João Paulo Cerri

**Controle e Filtragem para Sistemas Lineares
Discretos Incertos sujeitos a Saltos
Markovianos¹**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências, Programa de Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Sistemas Dinâmicos
Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra

São Carlos
2013

¹Trata-se da versão corrigida da tese. A versão original se encontra disponível na EESC/USP que aloja o Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica.

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

C417c Cerri, João Paulo
Controle e Filtragem para Sistemas Lineares
Discretos Incertos sujeitos a Saltos Markovianos / João
Paulo Cerri; orientador Marco Henrique Terra. São
Carlos, 2013.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas
Dinâmicos -- Escola de Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo, 2013.

1. Sistemas lineares. 2. Cadeia de Markov. 3.
Controle. 4. Filtragem. 5. Robustez. 6. Equação de
Riccati. 7. Mínimos Quadrados. 8. Função Penalidade. I.
Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Bacharel **JOÃO PAULO CERRI**.

Título da tese: "Controle e filtragem para sistemas lineares discretos incertos sujeitos a saltos Markovianos".

Data da defesa: 21/06/2013

Comissão Julgadora:

Prof. Associado **Marco Henrique Terra (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **João Yoshiyuki Ishihara**
(Universidade de Brasília/UnB)

Prof. Dr. **Alexandre Trofino Neto**
(Universidade Federal de Santa Catarina/UFSC)

Prof. Dr. **João Bosco Ribeiro do Val**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Prof. Associado **Eduardo Fontoura Costa**
(Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação/USP)

Resultado:

Aprovado

APROVADO

APROVADO

Aprovado

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

EEESCUSP
Serviço de Pós-Graduação
Protocolado em

Dedico este trabalho aos meus pais, Ademir e Rosemeire, os orientadores dos meus passos e a base sólida das minhas conquistas, por todo esforço, apoio e dedicação incommensuráveis, por inúmeras vezes terem me mostrado este sonho também podia ser concretizado. E, principalmente, por terem me concedido, sempre, a inestimável oportunidade de realizar-me cada vez mais nos estudos.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marco Henrique Terra, pela competência, oportunidade, ensinamentos e exemplos transmitidos.

Ao Prof. Dr. João Yoshiyuki Ishihara pelas proveitosas sugestões para com a pesquisa.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), por intermédio do Programa Pró-Engenharias, pela bolsa de doutorado concedida.

À Universidade de São Paulo em São Carlos, em especial à Escola de Engenharia de São Carlos, por toda a infraestrutura oferecida.

Aos docentes das disciplinas que cursei e aos funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica, em especial, Jussara e Marisa, as secretárias da Pós-Graduação

Aos colegas, antigos e novos, do Laboratório de Sistemas Inteligentes - LASI pelos bons momentos que passamos juntos no convívio diário.

A todos aqueles que por meio de uma simples sugestão, uma crítica ou um pensamento positivo contribuíram com o sucesso deste trabalho.

Especialmente, aos meus pais Ademir e Rosemeire e ao meu irmão Julio Cesar pela presença constante nas horas de alegria, pelos estímulos e pelo apoio incondicional nos momentos mais difíceis que só eles sabem que não foram poucos em todas as minhas jornadas.

E, finalmente, a Deus pela benção, pela saúde, pela sabedoria, pela oportunidade e pelo privilégio que me foi concedido ao frequentar este curso e concluir mais esta etapa em minha vida.

Epígrafe

*“O sucesso é ir de fracasso em fracasso
sem perder entusiasmo.”*

Winston Churchill

RESUMO

CERRI, J. P. Controle e Filtragem para Sistemas Lineares Discretos Incertos sujeitos a Saltos Markovianos. 2013. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

Esta tese de doutorado aborda os projetos robustos de controle e estimativa de estados para Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos (SLSM) de tempo discreto sob a influência de incertezas paramétricas. Esses projetos são desenvolvidos por meio de extensões dos critérios quadráticos clássicos para SLSM nominais. Os critérios de custo quadrático para os SLSM incertos são formulados na forma de problemas de otimização min-max que permitem encontrar a melhor solução para o pior caso de incerteza (máxima influência de incerteza). Os projetos robustos correspondem às soluções ótimas obtidas por meio da combinação dos métodos de funções penalidade e mínimos quadrados regularizados robustos. Duas situações são investigadas: regular e estimar os estados quando os modos de operações são observados; e estimar os estados sob a hipótese de desconhecimento da cadeia de Markov. Estruturalmente, o regulador e as estimativas de estados assemelham-se às respectivas versões nominais. A recursividade é estabelecida em termos de equações de Riccati sem a necessidade de ajuste de parâmetros auxiliares e dependente apenas das matrizes de parâmetros e ponderações conhecidas.

Palavras-Chave: *Sistemas lineares. Cadeia de Markov. Controle. Filtragem. Robustez. Equação de Riccati. Mínimos Quadrados. Função Penalidade.*

ABSTRACT

CERRI, J. P. Control and Filtering for Uncertain Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems. 2013. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

This thesis deals with recursive robust designs of control and state estimates for discrete-time Markovian Jump Linear Systems (MJLS) subject to parametric uncertainties. The designs are developed considering extensions of the standard quadratic cost criteria for MJLS without uncertainties. The quadratic cost criteria for uncertain MJLS are formulated in the form of min-max optimization problems to get the best solution for the worst uncertainty case. The optimal robust schemes correspond to the optimal solution obtained by the combination of penalty function and robust regularized least-squares methods. Two cases are investigated: to control and estimate the states when the operation modes are observed; and, to estimate the states when the Markov chain is unobserved. The optimal robust LQR and Kalman-type state estimates resemble the respective nominal versions. The recursiveness is established by Riccati equations in terms of parameter and weighting matrices previously known and without extra offline computations.

Keywords: *Linear system. Markov chain. Control. Filtering. Robustness. Riccati equation. Least squares. Penalty function.*

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	Organização do Texto.	13
FIGURA 2.1	Regulador Linear Quadrático.	49
FIGURA 3.1	Regulador Linear Quadrático Robusto.	67
FIGURA 3.2	Simulação de Monte Carlo: Trajetórias ($\cdots$) e Média ($--$).	67
FIGURA 4.1	Estimativas Ótimas - Predição.	87
FIGURA 4.2	Realização da Cadeia de Markov.	87
FIGURA 4.3	Comparação de Desempenho.	88
FIGURA 5.1	Estimativas Robustas - Predição.	103
FIGURA 5.2	Comparação de Desempenho.	104
FIGURA 5.3	Comparação de Desempenho: Nominal $\times$ Robusto.	105
FIGURA D.1	Polos - Sistema em Malha Aberta com $\Delta_k \in [-1, 1]$	178
FIGURA D.2	Polos - Sistema em Malha Fechada com $\Delta_k \in [-1, 1]$	179
FIGURA D.3	Regulador Linear Quadrático Robusto via Função Penalidade.	179

FIGURA D.4	Regulador Linear Quadrático Padrão.	181
FIGURA D.5	Controle H_∞ ($\gamma=2.45$).	182
FIGURA D.6	Traço de $(P^{-1} + \epsilon HH^T)^{-1}$ para $\epsilon \in (0, 0.0220)$	183
FIGURA D.7	Controle Custo Garantido ($\epsilon^* = 0.0182$).	184
FIGURA D.8	Malha Fechada.	184
FIGURA D.9	Polos do Sistema com $\Delta_k \in [-1, 1]$	186
FIGURA D.10	Polos da Matriz $X_{61,k k-1}^\mu$ com $\Delta_k \in [-1, 1]$	186
FIGURA D.11	Variância do Erro de Estimativa - $\Delta \in [-1, 1]$	188
FIGURA D.12	Variância do Erro de Estimativa - $\Delta_k \in [-1, 1]$	188

LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1	Regulador Linear Quadrático para SLSM Nominais	45
TABELA 3.1	Regulador Linear Quadrático Robusto para SLSM	60
TABELA 4.1	Estimativas de Estados Ótimas nas Formas Preditora e Filtrada . . .	76
TABELA 4.2	Estimativas de Estados Ótimas nas Formas Filtrada e Suavizada . . .	82
TABELA 5.1	Estimativas de Estados Robustas nas Forma Preditora e Filtrada . . .	99
TABELA D.1	Comportamento do Regulador Linear Quadrático Robusto quando $\mu \rightarrow +\infty$	180
TABELA D.2	Comportamento do Filtro Robusto quando $\mu \rightarrow +\infty$	186

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DML - **D**esigualdade **M**atricial **L**inear

EMQML - **E**stimativa **M**ínima **Q**uadrática **M**édia **L**inear

MQ - **M**ínimos **Q**uadrados

MQP - **M**ínimos **Q**uadrados **P**onderados

MQR - **M**ínimos **Q**uadrados **R**egularizados

MQRI - **M**ínimos **Q**uadrados **R**egularizados com **I**ncertezas

RLQ - **R**egulador **L**inear **Q**uadrático

RLG - **R**egulador **L**inear **G**aussiano

SLSM - **S**istema **L**inear sujeito a **S**altos **M**arkovianos

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descrição
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	conjunto dos vetores reais n-dimensionais
$\mathbb{R}^{n \times m}$	conjunto das matrizes reais $n \times m$
Θ	conjunto (finito) dos modos de operações
$\mathbb{P}$	matriz de probabilidades
p_{ij}	probabilidade de transição do modo i para o modo j
$\pi_i, \pi_{i,k}$	probabilidades do modo i
i e j	índices (modos de operações)
k	índice de tempo
$\mathbb{E}\{\cdot\}$	valor esperado
θ_k	estado da cadeia de Markov no instante k
$1_{\{\cdot\}}$	função indicadora
$\otimes$	produto de Kronecker
$diag[\cdot]$	matrix bloco diagonal
μ	parâmetro de penalidade
δA	matriz de parâmetros incertos
δb	vetor de parâmetros incertos
Δ	matriz de contração
I_n	matriz identidade de ordem n
$A^\dagger$	pseudo-inversa da matriz A
$A^{\frac{1}{2}}$	raiz quadrada da matriz semidefinida positiva A

$A \succeq 0$	A é uma matriz semidefinida positiva
$A \succ 0$	A é uma matriz definida positiva
$A \succeq B$	$A - B$ é uma matriz semidefinida positiva
$A \succ B$	$A - B$ é uma matriz definida positiva
M/A	complemento de Schur da submatriz A na matriz particionada M
$a > 0$	número real positivo
$r_\sigma(A)$	raio espectral da matriz A
$\ x\ $	norma Euclidiana de x definida por $(x^T x)^{\frac{1}{2}}$
$\ x\ _P$	norma ponderada de x definida por $(x^T P x)^{\frac{1}{2}}$ com $P \succ 0$
$x^T W(\bullet)$	expressão simplificada para $x^T W x$

SUMÁRIO

Introdução	5
SLSM Nominais	6
SLSM com Incertezas	8
Proposta do Trabalho	10
Organização do Texto	11
Publicações	13
 1 Resultados Preliminares	 15
1.1 Função Penalidade	16
1.1.1 Convergência	17
1.2 Problemas de Mínimos Quadrados	18
1.2.1 Mínimos Quadrados	18
1.2.2 Mínimos Quadrados Ponderados	19
1.2.3 Mínimos Quadrados Regularizados	22
1.2.4 Mínimos Quadrados Regularizados com Incertezas	23
1.3 Problema de Mínimos Quadrados Ponderados Restrito	27
 2 Regulador Linear Quadrático para SLSM Dependente do Modo	 33
2.1 Formulação do Problema	34
2.2 Solução do Problema	36
2.2.1 Equivalência das Soluções	41
2.2.2 Estabilidade e Convergência	47

2.3	Exemplo Numérico	49
2.4	Conclusões Parciais	50
3	Regulador Linear Quadrático Robusto para SLSM Dependente do Modo	51
3.1	Formulação do Problema	52
3.2	RLQ Robusto Recursivo	54
3.3	Convergência e Estabilidade	59
3.3.1	Equivalências	59
3.3.2	Resultado Principal	64
3.4	Exemplo Numérico	66
3.5	Conclusões Parciais	68
4	Filtro de Kalman para SLSM Dependente do Modo	69
4.1	Formulação do Problema	70
4.1.1	Interpretação Determinística	72
4.2	Solução do Problema	73
4.2.1	Estimativas Ótimas	74
4.2.2	Estimativas Subótimas	83
4.3	Exemplo Numérico	86
4.4	Conclusões Parciais	89
5	Filtro de Kalman Robusto para SLSM Dependente do Modo	91
5.1	Formulação do Problema	92
5.2	Estimativas de Estados Robustas	95
5.3	Exemplo Numérico	102
5.4	Conclusões Parciais	105
6	Filtro de Kalman para SLSM Independente do Modo	107
6.1	Formulação do Problema	108
6.2	Abordagem Estocástica	110
6.3	Abordagem Determinística	113
6.3.1	Reinterpretação do Problema	113
6.3.2	Estimativas de Estados	115
6.4	Conclusões Parciais	120

7 Filtro de Kalman Robusto para SLSM Independente do Modo	121
7.1 Formulação do Problema	122
7.1.1 Sistema Incerto Aumentado	123
7.2 Solução do Problema	128
7.2.1 Estabilidade	132
7.3 Conclusões Parciais	134
Conclusões	137
Objetivos Alcançados	137
Trabalhos Futuros	138
Referências	141
Apêndice A Resultados Auxiliares	153
A.1 Blocos Matriciais	153
A.2 Limitantes	155
Apêndice B Estimativas de Estados Ótimas Determinísticas	159
B.1 Estimativa dos Estados	159
B.1.1 Estimativa Preditora	161
B.1.2 Estimativa Filtrada	165
Apêndice C Sistema Aumentado	169
C.1 Dedução do Sistema Aumentado	169
C.2 Demonstração do Lema 6.3.1	171
Apêndice D Análises e Comparações	177
D.1 Regulador Robusto	177
D.2 Filtro Robusto	185
Índice Remissivo	189

INTRODUÇÃO

O estudo das técnicas de controle e estimativa de estados para lidar com sistemas dinâmicos suscetíveis à alterações abruptas de suas estruturas é um tópico que tem despertado a atenção dos especialistas nos últimos 50 anos. Na prática, tais circunstâncias são frequentemente observadas, por exemplo, em sistemas econômicos [9], receptores solares [97], robôs manipuladores [33] e mais uma série de situações [86], e são ocasionadas por diversos fatores, tais como: influências ambientais, falhas de componentes e alterações nos pontos de operação. Na teoria, essas ocorrências podem ser representadas por um conjunto de modelos, cada um deles responsável por uma das configurações possíveis.

Os Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos (SLSM) são aqueles constituídos por uma família de sistemas lineares com as transições entre esses sistemas modeladas por um processo de Markov, *i.e.*, uma cadeia de Markov. Nessa classe de sistemas, as matrizes de parâmetros estão associadas a uma variável de salto admitindo valores a cada instante em um conjunto finito, situação na qual se configura o objeto de estudo desta tese. O caso em que cadeia de Markov admite valores em um conjunto infinito enumerável também é investigado na literatura, veja, por exemplo, [23, 31, 32, 52, 53, 55], porém não será alvo da pesquisa deste trabalho. Um amplo conteúdo sobre SLSM pode ser encontrado em [33, 86].

A seguir é apresentada uma visão geral das etapas do desenvolvimento do estudo de SLSM em diferentes cenários. Sobretudo, é dado destaque aos aspectos relevantes para o encaminhamento do que se propõe nesta tese no que concerne os projetos de regulador e estimadores de

estados recursivos para SLSM incertos.

SLSM Nominais

O estudo dessa classe de sistemas desenvolveu-se intensamente nas últimas cinco décadas, em especial durante os anos de 1980. Um dos trabalhos pioneiros foi [96], que introduziu o princípio do máximo estocástico para SLSM de tempo contínuo e o aplicou ao problema de controle ótimo quadrático. Em seguida, em [9] foi estabelecida a versão em tempo discreto para o problema de controle ótimo de horizonte finito com base em um critério quadrático, com a lei de controle ótimo obtida em termos de equações de Riccati acopladas. Posteriormente, em [19] foram propostas condições necessárias e suficientes para a existência de um ganho de realimentação estabilizante quando o horizonte de tempo é infinito, sendo algumas delas complicadas e de difícil aplicação de acordo com os próprios autores.

A respeito da estabilidade de SSLM, por exemplo, os resultados propostos não estavam estritamente vinculados ao problema de controle linear quadrático com saltos como na versão determinística, *i.e.*, o problema do regulador linear quadrático (RLQ) [4, 77, 78, 88]. Com o intuito de preencher essa lacuna, alguns trabalhos foram publicados visando estender para a classe de SLSM os resultados bem estabelecidos para sistemas sem saltos. Esses trabalhos propuseram a extensão dos conceitos, critérios e projetos clássicos estabelecidos para sistemas lineares nominais sem saltos no espaço de estado. Destaque para [71], que introduziu os conceitos de controlabilidade e observabilidade para SLSM, e a relação deles com a solução do problema de controle ótimo quadrático de horizonte infinito como um aprimoramento daqueles previamente desenvolvidos por [19].

Resultados mais significativos a respeito da estabilidade de SLSM de tempo discreto são propostos em [30]. Nesse trabalho, condições necessárias e suficientes para a estabilidade na média quadrática (EMQ) são apresentadas. A EMQ fica caracterizada pelo raio espectral, menor que a unidade, de uma matriz aumentada ou, de forma equivalente, pela existência de solução de uma determinada equação de Lyapunov. A versão para SLSM de tempo contínuo com observação parcial da cadeia de Markov é estabelecida em [54]. As propriedades de detectabilidade e observabilidade de SLSM são investigadas em [20, 21, 22].

As hipóteses de disponibilidade ou indisponibilidade dos estados da cadeia de Markov a cada instante consistem em um aspecto de grande relevância no estudo de SLSM. A observação ou não dos modos de operações impõe restrições importantes nos projetos de controladores e estimadores de estado. Convenciona-se que a análise realizada é dependente do modo quando é admitido o completo conhecimento dos estados da cadeia de Markov, e independente do modo quando não se tem acesso a eles.

Projetos de controladores e estimadores de estado têm sido amplamente explorados em ambos os cenários. Como exemplos de projetos de controladores dependentes do modo podem ser citados [9, 18, 19, 28, 29, 38, 39], enquanto [46, 65, 105] representam a categoria de controladores independentes do modo. Na mesma linha, ao passo que [18, 39, 82] são exemplos de estimadores de estados dependentes do modo, [24, 25, 26, 34, 35, 57, 58] ilustram a classe de projetos independentes do modo. O princípio da separação para SLSM de tempos discreto e contínuo é investigado em [39, 40] e [56], respectivamente.

Os trabalhos [18, 65, 105] são representativos no que se refere a projetos de controladores sob diferentes hipóteses sobre o SLSM. Em [18, 65, 105] são propostas soluções para o problema de controle ótimo de SLSM com observações imperfeitas da variável de estado do sistema, veja também [33]. Especificamente, enquanto [18] considera como hipótese a observação dos estados da cadeia de Markov, por outro lado, [65, 105] supõem que os modos também não são observados. Em [1, 33] são estabelecidas condições necessárias e suficientes para a existência de uma solução semidefinida positiva para as equações de Riccati acopladas decorrentes do problema de controle ótimo de tempo discreto.

Dentre os projetos de estimadores de estados independente do modo de operação para SLSM, [25] merece destaque. Nesse trabalho, a estimativa de estado recursiva ótima é desenvolvida com base no critério da estimativa mínima quadrática média linear. Em vez de se estimar as variáveis originais do sistema, o projeto considera as estimativas de estados de um sistema linear aumentado no espaço de estado de dimensão sn , no qual s consiste no número de modos de operações e n na dimensão da variável de estado do modelo. A versão estacionária desse filtro foi proposta em [34].

Com relação aos estimadores de estados sob a hipótese de observação do parâmetro de salto a cada instante de tempo, é bem conhecido que as estimativas de estados ótimas são fornecidas

pelo Filtro de Kalman, veja [18, 33, 72]. No entanto, a implementação *offline* desse estimador sob a presença de saltos é computacionalmente inviável, uma vez que a exigência computacional e o uso de memória aumentam exponencialmente com o passar do tempo, veja comentários a respeito em [33]. Para amenizar essa dificuldade, tem-se considerado em situações práticas o projeto em uma versão subótima, veja [18, 39].

É claro que os trabalhos supracitados não esgotam as contribuições relevantes na teoria de controle e filtragem de SLSM. Porém, no entendimento do autor, esses trabalhos são os mais significativos no que tange os projetos recursivos de controle e estimativa de estados, e servirão como inspiração para lidar com SLSM incertos.

SLSM com Incertezas

Motivado principalmente pelos avanços obtidos durante a década de 1980 e diante de algumas limitações práticas dos resultados existentes, cenários mais abrangentes passaram a ser investigados quando aspectos adicionais foram agregados ao SLSM visando torná-lo mais representativo da realidade. Um desses cenários consiste, por exemplo, em supor que o SLSM esteja sob a influência de distúrbios externos e ou incertezas de qualquer natureza [90]. Diversos trabalhos podem ser encontrados na literatura propondo abordagens alternativas para o tratamento dessa categoria de problema quando os modos de operações são observados parcialmente, completamente ou quando não são observados. Soluções robustas, de um modo geral, para os problemas de controle e estimativas de estados de SLSM incertos têm sido exaustivamente investigadas nesses cenários nas últimas décadas, veja [10, 11, 12, 36, 37, 47, 84, 89, 94] e [50, 62, 63, 80, 85, 102, 109, 114], respectivamente.

Com relação ao problema de controle robusto, há um predomínio de soluções baseadas em desigualdades matriciais lineares (DMLs), veja, por exemplo, os trabalhos [36, 37, 45, 47]. Em paralelo à evolução dos estudos dos problemas de controle, o problema de estimativa de estados também tem recebido grande atenção. A abordagem via DMLs também predomina nessa categoria de problema, veja, por exemplo, [27, 34, 50, 63, 80, 85, 110]. Soluções baseadas em equações de Riccati também são encontradas, veja [80, 98, 114]. Os trabalhos [44, 50, 62] propõem projetos de estimadores de estados dependentes e independentes do modo. Em [80],

o filtro robusto estacionário é apresentado em duas versões, uma em termos de DMLs e outra por meio de um conjunto de equações de Riccati algébricas acopladas. Já [85] desenvolve um projeto de estimador de estado robusto com custo garantido sob a hipótese de presença de incertezas no parâmetro de salto.

Como segunda opção, encontram-se algumas alternativas de controle robusto em termos de equações [10] ou inequações [11, 94] de Riccati, que são decorrentes de critérios interpretados como uma extensão do procedimento padrão de projeto para sistemas lineares incertos no espaço de estado. Especial destaque deve ser dado ainda a [43, 98, 114] que propõem estimativas robustas como uma extensão dos filtros de Kalman robustos para sistemas lineares incertos no espaço de estado cujas soluções são obtidas em termos de equações de Riccati.

Pode-se observar na literatura que abordagens baseadas nos critérios de otimização de funcionais quadráticos como uma extensão de projetos clássicos de controle e de estimativas de estados para sistemas lineares nominais, veja, por exemplo, [7, 13, 81, 92], têm sido pouco exploradas. Os trabalhos [92, 93] adotaram um tipo de critério para a obtenção de um regulador linear quadrático e um estimador de estados robustos para sistemas lineares incertos sem saltos, respectivamente. Estimativas de estados robustas de sistemas descritores [68, 70] também foram obtidas por meio dessa abordagem quando um funcional quadrático adequado foi projetado. A característica comum entre todos esses estimadores de estados é a recursividade do tipo Kalman. Ainda que não sejam projetados para SLSM, os projetos em [68, 70, 92, 93] são baseados em recursividade e dispensam a verificação de certas condições de existência para aplicação, uma inconveniência em muitas outras soluções robustas. No entanto, todos eles são dependentes do ajuste de um parâmetro a cada instante por meio de um problema de otimização auxiliar.

É comum entre as soluções robustas existentes na literatura que a busca pelo ótimo robusto seja dependente, por exemplo, da verificação de condições de existência ou da determinação de um parâmetro auxiliar a cada instante. Com a finalidade de contornar esses problemas, uma pergunta vem à tona: é possível o desenvolvimento de projetos robustos que se assemelham às versões ótimas recursivas para SLSM sem incertezas? Uma vez levantada esta questão, esta tese destina-se a demonstrar que a abordagem de projeto baseada nos problemas clássicos para SLSM nominais, quando adequadamente trabalhada, é eficiente o bastante para lidar com os

problemas de controle e estimativa de estados para SLSM incertos.

Proposta do Trabalho

Esta tese propõe o uso de critérios baseados na otimização de funcionais quadráticos sujeitos a incertezas para resolver os problemas de controle e estimativa de estados de SLSM incertos por meio de algoritmos recursivos. Os projetos robustos propostos herdam a recursividade dos projetos nominais modificados apenas pelos parâmetros que modelam as incertezas.

A abordagem proposta nesta pesquisa tem por objetivo aliar a vantagem dos projetos decorrentes da minimização de custos quadráticos clássicos com o aspecto de robustez. Como um aperfeiçoamento dos projetos clássicos para lidar com a presença de incertezas paramétricas, esse procedimento consiste na combinação da solução do problema de mínimos quadrados com incertezas [93] e o método de funções penalidade [83]. A estratégia decorrente dessa combinação permite projetar reguladores lineares quadráticos e estimadores de estados para sistemas incertos que dispensam o ajuste de qualquer parâmetro auxiliar para garantir a robustez e a otimalidade.

A pesquisa será desenvolvida tendo como base o seguinte SLSM incerto apresentado sob a forma mais geral dada por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (F_{\theta_k,k} + \delta F_{\theta_k,k})x_k + (B_{\theta_k,k} + \delta B_{\theta_k,k})u_k + (G_{\theta_k,k} + \delta G_{\theta_k,k})w_k, \\ y_k &= (C_{\theta_k,k} + \delta C_{\theta_k,k})x_k + (D_{\theta_k,k} + \delta D_{\theta_k,k})v_k, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

com as matrizes de parâmetros incertos modeladas como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta F_{\theta_k,k} & \delta B_{\theta_k,k} & \delta G_{\theta_k,k} \end{bmatrix} &= M_{\theta_k,k} \Delta_{\theta_k,k}^1 \begin{bmatrix} E_{F_{\theta_k,k}} & E_{B_{\theta_k,k}} & E_{G_{\theta_k,k}} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \delta C_{\theta_k,k} & \delta D_{\theta_k,k} \end{bmatrix} &= N_{\theta_k,k} \Delta_{\theta_k,k}^2 \begin{bmatrix} E_{C_{\theta_k,k}} & E_{D_{\theta_k,k}} \end{bmatrix}, \quad \|\Delta_{\theta_k,k}^q\| \leq 1, \quad q = 1, 2, \end{aligned}$$

sendo x_k o vetor de estado, u_k a entrada de controle, y_k o vetor de medida, w_k e v_k ruídos aleatórios e $\{\theta_k\}$ um processo de Markov de estados finitos e tempo discreto com matriz de probabilidades de transição de estados $\mathbb{P} = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{s \times s}$. Detalhes desse modelo serão apresentados durante o desenvolvimento dos capítulos.

Inicialmente serão desenvolvidos um controlador e um estimador de estados para SLSM sujeitos a incertezas paramétricas estruturadas sob as hipóteses de observações das variáveis de estado e de salto. Em seguida, será projetado um estimador de estados para SLSM também sujeitos a incertezas paramétricas estruturadas, porém sob a condição de que o parâmetro de salto não é observado. Funcionais quadráticos penalizados serão introduzidos para lidar com cada um dos problemas em questão. A estabilidade e convergência serão demonstradas para toda incerteza admissível quando os SLSM incertos são considerados invariantes no tempo.

Organização do Texto

O texto da tese está organizado em sete capítulos. O primeiro deles é destinado à apresentação de resultados preliminares que darão suporte ao desenvolvimento dos seis capítulos subsequentes. Conteúdos complementares aos capítulos também são incluídos na forma de apêndices. Uma breve descrição sobre o conteúdo de cada um dos capítulos é apresentada na sequência, a passo que a Figura 1 apresenta um diagrama da organização e as conexões entre eles.

- **Capítulo 1:** Um estudo introdutório sobre o método de funções penalidade para a solução de problemas de minimização com restrições é apresentado. Problemas de mínimos quadrados e algumas de suas variações, como o caso sujeito a incertezas, por exemplo, são revistos também. Estruturas alternativas para a solução desses problemas são deduzidas.
- **Capítulo 2:** O problema do controle ótimo linear quadrático para SLSM, sob a hipótese de completa observação dos estados e os modos da cadeia, é revisitado em uma nova abordagem. A solução recursiva é apresentada em uma estrutura de blocos matriciais particionados. A equivalência com a solução clássica também é demonstrada.
- **Capítulo 3:** O regulador robusto recursivo para SLSM é deduzido para uma determinada categoria de incertezas paramétricas. O projeto do funcional quadrático é baseado em uma extensão direta do funcional quadrático penalizado obtido no Capítulo 2. A convergência e a estabilidade desse regulador são investigadas.

- **Capítulo 4:** O Filtro de Kalman para SLSM será revisto sob o ponto de vista de argumentos determinísticos sob a hipótese de observação da cadeia de Markov. As estimativas de estados são deduzidas valendo-se da minimização de funcionais quadráticos e apresentadas em um arranjo diferenciado equivalente à solução clássica.
- **Capítulo 5:** O estimador de estados robusto recursivo para SLSM é deduzido para uma determinada categoria de incertezas paramétricas. O projeto do funcional quadrático consiste em uma extensão direta do funcional quadrático penalizado obtido no Capítulo 4.
- **Capítulo 6:** O problema de obtenção das estimativas ótimas recursivas para SLSM nominais sem observação da cadeia de Markov é apresentado por meio da minimização de um funcional quadrático; uma formulação alternativa, porém equivalente ao desenvolvido em [25].
- **Capítulo 7:** O estimador robusto recursivo para SLSM sujeitos a incertezas paramétricas é apresentado. A abordagem utilizada consiste em uma extensão do funcional quadrático penalizado de um passo utilizado para a dedução do estimador nominal recursivo no Capítulo 6.
- **Apêndice A:** Alguns resultados que foram utilizados nas deduções matemáticas nesta tese serão apresentados com o intuito de compor uma referência rápida durante a leitura do trabalho.
- **Apêndice B:** Uma interpretação determinística para o problema de estimativa de estados de um sistema linear com ruídos aleatórios é apresentada mediante a minimização de um funcional quadrático.
- **Apêndice C:** A dedução do sistema aumentado de acordo com [25] e a demonstração do Lema 4.2.2 são apresentadas como complemento aos capítulos 6 e 7.
- **Apêndice D:** Uma análise quantitativa da abordagem via penalidade para lidar com os problemas de controle e estimativas de estados para sistemas lineares incertos sem saltos é desenvolvida.

Figura 1: Organização do Texto.

Publicações

Abaixo constam as publicações decorrentes deste projeto de pesquisa:

- Revistas:

- (a) - M. H. Terra, J. P. Cerri, and J. Y. Ishihara, *Optimal Robust Linear Quadratic Regulator for Systems subject to Uncertainties*. Submetido para IEEE Transactions on Automatic Control.
- (b) - M. H. Terra, J. Y. Ishihara, G. Jesus, and J. P. Cerri, *Robust estimation for discrete-time Markovian jump linear systems*. Aceito para publicação na IEEE Transactions on Automatic Control, 2013.

- Conferências:

- (a) - J. P. Cerri and M. H. Terra, *Robust Filtering for Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems Via Penalty Game Approach*. 51th IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2012), December 10-13, 2012, Maui, Hawaii, USA.
- (b) - J. P. Cerri e M. H. Terra, *Estimativas de Estados para Sistemas Lineares Discretos Sujeitos a Saltos Markovianos via Função Penalidade*. XIX Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2012), 02-06 de setembro, 2012, Campina Grande, PB, Brasil.

- (c) - J. P. Cerri and M. H. Terra, *Control of Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems Subject to Partially Observed Chains*. American Control Conference (ACC 2012), June 27-29, 2012, Montreal, Canada.
- (d) - I. B. Ferração, M. H. Terra, and J. P. Cerri, *Optimal Sliding Mode Control via Penalty Approach for Discrete-Time Linear Systems*. 18th IFAC World Congress (IFAC 2011), 2011, Milano, Italy.
- (e) - I. B. Ferração, M. H. Terra e J. P. Cerri, *Controle Ótimo por Modos Deslizantes para Sistemas Multivariáveis de Tempo Discreto*. XXXIII Congresso de Matemática Aplicada e Computacional (CMAC - SE 2011), 20-23 de setembro, 2011, Uberlândia, MG, Brasil.
- (f) - J. P. Cerri, M. H. Terra, and J. Y. Ishihara *Recursive Robust Regulator for Discrete-time Markovian Jump Linear Systems via Penalty Game Approach*. 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2010), December 15-17, 2010, Atlanta, GA, USA.
- (g) - J. P. Cerri, M. H. Terra e J. Y. Ishihara, *Nova Abordagem para o Controle Ótimo de Sistemas Lineares Discretos Sujeitos a Saltos Markovianos*. XVIII Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2010), 12-16 de setembro, 2010, Bonito, MS, Brasil.
- (h) - L. S. A. Tubota, J. P. Cerri, M. H. Terra e A. A. G. Siqueira, *Controle Robusto Recursivo Aplicado em Robôs Bípedes*. XVIII Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2010), 12-16 de setembro, 2010, Bonito, MS, Brasil.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PRELIMINARES

Inicialmente, um procedimento clássico baseado em um método de penalização para lidar com problemas de otimização com restrições é apresentado, *i.e.*, o *Método de Funções Penalidade*. Esse recurso compõe uma classe de métodos¹ que se caracterizam pela simplicidade conceitual e eficiência prática para a solução de alguns problemas sujeitos a restrições. O método de função penalidade aproxima o problema de otimização restrita por uma sequência de problemas irrestritos, cujas soluções convergem para a solução do problema original. A aproximação dá-se por meio da adição à função objetivo de um termo constituído de um parâmetro de penalidade e uma medida da violação da restrição, a qual: é nula, quando as restrições são satisfeitas; e não nula, no caso contrário. Os principais resultados a respeito da convergência dessa técnica são apresentados.

Posteriormente, o problema clássico de *Mínimos Quadrados*² é revisitado. O problema de mínimos quadrados consiste no procedimento padrão para encontrar a solução aproximada de sistemas lineares sobredeterminados, *i.e.*, aqueles nos quais o número de equações é maior que o número de incógnitas. Essa técnica é caracterizada pela minimização da soma do quadrado dos erros individuais de cada equação. Algumas das variações do problema de mínimos quadrados,

¹Método da Barreira, por exemplo. Mais informações sobre esse e outros métodos, consulte [6, 83, 107].

²Mais detalhes em [8].

tais como a versão ponderada, regularizada e sob a influência de incertezas, também são revistas. É estabelecido ainda o problema de Mínimos Quadrados Ponderados (MQP)³ sujeito a uma restrição de igualdade linear, o qual é resolvido por meio do método de penalidades combinado à solução ótima do problema de MQP irrestrito. As soluções de todos esses problemas são apresentadas em estruturas de blocos matriciais.

A combinação dos procedimentos de penalidades e MQP resultará em uma ferramenta útil para a solução dos problemas de controle e filtragem considerados nesta tese, os quais serão formulados valendo-se da otimização de funcionais quadráticos restrito ao modelo dinâmico linear.

1.1 Função Penalidade

Considere o problema de minimização com restrição

$$\min_{x \in S} \{f(x)\} , \quad (1.1)$$

sendo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de restrição. O princípio fundamental do método de funções penalidade é substituir o problema (1.1) por um problema irrestrito da forma

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) + \mu P(x)\}, \quad (1.2)$$

sendo μ uma constante real positiva e $P(x)$ satisfazendo as seguinte propriedades:

(P1) - $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua;

(P2) - $P(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

(P3) - $P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in S$.

O termo $\mu P(x)$ em (1.2) é definido como *função penalidade*. O procedimento para resolução do problema (1.1) pelo método de funções penalidade é definido como segue:

³Veja a Lista de Abreviaturas e Siglas.

- seja $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ uma sequência de números reais satisfazendo:

$$\mu_k > 0; \mu_{k+1} > \mu_k \text{ e } \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k = +\infty; \quad (1.3)$$

- defina para cada μ_k a função $q(\mu_k, x) = f(x) + \mu_k P(x)$;
- para cada k resolva o problema $\min_x \{q(\mu_k, x)\}$, obtendo uma solução x_k .

1.1.1 Convergência

A convergência do método de penalidades é estabelecida nesta seção. Dois lemas serão apresentados antes de se estabelecer o resultado principal. As demonstrações podem ser encontradas com detalhes em [83].

Lema 1.1.1. *Sejam $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ uma sequência de números reais definida de acordo com (1.3) e $q(\mu_k, x)$ a função dada por $q(\mu_k, x) = f(x) + \mu_k P(x)$. Então, são verdadeiras as seguintes sentenças:*

- (i) - $q(\mu_k, x_k) \leq q(\mu_{k+1}, x_{k+1})$;
- (ii) - $P(x_k) \geq P(x_{k+1})$;
- (iii) - $f(x_k) \leq f(x_{k+1})$.

Lema 1.1.2. *Seja x^* uma solução para o problema (1.1). Então, para cada $k = 1, \dots, +\infty$ tem-se $f(x^*) \geq q(\mu_k, x_k) \geq f(x_k)$.*

Definição 1.1.1. *Um ponto $\mathbf{a}$ é um ponto limite da sequência $\{a_k\}$ se existir uma subsequência de $\{a_k\}$ que converge para $\mathbf{a}$. Dessa maneira, $\mathbf{a}$ é um ponto limite de $\{a_k\}$ se existir um subconjunto K dos inteiros positivos tal que a sequência $\{a_k\}_{k \in K}$ converge para $\mathbf{a}$.*

A garantia de que qualquer ponto limite da sequência é uma solução para o problema de minimização (1.1) é dada pelo Teorema 1.1.1, que segue dos lemas 1.1.1 e 1.1.2.

Teorema 1.1.1. *Seja $\{x_k\}$ uma sequência gerada pelo método de funções penalidade. Então, qualquer ponto limite da sequência é uma solução para (1.1).*

Detalhes sobre o método de penalidades podem ser encontrados na literatura que aborda da teoria de programação não-linear. Este trabalho baseou-se principalmente na teoria de funções penalidade desenvolvida em [2, 6, 51, 59, 83, 107].

1.2 Problemas de Mínimos Quadrados

Nesta seção, os problemas de mínimos quadrados e algumas de suas variações serão revisadas. Em seguida, a solução ótima desses problemas serão apresentadas em estruturas de blocos matriciais. O conteúdo pode ser encontrado em [2, 8, 74, 93].

1.2.1 Mínimos Quadrados

Considere o problema de minimização definido por

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \{J(x)\}, \quad (1.4)$$

no qual $J : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é a função quadrática definida por

$$J(x) = \|Ax - b\|^2 = (Ax - b)^T (Ax - b), \quad (1.5)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ conhecidos e $x \in \mathbb{R}^m$ o vetor incógnita.

Proposição 1.2.1. [74] *Um vetor x^* é uma solução mínima quadrática do problema (1.4)-(1.5) se e somente se ele satisfaz a chamada equação normal*

$$A^T A x^* = A^T b. \quad (1.6)$$

O valor mínimo da função $J(x)$ é dado por

$$J(x^*) = \|Ax^* - b\|^2 = \|b\|^2 - \|Ax^*\|^2. \quad (1.7)$$

Corolário 1.2.1. [74] *Se a matriz A admite posto coluna completo m , então existe um único x^* satisfazendo (1.6) dado por*

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b. \quad (1.8)$$

Além disso, o valor mínimo da função $J(x)$ é

$$J(x^*) = \|Ax^* - b\|^2 = b^T (I - A(A^T A)^{-1} A^T) b. \quad (1.9)$$

1.2.2 Mínimos Quadrados Ponderados

Considere agora o problema de minimização

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \{J(x)\}, \quad (1.10)$$

com a função quadrática $J(x)$ dada por

$$J(x) = \|Ax - b\|_W^2 = (Ax - b)^T W (Ax - b), \quad (1.11)$$

sendo $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz de ponderação) simétrica definida positiva, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ conhecidos e $x \in \mathbb{R}^m$ o vetor incógnita⁴.

Proposição 1.2.2. [74] *Um vetor x^* é uma solução mínima quadrática ponderada do problema (1.10)-(1.11) se e somente se ele satisfaz a equação normal $A^T W A x^* = A^T W b$. O valor mínimo da função $J(x)$ é dado por*

$$J(x^*) = \|Ax^* - b\|_W^2 = b^T W b - b^T W A x^*.$$

No caso em que A é uma matriz com posto coluna pleno, a única solução mínima quadrática ponderada x^ é dada por*

$$x^* = (A^T W A)^{-1} A^T W b,$$

⁴O caso da subseção 1.2.1 é obtido quando se considera $W = I$.

e o valor mínimo da função $J(x)$ pode ser reescrito como

$$J(x^*) = \|Ax^* - b\|_W^2 = b^T (W - WA(A^TWA)^{-1}A^TW)b.$$

Algumas equivalências com relação à estrutura matricial da solução do problema (1.10)-(1.11) são apresentadas no resultado a seguir.

Lema 1.2.1. [15] *Suponha que $W = W^T \succ 0$. Então as seguintes sentenças são equivalentes:*

- (i) - $x^* \in \arg \min_x \left\{ (Ax - b)^T W (Ax - b) \right\},$
- (ii) - $x = x^*$ é uma solução de $A^TWAx = A^TWb,$
- (iii) - $(\alpha, x) = (\alpha^*, x^*)$ é uma solução de $\begin{bmatrix} W^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.$

Se A é posto coluna pleno, então a única solução para a equação de (ii) e o custo ótimo são dados por⁵

$$\begin{bmatrix} x^* \\ J(x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Estimativa Mínima Quadrática Ponderada

Considere o problema de estimativa do vetor de estado $x \in \mathbb{R}^m$ por meio do vetor de observação $z \in \mathbb{R}^n$ proveniente do sistema dinâmico linear $z = Cx + v$, no qual $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é uma matriz conhecida, $v \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de ruído (erro) aleatório tal que $\mathbb{E}\{v\} = 0$, $\mathbb{E}\{vv^T\} = R \succ 0$ e independente de x . A estimativa mínima quadrática ponderada $\hat{x}$ do vetor x é definida por

$$\hat{x} := \arg \min_x \left\{ \|z - Cx\|_{R^{-1}}^2 \right\}. \quad (1.12)$$

Proposição 1.2.3. *Se C é posto coluna pleno, então a estimativa mínima quadrática ótima $\hat{x}$, o erro de estimativa $\tilde{e} = (\hat{x} - x)$ e variância do erro de estimativa são dados, respectivamente, por:*

$$(i) - \hat{x} = (C^T R^{-1} C)^{-1} C^T R^{-1} z,$$

⁵A existência da inversa é garantida por [83] - Capítulo 14, pág. 424. Veja Lema A.1.7 no Apêndice A.

$$(ii) - \tilde{e} = \hat{x} - x = (C^T R^{-1} C)^{-1} C^T R^{-1} v,$$

$$(iii) - \mathbb{E}\{\tilde{e}\tilde{e}^T\} = (C^T R^{-1} C)^{-1}.$$

Demonstração. (i) - Segue da Proposição 1.2.2.

(ii) - Uma vez que $\hat{x} = (C^T R^{-1} C)^{-1} C^T R^{-1} z$ e $z = Cx + v$, então

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (C^T R^{-1} C)^{-1} C^T R^{-1} z \\ &= (C^T R^{-1} C)^{-1} C^T R^{-1} (Cx + v) \\ &= x + (C^T R^{-1} C)^{-1} C^T R^{-1} v. \end{aligned}$$

(iii) - Lembrando que $\mathbb{E}\{vv^T\} = R \succ 0$, então:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\tilde{e}\tilde{e}^T\} &= \mathbb{E}\{((C^T R^{-1} C)^{-1} C^T R^{-1} v)((C^T R^{-1} C)^{-1} C^T R^{-1} v)^T\} \\ &= ((C^T R^{-1} C)^{-1} C^T R^{-1}) \mathbb{E}\{vv^T\} ((C^T R^{-1} C)^{-1} C^T R^{-1})^T \\ &= (C^T R^{-1} C)^{-1}. \end{aligned}$$

□

Observação 1.2.1. As conclusões da Proposição 1.2.3 podem ser estabelecidas ainda em uma estrutura matricial alternativa:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{e} = x - \hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{E}\{\tilde{e}\tilde{e}^T\} = - \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix},$$

e decorrem das fórmulas das entradas da matrix inversa do bloco matricial particionado $\begin{bmatrix} R & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}$, veja Apêndice A.

1.2.3 Mínimos Quadrados Regularizados

Considere o problema de minimização definido por

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \{J(x)\}, \quad (1.13)$$

com a função $J(x)$ dada agora por um funcional quadrático regularizado da forma

$$J(x) = \|x\|_Q^2 + \|Ax - b\|_W^2 = x^T Q x + (Ax - b)^T W (Ax - b), \quad (1.14)$$

sendo $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (matriz de regularização) simétrica definida positiva, $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica semidefinida positiva, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ conhecidos e $x \in \mathbb{R}^m$ o vetor incógnita.

Lema 1.2.2. [74] *A solução ótima do problema (1.13)-(1.14) é dada por*

$$x^* = (Q + A^T W A)^{-1} A^T W b.$$

Estimativa Mínima Quadrática Regularizada

Suponha que uma estimativa $\bar{x}$ do estado x , com matriz de variância $\bar{X} \succ 0$, seja conhecida antecipadamente a uma medição proveniente do modelo linear $z = Cx + v$. A fim de se aperfeiçoar a estimativa de x , considere o problema de obtenção da estimativa mínima quadrática regularizada de x definida por

$$\hat{x} := \arg \min_x \{ (x - \bar{x})^T \bar{X}^{-1} (x - \bar{x}) + (z - Cx)^T R^{-1} (z - Cx) \}. \quad (1.15)$$

Proposição 1.2.4. [13] *A estimativa mínima quadrática regularizada de x é dada por*

$$\hat{x} = \bar{x} + (\bar{X}^{-1} + C^T R^{-1} C)^{-1} C^T R^{-1} (z - C\bar{x}),$$

com a variância do erro de estimativa $(\bar{X}^{-1} + C^T R^{-1} C)^{-1}$.

As estimativas $\hat{x}$, de x , em (1.12) e (1.15) foram definidas com base em problemas de minimização quadrática e coincidem com aquelas baseadas no valor esperado condicional $\mathbb{E}\{x|z\}$

quando se supõe a distribuição Gaussiana de x e v^6 , veja [7].

1.2.4 Mínimos Quadrados Regularizados com Incertezas

Valendo-se do problema de MQR estabelecido em (1.13)-(1.14), suponha agora que a matriz A e o vetor b estejam sob a influência de incertezas δA e δb , respectivamente. Considere o problema de otimização min-max definido por⁷

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \max_{\delta A, \delta b} \{J(x, \delta A, \delta b)\}, \quad (1.16)$$

com a função $J(x, \delta A, \delta b)$ dada por

$$J(x, \delta A, \delta b) = \|x\|_Q^2 + \|(A + \delta A)x - (b + \delta b)\|_W^2. \quad (1.17)$$

e as incertezas δA e δb modeladas como

$$\begin{bmatrix} \delta A & \delta b \end{bmatrix} = H \Delta \begin{bmatrix} E_A & E_b \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

sendo $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (matriz de regularização) simétrica definida positiva, $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica semidefinida positiva, A , b , H , E_A , E_b matrizes de dimensões compatíveis, Δ uma matriz de contração arbitrária ($\|\Delta\| \leq 1$) e x o vetor incógnita. A solução ótima do problema (1.16)-(1.18) é apresentada no resultado a seguir. Detalhes da demonstração podem ser encontrados em [93], no qual um resultado mais geral é proposto.

Teorema 1.2.1. *O problema (1.16)-(1.18) admite uma única solução x^* dada por*

$$x^* = \left(\hat{Q} + A^T \hat{W} A \right)^{-1} \left(A^T \hat{W} b + \hat{\lambda} E_A^T E_b \right),$$

com $\hat{Q}$ e $\hat{W}$ definidas por

$$\begin{aligned} \hat{Q} &:= Q + \hat{\lambda} E_A^T E_A, \\ \hat{W} &:= W + W H (\hat{\lambda} I - H^T W H)^\dagger H^T W, \end{aligned}$$

⁶Por sua vez, também coincide com a estimativa da máxima verossimilhança, veja [87].

⁷Conforme [93].

e $\hat{\lambda}$ o parâmetro escalar não-negativo decorrente do problema de minimização

$$\hat{\lambda} \in \arg \min_{\lambda \geq \|H^T W H\|} \{\Gamma(\lambda)\},$$

sendo $\Gamma(\lambda) := \|x(\lambda)\|_Q^2 + \lambda \|E_A x(\lambda) - E_b\|^2 + \|Ax(\lambda) - b\|_{W(\lambda)}^2$ com

$$Q(\lambda) := Q + \lambda E_A^T E_A,$$

$$W(\lambda) := W + W H (\lambda I - H^T W H)^\dagger H^T W,$$

$$x(\lambda) := (Q(\lambda) + A^T W(\lambda) A)^{-1} (A^T W(\lambda) b + \lambda E_A^T E_b).$$

Analogamente ao problema de MQP, o lema a seguir apresentará a solução ótima do problema (1.16)-(1.18) em uma estrutura alternativa a do Teorema 1.2.1.

Lema 1.2.3. *Suponha $Q \succ 0$ e $W \succ 0$. A solução x^* do problema (1.16)-(1.18) pode ser reescrita como*

$$\begin{bmatrix} x^* \\ J(x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \\ 0 & E_b \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 & 0 & I \\ 0 & \hat{W}^{-1} & 0 & A \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}^{-1} I & E_A \\ I & A^T & E_A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ E_b \\ 0 \end{bmatrix},$$

sendo $\hat{W}$ e $\hat{\lambda}$ definidos de acordo com o Teorema 1.2.1.

Demonstração. A solução ótima de (1.16)-(1.18) é dada, de acordo com o Teorema 1.2.1, por

$$x^* = (\hat{Q} + A^T \hat{W} A)^{-1} (A^T \hat{W} b + \hat{\lambda} E_A^T E_b),$$

a qual pode ser reescrita, em um arranjo alternativo de matrizes, como

$$x^* = \left(\begin{bmatrix} I & \tilde{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \tilde{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \tilde{A} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I & \tilde{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \tilde{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix},$$

sendo

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} A \\ E_A \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} := \begin{bmatrix} b \\ E_b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{W} := \begin{bmatrix} \hat{W} & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}I \end{bmatrix}.$$

De acordo com o Lema 1.2.1, x^* compõe a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 & 0 & I \\ 0 & \hat{W}^{-1} & 0 & A \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}^{-1}I & E_A \\ I & A^T & E_A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ E_b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A representação unificada de x^* e $J(x^*)$ também segue do Lema 1.2.1. □

Estimativa Mínima Quadrática Regularizada Robusta

Considere agora o problema de estimativa do vetor de estado x baseado na observação do vetor $(z + \delta z)$ proveniente do modelo dinâmico linear incerto

$$(z + \delta z) = (C + \delta C)x + v, \\ \begin{bmatrix} \delta C & \delta z \end{bmatrix} = H\Delta \begin{bmatrix} E_C & E_z \end{bmatrix}, \quad \|\Delta\| \leq 1,$$

no qual v é um vetor de ruído (erro) aleatório tal que $\mathbb{E}\{v\} = 0$, $\mathbb{E}\{vv^T\} = R$ e independente de x . A estimativa mínima quadrática regularizada robusta⁸ do vetor x é definida por meio do seguinte problema min-max

$$\hat{x} := \arg \min_x \max_{\delta C, \delta z} \left\{ \|x\|_Q^2 + \|(C + \delta C)x - (z + \delta z)\|_{R^{-1}}^2 \right\}. \quad (1.19)$$

Proposição 1.2.5. *A estimativa mínima quadrática regularizada robusta $\hat{x}$ e a respectiva matriz*

⁸Uma extensão da estimativa mínima quadrática regularizada da Proposição 1.2.4 se $Q = \bar{X}^{-1}$, $\bar{x} = 0$, $\delta C = 0$ e $\delta z = 0$.

de variância $\mathcal{P}$ para o erro de estimativa $\tilde{e} = (\hat{x} - x)$ são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \hat{x} & \mathcal{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 & 0 & I \\ 0 & \hat{R}^{-1} & 0 & C \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}^{-1}I & E_C \\ I & C^T & E_C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \\ E_z & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},$$

com $\hat{R} = R^{-1} + R^{-1}H(\hat{\lambda}I - H^T R^{-1}H)^{-1}H^T R^{-1}$ e $\hat{\lambda}$ obtido de acordo com o Teorema 1.2.1.

Demonstração. A expressão da estimativa ótima $\hat{x}$ segue do Teorema 1.2.1 por meio da representação matricial estabelecida no Lema 1.2.3. Enquanto a matriz de variância é definida por $\mathcal{P} = (Q + \hat{\lambda}E_C^T E_C + C^T \hat{R}C)^{-1}$, inspirada pelo caso nominal, e que também pode ser representada conjuntamente com $\hat{x}$. $\square$

Observação 1.2.2. Com relação aos critérios min-max penalizados formulados nos capítulos 5 e 7 para os problemas de estimativas de estados robustas, a matriz Q associada é semidefinida

positiva, $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ com $Q_1 \succ 0$, ao passo que R associada é definida positiva. A existência e unicidade de solução é garantida em razão da positividade de $(Q + \hat{\lambda}E_C^T E_C + C^T \hat{R}C)$

em decorrência de $\begin{bmatrix} C \\ E_C \end{bmatrix}$ admitir posto coluna pleno e $\begin{bmatrix} \hat{R} & 0 \\ 0 & \hat{\lambda} \end{bmatrix}$ ser definida positiva. Nesse caso, tem-se a seguinte representação matricial

$$\begin{bmatrix} \hat{x} & \mathcal{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_1^{-1} & 0 & 0 & \mathcal{I} \\ 0 & \hat{R}^{-1} & 0 & C \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}^{-1}I & E_C \\ \mathcal{I} & C^T & E_C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \\ E_z & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},$$

com $\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$ e $E_C = \begin{bmatrix} E_{C_1} & E_{C_2} \end{bmatrix}$.

A seguir, o problema de MQP sujeito à restrição de igualdade linear é resolvido sob o enfoque de funções penalidade, o que permitirá a aproximação por um problema de MQP irrestrito com a solução dada de acordo com o Lema 1.2.1.

1.3 Problema de Mínimos Quadrados Ponderados Restrito

Considere agora o seguinte problema de minimização com restrição

$$\begin{aligned} & \min_x \{f(x)\}, \\ & \text{sujeito a } h(x) = 0, \end{aligned} \quad (1.20)$$

com solução ótima x^* . Suponha que esse problema seja transformado em

$$\min_x \{f(x) + \mu h(x)^T h(x)\}, \quad (1.21)$$

no qual μ é um número real positivo e o termo $h(x)^T h(x)$ satisfaz as condições (P1)-(P3) da definição de função penalidade.

O problema restrito (1.20) foi transformado no problema irrestrito (1.21) quando a restrição de igualdade $h(x) = 0$ foi incorporada à função objetivo $f(x)$ por meio da adição do termo quadrático $\mu h(x)^T h(x)$. Para cada $\mu > 0$, seja $x^*(\mu)$ a solução ótima para o problema (1.21). Então, conforme visto anteriormente,

$$x^* = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} x^*(\mu),$$

$$f(x^*) = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \{f(x^*(\mu)) + \mu h(x^*(\mu))^T h(x^*(\mu))\},$$

uma vez que $(Hx^*(\mu) - y)^T \mu I (Hx^*(\mu) - y)$ tende a zero quando $\mu \rightarrow +\infty$.

Baseado nesse procedimento, o método de funções penalidade é particularmente atrativo para lidar com o problema de MQP sujeito à restrição de igualdade linear:

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathbb{R}^m} \left\{ (Ax - b)^T W (Ax - b) \right\} \\ & \text{sujeito a } Hx = y \end{aligned} \quad (1.22)$$

Nessa categoria de problema, em particular, ocorre a adição do termo de penalidade quadrático $\mu(Hx - y)^T(Hx - y)$ à função quadrática $J(x) = (Ax - b)^T W (Ax - b)$, resultando em uma nova função quadrática. As especificidades técnicas são apresentadas a seguir quando um funcional quadrático estritamente convexo será minimizado iterativamente sob uma restrição de

igualdade linear. A Proposição 1.3.1 foi inspirada em um resultado apresentado em [2].

Proposição 1.3.1. *Considere o funcional quadrático*

$$J(x) := (Ax - b)^T W (Ax - b)$$

e o problema de minimização com restrição

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^m} \{J(x)\}, \\ \text{sujeito a } Hx = y, \end{aligned} \tag{1.23}$$

sendo $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$, $H \in \mathbb{R}^{k \times m}$ e $y \in \mathbb{R}^k$. Associado a (1.23), tem-se para cada $\mu > 0$, o seguinte problema de minimização sem restrição

$$\min_{x(\mu)} \{J(x(\mu))\}$$

sendo

$$J(x(\mu)) := (Ax(\mu) - B)^T \mathcal{W}(\mu) (Ax(\mu) - B), \tag{1.24}$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A \\ H \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W}(\mu) = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} b \\ y \end{bmatrix}.$$

Suponha W definida positiva, H posto linha pleno e $\begin{bmatrix} A \\ H \end{bmatrix}$ posto coluna pleno. Então:

(i) - *para cada $\mu > 0$, a solução ótima $x^*(\mu)$ e valor mínimo $J(x^*(\mu))$ referentes ao problema de minimização sem restrição (1.24) são dados por*

$$\begin{bmatrix} x^*(\mu) \\ J(x^*(\mu)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{B} \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{W}^{-1}(\mu) & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{B} \\ 0 \end{bmatrix},$$

(ii) - *$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} x^*(\mu) = x^*$ e $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} J(x^*(\mu)) = J(x^*)$, sendo x^* e $J(x^*)$ a solução ótima e o valor mínimo, respectivamente, referentes ao problema de minimização (1.23) e da-*

dos por

$$\begin{bmatrix} x^* \\ J(x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W^{-1} & 0 & A \\ 0 & 0 & H \\ A^T & H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Demonstração. (i) - Para cada $\mu > 0$, de acordo com a Proposição 1.2.2, a solução ótima $x^*(\mu)$ e o custo ótimo $\mathcal{J}(x^*(\mu))$ de (1.24) são dados, respectivamente, por

$$x^*(\mu) = (\mathcal{A}^T \mathcal{W}(\mu) \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^T \mathcal{W}(\mu) \mathcal{B}, \quad (1.25)$$

$$\mathcal{J}(x^*(\mu)) = \mathcal{B}^T \left(\mathcal{W}(\mu) - \mathcal{W}(\mu) \mathcal{A} (\mathcal{A}^T \mathcal{W}(\mu) \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^T \mathcal{W}(\mu) \right) \mathcal{B}. \quad (1.26)$$

Definindo a variável auxiliar $\alpha^* = -\mathcal{W}(\mu)(\mathcal{A}x^*(\mu) - \mathcal{B})$, de (1.25) tem-se:

$$\mathcal{A}^T \mathcal{W}(\mu) \mathcal{A} x^*(\mu) - \mathcal{A}^T \mathcal{W} \mathcal{B} = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^T \mathcal{W}(\mu) (\mathcal{A} x^*(\mu) - \mathcal{B}) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^T \alpha^* = 0.$$

Uma vez que $\alpha^* = -\mathcal{W}(\mu)(\mathcal{A}x^*(\mu) - \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{W}(\mu)^{-1} \alpha^* + \mathcal{A}x^*(\mu) = \mathcal{B}$, o seguinte sistema linear é obtido:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W}(\mu)^{-1} & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^* \\ x^*(\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{B} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por hipótese, $\mathcal{A}$ é posto coluna pleno, então:

$$x^*(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{W}(\mu)^{-1} & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{B} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A expressão alternativa do valor mínimo $J(x^*(\mu))$ decorre de (1.26) como segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x^*(\mu)) &= \mathcal{B}^T \mathcal{W}(\mu) (\mathcal{B} - \mathcal{A}x^*(\mu)) \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{B}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^* \\ x^*(\mu) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{B}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{W}(\mu)^{-1} & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{B} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) - De acordo com o Teorema 1.1.1, a solução ótima é alcançada quando $\mu \rightarrow +\infty$. Assim,

$$\begin{bmatrix} x^* \\ J(x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W^{-1} & 0 & A \\ 0 & 0 & H \\ A^T & H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ y \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

A invertibilidade do bloco matricial em (1.27) é garantida por ([87] - Lema 2.1)⁹. A existência e unicidade de solução é estabelecida em [8]. $\square$

Considere o problema de estimativa do vetor de estado x por meio do vetor de observação z proveniente do sistema dinâmico linear $z = Cx + Dv$, no qual D é uma matriz de entrada do ruído considerada conhecida, e as demais definições a respeito da matriz C e do vetor v são as usuais. A estimativa ótima é definida por¹⁰

$$\begin{aligned} (\hat{v}, \hat{x}) &:= \arg \min_{v, x} \{ \|v\|_{R^{-1}}^2 \}, \\ \text{sujeito a } z &= Cx + Dv, \end{aligned} \quad (1.28)$$

i.e., um caso particular de (1.22).

Corolário 1.3.1. *A estimativa ótima $\hat{x}$ e a respectiva matriz de variância P para o erro de estimativa $\tilde{e} = (\hat{x} - x)$ são dadas por:*

$$\begin{bmatrix} x^* & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & D & C \\ I & D^T & 0 & 0 \\ 0 & C^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Segue da Proposição 1.3.1 e da Observação 1.2.1 quando ao considerar:

$$A \leftarrow \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}, \quad x \leftarrow \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix}, \quad b \leftarrow 0, \quad W \leftarrow R^{-1}, \quad H \leftarrow \begin{bmatrix} D & C \end{bmatrix}, \quad y \leftarrow z.$$

$\square$

⁹Veja Lema A.1.8 no Apêndice A.

¹⁰Se $D = I$, então (1.28) equivale ao caso (1.12).

A combinação do método de penalidades com o conhecimento prévio da estrutura da solução ótima de um problema de MQP irrestrito sintetiza uma abordagem adequada para lidar com os problemas de controle e filtragem de sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos a serem abordados nos capítulos subsequentes.

CAPÍTULO 2

REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO PARA SLSM DEPENDENTE DO MODO

Neste capítulo é revisto o problema de controle ótimo quadrático de horizonte finito para SLSM de tempo discreto quando a variável de estado, x_k , e o parâmetro de salto, θ_k , são observados a todo instante. A lei de controle ótimo é determinada mediante a minimização do valor esperado de uma função custo quadrático restrita ao modelo dinâmico em um horizonte finito. A solução amplamente conhecida na literatura é recursiva, dada por um conjunto de equações de Riccati acopladas, veja [9, 19, 33], e recebe o nome de *Regulador Linear Quadrático*.

A formulação proposta para o problema de controle ótimo em questão é um pouco diferente da usual, porém equivalente. A minimização não é realizada apenas em termos da variável de entrada u_k , mas também em função de x_{k+1} . Inclusive, um procedimento alternativo é adotado para a solução do problema de minimização com restrição. Esse procedimento é baseado na combinação da solução ótima de problemas de mínimos quadrados ponderados [74] e a técnica de funções penalidade [83], ambas apresentadas no Capítulo 1.

Sob essa nova abordagem de solução, o sistema em malha-fechada, a lei de controle ótimo, a matriz de ganho de realimentação e as equações acopladas de Riccati são apresentadas em

uma estrutura alternativa de blocos matriciais em um arranjo simétrico. A solução recursiva obtida é equivalente à solução clássica, tornando válida o uso dessa técnica para o problema em questão.

Dois aspectos valem ser destacados nessa solução: primeiro, a forma com que a restrição linear é incorporada via função penalidade no funcional a ser minimizado; segundo, a obtenção de um funcional quadrático penalizado adequado para lidar com o caso em que o SLSM esteja sujeito a incertezas nas matrizes de parâmetros.

2.1 Formulação do Problema

Considere o SLSM de tempo discreto

$$x_{k+1} = F_{\theta_k, k} x_k + G_{\theta_k, k} u_k, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (2.1)$$

sendo $x_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u_k \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entrada de controle e $F_{\theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $G_{\theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ as matrizes de parâmetros, no qual θ_k corresponde ao parâmetro de salto admitindo valores a cada instante k no conjunto finito $\Theta := \{1, \dots, s\}$. O processo $\{\theta_k\}_{k=0}^{N-1}$ é modelado como um processo de Markov de estados finitos e tempo discreto. A matriz de probabilidade de transição de estados da cadeia de Markov é, por sua vez, definida por $\mathbb{P} = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{s \times s}$, com suas entradas satisfazendo

$$\begin{aligned} \text{Prob}[\theta_{k+1} = j \mid \theta_k = i] &= p_{ij}, \quad \text{Prob}[\theta_0 = i] = \pi_i, \\ \sum_{j=1}^s p_{ij} &= 1, \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Considere x_0 e θ_0 conhecidos. Suponha que o parâmetro de salto θ_k e o estado x_k estejam disponíveis a cada instante k . Defina para cada $k = 0, \dots, N-1$ o termo quadrático auxiliar

$$\mathcal{L}_{\theta_k}(x_k, u_k) := \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_{\theta_k, k} & 0 \\ 0 & R_{\theta_k, k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

sendo $Q_{\theta_k, k} \succ 0$ e $R_{\theta_k, k} \succ 0$ matrizes de ponderações de dimensões compatíveis. A função

custo quadrático (índice de desempenho quadrático), associada às condições iniciais $(\theta_0 = i, x_0)$, é definida por

$$\mathcal{J}(\theta, x, u) := \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{L}_{\theta_k}(x_k, u_k) + x_N^T P_{\theta_N, N} x_N, \quad (2.4)$$

sendo $P_{\theta_N, N} \succ 0$.

Na formulação clássica do problema de controle ótimo quadrático, o objetivo é determinar a sequência de controle ótimo $\mathcal{U}^* = \{u_0^*, \dots, u_{N-1}^*\}$ que minimize o valor esperado da função custo quadrático (2.4) sujeito à restrição (2.1), *i.e.*,

$$\begin{aligned} & \min_{u_k, k=0, \dots, N-1} \mathbb{E} \left\{ \mathcal{J}(\theta, x, u) \mid \mathcal{O}_0 \right\}, \\ & \text{sujeito a } x_{k+1} = F_{\theta_k, k} x_k + G_{\theta_k, k} u_k, \quad k = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

sendo $\mathcal{O}_0 = \{(\theta_0 = i, x_0)\}$.

A solução do problema (2.5) é recursiva e consiste no *Regulador Linear Quadrático*, cujas equações são dadas por:

$$u_k^* = K_{\theta_k, k} x_k^*, \quad k = 0, \dots, N-1$$

com $\theta_k \in \Theta$, sendo

$$K_{i, k} = - (R_{i, k} + G_{i, k}^T \Psi_{i, k+1} G_{i, k})^{-1} G_{i, k}^T \Psi_{i, k+1} F_{i, k},$$

e $P_{i, k}$ para cada $i \in \Theta$ calculadas iterativamente de trás para frente no tempo pelas equações acopladas de Riccati

$$\Psi_{i, k+1} := \sum_{j=1}^s P_{j, k+1} p_{ij},$$

$$P_{i, k} = F_{i, k}^T \left(\Psi_{i, k+1} - \Psi_{i, k+1} G_{i, k} (R_{i, k} + G_{i, k}^T \Psi_{i, k+1} G_{i, k})^{-1} G_{i, k}^T \Psi_{i, k+1} \right) F_{i, k} + Q_{i, k},$$

com condição inicial $P_{i, N} \succeq 0$. Veja mais detalhes em [9, 19, 33].

No problema (2.5) a minimização é realizada somente em função da entrada de controle u_k . O processo ótimo $\{x_{k+1}^*\}_{k=0}^{N-1}$ é determinado por meio de (2.1) pelo conhecimento da sequência de controle ótimo $\{u_k^*\}_{k=0}^{N-1}$.

Equivalentemente, é possível considerar simultaneamente x_{k+1} e u_k como variáveis do problema de minimização restrita. Dessa forma, a cada etapa de minimização k , a ação de controle ótimo u_k^* e o estado ótimo x_{k+1}^* são dados em função do estado x_k , o qual é disponível por hipótese. Considere então o problema de controle ótimo quadrático reformulado da seguinte maneira:

Problema de Controle Ótimo: *Determinar a sequência ótima $\{(x_{k+1}^*, u_k^*)\}_{k=0}^{N-1}$ considerando*

$$\min_{x_{k+1}, u_k, k=0, \dots, N-1} \mathbb{E} \left\{ \mathcal{J}(\theta, x, u) \mid \mathcal{O}_0 \right\}, \quad (2.6)$$

sujeito a $x_{k+1} = F_{\theta_k, k} x_k + G_{\theta_k, k} u_k, k = 0, \dots, N-1$.

Com o auxílio da técnica clássica de programação dinâmica [7], a solução ótima do problema (2.6) é obtida na próxima seção. Um problema de programação quadrática nos moldes de um problema de mínimos quadrados sujeito a uma restrição de igualdade é obtido em cada passo. O procedimento de solução desenvolvido na Proposição 1.3.1 será empregado para a solução desse problema restrito.

2.2 Solução do Problema

As soluções analíticas para x_{k+1}^* e u_k^* são determinadas por meio do formalismo da programação dinâmica aplicado ao problema (2.6), veja [9]. De acordo com o princípio da otimalidade, defina para todo $k = 0, \dots, N-1$ a função valor

$$\mathcal{V}_k(x_k, \theta_k = i) := \min_{x_{k+1}, u_k} \mathbb{E} \left\{ \mathcal{L}_{\theta_k}(x_k, u_k) + \mathcal{V}_{k+1}(x_{k+1}, \theta_{k+1} = j) \mid \mathcal{O}_k \right\}, \quad (2.7)$$

sujeito a $x_{k+1} = F_{\theta_k, k} x_k + G_{\theta_k, k} u_k$,

com $\mathcal{O}_k = \{\theta_k = i, x_k\}$ para todo $k = 0, \dots, N-1$, e

$$\mathcal{V}_N(x_N, \theta_N) := x_N^T P_{\theta_N, N} x_N, \quad P_{\theta_N, N} \succ 0. \quad (2.8)$$

Baseado em (2.8), considere que $\mathcal{V}_k(x_k, \theta_k = i)$ admite a forma

$$\mathcal{V}_k(x_k, \theta_k = i) = x_k^T P_{i,k} x_k \quad (2.9)$$

com $P_{i,k} \succ 0$ para cada $i \in \Theta$. De (2.7) segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k(x_k, \theta_k = i) := \min_{x_{k+1}, u_k} & \left\{ \mathcal{L}_{\theta_k}(x_k, u_k) + \mathbb{E} \left[\mathcal{V}_{k+1}(x_{k+1}, \theta_{k+1}) \mid \mathcal{O}_k \right] \right\}, \\ \text{sujeito a } & x_{k+1} = F_{\theta_k, k} x_k + G_{\theta_k, k} u_k; \end{aligned}$$

e ainda por (2.9) para $k+1$ tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k(x_k, \theta_k = i) := \min_{x_{k+1}, u_k} & \left\{ \mathcal{L}_{\theta_k}(x_k, u_k) + x_{k+1}^T \mathbb{E} \left[P_{\theta_{k+1}, k+1} \mid \mathcal{O}_k \right] x_{k+1} \right\}, \\ \text{sujeito a } & x_{k+1} = F_{\theta_k, k} x_k + G_{\theta_k, k} u_k. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Observe que

$$\mathbb{E} \left[P_{\theta_{k+1}, k+1} \mid \mathcal{O}_k \right] = \sum_{j=1}^s P_{j, k+1} \text{Prob}[\theta_{k+1} = j \mid \theta_k = i] = \sum_{j=1}^s P_{j, k+1} p_{ij}.$$

Definindo o operador

$$\Psi_{i, k+1} := \sum_{j=1}^s P_{j, k+1} p_{ij},$$

segue de (2.10) que o valor mínimo $\mathcal{V}_k(x_k, \theta_k = i)$ é obtido do problema de minimização com restrição

$$\begin{aligned} \min_{x_{k+1}, u_k} & \left\{ x_{k+1}^T \Psi_{i, k+1} x_{k+1} + u_k^T R_{i, k} u_k + x_k^T Q_{i, k} x_k \right\}, \\ \text{sujeito a } & x_{k+1} = F_{i, k} x_k + G_{i, k} u_k. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A próxima etapa consiste em resolver o problema (2.11). É neste ponto da dedução que a nova abordagem, baseada em funções penalidade e mínimos quadrados ponderados, sob a forma da Proposição 1.3.1 será empregada para a solução desse problema.

Primeiramente, uma vez que x_{k+1} e u_k são as variáveis de minimização, é possível reescre-

ver (2.11) nos moldes do problema restrito (1.22), *i.e.*,

$$\min_{x_{k+1}, u_k} \left\{ \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} x_k \right)^T \begin{bmatrix} \Psi_{i,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{i,k} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{i,k} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.12)$$

sujeito a $\begin{bmatrix} I & -G_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} = F_{i,k} x_k.$

Em seguida, a forma irrestrita, para cada $\mu > 0$, é dada por

$$\min_{x_{k+1}, u_k} \left\{ \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ I & -G_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_{i,k} x_k \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \Psi_{i,k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{i,k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{i,k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.13)$$

tendo sido a restrição incorporada à função objetivo via função penalidade, de acordo com a Proposição 1.3.1. O resultado a seguir estabelece a solução ótima do problema na forma irrestrita (2.13).

Lema 2.2.1. *Considere o problema de minimização (2.13). A solução ótima para cada $\mu > 0$ é dada por*

$$\begin{bmatrix} x_{k+1}^*(\mu) \\ u_k^*(\mu) \\ \mathcal{V}_k^\mu(x_k, \theta_k = i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & x_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{i,k}^\mu \\ K_{i,k}^\mu \\ P_{i,k}^\mu \end{bmatrix} x_k, \quad (2.14)$$

sendo $L_{i,k}^\mu$, $K_{i,k}^\mu$ e $P_{i,k}^\mu$ definidos por

$$\begin{bmatrix} L_{i,k}^\mu \\ K_{i,k}^\mu \\ P_{i,k}^\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & F_{i,k} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{i,k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_{i,k}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} I & I & -G_{i,k} \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G_{i,k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_{i,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

com $\Psi_{i,k+1} := \sum_{j=1}^s P_{j,k+1} p_{ij}$. Além disso, alternativamente, tem-se:

$$P_{i,k}^\mu = L_{i,k}^{\mu T} \Psi_{i,k+1} L_{i,k}^\mu + K_{i,k}^{\mu T} R_{i,k} K_{i,k}^\mu + Q_{i,k} + (L_{i,k}^\mu - G_{i,k} K_{i,k}^\mu - F_{i,k})^T \mu I(\bullet).$$

Demonstração. Segue do item (i) da Proposição 1.3.1 por meio das seguintes identificações:

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} \quad x_k = Bx_k, \quad W = \begin{bmatrix} \Psi_{i,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{i,k} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{i,k} \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} I & -G_{i,k} \end{bmatrix}, \quad y = F_{i,k}x_k = Yx_k. \quad \square$$

De acordo com o item (ii) da Proposição 1.3.1, quando $\mu \rightarrow +\infty$, a solução ótima é dada por:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1}^* \\ u_k^* \\ \mathcal{V}_k(x_k, \theta_k = i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & x_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{i,k} \\ K_{i,k} \\ P_{i,k} \end{bmatrix} x_k \quad (2.16)$$

com

$$\begin{bmatrix} L_{i,k} \\ K_{i,k} \\ P_{i,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & Y \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W^{-1} & 0 & A \\ 0 & 0 & H \\ A^T & H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ Y \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Uma vez que $\mathcal{V}_k(x_k, \theta_k = i) = x_k^T P_{i,k} x_k$, o próximo passo consistirá em resolver

$$\mathcal{V}_{k-1}(x_{k-1}, \theta_{k-1} = j) := \min_{x_k, u_{k-1}} \mathbb{E} \left\{ \mathcal{L}_j(x_{k-1}, u_{k-1}) + \mathcal{V}_k(x_k, \theta_k = i) \mid \mathcal{O}_{k-1} \right\}, \quad (2.18)$$

sujeito a $x_k = F_{j,k-1}x_{k-1} + G_{j,k-1}u_{k-1}$,

cujas soluções são análogas ao passo anterior. Procedendo-se dessa forma de trás para frente no tempo até o instante $k = 0$, tem-se $\mathcal{V}_0(x_0, \theta_0) = x_0^T P_{\theta_0,0} x_0$. E, claro, o custo esperado ótimo é dado por $\mathcal{J}^*(\theta_0, x_0, u^*) = x_0^T P_{\theta_0,0} x_0$. A solução ótima obtida por meio dessa estratégia é apresentada no resultado a seguir.

Teorema 2.2.1. *Considere o problema (2.6). A solução ótima $\{(x_{k+1}^*, u_k^*)\}_{k=0}^{N-1}$ é dada por*

$$\begin{bmatrix} x_{k+1}^* \\ u_k^* \\ \mathcal{V}_k(x_k^*, \theta_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & x_k^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{\theta_k, k} \\ K_{\theta_k, k} \\ P_{\theta_k, k} \end{bmatrix} x_k^*, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.19)$$

com $\theta_k = i \in \Theta$ e $L_{i,k}$, $K_{i,k}$ e $P_{i,k}$ dados por

$$\Psi_{i,k+1} = \left(\sum_{j=1}^s P_{j,k+1} p_{ij} \right), \quad (2.20)$$

$$\begin{bmatrix} L_{i,k} \\ K_{i,k} \\ P_{i,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & F_{i,k} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{i,k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_{i,k}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G_{i,k} \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G_{i,k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_{i,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

para todo $k = N-1, \dots, 0$. O custo total ótimo é $\mathcal{J}^*(\theta_0, x_0, u^*) = x_0^T P_{\theta_0,0} x_0$.

Demonstração. Procedendo sucessivamente de trás para frente no tempo, a validade para todo horizonte $[0, N]$ é estabelecida pelo princípio da indução. $\square$

A estrutura matricial em (2.21) reúne de forma simétrica todas as matrizes de parâmetros e de ponderação do sistema para o cálculo das matrizes $L_{i,k}$, $K_{i,k}$ e $P_{i,k}$, $i \in \Theta^1$. A equivalência com as equações na estrutura clássica é apresentada a seguir.

Observação 2.2.1. *Em um processo determinístico, i.e., quando $s = 1$, então $i = j$, $p_{ij} = 1$,*

$$\Psi_{i,k+1} = \left(\sum_{j=1}^s P_{j,k+1} p_{ij} \right) = P_{k+1},$$

e (2.1), (2.19) e (2.21) equivalem ao caso abordado em [17].

¹A invertibilidade do bloco matricial em (2.21) é garantida pelo Lema A.1.8.

Observação 2.2.2. A representação do problema (2.13) na forma de mínimos quadrados regularizados, veja (1.13)-(1.14), pode ser obtida pela redefinição adequada dos blocos matriciais:

$$\min_{x_{k+1}, u_k} \left\{ \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{i,k+1} & 0 \\ 0 & R_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} + \right. \quad (2.22)$$

$$\left. \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & -G_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I \\ F_{i,k} \end{bmatrix} x_k \right)^T \begin{bmatrix} Q_{i,k} & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & -G_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I \\ F_{i,k} \end{bmatrix} x_k \right) \right\}.$$

A importância da apresentação do problema (2.12) na forma irrestrita regularizada será útil quando o problema de controle robusto for abordado considerando uma extensão de (2.22) no próximo capítulo.

2.2.1 Equivalência das Soluções

O resultado a seguir estabelece a equivalência entre a solução recursiva proposta no Teorema 2.2.1 e a solução clássica bem conhecida na literatura (e.g., [9, 33]).

Lema 2.2.2. A solução recursiva (2.19)-(2.21) é equivalente a

$$x_{k+1}^* = L_{\theta_k, k} x_k^* \quad e \quad u_k^* = K_{\theta_k, k} x_k^*$$

para $k = 0, \dots, N-1$ com $\theta_k \in \Theta$, sendo

$$L_{i,k} = F_{i,k} + G_{i,k} K_{i,k}$$

$$K_{i,k} = - \left(R_{i,k} + G_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} G_{i,k} \right)^{-1} G_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} F_{i,k},$$

$$\Psi_{i,k+1} := \sum_{j=1}^s P_{j,k+1} p_{ij},$$

$$P_{i,k} = F_{i,k}^T \left(\Psi_{i,k+1} - \Psi_{i,k+1} G_{i,k} \left(R_{i,k} + G_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} G_{i,k} \right)^{-1} G_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} \right) F_{i,k} + Q_{i,k},$$

para cada $i \in \Theta$ e $k = N-1, \dots, 0$.

Demonstração. As matrizes $L_{i,k}$ e $K_{i,k}$ compõem uma partição do vetor solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{i,k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_{i,k}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G_{i,k} \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -G_{i,k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ L_{i,k} \\ K_{i,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_{i,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$\Psi_{i,k+1}^{-1} X_1 + L_{i,k} = 0 \quad (2.23)$$

$$R_{i,k}^{-1} X_2 + K_{i,k} = 0 \quad (2.24)$$

$$Q_{i,k}^{-1} X_3 = -I \quad (2.25)$$

$$L_{i,k} - G_{i,k} K_{i,k} = F_{i,k} \quad (2.26)$$

$$X_1 + X_4 = 0 \quad (2.27)$$

$$X_2 - G_{i,k}^T X_4 = 0. \quad (2.28)$$

De (2.23), (2.26) e (2.27), obtém-se

$$\Psi_{i,k+1}^{-1} X_4 - G_{i,k} K_{i,k} = F_{i,k}, \quad (2.29)$$

que combinada com (2.24), (2.25) e (2.28) resulta em

$$\Psi_{i,k+1}^{-1} X_4 - G_{i,k} K_{i,k} = F_{i,k} \quad (2.30)$$

$$R_{i,k}^{-1} X_2 + K_{i,k} = 0 \quad (2.31)$$

$$Q_{i,k}^{-1} X_3 = -I \quad (2.32)$$

$$X_2 - G_{i,k}^T X_4 = 0. \quad (2.33)$$

De (2.30), (2.31) e (2.33), segue que

$$(\Psi_{i,k+1}^{-1} + G_{i,k} R_{i,k}^{-1} G_{i,k}^T) X_4 = F_{i,k}, \quad (2.34)$$

enquanto (2.31) e (2.33) combinadas fornecem

$$K_{i,k} = -R_{i,k}^{-1} G_{i,k}^T X_4. \quad (2.35)$$

De (2.34) e (2.35), tem-se

$$K_{i,k} = -R_{i,k}^{-1} G_{i,k}^T (\Psi_{i,k+1}^{-1} + G_{i,k} R_{i,k}^{-1} G_{i,k}^T)^{-1} F_{i,k},$$

a qual, de acordo com a *Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury*², pode ser reescrita como:

$$K_{i,k} = - (R_{i,k} + G_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} G_{i,k})^{-1} G_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} F_{i,k}. \quad (2.36)$$

De (2.26) e (2.36), conclui-se que:

$$L_{i,k} = \left(F_{i,k} - G_{i,k} (R_{i,k} + G_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} G_{i,k})^{-1} G_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} F_{i,k} \right).$$

Observe que $P_{i,k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ F_{i,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ L_{i,k} \\ K_{i,k} \end{bmatrix} = -X_3 + F_{i,k}^T X_4$. Como $X_4 = \Psi_{i,k+1} F_{i,k} + \Psi_{i,k+1} G_{i,k} K_{i,k}$,

então

$$\begin{aligned} P_{i,k} &= Q_{i,k} + F_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} F_{i,k} + F_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} G_{i,k} K_{i,k} \\ &= Q_{i,k} + F_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} F_{i,k} - F_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} G_{i,k} (R_{i,k} + G_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} G_{i,k})^{-1} G_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} F_{i,k}. \end{aligned}$$

□

²Conhecida também como lema de inversão de matrizes. Veja Lema A.1.1, e mais detalhes em [108].

Observação 2.2.3. Considere o sistema de equações (2.23)-(2.28). Ao definir $\bar{X}_1 = \Psi_{i,k+1}^{-1} X_1$, $\bar{X}_2 = R_{i,k}^{-1} X_2$ e $\bar{X}_3 = Q_{i,k}^{-1} X_3$, obtém-se:

$$-\Psi_{i,k+1} \bar{X}_1 + X_1 = 0, \quad -R_{i,k} \bar{X}_2 + X_2 = 0, \quad -Q_{i,k} \bar{X}_3 + X_3 = 0. \quad (2.37)$$

Combinando (2.37) com (2.23)-(2.28), resulta:

$$\begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -\Psi_{i,k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & -R_{i,k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -Q_{i,k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G_{i,k} \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -G_{i,k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \bar{X}_1 \\ X_2 \\ \bar{X}_2 \\ X_3 \\ \bar{X}_3 \\ X_4 \\ L_{i,k} \\ K_{i,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ F_{i,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, é possível reescrever (2.21) como

$$\begin{bmatrix} L_{i,k} \\ K_{i,k} \\ P_{i,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{i,k} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -\Psi_{i,k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & -R_{i,k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -Q_{i,k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G_{i,k} \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -G_{i,k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ F_{i,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com as condições de positividade estrita sobre $Q_{i,k}$ e $P_{i,N}$ relaxadas.

O Regulador Linear Quadrático proveniente da solução do problema de controle ótimo quadrático no Teorema 2.2.1 combinado à estrutura matricial da Observação 2.2.3 é apresentado na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Regulador Linear Quadrático para SLSM Nominais

SLSM nominal: Considere o modelo (2.1) e o critério (2.6) com $Q_{i,k} \succeq 0$ e $R_{i,k} \succ 0$, $\forall i \in \Theta$ e $k = 0, \dots, N-1$.

Condições Iniciais: Defina x_0 , θ_0 , $\mathbb{P}$ e $P_{i,N} \succeq 0$, $\forall i \in \Theta$.

Passo 1: (Para trás) Calcule para todo $k = N-1, \dots, 0$:

$$\Psi_{i,k+1} := \sum_{j=1}^s P_{j,k+1} p_{ij},$$

$$\begin{bmatrix} L_{i,k} \\ K_{i,k} \\ P_{i,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{i,k} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & -\Psi_{i,k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & -R_{i,k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -Q_{i,k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ F_{i,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Passo 2: (Para frente) Calcule para cada $k = 0, \dots, N-1$:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1}^* \\ u_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\theta_k,k} \\ K_{\theta_k,k} \end{bmatrix} x_k^*.$$

O procedimento apresentado na Tabela 2.1 é meramente ilustrativo com relação a organização da estrutura de solução do problema. Inspirado pela Observação 2.2.3, o quadro a seguir apresenta uma forma alternativa e computacionalmente mais eficiente de computar $\{L_{i,k}\}_{k=0}^{N-1}$, $\{K_{i,k}\}_{k=0}^{N-1}$ e $\{P_{i,k}\}_{k=0}^{N-1}$ para cada $i \in \Theta$. Nesse caso, a solução pode ser obtida com o emprego de algoritmos específicos para a solução de sistemas lineares, sem a necessidade do cálculo da inversa do bloco matricial principal.

Considere as mesmas condições estabelecidas no algoritmo da Tabela 2.1. Os elementos $L_{i,k}$, $K_{i,k}$ e $P_{i,k}$ são dados por

$$L_{i,k} = X_8, \quad K_{i,k} = X_9, \quad P_{i,k} = -X_5 + F_{i,k}^T X_7,$$

com X_5 , X_7 , X_8 e X_9 compondo a solução do seguinte sistema linear:

$$\Psi_{i,k+1} := \sum_{j=1}^s P_{j,k+1} p_{ij},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -\Psi_{i,k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & -R_{i,k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -Q_{i,k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -G_{i,k} \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -G_{i,k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ F_{i,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para cada $i \in \Theta$ e todo $k = N - 1, \dots, 0$.

Conforme o quadro acima, a matriz A do sistema linear $AX = B$ associada à solução do problema de controle é esparsa³ e simétrica. Economias computacionais vinculadas ao armazenamento das informações e aos cálculos podem ser exploradas nesse caso. Além disso, a

³Uma matriz é denominada esparsa quando a maioria de seus elementos são iguais a zero.

solução pode ser determinada com o emprego de algoritmos capazes de evitar o armazenamento desnecessário de zeros e as operações aritméticas envolvendo-os.

A análise da complexidade computacional não é o alvo deste trabalho. No entanto, sabe-se que resolver um sistema de equações lineares ao calcular a inversa da matriz A requer um esforço computacional aproximadamente três vezes maior do que resolver via decomposição LU , por exemplo⁴. Inclusive, quando A é esparsa, como no caso em questão, a disparidade entre calcular a sua inversa e a decomposição LU é ainda mais relevante. Enquanto a esparsidade é comprometida na inversa de A , a decomposição LU pode preservá-la nos fatores L e U por meio de algoritmos especiais.

2.2.2 Estabilidade e Convergência

Suponha que as matrizes de parâmetros desse regulador para SLSM sejam invariantes tempo. Baseado nas equivalências apresentadas no Lema 2.2.2, as condições suficientes para a convergência de $P_k = (P_{1,k}, \dots, P_{s,k})$ para a única solução estabilizante $P = (P_1, \dots, P_s)$, quando k tende ao infinito, são estabelecidas em [33]. A seguir, algumas definições fundamentais e o resultado principal são introduzidos. Mais informações sobre a estabilidade de SLSM são apresentados em [30, 33].

Definição 2.2.1. [33] (*Estabilidade na Média Quadrática*) O sistema linear com saltos Markovianos (2.1) com $u_k \equiv 0$ é estável na média quadrática (EMQ)⁵ se para quaisquer condições iniciais x_0 e θ_0 existir $\bar{x}$ e $\bar{X}$ (independente de x_0 e θ_0 tais que: $\|\mathbb{E}\{x_k\} - \bar{x}\| \rightarrow 0$ e $\|\mathbb{E}\{x_k x_k^T\} - \bar{X}\| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$).

Definição 2.2.2. [33] (*Estabilizabilidade na Média Quadrática*) Sejam $F = (F_1, \dots, F_s)$ e $G = (G_1, \dots, G_s)$. Diz-se que o par (F, G) é estabilizável na média quadrática se existir $K = (K_1, \dots, K_s)$ tal que o sistema (2.1) em malha fechada, com $u_k = K_{\theta_k} x_k$, seja estável na média quadrática. Nesse caso, é dito que K estabiliza o par (F, G) na média quadrática.

⁴Mais detalhes em [61].

⁵Ou, equivalentemente, se para para todo x_0 e θ_0 existem $\beta \geq 1$ e $0 \leq \zeta \leq 1$ tais que $\mathbb{E}\{\|x_k\|^2\} \leq \beta \zeta^k \|x_0\|_2^2$, para todo k .

Definição 2.2.3. [33] (*Detectabilidade na Média Quadrática*) Seja $C = (C_1, \dots, C_s)$. O par (C, F) é detectável na média quadrática se existir $M = (M_1, \dots, M_s)$ tal que⁶ $r_\sigma(\mathcal{A}_1) < 1$, no qual $\mathcal{A}_1 := \mathcal{CN}$, $\mathcal{C} := (\mathbb{P}^T \otimes I_{n^2})$ e $\mathcal{N} := \text{diag}[\Gamma_i \otimes \Gamma_i]$ com $\Gamma_i = F_i + M_i C_i$ para cada $i \in \Theta$.

Definição 2.2.4. [33] (*Solução Estabilizante na Média Quadrática*) Diz-se que $P = (P_1, \dots, P_s)$ é uma solução estabilizante na média quadrática para as equações algébricas de Riccati acopladas (2.38) se ela satisfaz para cada $i \in \Theta$

$$P_i = F_i^T \Psi_i(P) F_i - F_i^T \Psi_i(P) G_i (D_i^T D_i + G_i^T \Psi_i(P) G_i)^{-1} G_i^T \Psi_i(P) F_i + C_i^T C_i, \quad (2.38)$$

com $\Psi_i(P) := \sum_{j=1}^s P_j p_{ij}$, e $r_\sigma(\mathcal{A}_1) < 1$, com $\Gamma_i = F_i + G_i K_i(P)$ e $K_i(P)$ dado por

$$K_i(P) = - (D_i^T D_i + G_i^T \Psi_i(P) G_i)^{-1} G_i^T \Psi_i(P) F_i.$$

Observação 2.2.4. De acordo com o Corolário A.16 em [33], se (F, G) é um par estabilizável e (C, F) é um par detectável então a solução para (2.38) existe. O resultado a seguir estabelece uma condição suficiente para a convergência da sequência $\{P_k\}$ para a solução estabilizante.

Teorema 2.2.2. [33] (*Convergência Assintótica*) Suponha que o par (F, G) seja estabilizável. Então para qualquer condição inicial $\bar{P} = (\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_s) \succeq 0$, $P_k = (P_{1,k}, \dots, P_{s,k})$ converge para uma solução semi-definida positiva $P = (P_1, \dots, P_s)$ de (2.38) quando k tende ao infinito. Além disso, se o par (C, F) é detectável, então existe uma única solução semi-definida positiva P para (2.38) e essa solução é a única solução estabilizante na média quadrática.

Valendo-se do Teorema 2.2.2 e das equivalências estabelecidas no Lema 2.2.2, a convergência do Regulador Linear Quadrático apresentado na Tabela 2.1 para um regulador estável na média quadrática quando os parâmetros são invariantes no tempo fica estabelecida.

⁶Raio espectral: $r_\sigma(A) := \max_t \{|\lambda_t| : \lambda_t, t = 1, \dots, n \text{ são autovalores de } A \in \mathbb{R}^{n \times n}\}.$

2.3 Exemplo Numérico

Exemplo 2.3.1. Considere o SLSM (2.1) invariante no tempo com três modos de operações e horizonte $N = 20$. As matrizes de parâmetros e ponderações, adaptadas de [9], são

$$F_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2.5 & 3.2 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 3.60 & -3.80 \\ -3.80 & 4.87 \end{bmatrix}, \quad R_1 = 2.6;$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4.3 & 4.5 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 3.38 & -2.54 \\ -2.54 & 2.70 \end{bmatrix}, \quad R_2 = 1.165;$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5.3 & 5.2 \end{bmatrix}, \quad G_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 5 & -4.5 \\ -4.5 & 4.5 \end{bmatrix}, \quad R_3 = 1.111;$$

e a matriz de probabilidade de transição é dada por $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.17 & 0.16 \\ 0.30 & 0.47 & 0.23 \\ 0.26 & 0.10 & 0.64 \end{bmatrix}$.

Na Figura 2.1 são apresentados o comportamento dos estados e da ação de controle ótimo a cada instante de tempo para uma realização aleatória da cadeia de Markov.

Figura 2.1: Regulador Linear Quadrático.

No limite $k \rightarrow \infty$, $P_{i,k}$; $i = 1, 2, 3$ convergem para as seguintes matrizes de solução das

equações acopladas:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 789.44 & 393.36 \\ 393.36 & 256.51 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 809.91 & 389.18 \\ 389.18 & 244.06 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 233.71 & 150.37 \\ 150.37 & 207.43 \end{bmatrix}.$$

2.4 Conclusões Parciais

O problema de controle ótimo quadrático para SLSM quando o estado e o parâmetro de salto são completamente observados foi revisto. O problema de minimização com restrição é considerado em relação a u_k e x_{k+1} . A abordagem adotada para a solução do problema restrito é baseado em mínimos quadrados ponderados e funções penalidade.

A formulação do problema RLQ, para diversas categorias de sistemas lineares no espaço de estado, como um problema de minimização com restrição é clássica [4, 7, 33, 66, 81, 88]. No entanto, a aplicação do método de funções penalidade é inovadora. De acordo com esse procedimento, o problema de controle revisitado é reformulado para cada instante k segundo o problema de minimização do funcional quadrático

$$J_k^\mu(x_{k+1}, u_k) = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{i,k+1} & 0 \\ 0 & R_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} + \quad (2.39)$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & -G_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I \\ F_{i,k} \end{bmatrix} x_k \right)^T \begin{bmatrix} Q_{i,k} & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & -G_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I \\ F_{i,k} \end{bmatrix} x_k \right)$$

para cada valor fixado de μ , cuja solução ótima (x_{k+1}^*, u_k^*) é alcançada quando $\mu \rightarrow +\infty$. A lei de controle ótimo, a matriz do ganho de realimentação e as equações de Riccati acopladas são obtidas em um arranjo matricial equivalente à solução clássica.

A motivação em propor essa abordagem alternativa é estabelecer condições favoráveis para que o caso robusto possa ser investigado. A formulação do problema de controle robusto recursivo para SLSM incertos será baseada em uma extensão do funcional quadrático penalizado (2.39).

CAPÍTULO 3

REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO ROBUSTO PARA SLSM DEPENDENTE DO MODO

Neste capítulo, o projeto de um regulador robusto recursivo é proposto para SLSM incertos de tempo discreto quando a variável de estado e o parâmetro de salto são observados. A abordagem baseia-se na otimização do tipo min-max de um índice de desempenho quadrático penalizado. Esse critério envolve dois objetivos opostos propositalmente definidos para considerar a melhor ação de controle em oposição à máxima influência de incertezas.

Um funcional quadrático é derivado da combinação de problemas de mínimos quadrados regularizados incertos [93] e funções penalidade [83], como extensão do caso nominal apresentado no Capítulo 2. A motivação em definir o problema de controle robusto tomando por base a versão nominal é inspirada nas características estruturais dos projetos de custos quadráticos clássicos desenvolvidos nos anos 50 e 60. Combinada ao procedimento de penalidade, essa abordagem torna possível a extensão do projeto de RLQs recursivos em uma versão robusta por meio de Equações de Riccati.

O RLQ robusto recursivo desenvolvido é dado por equações de Riccati recursivas acopladas apresentadas em uma estrutura unificada de blocos matriciais. A implementação independe do ajuste de parâmetros auxiliares, sendo sua simplicidade equiparada ao RLQ para SLSM nominais, [9, 33]. Somente as matrizes de parâmetros e ponderações conhecidas fazem-se necessárias. A convergência e a estabilidade são estabelecidas para sistemas invariantes no tempo.

A formulação proposta neste capítulo consiste em uma extensão dos problemas de controle ótimo quadrático clássicos da literatura. Na ausência de incertezas, o regulador para SLSM nominais (*e.g.*, [33]) é obtido. Se os saltos também forem desconsiderados, a solução é reduzida ao RLQ padrão (*e.g.*, [4, 7, 66, 81, 88]).

3.1 Formulação do Problema

Considere o seguinte SLSM incerto

$$x_{k+1} = (F_{\theta_k,k} + \delta F_{\theta_k,k})x_k + (G_{\theta_k,k} + \delta G_{\theta_k,k})u_k, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (3.1)$$

sendo $x_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u_k \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entrada de controle e $F_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $G_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ as matrizes de parâmetros nominais. As matrizes de incertezas $\delta F_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\delta G_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são modeladas da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \delta F_{\theta_k,k} & \delta G_{\theta_k,k} \end{bmatrix} = H_{\theta_k,k} \Delta_{\theta_k,k} \begin{bmatrix} E_{F_{\theta_k,k}} & E_{G_{\theta_k,k}} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

para todo $k = 0, \dots, N-1$, no qual $H_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times k}$ (matriz não-nula), $E_{F_{\theta_k,k}} \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $E_{G_{\theta_k,k}} \in \mathbb{R}^{l \times m}$ são todas consideradas conhecidas e $\Delta_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{k \times l}$ é uma matriz de contração arbitrária, $\|\Delta_{\theta_k,k}\| \leq 1$. Analogamente ao Capítulo 2, θ_k corresponde ao parâmetro de salto admitindo valores a cada instante k no conjunto finito $\Theta := \{1, \dots, s\}$. O processo $\{\theta_k\}_{k=0}^N$ é modelado como um processo de Markov com matriz de probabilidade de transição de estados definida por $\mathbb{P} = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{s \times s}$, com suas entradas satisfazendo

$$Prob[\theta_{k+1} = j \mid \theta_k = i] = p_{ij}, \quad Prob[\theta_0 = i] = \pi_i, \quad \sum_{j=1}^s p_{ij} = 1, \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1. \quad (3.3)$$

Suponha as condições iniciais x_0 e θ_0 conhecidas e x_k e θ_k observados a cada instante k . Nessas condições, em razão da natureza incerta do modelo (3.1)-(3.2), o projeto do regulador robusto consistirá na obtenção da melhor sequência de ações de controle $\mathcal{U}_r = \{u_0^*, \dots, u_{N-1}^*\}$ em contrapartida à máxima influência de incertezas.

Para tanto, o problema de minimização irrestrita (2.39), formulado no Capítulo 2, será redefinido a fim de viabilizar a inclusão de incertezas paramétricas. O método de penalidades permite estender essa abordagem de forma adequada a lidar com o caso robusto. Considere então o seguinte problema:

Problema de Controle Robusto: Para cada $\mu > 0$ fixado, determinar a sequência ótima

$\{(x_{\mu,k+1}^*, u_{\mu,k}^*)\}_{k=0}^{N-1}$ segundo o problema de otimização min-max

$$\min_{x_{k+1}, u_k} \max_{\delta F_{i,k}, \delta G_{i,k}} \left\{ \tilde{J}_k^\mu(x_{k+1}, u_k, \delta F_{i,k}, \delta G_{i,k}) \right\}, \quad (3.4)$$

para cada $k = N - 1, \dots, 0$ e $\theta_k = i \in \Theta$, sendo $\tilde{J}_k^\mu(x_{k+1}, u_k, \delta F_{i,k}, \delta G_{i,k})$ o funcional quadrático regularizado penalizado incerto definido por

$$\tilde{J}_k^\mu(x_{k+1}, u_k, \delta F_{i,k}, \delta G_{i,k}) = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{i,k+1} & 0 \\ 0 & R_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} + \quad (3.5)$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & -G_{i,k}^\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I \\ F_{i,k}^\delta \end{bmatrix} x_k \right)^T \begin{bmatrix} Q_{i,k} & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & -G_{i,k}^\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I \\ F_{i,k}^\delta \end{bmatrix} x_k \right),$$

com $F_{i,k}^\delta := (F_{i,k} + \delta F_{i,k})$, $G_{i,k}^\delta := (G_{i,k} + \delta G_{i,k})$, $\Psi_{i,k+1} = \sum_{j=1}^s P_{j,k+1} p_{ij}$, $R_{i,k} \succ 0$ e $Q_{i,k} \succ 0$.

Alguns aspectos relevantes devem ser destacados nessa formulação. Primeiro, o parâmetro μ impõe uma penalidade sempre que a restrição (3.1)-(3.2) não é satisfeita e, também, regulariza o funcional nos moldes de (1.16)-(1.18). Segundo, se a presença de incertezas é desconsiderada

em (3.4)-(3.5), *i.e.*, $\delta F_{i,k} \equiv 0$ e $\delta G_{i,k} \equiv 0$ para todo i, k , o problema torna-se

$$\min_{x_{k+1}, u_k} \{J_k^\mu(x_{k+1}, u_k)\},$$

cujas solução converge, quando $\mu \rightarrow +\infty$, para a solução ótima do problema restrito

$$\begin{aligned} \min_{x_{k+1}, u_k} \{x_{k+1}^T \Psi_{i,k+1} x_{k+1} + u_k^T R_{i,k} u_k + x_k^T Q_{i,k} x_k\} \\ \text{sujeito a } x_{k+1} = F_{i,k} x_k + G_{i,k} u_k, \end{aligned}$$

que consiste no RLQ para SLSM nominais revisto no Capítulo 2. Além disso, o critério de projeto (3.4)-(3.5) abrange também a formulação do caso determinístico nominal se o sistema for considerado também sem saltos, *i.e.*,

$$\begin{aligned} \min_{x_{k+1}, u_k} \{x_{k+1}^T P_{k+1} x_{k+1} + u_k^T R_k u_k + x_k^T Q_k x_k\} \\ \text{sujeito a } x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k, \end{aligned}$$

cujas solução constitui o RLQ padrão (*e.g.*, [4, 81]).

A seção a seguir apresenta os passos do desenvolvimento do RLQ robusto recursivo por meio do critério (3.4)-(3.5). A nova abordagem, baseada em funções penalidade e mínimos quadrados regularizados incertos, será empregada para a solução do problema min-max.

3.2 RLQ Robusto Recursivo

O problema (3.4)-(3.5) consiste em um caso particular do problema de otimização (1.16)-(1.18) cuja solução é apresentada no Lema 1.2.3. Para cada instante k e $\theta_k = i \in \Theta$, considere $\mu > 0$ fixado e as seguintes identificações

$$\begin{aligned} Q &\leftarrow \begin{bmatrix} \Psi_{i,k+1} & 0 \\ 0 & R_{i,k} \end{bmatrix}, \quad W \leftarrow \begin{bmatrix} Q_{i,k} & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix}, \quad x \leftarrow \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}, \\ A &\leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & -G_{i,k} \end{bmatrix}, \quad \delta A \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\delta G_{i,k} \end{bmatrix}, \quad b \leftarrow \begin{bmatrix} -I \\ F_{i,k} \end{bmatrix} x_k, \quad \delta b \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \delta F_{i,k} \end{bmatrix} x_k, \end{aligned}$$

$$H \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ H_{i,k} \end{bmatrix}, \quad \Delta \leftarrow \Delta_{\theta_k,k}, \quad E_A \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & -E_{G_{i,k}} \end{bmatrix}, \quad E_b \leftarrow E_{F_{i,k}} x_k. \quad (3.6)$$

O resultado a seguir apresenta a solução ótima do problema (3.4)-(3.5) para cada $\mu > 0$.

Proposição 3.2.1. *Dado $\mu > 0$, considere o problema de otimização (3.4)-(3.5) para um instante k qualquer fixado e $\theta_k = i \in \Theta$. A solução ótima $(x_{\mu,k+1}^*, u_{\mu,k}^*)$ é dada por*

$$\begin{bmatrix} x_{\mu,k+1}^* \\ u_{\mu,k}^* \\ \tilde{J}_k^\mu(x_{\mu,k+1}^*, u_{\mu,k}^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & x_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L_{\mu,i,k} \\ K_{\mu,i,k} \\ P_{\mu,i,k} \end{bmatrix} x_k, \quad (3.7)$$

sendo $L_{\mu,i,k}$, $K_{\mu,i,k}$ e $P_{\mu,i,k}$ calculados por meio de

$$\begin{bmatrix} L_{\mu,i,k} \\ K_{\mu,i,k} \\ P_{\mu,i,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & \hat{F}_{i,k} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{i,k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_{i,k}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma_{i,k} & \hat{I} & -\hat{G}_{i,k} \\ I & 0 & 0 & \hat{I}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\hat{G}_{i,k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \hat{F}_{i,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

com os blocos matriciais

$$\Sigma_{i,k} = \begin{bmatrix} \mu^{-1}I - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} H_{i,k} H_{i,k}^T & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} I \end{bmatrix}, \quad \hat{I} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{F}_{i,k} = \begin{bmatrix} F_{i,k} \\ E_{F_{i,k}} \end{bmatrix}, \quad \hat{G}_{i,k} = \begin{bmatrix} G_{i,k} \\ E_{G_{i,k}} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

e $\hat{\lambda}_{i,k}$ decorrente da minimização de $\Gamma_{i,k}(\lambda_{i,k})$ sobre o intervalo $(\|\mu H_{i,k}^T H_{i,k}\|, +\infty)$ conforme o Teorema 1.2.1. Alternativamente, $P_{\mu,i,k}$ pode ser representado também como:

$$P_{\mu,i,k} = L_{\mu,i,k}^T \Psi_{i,k+1} L_{\mu,i,k} + K_{\mu,i,k}^T R_{i,k} K_{\mu,i,k} + Q_{i,k} + \left(\hat{I} L_{\mu,i,k} - \hat{G}_{i,k} K_{\mu,i,k} - \hat{F}_{i,k} \right)^T \Sigma_{i,k}^{-1} \left(\hat{I} L_{\mu,i,k} - \hat{G}_{i,k} K_{\mu,i,k} - \hat{F}_{i,k} \right). \quad (3.10)$$

Demonstração. As expressões (3.7) e (3.8) seguem imediatamente do Lema 1.2.3 com as identificações estabelecidas em (3.6). A representação alternativa de $P_{\mu,i,k}$ é consequência da substituição da solução ótima $(x_{\mu,k+1}^*, u_{\mu,k}^*)$ no funcional regularizado incerto em (3.5). $\square$

A penalidade imposta pelo parâmetro μ está associada ao nível de robustez do regulador em atenuar as incertezas presentes nas matrizes do Sistema (3.1)-(3.2). O Corolário a seguir estabelece a solução ótima quando $\mu \rightarrow +\infty$.

Corolário 3.2.1. *Suponha $E_{G_{i,k}}$ posto linha pleno. Quando $\mu \rightarrow +\infty$, a solução ótima (3.7)-(3.10) torna-se*

$$\begin{bmatrix} x_{\infty,k+1} \\ u_{\infty,k} \\ \tilde{J}_k(x_{\infty,k+1}, u_{\infty,k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & x_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L_{\infty,i,k} \\ K_{\infty,i,k} \\ P_{\infty,i,k} \end{bmatrix} x_k, \quad (3.11)$$

sendo $L_{\infty,i,k}$, $K_{\infty,i,k}$ e $P_{\infty,i,k}$ dados por

$$\begin{bmatrix} L_{\infty,i,k} \\ K_{\infty,i,k} \\ P_{\infty,i,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & \hat{F}_{i,k} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{i,k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_{i,k}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{I} & -\hat{G}_{i,k} \\ I & 0 & 0 & \hat{I}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\hat{G}_{i,k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \hat{F}_{i,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

com os blocos $\hat{I}$, $\hat{F}_{i,k}$ e $\hat{G}_{i,k}$ definidos em (3.9). Além disso,

$$P_{\infty,i,k} = L_{\infty,i,k}^T \Psi_{i,k+1} L_{\infty,i,k} + K_{\infty,i,k}^T R_{i,k} K_{\infty,i,k} + Q_{i,k}. \quad (3.13)$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 1.2.1, $\hat{\lambda}_{i,k} \in (\|\mu H_{i,k}^T H_{i,k}\|, +\infty)$ para cada $\mu \in (0, +\infty)$. Quando $\mu \rightarrow +\infty$, tem-se que $\hat{\lambda}_{i,k} \rightarrow +\infty$ e $\Sigma_{i,k}(\mu, \hat{\lambda}_{i,k}) \rightarrow 0$. Conforme estabelecido pelo método de penalidades, conclui-se então que o termo quadrático em (3.10),

$$\left(\hat{I} L_{\mu,i,k} - \hat{G}_{i,k} K_{\mu,i,k} - \hat{F}_{i,k} \right)^T \Sigma_{i,k}^{-1} \left(\hat{I} L_{\mu,i,k} - \hat{G}_{i,k} K_{\mu,i,k} - \hat{F}_{i,k} \right),$$

tende a zero quando $\mu \rightarrow +\infty$. Isto é, o termo $\left(\hat{I} L_{\mu,i,k} - \hat{G}_{i,k} K_{\mu,i,k} - \hat{F}_{i,k} \right)$ tende a zero muito mais rápido do que as entradas de $\Sigma_{i,k}^{-1}$ tendem ao infinito¹. Dessa forma, o ganho de realimentação de estado robusto $K_{\infty,i,k}$ é tal que $(E_{F_{i,k}} + E_{G_{i,k}} K_{\infty,i,k} = 0)$ e $L_{\infty,i,k} = (F_{i,k} +$

¹A justificativa deste aspecto consiste numa passagem intermediária da prova do teorema sobre a convergência do método de penalidades apresentada em [83].

$G_{i,k}K_{\infty,i,k})$, para cada $i \in \Theta$. □

Para simplificar a notação, será adotado de agora em diante a seguinte representação: $L_{\infty,i,k} := L_{i,k}$, $K_{\infty,i,k} := K_{i,k}$ e $P_{\infty,i,k} := P_{i,k}$. Considerando esses resultados preliminares, a solução ótima robusta recursiva é estabelecida no resultado a seguir.

Teorema 3.2.1. *A sequência ótima $\{(x_{k+1}^*, u_k^*)\}_{k=0}^{N-1}$ derivada do problema de otimização min-max (3.4)-(3.5) é dada por*

$$\begin{bmatrix} x_{k+1}^* \\ u_k^* \\ \tilde{J}_k(x_{k+1}^*, u_k^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & x_k^* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L_{\theta_k,k} \\ K_{\theta_k,k} \\ P_{\theta_k,k} \end{bmatrix} x_k^*, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (3.14)$$

com $\theta_k = i \in \Theta$ e $L_{i,k}$, $K_{i,k}$ e $P_{i,k}$ dados por

$$\Psi_{i,k+1} = \left(\sum_{j=1}^s P_{j,k+1} p_{ij} \right), \quad (3.15)$$

$$\begin{bmatrix} L_{i,k} \\ K_{i,k} \\ P_{i,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & \hat{F}_{i,k} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{i,k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & R_{i,k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & Q_{i,k}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{I} & -\hat{G}_{i,k} \\ I & 0 & 0 & \hat{I}^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -\hat{G}_{i,k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ \hat{F}_{i,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

para todo $k = N-1, \dots, 0$ e os blocos $\hat{I}$, $\hat{F}_{i,k}$ e $\hat{G}_{i,k}$ definidos em (3.9). O custo total ótimo é $\tilde{J}^*(\theta_0, x_0, u^*) = x_0^T P_{\theta_0,0} x_0$.

Demonstração. Considere o problema (3.4)-(3.5) definido sobre o intervalo $[k, N]$, para todo $k = 0, \dots, N-1$. Inspirado no caso nominal, revisto no Capítulo 2, procede-se de trás para frente no tempo. No primeiro passo, $k = N$, considere $x_N^T P_{\theta_N,N} x_N$ sendo o custo terminal. De acordo com o Corolário 3.2.1, a solução ótima quando $\mu \rightarrow +\infty$ é dada por (3.11)-(3.12), e $x_{N-1}^T P_{\theta_{N-1},N-1} x_{N-1}^T$ corresponde ao custo acumulado sobre o intervalo $[N-1, N]$. Analogamente para $[k, N]$ com $k = N-2, \dots, 0$, segue o resultado. □

Manipulações algébricas no sistema linear associado à Equação (3.16) do Teorema 3.2.1, por meio da inserção de variáveis auxiliares, permitem reescrevê-lo de forma semelhante à apresentada na Observação 2.2.3. Baseado nessa nova representação matricial, no modelo sujeito a incertezas (3.1)-(3.2), no critério (3.4)-(3.5) e no Teorema 3.2.1, o regulador robusto recursivo projetado para SLSM incertos é proposto na Tabela 3.1.

Analogamente ao caso nominal do Capítulo 2, o quadro a seguir apresenta uma forma computacionalmente mais eficiente de computar $\{L_{i,k}^r\}_{k=0}^{N-1}$, $\{K_{i,k}^r\}_{k=0}^{N-1}$ e $\{P_{i,k}^r\}_{k=0}^{N-1}$ para cada $i \in \Theta$ por meio da solução de um sistema linear. A solução pode ser determinada com o emprego de algoritmos adequados sem a necessidade do cálculo da inversa do bloco matricial principal.

Considere as mesmas condições estabelecidas no algoritmo da Tabela 3.1. Então,

$$L_{i,k}^r = X_8, \quad K_{i,k}^r = X_9, \quad P_{i,k}^r = -X_5 + \hat{F}_{i,k}^T X_7,$$

com X_5 , X_7 , X_8 e X_9 compondo a solução do seguinte sistema linear:

$$\Psi_{i,k+1} := \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^r p_{ij},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -\Psi_{i,k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & -R_{i,k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & -Q_{i,k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{I} & -\hat{G}_{i,k} \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -\hat{G}_{i,k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ \hat{F}_{i,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para cada $i \in \Theta$ e todo $k = N - 1, \dots, 0$.

Algumas características do RLQ robusto recursivo merecem destaque. A similaridade do RLQ robusto com o RLQ nominal é notória em alguns aspectos, sobretudo com relação à ausên-

cia de condição de existência. A recursividade é realizada sem a necessidade do pré-ajuste de parâmetros auxiliares. Os cálculos decorrem somente das matrizes de parâmetros e ponderações que modelam o sistema. Essas e outras similaridades tornam-se evidentes com a demonstração, a seguir, de que a recursividade do RLQ robusto está associada a equações recursivas de Riccati acopladas na estrutura convencional do RLQ para SLSM nominais.

3.3 Convergência e Estabilidade

Nesta seção serão investigadas as condições que asseguram a performance em regime permanente do RLQ robusto recursivo proposto quando os parâmetros são invariantes no tempo. A convergência desse regulador para um regulador estável em regime será estabelecida valendo-se de identificações com o caso nominal, de acordo com [33]. Procedimentos de prova similares a esse são usuais na análise da performance de estimativas robustas de estados, veja por exemplo, [92, 111, 112].

3.3.1 Equivalências

Manipulações algébricas das expressões apresentadas na Tabela 3.1 mostram que a solução no arranjo matricial proposto é equivalente à forma das equações do problema de controle ótimo para SLSM sem incertezas, veja [9, 19, 33]. Os próximos resultados estabelecem tais equivalências. Com a finalidade de simplificar a notação, o rótulo r será omitido nos cálculos.

Lema 3.3.1. *Suponha $R_{i,k} \succ 0$ e $E_{G_{i,k}}$ posto linha pleno. Então:*

- (i) - $\left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_{i,k+1} G_{i,k} \\ E_{G_{i,k}} \end{bmatrix} R_{i,k}^{-1} \begin{bmatrix} G_{i,k}^T & E_{G_{i,k}}^T \end{bmatrix} \right)$ é não-singular.
- (ii) - $\bar{R}_{i,k} := R_{i,k}^{-1} - R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T (E_{G_{i,k}} R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T)^{-1} E_{G_{i,k}} R_{i,k}^{-1}$ é simétrica semi-definida positiva.

Demonstração. As verificações dos itens (i) e (ii) decorrem da definição de matrizes definidas positivas e pela propriedade de *Complemento de Schur*², respectivamente. $\square$

²Veja Definição A.1.1 e mais detalhes em [108].

Tabela 3.1: Regulador Linear Quadrático Robusto para SLSM^a

SLSM Incerto: Considere o modelo (3.1)-(3.2) e o critério (3.4)-(3.5) com $Q_{i,k} \succeq 0$ e $R_{i,k} \succ 0, \forall i \in \Theta$ e $k = 0, \dots, N - 1$.

Condições Iniciais: Defina $x_0, \theta_0, \mathbb{P}$ e $P_{i,N} \succeq 0, \forall i \in \Theta$.

Passo 1: (*Para trás*) Calcule para todo $k = N - 1, \dots, 0$:

$$\Psi_{i,k+1} := \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^r p_{ij},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & -\Psi_{i,k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & -R_{i,k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_{i,k}^r \\ K_{i,k}^r \\ P_{i,k}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{F}_{i,k} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I \\ 0 \\ 0 \\ \hat{F}_{i,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Passo 2: (*Para frente*) Obtenha para cada $k = 0, \dots, N - 1$:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1}^* \\ u_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\theta_k,k}^r \\ K_{\theta_k,k}^r \end{bmatrix} x_k^*.$$

^a A nomenclatura sobrescrita r utilizada nas notações de $K_{i,k}^r$ e $L_{i,k}^r$ rotula a robustez da solução, diferenciando-a da solução nominal apresentada no Capítulo 2.

Lema 3.3.2. *As expressões apresentadas na Tabela 3.1 são equivalentes a:*

$$L_{i,k} = \bar{F}_{i,k} - \bar{G}_{i,k}(I + \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} \bar{G}_{i,k})^{-1} \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} \bar{F}_{i,k},$$

$$K_{i,k} = -\bar{R}_{i,k}^{\frac{1}{2}}(I + \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} \bar{G}_{i,k})^{-1} \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} \bar{F}_{i,k} - R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T (E_{G_{i,k}} R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T)^{-1} E_{F_{i,k}},$$

$$P_{i,k} = \bar{F}_{i,k}^T (\Psi_{i,k+1} - \Psi_{i,k+1} \bar{G}_{i,k} (I + \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} \bar{G}_{i,k})^{-1} \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1}) \bar{F}_{i,k} + \bar{Q}_{i,k},$$

com $\bar{R}_{i,k}$ conforme o Lema 3.3.1 e

$$\bar{F}_{i,k} := F_{i,k} - G_{i,k} R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T \left(E_{G_{i,k}} R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T \right)^{-1} E_{F_{i,k}}, \quad \bar{G}_{i,k} := G_{i,k} \bar{R}_{i,k}^{\frac{1}{2}},$$

$$\bar{Q}_{i,k} := Q_{i,k} + E_{F_{i,k}}^T (E_{G_{i,k}} R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T)^{-1} E_{F_{i,k}}.$$

Demonstração. As matrizes $L_{i,k}$ e $K_{i,k}$ são uma partição da solução do sistema de equações:

$$X_2 + L_{i,k} = 0 \tag{3.17}$$

$$X_1 - \Psi_{i,k+1} X_2 = 0 \tag{3.18}$$

$$X_4 + K_{i,k} = 0 \tag{3.19}$$

$$X_3 - R_{i,k} X_4 = 0 \tag{3.20}$$

$$X_6 = -I \tag{3.21}$$

$$X_5 - Q_{i,k} X_6 = 0 \tag{3.22}$$

$$L_{i,k} - G_{i,k} K_{i,k} = F_{i,k} \tag{3.23}$$

$$-E_{G_{i,k}} K_{i,k} = E_{F_{i,k}} \tag{3.24}$$

$$X_1 + X_7 = 0 \tag{3.25}$$

$$X_3 - G_{i,k}^T X_7 - E_{G_{i,k}}^T X_8 = 0 \tag{3.26}$$

A combinação de (3.19), (3.20) e (3.26) resulta em

$$K_{i,k} = -R_{i,k}^{-1} \begin{bmatrix} G_{i,k}^T & E_{G_{i,k}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_7 \\ X_8 \end{bmatrix}, \tag{3.27}$$

que junto com (3.17), (3.18), (3.24) e (3.25) fornecem

$$\left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_{i,k+1} G_{i,k} \\ E_{G_{i,k}} \end{bmatrix} R_{i,k}^{-1} \begin{bmatrix} G_{i,k}^T & E_{G_{i,k}}^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} X_7 \\ X_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{i,k+1} F_{i,k} \\ E_{F_{i,k}} \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

De (3.27) e (3.28), uma vez que a inversa do bloco matricial está garantida pelo item (i) do Lema 3.3.1, tem-se

$$K_{i,k} = -R_{i,k}^{-1} \begin{bmatrix} G_{i,k}^T & E_{G_{i,k}}^T \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_{i,k+1} G_{i,k} \\ E_{G_{i,k}} \end{bmatrix} R_{i,k}^{-1} \begin{bmatrix} G_{i,k}^T & E_{G_{i,k}}^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \Psi_{i,k+1} F_{i,k} \\ E_{F_{i,k}} \end{bmatrix},$$

a qual, pela aplicação da *Fórmula de Banachiewicz*³ para inversão do bloco matricial particionado, pode ser reescrita como

$$K_{i,k} = -\bar{R}_{i,k} G_{i,k}^T (I + \Psi_{i,k+1} G_{i,k} \bar{R}_{i,k} G_{i,k}^T)^{-1} \Psi_{i,k+1} \bar{F}_{i,k} - R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T (E_{G_{i,k}} R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T)^{-1} E_{F_{i,k}},$$

sendo $\bar{R}_{i,k}$ conforme o Lema 3.3.1 e $\bar{F}_{i,k} = (F_{i,k} - G_{i,k} R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T (E_{G_{i,k}} R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T)^{-1} E_{F_{i,k}})$.

De (3.23) e $K_{i,k}$, resulta

$$\begin{aligned} L_{i,k} &= F_{i,k} + G_{i,k} K_{i,k} \\ &= \bar{F}_{i,k} - G_{i,k} \bar{R}_{i,k} G_{i,k}^T (I + \Psi_{i,k+1} G_{i,k} \bar{R}_{i,k} G_{i,k}^T)^{-1} \Psi_{i,k+1} \bar{F}_{i,k}. \end{aligned}$$

Definindo $\bar{G}_{i,k} := G_{i,k} \bar{R}_{i,k}^{\frac{1}{2}}$, uma vez que $\bar{R}_{i,k} \succeq 0$ de acordo com o item (ii) do Lema 3.3.1, então $K_{i,k}$ e $L_{i,k}$ podem ser reescritas ainda como:

$$\begin{aligned} K_{i,k} &= -\bar{R}_{i,k}^{\frac{1}{2}} (I + \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} \bar{G}_{i,k})^{-1} \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} \bar{F}_{i,k} - R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T (E_{G_{i,k}} R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T)^{-1} E_{F_{i,k}}, \\ L_{i,k} &= \bar{F}_{i,k} - \bar{G}_{i,k} (I + \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} \bar{G}_{i,k})^{-1} \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} \bar{F}_{i,k}. \end{aligned}$$

Finalmente, a substituição de $L_{i,k}$ e $K_{i,k}$ em (3.13) fornece

$$P_{i,k} = \bar{F}_{i,k}^T (\Psi_{i,k+1} - \Psi_{i,k+1} \bar{G}_{i,k} (I + \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} \bar{G}_{i,k})^{-1} \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1}) \bar{F}_{i,k} + \bar{Q}_{i,k},$$

³Veja Lema A.1.4, e mais detalhes em [108].

com $\bar{Q}_{i,k} = Q_{i,k} + E_{F_{i,k}}^T (E_{G_{i,k}} R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T)^{-1} E_{F_{i,k}}$. □

O quadro a seguir resume as conclusões dos lemas 3.3.1 e 3.3.2 a respeito da apresentação do RLQ robusto recursivo nos moldes da versão nominal.

O RLQ robusto para SLSM é dado por

$$x_{k+1}^* = L_{\theta_k, k}^r x_k^* \quad \text{e} \quad u_k^* = K_{\theta_k, k}^r x_k^*$$

para $k = 0, \dots, N - 1$ com $\theta_k \in \Theta$, sendo

$$L_{i,k}^r = \bar{F}_{i,k} - \bar{G}_{i,k} (I + \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1}^r \bar{G}_{i,k})^{-1} \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1}^r \bar{F}_{i,k}.$$

$$K_{i,k}^r = -\bar{R}_{i,k}^{\frac{1}{2}} (I + \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1}^r \bar{G}_{i,k})^{-1} \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1}^r \bar{F}_{i,k} - R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T (E_{G_{i,k}} R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T)^{-1} E_{F_{i,k}},$$

$$P_{i,k}^r = \bar{F}_{i,k}^T (\Psi_{i,k+1}^r - \Psi_{i,k+1}^r \bar{G}_{i,k} (I + \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1}^r \bar{G}_{i,k})^{-1} \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1}^r) \bar{F}_{i,k} + \bar{Q}_{i,k},$$

$$\text{com } \Psi_{i,k+1}^r = \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^r p_{ij},$$

$$\bar{F}_{i,k} := F_{i,k} - G_{i,k} R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T \left(E_{G_{i,k}} R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T \right)^{-1} E_{F_{i,k}}, \quad \bar{G}_{i,k} := G_{i,k} \bar{R}_{i,k}^{\frac{1}{2}},$$

$$\bar{R}_{i,k} := R_{i,k}^{-1} - R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T (E_{G_{i,k}} R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T)^{-1} E_{G_{i,k}} R_{i,k}^{-1},$$

$$\bar{Q}_{i,k} := Q_{i,k} + E_{F_{i,k}}^T (E_{G_{i,k}} R_{i,k}^{-1} E_{G_{i,k}}^T)^{-1} E_{F_{i,k}},$$

para cada $i \in \Theta$ e $k = N - 1, \dots, 0$.

Observação 3.3.1. As equações acopladas de Riccati podem ser reescritas ainda como

$$P_{i,k}^r = \bar{L}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1}^r \bar{L}_{i,k} + \bar{K}_{i,k}^T R_{i,k} \bar{K}_{i,k} + \bar{Q}_{i,k},$$

com $\bar{L}_{i,k}$ e $\bar{K}_{i,k}$ dados por

$$\bar{L}_{i,k} = \bar{F}_{i,k} + \bar{G}_{i,k} \bar{K}_{i,k} \quad \text{e} \quad \bar{K}_{i,k} = -(I + \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1}^r \bar{G}_{i,k})^{-1} \bar{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1}^r \bar{F}_{i,k},$$

para cada $i \in \Theta$. Além disso, das passagens da prova do Lema 3.3.2 conclui-se ainda que

$$L_{i,k}^r = F_{i,k} + G_{i,k}K_{i,k}^r = \bar{F}_{i,k} + \bar{G}_{i,k}\bar{K}_{i,k} = \bar{L}_{i,k}.$$

A estabilidade do RLQ robusto em regime permanente é estabelecida na sequência. A convergência da sequência $\{P_k^r\}$, com $P_k^r = (P_{1,k}^r, \dots, P_{s,k}^r)$ para uma solução estabilizante $P^r = (P_1^r, \dots, P_s^r)$ quando k tende ao infinito, será demonstrada de acordo com [33].

3.3.2 Resultado Principal

Considere o SLSM incerto

$$x_{k+1} = (F_{\theta_k} + \delta F_{\theta_k,k})x_k + (G_{\theta_k} + \delta G_{\theta_k,k})u_k, \quad k = 0, 1, \dots, \\ \begin{bmatrix} \delta F_{\theta_k,k} & \delta G_{\theta_k,k} \end{bmatrix} = H_{\theta_k} \Delta_{\theta_k,k} \begin{bmatrix} E_{F_{\theta_k}} & E_{G_{\theta_k}} \end{bmatrix},$$

com as matrizes de parâmetros e ponderações invariantes no tempo, exceto $\delta F_{\theta_k,k}$ e $\delta G_{\theta_k,k}$ por conta da contração $\Delta_{\theta_k,k}$ que varia com o tempo. Nesse caso, o RLQ robusto é dado por

$$x_{k+1}^* = L_{\theta_k,k}^r x_k^* \quad \text{e} \quad u_k^* = K_{\theta_k,k}^r x_k^*,$$

para $k = 0, 1, \dots$ com $\theta_k \in \Theta$, sendo

$$L_{i,k}^r = \bar{F}_i - \bar{G}_i(I + \bar{G}_i^T \Psi_{i,k+1}^r \bar{G}_i)^{-1} \bar{G}_i^T \Psi_{i,k+1}^r \bar{F}_i.$$

$$K_{i,k}^r = -\bar{R}_i^{\frac{1}{2}}(I + \bar{G}_i^T \Psi_{i,k+1}^r \bar{G}_i)^{-1} \bar{G}_i^T \Psi_{i,k+1}^r \bar{F}_i - R_i^{-1} E_{G_i}^T (E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T)^{-1} E_{F_i},$$

$$P_{i,k}^r = \bar{F}_i^T (\Psi_{i,k+1}^r - \Psi_{i,k+1}^r \bar{G}_i (I + \bar{G}_i^T \Psi_{i,k+1}^r \bar{G}_i)^{-1} \bar{G}_i^T \Psi_{i,k+1}^r) \bar{F}_i + \bar{Q}_i, \quad (3.29)$$

com $\Psi_{i,k+1}^r = \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^r p_{ij}$, e

$$\bar{F}_i = F_i - G_i R_i^{-1} E_{G_i}^T (E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T)^{-1} E_{F_i},$$

$$\bar{G}_i = G_i \bar{R}_i^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{R}_i = R_i^{-1} - R_i^{-1} E_{G_i}^T (E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T)^{-1} E_{G_i} R_i^{-1},$$

$$\bar{Q}_i = Q_i + E_{F_i}^T (E_{G_i} R_i^{-1} E_{G_i}^T)^{-1} E_{F_i}.$$

A comparação entre as equações acopladas de Riccati em [33], dadas por

$$P_i = F_i^T (\Psi_{i,k+1} - \Psi_{i,k+1} G_i (R_i + G_i^T \Psi_{i,k+1} G_i)^{-1} G_i^T \Psi_{i,k+1}) F_i + Q_i, \quad i \in \Theta,$$

e a versão robusta com parâmetros invariantes em (3.29) permite estabelecer as seguintes identificações:

$$F_i \leftarrow \bar{F}_i; \quad G_i \leftarrow \bar{G}_i; \quad R_i \leftarrow I; \quad Q_i \leftarrow \bar{Q}_i.$$

Valendo-se das equivalências estabelecidas no Lema 3.3.2, a questão da análise de estabilidade do regulador robusto consiste na avaliação das condições de um caso particular do problema de controle para SLSM nominais. O principal resultado desta seção a respeito da convergência do RLQ robusto para um regulador estável em regime permanente é estabelecido na sequência. Os conceitos apresentados na Subseção 2.2.2 são aplicados.

Teorema 3.3.1. *Considere a seguinte sequência de matrizes $\{P_{i,k}^r\}_{k=0}^{+\infty}$ para cada $i \in \Theta$ geradas pela recursão na Tabela 3.1. Se $(\bar{F}, \bar{G})$ é um par estabilizável e $(\bar{Q}, \bar{F})$ é um par detectável, então existe uma $P^r \succeq 0$ tal que $P_k^r \rightarrow P^r$ quando $k \rightarrow +\infty$. Além disso, P^r é a única solução estabilizante das equações algébricas de Riccati acopladas.*

Demonstração. O Lema 3.3.2 estabelece a equivalência das expressões da Tabela 3.1 com as equações acopladas conhecidas da literatura. De acordo com [33], o ganho de realimentação $\bar{K}_i = -(I + \bar{G}_i^T \Psi_i \bar{G}_i)^{-1} \bar{G}_i^T \Psi_i \bar{F}_i$ é tal que $\bar{L}_i = \bar{F}_i + \bar{G}_i \bar{K}_i$ é estável. Mas, de acordo com a Observação 3.3.1, $L_i^r = F_i + G_i K_i^r = \bar{L}$, de onde segue o resultado. $\square$

As hipóteses de estabilizabilidade e detectabilidade do teorema são estabelecidas tendo como base as matrizes de parâmetros modificadas $\bar{F}$, $\bar{G}$, $\bar{R}$ e $\bar{Q}$, que incluem os parâmetros que compõem a modelagem das incertezas paramétricas. Um resultado envolvendo as matrizes do SLSM incerto original permanece como um problema a ser explorado. No entendimento do autor, a viabilidade desse resultado dependeria do estabelecimento prévio de conceitos e critérios de estabilidade na média quadrática para SLSM sujeitos a incertezas paramétricas. Análises direcionadas a uma extensão de [30], por exemplo, representariam um ponto de partida para esta pesquisa.

Como já destacado anteriormente, os conceitos de estabilizabilidade e detectabilidade adotados nesta pesquisa são aqueles de acordo com [30, 33]. Uma versão do Teorema 3.3.1 considerando os conceitos e critérios de detectabilidade e observabilidade de SLSM propostos em [20, 22] seria ainda uma alternativa bastante interessante de ser investigada.

3.4 Exemplo Numérico

Exemplo 3.4.1. *Considere o exemplo numérico baseado no Sistema (3.1)-(3.2) com dois modos de operações e com a seguinte matriz de probabilidade de transição $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.63 & 0.37 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$. As matrizes de parâmetros do SLSM incerto e as matrizes de ponderação do índice de desempenho são dadas por*

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2.5 & 3.2 & 1.2 \\ 1.4 & 1.6 & 2 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2.7 & 0.4 & 2.1 \\ -3.4 & 2.5 & 4.8 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1.47 \\ -1.19 \\ 0.77 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0.60 \\ 1.65 \\ 1.05 \end{bmatrix},$$

$$E_{F_1} = \begin{bmatrix} 0.11 & 0.00 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad E_{F_2} = \begin{bmatrix} 0.80 & 0.00 & 0.12 \end{bmatrix},$$

$$E_{G_1} = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.26 & 0.95 \end{bmatrix}, \quad E_{G_2} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 3.6 & -3.8 & 0 \\ -3.8 & 4.87 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 2.9 & -2.2 & 0 \\ -2.2 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$R_1 = 1.266I_3, \quad P_{1,N} = I_3, \quad R_2 = 1.165I_3, \quad P_{2,N} = I_3.$$

As simulações apresentadas neste exemplo são baseadas no algoritmo proposto na Tabela 3.1. Nas figuras 3.1(a) e 3.1(b) são apresentados os comportamentos dos estados regulados e da ação de controle, respectivamente, para uma realização aleatória da cadeia de Markov e $-1 \leq \Delta_k \leq 1$.

Figura 3.1: Regulador Linear Quadrático Robusto.

A simulação de Monte Carlo para o sistema em malha fechada quando se aplica o RLQ Robusto e o RLQ Nominal são apresentadas nas figuras 3.2(a) e 3.2(b), respectivamente, considerando 5000 trajetórias possíveis.

Figura 3.2: Simulação de Monte Carlo: Trajetórias ($\cdots$) e Média ($---$).

As soluções das equações acopladas de Riccati e os respectivos ganhos de realimentação

são dados por

$$P_1 = \begin{bmatrix} 65.88 & -64.41 & -13.34 \\ -64.41 & 70.46 & 17.90 \\ -13.34 & 17.90 & 7.69 \end{bmatrix}, \quad K_1^r = \begin{bmatrix} -1.52 & -0.48 & -0.99 \\ 1.62 & -2.51 & -1.36 \\ -0.56 & 0.69 & 0.32 \end{bmatrix},$$
$$P_2 = \begin{bmatrix} 175.55 & -82.45 & -72.74 \\ -82.45 & 43.19 & 35.78 \\ -72.74 & 35.78 & 40.75 \end{bmatrix}, \quad K_2^r = \begin{bmatrix} -3.20 & 0 & -0.48 \\ 1.45 & -0.02 & -2.41 \\ 1.35 & -0.55 & -0.22 \end{bmatrix}.$$

3.5 Conclusões Parciais

Neste capítulo foi desenvolvido um regulador robusto recursivo para SLSM sob a influência de incertezas paramétricas. O uso da abordagem proposta para o projeto desse regulador, baseada em função penalidade e mínimos quadrados regularizados incertos, resultou em um algoritmo que não depende do ajuste de parâmetros. A recursividade é estabelecida por meio de equações de Riccati acopladas na forma de blocos matriciais particionados. As provas de convergência e estabilidade assemelham-se ao do RLQ padrão para SLSM sem incertezas. Essa abordagem revela-se abrangente o suficiente para lidar com o problema de estimativas de estados robustas.

CAPÍTULO 4

FILTRO DE KALMAN PARA SLSM DEPENDENTE DO MODO

O Filtro de Kalman¹ consiste num eficiente algoritmo recursivo que produz estimativas dos estados de um sistema dinâmico linear por meio de medições imprecisas afetadas por ruídos. Este estimador é capaz de fornecer estimativas passadas, presentes e futuras dos estados de forma recursiva assim que novas medições são processadas.

Se os ruídos são admitidos com distribuição Gaussiana, então as estimativas produzidas pelo Filtro de Kalman são ótimas, *i.e.*, são aquelas que minimizam a média do quadrado do erro de estimativa. Por outro lado, se os ruídos não são Gaussianos, então o Filtro de Kalman consiste no melhor estimador linear. As expressões que compõem esse estimador de estados recursivo admitem também uma interpretação determinística por meio da solução de um problema de mínimos quadrados, veja [13, 41, 92] e Apêndice B.

No que diz respeito aos SLSM, sabe-se que sob a hipótese de observação do parâmetro de salto a cada instante de tempo, as estimativas de estados ótimas são dadas pelo consagrado Filtro de Kalman para sistemas lineares sem saltos e variantes no tempo, veja [18, 33, 72].

¹Desenvolvido por Rudolf E. Kalman no célebre trabalho [75]. Mais informações em [64].

É também no contexto determinístico, baseado em [13, 41, 92], que a dedução do filtro para SLSM é revista neste trabalho. As estimativas de estados são deduzidas valendo-se da minimização de funcionais quadráticos, cuja validade² para todo horizonte é garantida pela programação dinâmica, veja [41, 79, 95]. O procedimento proposto para a solução do problema restrito em questão consiste na combinação da solução de mínimos quadrados ponderados [74] e funções penalidade [83].

As expressões das estimativas recursivas ótimas nas formas filtrada, preditora e suavizada e as respectivas equações de Riccati são apresentadas em um arranjo de matrizes particionadas em blocos contendo as matrizes de parâmetros e de variâncias do sistema. É demonstrado ainda que tais estimativas são equivalentes às expressões do Filtro de Kalman padrão.

A revisão desse problema, sob a mesma abordagem do problema de controle ótimo, tem como propósito a obtenção de um funcional custo quadrático penalizado que permita lidar com o problema de estimativas recursivas para o caso em que o SLSM esteja sujeito também a incertezas paramétricas.

4.1 Formulação do Problema

Considere o SLSM definido por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_{\theta_k, k} x_k + B_{\theta_k, k} u_k + G_{\theta_k, k} w_k, \\ y_k &= C_{\theta_k, k} x_k + D_{\theta_k, k} v_k, \end{aligned} \tag{4.1}$$

para todo $k = 0, 1, \dots$, sendo $x_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u_k \in \mathbb{R}^{m_1}$ a entrada de controle, $y_k \in \mathbb{R}^p$ o vetor de medida (observações), $w_k \in \mathbb{R}^{m_2}$ e $v_k \in \mathbb{R}^t$ ruídos aleatórios Gaussianos com média zero e matrizes de variâncias $Q_k \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$ e $R_k \in \mathbb{R}^{t \times t}$ definidas positivas, respectivamente. As matrizes de parâmetros $F_{\theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{\theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n \times m_1}$, $G_{\theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$, $C_{\theta_k, k} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D_{\theta_k, k} \in \mathbb{R}^{p \times t}$ são admitidas conhecidas para cada (θ_k, k) , no qual $\{\theta_k\}$ é um processo de Markov de estados finitos e tempo discreto com matriz de probabilidades de transição

²Mais detalhes são apresentados no Apêndice B.

de estados $\mathbb{P} = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{s \times s}$ cujas entradas satisfazem

$$Prob[\theta_{k+1} = j \mid \theta_k = i] = p_{ij}, \quad Prob[\theta_0 = i] = \pi_i, \quad \sum_{j=1}^s p_{ij} = 1, \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1,$$

conforme já detalhado nos capítulos anteriores.

Como é usual de se definir, x_0 , $\{w_k\}$ e $\{v_k\}$ são mutuamente independentes. O estado inicial θ_0 é considerado conhecido e y_k e θ_k são observados a todo instante de tempo k , porém de forma não-antecipada. Sob a hipótese de que o processo de estado $\{x_k\}$ não é perfeitamente observado, o problema consiste então na obtenção da melhor estimativa $\hat{x}_k$, do estado x_k , baseada em toda a informação disponível no instante k , *i.e.*,

$$\mathbf{Z}_k = \{y_1, \dots, y_k, \theta_0, \dots, \theta_k, u_0, \dots, u_{k-1}\}. \quad (4.2)$$

A respeito das estimativas de estados, as seguintes notações e nomenclaturas são introduzidas de acordo com (4.2):

- (N1) - $\hat{x}_{k+1|k}$ denota a estimativa preditora e consiste na melhor estimativa de x_{k+1} dado o conjunto de informações (observações) $\mathbf{Z}_k$, sendo $P_{k+1|k}$ a matriz de variância do erro de estimativa $e_{k+1|k} = (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})$;
- (N2) - $\hat{x}_{k|k}$ denota a estimativa filtrada e consiste na melhor estimativa de x_k dado o conjunto de informações $\mathbf{Z}_k$, sendo $P_{k|k}$ a matriz de variância do erro de estimativa $e_{k|k} = (x_k - \hat{x}_{k|k})$;
- (N3) - $\hat{x}_{k-1|k}$ denota a estimativa suavizada e consiste na melhor estimativa de x_{k-1} dado o conjunto de informações $\mathbf{Z}_k$, sendo $P_{k-1|k}$ a matriz de variância do erro de estimativa $e_{k|k-1} = (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k})$.

O objetivo principal deste capítulo é deduzir as expressões do estimador de estados linear ótimo nas formas preditora, filtrada e suavizada para o SLSM (4.1) sob as condições de que a saída y_k e o parâmetro de salto θ_k são observados. Sob aspectos equivalentes, as abordagens estocástica [33, 42, 76] e determinística podem ser aplicadas para a solução do problema de estimativas de estados de sistemas dinâmicos lineares com base em observações imprecisas. O foco deste trabalho se restringe somente em explorar os aspectos determinísticos pelo método

dos mínimos quadrados, veja [13, 92].

4.1.1 Interpretação Determinística

Com a finalidade de estabelecer a transição entre o aspecto estocástico do modelo (4.1) e a formulação determinística do problema de estimativas, adotam-se as variáveis $\hat{x}_{k+1}$, $\hat{x}_k$, $\hat{w}_k$ e $\hat{v}_k$ no lugar das variáveis aleatórias x_{k+1} , x_k , w_k e v_k , respectivamente. É importante salientar que $\hat{w}_k$ e $\hat{v}_k$ não são mais ruídos aleatórios. Ainda, nesse contexto, as matrizes de variâncias $P_{k+1|k}$, $P_{k|k}$ e $P_{k|k}$ são reinterpretadas como ponderações dos erros de aproximações $(\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})$, $(\hat{x}_k - \hat{x}_{k|k})$ e $(\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k})$, respectivamente, enquanto Q_k e R_k ponderam os desvios de ajustes $\hat{w}_k$ e $\hat{v}_k$, respectivamente, do modelo

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= F_{\theta_k,k}\hat{x}_k + B_{\theta_k,k}u_k + G_{\theta_k,k}\hat{w}_k, \\ y_k &= C_{\theta_k,k}\hat{x}_k + D_{\theta_k,k}\hat{v}_k.\end{aligned}\tag{4.3}$$

A meta é determinar as soluções ótimas $\hat{x}_{k+1}^*$, $\hat{x}_k^*$, $\hat{w}_k^*$ e $\hat{v}_k^*$ satisfazendo as relações do modelo (4.3) com base no conjunto de observações $\mathbf{Z}_k$ e segundo a minimização de um critério quadrático. As soluções ótimas $\hat{x}_{k+1}^*$, $\hat{x}_k^*$, $\hat{w}_k^*$ e $\hat{v}_k^*$ consistem nas melhores estimativas das variáveis aleatórias x_{k+1} , x_k , w_k e v_k de acordo com as observações $\mathbf{Z}_k$, e são denotadas conforme (N1)-(N3), *i.e.*,

$$\hat{x}_{k+1|k} := \hat{x}_{k+1}^*, \quad \hat{x}_{k|k} := \hat{x}_k^*, \quad \hat{w}_{k|k} := \hat{w}_k^*, \quad \text{e} \quad \hat{v}_{k|k} := \hat{v}_k^*.$$

As estimativas $\{\hat{x}_{k+1|k}\}$, $\{\hat{x}_{k|k}\}$ e $\{\hat{x}_{k|k+1}\}$ são definidas conforme os quadros a seguir. As justificativas da apresentação dos problemas de estimativas nesses moldes são estabelecidas no Apêndice B e demais referências lá citadas.

Problema de Estimativas Nominais (Preditora e Filtrada): Para cada $k \geq 0$, determinar as estimativas $\hat{x}_{k+1|k}$ e $\hat{x}_{k|k}$ por meio de

$$\min_{\hat{w}_k, \hat{v}_k, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}} \left\{ \|\hat{x}_k - \hat{x}_{k|k-1}\|_{P_{k|k-1}^{-1}}^2 + \begin{bmatrix} \hat{w}_k \\ \hat{v}_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{w}_k \\ \hat{v}_k \end{bmatrix} \right\},$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = F_{\theta_k, k} \hat{x}_k + B_{\theta_k, k} u_k + G_{\theta_k, k} \hat{w}_k, \\ y_k = C_{\theta_k, k} \hat{x}_k + D_{\theta_k, k} \hat{v}_k, \end{cases}$$

com $\hat{x}_{0|-1} = 0$ e $P_{0|-1} = \Pi_0 \succ 0$.

Problema de Estimativas Nominais (Filtrada e Suavizada): Para cada $k > 0$, determinar as estimativas $\hat{x}_{k+1|k+1}$ e $\hat{x}_{k|k+1}$ por meio de

$$\min_{\hat{w}_k, \hat{v}_{k+1}, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}} \left\{ \|\hat{x}_k - \hat{x}_{k|k}\|_{P_{k|k}^{-1}}^2 + \begin{bmatrix} \hat{w}_k \\ \hat{v}_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & R_{k+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{w}_k \\ \hat{v}_{k+1} \end{bmatrix} \right\},$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = F_{\theta_k, k} \hat{x}_k + B_{\theta_k, k} u_k + G_{\theta_k, k} \hat{w}_k, \\ y_{k+1} = C_{\theta_{k+1}, k+1} \hat{x}_{k+1} + D_{\theta_{k+1}, k+1} \hat{v}_{k+1}, \end{cases}$$

com $\hat{x}_{0|0}$ e $P_{0|0}$ provenientes de

$$\min_{\hat{x}_0} \left\{ \|\hat{x}_0 - 0\|_{\Pi_0^{-1}}^2 + \|y_0 - C_{\theta_0, 0} \hat{x}_0\|_{(D_{\theta_0, 0} R_0 D_{\theta_0, 0}^T)^{-1}}^2 \right\},$$

sendo $\Pi_0 \succ 0$ a variância do erro de estimativa.

4.2 Solução do Problema

As estimativas de estados nas formas ótima e subótima são deduzidas nesta seção de acordo com os problemas restritos enunciados na Seção 4.1. As equivalências com as expressões conhecidas na literatura também são apresentadas.

4.2.1 Estimativas Ótimas

As estimativas $\hat{x}_{k|k}$ e $\hat{x}_{k+1|k}$ correspondem aos argumentos de mínimo $\hat{x}_k^*$ e $\hat{x}_{k+1}^*$ do problema

$$\begin{aligned} \min_{\hat{w}_k, \hat{v}_k, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}} & \left\{ \|\hat{x}_k - \hat{x}_{k|k-1}\|_{P_{k|k-1}^{-1}}^2 + \begin{bmatrix} \hat{w}_k \\ \hat{v}_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{w}_k \\ \tilde{v}_k \end{bmatrix} \right\}, \\ \text{sujeito a} & \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = F_{\theta_k, k} \hat{x}_k + B_{\theta_k, k} u_k + G_{\theta_k, k} \hat{w}_k, \\ y_k = C_{\theta_k, k} \hat{x}_k + D_{\theta_k, k} \hat{v}_k, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

com $P_{0|-1} = \Pi_0 \succ 0$ e $\hat{x}_{0|-1} = 0$.

Para cada instante k , o problema de minimização restrita (4.4) pode ser reescrito na forma de um problema de mínimos quadrados com restrição de igualdade nos moldes de (1.28), *i.e.*,

$$\begin{aligned} \min_{\psi_k, \mathcal{X}_{k+1}} & \left\{ \left(\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_k \\ \mathcal{X}_{k+1} \end{bmatrix} \right) \mathcal{P}_k^{-1} \left(\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_k \\ \mathcal{X}_{k+1} \end{bmatrix} \right) \right\}, \\ \text{sujeito a} & \begin{bmatrix} \mathcal{M}_k & \mathcal{N}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_k \\ \mathcal{X}_{k+1} \end{bmatrix} = \mathcal{Y}_k, \end{aligned} \quad (4.5)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k &:= \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}_{k+1} := \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{x}_{k+1} \end{bmatrix}, \quad \psi_k := \begin{bmatrix} e_{k|k-1} \\ \hat{w}_k \\ \hat{v}_k \end{bmatrix}, \\ \mathcal{M}_k &:= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & G_{\theta_k, k} & 0 \\ 0 & 0 & D_{\theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_k := \begin{bmatrix} -I & 0 \\ F_{\theta_k, k} & -I \\ C_{\theta_k, k} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y}_k := \begin{bmatrix} -\hat{x}_{k|k-1} \\ -B_{\theta_k, k} u_k \\ y_k \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

com $e_{k|k-1} := (\hat{x}_k - \hat{x}_{k|k-1})$.

O problema (4.5) pode ser reescrito ainda na versão irrestrita

$$\min_{\psi_k, \mathcal{X}_{k+1}} \{ \mathcal{J}_k^\mu(\psi_k, \mathcal{X}_{k+1}) \}, \quad (4.7)$$

$$\mathcal{J}_k^\mu(\psi_k, \mathcal{X}_{k+1}) := \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{M}_k & \mathcal{N}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_k \\ \mathcal{X}_{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Y}_k \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_k^{-1} & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \end{pmatrix},$$

para cada $\mu > 0$. As estimativas de estados ótimas consistem em uma partição do vetor de solução ótima do problema (4.7), isto é, $\hat{x}_{k+1|k}^\mu := \hat{x}_{\mu,k+1}^*$ e $\hat{x}_{k|k}^\mu := \hat{x}_{\mu,k}^*$.

Lema 4.2.1. *As estimativas de estados e as respectivas matrizes de variâncias para cada $\mu > 0$ são dadas por³:*

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} & P_{k|k} & * \\ \hat{x}_{k+1|k} & * & P_{k+1|k} \end{bmatrix}_\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_k & 0 & I & 0 \\ 0 & \mu^{-1}I & \mathcal{M}_k & \mathcal{N}_k \\ I & \mathcal{M}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{Y}_k & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Segue da Proposição 1.3.1 com as identificações em (4.6). $\square$

De acordo com o método de funções penalidade, quando $\mu \rightarrow +\infty$, as estimativas ótimas $\hat{x}_{k+1|k}$ e $\hat{x}_{k|k}$ e as respectivas matrizes de variância dos erros de estimativa $P_{k+1|k}$ e $P_{k|k}$ são obtidas, *i.e.*,

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} & P_{k|k} & * \\ \hat{x}_{k+1|k} & * & P_{k+1|k} \end{bmatrix}_\infty = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_k & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{M}_k & \mathcal{N}_k \\ I & \mathcal{M}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{Y}_k & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}.$$

As estimativas e as matrizes de variâncias podem ser calculadas simultaneamente considerando o arranjo unificado de parâmetros apresentado na Tabela 4.1. A cada instante k as estimativas preditora $\hat{x}_{k+1|k}$ e filtrada $\hat{x}_{k|k}$ ótimas são calculadas em função da predição $\hat{x}_{k|k-1}$ no passo anterior, do novo valor de medido y_k e do vetor conhecido $B_{\theta_k,k}u_k$. A estimativa filtrada $\hat{x}_{k|k}$ consiste em uma correção da estimativa preditora $\hat{x}_{k|k-1}$ com base na medição adicional y_k .

³A notação $[\]_\mu$ indica a dependência da solução com relação ao parâmetro μ .

Tabela 4.1: Estimativas de Estados Ótimas nas Formas Preditora e Filtrada^a

De forma análoga ao regulador linear quadrático do Capítulo 2, as estimativas $\hat{x}_{k|k}$ e $\hat{x}_{k+1|k}$ e as respectivas variâncias $P_{k|k}$ e $P_{k+1|k}$ podem ser computadas por meio da solução de um sistema linear. A solução pode ser determinada sem a necessidade do cálculo da inversa do bloco matricial principal com o emprego de algoritmos adequados.

Considere as mesmas condições estabelecidas na Tabela 4.1. Defina para cada instante k os seguintes blocos matriciais e vetoriais:

$$\mathbb{A}_k = \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{\theta_k,k} & 0 & F_{\theta_k,k} & -I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{\theta_k,k} & C_{\theta_k,k} & 0 \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & G_{\theta_k,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & D_{\theta_k,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & F_{\theta_k,k}^T & C_{\theta_k,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{X}_1 = \begin{bmatrix} X_{1,1} \\ X_{1,2} \\ X_{1,3} \\ X_{1,4} \\ X_{1,5} \\ X_{1,6} \\ X_{1,7} \\ X_{1,8} \\ X_{1,9} \\ X_{1,10} \\ X_{1,11} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{X}_2 = \begin{bmatrix} X_{2,1} \\ X_{2,2} \\ X_{2,3} \\ X_{2,4} \\ X_{2,5} \\ X_{2,6} \\ X_{2,7} \\ X_{2,8} \\ X_{2,9} \\ X_{2,10} \\ X_{2,11} \end{bmatrix}, \quad \beta_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\hat{x}_{k|k-1} \\ -B_{\theta_k,k} u_k \\ y_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{I}_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{I}_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

As estimativas $\hat{x}_{k|k}$ e $\hat{x}_{k+1|k}$ e as respectivas matrizes de variâncias $P_{k|k}$ e $P_{k+1|k}$ podem ser computadas por meio da solução do seguinte sistema linear

$$\mathbb{A}_k \begin{bmatrix} \alpha & | & \mathbb{X}_1 & | & \mathbb{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_k & | & \mathbb{I}_{10} & | & \mathbb{I}_{11} \end{bmatrix},$$

nas incógnitas α , $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$, e correspondem a:

$$\hat{x}_{k|k} = \alpha_{10}, \quad \hat{x}_{k+1|k} = \alpha_{11}, \quad P_{k|k} = -X_{1,10}, \quad P_{k+1|k} = -X_{2,11}.$$

O resultado a seguir estabelece a equivalência entre as expressões apresentadas na Tabela 4.1 e as tradicionais encontradas na literatura, [3, 13, 75]. A fim de simplificar os cálculos, será considerado $B_{\theta_k,k} = 0, \forall k$. Sem perda de generalidade, será imposto também que $G_{\theta_k,k} = I$ e $D_{\theta_k,k} = I$ para todo k . A dedução decorre da estrutura na forma do sistema linear conforme apresentado no quadro anterior.

Lema 4.2.2. *As estimativas $\hat{x}_{k|k}$ e $\hat{x}_{k+1|k}$ apresentadas na Tabela 4.1 podem ser reescritas como*

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k-1} C_{\theta_k,k}^T (R_k + C_{\theta_k,k} P_{k|k-1} C_{\theta_k,k}^T)^{-1} (y_k - C_{\theta_k,k} \hat{x}_{k|k-1}),$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = F_{\theta_k,k} \hat{x}_{k|k},$$

com as respectivas matrizes de variâncias dadas por

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C_{\theta_k,k}^T (R_k + C_{\theta_k,k} P_{k|k-1} C_{\theta_k,k}^T)^{-1} C_{\theta_k,k} P_{k|k-1},$$

$$P_{k+1|k} = Q_k + F_{\theta_k,k} P_{k|k} F_{\theta_k,k}^T,$$

com condições iniciais $P_{0|-1} = \Pi_0$ e $\hat{x}_{0|-1} = 0$.

Demonstração. As estimativas $\hat{x}_{k|k}$ e $\hat{x}_{k+1|k}$ compõem o vetor solução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & F_{\theta_k,k} & -I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & C_{\theta_k,k} & 0 \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & F_{\theta_k,k}^T & C_{\theta_k,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \hat{x}_k \\ \hat{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\hat{x}_{k|k-1} \\ 0 \\ y_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

o qual pode ser reduzido a $\begin{bmatrix} \mathcal{W} & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$, com

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ F_{\theta_k, k} & -I \\ C_{\theta_k, k} & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{x}_{k+1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -\hat{x}_{k|k-1} \\ 0 \\ y_k \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W} = \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix} \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix},$$

e cuja solução ótima x^* e matriz de variância $\mathcal{X}$ são dadas, respectivamente, por

$$x^* = (\mathcal{A}^T \mathcal{W}^{-1} \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^T \mathcal{W}^{-1} b \quad \text{e} \quad \mathcal{X} = (\mathcal{A}^T \mathcal{W}^{-1} \mathcal{A})^{-1}.$$

Dessa maneira, obtém-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k} &= \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k-1}^{-1} + F_{\theta_k, k}^T Q_k^{-1} F_{\theta_k, k} + C_{\theta_k, k}^T R_k^{-1} C_{\theta_k, k} & -F_{\theta_k, k}^T Q_k^{-1} \\ -Q_k^{-1} F_{\theta_k, k} & Q_k^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_{k|k-1}^{-1} \hat{x}_{k|k-1} + C_{\theta_k, k}^T R_k^{-1} y_k \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k-1} C_{\theta_k, k}^T (R_k + C_{\theta_k, k} P_{k|k-1} C_{\theta_k, k}^T)^{-1} (y_k - C_{\theta_k, k} \hat{x}_{k|k-1}), \\ \hat{x}_{k+1|k} &= \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k-1}^{-1} + F_{\theta_k, k}^T Q_k^{-1} F_{\theta_k, k} + C_{\theta_k, k}^T R_k^{-1} C_{\theta_k, k} & -F_{\theta_k, k}^T Q_k^{-1} \\ -Q_k^{-1} F_{\theta_k, k} & Q_k^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_{k|k-1}^{-1} \hat{x}_{k|k-1} + C_{\theta_k, k}^T R_k^{-1} y_k \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= F_{\theta_k, k} (\hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k-1} C_{\theta_k, k}^T (R_k + C_{\theta_k, k} P_{k|k-1} C_{\theta_k, k}^T)^{-1} (y_k - C_{\theta_k, k} \hat{x}_{k|k-1})) \\ &= F_{\theta_k, k} \hat{x}_{k|k}, \end{aligned}$$

ao aplicar a *Fórmula de Banachiewicz*⁴ para inversão do bloco matricial particionado. Analo-

⁴Veja Lema A.1.4, e mais detalhes em [108].

gamente, tem-se:

$$\begin{aligned}
P_{k|k} &= \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k-1}^{-1} + F_{\theta_k,k}^T Q_k^{-1} F_{\theta_k,k} + C_{\theta_k,k}^T R_k^{-1} C_{\theta_k,k} & -F_{\theta_k,k}^T Q_k^{-1} \\ -Q_k^{-1} F_{\theta_k,k} & Q_k^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C_{\theta_k,k}^T (R_k + C_{\theta_k,k} P_{k|k-1} C_{\theta_k,k}^T)^{-1} C_{\theta_k,k} P_{k|k-1}, \\
P_{k+1|k} &= \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k-1}^{-1} + F_{\theta_k,k}^T Q_k^{-1} F_{\theta_k,k} + C_{\theta_k,k}^T R_k^{-1} C_{\theta_k,k} & -F_{\theta_k,k}^T Q_k^{-1} \\ -Q_k^{-1} F_{\theta_k,k} & Q_k^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\
&= Q_k + F_{\theta_k,k} (P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C_{\theta_k,k}^T (R_k + C_{\theta_k,k} P_{k|k-1} C_{\theta_k,k}^T)^{-1} C_{\theta_k,k} P_{k|k-1}) F_{\theta_k,k}^T.
\end{aligned}$$

□

As estimativas $\hat{x}_{k+1|k+1}$ e $\hat{x}_{k|k+1}$ são obtidas agora resolvendo⁵

$$\begin{aligned}
\min_{\hat{w}_k, \hat{v}_{k+1}, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}} & \left\{ \|\hat{x}_k - \hat{x}_{k|k}\|_{P_{k|k}^{-1}}^2 + \begin{bmatrix} \hat{w}_k \\ \hat{v}_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & R_{k+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{w}_k \\ \hat{v}_{k+1} \end{bmatrix} \right\}, \\
\text{sujeito a } & \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = F_{\theta_k,k} \hat{x}_k + B_{\theta_k,k} u_k + G_{\theta_k,k} \hat{w}_k, \\ y_{k+1} = C_{\theta_{k+1},k+1} \hat{x}_{k+1} + D_{\theta_{k+1},k+1} \hat{v}_{k+1}, \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

para cada $k > 0$.

Novamente, as estimativas de x_{k+1} e x_k dado $\mathbf{Z}_{k+1}$, para cada $\mu > 0$, de acordo com a Proposição 1.3.1, são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k+1} & P_{k|k+1} & * \\ \hat{x}_{k+1|k+1} & * & P_{k+1|k+1} \end{bmatrix}_\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k+1} & 0 & I & 0 \\ 0 & \mu^{-1} I & \mathcal{M}_{k+1} & \mathcal{N}_{k+1} \\ I & \mathcal{M}_{k+1}^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_{k+1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{Y}_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},$$

⁵Confira os detalhes no Apêndice B.

sendo

$$\mathcal{P}_{k+1} := \begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_{k+1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}_{k+1} := \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{x}_{k+1} \end{bmatrix}, \quad \psi_{k+1} := \begin{bmatrix} e_{k|k} \\ \hat{w}_k \\ \hat{v}_{k+1} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{M}_{k+1} := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & G_{\theta_k,k} & 0 \\ 0 & 0 & D_{\theta_{k+1},k+1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_{k+1} := \begin{bmatrix} -I & 0 \\ F_{\theta_k,k} & -I \\ 0 & C_{\theta_{k+1},k+1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y}_{k+1} := \begin{bmatrix} -\hat{x}_{k|k} \\ -B_{\theta_k,k} u_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix},$$

com $e_{k|k} := (\hat{x}_k - \hat{x}_{k|k})$. A solução ótima é alcançada quando $\mu \rightarrow +\infty$. As estimativas ótimas $\hat{x}_{k+1|k+1}$ e $\hat{x}_{k|k+1}$ e as respectivas matrizes de variâncias dos erros de estimativa $P_{k+1|k}$ e $P_{k|k+1}$ são calculadas conforme a Tabela 4.2.

Observação 4.2.1. *Análogo ao Lema 4.2.2, as estimativas $\hat{x}_{k|k+1}$ e $\hat{x}_{k+1|k+1}$ apresentadas na Tabela 4.2 podem ser reescritas para todo $k > 0$ como:*

$$\hat{x}_{k|k+1} = \hat{x}_{k|k} + P_{k|k} F_{\theta_k,k}^T C_{\theta_{k+1},k+1}^T R_{\theta_{k+1},k+1}^{-1} (y_{k+1} - C_{\theta_{k+1},k+1} \hat{x}_{k+1|k+1}),$$

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = F_{\theta_k,k} \hat{x}_{k|k} + P_{k+1|k+1} C_{\theta_{k+1},k+1}^T R_{\theta_{k+1},k+1}^{-1} (y_{k+1} - C_{\theta_{k+1},k+1} F_{\theta_k,k} \hat{x}_{k|k}),$$

com as respectivas matrizes de variâncias

$$P_{k|k+1} = \left(P_{k|k}^{-1} + F_{\theta_k,k}^T Q_k^{-1} F_{\theta_k,k} \right)^{-1} + \left(P_{k|k}^{-1} + F_{\theta_k,k}^T Q_k^{-1} F_{\theta_k,k} \right)^{-1} F_{\theta_k,k}^T Q_k^{-1} \cdot \\ \cdot P_{k+1|k+1} Q_k^{-1} F_{\theta_k,k} \left(P_{k|k}^{-1} + F_{\theta_k,k}^T Q_k^{-1} F_{\theta_k,k} \right)^{-1},$$

$$P_{k+1|k+1} = \left((Q_k + F_{\theta_k,k} P_{k|k} F_{\theta_k,k}^T)^{-1} + C_{\theta_{k+1},k+1}^T R_{\theta_{k+1},k+1}^{-1} C_{\theta_{k+1},k+1} \right)^{-1},$$

com as condições iniciais

$$P_{0|0} = (\Pi^{-1} + C_{\theta_0,0}^T (D_{\theta_0,0} R_0 D_{\theta_0,0}^T)^{-1} C_{\theta_0,0})^{-1} \text{ e } \hat{x}_{0|0} = P_{0|0} C_{\theta_0,0}^T (D_{\theta_0,0} R_0 D_{\theta_0,0}^T)^{-1} C_{\theta_0,0} y_0.$$

Valendo-se da técnica de programação dinâmica, da solução ótima de mínimos quadrados ponderados e do método de funções penalidade foi possível estabelecer uma formulação alternativa para a obtenção das estimativas de estados ótimas nas formas preditora, filtrada e suavizada

para SLSM. A abordagem adotada para lidar com o problema de estimativas de estados ótimas é similar à utilizada no Capítulo 2, no qual o problema de controle ótimo para SLSM foi resolvido com base na minimização de um funcional custo quadrático penalizado.

Para cada passo k , são introduzidos os problemas de estimativas ótimas mediante a minimização dos funcionais quadráticos penalizados com as restrições incorporadas por meio do parâmetro de penalidade $\mu > 0$, conforme o quadro a seguir.

Funcionais Penalizados: Para cada $\mu > 0$,

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k}^\mu &:= \hat{x}_{\mu,k+1}^* \quad e \quad \hat{x}_{k|k}^\mu := \hat{x}_{\mu,k}^* \\ \{\hat{x}_{\mu,k}^*; \hat{x}_{\mu,k+1}^*\} &\in \arg \min_{\hat{w}_k, \hat{v}_k, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}} \left\{ \|\hat{x}_k - \hat{x}_{k|k-1}^\mu\|_{P_{\mu,k|k-1}^{-1}}^2 + \|\hat{w}_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|\hat{v}_k\|_{R_k^{-1}}^2 + \right. \\ &\quad \left. \mu \left(\|\hat{x}_{k+1} - F_{\theta_k,k} \hat{x}_k - B_{\theta_k,k} u_k - G_{\theta_k,k} \hat{w}_k\|^2 + \|y_k - C_{\theta_k,k} \hat{x}_k - D_{\theta_k,k} \hat{v}_k\|^2 \right) \right\}, \\ \hat{x}_{k+1|k+1}^\mu &:= \hat{x}_{\mu,k+1}^* \quad e \quad \hat{x}_{k|k+1}^\mu := \hat{x}_{\mu,k}^* \\ \{\hat{x}_{\mu,k}^*; \hat{x}_{\mu,k+1}^*\} &\in \arg \min_{\hat{w}_k, \hat{v}_{k+1}, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}} \left\{ \|\hat{x}_k - \hat{x}_{k|k}^\mu\|_{P_{\mu,k|k}^{-1}}^2 + \|\hat{w}_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|\hat{v}_{k+1}\|_{R_{k+1}^{-1}}^2 + \right. \\ &\quad \left. \mu \left(\|\hat{x}_{k+1} - F_{\theta_k,k} \hat{x}_k - B_{\theta_k,k} u_k - G_{\theta_k,k} \hat{w}_k\|^2 + \|y_{k+1} - C_{\theta_{k+1},k+1} \hat{x}_{k+1} - D_{\theta_{k+1},k+1} \hat{v}_{k+1}\|^2 \right) \right\}. \end{aligned}$$

4.2.2 Estimativas Subótimas

Na solução do problema de controle ótimo para SLSM no Capítulo 2, por exemplo, a matriz do ganho de realimentação e a equação de Riccati podem ser calculadas *offline* em um procedimento de trás pra frente no horizonte de tempo, antes mesmo do sistema estar em operação. Já para a solução do problema de estimativas ótimas, isso acarreta complicações. As matrizes de variâncias $P_{(\cdot)}$, descritas nas tabelas 4.1 e 4.2, devem ser computadas *online*, uma vez que os parâmetros do Sistema (4.1) não são conhecidos antecipadamente. Os cálculos das matrizes que definem as variâncias de estados são dependentes do processo $\{\theta_k\}_{k=0}^N$, o que representa

um empecilho caso seja necessário calculá-las previamente.

Na implementação *offline* desses estimadores de estados, o número de trajetórias $\{\theta_k\}_{k=0}^N$ possíveis a serem avaliadas cresce exponencialmente com o tempo, veja [33]. Isso torna o algoritmo computacionalmente inviável em virtude do elevado número de cálculos a serem realizados e ao grande armazenamento de informações que se faz necessário. Se a simplicidade computacional é requerida, então uma versão subótima da estimativa de x_k deve ser levada em consideração. A ideia fundamental nesse caso é utilizar uma aproximação $\Psi_{j,k|k-1}$, para cada um dos modos j , para substituir a matriz de variância do erro de estimativa $P_{k|k-1}$. A versão desse filtro baseada na informação da matriz de probabilidades $\mathbb{P}$, por exemplo, não corresponde ao caso ótimo baseado no conjunto de informações $\mathbf{Z}_k$, porém ela pode ser considerada com objetivo de tornar a implementação *offline* factível computacionalmente⁶.

De forma similar a [18], para a versão subótima das estimativas de estados da Tabela 4.1 propõe-se então a substituição de $P_{k+1|k}$ pela introdução de $\Psi_{j,k+1|k}$ definido por

$$\Psi_{j,k+1|k} = \sum_{i=1}^s p_{ij} P_{i,k+1|k}, \quad j \in \Theta, \quad (4.9)$$

no qual

$$\begin{bmatrix} P_{i,k|k} & * \\ * & P_{i,k+1|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{i,k|k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{i,k} & 0 & F_{i,k} & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{i,k} & C_{i,k} & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & G_{i,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & D_{i,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & F_{i,k}^T & C_{i,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

⁶Veja detalhes em [18].

para cada $i \in \Theta$. Já as estimativas de estados são calculadas de acordo com

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} \\ \hat{x}_{k+1|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{\theta_k, k|k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{\theta_k, k} & 0 & F_{\theta_k, k} & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{\theta_k, k} & C_{\theta_k, k} & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & G_{\theta_k, k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & D_{\theta_k, k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & F_{\theta_k, k}^T & C_{\theta_k, k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\hat{x}_{k|k-1} \\ -B_{\theta_k, k} u_k \\ y_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

para todo $k \geq 0$ e com as mesmas condições iniciais do caso ótimo.

Perceba que, nesse caso, as estimativas subótimas a cada instante k são dependentes apenas do conhecimento de θ_k , *i.e.*, $\hat{x}_{k+1|k} \equiv \hat{x}_{k+1|k}(\Psi_{\theta_k, k|k-1})$ e $\hat{x}_{k|k} \equiv \hat{x}_{k|k}(\Psi_{\theta_k, k|k-1})$. Enquanto uma pré-computação de $P_{k|k-1}$ ao longo de todas as trajetórias possíveis $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k\}$ é requerida numa implementação *offline* do filtro ótimo, as versões subótimas das estimativas de estados propostas são dadas em termos de s equações de Riccati acopladas recursivas (4.9)-(4.10), as quais podem ser computadas *offline* com menor esforço computacional.

Observação 4.2.2. A forma com que $\Psi_{j, k|k-1}$ foi definida em (4.9) consiste no dual do acoplamento $\sum_{j=1}^s p_{ij} P_{j, k|k-1}$ das equações de Riccati do RLQ do Capítulo 2. De acordo com [86], a diferença entre os acoplamentos decorre da propagação forward para o problema de estimativas em oposição a propagação backward do problema de controle. Nessa mesma referência, as estimativas subótimas de tempo contínuo são obtidas dessa forma. Já em [18], por exemplo, $\Psi_{j, k|k-1}$ é definida por meio da estimativa Bayesiana de $P_{k|k-1}$.

O quadro a seguir apresenta as estimativas subótimas nos moldes do Lema 4.2.2. Procedimento análogo pode ser realizado com relação às estimativas apresentadas na Tabela 4.2.

Estimativas Subótimas:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \Psi_{\theta_k, k|k-1} C_{\theta_k, k}^T (R_k + C_{\theta_k, k} \Psi_{\theta_k, k|k-1} C_{\theta_k, k}^T)^{-1} (y_k - C_{\theta_k, k} \hat{x}_{k|k-1}),$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = F_{\theta_k, k} \hat{x}_{k|k},$$

sendo $P_{j, k|k}$ e $P_{j, k+1|k}$ atualizadas para cada $j \in \Theta$ conforme

$$P_{j, k|k} = \Psi_{j, k|k-1} - \Psi_{j, k|k-1} C_{\theta_k, k}^T (R_k + C_{\theta_k, k} \Psi_{j, k|k-1} C_{\theta_k, k}^T)^{-1} C_{\theta_k, k} \Psi_{j, k|k-1},$$

$$P_{j, k+1|k} = Q_k + F_{\theta_k, k} P_{j, k|k} F_{\theta_k, k}^T,$$

com $\Psi_{j, k|k-1} = \sum_{i=1}^s p_{ij} P_{i, k|k-1}$ e condições iniciais $P_{j, 0|-1} = \Pi_{j, 0}$ e $\hat{x}_{0|-1} = 0$.

4.3 Exemplo Numérico

Exemplo 4.3.1. Considere o SLSM (4.1) com dois modos de operações com as matrizes de parâmetros e ponderações dadas por:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.92 & 0.10 \\ 0.20 & 0.75 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0.54 & 0.30 \\ 0.20 & 0.91 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 2.5 \\ 1.5 & 0.5 \end{bmatrix};$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} -0.5 \end{bmatrix};$$

$$\Pi_0 = 100I_2, \quad Q = I_2, \quad R = I_1, \quad P_{1, 0|-1} = 100I_2, \quad P_{2, 0|-1} = 100I_2;$$

e matriz de probabilidades $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$. A sequência determinística de entradas $\{u_k\}_{k=0}^{100}$ foi escolhida como $u_k = -\sin(\frac{\pi}{50}k)$.

As simulações realizadas neste exemplo ilustram o estimador de estados na forma preditora proposto na Tabela 4.1, e sua respectiva versão subótima dada por (4.9)-(4.11) discutida na Subseção 4.2.2. Na Figura 4.1 são apresentadas as estimativas das entradas do vetor de estados $x_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}$ para a realização da cadeia de Markov exibida Figura 4.2.

Figura 4.1: Estimativas Ótimas - Predição.

Figura 4.2: Realização da Cadeia de Markov.

Os desempenhos das versões ótima e subótima do estimador de estados na forma preditora são comparados por meio do critério (4.12) utilizado em [93]. A comparação de performance é ilustrada pelas curvas exibidas na Figura 4.3. Para cada uma delas, cada ponto no instante k

do horizonte $N = 100$ corresponde à média do quadrado das normas dos erros de estimativas calculada considerando $T = 3000$ experimentos, i.e.,

$$\mathbb{E}\{\|x_k - \hat{x}_{k|k-1}\|^2\} \approx \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \|x_k^{(j)} - \hat{x}_{k|k-1}^{(j)}\|^2. \quad (4.12)$$

Os processos de ruído e as realizações da cadeia de Markov foram selecionadas aleatoriamente em cada um desses experimentos.

A diferença de desempenho entre as estimativas de estados ótimas e as estimativas subótimas computadas por meio da aproximação $\{\Psi_{j,k|k-1}\}_{j=0}^s$ da matriz de covariância $P_{k|k-1}$, i.e., com base na informação das probabilidades de transições dos modos de operações, é ilustrada pelo posicionamento das curvas na Figura 4.3.

Figura 4.3: Comparação de Desempenho.

As soluções das equações de Riccati acopladas associadas à versão subótima da estimativa preditora quando $k \rightarrow +\infty$ são dadas por:

$$P_{1,\infty} = \begin{bmatrix} 1.9321 & 0.9085 \\ 0.9085 & 0.5419 \end{bmatrix} \quad P_{2,\infty} = \begin{bmatrix} 6.5994 & 1.9048 \\ 1.9048 & 2.9822 \end{bmatrix}.$$

4.4 Conclusões Parciais

Esse capítulo propõe uma abordagem alternativa à [18, 33], baseada na combinação das técnicas de mínimos quadrados ponderados e funções penalidade, para a obtenção das versões ótima e subótima das estimativas de estados nas formas preditora, filtrada e suavizada para SLSM. A solução proposta é caracterizada pelo arranjo simétrico das matrizes de ponderação e de parâmetros do sistema em uma estrutura de blocos matriciais equivalente à solução clássica, *i.e.*, o Filtro de Kalman para sistemas variantes no tempo.

A formulação do problema de estimativas de estados como um problema de minimização de um funcional quadrático é bastante difundida na literatura [13, 41, 66, 92]. No entanto, a aplicação do método de funções penalidade é inovadora. Embora equivalente à abordagem estocástica [7, 76], conforme demonstrado, a motivação em considerar a técnica de projeto baseada em critérios determinísticos é a sua potencialidade em lidar com a presença de incertezas nas matrizes de parâmetros do sistema, na forma como será apresentada no capítulo a seguir.

A meta é investigar no próximo capítulo a versão robusta para o caso em que o SLSM esteja sujeito também a incertezas paramétricas como extensão do problema de minimização dado pelo quadro abaixo para o caso nominal.

$$\hat{x}_{k+1|k}^{\mu} := \hat{x}_{\mu,k+1}^* \quad \text{e} \quad \hat{x}_{k|k}^{\mu} := \hat{x}_{\mu,k}^*,$$

$$\{\hat{x}_{\mu,k}^*; \hat{x}_{\mu,k+1}^*\} \in \arg \min_{\hat{w}_k, \hat{v}_k, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}} \left\{ \|\hat{x}_k - \hat{x}_{k|k-1}^{\mu}\|_{P_{\mu,k|k-1}^{-1}}^2 + \|\hat{w}_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|\hat{v}_k\|_{R_k^{-1}}^2 + \mu (\|\hat{x}_{k+1} - F_{\theta_k,k} \hat{x}_k - B_{\theta_k,k} u_k - G_{\theta_k,k} \hat{w}_k\|^2 + \|y_k - C_{\theta_k,k} \hat{x}_k - D_{\theta_k,k} \hat{v}_k\|^2) \right\}, \mu > 0.$$

CAPÍTULO 5

FILTRO DE KALMAN ROBUSTO PARA SLSM DEPENDENTE DO MODO

Tratando-se de estimativas ótimas, o exato conhecimento do modelo dinâmico de um sistema é uma das hipóteses fundamentais para a aplicação do Filtro de Kalman. No entanto, essa exigência é bastante conservadora, uma vez que tal condição não é frequentemente verificada na realidade. Se tal condição não é satisfeita, por exemplo, quando erros ou aproximações na modelagem ocasionam o aparecimento de incertezas, então o desempenho do filtro pode ser seriamente comprometido. Diante disso, a investigação do problema de estimativas de estados robustas faz-se necessária em virtude do modelo incerto.

Uma das formas de abordar esse problema é considerar uma extensão do Filtro de Kalman para sistemas com incertezas. Neste capítulo são desenvolvidas estimativas de estado robustas recursivas do tipo Kalman para SLSM incertos e sob a hipótese de observação do parâmetro de salto. A influência de incertezas paramétricas é considerada em todas as matrizes de parâmetros do SLSM.

O problema de estimar estados de forma robusta é formulado tomando-se por base a otimização do tipo min-max de um funcional quadrático incerto penalizado de um passo. Esse

critério é desenvolvido com base na extensão do funcional quadrático obtido no Capítulo 4, por meio da combinação de mínimos quadrados regularizados sujeito a incertezas [93] e funções penalidade [83]. A solução desse problema de otimização fornece a melhor estimativa de estado em contrapartida à máxima influência de incertezas.

As estimativas robustas são recursivas e apresentadas em um arranjo diferenciado de matrizes particionadas em blocos, semelhante à solução nominal revisitada no Capítulo 4. A recursividade é dependente apenas das matrizes de parâmetros e de variâncias conhecidas. Nenhum ajuste extra de parâmetro faz-se necessário¹. É mostrado ainda que a estimativa na forma preditora pode ser reescrita em uma estrutura matricial semelhante à equação que compõe o Filtro de Kalman padrão.

Por outro lado, conforme discutido no Capítulo 4, sabe-se que a implementação *offline* das estimativas ótimas de estados é computacionalmente inviável, uma vez que o número de cálculos e o armazenamento em memória cresce exponencialmente com o tempo, veja [33] e demais referências nela contidas. Com a finalidade de obter estimativas úteis para aplicações *offline*, estimativas subótimas podem ser alternativas viáveis. Por esse motivo, um caso subótimo também é explorado.

5.1 Formulação do Problema

Considere o seguinte SLSM incerto

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_{\theta_k, k}^{\delta} x_k + B_{\theta_k, k}^{\delta} u_k + G_{\theta_k, k}^{\delta} w_k, \\ y_k &= C_{\theta_k, k}^{\delta} x_k + D_{\theta_k, k}^{\delta} v_k, \end{aligned} \tag{5.1}$$

para todo $k = 0, 1, \dots$, no qual $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u_k \in \mathbb{R}^{m_1}$ é a entrada de controle conhecida, $y_k \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de medida, $w_k \in \mathbb{R}^{m_2}$ e $v_k \in \mathbb{R}^t$ são ruídos aleatórios Gaussianos com média zero e variâncias $Q_k \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$ e $R_k \in \mathbb{R}^{t \times t}$, respectivamente.

¹Daí a justificativa do uso da nomenclatura tipo Kalman.

As matrizes de parâmetros perturbados são definidas por

$$F_{\theta_k,k}^\delta := F_{\theta_k,k} + \delta F_{\theta_k,k}, \quad B_{\theta_k,k}^\delta := B_{\theta_k,k} + \delta B_{\theta_k,k}, \quad G_{\theta_k,k}^\delta := G_{\theta_k,k} + \delta G_{\theta_k,k},$$

$$C_{\theta_k,k}^\delta := C_{\theta_k,k} + \delta C_{\theta_k,k}, \quad D_{\theta_k,k}^\delta := D_{\theta_k,k} + \delta D_{\theta_k,k},$$

com $F_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times m_1}$, $G_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$, $C_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{p \times t}$ matrizes de parâmetros nominais conhecidas; $\delta F_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\delta B_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times m_1}$, $\delta G_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$, $\delta C_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\delta D_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{p \times t}$ matrizes de parâmetros incertos modeladas como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta F_{\theta_k,k} & \delta B_{\theta_k,k} & \delta G_{\theta_k,k} \end{bmatrix} &= M_{\theta_k,k} \Delta_{\theta_k,k}^1 \begin{bmatrix} E_{F_{\theta_k,k}} & E_{B_{\theta_k,k}} & E_{G_{\theta_k,k}} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \delta C_{\theta_k,k} & \delta D_{\theta_k,k} \end{bmatrix} &= N_{\theta_k,k} \Delta_{\theta_k,k}^2 \begin{bmatrix} E_{C_{\theta_k,k}} & E_{D_{\theta_k,k}} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

sendo $M_{\theta_k,k}$, $N_{\theta_k,k}$ (matrizes não-nulas) e $E_{(\cdot)}$ matrizes conhecidas de dimensões compatíveis, e $\Delta_{\theta_k,k}^q$, $q = 1, 2$ matrizes de contração ($\|\Delta_{\theta_k,k}^q\| \leq 1$, $q = 1, 2$).

Analogamente ao Capítulo 4, suponha que $\{\theta_k\}$ seja um processo de Markov de tempo discreto com matriz de probabilidade de transição de estados $\mathbb{P} = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{s \times s}$ na qual as entradas satisfazem

$$Prob[\theta_{k+1} = j \mid \theta_k = i] = p_{ij}, \quad Prob[\theta_0 = i] = \pi_i, \quad \sum_{j=1}^s p_{ij} = 1, \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad .$$

e admita ainda x_0 , $\{w_k\}$ e $\{v_k\}$ mutuamente independentes.

O objetivo é investigar o projeto de um estimador de estado robusto para o SLSM (5.1)-(5.2) sob a hipótese de que a saída y_k e o parâmetro de salto θ_k estão disponíveis a cada instante k . Uma vez que o processo de estado $\{x_k\}$ não é perfeitamente observado, o problema consiste em obter as melhores estimativas $\hat{x}_{k+1}^*$ e $\hat{x}_k^*$ de x_{k+1} e x_k , respectivamente, com base em toda informação disponível até o instante k , *i.e.*, $\mathbf{Z}_k := \{y_1, \dots, y_k, \theta_0, \dots, \theta_k, u_0, \dots, u_{k-1}\}$, em contrapartida à presença de incertezas paramétricas $\{\delta F_{\theta_k,k}, \delta B_{\theta_k,k}, \delta G_{\theta_k,k}, \delta C_{\theta_k,k}, \delta D_{\theta_k,k}\}$.

Em razão disso, o problema de estimativas robustas ótimas será formulado segundo um critério de custo quadrático regularizado penalizado conforme o quadro a seguir.

Problema de Estimativas Robustas: Para cada $k \geq 0$, determinar as estimativa de estado $\hat{x}_{\mu,k+1}$ e $\hat{x}_{\mu,k}$ por meio da solução do problema de otimização:

$$\min_{\hat{w}_k, \hat{v}_k, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}} \max_{\delta_k} \{ \mathcal{J}_k^\mu(\hat{w}_k, \hat{v}_k, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}, \delta_k) \}, \quad (5.3)$$

no qual $\delta_k := \{\delta F_{\theta_k,k}, \delta B_{\theta_k,k}, \delta G_{\theta_k,k}, \delta C_{\theta_k,k}, \delta D_{\theta_k,k}\}$ e a função custo $\mathcal{J}_k^\mu$ é definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_k^\mu &:= \|\hat{x}_k - \hat{x}_{k|k-1}\|_{P_{k|k-1}^{-1}}^2 + \|\hat{w}_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|\hat{v}_k\|_{R_k^{-1}}^2 + \\ &\mu \left(\|\hat{x}_{k+1} - F_{\theta_k,k}^\delta \hat{x}_k - B_{\theta_k,k}^\delta u_k - G_{\theta_k,k}^\delta \hat{w}_k\|^2 + \|z_k - C_{\theta_k,k}^\delta \hat{x}_k - D_{\theta_k,k}^\delta \hat{v}_k\|^2 \right), \end{aligned} \quad (5.4)$$

com $P_{k|k-1} \succ 0$, $Q_k \succ 0$, $R_k \succ 0$ e $\mu > 0$.

A formulação do critério (5.3)-(5.4) é motivada pelo fato de que as expressões do Filtro de Kalman (e.g., [75]) podem ser deduzidas do ponto de vista determinístico valendo-se da minimização de funcionais custo quadrático de um passo, veja [13, 92]. Na ausência de incertezas, (5.3)-(5.4) trata-se do problema de estimativas nominais ótimas abordado no Capítulo 4, i.e.,

$$\begin{aligned} \min_{\hat{w}_k, \hat{v}_k, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}} &\left\{ \|\hat{x}_k - \hat{x}_{k|k-1}\|_{P_{\mu,k|k-1}^{-1}}^2 + \|\hat{w}_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|\hat{v}_k\|_{R_k^{-1}}^2 + \right. \\ &\left. \mu \left(\|\hat{x}_{k+1} - F_{\theta_k,k} \hat{x}_k - B_{\theta_k,k} u_k - G_{\theta_k,k} \hat{w}_k\|^2 + \|y_k - C_{\theta_k,k} \hat{x}_k - D_{\theta_k,k} \hat{v}_k\|^2 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

cuja solução, quando $\mu \rightarrow +\infty$, converge para a solução do problema restrito:

$$\begin{aligned} \min_{\hat{w}_k, \hat{v}_k, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}} &\left\{ \|\hat{x}_k - \hat{x}_{k|k-1}\|_{P_{k|k-1}^{-1}}^2 + \begin{bmatrix} \hat{w}_k \\ \hat{v}_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{w}_k \\ \hat{v}_k \end{bmatrix} \right\}, \\ \text{sujeito a} &\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = F_{\theta_k,k} \hat{x}_k + B_{\theta_k,k} u_k + G_{\theta_k,k} \hat{w}_k, \\ y_k = C_{\theta_k,k} \hat{x}_k + D_{\theta_k,k} \hat{v}_k. \end{cases} \end{aligned}$$

O projeto do funcional penalizado (5.4) constitui o passo chave para obter as estimativas de estados robustas para SLSM incertos. O uso da penalidade desempenhará um papel importante na obtenção de estimativas robustas aliadas à simplicidade computacional do Filtro de Kalman.

5.2 Estimativas de Estados Robustas

Nesta seção são deduzidas as expressões do estimador de estados linear nas formas preditora e filtrada para o SLSM incerto (5.1)-(5.2) sob as condições de que a saída y_k e o parâmetro de salto θ_k são observados.

O critério (5.5) pode ser redefinido para obter (5.3)-(5.4) com a finalidade de se adequar a (5.1)-(5.2). Considere a substituição dos parâmetros nominais pelos parâmetros nominais perturbados $F_{\theta_k,k}^\delta$, $B_{\theta_k,k}^\delta$, $G_{\theta_k,k}^\delta$, $C_{\theta_k,k}^\delta$ e $D_{\theta_k,k}^\delta$. A obtenção das estimativas robustas ótimas $\hat{x}_{\mu,k+1|k}$ e $\hat{x}_{\mu,k}$ é definida por meio da determinação das soluções ótimas do problema de otimização min-max:

$$\min_{\hat{w}_k, \hat{v}_k, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}} \max_{\delta_k} \{ \mathcal{J}_{\mu,k}(\hat{w}_k, \hat{v}_k, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}, \delta_k) \}, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\mu,k}(\hat{w}_k, \hat{v}_k, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}, \delta_k) := & \begin{bmatrix} e_k \\ \hat{w}_k \\ \hat{v}_k \\ \hat{x}_k \\ \hat{x}_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k-1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ \hat{w}_k \\ \hat{v}_k \\ \hat{x}_k \\ \hat{x}_{k+1} \end{bmatrix} + \\ & \left(\begin{bmatrix} -I & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & G_{\theta_k,k}^\delta & 0 & F_{\theta_k,k}^\delta & -I \\ 0 & 0 & D_{\theta_k,k}^\delta & C_{\theta_k,k}^\delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ \hat{w}_k \\ \hat{v}_k \\ \hat{x}_k \\ \hat{x}_{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ -B_{\theta_k,k}^\delta u_k \\ y_k \end{bmatrix} \right)^T \mu I(\bullet), \quad (5.7) \end{aligned}$$

para todo $k = 0, 1, \dots$, com $P_{k|k-1} \succ 0$, $Q_k \succ 0$, $R_k \succ 0$ e $\mu > 0$ fixado.

Com a finalidade de se aplicar a Proposição 1.2.5, considera-se

$$Q \leftarrow \begin{bmatrix} P_{k|k-1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x \leftarrow \begin{bmatrix} e_k \\ \hat{w}_k \\ \hat{v}_k \\ \hat{x}_k \\ \hat{x}_{k+1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
A &\leftarrow \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & G_{\theta_k,k} & 0 & F_{\theta_k,k} & -I \\ 0 & 0 & D_{\theta_k,k} & C_{\theta_k,k} & 0 \end{bmatrix}, \quad b \leftarrow \begin{bmatrix} -\hat{x}_{k|k-1} \\ -B_{\theta_k,k}u_k \\ y_k \end{bmatrix}, \\
\delta A &\leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta G_{\theta_k,k} & 0 & \delta F_{\theta_k,k} & 0 \\ 0 & 0 & \delta D_{\theta_k,k} & \delta C_{\theta_k,k} & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta b \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -\delta B_{\theta_k,k}u_k \\ 0 \end{bmatrix}, \\
E_A &\leftarrow \begin{bmatrix} 0 & E_{G_{\theta_k,k}} & 0 & E_{F_{\theta_k,k}} & 0 \\ 0 & 0 & E_{D_{\theta_k,k}} & E_{C_{\theta_k,k}} & 0 \end{bmatrix}, \quad E_b \leftarrow \begin{bmatrix} -E_{B_{\theta_k,k}}u_k \\ 0 \end{bmatrix}, \\
H &\leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_{\theta_k,k} & 0 \\ 0 & N_{\theta_k,k} \end{bmatrix}, \quad \Delta \leftarrow \begin{bmatrix} \Delta_{\theta_k,k}^1 & 0 \\ 0 & \Delta_{\theta_k,k}^2 \end{bmatrix}, \quad W \leftarrow \mu I,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

o problema (5.6)-(5.7) resulta em um caso particular do problema de otimização (1.16)-(1.18).

As estimativas de estados robustas constituem o argumento de minimização do problema (5.6)-(5.7), isto é, $\hat{x}_{\mu,k+1|k} := \hat{x}_{\mu,k+1}^*$ e $\hat{x}_{\mu,k|k} := \hat{x}_{\mu,k}^*$. O resultado a seguir apresenta a solução ótima desse problema de otimização para cada $\mu > 0$.

Proposição 5.2.1. *Considere (5.6)-(5.7) com $\mu > 0$ fixado. A solução ótima é dada por:*

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} \\ \hat{x}_{k+1|k} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P_{k|k}^\mu & * \\ * & P_{k+1|k}^\mu \end{bmatrix} \end{bmatrix}_\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathfrak{P}_{\mu,k} & 0 & I & 0 \\ 0 & \mathfrak{S}_{\mu,k} & \mathfrak{A}_k & \mathfrak{B}_k \\ I & \mathfrak{A}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{B}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix}_\mu^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathfrak{Z}_k & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},$$

na qual

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_{\mu,k} &= \begin{bmatrix} P_{k|k-1}^\mu & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{S}_{\mu,k} = \begin{bmatrix} \mu^{-1}I & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{1,\mu,k} & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{2,\mu,k} \end{bmatrix}, \\
\mathfrak{A}_k &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \hat{G}_{\theta_k,k} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{D}_{\theta_k,k} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{B}_k = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ \hat{F}_{\theta_k,k} & -\hat{I} \\ \hat{C}_{\theta_k,k} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{Z}_k = \begin{bmatrix} -\hat{x}_{k|k-1} \\ -\hat{B}_{\theta_k,k}u_k \\ \mathcal{Y}_k \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

com

$$\Sigma_{1,\mu,k} = \begin{bmatrix} (\mu^{-1}I - \hat{\lambda}_k^{-1}M_{\theta_k,k}M_{\theta_k,k}^T) & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}_k^{-1}I \end{bmatrix}, \quad \Sigma_{2,\mu,k} = \begin{bmatrix} (\mu^{-1}I - \hat{\lambda}_k^{-1}N_{\theta_k,k}N_{\theta_k,k}^T) & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}_k^{-1}I \end{bmatrix},$$

$$\hat{I} := \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{F}_{\theta_k,k} := \begin{bmatrix} F_{\theta_k,k} \\ E_{F_{\theta_k,k}} \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_{\theta_k,k} := \begin{bmatrix} B_{\theta_k,k} \\ E_{B_{\theta_k,k}} \end{bmatrix}, \quad \hat{G}_{\theta_k,k} := \begin{bmatrix} G_{\theta_k,k} \\ E_{G_{\theta_k,k}} \end{bmatrix},$$

$$\hat{C}_{\theta_k,k} := \begin{bmatrix} C_{\theta_k,k} \\ E_{C_{\theta_k,k}} \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_{\theta_k,k} := \begin{bmatrix} D_{\theta_k,k} \\ E_{D_{\theta_k,k}} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y}_k := \begin{bmatrix} y_k \\ 0 \end{bmatrix},$$

e $\hat{\lambda}_k$ obtido de acordo com o Teorema 1.2.1.

Demonstração. Segue da Proposição 1.2.5 com as identificações estabelecidas em (5.8). $\square$

Analogamente ao analisado no Capítulo 3, o papel desempenhado pelo parâmetro μ nesse contexto também está associado ao nível de robustez do estimador robusto para lidar com as incertezas do Sistema (5.1)-(5.2).

Corolário 5.2.1. *As estimativas ótimas quando $\mu \rightarrow +\infty$ são dadas por:*

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} \\ \hat{x}_{k+1|k} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P_{k|k}^\mu & * \\ * & P_{k+1|k}^\mu \end{bmatrix} \end{bmatrix}_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathfrak{P}_{\mu,k} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{A}_k & \mathfrak{B}_k \\ I & \mathfrak{A}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{B}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathfrak{Z}_k & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},$$

com as identificações estabelecidas na Proposição 5.2.1.

Demonstração. Valendo-se da Proposição 5.2.1, note que

$$\hat{\lambda}_k \in (\|\mu \text{diag}(M_{\theta_k,k}^T M_{\theta_k,k}, N_{\theta_k,k}^T N_{\theta_k,k})\|, +\infty)$$

para cada $\mu \in (0, +\infty)$. Quando $\mu \rightarrow +\infty$, têm-se que $\hat{\lambda}_k \rightarrow +\infty$ e $\Sigma_{l,\mu,k} \rightarrow 0$, $l = 1, 2$, i.e., $(\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \Sigma_{l,\mu,k} = 0, l = 1, 2)$. $\square$

O algoritmo para calcular as estimativas de estados robustas na forma preditora é proposto

na Tabela 5.1². A existência da inversa do bloco matricial é garantida se a matriz

$$\begin{bmatrix} \hat{G}_{\theta_k, k} & 0 & \hat{F}_{\theta_k, k} & -\hat{I} \\ 0 & \hat{D}_{\theta_k, k} & \hat{C}_{\theta_k, k} & 0 \end{bmatrix}$$

é posto linha pleno.

O próximo resultado apresenta as expressões da estimativa na forma preditora e a respectiva matriz de variância, exibidas na Tabela 5.1, reescritas em uma estrutura matricial semelhante às equações que compõem o Filtro de Kalman padrão, [3, 13, 75].

Lema 5.2.1. *A estimativa preditora apresentada na Tabela 5.1 pode ser reescrita como*

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k}^r = & \Upsilon_k \left(-\hat{F}_{\theta_k, k} \hat{x}_{k|k-1}^r - \hat{F}_{\theta_k, k} P_{k|k-1}^r \hat{C}_{\theta_k, k}^T \cdot \right. \\ & \left. \cdot \left(\hat{C}_{\theta_k, k} P_{k|k-1}^r \hat{C}_{\theta_k, k}^T + \hat{D}_{\theta_k, k} R_k \hat{D}_{\theta_k, k}^T \right)^{-1} \right) \left(\mathcal{Y}_k - \hat{C}_{\theta_k, k} \hat{x}_{k|k-1}^r \right), \end{aligned}$$

no qual $\Upsilon_k = \left(\hat{I}^T \Xi_k^{-1} \hat{I} \right)^{-1} \hat{I}^T \Xi_k^{-1}$, com

$$\begin{aligned} \Xi_k = & \hat{F}_{\theta_k, k} P_{k|k-1}^r \hat{F}_{\theta_k, k}^T - \hat{F}_{\theta_k, k} P_{k|k-1}^r \hat{C}_{\theta_k, k}^T \cdot \\ & \cdot \left(\hat{C}_{\theta_k, k} P_{k|k-1}^r \hat{C}_{\theta_k, k}^T + \hat{D}_{\theta_k, k} R_k \hat{D}_{\theta_k, k}^T \right)^{-1} \hat{C}_{\theta_k, k} P_{k|k-1}^r \hat{F}_{\theta_k, k}^T + \hat{G}_{\theta_k, k} Q_k \hat{G}_{\theta_k, k}^T, \end{aligned}$$

$$e P_{k+1|k}^r = \left(\hat{I}^T \Xi_k^{-1} \hat{I} \right)^{-1}.$$

Demonstração. Análoga ao caso nominal, valendo-se da solução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{P}_{\mu, k} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{A}_k & \mathfrak{B}_k \\ I & \mathfrak{A}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{B}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\infty} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \mathfrak{X}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathfrak{Z}_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com $\mathfrak{X}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} \\ \hat{x}_{k+1|k} \end{bmatrix}$ e as demais identificações na Proposição 5.2.1. □

²A nomenclatura sobrescrita r é adotada novamente, veja Capítulo 3, para rotular também a robustez das estimativas de estados, diferenciando-as da versão nominal apresentada no Capítulo 4.

[illegible]

^aSemelhante à Tabela 5.1, as entradas marcadas com (*) no bloco matricial particionado são provenientes da representação conjunta das estimativas $\hat{x}$ com as respectivas matrizes de variância P e devem ser desprezadas.

De forma análoga ao filtro nominal do Capítulo 4, as estimativas $\hat{x}_{k|k}^r$ e $\hat{x}_{k+1|k}^r$ e as respectivas variâncias $P_{k|k}^r$ e $P_{k+1|k}^r$ podem ser calculadas sem a necessidade do cálculo da inversa do bloco matricial principal com o emprego de algoritmos adequados.

Considere as mesmas condições estabelecidas na Tabela 5.1. Defina para cada instante k os elementos matriciais e vetoriais

$$\mathbb{A}_k = \begin{bmatrix} P_{k|k-1}^r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{G}_{\theta_k,k} & 0 & \hat{F}_{\theta_k,k} & -\hat{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{D}_{\theta_k,k} & \hat{C}_{\theta_k,k} & 0 \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & \hat{G}_{\theta_k,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & \hat{D}_{\theta_k,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & \hat{F}_{\theta_k,k}^T & \hat{C}_{\theta_k,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{X}_1 = \begin{bmatrix} X_{1,1} \\ X_{1,2} \\ X_{1,3} \\ X_{1,4} \\ X_{1,5} \\ X_{1,6} \\ X_{1,7} \\ X_{1,8} \\ X_{1,9} \\ X_{1,10} \\ X_{1,11} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{X}_2 = \begin{bmatrix} X_{2,1} \\ X_{2,2} \\ X_{2,3} \\ X_{2,4} \\ X_{2,5} \\ X_{2,6} \\ X_{2,7} \\ X_{2,8} \\ X_{2,9} \\ X_{2,10} \\ X_{2,11} \end{bmatrix}, \quad \beta_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\hat{x}_{k|k-1}^r \\ -\hat{B}_{\theta_k,k} u_k \\ \mathcal{Y}_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{I}_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{I}_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

As estimativas $\hat{x}_{k|k}^r$ e $\hat{x}_{k+1|k}^r$ e as respectivas matrizes de variâncias $P_{k|k}^r$ e $P_{k+1|k}^r$ podem ser computadas por meio da solução do seguinte sistema linear

$$\mathbb{A}_k \begin{bmatrix} \alpha & | & \mathbb{X}_1 & | & \mathbb{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_k & | & \mathbb{I}_{10} & | & \mathbb{I}_{11} \end{bmatrix},$$

nas incógnitas α , $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$, e correspondem a:

$$\hat{x}_{k|k}^r = \alpha_{10}, \quad \hat{x}_{k+1|k}^r = \alpha_{11}, \quad P_{k|k}^r = -X_{1,10}, \quad P_{k+1|k}^r = -X_{2,11}.$$

Observação 5.2.1. Com base nos mesmos argumentos apresentados na Seção 4.2.2 a respeito das características proibitivas quanto à implementação offline da versão ótima, uma versão robusta subótima é proposta. O filtro robusto subótimo é dado pela substituição de $P_{k+1|k}$ por $\Psi_{j,k+1|k}^r$ definido por

$$\Psi_{j,k+1|k}^r = \sum_{i=1}^s p_{ij} P_{i,k+1|k}^r, \quad j \in \Theta, \quad (5.9)$$

no qual

$$\begin{bmatrix} P_{i,k|k}^r & * \\ * & P_{i,k+1|k}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{i,k|k-1}^r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{G}_{i,k} & 0 & \hat{F}_{i,k} & -\hat{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{D}_{i,k} & \hat{C}_{i,k} & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & \hat{G}_{i,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & \hat{D}_{i,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & \hat{F}_{i,k}^T & \hat{C}_{i,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

para cada $i \in \Theta$. As estimativas de estados robustas subótimas são calculadas de acordo com

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k}^r \\ \hat{x}_{k+1|k}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{\theta_k,k|k-1}^r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{G}_{\theta_k,k} & 0 & \hat{F}_{\theta_k,k} & -\hat{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{D}_{\theta_k,k} & \hat{C}_{\theta_k,k} & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & \hat{G}_{\theta_k,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & \hat{D}_{\theta_k,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & \hat{F}_{\theta_k,k}^T & \hat{C}_{\theta_k,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\hat{x}_{k|k-1}^r \\ -\hat{B}_{\theta_k,k} u_k \\ \mathcal{Y}_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

para todo $k \geq 0$ e com as condições iniciais do caso ótimo.

Essa versão subótima do filtro robusto também é dada por s equações recursivas de Riccati acopladas, as quais podem ser computadas offline com menor esforço computacional. Os mesmos comentários da Seção 4.2.2 são válidos aqui.

O quadro abaixo apresenta as expressões que compõem a estimativa robusta preditora subótima nos moldes do Lema 5.2.1.

Estimativa Preditora Robusta Subótima:

$$\hat{x}_{k+1|k}^r = \Upsilon_{\theta_k,k} \left(-\hat{F}_{\theta_k,k} \hat{x}_{k|k-1}^r - \hat{F}_{\theta_k,k} \Psi_{\theta_k,k|k-1}^r \hat{C}_{\theta_k,k}^T \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(\hat{C}_{\theta_k,k} \Psi_{\theta_k,k|k-1}^r \hat{C}_{\theta_k,k}^T + \hat{D}_{\theta_k,k} R_k \hat{D}_{\theta_k,k}^T \right)^{-1} \right) \left(\mathcal{Y}_k - \hat{C}_{\theta_k,k} \hat{x}_{k|k-1}^r \right),$$

no qual $\Upsilon_{\theta_k,k} = \left(\hat{I}^T \Xi_{\theta_k,k}^{-1} \hat{I} \right)^{-1} \hat{I}^T \Xi_{\theta_k,k}^{-1}$, com

$$\Xi_{j,k} = \hat{F}_{\theta_k,k} \Psi_{j,k|k-1}^r \hat{F}_{\theta_k,k}^T - \hat{F}_{\theta_k,k} \Psi_{j,k|k-1}^r \hat{C}_{\theta_k,k}^T \cdot \\ \cdot \left(\hat{C}_{\theta_k,k} \Psi_{j,k|k-1}^r \hat{C}_{\theta_k,k}^T + \hat{D}_{\theta_k,k} R_k \hat{D}_{\theta_k,k}^T \right)^{-1} \hat{C}_{\theta_k,k} \Psi_{j,k|k-1}^r \hat{F}_{\theta_k,k}^T + \hat{G}_{\theta_k,k} Q_k \hat{G}_{\theta_k,k}^T,$$

$$\Psi_{j,k|k-1}^r = \sum_{i=1}^s p_{ij} P_{i,k|k-1}^r \text{ e } P_{j,k+1|k}^r = \left(\hat{I}^T \Xi_{j,k}^{-1} \hat{I} \right)^{-1}, \text{ calculadas para cada } j \in \Theta.$$

5.3 Exemplo Numérico

Exemplo 5.3.1. *Considere o Sistema (5.1)-(5.2) com dois modos de operações e as matrizes de parâmetros nominais, incertos e de ponderações dadas por:*

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.92 & 0.10 \\ 0.20 & 0.75 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0.54 & 0.30 \\ 0.20 & 0.91 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.10 \\ 0.10 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.01 \\ 0.03 & 0.10 \end{bmatrix};$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0.01 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0.05 \end{bmatrix};$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad N_1 = 0.10, \quad M_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad N_2 = -0.10;$$

$$E_{F_1} = \begin{bmatrix} 0.22 & -0.02 \end{bmatrix}, \quad E_{B_1} = 0, \quad E_{F_2} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.13 \end{bmatrix}, \quad E_{B_2} = 0;$$

$$E_{G_1} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.61 \end{bmatrix}, \quad E_{G_2} = \begin{bmatrix} -0.81 & 0.31 \end{bmatrix};$$

$$E_{C_1} = \begin{bmatrix} 1.01 & 0.13 \end{bmatrix}, \quad E_{C_2} = \begin{bmatrix} 0.14 & -0.01 \end{bmatrix};$$

$$E_{D_1} = 2.31, \quad E_{D_2} = 2.13;$$

$$\Pi_0 = 100I_2, \quad Q = I_2, \quad R = I_1, \quad P_{1,0|-1} = 100I_2, \quad P_{2,0|-1} = 100I_2,$$

e matriz de probabilidades $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$.

As simulações realizadas neste exemplo são baseadas no filtro robusto proposto na Tabela 5.1 e a versão subótima (5.9)-(5.11) discutida na Observação 5.2.1. Na Figura 5.1, as estimativas robustas ótimas das entradas do vetor de estados $x_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}$ são apresentadas para uma realização aleatória da cadeia de Markov.

Figura 5.1: Estimativas Robustas - Predição.

Na Figura 5.2, as performances das versões ótimas e subótimas desses filtros são comparadas de acordo com a fórmula (4.12). Para cada curva da Figura 5.2, cada ponto no instante k

corresponde à média Euclideana das normas do erro de estimativa calculada sobre T experimentos para N instantes ($T = 1000, N = 100$). Em cada experimento j , o processo de ruído, as matrizes $\Delta_{\theta_k, k}^q$ e as realizações da cadeia de Markov foram seleccionadas aleatoriamente.

Figura 5.2: Comparação de Desempenho.

Assim como no exemplo do Capítulo 4, a diferença de desempenho entre as estimativas ótimas e as estimativas subótimas computadas por meio da aproximação $\{\Psi_{j,k|k-1}^r\}_{j=0}^s$ da matriz de covariância $P_{k|k-1}^r$, com base na informação das probabilidades de transição dos modos de operações, é ilustrada no posicionamento das curvas na Figura 5.2.

O exemplo a seguir compara os desempenhos das versões robustas propostas neste capítulo com as versões nominais do Capítulo 4 ao estimar os estados de um SLSM incerto.

Exemplo 5.3.2. Considere agora o Sistema (5.1)-(5.2) com os seguinte parâmetros:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.9802 & 0.0196 \\ 0 & 0.9802 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0.9802 & 0 \\ 0 & 0.9802 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix};$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.198 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0.0198 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$E_{F_1} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad E_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{F_2} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad E_{G_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\Pi_0 = 100I_2, \quad Q = 2I_2, \quad R = I_1, \quad P_{1,0|-1} = 100I_2, \quad P_{2,0|-1} = 100I_2,$$

e matriz de probabilidades $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.05 & 0.95 \end{bmatrix}$.

Na Figura 5.3 são apresentados os desempenhos dos estimadores de estados nominal e robusto nas versões ótima e subótima. O critério de comparação adotado é o mesmo do exemplo anterior. Os filtros nominais ótimo e subótimo deduzidos no Capítulo 4 foram aplicados para estimar os estados do SLSM sujeito a incertezas. As estimativas de estados foram computadas por meio das expressões da Tabela 4.1 e a respectiva versão subótima dada por (4.9)-(4.11) considerando as medições $\{y_k\}$ provenientes do sistema incerto (5.1)-(5.2). Os filtros robustos ótimo e subótimo propostos na Tabela 5.1 e na Observação 5.2.1, respectivamente, também foram aplicados.

Figura 5.3: Comparação de Desempenho: Nominal $\times$ Robusto.

As performances dos estimadores nominais são degradadas pela presença de incertezas com relação aos estimadores robustos. Já as curvas de desempenho dos estimadores robustos ótimo e subótimo, nesse caso, são indistinguíveis.

5.4 Conclusões Parciais

Neste capítulo foram desenvolvidas estimativas robustas recursivas nas versões ótima e subótima nas formas preditora e filtrada para SLSM sob a influência de incertezas paramétricas. O diferencial dessas estimativas é a associação das características do Filtro de Kalman, proposto

na década de 60, com o aspecto de robustez introduzido pela abordagem proposta para lidar com sistemas sujeitos a incertezas. A recursividade depende somente das matrizes de parâmetros e de ponderações do sistema, isto é, nenhum ajuste *offline* de parâmetro auxiliar faz-se necessário. Essas estimativas podem ser aplicadas em cenários de horizonte finito e infinito para modelos variantes e invariantes no tempo.

CAPÍTULO 6

FILTRO DE KALMAN PARA SLSM INDEPENDENTE DO MODO

O critério de erro quadrado médio mínimo é um método de estimação baseado na minimização do valor esperado do quadrado da norma do erro de estimativa. A classe dos estimadores de erro quadrado médio mínimo linear desempenha um papel importante na obtenção de estimativas de estados ótimas para sistemas lineares no espaço de estado. É com base nesse critério que as estimativas recursivas dos estados de SLSM nominais foram desenvolvidas em [25] quando o parâmetro de salto não é observado.

Neste capítulo é adotada uma interpretação determinística, alternativa à abordagem considerada em [25], para estimar de maneira ótima e recursiva os estados de SLSM nominais. A questão da obtenção das estimativas de estados será modelada considerando a minimização de um funcional quadrático sujeito a uma restrição de igualdade. Para a solução desse problema restrito é empregada a combinação de funções penalidade [83] e problema de mínimos quadrados ponderados [74]. A mesma abordagem foi adotada no Capítulo 4 para a dedução das estimativas de estados recursivas para SLSM nominais, porém sob a hipótese de disponibilidade do parâmetro de salto.

As estimativas de estados recursivas são apresentadas em um arranjo de blocos matriciais equivalente à estrutura de solução proposta por [25]. Um funcional custo quadrático penalizado é obtido e servirá como base para o projeto de um filtro robusto para SLSM com incertezas nas matrizes de estado.

6.1 Formulação do Problema

Considere o modelo SLSM

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_{\theta_k,k}x_k + G_{\theta_k,k}w_k, \\ y_k &= C_{\theta_k,k}x_k + D_{\theta_k,k}v_k, \end{aligned} \tag{6.1}$$

para todo $k = 0, 1, \dots$, no qual $F_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{p \times r}$ são matrizes de parâmetros nominais consideradas conhecidas, $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $y_k \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de medida, e $w_k \in \mathbb{R}^m$ e $v_k \in \mathbb{R}^r$ são ruídos aleatórios Gaussianos mutuamente independentes, ambos com média zero e variância unitária.

Como tem sido usual neste trabalho, o processo $\{\theta_k\}$ é uma cadeia de Markov de tempo discreto com os estados admitindo valores no conjunto finito $\Theta = \{1, \dots, s\}$ e com matriz de probabilidades de transição $\mathbb{P}_k = [p_{ij,k}]$ e $Prob[\theta_k = i] = \pi_{i,k}$, exaustivamente definida nos capítulos anteriores. As sequências $\{w_k\}$, $\{v_k\}$ e a cadeia de Markov $\{\theta_k\}$ são mutuamente independentes. Adicionalmente, x_0 e θ_0 são variáveis aleatórias independentes com $\mathbb{E}\{x_0\} = \mu_0$ e $\mathbb{E}\{x_0 x_0^T\} = \Sigma_0$. É considerado ainda que $D_{i,k} D_{i,k}^T \succ 0$ para todo $i \in \Theta$ e todo instante k . Essa condição estabelece que o processo de ruído interfere em todas as entradas do vetor de observações, veja [42].

O problema em questão consiste em determinar a melhor estimativa do vetor de estado x_k baseado nas observações y_k considerando, no entanto, que o parâmetro de salto θ_k não é observado a todo instante k . A solução a ser apresentada na Seção 6.2 foi proposta por [25] e baseia-se na estimativa do vetor aleatório $x_k 1_{\{\theta_k=j\}}$, no qual $1_{\{\cdot\}}$ consiste na função indicadora¹, e não na estimativa de x_k . Segundo [25], $\{x_k\}$ por si só não caracteriza um processo de Markov,

¹A função indicadora $1_S : X \rightarrow \{0, 1\}$ é definida por $1_{\{S\}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in S, \\ 0, & \text{se } x \notin S. \end{cases}$

mas o processo conjunto $\{x_k, \theta_k\}$ sim. Dessa forma, ao trabalhar com $x_k 1_{\{\theta_k=j\}}$ e $x_k x_k^T 1_{\{\theta_k=j\}}$ é possível tirar proveito da propriedade de Markov, e estabelecer equações de diferenças para $\mathbb{E}\{x_k 1_{\{\theta_k=j\}}\}$ e $\mathbb{E}\{x_k x_k^T 1_{\{\theta_k=j\}}\}$.

O critério alternativo a ser adotado para a dedução das estimativas ótimas baseia-se na solução do problema de minimização com restrição apresentado no quadro a seguir. As etapas para a obtenção desse critério são análogas ao procedimento já visto no Capítulo 4. A presença de novos termos e variáveis será justificada durante o desenvolvimento das próximas seções.

Problema de Estimativas de Estados Ótimas: *As estimativas de estados ótimas são dadas por*

$$\hat{x}_{k|k} = \sum_{i=1}^s \hat{z}_{i,k|k} \text{ e } \hat{x}_{k+1|k} = \sum_{i=1}^s \hat{z}_{i,k+1|k}$$

com $\hat{z}_{k|k}$ e $\hat{z}_{k+1|k}$ obtidas mediante

$$(\hat{z}_{k|k}, \hat{z}_{k+1|k}) \in \arg \min_{\{\hat{\psi}_k, \hat{\varphi}_k, \hat{z}_k, \hat{z}_{k+1}\}} \left\{ \|\hat{z}_k - \hat{z}_{k|k-1}\|_{\hat{Z}_{k|k-1}}^2 + \|\hat{\psi}_k\|_{Q_k}^2 + \|\hat{\varphi}_k\|_{R_k}^2 \right\}$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} \hat{z}_{k+1} &= \mathcal{F}_k \hat{z}_k + \hat{\psi}_k, \\ y_k &= \mathcal{C}_k \hat{z}_k + \hat{\varphi}_k, \end{cases}$$

com

$$R_k := \sum_{i=1}^s \pi_{i,k} D_{i,k} D_{i,k}^T,$$

$$Q_k := \text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} F_{i,k} Z_{i,k} F_{i,k}^T \right] - \mathcal{F}_k Z_k \mathcal{F}_k^T + \text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T \right],$$

no qual $Z_k = \text{diag}[Z_{j,k}]$ com $Z_{j,k}$ dado pela equação recursiva

$$Z_{j,k+1} = \sum_{i=1}^s p_{ij,k} F_{i,k} Z_{i,k} F_{i,k}^T + \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T.$$

6.2 Abordagem Estocástica

Nesta seção é apresentado o estimador de estados proposto em [25] baseado no critério da estimativa mínima quadrática média linear (EMQML) ótima. A dimensão da variável estimada por esse filtro é sn em virtude da reformulação do problema tomando por base um sistema aumentado. Os aspectos fundamentais dessa solução são apresentados na sequencia². Para a obtenção do sistema aumentado, em [25], define-se

$$z_k := \begin{bmatrix} z_{1,k} \\ \vdots \\ z_{s,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{sn}, \quad (6.2)$$

com $z_{j,k} := x_k 1_{\{\theta_k=j\}} \in \mathbb{R}^n$ para cada $j \in \Theta$. A representação do sistema (6.1) considerando (6.2) é dada por

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \mathcal{F}_k z_k + \mathcal{M}_{k+1} z_k + v_k \\ y_k &= \mathcal{C}_k z_k + D_{\theta_k,k} v_k. \end{aligned} \quad (6.3)$$

sendo

$$\mathcal{F}_k = \begin{bmatrix} p_{11,k} F_{1,k} & \cdots & p_{s1,k} F_{s,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1s,k} F_{1,k} & \cdots & p_{ss,k} F_{s,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{sn \times sn}, \quad \mathcal{C}_k = \begin{bmatrix} C_{1,k} & \cdots & C_{s,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times sn},$$

$$\mathcal{M}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{1,k+1} \\ \vdots \\ \mathcal{M}_{s,k+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{sn \times sn},$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{j,k+1} &= \begin{bmatrix} m_1(j, k+1) & \cdots & m_s(j, k+1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times sn}, \\ m_i(j, k+1) &= (1_{\{\theta_{k+1}=j\}} - p_{ij,k}) F_{i,k} 1_{\{\theta_k=i\}} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \end{aligned}$$

²Veja detalhes no Apêndice C.

e os vetores

$$v_k = \begin{bmatrix} 1_{\{\theta_{k+1}=1\}} G_{\theta_k,k} w_k \\ \vdots \\ 1_{\{\theta_{k+1}=s\}} G_{\theta_k,k} w_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{sn},$$

$$\varphi_k = D_{\theta_k,k} v_k \in \mathbb{R}^p,$$

cujos detalhes podem ser encontrados em [25, 33, 34, 73].

Denotando $\mathcal{L}(y^s)$ o subespaço linear gerado por $y^s := (y_s, y_{s-1}, \dots, y_0)$, defina $\hat{z}_{k|k-1}$ como a projeção de z_k sobre $\mathcal{L}(y^{k-1})$ e $\tilde{z}_{k|k-1} := z_k - \hat{z}_{k|k-1}$. As matrizes de segundo momento associadas as variáveis (6.2) são definidas por

$$Z_{i,k} := \mathbb{E}\{z_{i,k} z_{i,k}^T\} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$Z_k := \mathbb{E}\{z_k z_k^T\} = \text{diag}[Z_{i,k}] \in \mathbb{R}^{sn \times sn},$$

$$\hat{Z}_{k|l} := \mathbb{E}\{\hat{z}_{k|l} \hat{z}_{k|l}^T\} \in \mathbb{R}^{sn \times sn}, \quad 0 \leq l \leq k,$$

$$\tilde{Z}_{k|l} := \mathbb{E}\{\tilde{z}_{k|l} \tilde{z}_{k|l}^T\} \in \mathbb{R}^{sn \times sn}, \quad 0 \leq l \leq k.$$

Defina também:

$$\mathcal{G}_k = \text{diag} \left[\left[(p_{1j,k} \pi_{1,k})^{\frac{1}{2}} G_{1,k} \quad \cdots \quad (p_{sj,k} \pi_{s,k})^{\frac{1}{2}} G_{s,k} \right] \right] \in \mathbb{R}^{sn \times s^2 m},$$

$$\mathcal{D}_k = \begin{bmatrix} D_{1,k} \pi_{1,k}^{\frac{1}{2}} & \cdots & D_{s,k} \pi_{s,k}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times sr}.$$

Teorema 6.2.1. [25] A EMQML $\hat{x}_{k|k}$ é dada por

$$\hat{x}_{k|k} = \sum_{i=1}^s \hat{z}_{i,k|k}, \quad (6.4)$$

no qual $\hat{z}_{k|k}$ satisfaz a seguinte recursão

$$\hat{z}_{k|k} = \hat{z}_{k|k-1} + \tilde{Z}_{k|k-1} \mathcal{C}_k^T (\mathcal{C}_k \tilde{Z}_{k|k-1} \mathcal{C}_k^T + \mathcal{D}_k \mathcal{D}_k^T)^{-1} (y_k - \mathcal{C}_k \hat{z}_{k|k-1}), \quad (6.5)$$

$$\hat{z}_{k|k-1} = \mathcal{F}_{k-1} \hat{z}_{k-1|k-1}, \quad k \geq 1, \quad (6.6)$$

$$\hat{z}_{0|-1} = q_0 = \begin{bmatrix} \mu_0 \pi_{1,0} \\ \vdots \\ \mu_0 \pi_{s,0} \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

As matrizes $\tilde{Z}_{k|k-1}$ são dadas por

$$\tilde{Z}_{k|k-1} = Z_k - \hat{Z}_{k|k-1}, \quad (6.8)$$

com $Z_k = \text{diag}[Z_{j,k}]$ dado pelas equações recursivas

$$Z_{j,k+1} = \sum_{i=1}^s p_{ij,k} F_{i,k} Z_{i,k} F_{i,k}^T + \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T, \quad (6.9)$$

$$Z_{j,0} = \mathbb{Z}_0 \pi_j(0), \quad (6.10)$$

e $\hat{Z}_{k|k-1}$ por meio de

$$\hat{Z}_{k|k} = \hat{Z}_{k|k-1} + \hat{Z}_{k|k-1} \mathcal{C}_k^T (\mathcal{C}_k \tilde{Z}_{k|k-1} \mathcal{C}_k^T + \mathcal{D}_k \mathcal{D}_k^T)^{-1} \mathcal{C}_k \hat{Z}_{k|k-1}, \quad (6.11)$$

$$\hat{Z}_{k|k-1} = \mathcal{F}_{k-1} \hat{Z}_{k-1|k-1} \mathcal{F}_{k-1}^T, \quad (6.12)$$

$$\hat{Z}_{0|-1} = q(0)q(0)^T. \quad (6.13)$$

No Teorema 6.2.1, o termo $\tilde{Z}_{k|k-1}$ é escrito como a diferença entre Z_k e $\hat{Z}_{k|k-1}$ segundo as equações recursivas (6.9) e (6.12). O lema a seguir apresenta uma forma alternativa para o cálculo de $\tilde{Z}_{k|k-1}$ por meio de uma equação recursiva de Riccati.

Lema 6.2.1. [33] $\tilde{Z}_{k|k-1}$ satisfaz a seguinte equação recursiva de Riccati

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{k+1|k} = & \mathcal{F}_k \tilde{Z}_{k|k-1} \mathcal{F}_k^T - \mathcal{F}_k \tilde{Z}_{k|k-1} \mathcal{C}_k^T (\mathcal{C}_k \tilde{Z}_{k|k-1} \mathcal{C}_k^T + \mathcal{D}_k \mathcal{D}_k^T)^{-1} \mathcal{C}_k \tilde{Z}_{k|k-1} \mathcal{F}_k^T \\ & + \mathcal{B}(\bar{Z}_k, k) + \mathcal{G}_k \mathcal{G}_k^T, \end{aligned} \quad (6.14)$$

com $\mathcal{B}(\bar{Z}_k, k) := \text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} F_{i,k} Z_{i,k} F_{i,k} \right] - \mathcal{F}_k \text{diag}[Z_{i,k}] \mathcal{F}_k^T$, sendo $\bar{Z}_k = (Z_{1,k}, \dots, Z_{s,k})$.

De acordo com [33], $\mathcal{B}(\bar{Z}_k, k) \succeq 0$. Inclusive, $\mathcal{B}(\bar{Z}_k, k)$ é nula para todo k quando o sistema não possui saltos, isto é, $(s = 1)$. Consequentemente, a equação recursiva de Riccati (6.14)

reduz-se à equação recursiva de Riccati padrão para o Filtro de Kalman para sistemas lineares nominais no espaço de estado [3, 13, 75].

6.3 Abordagem Determinística

Conforme já visto, as expressões que compõem o Filtro de Kalman admitem uma interpretação determinística mediante a solução de um problema de minimização. As próximas seções mostram que as estimativas desenvolvidas em [25], e apresentadas na seção anterior, também podem ser obtidas dessa forma.

6.3.1 Reinterpretação do Problema

Ao definir para todo k

$$\begin{aligned}\psi_k &:= \mathcal{M}_{k+1}z_k + \vartheta_k, \\ \varphi_k &:= D_{\theta_k, k}v_k,\end{aligned}\tag{6.15}$$

o sistema (6.3) pode ser reescrito na forma de um sistema linear no espaço de estado

$$\begin{aligned}z_{k+1} &= \mathcal{F}_k z_k + \psi_k, \\ y_k &= \mathcal{C}_k z_k + \varphi_k,\end{aligned}\tag{6.16}$$

com as parcelas ψ_k e φ_k interpretadas como ruídos aditivos das equações de estado e de saída do sistema, respectivamente. As médias e as covariâncias associadas a essas variáveis aleatórias são apresentadas no resultado a seguir.

Lema 6.3.1. *Sejam $\{w_k\}$ e $\{v_k\}$ sequências de ruídos aleatórios satisfazendo:*

- $\mathbb{E}\{w_k\} = 0$, $\mathbb{E}\{w_k w_k^T\} = I$ e $\mathbb{E}\{w_k w_l^T\} = 0$ para $k \neq l$;
- $\mathbb{E}\{v_k\} = 0$, $\mathbb{E}\{v_k v_k^T\} = I$ e $\mathbb{E}\{v_k v_l^T\} = 0$ para $k \neq l$;
- $\mathbb{E}\{w_k v_l^T\} = 0$ para todo k e l .

Considere as sequências $\{\psi_k\}$ e $\{\varphi_k\}$ geradas por (6.15). Então, para todo k e l :

- (i) - $\mathbb{E}\{\psi_k\} = 0$ e $\mathbb{E}\{\varphi_k\} = 0$,

(ii) - $\mathbb{E}\{\psi_k \psi_k^T\} = \text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} F_{i,k} Z_{i,k} F_{i,k}^T \right] - \mathcal{F}_k Z_k \mathcal{F}_k^T + \text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T \right]$, sendo que Z_k e $Z_{j,k}$ referem-se a $Z_k := \mathbb{E}\{z_k z_k^T\} = \text{diag}[Z_{j,k}]$ e $Z_{j,k} := \mathbb{E}\{z_{j,k} z_{j,k}^T\}$ com $Z_{j,k}$ dado pela seguinte equação recursiva

$$Z_{j,k+1} = \sum_{i=1}^s p_{ij,k} F_{i,k} Z_{i,k} F_{i,k}^T + \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T.$$

$$(iii) - \mathbb{E}\{\varphi_k \varphi_k^T\} = \sum_{i=1}^s \pi_{i,k} D_{i,k} D_{i,k}^T.$$

$$(iv) - \mathbb{E}\{\psi_k \psi_l^T\} = 0 \text{ e } \mathbb{E}\{\varphi_k \varphi_l^T\} = 0, \text{ se } k \neq l.$$

$$(v) - \mathbb{E}\{\psi_k z_k^T\} = 0, \mathbb{E}\{\varphi_k z_k^T\} = 0 \text{ e } \mathbb{E}\{\psi_k \varphi_l^T\} = 0.$$

Demonstração. Segue dos passos da dedução do filtro apresentado em [25, 34, 73]. $\square$

Observação 6.3.1. Uma vez que, por hipótese, $D_{j,k} D_{j,k}^T \succ 0$ para todo instante k e todo modo $j \in \Theta$, é imediato concluir por (iii) do Lema 6.3.1 que $\mathbb{E}\{\varphi_k \varphi_k^T\} \succ 0$ para todo k . Supondo também agora que $G_{j,k} G_{j,k}^T \succ 0$ para todo $j \in \Theta$, da mesma forma tem-se que $Z_{j,k+1} \succ 0$ para todo k e j . Inclusive, $\mathbb{E}\{\psi_k \psi_k^T\} \succ 0$ já que, de acordo com [33], $\mathcal{B}(\bar{Z}_k, k) \succeq 0$.

De acordo com o Teorema 6.2.1 e o Lema 6.2.1, ao considerar as expressões da estimativa de estado e da equação de Riccati

$$\hat{z} = \bar{z} + X C^T (C X C^T + R)^{-1} (y - C \bar{z}),$$

$$X = A X A^T - A X C^T (C X C^T + R)^{-1} C X A^T + Q,$$

respectivamente, com as identificações

$$\hat{z} \leftarrow \hat{z}_{k|k}, \quad \bar{z} \leftarrow \hat{z}_{k|k-1}, \quad y \leftarrow y_k,$$

$$X \leftarrow \tilde{Z}_{k|k-1}, \quad A \leftarrow \mathcal{F}_k, \quad C \leftarrow \mathcal{C}_k, \quad R \leftarrow \mathcal{D}_k \mathcal{D}_k^T \text{ e } Q \leftarrow (\mathcal{B}(\bar{Z}_k, k) + \mathcal{G}_k \mathcal{G}_k^T),$$

é possível associar a estrutura das expressões das estimativas de estados ao seguinte sistema

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \mathcal{F}_k z_k + (\mathcal{M}_{k+1} z_k + \vartheta_k), \\ y_k &= \mathcal{C}_k z_k + D_{\theta_k, k} v_k, \end{aligned}$$

com $(\mathcal{M}_{k+1} z_k + \vartheta_k)$ e $D_{\theta_k, k} v_k$ interpretados como vetores de ruídos.

6.3.2 Estimativas de Estados

Analogamente ao Capítulo 4, adota-se as seguintes notações para as estimativas preditora e filtrada de z_k , respectivamente:

- $\hat{z}_{k|k-1}$ refere-se a estimativa de z_k dado $\{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}\}$;
- $\hat{z}_{k|k}$ refere-se a estimativa de z_k dado $\{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k\}$,

e as matrizes de variâncias dos erros de estimativas $\tilde{Z}_{k|k-1}$ e $\tilde{Z}_{k|k}$.

Para um instante $k - 1$ qualquer fixado, suponha conhecidas a estimativa preditora $\hat{z}_{k|k-1}$ de z_k e a matriz de variância $\tilde{Z}_{k|k-1}$ associada ao erro de estimativa $e_k := (z_k - \hat{z}_{k|k-1})$. No instante seguinte, k , considere conhecida a nova medida y_k . O objetivo é atualizar a estimativa $\hat{z}_{k|k-1}$ de z_k com base na nova informação de saída disponível. Isto é, estimar z_k com base em $\{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k\}$. Ao mesmo tempo, deseja-se calcular também a estimativa de z_{k+1} .

Dado o conjunto de medidas $\{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k\}$, as estimativas de z_k e z_{k+1} serão obtidas mediante a minimização do funcional quadrático ponderado de um passo

$$\begin{aligned} (\hat{z}_{k|k}, \hat{z}_{k+1|k}) \in \arg \min_{\{\hat{\psi}_k, \hat{\varphi}_k, \hat{z}_k, \hat{z}_{k+1}\}} & \left\{ \|\hat{z}_k - \hat{z}_{k|k-1}\|_{\tilde{Z}_{k|k-1}^{-1}}^2 + \|\hat{\psi}_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|\hat{\varphi}_k\|_{R_k^{-1}}^2 \right\} \\ \text{sujeito a} & \begin{cases} \hat{z}_{k+1} = \mathcal{F}_k \hat{z}_k + \hat{\psi}_k \\ y_k = \mathcal{C}_k \hat{z}_k + \hat{\varphi}_k \end{cases}. \end{aligned}$$

sendo R_k e Q_k dadas por

$$\begin{aligned} R_k &:= \sum_{i=1}^s \pi_{i,k} D_{i,k} D_{i,k}^T, \\ Q_k &:= \text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} F_{i,k} Z_{i,k} F_{i,k}^T \right] - \mathcal{F}_k Z_k \mathcal{F}_k^T + \text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T \right], \end{aligned}$$

no qual $Z_k = \text{diag}[Z_{j,k}]$ com $Z_{j,k}$ dado pela equação recursiva

$$Z_{j,k+1} = \sum_{i=1}^s p_{ij,k} F_{i,k} Z_{i,k} F_{i,k}^T + \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T.$$

Uma vez que $x_k = \sum_{i=1}^s x_k 1_{\{\theta(k)=i\}} = \sum_{i=1}^s z_{i,k}$, tem-se então que:

$$\hat{x}_{k|k} = \sum_{i=1}^s \hat{z}_{i,k|k} \quad \text{e} \quad \hat{x}_{k+1|k} = \sum_{i=1}^s \hat{z}_{i,k+1|k}.$$

O problema de minimização acima pode ser reescrito na seguinte forma

$$\begin{aligned} \min_{\{e_k, \hat{\psi}_k, \hat{\varphi}_k, \hat{z}_k, \hat{z}_{k+1}\}} & \left\{ \begin{bmatrix} e_k \\ \hat{\psi}_k \\ \hat{\varphi}_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{k|k-1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ \hat{\psi}_k \\ \hat{\varphi}_k \end{bmatrix} \right\} \\ \text{sujeito a} & \begin{bmatrix} -\hat{z}_{k|k-1} \\ 0 \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ \mathcal{F}_k & -I \\ \mathcal{C}_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_k \\ \hat{z}_{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_k \\ \hat{\psi}_k \\ \hat{\varphi}_k \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou ainda, como

$$\begin{aligned} \min_{\{e_k, \hat{\psi}_k, \hat{\varphi}_k, \hat{z}_k, \hat{z}_{k+1}\}} & \left\{ \left(\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ \hat{\psi}_k \\ \hat{\varphi}_k \\ \hat{z}_k \\ \hat{z}_{k+1} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{k|k-1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ \hat{\psi}_k \\ \hat{\varphi}_k \\ \hat{z}_k \\ \hat{z}_{k+1} \end{bmatrix} \right\} \\ \text{sujeito a} & \begin{bmatrix} -\hat{z}_{k|k-1} \\ 0 \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & I & 0 & \mathcal{F}_k & -I \\ 0 & 0 & I & \mathcal{C}_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ \hat{\psi}_k \\ \hat{\varphi}_k \\ \hat{z}_k \\ \hat{z}_{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De acordo com a Proposição 1.3.1, quando $\mu \rightarrow +\infty$, as estimativas de estados $\hat{z}_{k|k}$ e $\hat{z}_{k+1|k}$ e as respectivas matrizes de variâncias do erro de estimativa $\tilde{Z}_{k|k}$ e $\tilde{Z}_{k+1|k}$ são obtidas e apresentadas em uma nova estrutura conforme o resultado a seguir.

Teorema 6.3.1. *As estimativas de estados ótimas são dadas por*

$$\hat{x}_{k|k} = \sum_{i=1}^s \hat{z}_{i,k|k} \quad e \quad \hat{x}_{k+1|k} = \sum_{i=1}^s \hat{z}_{i,k+1|k}$$

com as estimativas $\hat{z}_{k|k}$ e $\hat{z}_{k+1|k}$ atualizadas conforme

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_{k|k} & \tilde{Z}_{k|k} & * \\ \hat{z}_{k+1|k} & * & \tilde{Z}_{k+1|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{k|k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & \mathcal{F}_k & -I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & \mathcal{C}_k & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & \mathcal{F}_k^T & \mathcal{C}_k^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\hat{z}_{k|k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ y_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix},$$

sendo

$$R_k := \sum_{i=1}^s \pi_{i,k} D_{i,k} D_{i,k}^T,$$

$$Q_k := \text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} F_{i,k} Z_{i,k} F_{i,k}^T \right] - \mathcal{F}_k Z_k \mathcal{F}_k^T + \text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T \right],$$

no qual $Z_k = \text{diag}[Z_{j,k}]$ com $Z_{j,k}$ dado pela equação recursiva

$$Z_{j,k+1} = \sum_{i=1}^s p_{ij,k} F_{i,k} Z_{i,k} F_{i,k}^T + \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T.$$

e as condições iniciais $\hat{z}_{0|-1}$, $Z_{j,0}$ e $\hat{Z}_{0|-1}$ como em (6.7), (6.10) e (6.13), respectivamente.

A disposição dos parâmetros do sistema na estrutura matricial em blocos no Teorema 6.3.1 é idêntica a das estimativas de estados apresentada na Tabela 4.1. O próximo resultado estabelece a equivalência entre a solução proposta em [25] e a solução obtida por meio da abordagem alternativa via penalidade desenvolvida neste trabalho.

Lema 6.3.2. *As estimativas $\hat{z}_{k|k}$ e $\hat{z}_{k+1|k}$ obtidas no Teorema 6.3.1 podem ser reescritas como*

$$\begin{aligned}\hat{z}_{k|k} &= \hat{z}_{k|k-1} + \tilde{Z}_{k|k-1} \mathcal{C}_k^T (R_k + \mathcal{C}_k \tilde{Z}_{k|k-1} \mathcal{C}_k^T)^{-1} (y_k - \mathcal{C}_k \hat{z}_{k|k-1}), \\ \hat{z}_{k+1|k} &= \mathcal{F}_k \hat{z}_{k|k},\end{aligned}$$

com as respectivas matrizes de variâncias

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{k|k} &= \tilde{Z}_{k|k-1} - \tilde{Z}_{k|k-1} \mathcal{C}_k^T (R_k + \mathcal{C}_k \tilde{Z}_{k|k-1} \mathcal{C}_k^T)^{-1} \mathcal{C}_k \tilde{Z}_{k|k-1}, \\ \tilde{Z}_{k+1|k} &= Q_k + \mathcal{F}_k (\tilde{Z}_{k|k-1} - \tilde{Z}_{k|k-1} \mathcal{C}_k^T (R_k + \mathcal{C}_k \tilde{Z}_{k|k-1} \mathcal{C}_k^T)^{-1} \mathcal{C}_k \tilde{Z}_{k|k-1}) \mathcal{F}_k^T.\end{aligned}$$

Demonstração. Procede-se de forma análoga à prova do Lema 4.2.2. □

Observação 6.3.2. *Caso o Sistema (6.1) não admita saltos ($s = 1$), verifica-se, de acordo com o Teorema 6.3.1 e o Lema 6.3.2, que as expressões obtidas são reduzidas ao Filtro de Kalman [3, 13, 75] para sistemas nominais. Nesse caso, as matrizes de variâncias dos ruídos de estado e medida são dadas por $Q_k = G_k G_k^T$ e $R_k = D_k D_k^T$, respectivamente.*

Suponha que no instante k a estimativa filtrada $\hat{z}_{k|k}$ tenha sido calculada com a respectiva variância do erro de estimativa $\tilde{Z}_{k|k}$. Baseando-se na disponibilidade da nova medida y_{k+1} , considere o problema de refinar a estimativa de z_k dada por $\hat{z}_{k|k+1}$, e consequentemente, calcular $\hat{z}_{k+1|k+1}$ resolvendo

$$\begin{aligned}\min_{\{\hat{\psi}_k, \hat{\varphi}_{k+1}, \hat{z}_k, \hat{z}_{k+1}\}} & \left\{ \|\hat{z}_k - \hat{z}_{k|k}\|_{\tilde{Z}_{k|k}^{-1}}^2 + \|\hat{\psi}_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|\hat{\varphi}_{k+1}\|_{R_{k+1}^{-1}}^2 \right\} \\ \text{sujeito a} & \begin{cases} \hat{z}_{k+1} &= \mathcal{F}_k \hat{z}_k + \hat{\psi}_k \\ y_{k+1} &= \mathcal{C}_{k+1} \hat{z}_{k+1} + \hat{\varphi}_{k+1} \end{cases}.\end{aligned}$$

De acordo com o método de penalidades, tem-se o problema na forma irrestrita

$$\min_{\{\hat{\psi}_k, \hat{\varphi}_{k+1}, \hat{z}_k, \hat{z}_{k+1}\}} \left\{ \|\hat{z}_k - \hat{z}_{k|k}\|_{\tilde{Z}_{k|k}}^2 + \|\hat{\psi}_k\|_{Q_k}^2 + \|\hat{\varphi}_{k+1}\|_{R_{k+1}}^2 + \right. \\ \left. \mu \left(\|\hat{z}_{k+1} - \mathcal{F}_k \hat{z}_k - \hat{\psi}_k\|^2 + \|y_{k+1} - \mathcal{C}_{k+1} \hat{z}_{k+1} - \hat{\varphi}_{k+1}\|^2 \right) \right\}, \quad \mu > 0,$$

cuja solução, conforme a Proposição 1.3.1 quando $\mu \rightarrow +\infty$, fornece as estimativas ótimas dadas por:

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_{k|k+1} & \tilde{Z}_{k|k+1} & * \\ \hat{z}_{k+1|k+1} & * & \tilde{Z}_{k+1|k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{k|k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & \mathcal{F}_k & -I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & \mathcal{C}_{k+1} \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & \mathcal{F}_k^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & \mathcal{C}_{k+1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\hat{z}_{k|k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ y_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}.$$

Observação 6.3.3. Ainda, inspirado na Observação 4.2.1, as estimativas $\hat{z}_{k|k+1}$ e $\hat{z}_{k+1|k+1}$ podem ser reescritas como

$$\hat{z}_{k|k+1} = \hat{z}_{k|k} + \tilde{Z}_{k|k} \mathcal{F}_k^T \mathcal{C}_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} (y_{k+1} - \mathcal{C}_{k+1} \hat{z}_{k+1|k+1}),$$

$$\hat{z}_{k+1|k+1} = \mathcal{F}_k \hat{z}_{k|k} + \tilde{Z}_{k+1|k+1} \mathcal{C}_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} (y_{k+1} - \mathcal{C}_{k+1} \mathcal{F}_k \hat{z}_{k|k}),$$

com as respectivas matrizes de variâncias

$$\tilde{Z}_{k|k+1} = \left(\tilde{Z}_{k|k}^{-1} + \mathcal{F}_k^T Q_k^{-1} \mathcal{F}_k \right)^{-1} + \left(\tilde{Z}_{k|k}^{-1} + \mathcal{F}_k^T Q_k^{-1} \mathcal{F}_k \right)^{-1} \mathcal{F}_k^T Q_k^{-1} \\ \tilde{Z}_{k+1|k+1} Q_k^{-1} \mathcal{F}_k \left(\tilde{Z}_{k|k}^{-1} + \mathcal{F}_k^T Q_k^{-1} \mathcal{F}_k \right)^{-1},$$

$$\tilde{Z}_{k+1|k+1} = \left(\left(Q_k + \mathcal{F}_k \tilde{Z}_{k|k} \mathcal{F}_k^T \right)^{-1} + \mathcal{C}_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \mathcal{C}_{k+1} \right)^{-1},$$

as quais não foram apresentadas em [25].

6.4 Conclusões Parciais

Neste capítulo, a abordagem determinística baseada na combinação das técnicas de mínimos quadrados ponderados [74] e funções penalidade [83] foi aplicada para a obtenção das estimativas ótimas do Filtro de Kalman nas formas preditora e filtrada para SLSM. As expressões encontradas são equivalentes àquelas propostas por [25]. Além disso, o arranjo é idêntico ao da solução do problema de estimativas de estados para o SLSM revisitado no Capítulo 4.

Valendo-se da revisão desse problema fundamental, a meta é investigar no próximo capítulo a versão robusta para o caso em que o SLSM esteja sujeito também a incertezas paramétricas. Uma reinterpretação do problema nominal será adotada para o desenvolvimento de um procedimento para a dedução de estimativas de estados recursivas robustas por meio da extensão do problema de minimização no quadro abaixo.

$$\hat{z}_{k+1|k}^\mu := \hat{z}_{\mu,k+1}^* \quad \text{e} \quad \hat{z}_{k|k}^\mu := \hat{z}_{\mu,k}^*,$$

$$\{\hat{z}_{\mu,k}^*; \hat{z}_{\mu,k+1}^*\} \in \arg \min_{\{\hat{\psi}_k, \hat{\varphi}_k, \hat{z}_k, \hat{z}_{k+1}\}} \left\{ \|\hat{z}_k - \hat{z}_{k|k-1}\|_{\tilde{Z}_{k|k-1}^{-1}}^2 + \|\hat{\psi}_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|\hat{\varphi}_k\|_{R_k^{-1}}^2 + \right.$$

$$\left. \mu \left(\|\hat{z}_{k+1} - \mathcal{F}_k \hat{z}_k - \hat{\psi}_k\|^2 + \|y_k - \mathcal{C}_k \hat{z}_k - \hat{\varphi}_k\|^2 \right) \right\}, \quad \mu > 0.$$

CAPÍTULO 7

FILTRO DE KALMAN ROBUSTO PARA SLSM INDEPENDENTE DO MODO

A abordagem baseada na combinação de mínimos quadrados incertos e função penalidade mostrou-se abrangente o suficiente para resolver os problemas de controle e filtragem para SLSM incertos quando os modos de operações são observados. A potencialidade desse feramental combinada a reinterpretação do modelo linear por meio de um sistema aumentado, conforme proposto por [25], permitirá desenvolver também estimativas de estados para SLSM incertos quando os modos de operações não são observados.

Novamente, o critério adotado consiste na extensão do funcional quadrático penalizado projetado para a dedução do estimador nominal recursivo revisitado no Capítulo 6. O problema de otimização obtido é do tipo min-max, o qual assegura a obtenção de estimativas ótimas diante da máxima influência de incertezas.

As estimativas de estados são apresentadas em um arranjo de blocos matriciais com características estruturais semelhantes ao do estimador de estados desenvolvido no Capítulo 5. A estimativa na forma preditora também é reescrita adotando o estilo de apresentação das equações que compõem o Filtro de Kalman padrão, uma representação estendida se comparada à

forma de blocos matriciais. Vale ressaltar que o diferencial dessas estimativas de estados recursivas robustas é a união da simplicidade do Filtro de Kalman com o aspecto de robustez proporcionado pela combinação de mínimos quadrados regularizados incertos e função penalidade.

7.1 Formulação do Problema

Considere o SLSM sob a influência de incertezas paramétricas

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (F_{\theta_k,k} + \delta F_{\theta_k,k}) x_k + G_{\theta_k,k} w_k, \\ y_k &= (C_{\theta_k,k} + \delta C_{\theta_k,k}) x_k + D_{\theta_k,k} v_k, \end{aligned} \quad (7.1)$$

para todo $k = 0, 1, \dots$, no qual $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $y_k \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de medida, e $w_k \in \mathbb{R}^m$ e $v_k \in \mathbb{R}^r$ são ruídos aleatórios mutuamente independentes, ambos com média zero e variância unitária. As matrizes de parâmetros nominais $F_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{p \times r}$ são consideradas conhecidas, e as matrizes de incertezas $\delta F_{\theta_k,k}$ e $\delta C_{\theta_k,k}$ são definidas por

$$\begin{aligned} \delta F_{\theta_k,k} &= M_{\theta_k,k} \Delta_{\theta_k,k}^1 E_{F_{\theta_k,k}}, \\ \delta C_{\theta_k,k} &= N_{\theta_k,k} \Delta_{\theta_k,k}^2 E_{C_{\theta_k,k}}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

com $\|\Delta_{\theta_k,k}^q\| \leq 1$, $q = 1, 2$ e para todo (θ_k, k) . Analogamente ao Capítulo 4, o processo $\{\theta_k\}$ é uma cadeia de Markov de tempo discreto com os estados admitindo valores no conjunto finito $\Theta = \{1, \dots, s\}$ e com matriz de probabilidades de transição $\mathbb{P}_k = [p_{ij,k}]$ e $Prob[\theta_k = i] = \pi_{i,k}$. As sequências $\{w_k\}$, $\{v_k\}$ e a cadeia de Markov $\{\theta_k\}$ são mutuamente independentes. Adicionalmente, x_0 e θ_0 são variáveis aleatórias independentes com $\mathbb{E}\{x_0\} = \mu_0$ e $\mathbb{E}\{x_0 x_0^T\} = \mathbb{Z}_0$. É considerado novamente que $D_{i,k} D_{i,k}^T \succ 0$ para todo $i \in \Theta$.

Considerando que o parâmetro de salto θ_k não é observado a todo instante k , o problema consiste em determinar a melhor estimativa do vetor de estado x_k baseado nas observações $\{y_k\}$ diante da presença de incertezas paramétricas. Para tanto, essa questão da estimativa robusta será abordado do ponto de vista determinístico, como uma extensão do caso sem incertezas investigado no Capítulo 6.

Problema de Estimativas de Estados Robustas: Para cada $k \geq 0$, determinar as estimativa de estados $\hat{z}_{\mu,k+1}$ e $\hat{z}_{\mu,k}$ por meio da solução do problema de otimização:

$$\min_{\{\hat{\xi}_k, \hat{\varphi}_k, \hat{z}_k, \hat{z}_{k+1}\}} \max_{\{\delta \mathcal{F}_k, \delta \mathcal{C}_k\}} \left\{ \|\hat{z}_k - \hat{z}_{k|k-1}\|_{\bar{Z}_{k|k-1}^{-1}}^2 + \|\hat{\xi}_k\|_{\mathcal{Q}_k^{-1}}^2 + \|\hat{\varphi}_k\|_{\mathcal{R}_k^{-1}}^2 + \right. \\ \left. \mu \left(\|\hat{z}_{k+1} - (\mathcal{F}_k + \delta \mathcal{F}_k)\hat{z}_k - \hat{\xi}_k\|^2 + \|y_k - (\mathcal{C}_k + \delta \mathcal{C}_k)\hat{z}_k - \hat{\varphi}_k\|^2 \right) \right\}, \quad \mu > 0.$$

Detalhes a respeito da construção desse critério serão apresentadas no desenvolvimento deste capítulo.

7.1.1 Sistema Incerto Aumentado

Novamente, ao definir

$$z_k := \begin{bmatrix} z_{1,k} \\ \vdots \\ z_{s,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{sn},$$

sendo $z_{j,k} := x_k 1_{\{\theta_k=j\}} \in \mathbb{R}^n$ para $j \in \Theta$, a representação de (7.1)-(7.2) nessas variáveis resulta em

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= (\mathcal{F}_k + \delta \mathcal{F}_k) z_k + \bar{\mathcal{M}}_{k+1} z_k + \vartheta_k, \\ y_k &= (\mathcal{C}_k + \delta \mathcal{C}_k) z_k + D_{\theta_k,k} v_k, \end{aligned} \tag{7.3}$$

com

$$\mathcal{F}_k = \begin{bmatrix} p_{11,k} F_{1,k} & p_{21,k} F_{2,k} & \cdots & p_{s1,k} F_{s,k} \\ p_{12,k} F_{1,k} & p_{22,k} F_{2,k} & \cdots & p_{s2,k} F_{s,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1s,k} F_{1,k} & p_{2s,k} F_{2,k} & \cdots & p_{ss,k} F_{s,k} \end{bmatrix}, \quad \delta \mathcal{F}_k = \begin{bmatrix} p_{11,k} \delta F_{1,k} & p_{21,k} \delta F_{2,k} & \cdots & p_{s1,k} \delta F_{s,k} \\ p_{12,k} \delta F_{1,k} & p_{22,k} \delta F_{2,k} & \cdots & p_{s2,k} \delta F_{s,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1s,k} \delta F_{1,k} & p_{2s,k} \delta F_{2,k} & \cdots & p_{ss,k} \delta F_{s,k} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathcal{M}}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1_{\{\theta(k+1)=1\}} \left[(F_{1,k} + \delta F_{1,k}) & \cdots & (F_{s,k} + \delta F_{s,k}) \right] - \left[p_{11,k} (F_{1,k} + \delta F_{1,k}) & \cdots & p_{s1,k} (F_{s,k} + \delta F_{s,k}) \right] \\ 1_{\{\theta(k+1)=2\}} \left[(F_{1,k} + \delta F_{1,k}) & \cdots & (F_{s,k} + \delta F_{s,k}) \right] - \left[p_{12,k} (F_{1,k} + \delta F_{1,k}) & \cdots & p_{s2,k} (F_{s,k} + \delta F_{s,k}) \right] \\ \vdots \\ 1_{\{\theta(k+1)=s\}} \left[(F_{1,k} + \delta F_{1,k}) & \cdots & (F_{s,k} + \delta F_{s,k}) \right] - \left[p_{1s,k} (F_{1,k} + \delta F_{1,k}) & \cdots & p_{ss,k} (F_{s,k} + \delta F_{s,k}) \right] \end{bmatrix},$$

$$\vartheta_k = \begin{bmatrix} G_{\theta_k,k} w_k 1_{\{\theta(k+1)=1\}} \\ G_{\theta_k,k} w_k 1_{\{\theta(k+1)=2\}} \\ \vdots \\ G_{\theta_k,k} w_k 1_{\{\theta(k+1)=s\}} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C}_k = \begin{bmatrix} C_{1,k} & C_{2,k} & \cdots & C_{s,k} \end{bmatrix}, \quad \delta\mathcal{C}_k = \begin{bmatrix} \delta C_{1,k} & \delta C_{2,k} & \cdots & \delta C_{s,k} \end{bmatrix}.$$

Os passos para a obtenção desse sistema aumentado incerto são análogos aos do Capítulo 6. Adicionalmente, é considerada a decomposição das matrizes aumentadas em duas parcelas: a nominal e a incerta. Com base no modelo de incertezas (7.2), as matrizes de elementos incertos $\delta\mathcal{F}_k$ e $\delta\mathcal{C}_k$ podem ser reescritas na forma estruturada (1.18) com os parâmetros correspondentes agrupados conforme

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{F}_k &= (\mathbb{P}^T \otimes I_n) \text{diag}[\delta F_{j,k}]_{j=1}^s \\ &= ((\mathbb{P}^T \otimes I_n) \text{diag}[M_{j,k}]_{j=1}^s) (\text{diag}[\Delta_{j,k}^1]_{j=1}^s) (\text{diag}[E_{F_{j,k}}]_{j=1}^s) \\ &= M_{\mathcal{F}_k} \Delta_k^{\mathcal{F}} E_{\mathcal{F}_k} \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{C}_k &= \begin{bmatrix} \delta C_{1,k} & \delta C_{2,k} & \cdots & \delta C_{s,k} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N_{1,k} & N_{2,k} & \cdots & N_{s,k} \end{bmatrix} (\text{diag}[\Delta_{j,k}^2]_{j=1}^s) (\text{diag}[E_{C_{j,k}}]_{j=1}^s) \\ &= N_{\mathcal{C}_k} \Delta_k^{\mathcal{C}} E_{\mathcal{C}_k}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Definindo

$$\begin{aligned} \xi_k &:= \bar{\mathcal{M}}_{k+1} z_k + \vartheta_k, \\ \varphi_k &:= D_{\theta_k,k} v_k, \end{aligned} \quad (7.6)$$

para todo k , o sistema (7.3) pode ser reescrito na forma de um sistema linear no espaço de estado

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= (\mathcal{F}_k + \delta\mathcal{F}_k) z_k + \xi_k, \\ y_k &= (\mathcal{C}_k + \delta\mathcal{C}_k) z_k + \varphi_k, \end{aligned} \quad (7.7)$$

com as parcelas ξ_k e φ_k interpretadas como ruídos aditivos das equações de estado e de saída do sistema, respectivamente. Na ausência de incertezas paramétricas, *i.e.*, $M_{j,k} \equiv 0$, $E_{F_{j,k}} \equiv 0$, $N_{j,k} \equiv 0$ e $E_{C_{j,k}} \equiv 0$ para todo i e para todo k , o sistema aumentado (7.3)-(7.5) reduz-se ao

modelo nominal (6.16). Um resultado, análogo ao Lema 6.3.1, estabelecendo as médias e as covariâncias das variáveis aleatórias ξ_k e φ_k é enunciado a seguir.

Lema 7.1.1. *Sejam $\{w_k\}$ e $\{v_k\}$ sequências de ruídos aleatórios satisfazendo:*

- $\mathbb{E}\{w_k\} = 0$, $\mathbb{E}\{w_k w_k^T\} = I$ e $\mathbb{E}\{w_k w_l^T\} = 0$ para $k \neq l$;
- $\mathbb{E}\{v_k\} = 0$, $\mathbb{E}\{v_k v_k^T\} = I$ e $\mathbb{E}\{v_k v_l^T\} = 0$ para $k \neq l$;
- $\mathbb{E}\{w_k v_l^T\} = 0$ para todo k e l .

Considere as sequências $\{\xi_k\}$ e $\{\varphi_k\}$ geradas por de

$$\begin{aligned}\xi_k &:= \bar{\mathcal{M}}_{k+1} z_k + \vartheta_k, \\ \varphi_k &:= D_{\theta_k, k} v_k.\end{aligned}\tag{7.8}$$

Então, para todo k e l :

$$(i) - \mathbb{E}\{\xi_k\} = 0 \text{ e } \mathbb{E}\{\varphi_k\} = 0,$$

$$\begin{aligned}(ii) - \mathbb{E}\{\xi_k \xi_k^T\} &= \text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} (F_{i,k} + \delta F_{i,k}) Z_{i,k} (F_{i,k} + \delta F_{i,k})^T \right] \\ &\quad - (\mathcal{F}_k + \delta \mathcal{F}_k) Z_k (\mathcal{F}_k + \delta \mathcal{F}_k)^T + \text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T \right] \succ 0,\end{aligned}$$

sendo que Z_k e $Z_{j,k}$ referem-se a $Z_k := \mathbb{E}\{z_k z_k^T\} = \text{diag}[Z_{j,k}]$ e $Z_{j,k} := \mathbb{E}\{z_{j,k} z_{j,k}^T\}$ com $Z_{j,k}$ dado pela seguinte equação recursiva:

$$Z_{j,k+1} = \sum_{i=1}^s p_{ij,k} (F_{i,k} + \delta F_{i,k}) Z_{i,k} (F_{i,k} + \delta F_{i,k})^T + \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T.$$

$$(iii) - \mathbb{E}\{\varphi_k \varphi_k^T\} = \sum_{i=1}^s \pi_{i,k} D_{i,k} D_{i,k}^T,$$

$$(iv) - \mathbb{E}\{\xi_k \xi_l^T\} = 0 \text{ e } \mathbb{E}\{\varphi_k \varphi_l^T\} = 0, \text{ se } k \neq l,$$

$$(v) - \mathbb{E}\{\xi_k z_k^T\} = 0, \mathbb{E}\{\varphi_k z_k^T\} = 0 \text{ e } \mathbb{E}\{\xi_k \varphi_l^T\} = 0.$$

Demonstração. Análoga ao caso sem incertezas supondo que $G_{j,k}G_{j,k}^T \succ 0$ para todo $j \in \Theta$. A conclusão a respeito da positividade de $\mathbb{E}\{\xi_k\xi_k^T\}$, segue de:

- (i) - $\text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T \right] \succ 0$,
- (ii) - $Z_{j,k} \succ 0$ para todo j ,
- (iii) - $\text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} (F_{i,k} + \delta F_{i,k}) Z_{i,k} (F_{i,k} + \delta F_{i,k})^T \right] - (\mathcal{F}_k + \delta \mathcal{F}_k) Z_k (\mathcal{F}_k + \delta \mathcal{F}_k)^T \succeq 0$,

da mesma forma como provado em [33]. $\square$

De acordo com o Corolário A.2.1, assim como em [43, 99], é possível estabelecer para cada k e $j \in \Theta$ os limitantes inferiores e superiores de $\mathbb{E}\{\xi_k\xi_k^T\}$ e $Z_{j,k+1}$. Primeiramente, para $Z_{j,k+1}$ tem-se que¹

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \left(F_{i,k} (Z_{i,k}^{-1} + \alpha_{I,i,k}^{-1} E_{F_{i,k}}^T E_{F_{i,k}})^{-1} F_{i,k}^T - \alpha_{I,i,k} M_{i,k} M_{i,k}^T \right) + \\ & \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T \preceq Z_{j,k+1} \preceq \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T + \\ & \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \left(F_{i,k} (Z_{i,k}^{-1} - \alpha_{S,i,k}^{-1} E_{F_{i,k}}^T E_{F_{i,k}})^{-1} F_{i,k}^T + \alpha_{S,i,k} M_{i,k} M_{i,k}^T \right). \end{aligned}$$

Define-se então para cada $j \in \Theta$ e todo instante k as seguintes expressões recursivas:

$$\begin{aligned} Z_{I,j,k+1} &:= \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \left(F_{i,k} (Z_{I,i,k}^{-1} + \alpha_{I,i,k}^{-1} E_{F_{i,k}}^T E_{F_{i,k}})^{-1} F_{i,k}^T - \alpha_{I,i,k} M_{i,k} M_{i,k}^T \right) + \\ & \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T, \quad Z_{I,j,0} = \mathbb{Z}_0 \pi_j(0); \\ Z_{S,j,k+1} &:= \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \left(F_{i,k} (Z_{S,i,k}^{-1} - \alpha_{S,i,k}^{-1} E_{F_{i,k}}^T E_{F_{i,k}})^{-1} F_{i,k}^T + \alpha_{S,i,k} M_{i,k} M_{i,k}^T \right) + \\ & \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T, \quad Z_{S,j,0} = \mathbb{Z}_0 \pi_j(0), \end{aligned}$$

¹Os índices subscritos I e S identificam os elementos matriciais e escalares associados aos limitantes inferior e superior, respectivamente.

que, por construção, são tais que $Z_{I,j,k+1} \preceq Z_{j,k+1} \preceq Z_{S,j,k+1}$ para todo $j \in \Theta$ e todo instante k .

Observação 7.1.1. Considere $Z_{j,0}^{nom} = Z_{j,0}$ para todo $j \in \Theta$. É imediato que

$$Z_{I,j,k+1} \preceq Z_{j,k+1}^{nom} \preceq Z_{S,j,k+1},$$

no qual $Z_{j,k+1}^{nom}$ refere-se a $\mathbb{E}\{z_{j,k}z_{j,k}^T\}$ da versão sem incertezas, i.e.,

$$Z_{j,k+1}^{nom} := \sum_{i=1}^s p_{ij,k} F_{i,k} Z_{i,k} F_{i,k}^T + \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T.$$

Na ausência de incertezas (i.e., $M_{j,k} \equiv 0$ e $E_{F_{j,k}} \equiv 0$ para todo j e k) tem-se ainda que

$$Z_{I,j,k+1} = Z_{j,k+1}^{nom} = Z_{j,k+1} = Z_{S,j,k+1}.$$

Com relação à $\mathbb{E}\{\xi_k \xi_k^T\}$, segundo as definições de $Z_{I,j,k+1}$ e $Z_{S,j,k+1}$, é possível estabelecer também os limitantes inferior e superior de $\mathbb{E}\{\xi_k \xi_k^T\}$, i.e.,

$$\mathcal{Q}_{I,k} \preceq \mathbb{E}\{\xi_k \xi_k^T\} \preceq \mathcal{Q}_{S,k},$$

dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{I,k} = & \text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} \left(F_{i,k} (Z_{I,i,k}^{-1} + \alpha_{I,i,k}^{-1} E_{F_{i,k}}^T E_{F_{i,k}})^{-1} F_{i,k}^T - \alpha_{I,i,k} M_{i,k} M_{i,k}^T \right) \right] - \\ & (\mathcal{F}_k (Z_{S,k}^{-1} - \beta_{S,i,k}^{-1} E_{\mathcal{F}_k}^T E_{\mathcal{F}_k})^{-1} \mathcal{F}_k^T + \beta_{S,i,k} M_{\mathcal{F}_k} M_{\mathcal{F}_k}^T) + \text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{S,k} = & \text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} \left(F_{i,k} (Z_{S,i,k}^{-1} - \alpha_{S,i,k}^{-1} E_{F_{i,k}}^T E_{F_{i,k}})^{-1} F_{i,k}^T + \alpha_{S,i,k} M_{i,k} M_{i,k}^T \right) \right] - \\ & (\mathcal{F}_k (Z_{I,k}^{-1} + \beta_{I,i,k}^{-1} E_{\mathcal{F}_k}^T E_{\mathcal{F}_k})^{-1} \mathcal{F}_k^T - \beta_{I,i,k} M_{\mathcal{F}_k} M_{\mathcal{F}_k}^T) + \text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T \right], \end{aligned}$$

com $Z_{I,k} = \text{diag}[Z_{I,j,k}]$ e $Z_{S,k} = \text{diag}[Z_{S,j,k}]$.

As condições iniciais são definidas conforme a versão nominal, e os escalares $\alpha_{I,i,k}$, $\alpha_{S,i,k}$, $\beta_{I,i,k}$ e $\beta_{S,i,k}$ são calculados de forma apropriada a fim de garantir a invertibilidade.

7.2 Solução do Problema

Do ponto de vista do projeto do filtro baseado na natureza incerta do modelo, considere as matrizes de ponderações, de acordo com o Lema 7.1.1,

$$\mathcal{Q}_k := \mathcal{Q}_{S,k} \succeq \mathbb{E}\{\xi_k \xi_k^T\} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_k := \sum_{i=1}^s \pi_{i,k} D_{i,k} D_{i,k}^T.$$

Dado o conjunto de medidas $\{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k\}$, as estimativas de z_k e z_{k+1} serão obtidas valendo-se da otimização de um funcional quadrático penalizado. Inspirado no problema de estimativa para o sistema sem incertezas, introduz-se para cada instante k o problema de estimativas de estados sob a forma do seguinte problema de otimização:

$$\min_{\{\hat{\xi}_k, \hat{\varphi}_k, \hat{z}_k, \hat{z}_{k+1}\}} \max_{\{\delta \mathcal{F}_k, \delta \mathcal{C}_k\}} \left\{ \|\hat{z}_k - \hat{z}_{k|k-1}\|_{\tilde{Z}_{k|k-1}^{-1}}^2 + \|\hat{\xi}_k\|_{\mathcal{Q}_k^{-1}}^2 + \|\hat{\varphi}_k\|_{\mathcal{R}_k^{-1}}^2 + \right. \quad (7.9)$$

$$\left. \mu \left(\|\hat{z}_{k+1} - (\mathcal{F}_k + \delta \mathcal{F}_k) \hat{z}_k - \hat{\xi}_k\|^2 + \|y_k - (\mathcal{C}_k \hat{z}_k + \delta \mathcal{C}_k) - \hat{\varphi}_k\|^2 \right) \right\}, \quad \mu > 0,$$

o qual pode ser reescrito nos moldes de (1.16)-(1.18) como

$$\min_{\{e_k, \hat{\xi}_k, \hat{\varphi}_k, \hat{z}_k, \hat{z}_{k+1}\}} \max_{\{\delta \mathcal{F}_k, \delta \mathcal{C}_k\}} \left\{ \mathcal{J}_k^\mu(e_k, \hat{\xi}_k, \hat{\varphi}_k, \hat{z}_k, \hat{z}_{k+1}, \delta \mathcal{F}_k, \delta \mathcal{C}_k) \right\}, \quad (7.10)$$

sendo

$$\mathcal{J}_k^\mu(e_k, \hat{\xi}_k, \hat{\varphi}_k, \hat{z}_k, \hat{z}_{k+1}, \delta \mathcal{F}_k, \delta \mathcal{C}_k) := \begin{bmatrix} e_k \\ \hat{\xi}_k \\ \hat{\varphi}_k \\ \hat{z}_k \\ \hat{z}_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{k|k-1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ \hat{\xi}_k \\ \hat{\varphi}_k \\ \hat{z}_k \\ \hat{z}_{k+1} \end{bmatrix} +$$

$$\left(\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & I & 0 & \mathcal{F}_k^\delta & -I \\ 0 & 0 & I & \mathcal{C}_k^\delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ \hat{\xi}_k \\ \hat{\varphi}_k \\ \hat{z}_k \\ \hat{z}_{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\hat{z}_{k|k-1} \\ 0 \\ y_k \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \mu I & 0 & 0 \\ 0 & \mu I & 0 \\ 0 & 0 & \mu I \end{bmatrix} (\bullet), \quad (7.11)$$

com $\mathcal{F}_k^\delta := (\mathcal{F}_k + \delta\mathcal{F}_k)$, $\mathcal{C}_k^\delta := (\mathcal{C}_k + \delta\mathcal{C}_k)$, $e_k := (\hat{z}_k - \hat{z}_{k|k-1})$ e $\mu > 0$ o parâmetro de penalidade [83].

De acordo com a Proposição 1.2.5, a solução ótima para cada $\mu > 0$ compõe a solução do sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{k|k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1}I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & \mathcal{F}_k & -I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & \mathcal{C}_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_k^{-1}I & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{\mathcal{F}_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_k^{-1}I & 0 & 0 & 0 & E_{\mathcal{C}_k} & 0 \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & \mathcal{F}_k^T & \mathcal{C}_k^T & E_{\mathcal{F}_k}^T & E_{\mathcal{C}_k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ e_k \\ \hat{\xi}_k \\ \hat{\varphi}_k \\ \hat{z}_k \\ \hat{z}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\hat{z}_{k|k-1} \\ 0 \\ y_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com $\hat{\lambda}_k$ dado de acordo com [93] e

$$\Lambda_1 := \mu I + \mu M_{\mathcal{F}_k} (\hat{\lambda}_k I - \mu M_{\mathcal{F}_k}^T M_{\mathcal{F}_k})^{-1} \mu M_{\mathcal{F}_k}^T = \left(\mu^{-1} I - \hat{\lambda}_k^{-1} M_{\mathcal{F}_k} M_{\mathcal{F}_k}^T \right)^{-1},$$

$$\Lambda_2 := \mu I + \mu N_{\mathcal{C}_k} (\hat{\lambda}_k I - \mu N_{\mathcal{C}_k}^T N_{\mathcal{C}_k})^{-1} \mu N_{\mathcal{C}_k}^T = \left(\mu^{-1} I - \hat{\lambda}_k^{-1} N_{\mathcal{C}_k} N_{\mathcal{C}_k}^T \right)^{-1}.$$

Análise similar àquela desenvolvida no Capítulo 5, quando $\mu \rightarrow +\infty$, resulta em

$$\mu_1^{-1} \rightarrow 0, \quad \hat{\lambda}_k^{-1} \rightarrow 0, \quad \Lambda_1^{-1} \rightarrow 0, \quad \Lambda_2^{-1} \rightarrow 0,$$

e, conseqüentemente, as estimativas de estados robustas $\hat{z}_{k|k}^r$ e $\hat{z}_{k+1|k}^r$ e as respectivas matrizes de variâncias do erro de estimativa $\tilde{Z}_{k|k}$ e $\tilde{Z}_{k+1|k}$ são obtidas. As estimativas recursivas robustas de estado do SLSM original (7.1)-(7.2) são dadas por

$$\hat{x}_{k|k}^r = \sum_{i=1}^s \hat{z}_{i,k|k}^r \text{ e } \hat{x}_{k+1|k}^r = \sum_{i=1}^s \hat{z}_{i,k+1|k}^r.$$

Proposição 7.2.1. *As estimativas robustas $\hat{x}_{k+1|k}^r$ e $\hat{x}_{k|k}^r$ são dadas por*

$$\hat{x}_{k+1|k}^r = \sum_{i=1}^s \hat{z}_{i,k+1|k}^r \text{ e } \hat{x}_{k|k}^r = \sum_{i=1}^s \hat{z}_{i,k|k}^r,$$

com as estimativas $\hat{z}_{k+1|k}^r$ e $\hat{z}_{k|k}^r$ atualizadas conforme

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_{k|k}^r & \tilde{Z}_{k|k}^r & * \\ \hat{z}_{k+1|k}^r & * & \tilde{Z}_{k+1|k}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{k|k-1}^r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{I}_{\hat{\mathcal{F}}} & 0 & \hat{\mathcal{F}}_k & -\mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{I}_{\hat{\mathcal{C}}} & \hat{\mathcal{C}}_k & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & \mathcal{I}_{\hat{\mathcal{F}}}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & \mathcal{I}_{\hat{\mathcal{C}}}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & \hat{\mathcal{F}}_k^T & \hat{\mathcal{C}}_k^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{I}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\hat{z}_{k|k-1}^r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{Y}_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix},$$

sendo $\mathcal{I}_{\hat{\mathcal{F}}} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $\hat{\mathcal{F}}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_k \\ E_{\mathcal{F}_k} \end{bmatrix}$, $\mathcal{I}_{\hat{\mathcal{C}}} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $\hat{\mathcal{C}}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_k \\ E_{\mathcal{C}_k} \end{bmatrix}$, $\mathcal{Y}_k = \begin{bmatrix} y_k \\ 0 \end{bmatrix}$, e as matrizes de $\mathcal{R}_k$ e Q_k atualizadas conforme:

$$\mathcal{R}_k := \sum_{i=1}^s \pi_{i,k} D_{i,k} D_{i,k}^T,$$

$$Q_k = \text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} \left(F_{i,k} (Z_{S,i,k}^{-1} - \alpha_{S,i,k}^{-1} E_{F_{i,k}}^T E_{F_{i,k}})^{-1} F_{i,k}^T + \alpha_{S,i,k} M_{i,k} M_{i,k}^T \right) \right] -$$

$$(\mathcal{F}_k(Z_{I,k}^{-1} + \beta_{I,i,k}^{-1} E_{\mathcal{F}_k}^T E_{\mathcal{F}_k})^{-1} \mathcal{F}_k^T - \beta_{I,i,k} M_{\mathcal{F}_k} M_{\mathcal{F}_k}^T) + \text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T \right],$$

com $Z_{I,k} = \text{diag}[Z_{I,j,k}]$ e $Z_{S,k} = \text{diag}[Z_{S,j,k}]$,

$$Z_{I,j,k+1} = \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \left(F_{i,k} (Z_{I,i,k}^{-1} + \alpha_{I,i,k}^{-1} E_{F_{i,k}}^T E_{F_{i,k}})^{-1} F_{i,k}^T - \alpha_{I,i,k} M_{i,k} M_{i,k}^T \right) + \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T,$$

$$Z_{S,j,k+1} = \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \left(F_{i,k} (Z_{S,i,k}^{-1} - \alpha_{S,i,k}^{-1} E_{F_{i,k}}^T E_{F_{i,k}})^{-1} F_{i,k}^T + \alpha_{S,i,k} M_{i,k} M_{i,k}^T \right) + \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T,$$

e os escalares $\alpha_{I,i,k} > 0$, $\beta_{I,i,k} > 0$ e $\alpha_{S,i,k} > \|E_{F_{i,k}} Z_{S,i,k} E_{F_{i,k}}^T\|$ são calculados de forma apropriada a fim de garantir a invertibilidade.

Como característica da abordagem adotada, as estimativas de estados robustas e as matrizes de variâncias são apresentadas em uma estrutura unificada, semelhante à apresentada no Capítulo 5. Novamente, a solução proposta depende das matrizes de parâmetros e de ponderações, as quais são sempre conhecidas. No entanto, nesse caso, o ajuste adequado dos escalares $\alpha_{I,i,k}$, $\alpha_{S,i,k}$ e $\beta_{I,i,k}$ para o cálculo da matriz $\mathcal{Q}_k$ torna-se necessário a cada instante.

Observação 7.2.1. A expressão da estimativa na forma preditora também pode ser reescrita adotando o estilo de apresentação exibido no Lema 6.3.2, i.e.,

$$\hat{z}_{k+1|k}^r = \Upsilon_{k+1} \left(-\hat{\mathcal{F}}_k \hat{z}_{k|k-1}^r - \hat{\mathcal{F}}_k \tilde{Z}_{k|k-1}^r \hat{\mathcal{C}}_k^T \left(\hat{\mathcal{C}}_k P_{k|k-1}^r \hat{\mathcal{C}}_k^T + \mathcal{I}_{\hat{\mathcal{C}}} \mathcal{R}_k \mathcal{I}_{\hat{\mathcal{C}}}^T \right)^{-1} \right) \left(\mathcal{Y}_k - \hat{\mathcal{C}}_k \hat{z}_{k|k-1}^r \right),$$

sendo $\Upsilon_{k+1} = (\mathcal{I}^T \Xi_k^{-1} \mathcal{I})^{-1} \mathcal{I}^T \Xi_k^{-1}$, com

$$\Xi_k = \hat{\mathcal{F}}_k \tilde{Z}_{k|k-1}^r \hat{\mathcal{F}}_k^T - \hat{\mathcal{F}}_k \tilde{Z}_{k|k-1}^r \hat{\mathcal{C}}_k^T \left(\hat{\mathcal{C}}_k \tilde{Z}_{k|k-1}^r \hat{\mathcal{C}}_k^T + \mathcal{I}_{\hat{\mathcal{C}}} \mathcal{R}_k \mathcal{I}_{\hat{\mathcal{C}}}^T \right)^{-1} \hat{\mathcal{C}}_k \tilde{Z}_{k|k-1}^r \hat{\mathcal{F}}_k^T + \mathcal{I}_{\hat{\mathcal{F}}} \mathcal{Q}_k \mathcal{I}_{\hat{\mathcal{F}}}^T,$$

e $\tilde{Z}_{k+1|k}^r = (\mathcal{I}^T \Xi_k^{-1} \mathcal{I})^{-1}$.

7.2.1 Estabilidade

Considere o modelo com parâmetros invariantes no tempo

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (F_{\theta_k} + \delta F_{\theta_k, k}) x_k + G_{\theta_k} w_k, \\ y_k &= (C_{\theta_k} + \delta C_{\theta_k, k}) x_k + D_{\theta_k} v_k, \end{aligned}$$

com matriz de probabilidades $\mathbb{P} = [p_{ij}]$, no qual somente a matriz de contração $\Delta_{\theta_k, k}^X$ varia com o tempo.

Suponha que a cadeia de Markov $\{\theta_k\}$ seja ergódica². De acordo com [33], $\mathcal{R}_k \rightarrow \mathcal{R}^*$ quando $k \rightarrow +\infty$. No entanto, a convergência de $\mathcal{Q}_k$ esbarra nas convergências de $Z_{I, j, k+1}$ e $Z_{S, j, k+1}$ para cada $j \in \Theta$. Para o caso de $Z_{I, j, k+1}$, a situação é de certa forma contornável. Supondo que a desigualdade $\sum_{i=1}^s (-\alpha_{I, i, k} M_i M_i^T + p_{ij} \pi_i G_i G_i^T) \succ 0$ seja satisfeita para todo k , então é possível calcular $Z_{I, j, k+1}$ recursivamente, e a garantia de convergência é dada por condições análogas às das equações de Riccati, veja [78]. Por outro lado, a convergência de $Z_{S, j, k+1}$ é problemática. Alguns procedimentos em termos de DMLs para o cálculo de soluções em regime têm sido investigados [60, 67, 106, 113]. Conforme proposto por [99], por exemplo, para cada $j \in \Theta$, é possível determinar $Z_{S, j}$ por meio de:

$$\min \{tr(Z_{S, j})\}, \quad (7.12)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} Z_{S, j} - \sum_{i=1}^s p_{ij} F_i Z_{S, i} F_i^T - \Omega_{1, j} - \Omega_{2, j} & p_{1j}^{1/2} F_1 Z_{S, 1} E_{F_1}^T & \cdots & p_{sj}^{1/2} F_s Z_{S, s} E_{F_s}^T \\ p_{1j}^{1/2} E_{F_1} Z_{S, 1} F_1^T & \alpha_1 I - E_{F_1} Z_{S, 1} E_{F_1}^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{sj}^{1/2} E_{F_s} Z_{S, s} F_s^T & 0 & \cdots & \alpha_s I - E_{F_s} Z_{S, s} E_{F_s}^T \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\text{no qual } \Omega_{1, j} := \sum_{i=1}^s \alpha_i p_{ij} M_{F_j} M_{F_j}^T \text{ e } \Omega_{2, j} := \sum_{j=1}^s p_{ij} \pi_j G_j G_j^T.$$

²A cadeia de Markov $\{\theta_k\}$ é ergódica se todo estado é alcançável a partir de qualquer estado inicial. Se $\{\theta_k\}$ é ergódica então para toda distribuição inicial $\nu = [\nu_1 \cdots \nu_s]$ existe uma única distribuição estacionária $\pi = [\pi_1 \cdots \pi_s]$ tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \nu \mathbb{P}^k = \pi$. Isto é, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \pi_{i, k} = \pi_i > 0$, para todo $i \in \Theta$.

O cálculo recursivo do limitante superior com garantia de convergência permanece sem solução até o momento. Para o que se propõe a seguir, suponha, por ora, a existência de $\mathcal{Q}^*$ tal que $\mathcal{Q}_k \preceq \mathcal{Q}^*$ para todo k . O objetivo é mostrar que as estimativas robustas convergem para uma estimativa robusta estável em regime permanente quando os parâmetros são invariantes no tempo.

Lema 7.2.1. *As expressões de $\hat{z}_{k+1|k}^r$ e $\tilde{Z}_{k+1|k}^r$ na Proposição 7.2.1 podem ser reescritas como:*

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_{k+1|k}^r & \tilde{Z}_{k+1|k}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{k|k-1}^r & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{S} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{F} & \mathfrak{G} & \mathfrak{J} \\ I & 0 & \mathfrak{F}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathfrak{G}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{J}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{z}_{k|k-1}^r & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathfrak{Y}_k & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},$$

com as entradas definidas por:

$$\mathfrak{S} = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}^* & 0 \\ 0 & \mathcal{R}^* \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{F} = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{F}} \\ \hat{\mathcal{C}} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{G} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{\hat{\mathcal{F}}} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{\hat{\mathcal{C}}} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{J} = \begin{bmatrix} -\mathcal{I} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{Y}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Y}_k \end{bmatrix}.$$

Os argumentos desenvolvidos em [69] serão aplicados para a demonstração da estabilidade em regime permanente do filtro robusto apresentado na Proposição 7.2.1. Inicialmente, as seguintes notações serão introduzidas:

$$X_{k|k-1} := \Xi^{-1} \left(\tilde{Z}_{k|k-1}^r \right), \quad \Xi \left(\tilde{Z}_{k|k-1}^r \right) := \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{k|k-1}^r & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{S} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{F} & \mathfrak{G} & \mathfrak{J} \\ I & 0 & \mathfrak{F}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathfrak{G}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{J}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz $X_{k|k-1}$ é particionada em blocos matriciais $X_{k|k-1}^{ij}$, $i, j = 1, \dots, 6$, cada um deles dado por $X_{k|k-1}^{ij} = e_i^T X_{k|k-1} e_j$, com $e_t := \begin{bmatrix} 0 & \dots & I_t & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$, $t = 1, \dots, 6$, sendo I_t a

matriz identidade na t -ésima posição.

Valendo-se dessas notações, é possível reescrever as expressões da estimativa preditora e da matriz de variância do Lema 7.2.1 como

$$\hat{z}_{k+1|k}^r = X_{k|k-1}^{61} \hat{z}_{k|k-1}^r + X_{k|k-1}^{63} \mathfrak{Y}_k, \quad (7.13)$$

$$\tilde{Z}_{k+1|k}^r = -X_{k|k-1}^{66}, \quad (7.14)$$

respectivamente, nas quais $X_{k|k-1}^{61} \equiv X_{k|k-1}^{61}(\tilde{Z}_{k|k-1}^r)$, $X_{k|k-1}^{63} \equiv X_{k|k-1}^{63}(\tilde{Z}_{k|k-1}^r)$ e $X_{k|k-1}^{66} \equiv X_{k|k-1}^{66}(\tilde{Z}_{k|k-1}^r)$.

Considere o estimador robusto em regime permanente

$$\hat{z}_{k+1|k}^r = X^{61}(\tilde{Z}^r) \hat{z}_{k|k-1}^r + X^{63}(\tilde{Z}^r) \mathfrak{Y}_k, \quad (7.15)$$

$$\tilde{Z}^r = -X^{66}(\tilde{Z}^r). \quad (7.16)$$

Definição 7.2.1. [69] Diz-se que $\tilde{Z}^r$ é uma solução estabilizante de (7.16) se $\tilde{Z}^r$ satisfaz (7.16) e $X^{61}(\tilde{Z}^r)$ é estável.

Os próximos resultados mostram que (7.16) admite uma solução estabilizante semidefinida positiva $\tilde{Z}^r$. As provas são apresentadas em [69].

Teorema 7.2.1. [69] Suponha que $\begin{bmatrix} \gamma \mathfrak{J} + \mathfrak{F} & \mathfrak{G} \end{bmatrix}$ admita posto linha pleno para $|\gamma| \geq 1$ e $\mathfrak{S} \succ 0$. Seja $\tilde{Z}^r$ uma solução de (7.16). Se $\tilde{Z}^r \succeq 0$, então $\tilde{Z}^r$ é a única solução estabilizante de (7.16).

Teorema 7.2.2. [69] Suponha que $(\gamma \mathfrak{J} + \mathfrak{F})$ admita posto coluna pleno para $|\gamma| \geq 1$ e $\mathfrak{S} \succ 0$. Considere a sequência $\{\tilde{Z}_{k+1|k}^r\}_{k=0}^{\infty}$ gerada pela recursão na Proposição 7.2.1 com $\tilde{Z}_{0|-1}^r = 0$. Então, $\{\tilde{Z}_{k+1|k}^r\}_{k=0}^{\infty}$ converge para $\tilde{Z}^r \succeq 0$ que satisfaz a equação (7.16).

7.3 Conclusões Parciais

O problema de estimativas de estados robustas recursivas para SLSM incertos sob a hipótese de não-observação dos estados da cadeia de Markov foi investigado neste capítulo. A abrangência da técnica de projeto baseada na otimização de funcionais quadráticos incertos penalizados

aliada à reinterpretação do modelo linear original por meio de um sistema aumentado, conforme proposto por [25], possibilitou o tratamento desse problema. As estimativas de estados e as matrizes de variâncias dos erros de estimativa também são representadas de forma unificada no arranjo de blocos matriciais, uma peculiaridade de todas as soluções dos problemas tratados nos capítulos anteriores.

CONCLUSÕES

Visto que cada capítulo já considerou em seu encerramento uma seção destinada aos principais aspectos dos projetos desenvolvidos, o objetivo agora é apresentar uma visão geral dos procedimentos adotados, dos resultados obtidos e também das perspectivas de pesquisas como continuidade deste trabalho.

Objetivos Alcançados

Esta tese de doutorado desenvolveu projetos recursivos de controle e estimativas de estados para SLSM sob a influência de incertezas paramétricas. Para atingir essa meta, uma nova abordagem decorrente da combinação de um problema de mínimos quadrados regularizados sujeito a incertezas e o método de funções penalidade foi adotada. Essa técnica possibilitou a formulação de critérios de projeto com base na otimização de funcionais quadráticos penalizados adequadamente elaborados para cada um dos problemas.

As deduções do regulador e dos estimadores de estados robustos seguiram uma sistemática bem estabelecida. Inicialmente, os critérios de projetos para os problemas de controle e estimativas de estados para SLSM nominais foram estabelecidos mediante a minimização de funcionais quadráticos de um passo restrita ao modelo linear. Uma vez estabelecidos os critérios de projeto, os respectivos casos nominais foram resolvidos por meio da combinação dos procedimentos de mínimos quadrados (sem incertezas) e funções penalidade.

As soluções foram apresentadas em termos de um arranjo simétrico das matrizes de parâmetros e de ponderações (variâncias) do sistema em uma estrutura de blocos matriciais, todas elas equivalentes às soluções consagradas da literatura. Essa investigação preliminar permitiu validar a abordagem de solução e, principalmente, estabelecer funcionais quadráticos adequados para lidar com a presença de incertezas paramétricas. Diante dos casos nominais, as versões robustas foram formuladas. Os critérios introduzidos envolveram dois objetivos opostos propositalmente definidos, segundo um problema de otimização min-max, a fim de abranger a melhor solução em contrapartida a pior influência de incertezas. Além disso, tais critérios constituem uma extensão direta dos casos nominais caso a presença de incertezas seja desconsiderada.

A solução do problema de *controle robusto (estimativas de estados robustas)* é recursiva e baseada em *equações de Riccati acopladas (uma equação de Riccati)* em termos apenas das condições iniciais, das matrizes de parâmetros do sistema e das *matrizes de ponderações (matrizes de variâncias)*, todas elas conhecidas de forma antecipada. Esses projetos robustos herdam as características dos respectivos projetos nominais consagrados da literatura e incorporam o aspecto de robustez. A estabilidade e a convergência em regime permanente do regulador robusto, quando o parâmetro de salto é admitido observado, e o filtro robusto, quando o parâmetro de salto não é observado, foram caracterizadas para SLSM incertos com os parâmetros invariantes no tempo. Em resumo, a abordagem de projeto adotada mostrou-se abrangente o bastante para lidar com os problemas de controle e estimativa de estados de SLSM incertos.

Trabalhos Futuros

No Capítulo 5, a demonstração da equivalência das expressões das estimativas robustas em blocos com aquelas nos moldes da estrutura do filtro de Kalman padrão permanece, por ora, incompleta. O mais próximo que se chegou foi com relação a representação da expressão da estimativa preditora. No entanto, ainda pouco satisfatória se comparada àquelas propostas no Capítulo 3 para o regulador robusto nos moldes do RLQ nominal. Já a representação da estimativa filtrada nesses termos encontra-se ainda sem solução, mesmo que numa estrutura preliminar. Em ambos os casos, a solução baseia-se em estabelecer identificações adequadas nas manipulações algébricas que conduzam a representações na estrutura desejada. As provas

de estabilidade e convergência dos estimadores robustos em regime permanente sob os mesmos argumentos adotados no Capítulo 3, *i.e.*, por meio das identificações com os resultados dos respectivos casos nominais, é um tópico também a ser explorado. No entanto, a investigação dessas propriedades nessa linha de abordagem esbarra nas equivalências pendentes citadas acima.

No Capítulo 7, o cálculo recursivo do limitante superior da matriz de variância com garantia de convergência é um problema em aberto e permanece como um aspecto a ser investigado com relevante grau de dificuldade. Diante da semelhança estrutural com as estimativas obtidas no Capítulo 5, as dificuldades de se estabelecer as equivalências das estimativas robustas do Capítulo 7 nos moldes do respectivo caso nominal proposto em [25] são idênticas. Atingir esta meta possibilitará reformular as provas de estabilidade e convergência do estimador robusto aplicando os resultados de [34] por identificação direta. A relevância em atingir esta meta é poder padronizar os procedimentos de projeto e caracterização da estabilidade para os problemas de controle e estimativas de estados como extensões diretas dos respectivos casos nominais.

Os aspectos enfatizados acima permanecem como metas a serem alcançadas no andamento da pesquisa iniciada neste trabalho de Doutorado e se juntarão a outros citados a seguir. Em essência, é possível elencar itens que contemplam desde os detalhes visando complementar os projetos propostos nesta tese, tais como:

- a padronização das provas de convergência dos estimadores de estados robustos para versões estáveis em regime permanente quando os parâmetros são invariantes no tempo;
- a investigação da convergência da forma recursiva para o cálculo do limitante superior Q^* , referente às estimativas de estados sem a observação da cadeia de Markov;
- a comparação desses projetos com outros métodos tradicionais;
- a análise numérica das soluções apresentadas em termos de blocos matriciais esparsos;
- o desenvolvimento de algoritmos array conforme [100, 101];

até o desenvolvimento de projetos a fim de lidar com:

- o controle e estimativa de estados para outras estruturas de incertezas;
- o controle e estimativa de estados de SLSM singulares incertos;

- o controle de SLSM quando os modos de operações alternam-se em sequência observadas e não-observadas, como continuidade de [16];
- o controle de sistemas lineares incertos por modos deslizantes, como extensão de [48, 49].

E ainda, explorar os aspectos condizentes ao aperfeiçoamento do critério de projeto baseado na otimização de funcionais quadráticos penalizados, por exemplo:

- estudo qualitativo da abordagem resultante da combinação do procedimento de penalidades para lidar com a otimização de funcionais quadráticos incertos; e
- a busca por funções penalidade alternativas.

REFERÊNCIAS

- [1] Abou-Kandil, H., G. Freiling, e G. Jank (1985). On the solution of discrete-time Markovian linear quadratic control problems. *Automatica* 31(5), 765 – 768.
- [2] Albert, A. (1972). *Regression and the Moore-Penrose pseudoinverse*. New York and London: Academic Press.
- [3] Anderson, B. D. O. e J. B. Moore (1979). *Optimal Filtering*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.
- [4] Anderson, B. D. O. e J. B. Moore (1989). *Optimal Control - Linear Quadratic Methods*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- [5] Basar, T. e P. Bernhard (1995). H_∞ *Optimal Control and Related Minimax Design Problems - A Dynamic Game Approach* (2nd ed.). Boston: Birkhauser.
- [6] Bazaraa, M. S., H. D. Sherali, e C. M. Shetty (1993). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms* (2^a ed.). New York: Wiley-Interscience.
- [7] Bertsekas, D. P. (1995). *Dynamic Programming and Optimal Control*, Volume I. Belmont, Massachusetts: Athena Scientific.
- [8] Bjorck, A. (1996). *Numerical Methods for Least Squares Problems*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM.

- [9] Blair, W. P. e D. D. Sworder (1975). Feedback control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria. *International Journal of Control* 21, 833 – 841.
- [10] Boukas, E. K. e P. Shi (1997). H_∞ control for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters. In *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, California*, Volume 4, pp. 4134 – 4139.
- [11] Boukas, E. K. e P. Shi (1998). Guaranteed cost control of discrete-time Markovian jumping uncertain systems. In *Proceedings of the American Control Conference - ACC, Philadelphia, PA, USA*, pp. 733 – 737.
- [12] Boukas, E. K. e H. Yang (1999). Robust LQ regulator for jump linear systems with uncertain parameters. *Dynamics and Control* 9(2), 125–134.
- [13] Bryson Jr, A. E. e Y. C. Ho (1975). *Applied optimal control: optimization, estimation, and control*. New York: Taylor & Francis Group.
- [14] Campos, J. C. T. (2004). *Filtragem Robusta para Sistemas Singulares Discretos no Tempo*. Tese, Escola de Engenharia de São Carlos, USP - Universidade de São Paulo, São Carlos.
- [15] Cerri, J. P. (2009). Regulador robusto recursivo para sistemas lineares de tempo discreto no espaço de estado. Dissertação, Escola de Engenharia de São Carlos, USP - Universidade de São Paulo, São Carlos.
- [16] Cerri, J. P. e M. H. Terra (2012). Control of discrete-time Markovian jump linear systems subject to partially observed chains. In *Proceedings of the American Control Conference (ACC), Montreal, Canada*, pp. 1609–1614.
- [17] Cerri, J. P., M. H. Terra, e J. Y. Ishihara (2008). Nova abordagem para sistemas de controle ótimo linear. In *Anais do XVII Congresso Brasileiro de Automática, Juiz de Fora, Brasil*.
- [18] Chizeck, H. J. e Y. Ji (1988). Optimal quadratic control of jump linear systems with gaussian noise in discrete-time. In *Proceedings of 27th IEEE Conference on Decision and Control, Austin, Texas, USA*, pp. 1989–1993.

-
- [19] Chizeck, H. J., A. S. Willsky, e D. Castanon (1986). Discrete-time Markovian-jump linear quadratic optimal control. *International Journal of Control* 43, 213 – 231.
- [20] Costa, E. F. e J. B. R. do Val (2001). On the detectability and observability of discrete-time Markov jump linear systems. *Systems & Control Letters* 44(2), 135 – 145.
- [21] Costa, E. F. e J. B. R. do Val (2002a). On the observability and detectability of continuous-time Markov jump linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization* 41(4), 1295–1314.
- [22] Costa, E. F. e J. B. R. do Val (2002b). Weak detectability and the linear-quadratic control problem of discrete-time Markov jump linear systems. *International Journal of Control* 75(16-17), 1282–1292.
- [23] Costa, E. F., J. B. R. do Val, e M. D. Fragoso (2005). On a detectability concept of discrete-time infinite Markov jump linear systems. *Stochastic Analysis and Applications* 23(1), 1–14.
- [24] Costa, O. L. V. (1991). Optimal linear filtering for discrete-time Markovian jump linear systems. In *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, Volume 3, pp. 2761 – 2762.
- [25] Costa, O. L. V. (1994). Linear minimum mean square error estimation for discrete-time Markovian jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 39(8), 1685 – 1689.
- [26] Costa, O. L. V. e G. R. A. M. Benites (2011). Linear minimum mean square filter for discrete-time linear systems with Markov jumps and multiplicative noises. *Automatica* 47(3), 466 – 476.
- [27] Costa, O. L. V. e G. R. A. M. Benites (2013). Robust mode-independent filtering for discrete-time Markov jump linear systems with multiplicative noises. *International Journal of Control* 0(0), 1–15.
- [28] Costa, O. L. V. e A. de Oliveira (2012). Optimal mean variance control for discrete-time linear systems with Markovian jumps and multiplicative noises. *Automatica* 48(2), 304 – 315.

- [29] Costa, O. L. V. e W. L. de Paulo (2007). Indefinite quadratic with linear costs optimal control of Markov jump with multiplicative noise systems. *Automatica* 43(4), 587 – 597.
- [30] Costa, O. L. V. e M. D. Fragoso (1993). Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 179(1), 154 – 178.
- [31] Costa, O. L. V. e M. D. Fragoso (1995). Discrete-time LQ-optimal control problems for infinite Markov jump parameter systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 40(12), 2076–2088.
- [32] Costa, O. L. V. e M. D. Fragoso (2007). A separation principle for the H_2 -control of continuous-time infinite Markov jump linear systems with partial observations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 331(1), 97 – 120.
- [33] Costa, O. L. V., M. D. Fragoso, e R. P. Marques (2005). *Discrete-time Markov jump linear systems - Probability and its applications*. London: Springer-Verlag.
- [34] Costa, O. L. V. e S. Guerra (2002). Stationary filter for linear minimum mean square error estimator of discrete-time Markovian jump systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 47(8), 1351 – 1356.
- [35] Costa, O. L. V. e S. G. Jimenez (2004). Filtros recursivos lineares e controle ótimo para sistemas lineares com variações abruptas e observações parciais. *SBA Controle & Automação* 15(1), 53 – 61.
- [36] Costa, O. L. V. e R. P. Marques (1998). Mixed H_2/H_∞ control of discrete-time Markovian jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 43(1), 95 – 100.
- [37] Costa, O. L. V. e R. P. Marques (2000). Robust H_2 -control for discrete-time Markovian jump linear systems. *International Journal of Control* 73(1), 11 – 21.
- [38] Costa, O. L. V. e R. T. Okimura (2009). Discrete-time mean variance optimal control of linear systems with Markovian jumps and multiplicative noise. *International Journal of Control* 82(2), 256–267.

-
- [39] Costa, O. L. V. e E. F. Tuesta (2003). Finite horizon quadratic optimal control and a separation principle for Markovian jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 48(10), 1836–1842.
- [40] Costa, O. L. V. e E. F. Tuesta (2004). H_2 -control and the separation principle for discrete-time Markovian jump linear systems. *Mathematics of Control, Signals and Systems* 16(4), 320–350.
- [41] Cox, H. (1964). On the estimation of state variables and parameters for noisy dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 9(1), 5 – 12.
- [42] Davis, M. H. A. e R. B. Vinter (1985). *Stochastic Modelling and Control*. London: Chapman and Hall.
- [43] de Jesus, G. Q. (2011). *Filtragem robusta recursiva para sistemas lineares a tempo discreto com parâmetros sujeitos a saltos Markovianos*. Tese, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- [44] de Souza, C. E. (2003). A mode-independent H_∞ filter design for discrete-time Markovian jump linear systems. In *Proceedings of 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii, USA*, pp. 2811–2816.
- [45] de Souza, C. E. (2006). Robust stability and stabilization of uncertain discrete-time Markovian jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 51(5), 836 – 841.
- [46] do Val, J. B. R. e M. D. Fragoso (1994). The linear quadratic control problem for jump linear systems with no observation on the Markov chain states. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, Volume 2, pp. 1392 – 1393.
- [47] El Ghaoui, L. e M. A. Rami (1996). Robust state-feedback stabilisation of jump linear systems via LMIs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 6(9), 1015–1022.
- [48] Ferrão, I. B., M. H. Terra, e J. P. Cerri (2011a). Controle ótimo por modos deslizantes para sistemas multivariáveis de tempo discreto. In *Anais do XXXIII Congresso de Matemática Aplicada e Computacional (CMAC - SE 2011)*, Uberlândia, MG, Brasil.

- [49] Ferraço, I. B., M. H. Terra, e J. P. Cerri (2011b). Optimal sliding mode control via penalty approach for discrete-time linear systems. In *Proceedings of the 18th IFAC World Congress, Milan, Italy*.
- [50] Fioravanti, A. R., A. P. C. Gonçalves, e J. C. Geromel (2008). H_2 and H_∞ filtering of discrete-time Markov jump linear systems through linear matrix inequalities. In *Proceedings of the 17th World Congress - The International Federation of Automatic Control, Seoul, Korea, July 6-11*, pp. 2681 – 2686.
- [51] Fletcher, R. (1987). *Practical Methods of Optimization*, Volume 2. New York: Wiley.
- [52] Fragoso, M. D. e J. Baczynski (2001). Optimal control for continuous-time linear quadratic problems with infinite Markov jump parameters. *SIAM J. Control Optim.* 40(1), 270–297.
- [53] Fragoso, M. D. e J. Baczynski (2002). Lyapunov coupled equations for continuous-time infinite Markov jump linear systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 274(1), 319 – 335.
- [54] Fragoso, M. D. e O. L. V. Costa (2005a). Mean square stabilizability of continuous-time linear systems with partial information on the Markovian jumping parameters. *Stochastic Analysis and Applications* 22(1), 99–111.
- [55] Fragoso, M. D. e O. L. V. Costa (2005b). A unified approach for stochastic and mean square stability of continuous-time linear systems with Markovian jumping parameters and additive disturbances. *SIAM Journal on Control and Optimization* 44(4), 1165–1191.
- [56] Fragoso, M. D. e O. L. V. Costa (2010). A separation principle for the continuous-time LQ-problem with Markovian jump parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control* 55(12), 2692–2707.
- [57] Fragoso, M. D., O. L. V. Costa, J. Baczynski, e N. Rocha (2005). Optimal linear mean square filter for continuous-time jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 50(9), 1364–1369.
- [58] Fragoso, M. D. e N. Rocha (2005). Stationary filter for continuous-time Markovian jump linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization* 44(3), 801–815.

-
- [59] Fritzsche, H. (1978). *Programação Não-Linear - Análise e Métodos*. São Paulo: Editora Edgard Blücher : Editora da Universidade de São Paulo.
- [60] Fu, M., C. E. Souza, e Z. Lu (2001). Finite-horizon robust Kalman filter design. *IEEE Transactions on Signal Processing* 49(9), 2103–2112.
- [61] Golub, G. H. e C. F. V. Loan (1996). *Matrix Computations* (3rd ed.). The Johns Hopkins University Press.
- [62] Gonçalves, A. P. C., A. R. Fioravanti, e J. C. Geromel (2009). H_∞ filtering of discrete-time Markov jump linear systems through linear matrix inequalities. *IEEE Transactions on Automatic Control* 54(6), 1347–1351.
- [63] Gonçalves, A. P. C., A. R. Fioravanti, e J. C. Geromel (2010). Filtering of discrete-time Markov jump linear systems with uncertain transition probabilities. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 21(6), 613–624.
- [64] Grewal, M. S. e A. P. Andrews (2001). *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*. New York: John Wiley & Sons.
- [65] Griffiths, B. E. e K. A. Loparo (1985). Optimal control of jump-linear gaussian systems. *International Journal of Control* 42(4), 791 – 819.
- [66] Hassibi, B., A. H. Sayed, e T. Kailath (1999). *Indefinite-Quadratic Estimation and Control - A Unified Approach to H^2 and H^∞ Theories*, Volume 16. Philadelphia: SIAM.
- [67] Hung, Y. S. e F. Yang (2003). Robust H_∞ filtering with error variance constraints for discrete time-varying systems with uncertainty. *Automatica* 39(7), 1185–1194.
- [68] Ishihara, J. Y. e M. H. Terra (2008). Robust state prediction for descriptor systems. *Automatica* 44(8), 2185 – 2190.
- [69] Ishihara, J. Y., M. H. Terra, e A. F. Bianco (2010). Recursive linear estimation for general discrete-time descriptor systems. *Automatica* 46, 761–766.
- [70] Ishihara, J. Y., M. H. Terra, e J. C. T. Campos (2006). Robust Kalman filter for descriptor systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 51(8), 1354–1354.

- [71] Ji, Y. e H. J. Chizeck (1988). Controllability, observability and discrete-time Markovian jump linear quadratic control. *International Journal of Control* 48(2), 481–498.
- [72] Ji, Y. e H. J. Chizeck (1992). Jump linear quadratic gaussian control in continuous time. *IEEE Transactions on Automatic Control* 37(12), 1884–1892.
- [73] Jimenez, S. G. (2001). *Filtragem e controle de modelos múltiplos estocásticos com observações parciais*. Tese, Escola Politécnica, USP - Universidade de São Paulo, São Paulo.
- [74] Kailath, T., A. H. Sayed, e B. Hassibi (2000). *Linear Estimation*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- [75] Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering* 82(D), 35–45.
- [76] Kumar, P. R. e P. Varaiya (1986). *Stochastic systems: estimation, identification and adaptive control*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc.
- [77] Kwakernaak, H. e R. Sivan (1972). *Linear Optimal Control Systems*. New York: Wiley Interscience.
- [78] Lancaster, P. e L. Rodman (1995). *Algebraic Riccati Equations*, Volume 1. Oxford and New York: Oxford Science Publications.
- [79] Larson, R. e J. Peschon (1966). A dynamic programming approach to trajectory estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control* 11(3), 537 – 540.
- [80] Lee, C. M. e I. K. Fong (2003). Robust Kalman filter design for discrete-time systems with Markovian jumping parameters. In *Proceedings of SICE Annual Conference, Fukui University, Japan*, pp. 1110 – 1115.
- [81] Lewis, F. L. (1986). *Optimal Control*. New York: John Wiley and Sons.
- [82] Liu, W. e H. Zhang (2009). On state estimation of discrete-time Markov jump linear systems. In *Proceedings of the Chinese Control and Decision Conference*, pp. 1110 – 1115.
- [83] Luenberger, D. G. (2003). *Linear and Nonlinear Programming* (2^a ed.). Boston: Kluwer Academic Publishers.

-
- [84] Ma, S., C. Zhang, e X. Liu (2008). Linear minimum mean square error estimation for discrete-time Markovian jump linear systems. *Journal of Control Theory and Applications* 6(2), 133–140.
 - [85] Mahmoud, M. S. e P. Shi (2004). Optimal guaranteed cost filtering for Markovian jump discrete-time systems. *Mathematical Problems in Engineering* 2004(1), 33–48.
 - [86] Mariton, M. (1972). *Jump linear systems in automatic control*. New York: Marcel Dekker.
 - [87] Nikoukhah, R., A. L. Willsky, e B. C. Levy (1992). Kalman filtering and Riccati equations for deciptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 37(9), 1325–1342.
 - [88] Ogata, K. (1987). *Discrete-Time Control Systems*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
 - [89] Park, B. G. e W. H. Kwon (2002). Robust one-step receding horizon control of discrete-time Markovian jump uncertain systems. *Automatica* 38(7), 1229 – 1235.
 - [90] Petersen, I. R., V. A. Ugrinovskii, e A. V. Savkin (2000). *Robust Control Design Using H_∞ Methods*. London: Springer.
 - [91] Rauch, H. E., C. T. Striebel, e F. Tung (1965). Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems. *AIAA Journal* 3(8), 1445 – 1450.
 - [92] Sayed, A. H. (2001). A framework for state-space estimation with uncertain models. *IEEE Transactions on Automatic Control* 46(7), 998 – 1013.
 - [93] Sayed, A. H. e V. H. Nascimento (1999). Design criteria for uncertain models with structured and unstructured uncertainties. In A. Garulli, A. Tesi, e A. Vicino (Eds.), *Robustness in Identification and Control*, Volume 245, pp. 159 – 173. Springer-Verlag, London.
 - [94] Shi, P. e E. K. Boukas (1998). Control for Markovian jumping discrete-time systems with different forms of uncertainties. In *Proceedings of the American Control Conference*, Volume 2, pp. 728 – 732.
 - [95] Sorenson, H. W. (1970). Least-squares estimation: from Gauss to Kalman. *IEEE Spectrum* 7(7), 63–68.

- [96] Swarder, D. (1969). Feedback control of a class of linear systems with jump parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control* 14(1), 9 – 14.
- [97] Swarder, D. e R. Rogers (1983). An LQ-solution to a control problem associated with a solar thermal central receiver. *IEEE Transactions on Automatic Control* 28(10), 971 – 978.
- [98] Terra, M. H., J. Y. Ishihara, e G. Jesus (2009). Robust estimate for discrete-time Markovian jump linear systems. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1305 – 1309.
- [99] Terra, M. H., J. Y. Ishihara, G. Jesus, e J. Cerri (2013). Robust estimation for discrete-time Markovian jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* PP(99), 1–1.
- [100] Terra, M. H., J. Y. Ishihara, e A. P. Junior (2007). Array algorithm for filtering of discrete-time Markovian jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 52(7), 1293–1296.
- [101] Terra, M. H., J. Y. Ishihara, e A. C. Padoan (2007). Information filtering and array algorithms for descriptor systems subject to parameter uncertainties. *IEEE Transactions on Signal Processing* 55(1), 1–9.
- [102] Wang, Z., J. Lam, e X. Liu (2004). Robust filtering for discrete-time Markovian jump delay systems. *IEEE Signal Processing Letters* 11(8), 659–662.
- [103] Wang, Z., J. Zhu, e H. Unbehauen (1999). Robust filter design with time-varying parameter uncertainty and error variance constraints. *International Journal of Control* 72(1), 30–38.
- [104] Xie, L. e Y. C. Soh (1993). Control of uncertain discrete-time systems with guaranteed cost. In *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control, San Antonio, Texas*, Volume 1, pp. 56 – 61.
- [105] Yang, C., Y. Bar-Shalom, e C. F. Lin (1991). Control of partially observed discrete-time jump systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 1559 –1562.

-
- [106] Yang, F., Z. Wang, G. Feng, e X. Liu (2009). Robust filtering with randomly varying sensor delay: the finite-horizon case. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 56(3), 664–672.
- [107] Zangwill, W. I. (1969). *Nonlinear Programming - A Unified Approach*. New Jersey: Prentice-Hall.
- [108] Zhang, F. (2005). *The Schur Complement and Its Applications*, Volume 4. USA: Springer.
- [109] Zhang, L. e E.-K. Boukas (2009). Mode-dependent H_∞ filtering for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities. *Automatica* 45(6), 1462–1467.
- [110] Zhang, L., P. Shi, C. Wang, e H. Gao (2006). Robust H_∞ filtering for switched linear discrete-time systems with polytopic uncertainties. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 20, 291–304.
- [111] Zhou, T. (2010a). On the convergence and stability of a robust state estimator. *IEEE Transactions on Automatic Control* 55(3), 708–714.
- [112] Zhou, T. (2010b). Sensitivity penalization based robust state estimation for uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 55(4), 1018–1024.
- [113] Zhu, X., Y. C. Soh, e L. Xie (2002). Design and analysis of discrete-time robust Kalman filters. *Automatica* 38(6), 1069–1077.
- [114] Zhu, X. e X. Yin (2007). Robust Kalman filtering for uncertain discrete Markovian jump systems. In *Proceedings of Second IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, Harbin*, pp. 2489 – 2493.

APÊNDICE A

RESULTADOS AUXILIARES

Este apêndice apresenta alguns conceitos e resultados que foram utilizados no desenvolvimento desse trabalho. As demonstrações podem ser encontradas, quase que na totalidade, nas referências citadas.

A.1 Blocos Matriciais

Lema A.1.1. [88] (*Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury*) Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Suponha que A , C , $(A + BCD)$ e $(C^{-1} + DA^{-1}B)$ sejam não-singulares. Então

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}.$$

Lema A.1.2. [14] Suponha A , C , $(A + BC^{-1}D)$ e $(C + DA^{-1}B)^{-1}$ invertíveis. Então é válida a seguinte relação

$$(A + BC^{-1}D)^{-1}BC^{-1} = A^{-1}B(C + DA^{-1}B)^{-1}.$$

Definição A.1.1. [108] Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz não-singular, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $M \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ a matriz particionada definida por

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

A matriz $D - CA^{-1}B$ denotada por (M/A) é chamada de complemento de Schur de A em M . Similarmente, se D é não-singular, o complemento de Schur de D em M é definido por $(M/D) = A - BD^{-1}C$.

Lema A.1.3. [108] Seja M a matriz particionada dada por (A.1).

(i) - Suponha que A e M sejam não-singulares. Então (M/A) é não-singular e

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (M/A)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}.$$

(ii) - Suponha que D e M sejam não-singulares. Então (M/D) é não-singular e

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (M/D)^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Lema A.1.4. [108] (Fórmula da Inversão de Banachiewicz) Seja M a matriz particionada dada por (A.1).

(i) - Suponha que A e M sejam não-singulares. Então (M/A) é não-singular e

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{bmatrix}.$$

(ii) - Suponha que D e M sejam não-singulares. Então (M/D) é não-singular e

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} (M/D)^{-1} & -(M/D)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(M/D)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}.$$

Lema A.1.5. [108] *Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz não-singular, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $M \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ a matriz particionada simétrica dada por (A.1). Então:*

(i) - $M \succ 0$ se e somente se $A \succ 0$ e $(M/A) \succ 0$.

(ii) - $M \succeq 0$ se e somente se $A \succ 0$ e $(M/A) \succeq 0$.

Analogamente, pode-se enunciar também

Lema A.1.6. [108] *Sejam $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz não-singular, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $M \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ a matriz particionada simétrica dada por (A.1). Então:*

(i) - $M \succ 0$ se e somente se $D \succ 0$ e $(M/D) \succ 0$.

(ii) - $M \succeq 0$ se e somente se $D \succ 0$ e $(M/D) \succeq 0$.

Lema A.1.7. [83] *Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ uma matriz posto coluna pleno. Então, a matriz $\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$ é invertível.*

Lema A.1.8. [87] *Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ semidefinida positiva e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ uma matriz posto coluna pleno. Então, se $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ é posto linha pleno, a matriz $\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$ é invertível.*

A.2 Limitantes

Nessa seção, os limitantes superior e inferior para o termo quadrático

$$(F + \delta F)X(F + \delta F)^T, \quad X \succeq 0, \quad (A.2)$$

$$\delta F = H\Delta E_F, \quad \|\Delta\| \leq 1,$$

são deduzidos. Valendo-se de um problema de otimização específico, as matrizes L_I (L inferior) e L_S (L superior) tais que $L_I \leq (F + \delta F)X(F + \delta F)^T \leq L_S$, para todo δF admissível, são determinadas. Os resultados a seguir apresentam uma forma inovadora de dedução e são contribuições deste trabalho. É importante ressaltar que os mesmos limitantes superior e inferior do Corolário A.2.1 foram deduzidos em [103] e [43, 98], respectivamente, porém numa abordagem envolvendo a manipulação de desigualdades matriciais.

Proposição A.2.1. [99] *Dado o seguinte funcional quadrático*

$$J_x(y) = (Ax - b + Hy)^T W (Ax - b + Hy), \quad (\text{A.3})$$

com $x \in \mathbb{R}^m$ arbitrário, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $H \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($W \succeq 0$) conhecidos e $y \in \mathbb{R}^p$ o vetor de incógnitas, considere os seguintes problemas de otimização restrita na variável y dados por

$$\min_{\|y\| \leq \phi(x)} \{J_x(y)\} \quad e \quad \max_{\|y\| \leq \phi(x)} \{J_x(y)\}, \quad (\text{A.4})$$

sendo $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não-identicamente nula. Defina

$$L_I(x) := \min_{\|y\| \leq \phi(x)} \{J_x(y)\} \quad e \quad L_S(x) := \max_{\|y\| \leq \phi(x)} \{J_x(y)\}. \quad (\text{A.5})$$

Então, para cada x fixado,

$$L_I(x) \leq J_x(y) \leq L_S(x), \quad (\text{A.6})$$

para todo y tal que $\|y\| \leq \phi(x)$, sendo

$$L_I(x) = (Ax - b)^T (W - WH(\lambda I + H^T W H)^{-1} H^T W) (Ax - b) - \lambda \phi^2(x), \quad (\text{A.7})$$

$$L_S(x) = (Ax - b)^T (W + WH(\lambda I - H^T W H)^{-1} H^T W) (Ax - b) + \lambda \phi^2(x), \quad (\text{A.8})$$

com $\lambda > \|H^T W H\|$. Ou ainda, em uma forma mais compacta

$$L_I(x) = (Ax - b)^T (W^{-1} + \lambda^{-1} H H^T)^{-1} (Ax - b) - \lambda \phi^2(x), \quad (\text{A.9})$$

$$L_S(x) = (Ax - b)^T (W^{-1} - \lambda^{-1} H H^T)^{-1} (Ax - b) + \lambda \phi^2(x), \quad (\text{A.10})$$

se $W \succ 0$.

Demonstração. A solução do problema $\max_{\|y\| \leq \phi(x)} \{J_x(y)\}$ consiste em uma etapa da demonstração de um resultado provado em [93]. Aplicando o mesmo procedimento, resolve-se $\min_{\|y\| \leq \phi(x)} \{J_x(y)\}$. □

Corolário A.2.1. [99] *Considere o termo quadrático*

$$J(\delta F) = (F + \delta F)X(F + \delta F)^T, \quad X \succeq 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\delta F = H\Delta E_F, \quad \|\Delta\| \leq 1,$$

sendo $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $(X \succeq 0)$, $H \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $E_F \in \mathbb{R}^{p \times m}$ matrizes conhecidas e $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times p}$ uma matriz de contração. Então, para todo δF

$$L_I \leq J(\delta F) \leq L_S, \quad (\text{A.12})$$

sendo

$$L_I = F(X - XE_F^T(\lambda I + E_F X E_F^T)^{-1}E_F X)F^T - \lambda H H^T, \quad (\text{A.13})$$

$$L_S = F(X + XE_F^T(\lambda I - E_F X E_F^T)^{-1}E_F X)F^T + \lambda H H^T, \quad (\text{A.14})$$

com $\lambda > \|E_F X E_F^T\|$. Ou ainda, na forma mais compacta:

$$F(X^{-1} + \lambda^{-1}E_F^T E_F)^{-1}F^T - \lambda H H^T \leq J(\delta F) \leq F(X^{-1} - \lambda^{-1}E_F^T E_F)^{-1}F^T + \lambda H H^T, \quad (\text{A.15})$$

se $X \succ 0$.

Demonstração. Para todo x escolhido de forma arbitrária:

$$\begin{aligned} J_x(\delta F) &= x^T(F + \delta F)X(F + \delta F)^T x = x^T(F + H\Delta E_F)X(F + H\Delta E_F)^T x = \\ &= (x^T F + x^T H\Delta E_F)X(F^T x + E_F^T \Delta^T H^T x) = (F^T x + E_F^T \Delta^T H^T x)^T X(F^T x + E_F^T \Delta^T H^T x). \end{aligned}$$

Considere então as seguintes identificações $A = F^T$, $b = 0$, $H = E_F^T$, $y = \Delta^T H^T x$, $W = X$. Uma vez que $\|\Delta\| \leq 1$, temos

$$\|y\| = \|\Delta^T H^T x\| \leq \|\Delta\| \|H^T x\| \leq \|H^T x\|,$$

e define-se $\phi(x) := \|H^T x\|$. De acordo com a Proposição A.2.1 segue o resultado. $\square$

APÊNDICE B

ESTIMATIVAS DE ESTADOS ÓTIMAS DETERMINÍSTICAS

Neste apêndice são apresentados os passos que validam a interpretação determinística para o problema de estimativas (preditora e filtrada) recursivas para um sistema linear de tempo discreto no espaço de estado. As estimativas são determinadas por meio da minimização sucessiva de um funcional quadrático de um passo com base nos argumentos em [41, 79]. Os resultados dão suporte aos capítulos 4 e 6.

B.1 Estimativa dos Estados

Considere o sistema linear de tempo discreto dado por

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= F_k x_k + w_k, \quad k = 0, 1, \dots, \\y_k &= C_k x_k + v_k,\end{aligned}\tag{B.1}$$

no qual $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $C_k \in \mathbb{R}^{p \times n}$ são as matrizes de parâmetros conhecidas, $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $y_k \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de medida, $w_k \in \mathbb{R}^{m_2}$ e $v_k \in \mathbb{R}^t$ são ruídos aleatórios Gaussianos

mutuamente independentes com média zero e variâncias $Q_k \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$ e $R_k \in \mathbb{R}^{t \times t}$ definidas positivas, respectivamente.

Tendo à disposição o conjunto de medidas $\mathbf{Z}_N = \{y_0, y_1, \dots, y_N\}$ obtidas a partir do sistema linear (B.1), o objetivo é determinar o conjunto das estimativas $\hat{X}_{N+T} = \{\hat{x}_{0|N}, \hat{x}_{1|N}, \dots, \hat{x}_{N|N}, \hat{x}_{N|N+T}\}$ dos estados $X_{N+T} = \{x_0, \dots, x_N, \dots, x_{N+T}\}$. Essa questão inclui como casos especiais: o problema de filtragem, quando a estimativa de x_N é desejada; o problema de suavização, ao estimar a sequência $X_K = \{x_0, \dots, x_K\}$ com $K < N$; e o problema de predição, ao estimar um estado futuro x_{N+T} para algum $T > 0$.

Para tanto, a meta é formular tal problema sob aspectos determinísticos, *i.e.*, obter as tais estimativas com base na minimização de algum critério de desempenho (funcional custo) predefinido adequado. Baseado nos aspectos desenvolvidos em [41], o problema de estimativa de estados equivale ao problema de minimização do funcional quadrático

$$J_N = \|x_0 - x\|_{\Pi_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^N \|y_k - C_k x_k\|_{R_k^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \|x_{k+1} - F_k x_k\|_{Q_k^{-1}}^2, \quad (\text{B.2})$$

com relação as variáveis $X_N = \{x_0, \dots, x_N\}$, no qual x é uma estimativa inicial de x_0 com variância do erro de estimativa $\Pi_0 \succ 0$. Esse fato, conforme detalhado em [41], decorre da análise baseada no Teorema de Bayes combinado com a natureza Markoviana do processo estocástico da função densidade de probabilidade a posteriori $p_{x_N|y_N}(x_0, \dots, x_N|y_0, y_1, \dots, y_N)^1$. Uma vez que a matriz que $Q_k \succ 0$ para todo k , então a fórmula explícita pode ser obtida

$$p_{x_N|y_N}(X_N|\mathbf{Z}_N) = C(\mathbf{Z}_N)e^{-\frac{1}{2} \left\{ \|x_0 - x\|_{\Pi_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^N \|y_k - C_k x_k\|_{R_k^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \|x_{k+1} - F_k x_k\|_{Q_k^{-1}}^2 \right\}},$$

no qual $C(\mathbf{Z}_N)$ consiste em um fator dado em termos dos elementos da sequência $\mathbf{Z}_N$ e das demais constantes². Por fim, de acordo com o princípio da máxima verossimilhança, o problema de estimativa equivale à minimização do funcional quadrático J_N com relação à sequência X_N .

¹ $p_{x_N|y_N}$ refere-se à função densidade de probabilidade condicional para a sequência de estados $X_N = \{x_0, \dots, x_N\}$ condicionada às observações $\mathbf{Z}_N$.

²Mais detalhes em [41].

O uso da técnica da programação dinâmica na solução de problemas de teoria de controle em um procedimento *backward* é consagrada na literatura. A aplicação dessa técnica, porém em uma versão *forward*, também é útil para lidar com problemas de estimativa de estados, veja por exemplo [41, 79, 91].

B.1.1 Estimativa Preditora

O problema de estimativas na forma preditora pode ser estabelecido levando em conta a transição adicional $x_{N+1} = F_N x_N + w_N$. Daí, o funcional J_N torna-se

$$J_N^{pred} = \|x_0 - x\|_{\Pi_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^N \|y_k - C_k x_k\|_{R_k^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^N \|x_{k+1} - F_k x_k\|_{Q_k^{-1}}^2,$$

e consequentemente,

$$\{\hat{x}_{0|N}, \dots, \hat{x}_{N|N}, \hat{x}_{N+1|N}\} := \arg \min_{x_0, \dots, x_N} \left\{ J_N^{pred} \right\}.$$

Defina a função custo da seguinte forma:

$$V_0(x_0) := \|x_0 - x\|_{\Pi_0^{-1}}^2, \Pi_0 \succ 0, \quad (\text{B.3})$$

$$V_{m+1}(x_{m+1}) := \min_{x_0, \dots, x_m} \left\{ \|x_0 - x\|_{\Pi_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^m \|y_k - C_k x_k\|_{R_k^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^m \|x_{k+1} - F_k x_k\|_{Q_k^{-1}}^2 \right\}, \quad (\text{B.4})$$

para $m = 0, 1, 2, \dots$. O resultado a seguir sintetiza o procedimento de minimização do funcional quadrático com base nos argumentos desenvolvidos em [41].

Lema B.1.1. Para cada $m = 0, 1, 2, \dots$, o problema de minimização

$$\min_{x_0, \dots, x_m} \left\{ \|x_0 - x\|_{\Pi_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^m \|y_k - C_k x_k\|_{R_k^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^m \|x_{k+1} - F_k x_k\|_{Q_k^{-1}}^2 \right\}$$

equivale ao processo de minimização sequencial dado por

$$V_{m+1}(x_{m+1}) = \min_{x_m} \left\{ V_m(x_m) + \left(\|y_m - C_m x_m\|_{R_m^{-1}}^2 + \|x_{m+1} - F_m x_m\|_{Q_m^{-1}}^2 \right) \right\}.$$

Demonstração. Para cada m , (B.4) pode ser reescrita como

$$V_{m+1}(x_{m+1}) = \min_{x_m} \left\{ V_m(x_m) + \left(\|y_m - C_m x_m\|_{R_m^{-1}}^2 + \|x_{m+1} - F_m x_m\|_{Q_m^{-1}}^2 \right) \right\},$$

já que $\|y_m - C_m x_m\|_{R_m^{-1}}^2 + \|x_{m+1} - F_m x_m\|_{Q_m^{-1}}^2$ independe de $\{x_0, \dots, x_{m-1}\}$, e $V_m(x_m)$, por sua vez, pode ser introduzido conforme (B.4). Veja mais detalhes em [41]. $\square$

Perceba que a estimativa de x_{m+1} baseada no conjunto de observações $\mathbf{Z}_m$ é o x_{m+1}^* para o qual $V_{m+1}(x_{m+1})$ é mínimo e, por definição, corresponde a estimativa preditora $\hat{x}_{m+1|m}$. Da mesma forma, x_m^* que minimiza $V_m(x_m)$ corresponde a estimativa de x_m com base nas observações $\mathbf{Z}_{m-1}$ e consiste na estimativa filtrada $\hat{x}_{m|m-1}$. Além disso, ao definir

$$\bar{V}_m(x_m) := V_m(x_m) + \|y_m - C_m x_m\|_{R_m^{-1}}^2,$$

observe ainda que x_m^* que minimiza $\bar{V}_m(x_m)$ corresponde a estimativa de x_m com base no conjunto de observações $\mathbf{Z}_m$, *i.e.*, a estimativa filtrada $\hat{x}_{m|m}$. A nova observação y_m é introduzida a fim de atualizar a estimativa $\hat{x}_{m|m-1}$ proveniente da minimização de $V_m(x_m)$. De acordo com esses fatos, a recursividade no calculo das estimativas é estabelecida, *i.e.*, $\hat{x}_{m+1|m}$ e $\hat{x}_{m|m}$ podem ser calculadas em função de $\hat{x}_{m|m-1}$ e y_m .

O próximo resultado apresenta a solução do problema de estimativas de estados na forma preditora. O custo parcial, em cada etapa de minimização m , é dado pela soma do quadrado da norma ponderada do erro de estimativa de estado $e_{m+1} := (x_{m+1} - \hat{x}_{m+1|m})$ a um resíduo $r_m(\hat{x}_{m|m-1}, y_m)$.

Proposição B.1.1. Defina $\mathcal{V}_0(x_0) = \|x_0 - \hat{x}_{0|-1}\|_{\Pi_0^{-1}}^2$, $\hat{x}_{0|-1}$ e $\Pi_0 \succ 0$ conhecidos, e

$$\mathcal{V}_{m+1}(x_{m+1}) = \min_{x_m} \left\{ \mathcal{V}_m(x_m) + \left(\|y_m - C_m x_m\|_{R_m^{-1}}^2 + \|x_{m+1} - F_m x_m\|_{Q_m^{-1}}^2 \right) \right\}, \quad m \geq 0.$$

Então, para todo $m \geq 0$,

$$\mathcal{V}_{m+1}(x_{m+1}) = \|x_{m+1} - \hat{x}_{m+1|m}\|_{P_{m+1|m}^{-1}}^2 + \sum_{j=0}^m r_j(\hat{x}_{j|j-1}, y_j),$$

sendo

$$\begin{aligned}\hat{x}_{m+1|m} &= F_m \hat{x}_{m|m-1} + F_m P_{m|m-1} C_m^T (R_m + C_m P_{m|m-1} C_m^T)^{-1} (y_m - C_m \hat{x}_{m|m-1}), \\ &= F_m \left(\hat{x}_{m|m-1} + P_{m|m-1} C_m^T (R_m + C_m P_{m|m-1} C_m^T)^{-1} (y_m - C_m \hat{x}_{m|m-1}) \right), \\ &= F_m \hat{x}_{m|m},\end{aligned}$$

$$P_{m+1|m}^{-1} = \left(Q_m + F_m \left(P_{m|m-1}^{-1} + C_m^T R_m^{-1} C_m \right)^{-1} F_m^T \right)^{-1},$$

$$\begin{aligned}r_j(\hat{x}_{j|j-1}, y_j) &= -\hat{x}_{j|j-1}^T F_j^T \left(Q_j + F_j \left(P_{j|j-1}^{-1} + C_j^T R_j^{-1} C_j \right)^{-1} F_j^T \right)^{-1} F_j \hat{x}_{j|j-1} + \\ &\quad + \hat{x}_{j|j-1}^T C_j^T \left(R_j + C_j \left(P_{j|j-1}^{-1} + F_j^T Q_j^{-1} F_j \right)^{-1} C_j^T \right)^{-1} C_j \hat{x}_{j|j-1} - \\ &\quad - \hat{x}_{j|j-1}^T \left(P_{j|j-1}^{-1} - P_{j|j-1}^{-1} \left(P_{j|j-1}^{-1} + C_j^T R_j^{-1} C_j + F_j^T Q_j^{-1} F_j \right)^{-1} P_{j|j-1}^{-1} \right) \hat{x}_{j|j-1} + \\ &\quad + 2\hat{x}_{j|j-1}^T F_j^T Q_j^{-1} F_j \left(P_{j|j-1}^{-1} + C_j^T R_j^{-1} C_j + F_j^T Q_j^{-1} F_j \right)^{-1} P_{j|j-1}^{-1} \hat{x}_{j|j-1} + \\ &\quad + (y_j - C_j \hat{x}_{j|j-1})^T (R_j + C_j P_{j|j-1} C_j^T)^{-1} (y_j - C_j \hat{x}_{j|j-1}).\end{aligned}$$

Demonstração. Passo $k = 0$: Considere o problema de minimização na variável x_0

$$\mathcal{V}_1 = \min_{x_0} \left\{ \|x_0 - x_{0|-1}\|_{\Pi_0^{-1}}^2 + \|y_0 - C_0 x_0\|_{R_0^{-1}}^2 + \|x_1 - F_0 x_0\|_{Q_0^{-1}}^2 \right\}.$$

Derivando a função objetivo com relação a x_0 e igualando a zero resulta

$$x_0^* = (\Pi_0^{-1} + C_0^T R_0^{-1} C_0 + F_0^T Q_0^{-1} F_0)^{-1} (\Pi_0^{-1} x_{0|-1} + C_0^T R_0^{-1} y_0 + F_0^T Q_0^{-1} x_1),$$

uma vez que $(\Pi_0^{-1} + C_0^T R_0^{-1} C_0 + F_0^T Q_0^{-1} F_0)$ é não-singular. Substituindo $x_0 = x_0^*$, encontra-se após algumas simplificações

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_1 &= x_{0|-1}^T \left(\Pi_0^{-1} - \Pi_0^{-1} (\Pi_0^{-1} + C_0^T R_0^{-1} C_0 + F_0^T Q_0^{-1} F_0)^{-1} P_{0|-1}^{-1} \right) x_{0|-1} + \\ &\quad + y_0^T \left(R_0 + C_0 (\Pi_0^{-1} + F_0^T Q_0^{-1} F_0)^{-1} C_0^T \right)^{-1} y_0 + x_1^T P_{1|0}^{-1} x_1 - \\ &\quad - 2x_1^T P_{1|0}^{-1} x_{1|0} - 2y_0^T R_0^{-1} C_0 (\Pi_0^{-1} + C_0^T R_0^{-1} C_0 + F_0^T Q_0^{-1} F_0)^{-1} \Pi_0^{-1} x_{1|0},\end{aligned}$$

com $x_{1|0}$ e $P_{1|0}^{-1}$ dados por

$$x_{1|0} = F_0 x_{0|-1} + F_0 \Pi_0 C_0^T (R_0 + C_0 \Pi_0 C_0^T)^{-1} (y_0 - C_0 x_{0|-1}),$$

$$P_{1|0}^{-1} = \left(Q_0 + F_0 (\Pi_0^{-1} + C_0^T R_0^{-1} C_0)^{-1} F_0^T \right)^{-1}.$$

Manipulações algébricas permitem reescrever $\mathcal{V}_1$ na forma

$$(x_1 - x_{1|0})^T P_{1|0}^{-1} (x_1 - x_{1|0}) + r_0(x_{0|-1}, y_0).$$

Passo $k = 1$: Uma vez determinado $\mathcal{V}_1$ do passo anterior, segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2 &= \min_{x_1} \left\{ \mathcal{V}_1 + \left(\|y_1 - C_1 x_1\|_{R_1^{-1}}^2 + \|x_2 - F_1 x_1\|_{Q_1^{-1}}^2 \right) \right\} \\ &= \min_{x_1} \left\{ \|x_1 - x_{1|0}\|_{P_{1|0}^{-1}}^2 + \|y_1 - C_1 x_1\|_{R_1^{-1}}^2 + \|x_2 - F_1 x_1\|_{Q_1^{-1}}^2 \right\} + r_0(x_{0|-1}, y_0). \end{aligned}$$

Procede-se então de forma análoga para todo passo k .

□

O problema de estimativas de estados na forma preditora pode ser estabelecido por meio de um procedimento que consiste na minimização sucessiva de um funcional quadrático de um passo.

Estimativa Preditora (Funcional de Passo Unitário): Para todo $m \geq 0$,

$$\hat{x}_{m+1|m} := \arg \min_{x_{m+1}} \{ \mathcal{V}_{m+1}(x_{m+1}) \},$$

sendo

$$\mathcal{V}_{m+1}(x_{m+1}) = \min_{x_m} \left\{ \|x_m - \hat{x}_{m|m-1}\|_{P_{m|m-1}^{-1}}^2 + \left(\|y_m - C_m x_m\|_{R_m^{-1}}^2 + \|x_{m+1} - F_m x_m\|_{Q_m^{-1}}^2 \right) \right\},$$

com $P_{0|-1} = \Pi_0 \succ 0$ e $\hat{x}_{0|-1}$ conhecidos.

B.1.2 Estimativa Filtrada

O problema das estimativas filtradas é estabelecido valendo-se da minimização do funcional quadrático

$$J_N^{filt} = \|x_0 - x\|_{\Pi_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^N \|y_k - C_k x_k\|_{R_k^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \|x_{k+1} - F_k x_k\|_{Q_k^{-1}}^2,$$

com relação a $\{x_0, \dots, x_N\}$. Isto é,

$$\{x_{0|N}, \dots, x_{N|N}\} := \arg \min_{x_0, \dots, x_N} \left\{ J_N^{filt} \right\}.$$

Defina a função custo da seguinte forma:

$$S_0(x_0) := \|x_0 - x\|_{\Pi_0^{-1}}^2 + \|y_0 - C_0 x_0\|_{R_0^{-1}}^2,$$

$$S_m(x_m) := \min_{x_0, \dots, x_{m-1}} \left\{ \|x_0 - x\|_{\Pi_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^m \|y_k - C_k x_k\|_{R_k^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{m-1} \|x_{k+1} - F_k x_k\|_{Q_k^{-1}}^2 \right\},$$

para cada $m = 1, 2, \dots$. O resultado a seguir sintetiza o procedimento de minimização do funcional quadrático.

Lema B.1.2. *O problema de minimização*

$$\min_{x_0, \dots, x_{m-1}} \left\{ \|x_0 - x\|_{\Pi_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^m \|y_k - C_k x_k\|_{R_k^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{m-1} \|x_{k+1} - F_k x_k\|_{Q_k^{-1}}^2 \right\}$$

equivale ao processo de minimização sequencial dado por

$$S_m(x_m) = \min_{x_{m-1}} \left\{ S_{m-1}(x_{m-1}) + \left(\|y_m - C_m x_m\|_{R_m^{-1}}^2 + \|x_m - F_{m-1} x_{m-1}\|_{Q_{m-1}^{-1}}^2 \right) \right\}.$$

Demonstração. Analogamente ao caso preditor,

$$S_m(x_m) = \min_{x_{m-1}} \left\{ S_{m-1}(x_{m-1}) + \|y_m - C_m x_m\|_{R_m^{-1}}^2 + \|x_m - F_{m-1} x_{m-1}\|_{Q_{m-1}^{-1}}^2 \right\},$$

pois $\|y_m - C_m x_m\|_{R_m^{-1}}^2 + \|x_m - F_{m-1} x_{m-1}\|_{Q_{m-1}^{-1}}^2$ independe de $\{x_0, \dots, x_{m-2}\}$. □

Análise análoga ao caso de predição pode ser feita no caso de filtragem. A estimativa de x_m baseada no conjunto de observações $\mathbf{Z}_m$ é o x_m^* para o qual $S_m(x_m)$ é mínimo e, por definição, corresponde a estimativa filtrada $\hat{x}_{m|m}$. Da mesma forma, x_{m-1}^* que minimiza $S_{m-1}(x_{m-1})$ corresponde a estimativa de x_{m-1} com base nas observações $\mathbf{Z}_{m-1}$ e consiste na estimativa filtrada $\hat{x}_{m-1|m-1}$. De acordo com esses fatos, a recursividade no calculo das estimativas é estabelecida, *i.e.*, $\hat{x}_{m|m}$ pode ser computada em função de $\hat{x}_{m-1|m-1}$ e y_m .

Na sequência, a estimativa de estado na forma filtrada é apresentada. Assim como no caso de predição, o custo parcial S_{m+1} , em cada etapa de minimização m , é dado também pela soma do quadrado da norma ponderada do erro de estimativa de estado $e_{m+1} := (x_{m+1} - x_{m+1|m+1})$ com um resíduo $r_m(x_{m|m}, y_{m+1})$.

Lema B.1.3. Defina $x_{0|0} := \arg \min_{x_0} \left\{ \|x_0 - x\|_{\Pi_0^{-1}}^2 + \|y_0 - C_0 x_0\|_{R_0^{-1}}^2 \right\}$, $\Pi_0 \succ 0$. Então:

$$(i) - x_{0|0} = x + (\Pi_0^{-1} + C_0^T R_0^{-1} C_0)^{-1} C_0^T R_0^{-1} (y_0 - C_0 x);$$

$$(ii) - P_{0|0} = (\Pi_0^{-1} + C_0^T R_0^{-1} C_0)^{-1}.$$

Demonstração. Segue da Proposição 1.2.4. □

Proposição B.1.2. Defina $\mathcal{S}_0 = \|x_0 - x_{0|0}\|_{P_{0|0}^{-1}}^2$ com $x_{0|0}$ e $P_{0|0} \succ 0$ conhecidos, e

$$\mathcal{S}_{m+1}(x_{m+1}) = \min_{x_m} \left\{ \mathcal{S}_m(x_m) + \left(\|y_{m+1} - C_{m+1} x_{m+1}\|_{R_{m+1}^{-1}}^2 + \|x_{m+1} - F_m x_m\|_{Q_m^{-1}}^2 \right) \right\}, \quad m \geq 0.$$

Então, para cada $m \geq 0$,

$$\mathcal{S}_{m+1}(x_{m+1}) = \|x_{m+1} - x_{m+1|m+1}\|_{P_{m+1|m+1}^{-1}}^2 + \sum_{j=0}^m r_j(x_{j|j}, y_{j+1}),$$

sendo

$$x_{m+1|m+1} = F_m x_{m|m} + P_{m+1|m+1} C_{m+1}^T R_{m+1}^{-1} (y_{m+1} - C_m F_m x_{m|m}),$$

$$P_{m+1|m+1}^{-1} = \left(C_{m+1}^T R_{m+1}^{-1} C_{m+1} + (Q_m + F_m P_{m|m} F_m^T)^{-1} \right),$$

$$r_j(x_{j|j}, y_{j+1}) = (y_{m+1} - C_{m+1} F_m x_{m|m})^T (R_{m+1} + C_{m+1} (Q_m + F_m P_{m|m} F_m^T) C_{m+1}^T)^{-1} (\bullet).$$

Demonstração. Análoga ao caso da estimativa preditora. □

O problema de estimativas dos estados na forma filtrada pode ser estabelecido por meio de um procedimento que consiste na minimização sucessiva de um funcional quadrático de um passo.

Estimativa Filtrada (Funcional de Passo Unitário): Para todo $m \geq 0$,

$$x_{m+1|m+1} := \arg \min_{x_{m+1}} \{ \mathcal{S}_{m+1}(x_{m+1}) \},$$

sendo

$$\mathcal{S}_{m+1}(x_{m+1}) =$$

$$\min_{x_m} \left(\|x_m - x_{m|m}\|_{P_{m|m}^{-1}}^2 + \left(\|y_{m+1} - C_{m+1}x_{m+1}\|_{R_{m+1}^{-1}}^2 + \|x_{m+1} - F_m x_m\|_{Q_m^{-1}}^2 \right) \right),$$

com $P_{0|0} \succ 0$ e $x_{0|0}$ determinados por meio de $\min_{x_0} \left\{ \|x_0 - x\|_{\Pi_0^{-1}}^2 + \|y_0 - C_0 x_0\|_{R_0^{-1}}^2 \right\}$.

APÊNDICE C

SISTEMA AUMENTADO

C.1 Dedução do Sistema Aumentado

Para a obtenção do sistema aumentado considera-se:

$$z_k := \begin{bmatrix} z_{1,k} \\ \vdots \\ z_{s,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{sn}, \quad z_{j,k} := x_k 1_{\{\theta_k=j\}} \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{C.1})$$

no qual $1_S : X \rightarrow \{0, 1\}$ consiste na função indicadora definida por $1_{\{S\}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in S, \\ 0, & \text{se } x \notin S. \end{cases}$

A representação de $x_{k+1} = F_{\theta_k,k}x_k + G_{\theta_k,k}w_k$ em termos de (C.1) é obtida conforme:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_{\theta_k,k}x_k + G_{\theta_k,k}w_k \\ &= \sum_{i=1}^s F_{i,k}x_k 1_{\{\theta_k=i\}} + G_{\theta_k,k}w_k \\ &= \sum_{i=1}^s F_{i,k}z_{i,k} + G_{\theta_k,k}w_k. \end{aligned}$$

Para cada $j \in \Theta$ tem-se

$$z_{j,k+1} := x_{k+1} 1_{\{\theta_{k+1}=j\}} = \left(\sum_{i=1}^s F_{i,k} z_{i,k} \right) 1_{\{\theta_{k+1}=j\}} + G_{\theta_k,k} w_k 1_{\{\theta_{k+1}=j\}}.$$

Somando e subtraindo, convenientemente, a parcela $\begin{bmatrix} p_{1j,k} F_{1,k} & \cdots & p_{sj,k} F_{s,k} \end{bmatrix} z_k$ na igualdade anterior, fornece

$$\begin{aligned} z_{j,k+1} = & \begin{bmatrix} p_{1j,k} F_{s,k} & \cdots & p_{sj,k} F_{s,k} \end{bmatrix} z_k + G_{\theta_k,k} w_k 1_{\{\theta_{k+1}=j\}} \\ & + \left(1_{\{\theta_{k+1}=j\}} \begin{bmatrix} F_{1,k} & \cdots & F_{s,k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{1j,k} F_{1,k} & \cdots & p_{sj,k} F_{s,k} \end{bmatrix} \right) z_k \quad (\text{C.2}) \end{aligned}$$

O empilhamento das equações (C.2) para cada $j \in \Theta$ resulta em:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z_{1,k+1} \\ z_{2,k+1} \\ \vdots \\ z_{s,k+1} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} p_{11,k} F_{1,k} & p_{21,k} F_{2,k} & \cdots & p_{s1,k} F_{s,k} \\ p_{12,k} F_{1,k} & p_{22,k} F_{2,k} & \cdots & p_{s2,k} F_{s,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1s,k} F_{1,k} & p_{2s,k} F_{2,k} & \cdots & p_{ss,k} F_{s,k} \end{bmatrix} z_k + \begin{bmatrix} G_{\theta_k,k} w_k 1_{\{\theta_{k+1}=1\}} \\ G_{\theta_k,k} w_k 1_{\{\theta_{k+1}=2\}} \\ \vdots \\ G_{\theta_k,k} w_k 1_{\{\theta_{k+1}=s\}} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 1_{\{\theta_{k+1}=1\}} \begin{bmatrix} F_{1,k} & \cdots & F_{s,k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11,k} F_{1,k} & \cdots & p_{s1,k} F_{s,k} \end{bmatrix} \\ 1_{\{\theta_{k+1}=2\}} \begin{bmatrix} F_{1,k} & \cdots & F_{s,k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12,k} F_{1,k} & \cdots & p_{s2,k} F_{s,k} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ 1_{\{\theta_{k+1}=s\}} \begin{bmatrix} F_{1,k} & \cdots & F_{s,k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{1s,k} F_{1,k} & \cdots & p_{ss,k} F_{s,k} \end{bmatrix} \end{bmatrix} z_k. \end{aligned}$$

É possível também representar a equação de saída do sistema em termos de (C.1):

$$\begin{aligned} y_k &= C_{\theta_k,k} x_k + D_{\theta_k,k} v_k \\ &= \sum_{i=1}^s C_{i,k} x_k 1_{\{\theta_k=i\}} + D_{\theta_k,k} v_k \\ &= \begin{bmatrix} C_{1,k} & C_{2,k} & \cdots & C_{s,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,k} \\ z_{2,k} \\ \vdots \\ z_{s,k} \end{bmatrix} + D_{\theta_k,k} v_k \\ &= \begin{bmatrix} C_{1,k} & C_{2,k} & \cdots & C_{s,k} \end{bmatrix} z_k + D_{\theta_k,k} v_k. \end{aligned}$$

Portanto, o sistema (6.1) em termos das novas variáveis (C.1) é dado por

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \mathcal{F}_k z_k + \mathcal{M}_{k+1} z_k + \vartheta_k \\ y_k &= \mathcal{C}_k z_k + D_{\theta_k, k} v_k, \end{aligned}$$

no qual

$$\mathcal{F}_k = \begin{bmatrix} p_{11,k} F_{1,k} & p_{21,k} F_{2,k} & \cdots & p_{s1,k} F_{s,k} \\ p_{12,k} F_{1,k} & p_{22,k} F_{2,k} & \cdots & p_{s2,k} F_{s,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1s,k} F_{1,k} & p_{2s,k} F_{2,k} & \cdots & p_{ss,k} F_{s,k} \end{bmatrix}, \quad \vartheta_k = \begin{bmatrix} G_{\theta_k, k} w_k 1_{\{\theta_{k+1}=1\}} \\ G_{\theta_k, k} w_k 1_{\{\theta_{k+1}=2\}} \\ \vdots \\ G_{\theta_k, k} w_k 1_{\{\theta_{k+1}=s\}} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{M}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1_{\{\theta_{k+1}=1\}} \begin{bmatrix} F_{1,k} & \cdots & F_{s,k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11,k} F_{1,k} & \cdots & p_{s1,k} F_{s,k} \end{bmatrix} \\ 1_{\{\theta_{k+1}=2\}} \begin{bmatrix} F_{1,k} & \cdots & F_{s,k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12,k} F_{1,k} & \cdots & p_{s2,k} F_{s,k} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ 1_{\{\theta_{k+1}=s\}} \begin{bmatrix} F_{1,k} & \cdots & F_{s,k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{1s,k} F_{1,k} & \cdots & p_{ss,k} F_{s,k} \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C}_k = \begin{bmatrix} C_{1,k} & C_{2,k} & \cdots & C_{s,k} \end{bmatrix}.$$

Detalhes da obtenção desse sistema aumentado podem ser encontrados em [25, 33, 34, 73].

C.2 Demonstração do Lema 6.3.1

Considere $\mathfrak{F}_k$ a σ -álgebra gerada pelas variáveis aleatórias $\{x_t, y_t, \theta_t; t = 0, \dots, k\}$.

- $\mathbb{E}\{\psi_k\} = 0$. De acordo com a linearidade do operador valor esperado¹

$$\mathbb{E}\{\psi_k\} = \mathbb{E}\{\mathcal{M}_{k+1} z_k + \vartheta_k\} = \mathbb{E}\{\mathcal{M}_{k+1} z_k\} + \mathbb{E}\{\vartheta_k\},$$

então é preciso mostrar que $\mathbb{E}\{\mathcal{M}_{k+1} z_k\} = 0$ e $\mathbb{E}\{\vartheta_k\} = 0$.

¹Sejam X e Y variáveis aleatórias e a e b números reais quaisquer. Então, $\mathbb{E}\{aX + bY\} = a\mathbb{E}\{X\} + b\mathbb{E}\{Y\}$.

De acordo com a propriedade do valor esperado de vetores de variáveis aleatórias², tem-se

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\mathcal{M}_{k+1}z_k\} &= \mathbb{E}\left\{\begin{bmatrix} (1_{\{\theta_{k+1}=1\}} - p_{11,k})F_{1,k} & \cdots & (1_{\{\theta_{k+1}=1\}} - p_{s1,k})F_{s,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (1_{\{\theta_{k+1}=s\}} - p_{1s,k})F_{1,k} & \cdots & (1_{\{\theta_{k+1}=s\}} - p_{ss,k})F_{s,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,k} \\ \vdots \\ z_{s,k} \end{bmatrix}\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_s \end{bmatrix}\right\},\end{aligned}$$

no qual $X_j := \sum_{i=1}^s (1_{\{\theta_{k+1}=j\}} - p_{ij,k})F_{i,k}z_{i,k}$, para cada $j \in \Theta$. Pela propriedade das esperanças iteradas³, obtém-se

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^s (1_{\{\theta_{k+1}=j\}} - p_{ij,k})F_{i,k}z_{i,k}\right\} = \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^s (1_{\{\theta_{k+1}=j\}} - p_{ij,k})1_{\{\theta_k=i\}}F_{i,k}z_{i,k} \mid \mathfrak{F}_k\right\}\right\}.$$

De acordo com [73],

$$\mathbb{E}\{1_{\{\theta_{k+1}=j\}}1_{\{\theta_k=i\}} \mid \mathfrak{F}_k\} = p_{ij,k}, \quad (\text{C.3})$$

daí segue que $\mathbb{E}\{X_j\} = 0$ para todo $j \in \Theta$. Resta mostrar que $\mathbb{E}\{\vartheta_k\} = 0$. Analogamente, tem-se

$$\mathbb{E}\{\vartheta_k\} = \mathbb{E}\left\{\begin{bmatrix} 1_{\{\theta_{k+1}=1\}}G_{\theta_k,k}w_k \\ \vdots \\ 1_{\{\theta_{k+1}=s\}}G_{\theta_k,k}w_k \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} p_{i1,k}G_{i,k}\mathbb{E}\{w_k\} \\ \vdots \\ p_{is,k}G_{i,k}\mathbb{E}\{w_k\} \end{bmatrix}$$

e, por hipótese, $\mathbb{E}\{w_k\} = 0$, então $\mathbb{E}\{\vartheta_k\} = 0$.

Logo, $\mathbb{E}\{\psi_k\} = 0$.

- $\mathbb{E}\{\varphi_k\} = 0$.

$$\mathbb{E}\{\varphi_k\} = \mathbb{E}\{D_{\theta_k,k}v_k\} = \mathbb{E}\{D_{j,k}v_k\} = D_{j,k}\mathbb{E}\{v_k\} = 0,$$

já que, também por hipótese, $\mathbb{E}\{v_k\} = 0$.

²Se $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_s \end{bmatrix}$, então $\mathbb{E}\{Y\} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{Y_1\} \\ \vdots \\ \mathbb{E}\{Y_s\} \end{bmatrix}$.

³ $\mathbb{E}\{X\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{X \mid Y\}\}$.

- $\mathbb{E}\{z_k \psi_k^T\} = 0$.

Como $\psi_k = \mathcal{M}_{k+1} z_k + \vartheta_k$, então $\mathbb{E}\{z_k \psi_k^T\} = \mathbb{E}\{z_k z_k^T \mathcal{M}_{k+1}^T\} + \mathbb{E}\{z_k \vartheta_k^T\}$. Novamente, a prova consiste em verificar que cada uma das parcelas é nula. Primeiramente,

$$z_k z_k^T \mathcal{M}_{k+1}^T = \begin{bmatrix} z_{1,k} \sum_{i=1}^s z_{i,k}^T (1_{\{\theta_{k+1}=1\}} - p_{i1,k}) F_{i,k}^T & \cdots & z_{1,k} \sum_{i=1}^s z_{i,k}^T (1_{\{\theta_{k+1}=s\}} - p_{is,k}) F_{i,k}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{s,k} \sum_{i=1}^s z_{i,k}^T (1_{\{\theta_{k+1}=1\}} - p_{i1,k}) F_{i,k}^T & \cdots & z_{s,k} \sum_{i=1}^s z_{i,k}^T (1_{\{\theta_{k+1}=s\}} - p_{is,k}) F_{i,k}^T \end{bmatrix},$$

e cada produto $z_{x,k} z_{y,k}^T$ é nulo sempre $x \neq y$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{z_k z_k^T \mathcal{M}_{k+1}^T\} &= \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{z_{1,k} z_{1,k}^T (1_{\{\theta_{k+1}=1\}} - p_{11,k}) F_{1,k}^T\} & \cdots & \mathbb{E}\{z_{1,k} z_{1,k}^T (1_{\{\theta_{k+1}=s\}} - p_{1s,k}) F_{1,k}^T\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}\{z_{s,k} z_{s,k}^T (1_{\{\theta_{k+1}=1\}} - p_{s1,k}) F_{s,k}^T\} & \cdots & \mathbb{E}\{z_{s,k} z_{s,k}^T (1_{\{\theta_{k+1}=s\}} - p_{ss,k}) F_{s,k}^T\} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e pela propriedade da esperança iterada combinada com (C.3) segue que

$$\mathbb{E}\{z_k z_k^T \mathcal{M}_{k+1}^T\} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Já $\mathbb{E}\{z_k \vartheta_k^T\}$ é dado por

$$\mathbb{E}\{z_k \vartheta_k^T\} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{z_{1,k} w_k^T G_{\theta_k,k}^T 1_{\{\theta_{k+1}=1\}}\} & \cdots & \mathbb{E}\{z_{1,k} w_k^T G_{\theta_k,k}^T 1_{\{\theta_{k+1}=s\}}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}\{z_{s,k} w_k^T G_{\theta_k,k}^T 1_{\{\theta_{k+1}=1\}}\} & \cdots & \mathbb{E}\{z_{s,k} w_k^T G_{\theta_k,k}^T 1_{\{\theta_{k+1}=s\}}\} \end{bmatrix}$$

e, sob a mesma justificativa anterior, obtém-se que

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{z_{1,k} w_k^T \mid \mathfrak{F}_k\} G_{1,k}^T p_{11,k}\} & \cdots & \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{z_{1,k} w_k^T \mid \mathfrak{F}_k\} G_{1,k}^T p_{1s,k}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{z_{s,k} w_k^T \mid \mathfrak{F}_k\} G_{s,k}^T p_{s1,k}\} & \cdots & \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{z_{s,k} w_k^T \mid \mathfrak{F}_k\} G_{s,k}^T p_{ss,k}\} \end{bmatrix}.$$

Por hipótese, x_0 e θ_k são independentes de w_k e $\mathbb{E}\{w_k\} = 0$. Dessa forma, x_k é independente de w_l para todo $l \geq k$. Daí, $\mathbb{E}\{z_k \vartheta_k^T\} = 0$.

Logo, $\mathbb{E}\{z_k \psi_k^T\} = 0$.

- $\mathbb{E}\{z_k \varphi_k^T\} = 0$.

Analogamente,

$$\mathbb{E}\{z_k \varphi_k^T\} = \mathbb{E}\left\{z_k v_k^T D_{\theta_k, k}^T\right\} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{z_{1,k} v_k^T D_{1,k}^T\} \\ \vdots \\ \mathbb{E}\{z_{s,k} v_k^T D_{s,k}^T\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{z_{1,k} v_k^T\} D_{1,k}^T \\ \vdots \\ \mathbb{E}\{z_{s,k} v_k^T\} D_{s,k}^T \end{bmatrix}.$$

Sob os mesmos argumentos do item anterior, tem-se que x_k é independente de v_l para todo $l \geq k$. Assim, $\mathbb{E}\{z_k \varphi_k^T\} = 0$.

- $\mathbb{E}\{\psi_k \varphi_k^T\} = 0$.

De acordo com a linearidade, $\mathbb{E}\{\psi_k \varphi_k^T\} = \mathbb{E}\{\mathcal{M}_{k+1} z_k v_k^T D_{\theta_k, k}^T\} + \mathbb{E}\{\vartheta_k v_k^T D_{\theta_k, k}^T\}$.

O fato que $\mathbb{E}\{\mathcal{M}_{k+1} z_k v_k^T D_{\theta_k, k}^T\} = 0$, segue de:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathcal{M}_{k+1} z_k v_k^T D_{\theta_k, k}^T\} &= \begin{bmatrix} \mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^s (1_{\{\theta_{k+1}=1\}} - p_{i1,k}) F_{i,k} z_{i,k} v_k^T D_{i,k}^T\right\} \\ \vdots \\ \mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^s (1_{\{\theta_{k+1}=s\}} - p_{is,k}) F_{i,k} z_{i,k} v_k^T D_{i,k}^T\right\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^s (1_{\{\theta_{k+1}=1\}} - p_{i1,k}) F_{i,k} z_{i,k} v_k^T D_{i,k}^T \mid \mathfrak{F}_k\right\}\right\} \\ \vdots \\ \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^s (1_{\{\theta_{k+1}=s\}} - p_{is,k}) F_{i,k} z_{i,k} v_k^T D_{i,k}^T \mid \mathfrak{F}_k\right\}\right\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Com relação a $\mathbb{E}\{\vartheta_k v_k^T D_{\theta_k,k}^T\}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\{\vartheta_k v_k^T D_{\theta_k,k}^T\} &= \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{1_{\{\theta_{k+1}=1\}} G_{\theta_k,k} w_k v_k^T D_{\theta_k,k}^T\} \\ \vdots \\ \mathbb{E}\{1_{\{\theta_{k+1}=s\}} G_{\theta_k,k} w_k v_k^T D_{\theta_k,k}^T\} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{1_{\{\theta_{k+1}=1\}} G_{\theta_k,k} w_k v_k^T D_{\theta_k,k}^T \mid \mathfrak{F}_k\}\} \\ \vdots \\ \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{1_{\{\theta_{k+1}=s\}} G_{\theta_k,k} w_k v_k^T D_{\theta_k,k}^T \mid \mathfrak{F}_k\}\} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbb{E}\{p_{i1,k} G_{i,k} w_k v_k^T D_{i,k}^T\} \\ \vdots \\ \mathbb{E}\{p_{is,k} G_{i,k} w_k v_k^T D_{i,k}^T\} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} p_{i1,k} G_{i,k} \mathbb{E}\{w_k v_k^T\} D_{i,k}^T \\ \vdots \\ p_{is,k} G_{i,k} \mathbb{E}\{w_k v_k^T\} D_{i,k}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

já que, por hipótese, w_k e v_k são independentes. Logo, $\mathbb{E}\{\psi_k \varphi_k^T\} = 0$.

- $\mathbb{E}\{\varphi_k \varphi_k^T\} = \sum_{i=1}^s \pi_{i,k} D_{i,k} D_{i,k}^T.$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\{\varphi_k \varphi_k^T\} &= \mathbb{E}\{D_{\theta_k,k} v_k v_k^T D_{\theta_k,k}^T\} \\
 &= \mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^s D_{i,k} v_k v_k^T D_{i,k}^T 1_{\{\theta_k=i\}}\right\} = \sum_{i=1}^s \mathbb{E}\{D_{i,k} v_k v_k^T D_{i,k}^T 1_{\{\theta_k=i\}}\} \\
 &= \sum_{i=1}^s D_{i,k} \mathbb{E}\{v_k v_k^T 1_{\{\theta_k=i\}}\} D_{i,k}^T = \sum_{i=1}^s \pi_{i,k} D_{i,k} D_{i,k}^T.
 \end{aligned}$$

já que, por hipótese, $\mathbb{E}\{v_k v_k^T\} = I$ e $\mathbb{E}\{1_{\{\theta_k=i\}}\} = \text{Prob}[\theta_k = i] = \pi_{i,k}$.

- $\mathbb{E}\{\psi_k \psi_k^T\} = \text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} F_{i,k} Z_{i,k} F_{i,k}^T \right] - \mathcal{F}_k Z_k \mathcal{F}_k^T + \text{diag} \left[\sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T \right],$ sendo que Z_k e $Z_{j,k}$ referem-se a $Z_k := \mathbb{E}\{z_k z_k^T\} = \text{diag}[Z_{j,k}]$ e $Z_{j,k} := \mathbb{E}\{z_{j,k} z_{j,k}^T\}$ com $Z_{j,k}$ dado pela seguinte equação recursiva

$$Z_{j,k+1} = \sum_{i=1}^s p_{ij,k} F_{i,k} Z_{i,k} F_{i,k}^T + \sum_{i=1}^s p_{ij,k} \pi_{i,k} G_{i,k} G_{i,k}^T.$$

Veja detalhes da dedução em [34, 73].

APÊNDICE D

ANÁLISES E COMPARAÇÕES

Os exemplos apresentados a seguir ilustram a eficiência da abordagem proposta para lidar com os problemas de controle e estimativas de estados de sistemas lineares sujeitos a incertezas paramétricas. Embora os exemplos propostos considerem sistemas sem saltos, não há perda alguma quanto ao papel desempenhado pelo critério de penalidade.

D.1 Regulador Robusto

No primeiro exemplo, o comportamento do regulador robusto para um conjunto de valores de μ , incluindo a solução no limite quando $\mu \rightarrow +\infty$, é apresentado. No segundo exemplo, um estudo comparativo entre a abordagem proposta e outras três abordagens clássicas é exibido. No terceiro, as limitações do RLQ padrão e do regulador baseado no critério H_∞ são identificadas.

Exemplo D.1.1. *Considere o sistema linear incerto (3.1)-(3.2) com apenas um modo operação*

e as seguintes matrizes de parâmetros

$$F = \begin{bmatrix} 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 \\ -1.0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 \\ -1.0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.5 \\ -0.7 \end{bmatrix},$$

$$E_F = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & -0.6 \end{bmatrix}, \quad E_G = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad -1 \leq \Delta_k \leq 1,$$

e a seguinte condição inicial $x_0 = [1 \quad -1 \quad 0.5]^T$. Com relação à função custo quadrático (3.5), as matrizes de ponderação são dadas por $P_{N+1} = I_3$, $Q = I_3$ e $R = I_2$. Algumas simulações serão realizadas para ilustrar o comportamento do regulador robusto recursivo proposto quando o parâmetro μ tende ao infinito.

Na Tabela D.1 são apresentadas as soluções em regime P_μ^r e K_μ^r , o custo total e a relação $E_F + E_G K_\mu^r$ para diferentes valores de μ . Quando $\mu \rightarrow +\infty$, ocorre a convergência da sequência $\{P_\mu^r\}_{\mu=0}^{+\infty}$ para a solução em regime $P_{+\infty}^r$ da equação algébrica de Riccati robusta. Além disso, a matriz de ganho associada $K_{+\infty}^r$ é tal que o sistema realimentado (3.1)-(3.2) é estável. Para ilustrar esse fato, são apresentados na Figura D.1 os polos do sistema em malha aberta, e na Figura D.2 os polos do sistema em malha fechada quando $\mu \rightarrow +\infty$ para incertezas admissíveis $\{\delta F_k, \delta G_k\}$.

Figura D.1: Polos - Sistema em Malha Aberta com $\Delta_k \in [-1, 1]$.

Os ganhos robustos projetados estabilizam o sistema para pequenos valores de μ , como pode ser visto nas figuras D.2(a) e D.2(b). Os estados e as entradas de controle do sistema em

Figura D.2: Polos - Sistema em Malha Fechada com $\Delta_k \in [-1, 1]$.

malha fechada são mostrados na Figura D.3.

Figura D.3: Regulador Linear Quadrático Robusto via Função Penalidade.

Exemplo D.1.2. É apresentado neste exemplo um estudo comparativo entre o RLQ robusto e os reguladores: RLQ padrão, H_∞ e Custo Garantido. As matrizes de parâmetros e ponderações são as mesmas do Exemplo D.1.1.

- (i) - *RLQ padrão* [4]: o sistema incerto foi controlado via regulador padrão, o qual foi projetado para o sistema nominal. O desempenho na regulação do sistema sujeito a incertezas é ilustrado na Figura D.4. Para cada instante k , as figuras D.4(a) e D.4(b) correspondem à média dos estados e entradas de controle, respectivamente, calculadas sobre T experimentos para N instantes ($T = 500$, $N = 50$) e Δ_k ($-1 \leq \Delta_k \leq 1$) foram selecionados aleatoriamente.

Tabela D.1: Comportamento do Regulador Linear Quadrático Robusto quando $\mu \rightarrow +\infty$

μ	P_μ^r			K_μ^r				Custo	$E_F + E_G K_\mu^r$			
10^2	25.4185	0.0837	-16.8601	$\begin{bmatrix} -1.1581 & -0.2841 & 0.5248 \\ -0.3801 & 0.8652 & -0.7762 \end{bmatrix}$				19.9612	$\begin{bmatrix} 0.0888 & 0.0403 & -0.0796 \end{bmatrix}$			
	0.0837	5.8550	-2.1563									
	-16.8601	-2.1563	14.2362									
10^5	31.0526	0.4401	-21.0090	$\begin{bmatrix} -1.3258 & -0.3345 & 0.6635 \\ -0.3261 & 0.9154 & -0.8363 \end{bmatrix}$				22.1599	$\begin{bmatrix} 10^{-3} & 0.1119 & 0.0440 & -0.0975 \end{bmatrix}$			
	0.4401	6.1407	-2.5223									
	-21.0090	-2.5223	17.3339									
10^{10}	31.0596	0.4406	-21.0142	$\begin{bmatrix} -1.3260 & -0.3345 & 0.6636 \\ -0.3260 & 0.9155 & -0.8364 \end{bmatrix}$				22.1625	$\begin{bmatrix} 10^{-8} & 0.1120 & 0.0440 & -0.0976 \end{bmatrix}$			
	0.4406	6.1411	-2.5228									
	-21.0142	-2.5228	17.3378									
$> 10^{10}$	31.0596	0.4406	-21.0142	$\begin{bmatrix} -1.3260 & -0.3345 & 0.6636 \\ -0.3260 & 0.9155 & -0.8364 \end{bmatrix}$				22.1625	$\begin{bmatrix} 10^{-10} & 0.1120 & 0.0440 & -0.0976 \end{bmatrix}$			
	0.4406	6.1411	-2.5228									
	-21.0142	-2.5228	17.3378

Figura D.4: Regulador Linear Quadrático Padrão.

(ii) - *Controle H_∞* : é levado em consideração o controle H_∞ desenvolvido em [66], o qual é similar ao desenvolvido em ([5] - Capítulo 3), para o seguinte sistema linear com distúrbios

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_{1,k} w_k + G_{2,k} u_k, \quad k = 0, \dots, N, \quad (\text{D.1})$$

sendo x_k o vetor de estado, u_k o vetor de entrada de controle e w_k o distúrbio. Sabe-se, em sua formulação subótima, que essa técnica consiste em encontrar uma lei de controle tal que para todo x_0 não-nulo e $\{w_k\}_{k=0}^N$,

$$\frac{x_{N+1}^{*T} P_{N+1} x_{N+1}^* + \sum_{k=0}^N (u_k^{*T} Q_k^c u_k^* + x_k^{*T} R_k^c x_k^*)}{x_0^{*T} \Pi_0^{-1} x_0^* + \sum_{k=0}^N (w_k^{*T} Q_k^w w_k^*)} < \gamma^2, \quad (\text{D.2})$$

para um $\gamma > 0$ adequado, no qual Π_0 , P_{N+1}^c , Q_k^w , Q_k^c e R_k^c são matrizes de ponderação definidas não-negativas. A solução recursiva desse problema requer a verificação de algumas condições de existência, cujos detalhes podem ser vistos em [66].

Para o uso desta técnica na regulação do sistema incerto (3.1)-(3.2), é necessário reescrevê-lo de acordo com (D.1). Assim, as seguintes identificações consideradas:

$$F_k \leftarrow F_k, \quad G_{1,k} \leftarrow H_k, \quad G_{2,k} \leftarrow G_k,$$

$$x_k \leftarrow x_k, \quad u_k \leftarrow u_k, \quad w_k \leftarrow \Delta_k \begin{bmatrix} E_{F_k} & E_{G_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix},$$

$$P_{N+1}^c \leftarrow P_{N+1}, \quad Q_k^c \leftarrow R_k, \quad R_k^c \leftarrow Q_k, \quad Q_k^w \leftarrow I, \quad \Pi_0 \leftarrow I.$$

Os comportamentos dos estados e das entradas de controle do sistema em malha fechada, respectivamente, são apresentados nas figuras D.5(a) e D.5(b), quando o controle H_∞ é aplicado com o parâmetro γ ajustado em 2.45.

Figura D.5: Controle H_∞ ($\gamma = 2.45$).

(iii) - *Custo Garantido*: de acordo com [104], Teorema 3.3, para algum parâmetro escalar $\epsilon > 0$, se existir uma solução definida positiva X para a equação algébrica de Riccati

$$F^T P F - P + \epsilon P H (I + \epsilon H^T P H)^{-1} H^T P - (F^T P G + \frac{1}{\epsilon} E_F^T E_G) (G^T P G + R + \frac{1}{\epsilon} E_G^T E_G)^{-1} (G^T P F + \frac{1}{\epsilon} E_G^T E_F) + \frac{1}{\epsilon} E_F^T E_F + Q = 0, \quad (D.3)$$

então a lei de controle dada por $u_k = K x_k$, sendo

$$K = - \left(G^T P G + R + \frac{1}{\epsilon} E_G^T E_G \right)^{-1} \left(G^T P F + \frac{1}{\epsilon} E_G^T E_F \right), \quad (D.4)$$

alcançará o custo garantido inferior ao traço de $(P^{-1} + \epsilon H H^T)^{-1}$ para incertezas admissíveis δF_k e δG_k .

Os autores propõem um procedimento para obter um limite ótimo para o custo garantido

quando ϵ é avaliado sobre o intervalo $(0, \bar{\epsilon})$, i.e.,

$$\min_{\epsilon > 0} \{ \text{tr} \{ (P^{-1} + \epsilon H H^T)^{-1} \} \}. \quad (\text{D.5})$$

Para o exemplo D.1.1, determinou-se a existência de soluções definidas positivas para (D.3) quando $\epsilon \in (0, 0.0220)$, veja Figura D.6. Para $\epsilon^* = 0.0182$, obteve-se a solução estabilizante ótima de (D.3) dada por

$$P^* = \begin{bmatrix} 167.8105 & 11.0383 & -121.6068 \\ 11.0383 & 6.7848 & -10.2601 \\ -121.6068 & -10.2601 & 91.3164 \end{bmatrix} \text{ e } K^* = \begin{bmatrix} -1.1788 & -0.2140 & 0.5062 \\ -0.7445 & 0.8380 & -0.5129 \end{bmatrix},$$

com custo garantido do sistema em malha fechada sendo $J^* = 53.7109$. Os comportamentos do sistema em malha fechada e ação de controle são apresentados nas figuras D.7(a) e D.7(b).

Figura D.6: Traço de $(P^{-1} + \epsilon H H^T)^{-1}$ para $\epsilon \in (0, 0.0220)$.

As condições de existência e a necessidade do ajuste offline dos parâmetros γ e ϵ relacionados aos controladores H_∞ e custo garantido, respectivamente, consistem em um empecilho para as implementações destes métodos. Embora o RLQ independa do ajuste de parâmetros auxiliares, sua performance é comprometida quando o sistema está sujeito a incertezas paramétricas. Uma diferença mais representativa entre os desempenhos de ambos é apresentada no Exemplo D.1.3. Com relação ao RLQ robusto proposto, a recursividade pode ser realizada sem a necessidade do ajuste de parâmetros auxiliares, dependendo apenas das matrizes de parâmetros previamente conhecidas. Além disso, a convergência e a estabilidade são garantidas para

Figura D.7: Controle Custo Garantido ($\epsilon^* = 0.0182$).

toda incerteza admissível $\{\delta F, \delta G\}$.

Exemplo D.1.3. Considere as mesmas matrizes de parâmetros do Exemplo D.1.1, exceto F substituída por $F = \begin{bmatrix} 5.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.0 \\ -5.0 & 5.0 & 0 \end{bmatrix}$ e condição inicial $x_0 = [0.1 \quad -0.1 \quad 0.5]^T$. Para essa F , os autovalores de $(F + \delta F)$ encontram-se fora do disco unitário aberto para todas as incertezas admissíveis. Nessas circunstâncias, tanto o RLQ nominal quanto o controle H_∞ não foram capazes de regular o sistema incerto, veja as figuras D.8(b) e D.8(c). Quanto ao regulador com custo garantido, ϵ^* ficou indeterminado. Por outro lado, o RLQ robusto mostrou-se efetivo na regulação do sistema incerto, e sem a necessidade do ajuste de parâmetros auxiliares, veja a Figura D.8(a).

Figura D.8: Malha Fechada.

D.2 Filtro Robusto

Dois exemplos são apresentados para mostrar a eficiência do filtro robusto proposto. No primeiro exemplo, a performance é analisada em termos do parâmetro de penalidade μ . Quando $\mu \rightarrow +\infty$, as soluções das equações de Riccati e os polos do sistema são avaliados. No segundo exemplo, o filtro robusto é comparado com o filtro de Kalman e filtro robusto desenvolvido em [92].

Exemplo D.2.1. *Considere o sistema linear incerto (5.1)-(5.2) com apenas um modo de operação e invariante no tempo com as seguintes matrizes de parâmetros*

$$F = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & -0.05 \\ 2.5 & -0.3 & 0 \\ 2.1 & 1.9 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad G = I_3, \quad C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad D = 1,$$

$$M = \begin{bmatrix} -0.40 & 0.15 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad E_F = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.19 & -0.12 \end{bmatrix}, \quad E_G = \begin{bmatrix} 0.19 & -0.04 & 0.11 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} 0.18 \end{bmatrix}, \quad E_C = \begin{bmatrix} -0.12 & -0.09 & 0.13 \end{bmatrix}, \quad E_D = \begin{bmatrix} 0.05 \end{bmatrix},$$

$$Q = I_3, \quad R = I_1, \quad P_{0|-1} = I_3.$$

Os resultados apresentados a seguir ilustram o papel desempenhado pelo parâmetro de penalidade no projeto do filtro robusto proposto. Para diferentes valores de μ , as soluções das equações de Riccati e os polos do sistema são avaliados. Algumas simulações, semelhantes ao controle robusto da seção anterior, são realizadas para ilustrar o comportamento do filtro robusto quando o parâmetro μ tende ao infinito, por meio das equações recursivas na Tabela 5.1.

Na Tabela D.2, as convergências de $P_{\mu,k+1|k}^r$ e $P_{\mu,k+1|k+1}^r$ com relação a k para $P_{\mu,p}^r$ e $P_{\mu,f}^r$, respectivamente são apresentadas para diversos valores de μ . Para valores suficientemente grandes de μ , as sequências de matrizes $\{P_{\mu,p}^r\}_{\mu=0}^{+\infty}$ e $\{P_{\mu,f}^r\}_{\mu=0}^{+\infty}$ convergem para soluções definidas positivas $P_{+\infty,p}^r$ e $P_{+\infty,f}^r$, respectivamente.

Os polos do sistema incerto (5.1)-(5.2) são apresentados na Figura D.9. A matriz¹ $X_{61,k|k-1}^\mu$

¹Veja o significado da notação X_{61} no Capítulo 7 - pg 133 e 134.

Tabela D.2: Comportamento do Filtro Robusto quando $\mu \rightarrow +\infty$

μ	$P_{\mu,p}$	$P_{\mu,f}$
10^2	$\begin{bmatrix} 0.9703 & 0.9233 & -0.2149 \\ 0.9233 & 4.7939 & 3.0172 \\ -0.2149 & 3.0172 & 12.2660 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.6332 & 0.2908 & 0.2403 \\ 0.2908 & 2.9611 & 1.4414 \\ 0.2403 & 1.4414 & 2.5078 \end{bmatrix}$
10^5	$\begin{bmatrix} 0.4469 & 0.4007 & -0.6967 \\ 0.4007 & 1.6456 & 0.8554 \\ -0.6967 & 0.8554 & 5.5852 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1281 & 0.1030 & 0.2397 \\ 0.1030 & 1.0909 & 1.0562 \\ 0.2397 & 1.0562 & 1.1929 \end{bmatrix}$
$> 10^{10}$	$\begin{bmatrix} 0.4447 & 0.3988 & -0.6978 \\ 0.3988 & 1.6359 & 0.8467 \\ -0.6978 & 0.8467 & 5.5594 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1265 & 0.1024 & 0.2384 \\ 0.1024 & 1.0856 & 1.0524 \\ 0.2384 & 1.0524 & 1.1859 \end{bmatrix}$

é estável para todo $\{\delta F_k, \delta G_k\}$ admissível. Os polos de $X_{61,k|k-1}^\mu$ quando $\mu \rightarrow +\infty$, para $\{\delta F_k, \delta G_k\}$ admissíveis, são apresentados na Figura D.10.

Figura D.9: Polos do Sistema com $\Delta_k \in [-1, 1]$. (a) $\mu = 10^j, j = 0, \dots, 10$ (b) $\mu > 10^{10}$ Figura D.10: Polos da Matriz $X_{61,k|k-1}^\mu$ com $\Delta_k \in [-1, 1]$.

Exemplo D.2.2. Considere (5.1)-(5.2) sem saltos e reduzido ao sistema invariante no tempo analisado em [92]

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= (F + \delta F_k) x_k + G w_k, \\ y_k &= C x_k + v_k,\end{aligned}$$

com as matrizes de parâmetros nominais $F = \begin{bmatrix} 0.9802 & 0.0196 \\ 0 & 0.9802 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$, as incertezas paramétricas $M = \begin{bmatrix} 0.0198 \\ 0 \end{bmatrix}$, $E_F = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix}$, e as matrizes de variâncias de w_k e v_k sendo $Q = \begin{bmatrix} 1.9608 & 0.0195 \\ 0.0195 & 1.9605 \end{bmatrix}$ e $R = 1$, respectivamente.

Nas figuras D.11 e D.12, os desempenhos do filtro robusto da Tabela 5.1, do filtro proposto em [92] e do filtro de Kalman padrão são comparados ao estimar os estados do sistema linear incerto com os parâmetros dados acima. Além de estimar os estados com base nas medições $\{y_k\}$ provenientes do sistema incerto, o Filtro de Kalman foi considerado em uma situação adicional: estimar os estados do sistema nominal (sem incertezas, i.e., $\delta F \equiv 0$). Para cada $k = 0, \dots, N$, os pontos das curvas correspondem às variâncias das normas dos erros de estimativas computados sobre T experimentos ($T = 500$, $N = 1000$) de acordo com $\mathbb{E}\{\|x_k - \hat{x}_{k|k-1}\|^2\} \approx \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \|x_k^{(j)} - \hat{x}_{k|k-1}^{(j)}\|^2$. Para cada experimento j , as curvas na Figura D.11 foram produzidas considerando Δ fixado para todo o horizonte de tempo; enquanto para as curvas na Figura D.12, Δ variou aleatoriamente a cada instante k .

As curvas com traços suaves, posicionadas inferiormente, nas figuras D.11 e D.12 correspondem ao desempenho do filtro de Kalman para o sistema sem incertezas, e consistem no caso ótimo. Já as curvas posicionadas superiormente correspondem ao desempenho do Filtro de Kalman ao estimar os estados do sistema sujeito a incertezas, revelando que sua performance é degradada pela presença de incertezas. As curvas de desempenho dos estimadores robustos são praticamente equivalentes nos dois casos analisados. No primeiro caso, ambas situam-se numa posição intermediária aos desempenhos ótimo e deteriorado do filtro de Kalman. No entanto, no segundo caso, em especial, os desempenhos dos filtros robustos e do filtro de Kalman praticamente equivalem-se.

Em termos de desempenho, há uma equivalência entre os filtros robustos e uma deterioração significativa da performance do Filtro de Kalman quando aplicado ao sistema incerto. Por outro lado, a implementação do filtro robusto em [92] requer o cálculo de um parâmetro auxiliar a cada instante, enquanto o filtro robusto proposto independe de qualquer ajuste.

Figura D.11: Variância do Erro de Estimativa - $\Delta \in [-1, 1]$.

Figura D.12: Variância do Erro de Estimativa - $\Delta_k \in [-1, 1]$.

ÍNDICE REMISSIVO

Blocos Matriciais

Inversa, 153

Convergência Assintótica, 48

Detectabilidade, 48

Estabilidade na Média Quadrática, 47

Estabilizabilidade, 47

Estimativa Mínima Quadrática

Ponderada, 20

Regularizada, 22

Robusta, 25

Estimativas de Estados, 159

abordagem determinística, 159

filtrada, 165

preditora, 161

Filtro de Kalman Ótimo

modo conhecido, 69

algoritmo, 76, 82

modo desconhecido, 107

abordagem determinística, 113

abordagem estocástica, 110

Filtro de Kalman Robusto

modo conhecido, 91

algoritmo, 99

modo desconhecido, 121

Função Penalidade, 16

Convergência, 17

Limitantes, 155

Problema de Mínimos Quadrados, 18

Ponderados

Restrito, 27

Regularizados, 22

com incertezas, 23

Regulador Linear Quadrático

Ótimo, 33

algoritmo, 45

Robusto, 51

algoritmo, 60

Sistema Aumentado, 169

Solução Estabilizante, 48