados aceitáveis foram obtidos, embora a eliminação dos modos eletromecânicos locais no modelo QSS destes equipamentos tenha contribuído para uma sobre-estimação do amortecimento do sistema.
- f) Em [6], relata-se o uso do método QSS na geração de curvas Q-V como parte do software EXSTAB. Em [49, 50], o método QSS é empregado em conjunto com o método da continuação (*Continuation-based Quasi Steady State CQSS*). A aplicação da técnica de parametrização na simulação QSS proporciona boa convergência quando o sistema se aproxima de pontos de bifurcação do sistema.

O método QSS é um caso particular do algoritmo geral para análise de estabilidade no contexto das escalas de tempo proposto na Seção 3.3. O algoritmo proposto permite conhecer em todo momento a interação entre as dinâmicas rápidas e lentas. Casos de instabilidade nas dinâmicas rápidas (análise transitória) devido a evolução da dinâmica lenta (análise em médio prazo) e vice-versa podem ser detectadas.

3.5 Aplicações Numéricas

Nesta seção, uma aplicação em sistemas elétricos de potência de pequeno porte do algoritmo para análise de estabilidade em duas escalas de tempo proposto na Seção 3.3 será apresentada. A simulação numérica dos subsistemas rápido e lento será utilizada como ferramenta de análise na avaliação da estabilidade.

3.5.1 Sistema Elétrico de Potência de quatro barras (SEP4B)

O sistema de potência de quatro barras apresentado na Figura 3.9 será empregado para mostrar a aplicação do algoritmo da Figura 3.2, proposto na Seção 3.3.1, para a análise de estabilidade de um sistema elétrico de potência em escalas de tempo. O conjunto de equações algébrico diferenciais que modelam o sistema elétrico de potência é mostrado em (3.1) na escala de tempo rápida determinada em segundos.

Figura 3.9: Sistema barra infinita, gerador modelo clássico e carga dinâmica. Os parâmetros do sistema são: $P_m=0.54\text{pu}$, $M=0.0146\text{s}$, $D=0.01$, $E_g=1.0861\text{pu}$, $x_g=0.5\text{pu}$, $x_{LG}=0.7\text{pu}$, $x_{LL1}=0.8\text{pu}$, $x_{LL2}=0.48\text{pu}$, $x_c=9\text{pu}$, $E_\infty=0.98\text{pu}$, $\theta_\infty=0$, $T_L=30\text{s}$, $P_0=0.54\text{pu}$, $\varepsilon=1/T_L$.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} & \frac{dx}{d\tau} = \varepsilon(P_0 - P_L(x, V_3, r_k)) \quad \text{com} \quad P_L(x, V_3, r_k) = x + P_0 r_k^2 V_3^2 \quad (3.1-1) \\ & \frac{d\delta}{d\tau} = \omega \quad (3.1-2) \\ & \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{1}{M} \left(P_m - \frac{E_g V_1}{x_g} \sin(\delta - \theta_1) - D\omega \right) \end{aligned} \right. \\
 & (\Pi_\varepsilon) \left\{ \begin{aligned} & 0 = V_1 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{1i} \cos \theta_{1i} + B_{1i} \sin \theta_{1i}) - \frac{E_g V_1}{x_g} \sin(\delta - \theta_1) \quad (3.1) \\ & 0 = V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{3i} \cos \theta_{3i} + B_{3i} \sin \theta_{3i}) + P_L(x, V_3, r_k) \quad (3.1-3) \\ & 0 = V_1 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{1i} \sin \theta_{1i} + B_{1i} \cos \theta_{1i}) - \frac{E_g V_1}{x_g} \cos(\delta - \theta_1) + \frac{V_1^2}{x_g} \\ & 0 = V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{3i} \sin \theta_{3i} + B_{3i} \cos \theta_{3i}) - \frac{V_3^2}{x_c} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

O sistema elétrico de potência em estudo é composto por uma barra infinita na barra 2, de tensão E_∞ fixa, uma carga dinâmica na barra 4 e um gerador síncrono na barra 1. A carga dinâmica de recomposição [1], é modelada por (3.1-1), em que P_0 é a carga na barra 4 para $t=0\text{s}$, antes da perturbação. A constante de tempo da carga T_L é grande em comparação aos outros equipamentos do sistema elétrico de potência, então $\varepsilon=1/T_L$ é pequeno, e portanto, a dinâmica x é lenta em relação às variáveis ω e δ . O gerador na barra 1 é modelado pelas equações (3.1-2), pelo modelo

clássico dos geradores [51], em que M e D são a constante de inércia e de amortecimento correspondentes, P_m é a potência mecânica, E_g é uma tensão fixa em série com a reatância transitória x_g , ω é a velocidade angular e δ é o ângulo do rotor. O transformador nas barras 3 e 4 tem um OLTC, cuja regra de controle é dada por (3.2) [1]. Finalmente, V_i e θ_i são a tensão e o ângulo nas barras do sistema elétrico de potência.

Os dispositivos de controle ou proteção que possui o sistema elétrico de potência em estudo também são classificados com relação a sua velocidade de atuação, sendo o relé de proteção de linha LL2 o único dispositivo rápido, enquanto o OLTC do transformador entre as barras 3 e 4 e a compensação shunt reativa na barra 3 os dispositivos lentos. A Tabela 3.2 mostra as três contingências a serem estudadas para o sistema elétrico de potência apresentado.

Contingência #1: cenário instável devido à ação do OLTC (dinâmicas lentas)	Parâmetros do OLTC: $r_0=1$, $\Delta r=0.025$, $T_{OLTC}=60s$, $r_k=[0.9, 1.1]$, $V_{40}=0.95pu$, $d=0.05pu$
Contingência #2: cenário instável devido às dinâmicas rápidas.	OLTC bloqueado em $r_k=1$ e abertura da linha LL2 em $t=240ms$
Contingência #3: cenário estável.	OLTC bloqueado em $r_k=1$ e abertura da linha LL2 em $t=120ms$

Tabela 3.2: Contingências a serem analisadas, sistema de potência de quatro barras

A variável r_k representa o tap do OLTC e a seguinte regra de controle é estabelecida:

$$r_{k+1} = \begin{cases} r_k + \Delta r & \text{se } V_4 < V_{40} - d \text{ e } r_k < r^{\max} \\ r_k - \Delta r & \text{se } V_4 > V_{40} + d \text{ e } r_k > r^{\min} \\ r_k & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.2)$$

O subsistema rápido pode ser facilmente obtido fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ em (3.1) e deixando fixo r_k :

$$(\Pi_0) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\delta}{d\tau} = \omega \\ \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{1}{M} \left(P_m - \frac{E_g V_1}{x_g} \sin(\delta - \theta_1) - D\omega \right) \\ 0 = V_1 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{1i} \cos \theta_{1i} + B_{1i} \sin \theta_{1i}) - \frac{E_g V_1}{x_g} \sin(\delta - \theta_1) \\ 0 = V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{3i} \cos \theta_{3i} + B_{3i} \sin \theta_{3i}) + P_L(x^*, V_3, r_k^*) \\ 0 = V_1 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{1i} \sin \theta_{1i} + B_{1i} \cos \theta_{1i}) - \frac{E_g V_1}{x_g} \cos(\delta - \theta_1) + \frac{V_1^2}{x_g} \\ 0 = V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{3i} \sin \theta_{3i} + B_{3i} \cos \theta_{3i}) - \frac{V_3^2}{x_c} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

O subsistema lento pode ser obtido mudando a escala de tempo $t=\varepsilon\tau$ e fazendo $\varepsilon\rightarrow 0$, então obtemos o seguinte modelo:

$$(\Sigma_0) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = P_0 - P_L(x, V_3, r_k) \quad \text{com} \quad P_L(x, V_3, r_k) = x + P_0 r_k^2 V_3^2 \\ 0 = \omega \\ 0 = \frac{1}{M} \left(P_m - \frac{E_g V_1}{x_g} \sin(\delta - \theta_1) - D\omega \right) \\ 0 = V_1 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{1i} \cos \theta_{1i} + B_{1i} \sin \theta_{1i}) - \frac{E_g V_1}{x_g} \sin(\delta - \theta_1) \\ 0 = V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{3i} \cos \theta_{3i} + B_{3i} \sin \theta_{3i}) + P_L(x, V_3, r_k) \\ 0 = V_1 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{1i} \sin \theta_{1i} + B_{1i} \cos \theta_{1i}) - \frac{E_g V_1}{x_g} \cos(\delta - \theta_1) + \frac{V_1^2}{x_g} \\ 0 = V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{3i} \sin \theta_{3i} + B_{3i} \cos \theta_{3i}) - \frac{V_3^2}{x_c} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Análise da contingência #1

Na Contingência #1, um curto-circuito ocorre na linha LL2, muito perto da barra 1 em $t=0$ s. A proteção de linha atua em $t=120$ ms, isolando a linha LL2 em curto-circuito. A integração numérica das equações do sistema em escalas de tempo (3.1), indica a estabilidade das dinâmicas rápidas para o tempo de atuação da proteção de linha, mas é observada uma queda lenta e progressiva das tensões nas barras devido à influência da dinâmica lenta da carga, que tenta recuperar a energia consumida, ver Figura 3.10. O OLTC atua a cada 60s tentando recuperar o nível de tensão na barra controlada 4, mas após cada acionamento do OLTC a estabilidade do sistema elétrico de potência é deteriorada, pois após cada chaveamento do OLTC a região de estabilidade do sistema elétrico de potência é reduzida, e assim o colapso do sistema acontece em $t=171.75$ s, veja Figura 3.10.

Seguindo o algoritmo da Figura 3.2, a análise de estabilidade começa com a análise do subsistema rápido do sistema dinâmico U_1 no Bloco 1. O sistema dinâmico U_1 é aquele originado quando a linha LL2 está em curto-circuito. A busca de um ponto de equilíbrio do subsistema rápido falha. Durante o curto-circuito, a tensão na barra terminal do gerador é zero e, portanto, a energia elétrica fornecida pelo gerador é zero. Assim, a potência mecânica do rotor acelera o gerador e, por conseguinte, não existem pontos de equilíbrio. A não existência de pontos de equilíbrio é típico nos casos de grandes perturbações, tais como curtos-circuitos. Na análise de estabilidade transitória, geralmente se admite que o sistema em falta é instável e a busca de pontos de equilíbrio no Bloco 1 é geralmente ignorada. Em seguida, a análise procede para o Bloco 3.

Figura 3.10: Evolução das dinâmicas do sistema original em escalas de tempo (Π_ϵ) para a Contingência #1 (SEP4B instável).

No Bloco 3, o algoritmo verifica a existência de acionamento dos dispositivos rápidos. A proteção da linha atua em $t=120\text{ms}$, isolando LL2 do sistema elétrico de potência. Logo, o subsistema rápido de U_1 é integrado numericamente até $t=120\text{ms}$. O estado final, $(\mathbf{x}_{\text{final}}^{U_1}, \mathbf{z}_{\text{final}}^{U_1}) = (x=0.0, \delta=0.6382, \omega=4.2609, \theta_1=0.2655, \theta_3=-0.1423, V_1=0.9307, V_3=0.8544)$, desta integração será o ponto inicial $(\mathbf{x}_0^{U_2}, \mathbf{z}_0^{U_2})$ para a análise do subsistema rápido do seguinte sistema dinâmico U_2 , isto é, o sistema dinâmico após a atuação da proteção da linha LL2.

A análise do sistema dinâmico U_2 começa no Bloco 1, onde a estabilidade do subsistema rápido de U_2 é avaliada. A busca de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável resulta em $(\mathbf{x}_{\text{eq}}^{\text{fast}U_2}, \mathbf{z}_{\text{eq}}^{\text{fast}U_2}) = (x=0.0, \delta=0.3481, \omega=0.0, \theta_1=0.0871, \theta_3=-0.3206, V_1=0.9636, V_3=0.8846)$. Esta tarefa é realizada por um algoritmo Newton-Raphson, que tem como estimativa inicial o ponto de equilíbrio pré-falta. A seguir o algoritmo verifica se a condição inicial $\mathbf{z}_0^{U_2}$ pertence à região de estabilidade do ponto de equilíbrio $\mathbf{z}_{\text{eq}}^{\text{fast}U_2}$ do subsistema rápido de U_2 . Esta tarefa é realizada pela integração numérica do subsistema rápido de U_2 até que sua trajetória esteja suficientemente próxima de $\mathbf{z}_{\text{eq}}^{\text{fast}U_2}$, isto é verificado pelo valor da distância (menor que $1e-6$) entre o ponto de equilíbrio e o final da trajetória do subsistema rápido. A integração numérica dos subsistemas rápidos de U_1 e U_2 é mostrada na Figura 3.11. Conclui-se que o subsistema rápido de U_2 é estável e o algoritmo prossegue com a análise de estabilidade do subsistema lento de U_2 no Bloco 2.

No Bloco 2, a existência de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o subsistema lento de U_2 é avaliada, mas esta busca falha. Sem a linha LL2, o sistema de potência não tem capacidade de transmitir a potência requerida pela carga dinâmica. Então, procedemos com a

análise do subsistema lento U_2 no Bloco 4. No Bloco 4, se verifica a atuação do OLTC em $t=60s$ ($r_k=1.025$), tentando recuperar a tensão na barra de carga 4 que está abaixo de seu valor nominal ($V_{40}=0.95pu$). O subsistema lento de U_2 é integrado numericamente até $t=60s$, começando do ponto de equilíbrio do subsistema rápido ($\mathbf{x}_{eq}^{fastU_2}, \mathbf{z}_{eq}^{fastU_2}$) como condição inicial. O tempo inicial nesta integração é tomado como o tempo final da última análise da fase lenta, que neste caso é o tempo $t=0s$, quando o sistema pré-falta U_0 é perturbado. O ponto final dessa integração ($\mathbf{x}_{final}^{U_2}, \mathbf{z}_{final}^{U_2}$) = ($x=0.1603, \delta=0.3194, \omega=0.0, \theta_1=0.0455, \theta_3=-0.5292, V_1=0.9188, V_3=0.7712$) será a condição inicial para a análise do novo subsistema rápido de U_3 , isto é, o sistema após a comutação do OLTC.

Figura 3.11: Trajetórias dos subsistemas rápidos U_1 e U_2 para a Contingência #1 (SEP4B instável).

O subsistema rápido U_3 é estável segundo a análise de estabilidade. O ponto de equilíbrio assintoticamente estável ($\mathbf{x}_{eq}^{fastU_3}, \mathbf{z}_{eq}^{fastU_3}$) = ($x=0.1603, \delta=0.3199, \omega=0, \theta_1=0.0440, \theta_3=-0.5523, V_1=0.9126, V_3=0.7551$) do subsistema rápido de U_3 é determinado e a condição inicial $\mathbf{z}_{final}^{U_3}$ pertence à região de estabilidade do equilíbrio $\mathbf{z}_{eq}^{fastU_3}$ do subsistema rápido U_3 . A análise prossegue no Bloco 2 para avaliar a existência de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do subsistema lento de U_3 .

A busca de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável falha novamente. Durante a análise do subsistema lento U_3 no Bloco 4, se verifica a inserção do capacitor na barra 3 do sistema elétrico de potência em $t=100s$. O subsistema lento de U_3 é integrado numericamente até $t=100s$, começando do ponto de equilíbrio do subsistema rápido ($\mathbf{x}_{eq}^{fastU_3}, \mathbf{z}_{eq}^{fastU_3}$) em $t=60s$. O ponto final dessa integração ($\mathbf{x}_{final}^{U_3}, \mathbf{z}_{final}^{U_3}$) = ($x=0.2373, \delta=0.3457, \omega=0.0, \theta_1=0.0561, \theta_3=-0.6840, V_1=0.8705, V_3=0.6428$) será a condição inicial para a análise do novo sistema U_4 , após a inserção do capacitor.

O subsistema rápido U_4 é estável segundo a análise de estabilidade. O ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(\mathbf{x}_{eq}^{fastU_4}, \mathbf{z}_{eq}^{fastU_4}) = (x=0.2373, \delta=0.2817, \omega=0.0, \theta_1=-0.0009, \theta_3=-0.7266, V_1=0.8914, V_3=0.7318)$ é determinado e a condição inicial $\mathbf{z}_{final}^{U_3}$ pertence à região de estabilidade de $\mathbf{z}_{eq}^{fastU_4}$ do subsistema rápido de U_4 . A análise prossegue para o Bloco 2. O ponto de equilíbrio assintoticamente estável do subsistema lento de U_4 é encontrado e igual a $(\mathbf{x}_{eq}^{slowU_4}, \mathbf{z}_{eq}^{slowU_4}) = (x=0.0522, \delta=0.2606, \omega=0.0, \theta_1=-0.00, \theta_3=-0.5039, V_1=0.9648, V_3=0.9273)$. Se verifica, por integração numérica do subsistema lento de U_4 , que o ponto de equilíbrio $(\mathbf{x}_{eq}^{fastU_4}, \mathbf{z}_{eq}^{fastU_4})$ pertence à região de estabilidade de $(\mathbf{x}_{eq}^{slowU_4}, \mathbf{z}_{eq}^{slowU_4})$. Os subsistemas rápido e lento U_4 são portanto estáveis. Então, o algoritmo prossegue para o Bloco 5 com a verificação de chaveamentos. Embora, os subsistemas rápido e lento sejam estáveis, a tensão na barra 4 é baixa, então o OLTC atua em $t=120s$ ($r_k=1.05$) tentando recuperar a tensão na barra 4, e o sistema dinâmico U_5 é originado.

No Bloco 1, conclui-se que o subsistema rápido de U_5 é estável e a análise prossegue para o Bloco 2. A análise de estabilidade do subsistema lento correspondente resulta negativa. A região de estabilidade do subsistema lento é reduzida após cada comutação do OLTC e a condição inicial do subsistema lento, ou seja, o ponto de equilíbrio assintoticamente estável do subsistema rápido de U_5 não pertence a região da estabilidade do sistema lento levando o sistema ao colapso em $t=171.75s$. Neste caso o colapso é detectado no Bloco 4 do algoritmo. Nesta fase da análise, verifica-se que a trajetória do subsistema lento ao longo de Γ atinge uma singularidade que conduz a uma bifurcação sela-nó do ponto de equilíbrio do subsistema rápido, ou seja, o ponto de equilíbrio assintoticamente estável do subsistema rápido desaparece e a condição de estabilidade dos pontos de equilíbrio do subsistema rápido ao longo da trajetória do subsistema lento é violada.

Figura 3.12: Evolução das dinâmicas lentas na Contingência #1 (SEP4B instável).

A Figura 3.12 ilustra a evolução das dinâmicas lentas dos distintos sistemas dinâmicos gerados, enquanto a Tabela 3.3 resume a sequência da análise feita pelo algoritmo proposto na Seção 3.3.1, que classifica corretamente a Contingência #1 como instável.

Tempo de Comutação	Sistema em Análise	Análise
0 s	U ₁ : Curto-circuito na linha LL2	Bloco 1: a busca de um asep para o subsistema rápido falha.
		Bloco 3: atuação do equipamento rápido detectada; proteção de linha isola LL2 do SEP.
120 ms	U ₂ : Proteção de linha tira LL2 do sistema	Bloco 1: subsistema rápido estável
		Bloco 2: a busca de um asep para o subsistema lento falha.
		Bloco 4: atuação do equipamento lento detectada; comutação do OLTC em t=60s
60 s	U ₃ : Ação do OLTC	Bloco 1: o OLTC atua e a estabilidade do subsistema rápido é verificada.
		Bloco 2: a busca de um asep para o subsistema lento falha.
		Bloco 4: atuação do equipamento lento detectada; inserção do capacitor em t=100s
100 s	U ₄ : Inserção do Capacitor na barra 3	Bloco 1: subsistema rápido estável.
		Bloco 2: subsistema lento estável.
		Bloco 5: atuação do equipamento lento detectada; comutação do OLTC em t=120s
120 s	U ₅ : Ação do OLTC	Bloco 1: subsistema rápido estável.
		Bloco 2: subsistema lento é instável.
		Bloco 4: atuação do equipamento lento detectada; comutação do OLTC em t=180s, o asep do subsistema rápido através a trajetória do subsistema lento desaparece em uma bifurcação sela-nó. O sistema colapsa em t=171.75s.

Tabela 3.3: Sequência de análise do algoritmo proposto para a Contingência #1 (SEP4B instável)

Análise da contingência #2

O cenário para Contingência #2 é idêntico ao cenário da Contingência #1, exceto pelo fato de que o OLTC está fixo (bloqueado em $r_k=1$) e a proteção da linha LL2 atua em t=240ms. A dinâmica rápida é instável porque a proteção do subsistema rápido atua em t=240ms após o tempo crítico de abertura igual a 236ms. A trajetória do subsistema rápido U₁ abandona a região de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável do subsistema rápido de U₂ em ($\delta_{\text{exit}}=1.2283\text{rad}$, $\omega_{\text{exit}}=8.0598\text{rad/s}$), como podemos ver no retrato fase da Figura 3.13. Este cenário instável é típico da análise de estabilidade transitória. Devido à perda de sincronismo do gerador na barra 1 com a barra infinita.

Figura 3.13: Trajetórias dos subsistemas rápidos de U_1 e U_2 na Contingência #2 (SEP4B instável).

O algoritmo começa analisando a estabilidade do subsistema rápido U_1 no Bloco 1. O sistema U_1 é aquele com a linha LL2 em curto-circuito. A busca de um ponto de equilíbrio do subsistema rápido de U_1 falha devido à presença de um curto-circuito. O algoritmo procede para a análise da atuação dos equipamentos rápidos no Bloco 3. A proteção da linha LL2 atua em 240ms e a análise de um novo sistema dinâmico U_2 , aquele com a linha LL2 eliminada do sistema elétrico de potência, é iniciada. A busca de um ponto de equilíbrio do subsistema rápido U_2 no Bloco 1 resulta $(\mathbf{x}_{eq}^{fastU_2}, \mathbf{z}_{eq}^{fastU_2}) = (x=0.00, \delta=0.3481, \omega=0.0, \theta_1=0.0871, \theta_3=-0.3206, V_1=0.9636, V_3=0.8846)$. Porém, como o estado final do subsistema rápido de U_1 está fora da região de estabilidade do subsistema rápido U_2 , o subsistema rápido é instável. A análise prossegue para o Bloco 3. Uma vez que não há atuação de dispositivos rápidos, a análise é encerrada com a conclusão de que o sistema é instável.

A Tabela 3 resume a sequência de análises realizadas pelo algoritmo proposto. O algoritmo classifica corretamente a contingência como instável devido à instabilidade do subsistema rápido do sistema pós-falta U_2 .

Tempo de Comutação	Sistema em análise	Análise
0 s	U_1 : Curto-circuito na linha LL2	Bloco 1: a busca de um asep para o subsistema rápido falha.
		Bloco 3: atuação do equipamento rápido detectada; proteção de linha isola LL2 do SEP.
240 ms	U_2 : Atuação da proteção de linha LL2	Bloco 1: subsistema rápido estável.
		Bloco 3: não é detectada a atuação de equipamentos rápidos. A contingência é INSTAVEL.

Tabela 3.4: Sequência de análise do algoritmo proposto para a Contingência #2 (SEP4B instável).

Análise da contingência #3

O cenário de Contingência #3 é um cenário estável, em que as dinâmicas rápidas são estáveis devido a uma rápida e oportuna atuação da proteção da linha LL2 em $t=120\text{ms}$, mas uma lenta e progressiva queda nas tensões das barras do sistema elétrico de potência é detectada após a eliminação da falta devido à influência da dinâmica lenta da carga na barra 4, que tenta recuperar a energia consumida. A Figura 3.14 ilustra a evolução das dinâmicas do sistema elétrico de potência em escalas de tempo (3.1). Em $t=90\text{s}$, um capacitor é ligado à barra 3 e a estabilidade do sistema elétrico de potência é restaurada, na medida em que este elemento fornece para a carga na barra 4 o déficit de energia reativa devido a eliminação de LL2.

Figura 3.14: Evolução das dinâmicas do sistema original em escalas de tempo (Π_e) para a Contingência #3 (SEP4B estável).

Tempo de Comutação	Sistema em análise	Análise
0 s	U ₁ : Curto-circuito na linha LL2	Bloco 1: a busca de um asep para o subsistema rápido falha.
		Bloco 3: atuação do equipamento rápido detectada; proteção de linha isola LL2 do SEP.
120 ms	U ₂ : Proteção de linha elimina LL2 do sistema	Bloco 1: subsistema rápido estável
		Bloco 2: a busca de um asep para o subsistema lento falha.
		Bloco 4: atuação do equipamento lento detectada; inserção do capacitor em $t=90\text{s}$
90 s	U ₃ : Inserção do Capacitor na barra 3	Bloco 1: subsistema rápido estável.
		Bloco 2: subsistema lento é estável.
		Bloco 5: não é detectada atuação de equipamentos. O sistema original é ESTAVÉL.

Tabela 3.5: Sequência de análise do algoritmo proposto para a Contingência #3 (SEP4B estável)

A Tabela 4 resume a sequência das análises realizadas pelo algoritmo proposto na Seção 3.3.1. O algoritmo classifica corretamente a contingência como estável.

3.5.2 Sistema Elétrico de Potência de cinco barras (SEP5B)

O sistema elétrico de potência de cinco barras ilustrado na Figura 3.15 vai ser empregado para mostrar a aplicação do algoritmo geral para análise de estabilidade em escalas de tempo proposto para avaliar a estabilidade dos subsistemas rápido e lento e tomar conclusões acerca da estabilidade do sistema elétrico de potência original em escalas de tempo segundo o algoritmo proposto na Figura 3.2 (ver Seção 3.3.1). Este sistema elétrico de potência é composto por uma barra infinita na barra 1, um gerador síncrono na barra 2, modelado pelo modelo de um eixo [1] e provido de um AVR (Figura 3.16), a barra de carga 3 provida de uma carga estática de modelo polinomial [1, 2] (Figura 3.16) e um motor de indução [1], dois transformadores de potência, T1 entre as barras 4 e 3 provido de um OLTC e T2 com tap fixo entre as barras 2 e 5, e compensação reativa na barra 4.

Figura 3.15: Sistema elétrico de potência de cinco barras. Os parâmetros do sistema elétrico de potência são: $P_{mec}=0.6pu$, $x_d=x_q=3.36pu$, $x'_d=0.64pu$, $T'_{d0}=8s$, $H_g=3.5s$, $D=0.164pu$, $P_0=1pu$, $Q_0=0.5pu$, $\alpha=\beta=2$, $V_0=1pu$, $E_{th}=1.17pu$, $\theta_{th}=0$, $R_s=0pu$, $X_s=0.1pu$, $X_m=3.2pu$, $R_r=0.018pu$, $X_r=0.18pu$, $H_m=0.5s$, $T_c=0.76pu$, $T_s=0.55pu$, $T_q=0.35pu$, $x_{th}=0.08pu$, $x_{LL14}=0.21pu$ (per line), $x_{LL15}=0.12pu$, $x_{LL45}=0.08pu$, $x_{T25}=0.128pu$, $x_{T34}=0.032pu$, $x_c=4.1pu$, $r_{k0}=1$, $r^{min}=0.85$, $r^{max}=1.15$, $\Delta r=0.0375$, $V_{refOLTC}=0.95$, $d=0.02$, $T_{dOLTC}=50s$, $T_{mOLTC}=40s$.

O conjunto de equações $(\Pi_\varepsilon)_{(r_k)}$ corresponde ao modelo em escalas de tempo para o sistema elétrico de potência representado na Figura 3.15. A lei de controle do OLTC de T1 é dado por (3.7). Os casos a serem analisados para o sistema elétrico de potência de cinco barras são resumidos na Tabela 3.6. Como será mostrado, a estabilidade do sistema elétrico de potência está relacionada com a velocidade de atuação do AVR após a perda de uma linha entre as barras 1-4 em $t=60s$.

Figura 3.16: Modelo do AVR e a carga exponencial

Contingência #1: cenário estável devido à ação rápida do AVR	Parâmetros do AVR: $G=50$, $T=0.1s$, $V_{fd}^{min}=0pu$, $V_{fd}^{max}=5pu$
Contingência #2: cenário instável devido à ação lenta do AVR	Parâmetros do AVR: $G=30$, $T=0.2s$, $V_{fd}^{min}=0pu$, $V_{fd}^{max}=5pu$

Tabela3.6: Contingências a ser analisadas, sistema elétrico de potência de cinco barras.

$$(\Pi_\varepsilon)_{(r_k)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\delta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{D}{2H_g} \omega + \frac{\omega_0}{2H_g} (P_{mec} - P_g) \\ \frac{dE'_q}{dt} = \frac{1}{T'_{do}} [-E'_q + V_{fd} - (x_d - x'_d)I_d] \\ \frac{dV_{fd}}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{se } V_{fd} = V_{fd}^{max} \text{ e } G(V_{ref} - V_2) - V_{fd} > 0 \\ 0 & \text{se } V_{fd} = V_{fd}^{min} \text{ e } G(V_{ref} - V_2) - V_{fd} < 0 \\ \frac{1}{T} [-V_{fd} + G(V_{ref} - V_2)] & \text{caso contrário} \end{cases} \\ \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2H_m} (T_m - T_e) \quad \text{com } T_m = T_c + T_s s + T_q (1 - s)^2 \\ \mathbf{0} = \mathbf{g}(\delta, \omega, E'_q, V_{fd}, s, V_i, \theta_i, r_k) \quad i = 1, \dots, 5 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

$$r_{k+1} = \begin{cases} r_k + \Delta r & \text{se } V_4 < V_{40} - d \text{ e } r_k < r^{max} \\ r_k - \Delta r & \text{se } V_4 > V_{40} + d \text{ e } r_k > r^{min} \\ r_k & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.7)$$

Análise da contingência #1

No tempo $t=0s$, o capacitor na barra 4 é desligado, então a tensão nas barras do sistema elétrico de potência caem instantaneamente. O AVR do gerador síncrono na barra 2, "perto" da barra de carga 3, atua sobre a tensão de excitação do gerador V_{fd} tentando restaurar a tensão na barra de geração. Por outro lado, uma tensão baixa na barra 3 provoca desaceleração no eixo do motor de indução, aumentando o escorregamento "s" e assim seu consumo de energia. O controle do OLTC (3.7) detecta tensão baixa na barra 3 e atua em $t=50s$. A ação rápida do AVR garante a estabilidade das dinâmicas rápidas e a tensão na barra de carga 3 é recuperada no tempo $t=50s$ pela ação do OLTC. No tempo $t=60s$, a proteção de linha atua retirando do sistema elétrico de potência uma das linha entre as barras 1-4. Como consequência, as tensões em todas as barras do sistema elétrico de potência caem e o gerador síncrono assume a maior parte da carga do sistema. A maior parte desta carga é devido ao decremento da velocidade do motor de indução. Novamente, a reação rápida do AVR evita o colapso do sistema, neste momento, pelo controle rápido da tensão de excitação do gerador V_{fd} , que injeta energia reativa necessária para evitar a parada do motor de indução. Após a estabilização das dinâmicas rápidas do sistema, a tensão na barra de carga 3 é restaurada a seu nível

tensão nominal de operação ($V_{30}=0.95\text{pu}\pm 0.2\%$) mediante duas ações consecutivas do OLTC no tempo $t=110\text{s}$ e $t=150\text{s}$.

Figura 3.17: Evolução das dinâmicas do sistema em escalas de tempo $(\Pi_\varepsilon)_{(r_k)}$ (SEP5B estável).

$$(\Sigma_0) \begin{cases} 0 = \omega \\ 0 = P_{mec} - P_g \\ 0 = -E'_q + V_{fd} - (x_d - x'_d)I_d \\ 0 = \begin{cases} 0 & \text{if } V_{fd} = V_{fd}^{\max} \text{ e } G(V_{ref} - V_2 - x_{oxl}) - V_{fd} > 0 \\ 0 & \text{if } V_{fd} = V_{fd}^{\min} \text{ e } G(V_{ref} - V_2 - x_{oxl}) - V_{fd} < 0 \\ -V_{fd} + G(V_{ref} - V_2 - x_{oxl}) & \text{caso contrário} \end{cases} \\ 0 = T_m - T_e \quad \text{com} \quad T_m = T_c + T_s \quad s + T_q(1-s)^2 \\ \mathbf{0} = \mathbf{g}(\delta, \omega, E'_q, V_{fd}, s, V_i, \theta_i, r_k) \quad i = 1, \dots, 5 \end{cases} \quad (3.8)$$

A Figura 3.17 ilustra a evolução das dinâmicas do sistema em escalas de tempo $(\Pi_\varepsilon)_{(r_k)}$. O tap (r_k) do OLTC é considerado como uma dinâmica lenta do sistema, mas pelo algoritmo geral da Figura 3.2 (vide Seção 3.3.1), será tratado como uma comutação que origina um novo sistema dinâmico. Cada comutação ou perturbação dá origem a um novo sistema dinâmico $U_1, U_2, \dots$, os grandes blocos pontilhados na Figura 3.2. As outras dinâmicas $(\delta, \omega, E'_q, V_{fd}, s)$ pertencem ao subsistema rápido, enquanto a tensão e ângulo nas barras (V_i, θ_i) são as variáveis algébricas correspondentes. Então, o subsistema rápido é representado pelo conjunto de equações algébricas diferenciais $(\Pi_\varepsilon)_{(r_k)}$ para cada valor fixo de r_k . O subsistema lento (Σ_0) , neste caso não tem dinâmicas contínuas, e será representado pelo conjunto de pontos de equilíbrio de $(\Pi_\varepsilon)_{(r_k)}$. Na Tabela 3.7, a sequência de análises realizadas pelo algoritmo da Figura 3.2 é descrita. O sistema elétrico de potência experimenta cinco mudanças, após cada mudança, o AVR atua tentando recuperar a tensão. A Figura 3.18 apresenta a simulação numérica dos subsistemas rápido

(subsistema para $t=60.3s$ e $r_k=0.965$) e lenta (pontos de equilíbrio de dinâmica rápida).

Figura 3.18: Evolução no tempo das dinâmicas dos subsistemas rápido e lento Contingência #1 (SEP5B estável).

Tempo de Comutação	Sistema em análise	Análise
0s	U ₁ : Perda de compensação reativa na barra 4	Bloco 1: se perde potência reativa e o AVR tenta restabelecer a tensão na barra de geração. Subsistema rápido estável.
		Bloco 2: subsistema lento estável.
		Bloco 5: o OLTC detecta tensão baixa na barra 3.
50s	U ₂ : Atua OLTC do T1	Bloco 1: o AVR tenta restabelecer a tensão na barra de geração. Subsistema rápido estável.
		Bloco 2: subsistema lento estável.
		Bloco 5: Se detecta atuação da proteção de linha em $t=60s$.
60s	U ₃ : Proteção de linha elimina do SEP uma das linhas entre as barras 1-4	Bloco 1: a transmissão de energia é reduzida e o AVR tenta restabelecer a tensão na barra de geração. Subsistema rápido estável.
		Bloco 2: subsistema lento estável.
		Bloco 5: o OLTC detecta tensão baixa na barra 3.
110s	U ₄ : Atua OLTC do T1	Bloco 1: o AVR tenta restabelecer a tensão na barra de geração. Subsistema rápido estável.
		Bloco 2: subsistema lento estável.
		Bloco 5: o OLTC detecta tensão baixa na barra 3.
150s	U ₅ : Atua OLTC do T1	Bloco 1: o AVR tenta restabelecer a tensão na barra de geração. Subsistema rápido estável.
		Bloco 2: subsistema lento estável.
		Bloco 5: não é detectada atuação de equipamentos. O sistema original é ESTAVÉL.

Tabela 3.7: Sequência da análise de estabilidade para a Contingência #1 (SEP5B estável).

Análise da contingência #2

A Figura 3.19 representa a evolução de algumas dinâmicas do sistema em escalas de tempo e seu subsistema rápido. Neste cenário, os parâmetros do AVR são distintos, conforme dados da Tabela 3.6, diminuindo sua velocidade de resposta. Na Figura 3.19 mostra-se que embora o subsistema rápido possua um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, sua trajetória diverge pois sua condição inicial encontra-se fora da região de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável correspondente, o que caracteriza um cenário instável. A sequência de análise do algoritmo da Figura 3.2, mostrada na Tabela 3.8, é a mesma que no Caso 1 até $t=60$ s. A condição inicial do subsistema rápido U_3 está fora da região da estabilidade do subsistema rápido e a análise é terminada com a conclusão de que o sistema em escalas de tempo é instável.

Tempo de Comutação	Sistema em análise	Análise
0s	U_1 : Perda de compensação reativa na barra 4	Bloco 1: se perde potência reativa e o AVR tenta restabelecer a tensão na barra de geração. Subsistema rápido estável.
		Bloco 2: subsistema lento estável.
		Bloco 5: o OLTC detecta tensão baixa na barra 3.
50s	U_2 : Atua OLTC do T1	Bloco 1: o AVR tenta restabelecer a tensão na barra de geração. Subsistema rápido estável.
		Bloco 2: subsistema lento estável.
		Bloco 5: Se detecta atuação da proteção de linha em $t=60$ s.
60s	U_3 : Proteção de linha elimina do SEP uma das linhas entre as barras 1-4	Bloco 1: o AVR tenta restabelecer a queda de tensão na barra de geração., mas falha devido a sua resposta lenta como consequência o sistema original é INSTÁVEL.

Tabela 3.8: Sequência da análise de estabilidade para Contingência #2 (SEP5B instável).

Figura 3.19: Evolução das dinâmicas do modelo em escalas de tempo e subsistema rápido Contingência #2 (SEP5B instável)

Capítulo 4

Métodos Diretos para Análise de Estabilidade de Sistemas Elétricos de Potência

Neste capítulo, apresenta-se uma revisão bibliográfica dos métodos diretos para análise de estabilidade transitória. Os métodos CUEP e BCU são estudados em detalhe com o intuito de entender os fundamentos destas ferramentas e assim associá-la com nosso objetivo de pesquisa, que é aplicar esta metodologia na análise de estabilidade de médio/longo prazo, especificamente na análise de estabilidade de tensão.

Na Seção 4.1, uma revisão bibliográfica dos trabalhos que contribuíram para o desenvolvimento dos métodos diretos, incluindo os enfoques heurísticos até propostas que introduzem a teoria dos sistemas dinâmicos na avaliação de estabilidade, é apresentada. Na sequência, na Seção 4.2, apresenta-se uma descrição dos métodos diretos CUEP e BCU originalmente desenvolvidos para análise de estabilidade transitória de sistemas elétricos de potência. Na Seção 4.3 são estabelecidos critérios gerais e definições para a aplicação do método CUEP sob os subsistemas rápido e lento. O capítulo é encerrado na Seção 4.4, com a aplicação numérica dos métodos diretos na análise de estabilidade em escalas de tempo no médio ou longo prazo, utilizando o algoritmo geral para análise em escalas de tempo proposto no Capítulo 3.

4.1 Introdução

Os métodos diretos (ou métodos energéticos) determinam a estabilidade do sistema elétrico de potência sem a resolução explícita das equações diferenciais que o modelam [3, 51]. Os primeiros trabalhos que empregaram métodos diretos para o estudo da estabilidade transitória do sistema elétrico de potência são atribuídos a Magnuson, P. C., 1947 e Aylett, P. D., 1958 [3, 16]. A análise

de estabilidade transitória estuda a capacidade dos geradores síncronos do sistema elétrico de potência de manterem o sincronismo após uma grande perturbação [26]. Reles de proteção são instalados em pontos estratégicos através da rede com o objetivo de detectar as faltas e acionar os interruptores para isolar a falta.

Neste tipo de estudo, o sistema elétrico de potência muda de configuração duas vezes passando da condição pré-falta para uma condição em falta, e em seguida da condição em falta para a condição pós-falta. A estabilidade do sistema pós-falta é o problema estudado na análise de estabilidade transitória [3, 32]. Supondo que o sistema pós-falta possua um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, deseja-se saber se, após a abertura dos disjuntores, a trajetória do sistema pós-falta irá convergir para este novo equilíbrio.

A técnica de análise convencional de estabilidade transitória integra numericamente as equações diferenciais dos sistemas em falta e pós-falta. A estabilidade do sistema pós-falta é determinada baseada na simulação da trajetória do sistema pós-falta. O período típico de simulação para o sistema pós-falta é 10s e pode chegar até 15s se problemas de estabilidade *multiswing* devem ser analisados [16]. Como o método de integração numérica convencional requer um grande esforço computacional, seu emprego não é adequado para a análise em tempo real da estabilidade dos sistemas elétricos de potência [3, 16].

Os métodos diretos, em contraste, só integram numericamente as equações diferenciais do sistema em falta e determinam a estabilidade do sistema pós-falta sem precisar de sua integração, mediante a comparação da energia do sistema (quando a falta é eliminada) com um valor crítico de energia. Assim, os métodos diretos não só evitam o esforço computacional da integração numérica do sistema pós-falta, mas adicionalmente fornecem uma medida quantitativa do grau de estabilidade ou instabilidade do sistema [16, 52].

A base dos métodos diretos para a determinação da estabilidade do sistema pós-falta é o conhecimento da região de estabilidade: Se a condição inicial do sistema pós-falta pertence à região de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável pós-falta desejado, então pode-se afirmar, sem fazer integração numérica alguma, que a trajetória do sistema pós-falta convergirá para o ponto de equilíbrio assintoticamente estável desejado. Nesse sentido, o conhecimento da região de estabilidade é um elemento importante na aplicação dos métodos diretos [16].

No estudo da região de estabilidade, métodos que aplicam a teoria de Lyapunov foram propostos por Gless, El-Abiad e Nagappan [26]. Também conhecidos em alguns trabalhos como “*closest equilibrium point method*”, apresentam resultados muito conservadores, pois as estimativas

do tempo crítico de abertura são bem menores aos valores verdadeiros. Embora em [53] se tenha introduzido alguma melhoria para o “*closest equilibrium point method*” e estabelecido fundamentos para o funcionamento do método, sua aplicação na prática foi inviabilizada devido à necessidade de cálculo de todos os pontos de equilíbrio do sistema, sendo esta uma tarefa muito complexa que exige um tempo de simulação elevado para um sistema elétrico de potência de grande porte [51].

Com o intuito de minimizar o conservadorismo dos resultados do método do ponto de equilíbrio de menor energia, Kakimoto et al [54, 55] propuseram o método conhecido como PEBS (do inglês *Potential Energy Boundary Surface*). Este método foi proposto com base em argumentos heurísticos [16] e estendido em trabalhos posteriores [17, 56, 57, 58], em que se estabelecem os fundamentos deste método e justifica-se a possibilidade de estimativas não conservadoras. O método PEBS ganhou a atenção dos pesquisadores devido a sua simplicidade e velocidade, pois elimina a necessidade do cálculo dos pontos de equilíbrio instáveis e requer apenas uma rápida integração do sistema em falta para a determinação da energia crítica V_{cr} . Embora muitas pesquisas tenham sido feitas sobre este método, a possibilidade de obtenção de estimativas não conservadoras inviabiliza o emprego deste método [51].

Outro método importante é o método CUEP (do inglês *Controlling Unstable Equilibrium Point*), proposto por Athay, T. et al [17]. Ele obtém resultados menos conservadores do que o ponto de equilíbrio instável de menor energia [16]. O método CUEP é originalmente proposto observando que as trajetórias do sistema em falta usualmente passam perto de um ponto de equilíbrio instável na fronteira da região de estabilidade que não é o equilíbrio de menor energia. Desta maneira, o método CUEP utiliza o ponto de equilíbrio instável na “direção” da trajetória em falta para o cálculo da energia crítica ao invés do ponto de menor energia na fronteira.

A evolução do método CUEP pode ser rastreada a meados de 1970 [59]. Prabhakara e El-Abid argumentaram que o CUEP é o ponto de equilíbrio instável que está “próximo” à trajetória em falta em [60]. Athay et al sugerem que o CUEP é o ponto de equilíbrio instável “na direção” da trajetória em falta em [17]. Outra definição de CUEP baseado em argumentos físicos é dada em [61], onde o CUEP é relacionado com os primeiros geradores (ou grupo de geradores) que perdem o sincronismo se a falta é sustentada. Os fundamentos do método CUEP, baseados em teoria matemática, são apresentados em [18]. O método BCU (*Boundary Controlling Unstable Equilibrium Point*) proposto por Chiang [18] é um método numérico eficiente para o cálculo dos pontos de equilíbrio de controle. Sua eficiência é fruto de uma definição precisa, baseada em teoria matemática, do CUEP. Os métodos anteriores ao BCU baseavam-se em argumentos heurísticos para calcular o CUEP e que portanto eram sujeitos a erros [51].

Os métodos diretos na análise de sistemas elétricos de potência evoluíram muito nos últimos anos, uma cronologia dos avanços é relatada acima. A completa caracterização da região de estabilidade foi desenvolvida em [25]. Os fundamentos dos métodos diretos, em particular do método CUEP, para análise de estabilidade transitória foram desenvolvidos em [26]. O seguinte passo nesta linha de evolução dos métodos diretos foi levar em consideração as características de escalas de tempo do sistema elétrico de potência e aplicá-las no desenvolvimento do CUEP e sua fundamentação teórica.

Nesse sentido, nos trabalhos de Alberto, L. F. C. [24], Alberto, L. F. C.; Chiang, H. D.[40, 62, 63] e Theodoro, Edson A. R. [41, 64] encontra-se o estudo dos fundamentos teóricos do método CUEP no contexto das escalas de tempo, assim como uma análise da região de estabilidade dos subsistemas (rápido e lento) e sua relação com o sistema original. Entretanto, não é analisado nestes artigos a aplicação deste método no estudo de problemas na escala de longo prazo.

4.2 Principais Metodologias dos Métodos Diretos (CUEP e BCU)

O problema de análise de estabilidade pelos métodos diretos pode ser entendido como: dado um conjunto de equações diferenciais não-lineares e uma condição inicial, determine sem precisar de integração numérica explícita, se as trajetórias convergem ou não para um ponto de equilíbrio assintoticamente estável $\mathbf{x}_s$. Se a condição inicial pertence à região de estabilidade de $\mathbf{x}_s$, então a trajetória tende para o ponto de equilíbrio assintoticamente estável $\mathbf{x}_s$ quando o tempo tende ao infinito. Na aplicação dos métodos diretos, supõe-se que a seguinte condição seja satisfeita: O ponto de operação do sistema elétrico de potência pré-falta, $\mathbf{x}_s^{\text{pré}}$, pertence à região de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema elétrico de potência pós-falta desejado, $\mathbf{x}_s$ [16].

No estudo de estabilidade transitória, deseja-se determinar o tempo crítico de abertura dos elementos de proteção do sistema que garantam que o sistema elétrico de potência permaneça estável após uma grande perturbação. Um sistema elétrico de potência submetido a uma perturbação pode ser descrito pelo seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}^F(\mathbf{x}(t)) \quad 0 < t \leq t_{cl} \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad t > t_{cl} \quad , \quad \mathbf{x}(t_{cl}) = \mathbf{x}^* \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{x}(t)$ é o vetor de variáveis de estado do sistema.

Figura 4.1: Região de estabilidade de x_s e tempo crítico de abertura t_{cr}

O sistema encontra-se em um estado de equilíbrio x_0 até que, no tempo $t=0$, uma falta acontece no sistema. Durante o intervalo $0 < t \leq t_{cl}$, chamado período em falta, o sistema é dirigido pelas dinâmicas do campo vetorial em falta f^F . Na realidade, antes que a falta seja removida em $t=t_{cl}$, podem acontecer múltiplos chaveamentos na rede, cada um originando um campo diferente f^F . Por simplicidade, consideremos um único campo f^F , que significa que não há mudança estrutural entre $t=0$ e $t=t_{cl}$. Quando a falta é removida em $t=t_{cl}$, as dinâmicas do sistema passam a ser regidas pelo campo vetorial pós-falta $f(x(t))$.

A condição inicial $x(t_{cl})$ para a equação diferencial (4.2) é determinada pela solução do sistema em falta (4.1) avaliada em $t=t_{cl}$. Admitindo-se que (4.2) tem um ponto de equilíbrio assintoticamente estável x_s , deseja-se saber se a trajetória $x(t)$ de (4.2), com a condição inicial $x(t_{cl})$, convergirá a x_s quando $t \rightarrow \infty$. O maior valor de t_{cl} onde esta condição é verdadeira chama-se tempo crítico de abertura t_{cr} e o ponto x^* é conhecido como *exit point*. Do ponto de vista matemático, este problema pode ser explicado utilizando-se o conceito de região de estabilidade [3, 25, 32].

Dado um ponto de equilíbrio assintoticamente estável x_s , define-se como área de atração ou região de estabilidade $A(x_s)$ do ponto de equilíbrio assintoticamente estável x_s como sendo o conjunto em (2.2) (veja Capítulo 2, Seção 2.1), constituído por todas as condições iniciais cujas trajetórias convergem para x_s quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, conhecida a região de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável pós-falta x_s , o tempo crítico de abertura t_{cr} é obtido quando a trajetória de (4.1) abandona a região de estabilidade de (4.2) em $x=x^*$. A Figura 4.1, ilustra este conceito em duas dimensões [32].

A determinação da região de estabilidade de um sistema dinâmico não linear geral não é uma tarefa trivial [32, 51]. A caracterização da região de estabilidade foi discutida teoricamente em [25, 26]. Sob certas condições, mostra-se que a fronteira da região de estabilidade é constituída pela união das variedades estáveis de todos os pontos de equilíbrio instáveis de (4.2) que pertencem à fronteira [26]. Como o cálculo destas variedades é muito difícil e custoso do ponto de vista

computacional, usualmente estima-se a região de estabilidade do sistema pós falta (4.2) via conjuntos de nível de uma dada função energia, ou seja, por conjuntos da forma $\{\mathbf{x}: V(\mathbf{x}) < V_{cr}\}$. A função energia $V(\mathbf{x})$ é geralmente a soma da energia cinética e energia potencial do sistema pós-falta. O cálculo de V_{cr} , chamada energia crítica, é distinto para cada falta.

A.- O Método CUEP

Muitos métodos diretos foram propostos para o cálculo da energia crítica. O método CUEP, proposto por Athay, T. et al [17] e fundamentado por Chiang, H. D. et al [24] é considerado o mais eficiente na determinação da energia crítica do sistema elétrico de potência [20].

O CUEP é definido com relação à trajetória em falta $\mathbf{x}_f(t)$, como o ponto de equilíbrio instável cuja variedade estável contém o *exit point* de $\mathbf{x}_f(t)$ (ver Fig. 4.2). Esta definição é baseada no fato de que o *exit point* de uma trajetória em falta deve pertencer à variedade estável de algum ponto de equilíbrio instável na fronteira da região de estabilidade. Observar que a existência e unicidade de um CUEP associada a uma trajetória em falta estão garantidas pelo Teorema 2.2 (ver Cap. 2, Seção 2.1.1). A essência do método CUEP é o uso de uma superfície de energia constante que passa pelo CUEP para aproximar a parte relevante da fronteira de estabilidade para a qual a trajetória em falta se dirige. A parte relevante da fronteira de estabilidade é a variedade estável do CUEP.

O Teorema 4.1 oferece uma justificativa teórica do método CUEP. Este teorema é uma extensão do Teorema 6-4 apresentado em [58] que relaxa a condição de transversalidade entre as variedades estáveis e instáveis.

Teorema 4.1: Teorema fundamental para o método CUEP

Suponha que o sistema não linear descrito por (4.2) tenha uma função energia $V(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Seja $\hat{\mathbf{x}}$ um ponto de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade $\partial A(\mathbf{x}_s)$ deste sistema. Seja:

$S_c(\mathbf{r}) :=$ a componente conexa associada ao conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: V(\mathbf{x}) < \mathbf{r}\}$ contendo $\mathbf{x}_s$, e

$\partial S_c(\mathbf{r}) :=$ a fronteira de $S_c(\mathbf{r})$.

Figura 4.2: Análise de estabilidade pelo método CUEP

Então, a superfície de energia constante associada $\partial S_c(V(\hat{\mathbf{x}}))$ intersecta-se com a variedade estável $\mathbf{W}^s(\hat{\mathbf{x}})$ no ponto $\hat{\mathbf{x}}$; além disso, o conjunto $S_c(V(\hat{\mathbf{x}}))$ não intersecta a variedade estável $\mathbf{W}^s(\hat{\mathbf{x}})$.

O Teorema 4.4 afirma que para qualquer trajetória em falta $\mathbf{x}_f(t)$ que começa no ponto $\mathbf{p} \in A(\mathbf{x}_s)$ com $V(\mathbf{p}) < V(\hat{\mathbf{x}})$, se o ponto em que a trajetória em falta abandona a região de estabilidade pertence à variedade estável de $\hat{\mathbf{x}}$, então a trajetória em falta deve passar através da superfície de energia constante $\partial S_c(V(\hat{\mathbf{x}}))$ antes que esta passe através da variedade estável $\mathbf{W}^s(\hat{\mathbf{x}})$ de $\hat{\mathbf{x}}$. Por conseguinte, a superfície de energia constante associada $\partial S_c(V(\hat{\mathbf{x}}))$ pode ser usada para aproximar a parte relevante da fronteira de estabilidade $\partial A(\mathbf{x}_s)$ da trajetória em falta $\mathbf{x}_f(t)$. Além disso, o Teorema 4.1 indica a propriedade conservadora intrínseca do método CUEP na estimação do valor da energia crítica da trajetória em falta (obviamente menos conservadora que o método *closest ucp*).

Na Figura 4.2, mostra-se a interpretação geométrica do Teorema 4.1, a trajetória em falta $\mathbf{x}_f(t)$ dirige-se em direção à fronteira da região de estabilidade $\partial A(\mathbf{x}_s)$ do ponto de equilíbrio estável $\mathbf{x}_s$ do sistema pós-falta. A trajetória em falta $\mathbf{x}_f(t)$, primeiro atravessa a superfície de energia constante $\partial S_c(\mathbf{r}_1)$ do *closest ucp* ($\mathbf{x}_{cl}$), em seguida a superfície de energia constante $\partial S_c(\mathbf{r})$ do CUEP " $\hat{\mathbf{x}}$ ", e finalmente a fronteira da região de estabilidade $\partial A(\mathbf{x}_s)$. O algoritmo do método CUEP para análise de estabilidade transitória é descrito a seguir: Seja $V(\hat{\mathbf{x}})$ uma função energia do sistema pós-falta e $\mathbf{x}_f(t)$ a trajetória em falta.

passo 1: Determine o CUEP " $\hat{\mathbf{x}}$ " para a trajetória em falta $\mathbf{x}_f(t)$

passo 2: A energia crítica V_{cr} é o valor da função energia $V(\cdot)$ no CUEP: $V_{cr} = V(\hat{\mathbf{x}})$

passo 3: Calcule o valor da função de energia $V(\cdot)$ no tempo de abertura (t_{cl}) usando a trajetória em falta: $V_f = V(\mathbf{x}_f(t_{cl}))$

passo 4: Se $V_f < V_{cr}$, então o sistema pós-falta é estável, caso contrário nada pode ser afirmado.

A parte mais crítica no algoritmo do método CUEP é o passo 1 relativo ao cálculo do CUEP para a trajetória em falta. Sem encontrar o (exato) CUEP do passo 1, o método anterior pode dar um resultado muito conservador ou sobre estimado da estimativa de estabilidade.

Devido à importância na determinação do (correto) CUEP, descreve-se a seguir as bases teóricas para determinar o CUEP relativo ao sistema em falta. Um algoritmo para determinar o CUEP de um modelo clássico de sistema elétrico de potência com condutância de transferência é apresentado em [59] e mostrado a seguir.

Considere o sistema elétrico de potência com n geradores e as cargas modeladas como impedância constante. A dinâmica do i -ésimo gerador é representada pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_i &= \omega_i \\ M_i \dot{\omega}_i &= P_i - P_{ei} - D_i \omega_i\end{aligned} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

onde M_i é o momento de inércia, $D_i > 0$ coeficiente de amortecimento, δ_i ângulo do rotor, ω_i velocidade angular do rotor e P_{ei} potência elétrica do gerador “i”.

O nó “n+1” será utilizado como referência, isto é, $E_{n+1}=1$ e $\delta_{n+1}=0$. E_i é a tensão constante do gerador atrás da reatância transitória. A potência elétrica do gerador “i” é dada por:

$$P_{ei} = \sum_{j \neq i}^{n+1} E_i E_j B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) + \sum_{j \neq i}^{n+1} E_i E_j G_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j)$$

G_{ij} representa a condutância de transferência do elemento i-j na matriz de admitância reduzida do sistema. $P_i = P_{mi} - E^2 G_{ii}$, em que P_{mi} é a potência mecânica. Admite-se um amortecimento uniforme $D_i/M_i = \lambda$, $i=1, 2, \dots, n$.

As equações que descrevem o sistema pré-falta, em falta e pós-falta todos tem a mesma forma de (4.3) exceto que G'_{ij} s e B'_{ij} s são distintos devido às mudanças da topologia da rede.

Usando uma máquina como referência, a equação (4.3) pode ser transformada na seguinte equação:

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_{in} &= \omega_{in} \\ \dot{\omega}_{in} &= \frac{1}{M_i} (P_{mi} - P_{ei}) - \frac{1}{M_n} (P_{mn} - P_{en}) - \frac{D_i}{M_i} \omega_{in} \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \delta_{in} &= \delta_i - \delta_n, \quad \omega_{in} = \omega_i - \omega_n\end{aligned} \quad (4.4)$$

Uma função energia numérica $V(\delta, \omega)$ para o sistema (4.4) é proposta em [17].

Deve-se salientar que, teoricamente falando, o CUEP determina estimativas de estabilidade conservadoras se uma função energia existe. Lembrado que uma função energia é uma função bem definida e estritamente decrescente ao longo de qualquer trajetória do sistema. Porém, é mostrado que não existe uma forma geral exata de função energia para sistemas elétricos de potência com condutâncias de transferência [18]. As funções energia existentes são deduzidas assumindo que a trajetória em falta é próxima a uma linha reta. Deve-se, no entanto, advertir que a validade desta hipótese pode afetar a propriedade do CUEP: o método sempre dá estimativas de estabilidade no lado conservador.

B.- O Método BCU

O método BCU é um algoritmo numérico, proposto em [59], que calcula o CUEP de forma eficiente. Segundo o Teorema 2.2 (ver Capítulo 2, Seção 2.1.1), qualquer trajetória começando em um ponto na fronteira da região de estabilidade converge para um ponto de equilíbrio instável quando o tempo tende ao infinito. Fazendo uso desta propriedade, o método BCU determina o CUEP do sistema mediante o cálculo do CUEP de seus sistemas reduzidos associados [3]. O método BCU foi originalmente desenvolvido para um sistema modelado como em (4.4) [59]. O método CUEP é baseado na relação entre a fronteira de estabilidade do sistema pós-falta (na modelagem clássica de (4.4)) e a fronteira da região de estabilidade do sistema pós-falta do seguinte sistema reduzido [25]:

$$\begin{aligned}\delta_{in} &= (P_i - P_{ei}) - \frac{M_i}{M_n} (P_n - P_{en}) \\ &:= f_i(\delta) \quad i = 1, 2, \dots, n-1\end{aligned}\tag{4.5}$$

As variáveis de estado do sistema reduzido (4.5) são os ângulos dos geradores com dimensão $(n-1)$ enquanto a dimensão do sistema original (4.4) é $2(n-1)$. Observa-se que $(\hat{\delta})$ é um ponto de equilíbrio do sistema reduzido (4.5) se e só se $(\hat{\delta}, 0)$ é um equilíbrio do sistema original (4.4). Além disso, nas condições de pequena condutância de transferência, em [25] mostra-se a factibilidade do cálculo do CUEP do sistema original (4.4) através do cálculo do CUEP do sistema reduzido (4.5).

O método BCU encontra o ponto de equilíbrio de controle segundo o algoritmo [59]:

- passo 1: Da trajetória do sistema em falta $\mathbf{x}_f(t) = (\boldsymbol{\delta}(t), \boldsymbol{\omega}(t))$, detecta-se o ponto de saída (*exit point*) $\boldsymbol{\delta}^*$ que é o ponto em que a projeção da trajetória $\boldsymbol{\delta}(t)$ cruza a fronteira da região de estabilidade do sistema reduzido (4.5).
- passo 2: Utiliza-se o ponto $\boldsymbol{\delta}^*$ como condição inicial e resolvem-se numericamente as equações diferenciais do sistema reduzido (4.5) para encontrar o mínimo local de $\sum_{i=1}^n \|\mathbf{f}_i(\boldsymbol{\delta})\|$; seja este ponto $\boldsymbol{\delta}_0^*$.
- passo 3: Utiliza-se o ponto $\boldsymbol{\delta}_0^*$ como condição inicial para encontrar o zero da função $\mathbf{f}(\boldsymbol{\delta})$, ou seja, encontrar o ponto de equilíbrio instável de controle do sistema reduzido $\boldsymbol{\delta}_{co}^*$.
- passo 4: O ponto de equilíbrio instável de controle do sistema pós-falta será $(\boldsymbol{\delta}_{co}^*, \mathbf{0})$.

Uma vez calculado o CUEP, os passos 3 e 4 do procedimento do método CUEP são utilizados para verificar a estabilidade do sistema. A característica principal do método BCU é o cálculo do CUEP mediante o cálculo do CUEP do sistema reduzido (4.5), que está definido no espaço dos ângulos e cujo CUEP em geral é mais fácil de calcular [59]. Nos passos 1–3 do algoritmo BCU, calcula-se o CUEP do sistema reduzido (4.5) e, no passo 4, relaciona-se o CUEP do sistema

reduzido (4.5) com o CUEP do sistema original (4.4) [59]. A Figura 4.3 ilustra geometricamente o algoritmo anterior [51].

Figura 4.3: Interpretação geométrica do algoritmo do método BCU

O método BCU para o cálculo do CUEP é aplicado na atualidade com sucesso em sistemas elétricos de potência reais de grande porte. Relatos dessas aplicações encontram-se em trabalhos como em Tada, et al [19], Chiang, H. D. et al [21, 65] em que o software TEPCO-BCU é testado mostrando bom desempenho, velocidade e confiabilidade na avaliação da estabilidade transitória em tempo real de sistemas elétricos de potência.

4.3 Aplicação dos Métodos Diretos na Análise de Estabilidade de Sistemas Elétricos de Potência em Duas de Escalas de Tempo

Os métodos diretos evoluíram significativamente nos últimos anos [40], e a avaliação da estabilidade transitória em tempo real de grandes sistemas elétricos de potência tornou-se uma realidade [26, 40]. O método CUEP há sido reconhecido como um método direto muito eficaz para avaliação da estabilidade transitória [40] e o método BCU [26], que explora as propriedades de um sistema de gradiente reduzido artificial, tem provado ser um método numérico robusto que permite o cálculo do CUEP.

Os métodos diretos, além de agilizar análises de contingência, também fornecem uma medida da margem de estabilidade que pode ser explorada para projetar controle preventivo e corretivo. Estas características interessantes dos métodos diretos motivam a extensão da aplicação dos métodos diretos para o problema da análise de estabilidade a médio prazo. Várias questões surgem na tentativa de estender os métodos diretos para a análise de estabilidade a médio prazo: (i) os modelos de estabilidade a médio prazo possuem múltiplas escalas de tempo; (ii) múltiplas

comutações dos dispositivos de controle e proteção ocorrem, e (iii) encontrar funções energia para estes modelos é uma tarefa desafiante.

Os modelos de sistemas elétricos de potência para a análise de estabilidade de médio prazo têm propriedades de múltiplas escalas de tempo. Negligenciar as escala de tempo na análise leva geralmente a estimativas muito conservadoras da região de estabilidade e do tempo crítico de abertura. Também surgem problemas numéricos na integração das equações diferenciais e algoritmos numéricos mais sofisticados são muitas vezes necessários [2, 40].

Muitas vezes, os modelos QSS, que são construídos admitindo-se que as dinâmicas rápidas, ou de forma equivalente as dinâmicas de curto prazo, são estáveis, são comumente utilizados para estudar problemas de estabilidade a médio prazo, com o objetivo de acelerar a análise [1], porém modos instáveis nas dinâmicas lentas podem ser desencadeados por perturbações nas dinâmicas rápidas e problemas de estabilidade transitória (dinâmicas rápidas) podem coexistir com os modos instáveis das dinâmicas lentas. Então, os modelos QSS não podem lidar simultaneamente com problemas de estabilidade nas dinâmicas lentas e rápidas.

Portanto, há uma lacuna entre a análise de estabilidade de curto e médio ou longo prazo. Em particular, não há garantia de que uma combinação de análise dissociada de estabilidade no curto e médio prazo possa ser conclusiva para a estabilidade do sistema elétrico de potência original [36]. Com o intuito de associar de forma lógica as conclusões, por separado, acerca da estabilidade do sistema elétrico de potência das análises transitória e de médio prazo, assim como não perder a relação entre as dinâmicas (rápidas e lentas) do sistema elétrico de potência, o algoritmo geral para a decomposição da análise de estabilidade do sistema elétrico de potência em duas escalas de tempo foi proposto no Capítulo 3. O algoritmo do Capítulo 3 é conceitual e a análise de estabilidade dos subsistemas lento e rápido pode ser realizada por qualquer método.

Nesse sentido, os métodos diretos podem ser utilizados para avaliar a estabilidade dos subsistemas rápido e lento nos Blocos 1 e 2 da Figura 3.2 (veja Capítulo 3, seção 3.3.1), do algoritmo geral para a decomposição da análise de estabilidade do sistema elétrico de potência em duas escalas de tempo proposto no Capítulo 3. Especificamente, o CUEP e o método BCU podem ser empregados na avaliação de estabilidade dos subsistemas rápido e lento. Porém, algumas adaptações dos métodos diretos devem ser realizadas antes de serem aplicados neste algoritmo. Um método para detectar o CUEP do sistema lento será desenvolvido e alguns cuidados com as singularidades que aparecem devido à divisão do modelo em subsistemas rápido e lento são tomadas.

O sistema dinâmico em escalas de tempo (Σ_ϵ) (2.30), para cada valor fixo de ϵ , pode ser considerado equivalente ao sistema dinâmico (2.1). Formalmente o Teorema 4.2, demonstrado em [23], estabelece a caracterização da fronteira de sua região de estabilidade com relação a seus pontos de equilíbrio localizados na fronteira da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$.

Teorema 4.2: Fronteira da região de estabilidade do sistema singularmente perturbado (Σ_ϵ)

Suponha que o sistema dinâmico (Σ_ϵ) (2.30) satisfaça as hipóteses (H1) e (H2) para ϵ suficientemente pequeno, e sejam $(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)$, $i=1,2,\dots$ pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade $\partial A_\epsilon(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$, para um ϵ fixo suficientemente pequeno, então a fronteira da região de estabilidade pode ser caracterizada como:

$$\partial A_\epsilon(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s) \subseteq \bigcup_i W_{(\Sigma_\epsilon)}^s(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)$$

Se adicionalmente o sistema (Σ_ϵ) (2.30) satisfizer a hipótese (H3), então a fronteira da região de estabilidade pode ser caracterizada como:

$$\partial A_\epsilon(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s) = \bigcup_i \overline{W_{(\Sigma_\epsilon)}^s(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)}$$

O Teorema 4.2 é demonstrado pela aplicação direta dos Teoremas 2.1 e 2.2 (Cap. 2, Sec. 2.1.1), para cada ϵ fixo suficientemente pequeno. A fronteira da região de estabilidade do sistema dinâmico em escalas de tempo (Σ_ϵ) (2.30), para cada valor fixo de ϵ , é caracterizada pelo Teorema 4.2 como sendo a união do fecho das variedades estáveis de todos os pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade. Embora a caracterização seja válida para cada valor de ϵ fixo suficientemente pequeno, esta proporciona pouca informação do comportamento da fronteira da região de estabilidade $\partial A_\epsilon(\mathbf{x}_s, \mathbf{z}_s)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

No Capítulo 2, Seção 2.4.1, apresenta-se uma série de teoremas que caracterizam a relação da região de estabilidade do sistema em escalas de tempo (Σ_ϵ) (2.30) com os subsistemas rápido (Π_F) (2.36) e lento (Σ_0) (2.34) correspondentes. Na Seção 2.4.2, são apresentados dois teoremas que fornecem uma aproximação da parte relevante da fronteira da região de estabilidade do sistema em escalas de tempo (Σ_ϵ) (2.30) via fronteira da região de estabilidade dos subsistemas rápido (Π_F) (2.36) e lento (Σ_0) (2.34) correspondentes.

Estabelecida a equivalência entre as modelagens do sistema elétrico de potência em escalas de tempo (Σ_ϵ) (2.30) e a convencional (2.1), conceitualmente o método CUEP tradicional de avaliação de estabilidade é composto das seguintes etapas [26]:

passo 1: Determinar, para um ϵ fixo, o CUEP $(\mathbf{x}_{co\epsilon}, \mathbf{z}_{co\epsilon})$ da trajetória em falta em $\phi_\epsilon^f(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$.

passo 2: Calcular a energia crítica pela avaliação da função de energia no CUEP, isto é,

$$V_{cre}=V(\mathbf{x}_{coe},\mathbf{z}_{coe}).$$

passo 3: Calcule a energia do sistema pós-falta no tempo de abertura t_{cl} , ou seja,

$$V_{cle}=V(\varphi_{\varepsilon}^f(t_{cl},\mathbf{x}_0,\mathbf{z}_0)).$$

passo 4: Se $V_{cle}<V_{cre}$ então o sistema pós-falta é estável. Caso contrário, pode ser instável.

Lembre-se que o método CUEP tradicional usa a superfície de energia constante que passa pelo CUEP para aproximar a parte relevante da fronteira de estabilidade $\partial A_{\varepsilon}(\mathbf{x}_s,\mathbf{z}_s)$ na direção da trajetória em falta (Figura 4.2). Com o intuito de aplicar o método CUEP nos subsistemas rápido (Π_F) (2.36) e lento (Σ_0) (2.34), vamos a definir o *exit point* e CUEP destes subsistemas, segundo as ideias propostas em [40].

Consideremos o caso de análise de estabilidade do subsistema rápido (Π_F) U_{j+1} , segundo o Bloco 1 da Figura 3.3 (vide Capítulo 3, Seção 3.3.1), em que o subsistema rápido (Π_F) U_j é instável e o subsistema rápido (Π_F) U_{j+1} possui ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(\mathbf{x}_0,\mathbf{z}_s^{fastU_{j+1}})$. Se Φ^{fastU_j} é a trajetória instável do subsistema rápido (Π_F) U_j , então o *exit-point* e o CUEP do subsistema rápido (Π_F) U_{j+1} é definido a seguir:

Definição 4.1 (*exit-point* do subsistema rápido (Π_F)). O *exit-point* $(\mathbf{x}_0,\mathbf{z}_{exit}^{fastU_{j+1}})$ do subsistema rápido (Π_F) U_{j+1} é definido como o ponto onde a trajetória Φ^{fastU_j} do subsistema rápido (Π_F) U_j atravessa a fronteira da região de estabilidade $\partial A_F(\mathbf{x}_0,\mathbf{z}_s^{fastU_{j+1}})$ do ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(\mathbf{x}_0,\mathbf{z}_s^{fastU_{j+1}})$ do subsistema rápido pós-perturbação (Π_F) U_{j+1} .

Definição 4.2 (CUEP do subsistema rápido (Π_F)). O CUEP do subsistema rápido (Π_F) U_{j+1} é o ponto de equilíbrio instável de tipo 1 $(\mathbf{x}_0,\mathbf{z}_{CUEP}^{fastU_{j+1}})$ na fronteira da região de estabilidade $\partial A_F(\mathbf{x}_0,\mathbf{z}_s^{fastU_{j+1}})$ do ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(\mathbf{x}_0,\mathbf{z}_s^{fastU_{j+1}})$ do subsistema rápido (Π_F) U_{j+1} cuja variedade estável $\mathbf{W}_{(\Pi_F)}^s(\mathbf{x}_0,\mathbf{z}_{CUEP}^{fastU_{j+1}})$ contém o *exit point* $(\mathbf{x}_0,\mathbf{z}_{exit}^{fastU_{j+1}})$ do subsistema rápido (Π_F) U_{j+1} .

A Figura 4.4 ilustra a interpretação geométrica do *exit-point* e do CUEP do subsistema rápido (Π_F) U_{j+1} , considerando que o ponto $(\mathbf{x}_0,\mathbf{z}_0)_{proj}^{fastU_{j+1}}$ corresponde ao do ponto final da trajetória do subsistema rápido (Π_F) ou lento (Σ_0) do sistema " U_j ", $(\mathbf{x}_0,\mathbf{z}_0)$, no subsistema rápido (Π_F) U_{j+1} , sub-tarefa no Bloco 1 na Figura 3.3 (vide Capítulo 3, Seção 3.3.1), além disso, se admite que esse ponto pertence à região de estabilidade de $(\mathbf{x}_0,\mathbf{z}_s^{fastU_{j+1}})$ do subsistema rápido (Π_F) U_{j+1} .

Figura 4.4: Ilustração geométrica do *exit-point* e o CUEP do subsistema rápido $(\Pi_F) U_{j+1}$.

A definição de *exit-point* do subsistema rápido é igual a definição de *exit-point* do método CUEP tradicional [26]. Para o subsistema lento (Σ_0), entretanto, a trajetória do subsistema lento (Σ_0) em falta U_j evolui sobre a variedade de restrição do subsistema lento (Σ_0) em falta ou perturbado Γ^{U_j} ao passo que a região de estabilidade do subsistema lento pós-perturbação U_{j+1} está contida em outra variedade de restrição algébrica, a variedade de restrição do subsistema lento (Σ_0) pós-perturbado $\Gamma^{U_{j+1}}$. Portanto, a trajetória do subsistema lento (Σ_0) perturbado U_j não intercepta a fronteira da região de estabilidade do subsistema lento (Σ_0) pós-perturbado U_{j+1} que está em uma variedade de restrição diferente.

A seguir serão definidos de forma análoga, o *exit-point* $(\mathbf{x}_{\text{exit}}^{\text{slow}U_{j+1}}, \mathbf{z}_{\text{exit}}^{\text{slow}U_{j+1}})$ e o CUEP $(\mathbf{x}_{\text{CUEP}}^{\text{slow}U_{j+1}}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}}^{\text{slow}U_{j+1}})$ associados ao subsistema lento $(\Sigma_0) U_{j+1}$. Para isso, consideremos o caso de análise de estabilidade do subsistema lento, segundo o Bloco 2 da Figura 3.4 (vide Capítulo 3, Seção 3.3.1), em que o subsistema lento $(\Sigma_0) U_j$ é instável e o subsistema lento $(\Sigma_0) U_{j+1}$ possui ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(\mathbf{x}_s^{\text{slow}U_{j+1}}, \mathbf{z}_s^{\text{slow}U_{j+1}})$. Se $\boldsymbol{\varphi}^{\text{slow}U_j}$ é a trajetória instável do subsistema lento $(\Sigma_0) U_j$, então o *exit-point* e o CUEP do subsistema lento $(\Sigma_0) U_{j+1}$ é definido a seguir:

Definição 4.3 (*exit-point* do subsistema lento (Σ_0)). O *exit-point* $(\mathbf{x}_{\text{exit}}^{\text{slow}U_{j+1}}, \mathbf{z}_{\text{exit}}^{\text{slow}U_{j+1}})$ do subsistema lento (Σ_0) U_{j+1} é definido como o ponto onde a projeção da trajetória do subsistema lento (Σ_0) U_j $(\boldsymbol{\varphi}_{\text{proj}}^{\text{slow}U_j})$ na variedade $\Gamma^{U_{j+1}}$ do subsistema lento (Σ_0) U_{j+1} atravessa a fronteira da região de estabilidade $\partial A_0(\mathbf{x}_s^{\text{slow}U_{j+1}}, \mathbf{z}_s^{\text{slow}U_{j+1}})$ do ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(\mathbf{x}_s^{\text{slow}U_{j+1}}, \mathbf{z}_s^{\text{slow}U_{j+1}})$ do subsistema lento (Σ_0) U_{j+1} .

Figura 4.5: Ilustração geométrica do *exit-point* e o CUEP do subsistema lento $(\Sigma_0) U_{j+1}$.

Definição 4.4 (CUEP do subsistema lento (Σ_0)). O CUEP do subsistema lento $(\Sigma_0) U_{j+1}$ é o ponto de equilíbrio instável de tipo 1 $(\mathbf{x}_{\text{CUEP}}^{\text{slow } U_{j+1}}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}}^{\text{slow } U_{j+1}})$, contido na variedade de restrição estável do sistema U_{j+1} $(\Gamma_s^{U_{j+1}})$, cuja variedade estável $\mathbf{W}_{(\Sigma_0)}^s(\mathbf{x}_{\text{CUEP}}^{\text{slow } U_{j+1}}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}}^{\text{slow } U_{j+1}})$ contém o *exit-point* do subsistema lento $(\Sigma_0) U_{j+1}$.

A Figura 4.5 ilustra a interpretação geométrica do *exit-point* e do CUEP do subsistema lento $(\Sigma_0) U_{j+1}$. O ponto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)_{\text{proj}}^{\Gamma_s^{U_{j+1}}}$ corresponde à projeção do ponto de equilíbrio do subsistema rápido $(\Pi_F) U_j$, $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$, na variedade de restrição estável do sistema U_{j+1} $(\Gamma_s^{U_{j+1}})$. Admite-se que esse ponto pertence à região de estabilidade de $(\mathbf{x}_s^{\text{slow } U_{j+1}}, \mathbf{z}_s^{\text{slow } U_{j+1}})$ do subsistema lento $(\Sigma_0) U_{j+1}$.

As definições de *exit-point* e CUEP apresentadas anteriormente partem do pressuposto de que o sistema perturbado U_j e o pós-perturbação U_{j+1} evoluem na mesma escala de tempo. No algoritmo de análise de estabilidade em escalas de tempo proposto no Capítulo 3, podem ocorrer duas situações não previstas nestas definições de CUEP. Vamos analisar estas situações com mais cuidado a seguir. No caso em que a análise de estabilidade do subsistema rápido U_{j+1} é precedida pela sequência de análise: Bloco 1 e Bloco 3 do sistema U_j , então a trajetória do subsistema rápido de U_j é a trajetória em falta do subsistema rápido de U_{j+1} . Nesta situação, aplicam-se as Definições 4.1 e 4.2 e o método CUEP é aplicado da forma habitual, como originalmente proposto em [26].

No entanto, se uma comutação é detectada nos Blocos 4 e 5, a análise de estabilidade do subsistema rápido de U_{j+1} é precedida por um período de dinâmica lenta do sistema U_j . Neste caso, a dinâmica lenta não pode ser usada como uma trajetória em falta do subsistema rápido para efeito do cálculo do *exit-point* e CUEP. A Figura 4.6 ilustra essa situação, e apresenta a proposta deste trabalho para calcular o CUEP de U_{j+1} como sendo o ponto de equilíbrio instável que está na "direção" da linha que liga o ponto inicial da trajetória do subsistema rápido de U_{j+1} (o ponto final da trajetória lenta $\mathbf{z}_0^{\text{fast } U_j}$) com o ponto de equilíbrio estável do subsistema rápido $\mathbf{z}_{\text{eq}}^{\text{fast } U_{j+1}}$.

Figura 4.6: Interpretação geométrica do método CUEP do subsistema rápido quando uma comutação é detectada nos Blocos 4 ou 5 do algoritmo geral para análise de estabilidade proposta na Figura 3.2.

A seguir, propõe-se um algoritmo conceitual para a aplicação do método CUEP na avaliação de estabilidade do subsistema rápido (Π_F) (2.36). Com esse intuito, admite-se a existência de uma família de funções energia V_{fast} para o subsistema rápido (Π_F), a fim de avaliar a estabilidade do subsistema rápido no Bloco 1 do algoritmo geral para análise de estabilidade proposto no Capítulo 3, Seção 3.3.1, Figura 3.2.

Método CUEP para a avaliação do subsistema rápido (Π_F):

passo 1: Calcular o CUEP ($\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_{\text{CUEP}}^{\text{fast}U_{j+1}}$) do subsistema rápido U_{j+1} .

passo 2: Calcular o valor da energia crítica do subsistema rápido U_{j+1} pelo valor da função energia rápida no correspondente CUEP, isto é, $V_{\text{cr}}^{\text{fast}U_{j+1}} = V^{\text{fast}U_{j+1}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_{\text{CUEP}}^{\text{fast}U_{j+1}})$.

passo 3: Computar a energia rápida do subsistema rápido U_{j+1} até o tempo de atuação dos equipamentos rápidos τ_{cl} , neste passo identificam-se dois casos:

3.a. O subsistema rápido U_j é instável: a computação da energia do subsistema rápido U_{j+1} é realizada ao longo da trajetória $\Phi^{\text{fast}U_j}$ do subsistema rápido "instável" (Π_F) U_j , então

$$V_{\text{cl}}^{\text{fast}U_{j+1}} = V^{\text{fast}U_{j+1}}(\Phi_{\text{proj}}^{\text{fast}U_j}(\tau_{\text{cl}}, (\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)_{\text{proj}}^{\text{fast}U_{j+1}})).$$

3.b. Uma comutação é detectada nos Blocos 4 ou 5 (veja Figura 3.2): a computação da energia do subsistema rápido U_{j+1} é realizada ao longo da linha que liga o ponto inicial da trajetória do subsistema rápido U_{j+1} (o ponto final da trajetória lenta $\mathbf{z}_0^{\text{fast}U_j}$) com o ponto de equilíbrio estável do subsistema rápido $\mathbf{z}_{\text{eq}}^{\text{fast}U_{j+1}}$ (veja Figura 4.6), isto é,

$$V_{\text{cl}}^{\text{fast}U_{j+1}} = V^{\text{fast}U_{j+1}}(\Phi_{\text{fast}}^{\text{fast}U_{j+1}}(\mathbf{z}_{\text{eq}}^{\text{fast}U_{j+1}}, \mathbf{z}_{\text{CUEP}}^{\text{fast}U_{j+1}})(\tau_{\text{cl}}, \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_{\text{eq}}^{\text{fast}U_{j+1}})).$$

passo 4: Se $V_{\text{cl}}^{\text{fast}U_{j+1}} < V_{\text{cr}}^{\text{fast}U_{j+1}}$, então o subsistema rápido é estável e procede-se a verificar a estabilidade do subsistema lento; caso contrário, o subsistema rápido U_{j+1} pode ser instável.

Se a análise de estabilidade do subsistema lento (Σ_0) U_{j+1} é precedida pelos Blocos 2 e 4 do sistema U_j , então a trajetória do subsistema lento de U_j é a trajetória em falta do subsistema U_{j+1} .

Neste caso, aplicam-se as Definições 4.3 e 4.4 e o método CUEP é executado da forma habitual, como originalmente proposto em [26], entretanto, a trajetória do sistema lento perturbado U_{j+1} evolui sobre a variedade de restrição algébrica $\Gamma^{U_{j+1}}$ e singularidades desta variedade podem ser atingidas antes que a trajetória projetada cruze a fronteira da região de estabilidade. Quando isto ocorre, admite-se que a singularidade indica o início de dinâmicas instáveis não modeladas e a análise é terminada com a conclusão que o sistema lento $(\Sigma_0) U_{j+1}$ é instável.

Figura 4.7: Interpretação geométrica do método CUEP do subsistema lento quando a análise atinge pela primeira vez o Bloco 2 do algoritmo geral para análise de estabilidade proposta na Figura 3.2.

Outro problema ocorre quando a análise do subsistema lento é precedida apenas por uma fase de dinâmica rápida. Isto ocorre por exemplo na primeira vez que o Bloco 2 é atingido. Neste caso, o CUEP pode ser calculado de forma similar ao caso de análise do subsistema rápido (Π_F) de U_{j+1} precedido por uma dinâmica lenta, ou seja, determina-se o *exit-point* como sendo o ponto de interseção entre a fronteira da região de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(x_s^{slow U_{j+1}}, z_s^{slow U_{j+1}})$ do subsistema lento $(\Sigma_0) U_{j+1}$ com a reta que liga o ponto de equilíbrio assintoticamente estável $(x_0, z_{eq}^{fast U_{j+1}})$ do subsistema rápido (Π_F) de U_{j+1} e $(x_s^{slow U_{j+1}}, z_s^{slow U_{j+1}})$. O correspondente CUEP está também na direção dessa reta como ilustra a Figura 4.7.

A seguir, propõe-se um algoritmo conceitual para a aplicação do método CUEP na avaliação de estabilidade do subsistema lento (Σ_0) (2.34). Com esse intuito, admite-se a existência de uma função energia V_{slow} para o subsistema lento (Σ_0) , a fim de avaliar a estabilidade do subsistema lento (Σ_0) no Bloco 2 do algoritmo geral para análise de estabilidade proposto no Capítulo 3, Seção 3.3.1, Figura 3.2.

Método CUEP para a avaliação do subsistema lento (Σ_0) :

passo 1: Calcular o CUEP $(x_{CUEP}^{slow U_{j+1}}, z_{CUEP}^{slow U_{j+1}})$ do subsistema lento de U_{j+1} .

passo 2: Calcular o valor da energia crítica do subsistema lento de U_{j+1} pelo valor da função de energia lenta no correspondente CUEP, isto é, $V_{cr}^{slow U_{j+1}} = V^{slow U_{j+1}}(x_{CUEP}^{slow U_{j+1}}, z_{CUEP}^{slow U_{j+1}})$.

passo 3: Verifique, se a trajetória lenta de U_j encontra uma singularidade em $\Gamma_s^{U_j}$ antes que a perturbação seja eliminada. Se isso acontecer, a análise é encerrada com a conclusão de que o sistema singularmente perturbado U_{j+1} pode ser instável; caso contrário, computar a energia lenta do subsistema lento de U_{j+1} até o tempo de comutação dos dispositivos lentos t_{cl} ao longo da trajetória projetada do subsistema lento de U_j , isto é,

$$V_{cl}^{slowU_{j+1}} = V_{slowU_{j+1}}(\varphi_0^{ProjU_j to U_{j+1}}(t_{cl}, (x_0, z_0)_{\Gamma_s^{U_{j+1}}})).$$

passo 4: Se $V_{cl}^{slowU_{j+1}} < V_{cr}^{slowU_{j+1}}$, então o subsistema lento de U_{j+1} é estável.

Mediante a avaliação da estabilidade de ambos subsistemas rápido (Π_F) e lento (Σ_0) e com a ajuda do Teorema 3.1 (vide Capítulo 3, Seção 3.3.2), é possível concluir acerca da estabilidade do sistema singularmente perturbado (Σ_ϵ). No entanto, se é detectada instabilidade no subsistema rápido (Π_F) U_{j+1} (Bloco 1), por causa do acionamento de equipamentos rápidos ou lentos (Blocos 3, 4 ou 5) ou pela evolução das dinâmicas lentas (Bloco 4), a análise de estabilidade do subsistema lento (Σ_0) U_{j+1} não pode ser realizada até que a instabilidade no subsistema rápido (Π_F) U_{j+1} seja eliminada, pois nesse caso a hipótese de estabilidade exponencial do subsistema rápido (Π_F) U_{j+1} do Teorema de Tikhonov para tempo finito (Teorema 2.6) não é satisfeita e o subsistema lento (Σ_0) U_{j+1} não está mais próximo do sistema singularmente perturbado original (Σ_ϵ) U_{j+1} . Desta maneira, a avaliação da estabilidade dos equilíbrios do subsistema rápido ao longo da trajetória do subsistema lento no Bloco 4 não pode ser eliminada, mesmo com a aplicação dos métodos diretos na análise de estabilidade.

4.4 Aplicação Numérica

A seguir será feita a aplicação numérica dos métodos diretos nos pequenos sistemas elétricos de potência estudados e descritos na Seção 3.5. As idéias para aplicação do método CUEP expostas na seção anterior serão aplicadas no cálculo de tempos críticos de abertura (CCT) ou chaveamento (CST do inglês *Critical Switching Time*) dos dispositivos.

4.4.1 Sistema Elétrico de Potência de quatro barras

Nesta seção é feita a continuação da análise de estabilidade do sistema elétrico de potência de quatro barras analisado na Seção 3.5.1, caso 3 (contingência estável) em que o OLTC do transformador encontra-se fixo em $r_k=1.0125$. O método CUEP será aplicado para o cálculo do CCT e CST.

A seguinte função energia numérica será utilizada para verificar a estabilidade do subsistema rápido (3.13) pelo método CUEP [26]:

$$V_{FAST} = \frac{Mw^2}{2} - \int_{\delta_0}^{\delta} \left(P_m - \frac{E_g V_1(s)}{x_g} \sin(\delta - \theta_1(s)) \right) ds$$

A seguinte função energia será considerada para avaliação da estabilidade do subsistema lento (3.14) pelo método CUEP:

$$V_{SLOW} = - \int_{x_0}^x (P_0 - P(s)) ds$$

Segundo a Tabela 3.5, o sistema elétrico de potência em análise experimenta três ações de comutação. A estabilidade do subsistema rápido (3.13) sempre será analisada primeiro, após a ocorrência de qualquer mudança no sistema elétrico de potência. A análise começa no sistema U_1 , que se origina pela ocorrência de um curto-circuito na linha LL2 em $t=0s$. A busca de um ponto de equilíbrio do subsistema rápido de U_1 falha e a avaliação da estabilidade no Bloco 1 do subsistema rápido de U_1 é desviado para a análise da atuação de dispositivos rápidos no Bloco 3, em que se determina a atuação da proteção da linha LL2 que a isola do sistema elétrico de potência. O subsistema rápido (3.13) é integrado numericamente até o tempo de atuação da proteção, e a análise de um novo sistema U_2 , o sistema após a abertura do disjuntor, começa com a análise da estabilidade subsistema rápido de U_2 .

O método CUEP foi usado para verificar a estabilidade do subsistema rápido (3.13) de U_2 . Ele usa o valor da energia do CUEP para obter uma estimativa do CCT do subsistema rápido (3.13) de U_2 . O CUEP é $\mathbf{x}_{CUEP}^{fastU_2} = (x=0.0, \delta=1.81, \omega=0.0, \theta_1=1.05, \theta_3=0.63, V_1=0.63, V_3=0.57)$, o valor da energia crítica é $V_{cr}^{fastU_2}=0.4797$ e o CCT estimado é de 189.5ms. Portanto, uma estimativa conservadora para o CCT foi obtida em concordância com o resultado obtido via integração numérica em que o CCT é 236ms. Como a proteção da linha atua em $t=120ms$, o subsistema rápido U_2 é classificado como estável.

A estabilidade do subsistema rápido (3.13) U_2 não é uma garantia de estabilidade das dinâmicas lentas. Na verdade, embora o subsistema rápido (3.13) U_2 apresente um ponto de equilíbrio assintoticamente estável após a atuação da proteção, ver Figura 4.8, o sistema original não possui equilíbrio. Como podemos ver na Figura 4.9, o sistema em escalas de tempo (3.11) tem um modo instável caracterizado por uma diminuição lenta da tensão na barra de carga, devido à dinâmica de recuperação de carga. Portanto, uma análise da estabilidade do subsistema lento (3.14) U_2 é necessária. A busca de um ponto de equilíbrio assintoticamente do subsistema lento (3.14) U_2 falha e o subsistema lento (3.14) U_2 é classificado como instável.

Figura 4.8: Retrato de fase das dinâmicas rápidas dos sistemas em escalas de tempo U_1 e U_2

Figura 4.9: Evolução das dinâmicas do sistema em escalas de tempo (3.13), Contingência #3

A inserção do condensador é identificada no Bloco 4, o subsistema lento (3.14) U_2 é numericamente integrado até o ponto de comutação do condensador e a análise do novo sistema U_3 é iniciada no Bloco 1. Novamente, o método CUEP indica que o subsistema rápido (3.13) U_3 é estável e a análise prossegue para o Bloco 2, onde a estabilidade do subsistema lento (3.14) U_3 é avaliada. O CUEP do subsistema lento (3.14) U_3 é $\mathbf{x}_{\text{CUEP}}^{\text{slow}U_3} = (x=0.25, \delta=0.28, \omega=0.0, \theta_1=0.0, \theta_3=-0.73, V_1=0.89, V_3=0.73)$ e a energia crítica do subsistema lento (3.14) U_3 é $V_{\text{cr}}^{\text{slow}U_3}=0.0014$ com um tempo crítico correspondente de 106.98s. Neste caso, obtemos uma boa estimativa do CST, e assim, existe uma boa concordância com o resultado obtido pela análise do sistema em escalas de

tempo (3.11) e o subsistema lento (3.14) U_3 . Em particular, a integração numérica do subsistema lento (3.14) U_2 indica que o CST para o condensador é 107s.

Do estudo deste exemplo salientamos a impossibilidade de aplicar o método CUEP diretamente para avaliação da estabilidade do sistema elétrico de potência original (Σ_e), pela existência de modos instáveis em escalas de tempo distintas. Assim, a decomposição em escalas de tempo possibilita a utilização dos métodos diretos nos subsistemas simplificados, e permite identificar a necessidade de atuação dos equipamentos do sistema elétrico de potência nas respectivas escalas de tempo. Referindo ao cálculo do CCT e CST do exemplo em questão, a decomposição permite estudar o tempo crítico de acionamento da proteção da linha LL2 e da inserção do capacitor shunt na Barra 3 respectivamente.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas Futuras

Neste capítulo são tecidos comentários finais e conclusões acerca dos desenvolvimentos desta tese e são discutidas perspectivas futuras e questões em aberto que podem motivar novas pesquisas na mesma linha de conhecimento. Finalmente são enumerados os trabalhos, fruto deste trabalho de pesquisa, publicados e/ou aceitos para publicação em revista internacional e apresentados em congressos internacionais e nacionais.

5.1 Comentários Finais e Conclusões

A motivação principal desta tese era estender a aplicação dos métodos diretos de análise de estabilidade, inicialmente desenvolvidos para análises de estabilidade transitória, para o problema de análise de estabilidade de tensão na escala de tempo de médio prazo. Para atingir este objetivo, uma metodologia geral para análise de estabilidade de sistemas elétricos em escalas de tempo foi desenvolvida e descrita em detalhes no Capítulo 3 da tese (vide Seção 3.3.1). Além disso, utilizando a teoria dos sistemas singularmente perturbados, foram estabelecidos os fundamentos teóricos da decomposição da análise dos sistemas elétricos na análise dos subsistemas rápido e lento de menor ordem (vide Capítulo 3, Seção 3.3.2). A metodologia proposta permite a decomposição da análise de estabilidade do sistema original na análise de estabilidade de seus correspondentes subsistemas rápido e lento.

A metodologia de análise de estabilidade em escalas de tempo proposta neste trabalho tem as análises de estabilidade transitória e análises de estabilidade de médio prazo convencionais como casos particulares (vide Capítulo 3, Seção 3.4). Entretanto, a lacuna que existe entre essas análises convencionais é preenchida pelo algoritmo de estabilidade em escalas de tempo proposto, pois a interação entre as dinâmicas rápidas e lentas é monitorada e casos instáveis causados pelas

singularidades dos equilíbrios rápidos no subsistema lento ou induzidos no subsistema rápido pela evolução das dinâmicas lentas são automaticamente detectados.

O algoritmo proposto de análise em escalas de tempo é conceitual e permite o uso de qualquer ferramenta de análise de estabilidade. Assim, o método clássico de simulação por integração numérica ou métodos diretos podem ser usados na análise dos subsistemas rápido e lento.

O algoritmo proposto indica automaticamente a sequência de comutações requerida entre análises do sistema rápido e lento, evitando heurísticas, comuns na literatura, que procuram comutar entre simulações de modelo completo e simulações QSS. O método QSS, utilizado na análise de estabilidade na escala de médio prazo, é um caso particular do algoritmo de estabilidade em escalas de tempo, pois o método QSS tem como hipótese fundamental que as dinâmicas rápidas são estáveis e atingiram sua condição de equilíbrio e, portanto não teriam influência sobre as dinâmicas lentas. Entretanto, devido à coexistência de modos instáveis de dinâmicas em ambas as escalas de tempo, a hipótese fundamental do método QSS não é sempre válida e pode fornecer resultados errados. Casos de modos instáveis rápidos que originam problemas de instabilidade de tensão (bifurcação Hopf) ou evolução de dinâmicas lentas que induzem instabilidade nas dinâmicas rápidas (bifurcação sela nó) são reportados. Esses problemas são detectados no algoritmo de análise de estabilidade em escalas de tempo proposto, já que as estabilidades ou instabilidades dos subsistemas rápido e lento são monitoradas em todo momento, evitando conclusões erradas de estabilidade.

Os métodos diretos, em particular o método CUEP, originalmente desenvolvidos para análise de estabilidade transitória, podem ser utilizados para avaliar a estabilidade do subsistema rápido (análise transitória) e do subsistema lento (análise de médio prazo).

Três dificuldades foram detectadas na extensão do método CUEP para a avaliação da estabilidade dos subsistemas rápido e lento: (i) existência de singularidades da variedade de restrição no subsistema lento, (ii) avaliação do CUEP rápido quando é precedida por um período de dinâmica lenta do sistema prévio e (iii) avaliação do CUEP lento quando sua avaliação deve ser feita pela primeira vez e não existe trajetória lenta do sistema prévio. Considerando essas dificuldades são propostos algoritmos conceituais que permitem a aplicação do método CUEP na análise de estabilidade dos subsistemas rápido e lento (vide Capítulo 4, Seção 4.3).

Como consequência de aplicação dos métodos diretos na análise da estabilidade pelo algoritmo da Figura 3.2 (vide Capítulo 3, Seção 3.3.1), observaram-se as seguintes vantagens: (i) aceleração da análise, evitando a integração numérica de muitos dos subsistemas rápido; (ii) a aceleração da

análise, evitando a integração numérica de alguns dos subsistemas lentos; (iii) aceleração da análise pela escolha adequada de passos de integração numérica para a análise rápida e lenta quando a integração numérica não puder ser evitada e (iv) possibilidade de dividir a medida de margem de estabilidade dos subsistemas lento e rápido.

Portanto, a decomposição em escalas de tempo permite abordar o problema de análise de estabilidade dos sistemas elétricos de potência fornecendo um maior entendimento da evolução das dinâmicas do sistema de potência.

5.2 Perspectivas Futuras

A proposta do algoritmo geral em escalas de tempo para análise de estabilidade dos sistemas elétricos de potência foi a principal contribuição deste trabalho de pesquisa. A partir desse algoritmo foram elucidadas várias questões em aberto na literatura, conforme discutido na seção anterior. Porém diversos trabalhos de pesquisa ainda são necessários para viabilizar a análise de estabilidade em escalas de tempo e estender os métodos diretos para a análise de estabilidade de tensão no médio prazo. Algumas dessas tarefas de pesquisa são listadas a seguir:

- (i) Estabelecer as condições teóricas para relacionar a instabilidade dos subsistemas rápido e lento com a instabilidade do sistema singularmente perturbado original.
- (ii) Introduzir modelos completos de equipamentos, cargas, geradores síncronos e assíncronos entre outros nos estudos de estabilidade.
- (iii) Estudo de estabilidade em sistemas elétricos de potência que incluam interconexões AC/DC.

5.3 Publicações Referentes ao Trabalho de Pesquisa

A seguir são enumerados os trabalhos, fruto deste projeto de pesquisa, aceitos em congresso nacional como internacional e publicados em revista internacional.

Revista Internacional

- 1.- Choque, P. E.; Luís F. C. Alberto. On the Foundations of Stability Analysis of Power Systems in Time Scales. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, Vol. 62, Issue 5, May 2015, p. 1230-1239.

Os resultados obtidos com a aplicação do algoritmo proposto na análise de estabilidade em escalas de tempo foram excelentes e sua proposta recebeu boas críticas no congresso ISCAS 2014. Como consequência disso, fomos convidados para submeter uma versão completa do artigo que foi publicado em 2015 no IEEE Transactions on Circuits and Systems I em uma seção especial referida ao ISCAS 2014.

Congresso Internacional

- 1.- Choque, P. E.; Luís F. C. Alberto. Direct Methods for Stability Assessment of Two-Time-Scale Electrical Power System Models. IEEE PowerTech Eindhoven 2015, 29 June 29-30 July, 2015, Eindhoven, The Netherlands.
- 2.- Choque, P. E.; Luís F. C. Alberto. A Two-Time Scale Framework for Stability Analysis of Electrical Power System. 2014 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS 2014), June 1-5, 2014, Melbourne, Australia.
- 3.- Choque, P. E.; Luís F. C. Alberto e Newton G. Bretas. Association of the Stability Region with the Time Scale Analysis to Study of Voltage Stability. 2013 IREP Symposium-Bulk Power System Dynamics and Control –IX (IREP), August 25-30, 2013, Rethymnon, Greece.

Congresso Nacional

- 1.- Choque, P. E.; Luís F. C. Alberto. On A Framework For Decomposing The Stability Analysis Of Power Systems In Time Scales. XX Congresso Brasileiro de Automática CBA 2014, Set. 20-25, 2014, Minas Gerais, Brasil.

Referências Bibliográficas

- [1] Van Cutsem, T.; Vournas, C. D. Voltage Stability of Electric Power Systems. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [2] Taylor, C. W. Power System Voltage Stability. McGraw-Hill 1993.
- [3] Kundur, P. Power System Stability and Control. McGraw-Hill 1994.
- [4] Power System Stability Subcommittee Special Publication. Voltage Stability Assessment: Concepts, Practices and Tools, IEEE 2002.
- [5] Venkataramana, A. Computacional Techniques For Voltage Stability Assessment And Control, Springer 2006.
- [6] Kurita, A.; Okubo, H.; Oki, K.; Agematsu, S.; Kappler, D. B.; Miller, N. W.; Price W. W., Jr.; Sanchez-Gasca, J. J.; Wirgau, K. A.; Younkins, T. D. Multiple Time-Scale Power System Dynamic Simulation. IEEE Transactions On Power Systems, 1993, vol. 8, no. 1, p. 216-223.
- [7] Van Cutsem, T.; Jacquemart, Y.; Marquet, J.-N.; Pruvot, P. A Comprehensive Analysis Of Mid-Term Voltage Stability. IEEE Transactions On Power Systems, 1995, vol. 10, no. 3, p. 1173-1182.
- [8] Khalil, H. K. Nonlinear Systems. Prentice Hall, 3rd edition, 2002.
- [9] Chow, J. H., Ed. Time-Scale Modeling Of Dynamic Networks With Applications To Power Systems. Vol. 46 Of Lectures Notes In Control And Information Sciences, Springer-Verlag, USA, 1982.
- [10] Van Cutsem, T.; Vournas, C. D. Voltage Stability Analysis in Transient and Mid-Term Time Scales. IEEE Transactions On Power Systems, 1996, vol. 11, no.1, p. 146-154.
- [11] Van Cutsem, T.; Mailhot, R. Validation Of a Fast Voltage Stability Analysis Method On The Hydro-Québec System. IEEE Transactions On Power Systems, 1997, vol. 12, no. 1, p. 282-292.
- [12] Yorino, N.; Sasaki, H. Masuda, Y.; Tamura, Y.; Kitagawa, M.; Oshimo, A. An Investigation of Voltage Instability Problems. IEEE Transactions On Power Systems, 1992, vol. 7, no. 2, p. 600-611.

- [13] Fan Ma; Lijun FU. Principle Of Multi-time Scale Order Reduction And Its Application In AC/DC Hybrid Power Systems. Electrical Machines And Systems, 2008. ICEMS 2008, International Conference, 2008, p. 3951-3956.
- [14] Magnuson, P. C. The Transient-Energy Method Of Calculating Stability. AIEE Transactions, 1947, USA, vol. 66, no. 1, p. 747-755.
- [15] Aylett, P. D. The Energy-Integral Criterion Of Transient Stability Limits Of Power Systems. Proceedings Of the IEE - Part C: Monographs, 1958, USA, vol. 105, no. 8, p. 527-536.
- [16] Chiang, H. D. Direct Methods for Stability Analysis of Electric Power Systems. Theoretical Foundation, BCU Methodologies, and Applications. John Wiley & Sons Inc., 2011.
- [17] Athay, T.; Podmore, R. e Virmani, S. A Practical Method For The Direct Analysis Of Transient Stability. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, 1979, USA, vol. PAS-98, no. 2, p. 573-584.
- [18] Chiang, H. D. A Theory-Based Controlling UEP Method For Direct Analysis Of Power System Transient Stability. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS-1989, vol. 13, p. 1980-1983.
- [19] Tada, Y.; Takazawa, T.; Chiang, H. D.; Li, H; Tong, J. Transient Stability Evaluation Of A 12,000-Bus Power System Data Using TEPCO-BCU. 15th Power System Computation Conference (PSCC), 2005, Belgium.
- [20] Chiang, H. D.; Tada, Y.; LI, H. Power System On-Line Transient Stability Assessment. Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering. John Wiley & Songs, Inc, 2007.
- [21] Chiang, H. D.; Tong, J.; Tada, Y. On-Line Transient Stability Screening Of 14,000-Bus Models Using TEPCO-BCU: Evaluations And Methods. IEEE Power and Energy Society General Meeting, 2010, USA.
- [22] Praprost, K. L.; Loparo, K. A. An Energy Function Method for Determining Voltage Collapse During a Power System Transient. IEEE Transactions On Circuits And Systems-I: Fundamental Theory And Applications, 1994, vol. 41, no. 10, p. 635-651.
- [23] Chiang, H. D; Alberto, L. F. C. Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems: Theory, Estimation, and Applications. Cambridge University Press, 2015.
- [24] Alberto, L. F. C. Caracterização e Estimativas da Área de Atração de Sistemas Dinâmicos Não Lineares. Tese Livre Docência. EESC – Universidade de São Paulo, 2006.
- [25] Chiang, H. D.; Hirsch, M. W.; Wu, F. F. Stability Regions Of Nonlinear Autonomous Dynamical Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 1988, USA, vol. 33, no. 1.

- [26] Chiang, H. D.; Wu, F. F.; Varaya, P. Foundations Of Direct Methods For Power System Transient Stability Analysis. IEEE Transactions On Circuit And Systems, 1987, USA, vol. CAS-34, no. 2, p. 160-173.
- [27] Chiang, H. D.; Fekih-Ahmed, L. Quasi-Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems: Theory. Circuit and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on, 1996, USA, vol. 43, no. 8, p. 627-635.
- [28] Encyclopedia Of Mathematics. Springer Online.
- [29] Kokotovic, P. V.; Sannuti, P. Singular Perturbation Method For Reducing The Model Order In Optimal Control Design. IEEE Transactions on Automatic Control, 1968, vol. AC-13, no. 4, p. 377-384.
- [30] Pai, M. A.; Sauer, P. W.; K. Khorasani. Singular Perturbation And Large Scale Power System Stability. Proceeding Of 23rd Conference On Decision and Control, 1984, Las Vegas – NV, USA, p. 173-178.
- [31] Pai, M. A. Power System Stability. N. Holland Publising Co., USA, 1981.
- [32] Sauer, P. W.; Pai, M. A. Power Systems Dynamics and Stability. Stipes Publising L. L. C., USA, Updated 2006.
- [33] Nathan Ida. Engineering Electromagnetics 2nd edition. Springer-Verlag, USA, 2004.
- [34] Venkatasubramanian, V.; Schattler, H.; Zaborsky, J. Dynamics Of Large Constrained Nonlinear Systems – A Taxonomy Theory. Proceeding of IEEE, 1995, USA, vol. 83, no. 11, p. 1530-1561.
- [35] Choque, P. E.; Luís F. C. Alberto e Newton G. Bretas. La Importancia de la Región de Estabilidad en el Análisis de Estabilidad de Medio Plazo en Sistemas Eléctricos de Potencia. Congreso Internacional IEEE/PES T&D 2012 Latin America, 3-5 set, 2012, Uruguay.
- [36] Wang, X.; Chiang, H. D. Some Issues with Quasi-Steady State Model in Long-Term Stability. IEEE PES General Meeting, Vancouver, Canada, 2013.
- [37] Manzoni, A. Desenvolvimento de um Sistema Computacional Orientado a Objetos para Sistemas Elétricos de Potência: Aplicação a Simulação Rápida e Análise da Estabilidade de Tensão. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Elétrica. COPPE/RJ, 2005.
- [38] Choque P. Edwin, Alberto L. F. C. and Bretas N. G. Association of the Stability Region with Time Scale Analysis to Study Voltage Stability. IEEE Symposium - Bulk Power System Dynamics and Control - IX IREP, Rethymnon, Grece, 2013.

- [39] Van Cutsem T.; Grenier, M. E. and Lefebvre, D. Combined Detailed and Quasi Steady-State Time Simulations For Large-Disturbance Analysis. IEEE 18th PSCC Power Systems Computation Conference. Wroclaw, Poland, August, 2014.
- [40] Alberto L. F. C. and Chiang H. D. Theoretical Foundations of CUEP Method for Two-Time Scale Power System Models. IEEE PES General Meeting, Calgary Alberta, Canada, 2009.
- [41] Edson A. R. Theodoro, Alberto L. F. C. and Chiang H. D. Towards the Development of a Two-Time Scale CUEP/BCU Method. North American Power Symposium (NAPS), IEEE publisher, 2013.
- [42] Retchkiman, Z. and Silva, G. Stability Analysis of Singularly Perturbed Systems via Vector Lyapunov Methods. Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control, vol. 1, p. 580-585, Kobe, Japan, 1996.
- [43] Saberi A. and Khalil, H. K. Quadratic-Type Lyapunov Functions for Singularly Perturbed Systems. IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-29, n. 6, June 1984.
- [44] Yun Zou; Ming-Hui Yin; Chiang, H. D. Theoretical Foundations Of The Controlling UEP Method For Direct Transient-Stability Analysis Of Network-Preserving Power System Models. IEEE Transactions On Circuits And Systems-I: Fundamental Theory And Applications, 2003, USA, vol. 50, no. 10, p. 1324-1336.
- [45] Dong, F.; Chowdrury, B. H.; Crow, M. L.; Acar, L. Mid-term Voltage Stability Study Using The Quasi-Steady State Analysis Method. IEEE Power Engineering Society General Meeting, 2003, vol. 4, p. 2646-2651.
- [46] Loud, L.; Rousseaux, P.; Lefevre, D.; Van Cutsem, T. A Time-Scale Decomposition-Based Simulation Tool For Voltage Stability Analysis. IEEE Power Tech Conference 2001, Porto, Portugal.
- [47] Grenier, M.-E.; Lefebvre, D.; Van Cutsem, T. Quasi Steady-State Models For Long-Term Voltage And Frequency Dynamics Simulation. IEEE Power Tech Conference 2005, Russia.
- [48] Vournas, C. D.; Mantzaris, J. C. Quasi-Steady-State Modeling Of Inter-area Oscillations. IEEE Power Tech Conference 2009, Bucharest, Romania.
- [49] Qin Wang; Ajjarapu, V. A Novel Approach To Implement Generic Load Restoration In Continuation-Based Quasi-Steady-State Analysis. IEEE Transactions On Power Systems, 2005, vol. 20, no. 1, p. 516-518.
- [50] Qin Wang; Hwachang Song; Ajjarapu, V. Continuation-Based Quasi-Steady-State Analysis. IEEE Transactions On Power Systems, 2006, vol. 21, no. 1, p. 171-179.

- [51] Bretas, N. G.; Alberto, L. F. C. Estabilidade Transitória Em Sistemas Eletroenergéticos. Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo 2000.
- [52] Chiang, H. D.; Chia-Chi Chu; Cauley, G.. Direct Stability Analysis Of Electric Power Systems Using Energy Functions: Theory, Applications, And Perspective. IEEE Proceeding, 1995, USA, vol. 83, no. 11, p. 1497-1529.
- [53] Chiang, H. D.; Thorp, J. S. The Closest Unstable Equilibrium Point Method For Power System Dynamic Security Assessment. IEEE Transactions on Circuit and Systems, 1989, USA, vol. 36, no. 9, p. 1187-1200.
- [54] Kakimoto, N.; Hayashi, M. IEEE 20th Conference On Decision And Control Including The Symposium on Adaptative Processes, 1981, vol. 20, p. 464-470.
- [55] Kakimoto, N.; Ohnogi, Y.; Matsuda, H.; Shibuya, H. Transient Stability Analysis Of Large-Scale Power System By Lyapunov's Direct Method. IEEE Transactions On Power Apparatus And Systems, 1984, USA, vol. PAS-103, no. 1, p. 160-167.
- [56] Pai, M. A.; Sauer, P. W. Stability Analysis Of Power Systems By Lyapunov's Direct Method. IEEE Control Systems Magazine, 1989, USA, vol. 9, no. 1, p. 23-27.
- [57] Sauer, P. W., Behera, A. K.; Pai, M. A.; Winkelman, J. R.; Chow, J. H. Trajectory Approximations For Direct Energy Methods That Use Sustained Faults With Detailed Power System Models. IEEE Transactions On Power Systems, 1989, USA, vol. 4, no. 2, p. 499-506.
- [58] Chiang, H. D.; Wu, F. F; Varaiya, P. P. Foundations Of The Potential Energy Boundary Surface Method For Power System Transient Stability Analysis. IEEE Transactions on Circuit and Systems, 1988, USA, vol. 35, no. 6, p. 712-728.
- [59] Chiang, H. D.; Wu, F. F; Varaiya, P. P. A BCU Method For Direct Analysis of Power System Transient Stability. IEEE Transactions on Power Systems, 1994, USA, vol. 9, no. 3, p. 1194-1208.
- [60] Prabhakara, F. S. e El-Abiad, A. H. A Simplified Determination of Stability Regions for Lyapunov Method. IEEE Transactions On Power Apparatus and Systems, 1975, vol. pas-94, p. 672-689.
- [61] Ribbens-Pavella, M.; Murthy, P. G. e Horward, J. L. The Acceleration Approach to Practical Transient Stability Domain Estimation in Power Systems. Proc. of the 20th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, C. A., Dec. 16-18, 1981, p. 471-477.
- [62] Alberto, L. F. C.; Chiang, H. D. Uniform Approach for Stability Analysis of Fast Subsystem of Two-Time Scale Nonlinear Systems. International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, 2007, vol. 17, p. 4195-4203.

- [63] Alberto, L. F. C.; Chiang, H. D. Controlling Unstable Equilibrium Point Theory for Stability Assessment of Two-Time-Scale Power System Models. IEEE Power & Energy Society General Meeting, 2008, Pittsburgh.
- [64] Theodoro, Edson A. R. Contribuição à Análise de Estabilidade Transitória, em duas Escalas de Tempo, de Sistemas Elétricos de Potência via Métodos Diretos. Tese de Doutorado. EESC – Universidade de São Paulo, 2013.
- [65] Chiang, H. D.; Tada, Y.; LI, H; Takazawa, T. TEPCO-BCU For On-Line Dynamic Security Assessments Of Large-Scale Power Systems. 8th International Conference On Advances In Power System Control, Operation And Management (APSCOM 2009).