ELAINE SANTOS DIAS

**Caracterização da Região de Estabilidade
de Sistemas Dinâmicos Discretos Não
Lineares**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos

ORIENTADOR: Prof. Dr. Luís Fernando Costa Alberto

São Carlos
2016

Trata-se da versão corrigida da dissertação.

A versão original se encontra disponível na EESC/USP que aloja o Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica.

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

D541c Dias, Elaine Santos
 Caracterização da região de estabilidade de
 sistemas dinâmicos discretos não lineares / Elaine
 Santos Dias; orientador Luís Fernando Costa Alberto.
 São Carlos, 2016.

 Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação
 em Engenharia Elétrica e Área de Concentração em
 Sistemas Dinâmicos -- Escola de Engenharia de São
 Carlos da Universidade de São Paulo, 2016.

 1. Sistemas dinâmicos discretos não lineares. 2.
 Região de estabilidade. 3. Fronteira da região de
 estabilidade. 4. Órbitas periódicas. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Licenciada **ELAINE SANTOS DIAS**.

Título da dissertação: "Caracterização da região de estabilidade de sistemas dinâmicos discretos não lineares"

Data da defesa: 30/09/2016

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**
(Orientador)
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovada

Profa. Dra. **Grace Silva Deaecto**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Aprovada

Prof. Dr. **Marcio Fuzeto Gameiro**
(Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação/ICMC-USP)

APROVADA

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica:
Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**

*À minha Família e à minha Avó
Tomasia (in memoriam).*

Agradecimentos

À Deus.

À minha família, em especial à minha mãe, meu pai, minha irmã e minha prima Beatriz, que mesmo a distância, concederam-me total apoio para realização deste trabalho.

À minha avó Tomasia, que sempre torceu pela felicidade de suas netas e que de algum lugar está torcendo por mim.

À Rafael Argolo pelo apoio incondicional e pelo incentivo nos momentos de dúvida.

Aos professores Luís Fernando Costa Alberto e Fabíolo Moraes Amaral, pelas orientações e ensinamentos transmitidos.

À FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro para realização deste trabalho. Processo nº 2014/14141-8.

Aos amigos que mesmo de longe sempre me incentivaram: Jamile, Bruno, Isis e Givaldo.

À Rosa Odete e Luciana Tosin, que foram minha família em São Carlos.

Aos amigos do LACO (Laboratório de Análise Computacional em Sistemas de Potência). Em especial Adriando Abrantes, Taylon Landgraf e Thiago de Souza pelos momentos de discussões técnicas e descontração.

Aos colegas, funcionários e professores do Departamento de Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia de São Carlos.

Resumo

DIAS, E. S., *Caracterização da Região de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Discretos Não Lineares*. São Carlos, 2016, 73p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

O estudo da região de estabilidade é de extrema importância nas ciências, aplicações em engenharia e nos sistemas de controle não linear. Neste trabalho, uma caracterização completa da região de estabilidade e da fronteira da região de estabilidade de pontos fixos estáveis de uma classe ampla de sistemas dinâmicos discretos não lineares é desenvolvida. Os resultados deste trabalho estendem a caracterização da região de estabilidade já proposta na literatura para uma ampla classe de sistemas, modelados por difeomorfismos e que admitem a presença de órbitas periódicas e pontos fixos na fronteira da região de estabilidade. Caracterizações dinâmicas e topológicas são propostas para a fronteira da região de estabilidade. Além disso, são dadas condições necessárias e suficientes para que um ponto fixo ou órbita periódica pertença à fronteira da região de estabilidade. Exemplos numéricos, incluindo o modelo de uma rede neural simétrica com 2-neurônios, ilustram os resultados propostos neste trabalho.

Palavras-chave: Região de Estabilidade, Sistemas Dinâmicos Discretos, Órbitas Periódicas, Fronteira da Região de Estabilidade.

Abstract

Dias, E. S., Characterization of the Stability Region of the Nonlinear Discrete Dynamical Systems. São Carlos, 2016, 73. Dissertation (Master Thesis) - Engineering School of São Carlos, University of São Paulo.

The study of the stability region is very important in the sciences, engineering applications, and in nonlinear control systems. In this work, a complete characterization for both the stability region and the stability boundary of stable fixed points of a nonlinear discrete dynamical systems is developed. The results of this work extend the characterization of the stability region already proposed in the literature for a larger class of systems, which are modeled by diffeomorphisms and which admit the presence of periodic orbits and fixed points on the stability boundary. Several dynamical and topological characterizations are proposed to the stability boundary. Moreover, several necessary and sufficient conditions for fixed points and periodic orbits to lie on the stability boundary are derived. Numerical examples, including the model of a symmetric neural network with 2-neurons, illustrate the results proposed in this work.

Keywords: Nonlinear Discrete Dynamical System. Stability Region. Stability Boundary. Periodic Orbits.

Lista de Ilustrações

2.1	Interseção das curvas M e N	29
2.2	Estabilidade e Atratividade dos pontos fixos do sistema (2.1).	30
2.3	Trajetória do sistema dinâmico unidimensional $x_{k+1} = 4x_k(1 - x_k)$ com condição inicial $x_0 = \frac{1}{4}$	32
2.4	Variedades invariantes de um ponto fixo hiperbólico do sistema (2.1).	34
2.5	Interpretação geométrica do λ -Lema (PALIS; MELO, 1978).	35
3.1	A região de estabilidade do sistema unidimensional (3.2), indicada em preto na diagonal, não é um conjunto conexo.	40
3.2	Caracterização da fronteira da região de estabilidade $\partial A(0, 0)$	43
3.3	Caracterização da fronteira da região de estabilidade $\partial A(0, 0)$	44
4.1	Retrato de fase do sistema discreto não linear (4.3).	49
4.2	Retrato de fase do sistema discreto não linear (4.4).	50
4.3	Região de estabilidade de $(0, 0)$ e variedades invariantes dos elementos críticos do sistema (4.5).	59
4.4	Região de estabilidade de $(0, 0)$ e variedades invariantes dos pontos fixos do sistema (4.6).	59
5.1	Retrato de fase da rede neural (5.1) para $a = 0.5$. A origem é um ponto fixo globalmente assintoticamente estável.	66
5.2	Retrato de fase da rede neural (5.1) para $a = 1.5$. A origem é um ponto fixo repulsor e x_+ e x_- são pontos fixos assintoticamente estáveis do sistema. γ_s , γ_+ e γ_- são órbitas 2-periódicas do sistema (5.1).	67
5.3	Retrato de fase para o sistema (5.3). O sistema possui 9 pontos fixos.	67
5.4	Região de Estabilidade do ponto fixo assintoticamente estável x_+ . A fronteira da região de estabilidade é a união das variedades estáveis dos elementos críticos pertencentes a $\partial A(x_+)$	68

Sumário

1	Introdução	17
1.1	Estrutura do Trabalho	19
2	Preliminares	21
2.1	Espaços Métricos	21
2.2	Transversalidade	28
2.3	Sistemas Dinâmicos Discretos Não Lineares	29
2.4	λ -Lema	34
3	Revisão da Teoria de Região de Estabilidade de Sistema Dinâmicos Discretos	37
3.1	Caracterização Topológica da Região de Estabilidade	38
3.2	Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade	40
4	Caracterização Completa da Região de Estabilidade de uma classe ampla de Sistemas Dinâmicos Discretos	45
4.1	Sistema p -iterado	45
4.2	Caracterização Topológica da Região de Estabilidade	49
4.3	Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade	51
5	Região de Estabilidade de Redes Neurais Simétricas Associativas em Tempo Discreto	63
6	Considerações Finais	69
6.1	Trabalhos Futuros	70
6.2	Publicações Relacionadas à Dissertação	70
	Referências	71

Capítulo 1

Introdução

Devido à sua grande variedade de aplicações, sistemas dinâmicos discretos vêm sendo amplamente utilizados para modelar diversos sistemas, como por exemplo, modelos de redes neurais artificiais (FERREIRA; KROGH, 1997), (BLUM; WANG, 1992). Dinâmicas de sistemas elétricos de potência são também modeladas através de equações de diferença. Por exemplo, sistemas elétricos de potência com OLTCs (On-Load Tap Chargers) são modelados a partir de equações diferenciais discretas no tempo (ABRAHAM; ROBBIN, 1967).

Há ainda a utilização de modelos dinâmicos discretos na análise de sistemas que não podem ser medidos continuamente, tais como dinâmicas de HIV e esquemas de tratamento (ELAIW; XIA, 2009). Uma vez que as realimentações provenientes dos exames de sangue são feitas periodicamente, a modelagem em tempo discreto se mostra mais adequada para análise deste tipo de sistema.

O avanço das ferramentas computacionais e o crescimento do emprego de computadores para simulações e controle de sistemas dinâmicos vêm estimulando o desenvolvimento do estudo de sistemas dinâmicos discretos. Sistemas de controle de rede, por exemplo, podem ser modelados e analisados através de um modelo discreto não linear (CLOOSTERMAN et al., 2009). O controle de injeção de combustível é outra aplicação de controle não linear de sistemas discretos (GRIZZLE; KANG, 2001). Condições de estabilidade robusta para sistemas dinâmicos discretos lineares são estudadas em (OLIVEIRA; BERNUSSOU; GEROMEL, 1999).

Usualmente, em engenharia, os sistemas são modelados para operarem sob um ponto fixo, desejado assintoticamente estável. Contudo, pontos fixos assintoticamente estáveis de sistemas dinâmicos discretos não lineares geralmente não são globalmente estáveis. Na maioria dos casos, existe um conjunto de condições iniciais cujas trajetórias, iniciando nesse conjunto, tendem ao atrator quando o tempo tende a infinito. A este conjunto damos o nome de Região de Estabilidade. Ainda encontram-se na literatura as seguintes nomenclaturas: Região de Atração, Domínio de atração e Bacia de atração.

Determinar essa região é de extrema importância em diversas áreas, tais como: sistemas elétricos de potência (CHIANG; WU; VARAIYA, 1994), (SILVA; ALBERTO; BRETAS, 2005) e economia (ARROW; HAHN, 1971). Todavia, determinar a região de estabilidade de sistemas não lineares não é tarefa trivial.

Métodos para o estudo da região de estabilidade começaram a ser largamente explorados após a década de 60, impulsionados pelo estudo de estabilidade transitória de sistemas elétricos de potência. Os estudos iniciais de estabilidade transitória baseavam-se no Princípio de Invariância de LaSalle (LASALLE, 1977), (LASALLE, 1976) para obter estimativas da região de estabilidade. A ideia fundamental desta teoria é utilizar conjuntos de nível de uma função escalar, chamada também de função de Lyapunov, para estimar a região de estabilidade. Contudo, tais métodos são tidos como conservadores e não exploram a estrutura da fronteira da região de estabilidade.

Interessados em obter estimativas da região de estabilidade menos conservadoras para uma classe de sistemas dinâmicos contínuos, Tsolas, Arapostathis e Varaiya propuseram uma primeira caracterização para a fronteira da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio em (TSOLAS; ARAPOSTATHIS; VARAIYA, 1985). Posteriormente, Chiang, Wu e Varaiya, em (CHIANG; WU; VARAIYA, 1987), propuseram uma nova caracterização dinâmica para a fronteira da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio que generaliza a caracterização proposta em (TSOLAS; ARAPOSTATHIS; VARAIYA, 1985). Eles propõem, sob certas condições no sistema, que a fronteira da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio é composta pela união das variedades estáveis dos pontos de equilíbrio pertencentes à fronteira da região de estabilidade.

Mais tarde, Chiang, Hirsch e Wu (CHIANG; HIRSCH; WU, 1988) apresentam uma caracterização completa para a fronteira da região de estabilidade para um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Nesta nova caracterização, eles estendem a caracterização proposta em (CHIANG; WU; VARAIYA, 1987) para uma classe de sistemas dinâmicos contínuos que admitem órbitas periódicas na fronteira da região de estabilidade. Em (CHIANG; HIRSCH; WU, 1988), sob certas condições, é proposto que a fronteira da região de estabilidade é a união das variedades estáveis dos elementos críticos, pontos de equilíbrio e órbitas periódicas, pertencentes à fronteira da região de estabilidade.

Extensões da caracterização da região de estabilidade foram propostas para outras classes de problemas, citamos aqui sistemas singularmente perturbados (CHIANG; ALBERTO, 2015) e o estudo da região de estabilidade em sistemas dinâmicos autônomos sujeitos à variação de parâmetros (AMARAL; ALBERTO, 2011).

Para a classe particular de sistemas dinâmicos discretos, a teoria da região de estabilidade não está tão desenvolvida quanto a teoria para sistemas dinâmicos contínuos. Estudos recentes vêm sendo realizados para o desenvolvimento dessa teoria. Seguindo uma linha de raciocínio análoga à utilizada na caracterização da fronteira da região de estabilidade para sistemas contínuos, Chiang, Lee, Amaral e Alberto, em (CHIANG et al., 2012) e

(CHIANG; ALBERTO, 2015), propõem uma caracterização para a fronteira da região de estabilidade para uma classe de sistemas dinâmicos discretos não lineares. Sob certas condições, eles mostram, similarmente ao demonstrado em (CHIANG; HIRSCH; WU, 1988), que a fronteira da região de estabilidade de um ponto fixo assintoticamente estável é composta pela união das variedades estáveis dos pontos fixos pertencentes à fronteira da região de estabilidade. Contudo, essa classe não admite comportamentos complexos, tais como órbitas periódicas, na fronteira da região de estabilidade.

Sendo assim, o objetivo principal deste trabalho é estender os resultados de (CHIANG et al., 2012)(CHIANG; ALBERTO, 2015). Mais precisamente, neste trabalho são desenvolvidos fundamentos teóricos da região de estabilidade e de sua fronteira para uma classe de sistemas dinâmicos discretos não lineares modelados por um difeomorfismo e que admitem a presença de pontos fixos e órbitas periódicas na fronteira da região de estabilidade.

Dentre as contribuições deste trabalho destacam-se: (1) Uma ampla caracterização topológica da região de estabilidade e da fronteira da região de estabilidade; (2) Condições necessárias e suficientes para que pontos fixos e órbitas periódicas pertençam à fronteira da região de estabilidade; (3) Caracterização da fronteira da região de estabilidade para uma classe ampla de sistemas dinâmicos discretos não lineares.

Para ilustrar a caracterização da fronteira da região de estabilidade desenvolvida neste trabalho, alguns exemplos de sistemas dinâmicos discretos não lineares são utilizados. Em particular, os resultados deste trabalho são utilizados para estudar a estrutura da região de estabilidade e da fronteira da região de estabilidade de uma classe de redes neurais simétricas com 2-neurônios.

1.1 Estrutura do Trabalho

Os próximos capítulos deste trabalho estão organizados da seguinte maneira:

- **Capítulo 2:** Neste capítulo, apresentamos uma breve revisão de análise matemática e topologia. Uma revisão da teoria de sistemas dinâmicos discretos não lineares será apresentada. Em particular, apresentamos o λ -Lema, que será amplamente utilizado no decorrer do texto para a demonstração de resultados importantes, e apresentamos a definição e alguns resultados relacionados ao conceito de transversalidade.
- **Capítulo 3:** Este capítulo é dedicado à apresentação da caracterização da região de estabilidade desenvolvida em (CHIANG et al., 2012)(CHIANG; ALBERTO, 2015). Também é apresentada uma caracterização topológica completa da região de estabilidade e de sua fronteira para uma classe de sistemas dinâmicos discretos que admitem apenas pontos fixos como conjunto limite de trajetórias na fronteira da região de estabilidade.

- **Capítulo 4:** Este capítulo contém a principal contribuição deste trabalho. Sob certas condições, desenvolve-se a caracterização da fronteira da região de estabilidade de uma classe de sistema dinâmicos discretos não lineares modelados por um difeomorfismo e que admitem órbitas periódicas e pontos fixos na fronteira da região de estabilidade. Além disso, uma caracterização topológica completa da região de estabilidade e da fronteira da região de estabilidade é desenvolvida. Ainda neste capítulo, condições necessárias e suficientes são dadas para que um ponto fixo ou órbita periódica pertença à fronteira da região de estabilidade.
- **Capítulo 5:** Neste capítulo, exploramos os resultados obtidos no Capítulo 4 para estudar a região de estabilidade e a fronteira da região de estabilidade de uma classe de redes neurais simétricas com 2-neurônios modeladas em tempo discreto.
- **Capítulo 6:** Este capítulo é dedicado às considerações finais deste trabalho e expectativas futuras.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos algumas definições e resultados importantes para o desenvolvimento deste trabalho, bem como algumas notações utilizadas no decorrer do texto. Inicialmente discutimos alguns conceitos sobre espaços métricos. Para mais informações, ver (LIMA, 2011a),(LIMA, 2012) e (LIMA, 2011b). Será feita ainda uma revisão acerca dos conceitos da teoria de transversalidade, ver (WIGGINS, 1996) para mais detalhes. Posteriormente, é feita uma revisão acerca da teoria de sistemas dinâmicos, com a apresentação de definições e resultados importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Para mais informações, seguem-se as referências (HALE, 1988), (RAUGEL, 2002), (LASALLE, 1977), (LASALLE; AIR, 1968)(SHUB, 1987) e (DEVANEY et al., 1989). Por último, apresentamos o λ -lema, que é utilizado nas demonstrações de algumas proposições deste trabalho. Para mais informações sobre o λ -lema, sugerem-se as referências (PALIS, 1969),(PALIS; MELO, 1978) e (BRIN; STUCK, 2003).

2.1 Espaços Métricos

2.1.1 Espaços Euclidianos

Seja M um conjunto qualquer, definimos uma *métrica* em M como uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa cada par ordenado $x, y \in M \times M$ a um número real $d(x, y)$, de modo que d satisfaça as seguintes propriedades

1. $d(x, x) = 0$;
2. $d(x, y) > 0$, se $x \neq y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$; (Desigualdade triangular)

M , munido da métrica d , será denotado por (M, d) e chamado de *espaço métrico*.

Considere o conjunto $\mathbb{R}$ e o número $n \in \mathbb{N}$. Chamamos de *espaço euclidiano n -dimensional*, denotado por $\mathbb{R}^n$, o produto de n fatores iguais de $\mathbb{R}$, ou seja,

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{vezes}}$$

Definimos como função *distância*, a função $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par (x, y) o número real $d(x, y)$ tal que

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

A função d é uma métrica e $(\mathbb{R}^n, d)$ é um espaço métrico munido com essa métrica. Quando não houver possibilidade de ambiguidade, denotaremos o espaço métrico euclidiano $\mathbb{R}^n$ munido da métrica d simplesmente por $\mathbb{R}^n$.

Considere o espaço vetorial E , uma *norma* de E é uma função escalar $||\cdot|| : E \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada vetor $x \in E$ ao número $||x||$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $||x|| > 0$ se $x \neq 0$ e $||x|| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
2. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$, com $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$; (Desigualdade triangular)

Chamamos o par $(E, ||\cdot||)$ de *Espaço Vetorial Normado*. A função $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada $x \in \mathbb{R}^n$ ao número

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

é uma norma em $\mathbb{R}^n$. Chamamos a norma definida acima de *norma euclidiana*.

Além da norma euclidiana, outras normas definidas em $\mathbb{R}^n$ são bem conhecidas, tais como: norma do mínimo, norma do máximo.

Diremos que duas normas, $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_2$, definidas no mesmo espaço vetorial são equivalentes se existirem números reais $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$a \cdot ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq b \cdot ||x||_2$$

para todo x no espaço vetorial.

Teorema 2.1.1. (LIMA, 2011b) *Em um espaço vetorial de dimensão finita quaisquer duas normas são equivalentes.*

Considere o espaço vetorial normado E , definimos o *produto interno* no espaço E como uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada par de vetores $x, y \in E$ ao número real $\langle x, y \rangle$, de modo que $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle$, com $\alpha \in \mathbb{R}$;

2.1.2 Conjuntos Abertos

Considere o espaço métrico M munido com a métrica d . Definimos como *bola aberta* com centro $a \in M$ e raio $\epsilon > 0$ o conjunto dos pontos $x \in M$ cuja distância ao ponto a é menor que ϵ , isto é,

$$B(a, \epsilon) = \{x \in M; d(x, a) < \epsilon\}$$

Analogamente, definimos como *bola fechada* com centro $a \in M$ e raio $\epsilon > 0$ o conjunto de todos os pontos $x \in M$ tais que a distância $d(x, a)$ é menor ou igual a ϵ , isto é

$$B[a, \epsilon] = \{x \in M; d(x, a) \leq \epsilon\}$$

Além disso, definimos como *esfera* de centro $a \in M$ e raio $\epsilon > 0$ o conjunto de todos os pontos $x \in M$ cuja distância $d(x, a)$ é igual a ϵ , isto é,

$$S[a, \epsilon] = \{x \in M; d(x, a) = \epsilon\}$$

Considere o subconjunto $X \subset M$, um ponto $a \in X$ é dito *ponto interior* de X quando a é centro de alguma bola aberta contida em X , ou seja, se a é ponto interior de X , existe $\epsilon > 0$ tal que, $d(x, a) < \epsilon$ implica em $x \in X$.

Chamamos de interior de X , denotado por $\text{int}X$, o conjunto de todos os pontos interiores de X em M . A definição de conjunto interior está ligado ao conceito de conjuntos abertos, de tal forma que, um subconjunto X de um espaço métrico M é dito aberto quando todos os pontos de X são interiores a ele mesmo, isto é, X é aberto se, e só se, $X = \text{int}X$.

Teorema 2.1.2. (LIMA, 2011a) *Os conjuntos abertos do espaço métrico M gozam das seguintes propriedades:*

1. *O conjunto vazio e o espaço M são abertos;*
2. *A interseção $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$ finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto;*
3. *A reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de uma família qualquer $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos abertos é um conjunto aberto,*

Observe que, dados um subconjunto $X \subset M$ e um ponto $a \in M$, existem três possibilidades:

- $a \in \text{int}X$;
- $a \in \text{int}(M/X)$;
- toda bola aberta de centro a e raio ϵ contém pontos de X e do complementar de X ;

No último caso diremos que a é um ponto na fronteira de X , denotada por ∂X , definida como o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que, toda bola aberta com centro em x contém ao menos um ponto de X e um ponto do complementar de X . Dessa maneira, podemos decompor o conjunto M da seguinte forma

$$M = \text{int}X \cup \partial X \cup \text{int}(M/X)$$

2.1.3 Conjuntos Fechados

Considere o subconjunto $X \subset M$, dizemos que o ponto $a \in M$ é um *ponto aderente* ao conjunto X quando, para todo $\epsilon > 0$, a bola aberta $B(a, \epsilon)$ contém algum ponto de X . Ou ainda, $a \in M$ é um *ponto aderente* ao conjunto X se a é limite de alguma sequência de pontos do conjunto X , isto é, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, com $x_k \in X$. O conjunto de todos os pontos aderentes ao conjunto X é chamado *fecho* de X e será denotado por $\overline{X}$.

Um subconjunto $X \subset M$ é dito *fechado* em M se contém todos os seus pontos aderentes, isto é, $X = \overline{X}$. A bola fechada $B[a, \epsilon]$ e a esfera $S[a, \epsilon]$ são exemplos triviais de conjuntos fechados em $\mathbb{R}^n$.

Ainda é possível definir conjuntos fechados através da convergência de sequências da seguinte maneira: X é fechado se, e somente se, o limite de qualquer sequência convergente formada por pontos de X também pertence ao conjunto X . A seguir, apresentamos uma sequência de resultados com propriedades importantes dos conjuntos fechados.

Teorema 2.1.3. (LIMA, 2011a) *Um subconjunto $X \subset M$ é fechado se, e somente se, seu complementar é aberto em M .*

Teorema 2.1.4. (LIMA, 2011a) *O fecho de um conjunto $X \subset M$ é um conjunto fechado.*

Teorema 2.1.5. (LIMA, 2011a) *Os subconjuntos fechados de M satisfazem as seguintes propriedades:*

1. *O conjunto vazio e o conjunto M são fechados;*
2. *A união $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k$ de um número finito de conjuntos fechados de M é um conjunto fechado;*
3. *A interseção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ de uma família arbitrária $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos fechados é um conjunto fechado;*

Observe que, segundo o teorema enunciado acima, a união de um número finito de conjuntos fechados ainda é um conjunto fechado, entretanto o resultado não é válido para um número infinito de uniões.

Sejam $Y \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que Y é *denso* em X quando todo ponto de X é limite de uma sequência de pontos em Y , isto é, $X \subseteq \overline{Y}$.

Exemplo 2.1.6. *O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é um conjunto denso em $\mathbb{R}$. Além disso, o conjunto dos números irracionais $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ também é um conjunto denso em $\mathbb{R}$.*

2.1.4 Conjuntos Conexos

Uma *cisão* no espaço métrico M é uma decomposição do espaço M tal que $M = A \cup B$, com $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$. Chamamos de *cisão trivial* a decomposição de M tal que $M = M \cup \emptyset$.

Diremos que um espaço métrico M é *conexo* quando a única cisão que M admite é a trivial, caso contrário diremos que M é *desconexo*. É importante notar que a definição de conexidade de um espaço métrico está intrinsecamente ligada à ideia de particionamento desse espaço em pedaços.

Teorema 2.1.7. *(LIMA, 2011a) Os conjuntos conexos gozam das seguintes propriedades:*

1. *A reunião $X = \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$ de uma família arbitrária $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos conexos que tenham um ponto a em comum é um conjunto conexo;*
2. *O fecho de um conjunto conexo é um conjunto conexo;*

É possível definir conexidade de um conjunto por um viés mais geométrico através da definição conexidade por caminhos.

Definimos um *caminho* no espaço métrico M como um aplicação contínua $f : I \rightarrow M$, definida num intervalo I . Além disso, diremos que dois pontos contidos num espaço métrico M podem ser ligados por um caminho em M quando existir função contínua $f : I \rightarrow M$ tal que se $x, y \in M$, então $x, y \in f(I)$. Se, em um dado espaço, quaisquer dois pontos podem ser ligados por um caminho, então diremos que esse espaço é *conexo por caminho*.

Teorema 2.1.8. *(LIMA, 2011a) Considere M um espaço métrico, se M é conexo por caminho, então M é conexo.*

Observe que a recíproca não é verdadeira. De fato tome $X \subset \mathbb{R}^2$ tal que X é a união do gráfico de $\sin(1/x)$, com $0 < x \leq 1$, com a origem $(0, 0)$, temos que X é um espaço conexo, contudo X não é conexo por caminho.

2.1.5 Conjuntos Compactos

Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$, definimos uma *cobertura* de X como uma família $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de M tais que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Além disso, caso exista um subconjunto $L_1 \subset L$ tal que, para cada $x \in X$, é possível obter $\lambda \in L_1$ tal que $x \in A_\lambda$, então chamamos a subfamília $(A_\lambda)_{\lambda \in L_1}$ de *subcobertura* de $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$. Se cada conjunto A_λ da família $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é aberto em M , então diremos que a cobertura $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma cobertura aberta.

Um espaço métrico M é dito compacto, se toda cobertura aberta de M admite subcobertura finita, isto é, se $M \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, então existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in L$ tais que $M \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$.

A bola fechada $B[a, \epsilon]$ e a esfera $S[a, \epsilon]$, definidas num espaço euclidiano, são exemplos de conjuntos compactos. Além disso, diremos que um espaço métrico M é *localmente compacto* quando todo ponto $x \in M$ possuir uma vizinhança compacta, isto é, para todo $x \in M$ existe um compacto K tal que $x \in \text{int}(K)$. Mais precisamente, um espaço métrico M é localmente compacto se, e somente se, para todo $x \in M$ existir $\epsilon > 0$ tal que a bola fechada $B[x, \epsilon]$ seja compacta.

Teorema 2.1.9. (LIMA, 2011a) *Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto. Reciprocamente, um subconjunto compacto de qualquer espaço métrico é fechado.*

Teorema 2.1.10. (LIMA, 2011a) *Seja M um espaço métrico, se M é compacto, então M é limitado.*

De acordo com os teoremas acima, é possível inferir que um subconjunto compacto em qualquer espaço métrico é sempre limitado e fechado. A recíproca é verdadeira para espaços euclidianos, isto é, para espaços de dimensão finita um espaço métrico é compacto se, e somente se, é limitado e fechado.

2.1.6 Aplicações contínuas

Nesta seção, traremos alguns resultados e definições acerca das aplicações contínuas, trabalharemos com aplicações definidas em espaços euclidianos. Entendemos que o leitor já esteja familiarizado com o conceito de continuidade de funções. Todavia, diremos que uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *contínua* no ponto $a \in X$ quando, para cada $\epsilon > 0$ dado, é possível encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon$$

Se f é contínua em todos os pontos do conjunto X , dizemos simplesmente que f é uma aplicação contínua. O teorema seguinte nos oferece uma condição para verificação da

continuidade de uma aplicação que nos poupa, em muitos casos, do trabalho de calcular os números ϵ e δ .

Teorema 2.1.11. (LIMA, 2012) *A função $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se, para toda sequência x_k em X com $x_k \rightarrow a$ vale que $f(x_k) \rightarrow f(a)$.*

Dada a função $f : A \rightarrow B$ e um subconjunto $X \subseteq A$. Chamamos de *imagem direta de X pela função f* ao conjunto $f(X)$ formado pelos valores $f(x)$ tal que $x \in X$.

Por outro lado, seja $f : A \rightarrow B$, com $Y \subseteq B$. Chamamos de *imagem inversa de Y pela função f* ao conjunto $f^{-1}(Y)$ formado por todos os pontos $x \in A$ tais que $f(x) \in Y$.

Teorema 2.1.12. (LIMA, 2012) *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua em x_0 e $g : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow A$ com $f(A) \subset B$ e $y_0 = f(x_0)$, então $g \circ f$ é contínua em x_0 . Segue que, se f e g são contínuas, então $g \circ f$ é contínua.*

O teorema acima nos diz que, dadas duas funções contínuas, a composição delas ainda é uma função contínua. A seguir, traremos um resultado que nos mostra que uma função contínua tem a propriedade de levar subconjuntos abertos (fechados) do $\mathbb{R}^n$ em subconjuntos abertos (fechados) do $\mathbb{R}^n$, da seguinte maneira:

Teorema 2.1.13. (LIMA, 2012) *Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua se, e somente se, para cada aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ (ou para cada fechado $F \subset \mathbb{R}^n$), sua imagem inversa $f^{-1}(A)$ é um conjunto aberto em X (ou $f^{-1}(F)$ é um conjunto fechado em X).*

Além de conjuntos abertos e conjuntos fechados, funções contínuas também preservam a compacidade entre os espaços. O teorema a seguir traz a relação entre um espaço compacto e sua imagem através de uma função contínua f da seguinte maneira

Teorema 2.1.14. (LIMA, 2012) *Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto compacto. Se $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua, então sua imagem $f(K)$ é um conjunto compacto do $\mathbb{R}^n$.*

A capacidade de preservar propriedades de um espaço em outro relacionados através de uma aplicação contínua é de extrema importância em várias aplicações. Chamamos essa capacidade de *homeomorfismo*. A grosso modo, homeomorfismos são aplicações que "preservam" a noção de distância.

Definição 2.1.15. *Dados os conjuntos $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, um homeomorfismo entre X e Y é uma bijeção contínua $f : X \rightarrow Y$ cuja inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ também é contínua.*

São resultados imediatos da definição acima:

1. O inverso de um homeomorfismo é um homeomorfismo.
2. A composição de dois homeomorfismos é um homeomorfismo.

3. Se dois conjuntos X e Y são homeomorfos, eles possuem a mesma estrutura topológica, isto é, um homeomorfismo leva abertos de X em abertos de Y e sua inversa leva abertos de Y em abertos de X .

Além disso, se $f : X \rightarrow Y$ é uma bijeção diferenciável com inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ diferenciável, chamaremos f de *difeomorfismo* e diremos que X e Y são difeomorfos.

Ainda é possível relacionar as dinâmicas de duas funções distintas através de um homeomorfismo. Sejam $f : A \rightarrow A$ e $g : B \rightarrow B$ duas aplicações. Diremos que f e g são *topologicamente conjugadas* se existe homeomorfismo $h : A \rightarrow B$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Chamamos h de *conjugação topológica*.

2.2 Transversalidade

Nesta seção, fazemos uma breve introdução ao conceito de transversalidade, que será utilizado ao longo deste trabalho para caracterização da fronteira da região de estabilidade. A transversalidade é uma noção geométrica sobre a interseção de variedades ou superfícies. Para mais informações sobre transversalidade, indicam-se a referência (WIGGINS, 1996) e (LIMA, 1973).

Dada uma superfície $M \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^k , dizemos que $v \in \mathbb{R}^n$ é um *vetor tangente* a M no ponto $p \in M$ se existe uma curva $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto contendo 0, diferenciável em $t = 0$, tal que $\lambda(I) \subset M$, $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. O conjunto de todos os vetores tangentes a M em p é chamado de *espaço tangente* a M em p , e será denotado por $T_p(M)$ (LIMA, 1973).

Dizemos que duas variedades M e N de classe C^r em $\mathbb{R}^n$ são transversais em $p \in \mathbb{R}^n$ se, $p \notin M \cap N$ ou se $p \in M \cap N$ então, $T_p(M) + T_p(N) = \mathbb{R}^n$, sendo $T_p(M)$ e $T_p(N)$ respectivamente os espaços tangentes a M e N em p . As variedades M e N são ditas *transversais* se são transversais para cada $p \in \mathbb{R}^n$.

Lema 2.2.1. (WIGGINS, 1996) *Sejam M e N variedades de classe C^r , com $r \geq 1$, em $\mathbb{R}^n$. Se M e N se interceptam transversalmente em p , então*

$$\dim T_p(M) + \dim T_p(N) - \dim(T_p(M) \cap T_p(N)) = n$$

O lema acima nos fornece uma ferramental útil para determinar se duas variedades são transversais e estabelece uma relação entre o conceito de transversalidade e dimensão dos espaços tangentes.

Exemplo 2.2.2. *Sejam M o eixo x em $\mathbb{R}^2$ e N o gráfico da função x^3 , então M e N se interceptam na origem $(0,0)$, contudo essa interseção não é transversal. Ver Figura 2.1.*

De fato, observe que o espaço tangente de M em $(0,0)$ é o eixo x e o espaço tangente de N em $(0,0)$ também é o eixo x , que é gerado pelo vetor $(1,0)$. Portanto $T_{(0,0)}(M) +$

Figura 2.1: Interseção das curvas M e N .

$T_{(0,0)}(N) = \mathbb{R} \neq \mathbb{R}^2$, logo pelo lema acima temos que M e N não são transversais em $(0, 0)$.

Uma característica importante da transversalidade é sua robustez, isto é, a transversalidade é uma propriedade que persiste a pequenas perturbações.

2.3 Sistemas Dinâmicos Discretos Não Lineares

Nesta seção, introduzimos conceitos básicos relacionados à teoria de sistemas dinâmicos discretos não lineares. Primeiramente, uma discussão acerca das soluções de sistemas discretos é apresentada. Posteriormente, são apresentados conceitos imprescindíveis para o estudo qualitativo do comportamento do sistema e por fim estudamos definições e características que envolvem pontos fixos hiperbólicos do sistema. Para mais informações indicamos as seguintes referências: (LASALLE, 1977), (HALE, 1988), (SHUB, 1987), (KHALIL, 1996) e (DEVANEY et al., 1989).

2.3.1 Soluções e pontos fixos

Considere a seguinte classe de sistemas dinâmicos discretos não lineares autônomos

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad (2.1)$$

com $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e $k \in \mathbb{Z}$.

Para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a solução de (2.1) iniciando em x_0 , denotada por $\phi(., x_0)$, é uma sequência x_k que pode ser obtida pela aplicação sucessiva de f , isto é, $x_k = \phi(k, x_0) = f^k(x_0)$. Chamamos a solução x_k de *órbita* (ou trajetória) do sistema (2.1).

Em sistemas discretos, a unicidade e existência das soluções para $k \geq 0$ não é um problema quando $D = \mathbb{R}^n$, uma vez que a função está bem definida para todo x . Contudo,

soluções para $k < 0$ podem não estar definidas ou não serem únicas. Para assegurarmos existência e unicidade das soluções para todo k , faz-se necessário que a função f seja invertível e bijetora, para ver mais sobre essa discussão consultar (HALE, 1988).

Diremos que $x^* \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto periódico* de período p quando $f^p(x^*) = x^*$ e $f^k(x^*) \neq x^*$, para todo $0 < k < p$. Em particular, se $p = 1$, isto é, se $f(x^*) = x^*$ diremos que x^* é um *ponto fixo* de (2.1).

Seja x^* um ponto periódico de período p , definimos como *órbita periódica* de período p do sistema (2.1) o conjunto $\gamma = \{x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)\}$, isto é, chamamos de órbita periódica de período p o conjunto $\bigcup_{0 \leq k < p} x_k^*$.

No estudo de sistemas dinâmicos, estamos particularmente interessados na estabilidade dos pontos fixos. Diremos que um ponto fixo x^* de (2.1) é *estável* se, para todo $\epsilon > 0$, existir um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ correspondente tal que, se $\|x_0 - x^*\| < \delta$ então $\|x_k - x^*\| < \epsilon$ quando $k \rightarrow \infty$. Além disso, se δ puder ser escolhido de tal maneira que $\|x_0 - x^*\| < \delta$ implica que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$, então diremos que x^* é um *ponto fixo assintoticamente estável*. Dizer que x^* é um ponto fixo assintoticamente estável é o mesmo que dizer que x^* é um ponto fixo estável e atrativo. Ver Figura 2.2.

(a) Ponto fixo estável do sistema (2.1).

(b) Ponto fixo assintoticamente estável do sistema (2.1).

Figura 2.2: Estabilidade e Atratividade dos pontos fixos do sistema (2.1).

Ainda com intuito de estudarmos o comportamento das soluções do sistema dinâmico discreto (2.1), discutimos a seguir o conceito de pontos fixos hiperbólicos. Suponha que a função f seja contínua e diferenciável, diremos que um ponto fixo x^* é um *ponto fixo hiperbólico* se a matriz jacobiana em x^* , denotada por $Df(x^*)$, não possuir autovalores com módulo igual a 1. Se a matriz jacobiana $Df(x^*)$ tem k autovalores com módulo maior que 1 e $n - k$ autovalores com módulo menor que 1, diremos que o ponto fixo x^* é um *ponto fixo hiperbólico do tipo k*. Ainda mais, se todos os autovalores de $Df(x^*)$ possuem módulo menor que 1, então diremos que x^* é um *ponto fixo hiperbólico assintoticamente estável* de (2.1).

Agora, seja x^* um ponto periódico de período p do sistema (2.1), com f um difeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Observe que a diferencial da p -ésima iterada no ponto x^* , denotada por $Df^p(x^*)$, é definida como a aplicação linear

$$Df^p : T_{x^*}\mathbb{R}^n \rightarrow T_{f^p(x^*)}\mathbb{R}^n = T_{x^*}\mathbb{R}^n$$

que é a composição das diferenciais $Df(f^i(x^*))$, com $i = 0, 1, \dots, p-1$. Dessa maneira, dizemos que um ponto p -periódico x^* é um *ponto periódico hiperbólico* do sistema (3.1) se a aplicação linear $Df^p(x^*)$ não possui autovalores com módulo igual a 1.

Segundo (SHUB, 1987), uma órbita periódica γ , com período p do sistema (2.1), é hiperbólica apenas se cada ponto $f^i(x^*)$, $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, pertencente à órbita é um ponto fixo hiperbólico do sistema $x_{m+1} = f^p(x_m)$.

2.3.2 Conjuntos Limites

Nesta seção, faremos uma revisão de conceitos e resultados que nos ajudam entender o comportamento assintótico das soluções do sistema (2.1) quando k tende para o infinito. Os conjuntos para os quais as trajetórias do sistema se aproximam quando k tende para o infinito são chamados conjuntos limites, cuja definição e propriedades são exploradas a seguir.

Considere $y \in \mathbb{R}^n$ e o sistema dinâmico discreto (2.1), diremos que y é ponto ω -limite de $x \in \mathbb{R}^n$ se existir sequência de inteiros $\{n_i\}$ com $n_i \rightarrow +\infty$ quando $i \rightarrow \infty$ tal que $f^{n_i}(x) \rightarrow y$ quando $i \rightarrow \infty$. Chamamos de ω -limite de x , denotado por $\omega(x)$, a coleção de todos os pontos ω -limite de x .

Analogamente, definimos $y \in \mathbb{R}^n$ como ponto α -limite de x se existir sequência $\{n_i\}$ de inteiros com $n_i \rightarrow -\infty$ quando $i \rightarrow \infty$ tal que $f^{n_i}(x) \rightarrow y$ quando $i \rightarrow \infty$. Chamaremos de α -limite de x , denotado por $\alpha(x)$, o conjunto de todos os pontos α -limite de x .

Ainda é possível definir um ponto ω -limite de um subconjunto $B \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $y \in \mathbb{R}^n$ é um ponto ω -limite do subconjunto B se existem sequência $\{x_i\} \in B$ e $\{n_i\} \in \mathbb{Z}$, com $n_i \rightarrow +\infty$ quando $i \rightarrow \infty$ tais que $f^{n_i}(x_i) \rightarrow y$ quando $i \rightarrow \infty$. Analogamente, definimos os pontos α -limite do conjunto B .

O teorema seguinte traz uma caracterização equivalente dos conjuntos limites de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.3.1. *Os conjuntos ω -limite e α -limite podem ser caracterizados da seguinte maneira:*

$$\omega(x) = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} \overline{f^k(x)}$$

$$\alpha(x) = \bigcap_{n \leq 0} \bigcup_{k \leq n} \overline{f^k(x)}$$

Outro conceito de extrema importância para o estudo do comportamento assintótico das soluções do sistema é o de invariância.

Definição 2.3.2. Um conjunto M é dito positivamente invariante, com respeito ao sistema (2.1), se $f(M) \subset M$. Por outro lado, um conjunto M é dito negativamente invariante, com respeito ao sistema (2.1), se $f^{-1}(M) \subset M$. Finalmente, M é dito invariante se $f(M) = M$.

Observe que não é exigido que a aplicação f no sistema (2.1) seja invertível. Sendo assim, x_0 pode ter mais de uma órbita para cada $k \in \mathbb{Z}$. Dessa maneira, é possível que exista um conjunto invariante M tal que M não contenha todas as órbitas completas de $x \in M$.

Por outro lado, se admitirmos que f é um homeomorfismo, isto é, f é uma bijeção contínua com inversa também contínua, podemos garantir a existência e unicidade das órbitas tanto para $k > 0$ quanto para $k < 0$. O mesmo vale quando f é um difeomorfismo.

Exemplo 2.3.3. [Hale, 1988] Considere $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 4x(1 - x)$. A função f não é invertível e tem um ponto fixo em $x_0 = \frac{3}{4}$. Defina $M = \{\frac{3}{4}\}$, M é um conjunto invariante.

Por outro lado, seja $y_0 = \frac{1}{4}$, então $f(y_0) = \frac{3}{4} = x_0$ e $\omega(y_0) = M$. Contudo $f^k(y_0)$, com $k < 0$, está definida e $\{f^k(y_0), k \in \mathbb{Z}\}$ é uma órbita completa de x_0 que não está contida em M . A trajetória x_k do sistema para condição inicial $x_0 = \frac{1}{4}$ está representada na Figura 2.3.

Figura 2.3: Trajetória do sistema dinâmico unidimensional $x_{k+1} = 4x_k(1 - x_k)$ com condição inicial $x_0 = \frac{1}{4}$.

Seja X um conjunto invariante fechado. Diremos que X é *invariantemente conexo* se ele não puder ser escrito como a união disjunta de dois conjuntos fechados, disjuntos, não vazios e invariantes.

O teorema seguinte traz uma caracterização completa do conjunto ω -limite de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.3.4. *Considere o sistema (2.1) com $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e invertível. Então $\omega(x)$ é um conjunto:*

1. *fechado;*
2. *positivamente invariante;*

Além disso, se a órbita x_k é limitada para todo $k > 0$, então $\omega(x)$ é um conjunto

3. *não vazio;*
4. *limitado;*
5. *invariantemente conexo;*
6. *$d(x_k, \omega) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$;*

2.3.3 Variedades Invariantes

Nesta seção, estudamos o comportamento dinâmico do sistema discreto (2.1) na vizinhança de órbitas periódicas e pontos fixos do sistema (2.1). Em particular, exploramos a existência de variedades invariantes de um ponto fixo hiperbólico e das variedades invariantes de uma órbita periódica hiperbólica.

Seja x^* um ponto fixo hiperbólico do tipo $n - k$, isto é, a matriz jacobiana $Df(x^*)$ possui $n - k$ autovalores com módulo maior que 1 e k autovalores com módulo menor que 1. Considere os k autovetores associados aos k autovalores com módulo menor que 1, aqui denotados por $v_1, v_2, \dots, v_k$. Além disso, considere $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n$ como os autovetores associados aos $n - k$ autovalores com módulo maior que 1 da matriz jacobiana $Df(x^*)$.

Definimos $E^s = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ e $E^u = \{v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$ como os espaços gerados pelos autovetores associados aos autovalores da matriz $Df(x^*)$, chamados respectivamente de *subespaço estável* e *subespaço instável* de x^* . Ver Figura 2.4.

Suponha que f seja um difeomorfismo, então existem variedades locais $W_{loc}^s(x^*)$ e $W_{loc}^u(x^*)$, invariantes ao sistema (2.1) e tangentes a E^s e E^u , respectivamente, tais que toda órbita x_k iniciando em $W_{loc}^s(x^*)$ se aproxima de x^* quando $k \rightarrow +\infty$ e toda órbita iniciando em $W_{loc}^u(x^*)$ se aproxima de x^* quando $k \rightarrow -\infty$ (CHIANG; ALBERTO, 2015), (PALIS; MELO, 1978).

Globalmente definimos as variedades, estável e instável, de um ponto fixo hiperbólico de (2.1) como

$$W^s(x^*) = \bigcup_{k \leq 0} \phi(k, W_{loc}^s(x^*))$$

$$W^u(x^*) = \bigcup_{k \geq 0} \phi(k, W_{loc}^u(x^*))$$

Figura 2.4: Variedades invariantes de um ponto fixo hiperbólico do sistema (2.1).

Definimos a variedade estável e a variedade instável de uma órbita periódica hiperbólica $\gamma = \{x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)\}$ de período p do sistema (2.1), como sendo os seguintes conjuntos

$$W^s(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n; \omega(x) \subset \gamma\}$$

$$W^u(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n; \alpha(x) \subset \gamma\}$$

Para mais informações sobre as variedades estáveis e instáveis de conjuntos invariantes, ver as referências (ROBINSON, 1999) e (SHUB, 1987).

2.4 λ -Lema

Nesta seção, estudamos o λ -lema para pontos fixos hiperbólicos. Segundo esse resultado, dada uma seção transversal à variedade estável (ou instável) de um ponto fixo hiperbólico,

as iteradas da função f para $k > 0$ (ou $k < 0$) se aproximam da variedade instável (estável). Para mais informações sobre o λ -lema consultar as referências (PALIS, 1969)(PALIS; MELO, 1978)(BRIN; STUCK, 2003).

Sejam x^* um ponto fixo hiperbólico e B^s uma vizinhança de x^* em $W_{loc}^s(x^*)$ tal que $f(\partial B^s) \subset B^s$, com $\partial B^s = \overline{B^s} - B^s$ a fronteira de B^s . O anel $G^s = \overline{B^s} - f(B^s)$ é chamado de *domínio fundamental* da variedade estável de x^* .¹ Qualquer vizinhança $N^s(x^*)$ de $G^s(x^*)$ disjunta de $W_{loc}^u(x^*)$ é denominada *vizinhança fundamental* da variedade estável. Analogamente definimos domínio fundamental e vizinhança fundamental para a variedade instável de x^* . Para mais informações, ver a referência (PALIS; MELO, 1978).

Então, podemos enunciar o λ -lema para sistemas dinâmicos discretos modelados por um difeomorfismo da seguinte maneira:

Lema 2.4.1 (λ -lema). *Seja x^* um ponto de equilíbrio hiperbólico do sistema (2.1) e f um difeomorfismo. Sejam B^s um disco mergulhado em $W_{loc}^s(x^*)$ contendo x^* , B^u um disco mergulhado em $W_{loc}^u(x^*)$ contendo x^* e $V = B^s \times B^u$ uma vizinhança de x^* . Considere $q \in W_{loc}^s(x^*) - \{x^*\}$ e D^u um disco transversal a $W_{loc}^s(x^*)$, com $\dim(D^u) = \dim(W_{loc}^u(x^*))$ e $q \in D^u$. Dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k > k_0$, $D_k^u(q)$ está $\epsilon - C^1$ próximo de B^u , sendo $D_k^u(q)$ a componente conexa que contém $f^k(q)$ de $f^k(D^u(q)) \cap V$.*

A demonstração completa do λ -lema está disponível em (PALIS; MELO, 1978) e será omitida neste trabalho. A interpretação geométrica do λ -Lema segue na Figura 2.5.

Figura 2.5: Interpretação geométrica do λ -Lema (PALIS; MELO, 1978).

A seguir, enunciamos um corolário que será utilizado posteriormente em demonstrações deste trabalho.

¹Quando não houver risco de confusão, denotaremos o domínio fundamental da variedade estável apenas por G^s e o domínio fundamental da variedade instável apenas por G^u .

Corolário 2.4.2. *Seja x^* um ponto fixo hiperbólico de f e $N^s(x^*)$ uma vizinhança fundamental de $W^s(x^*)$. Então $\{U - W_{loc}^u(x^*)\} \subset \bigcup_{n \geq 0} f^n(N^s(x^*))$, com U uma vizinhança de x^* .*

A demonstração do Corolário 2.4.2 encontra-se completa em (PALIS; MELO, 1978).

Capítulo 3

Revisão da Teoria de Região de Estabilidade de Sistema Dinâmicos Discretos

Neste capítulo apresentamos a caracterização completa da fronteira da região de estabilidade para uma classe de sistemas dinâmicos discretos não lineares, proposta por Chiang, Lee, Amaral e Alberto em (CHIANG et al., 2012), (CHIANG; ALBERTO, 2015). Essa caracterização é similar à desenvolvida em (CHIANG; HIRSCH; WU, 1988) para um classe de sistemas dinâmicos não lineares em tempo contínuo. Essa caracterização é dada pelas variedades estáveis dos pontos fixos hiperbólicos pertencentes à fronteira da região de estabilidade do sistema estudado. Para mais informações sobre região de estabilidade, ver as seguintes referências (CHIANG; HIRSCH; WU, 1988), (FERREIRA; KROGH, 1997) e (CHIANG; ALBERTO, 2015).

Considere a seguinte classe de sistemas dinâmicos discretos não lineares

$$x_{k+1} = f(x_k) \tag{3.1}$$

com $k \in \mathbb{Z}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Geralmente, pontos fixos assintoticamente estáveis não são globalmente estáveis. Em verdade, existe uma coleção de condições iniciais cujas trajetórias tendem ao ponto fixo assintoticamente estável quando $k \rightarrow \infty$. Chamamos essa coleção de condições iniciais de *Região de Estabilidade*. Mais precisamente, definimos:

Definição 3.0.1. *Seja x^s um ponto fixo assintoticamente estável do sistema (3.1), definimos a **região de estabilidade** de x^s , denotada por $A(x^s)$, como o conjunto das condições iniciais cujas trajetórias tendem para x^s quando $k \rightarrow \infty$, simbolicamente:*

$$A(x^s) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = x^s \right\}$$

Definimos como *fronteira da região de estabilidade* de x^s a fronteira topológica de $A(x^s)$, denotada por $\partial A(x^s)$.

3.1 Caracterização Topológica da Região de Estabilidade

Nesta seção apresentamos, sob certas condições no campo f , as propriedades topológicas da região de estabilidade. Entender as características topológicas da região de estabilidade é uma etapa de extrema importância para a caracterização completa da mesma. Sendo assim, a seguir, trazemos resultados que caracterizam topologicamente a fronteira da região de estabilidade. Os resultados enunciados a seguir, bem como suas respectivas demonstrações, podem ser encontrados em (CHIANG; ALBERTO, 2015).

Teorema 3.1.1 ((CHIANG et al., 2012), (CHIANG; ALBERTO, 2015)). *Seja x^s um ponto fixo assintoticamente estável de (3.1). Suponha que f seja uma função contínua. Então, a região de estabilidade $A(x^s)$ é um conjunto aberto, positivamente e negativamente invariante. Além disso, a fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^s)$ é um conjunto fechado e positivamente invariante.*

Demonstração. Primeiramente mostramos que a região de estabilidade é um conjunto aberto. Para isso, basta mostrarmos que toda bola aberta centrada em algum ponto pertencente à região de estabilidade $A(x^s)$ está inteiramente contida em $A(x^s)$.

Considere ϵ suficientemente pequeno de modo que a vizinhança $\{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x^s\| < \epsilon\} \subset A(x^s)$. Seja $p \in A(x^s)$, então existe $N > 0$ suficientemente grande de modo que $\|f^N(p) - x^s\| < \frac{\epsilon}{2}$.

Uma vez que f^N é uma função contínua, então podemos escolher $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que, para todo q pertencente à bola aberta $B(p, \delta)$ vale que, $\|f^N(q) - f^N(p)\| < \frac{\epsilon}{2}$.

Seja $q \in B_p^\delta$, então

$$\|f^N(q) - x^s\| \leq \|f^N(q) - f^N(p)\| + \|f^N(p) - x^s\| \leq \epsilon$$

Portanto, $q \in A(x^s)$. Logo, $A(x^s)$ é um conjunto aberto como queríamos demonstrar.

A seguir mostramos a invariância de $A(x^s)$. Seja $x \in A(x^s)$, então $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = x^s$. Observe que $f^k(f(x)) = f^{k+1}(x)$, dessa maneira $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{k+1}(x) = x^s$. Portanto, $f(x) \in A(x^s)$ e a região de estabilidade é positivamente invariante.

Agora, seja $x \in A(x^s)$. Considere $y \in f^{-1}(x)$, então $f^k(y) = f^k(f^{-1}(x)) = f^{k-1}(x)$. Note que, $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{k-1}(x) = x^s$. Portanto, $y \in A(x^s)$ e $f^{-1}(A(x^s)) \subset A(x^s)$. Logo, $A(x^s)$ é negativamente invariante.

Para a fronteira da região de estabilidade, observe que $\partial A(x^s) = \overline{A(x^s)} \cap \overline{\mathbb{R}^n - A(x^s)}$, que é a interseção de dois conjunto fechados. Portanto, $\partial A(x^s)$ é um conjunto fechado.

Agora, mostramos que $\partial A(x^s)$ é positivamente invariante. Seja $x \in \partial A(x^s)$, suponha por absurdo que $f(x) \notin \partial A(x^s)$. Uma vez que $\overline{A(x^s)}$ é positivamente invariante, então $f(x) \in A(x^s)$. Da invariância da região de estabilidade $A(x^s)$ segue que $f^{-1}(x) \in A(x^s)$. Portanto, $x \in A(x^s)$, o que contraria a hipótese de $x \in \partial A(x^s)$. Logo, a fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^s)$ é positivamente invariante, o que conclui a demonstração. ■

Teorema 3.1.2 ((CHIANG; ALBERTO, 2015), (CHIANG et al., 2012)). *Seja x^s um ponto fixo assintoticamente estável do sistema (3.1), suponha que f seja uma função contínua. Então, a fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^s)$ tem dimensão menor que n e, se $A(x^s)$ não é densa em $\mathbb{R}^n$, então $\partial A(x^s)$ tem dimensão $n - 1$.*

Teorema 3.1.3 ((CHIANG et al., 2012), (CHIANG; ALBERTO, 2015)). *Seja x^s um ponto fixo assintoticamente estável do sistema discreto (3.1). Se a função f é invertível com inversa contínua, então a região de estabilidade é conexa por caminho.*

Demonstração. Como x^s é um ponto fixo assintoticamente estável de (3.1), então existe vizinhança U de x^s conexa por caminho, tal que U está inteiramente contida em $A(x^s)$. A região de estabilidade pode ser escrita como $A(x^s) = \bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(U)$. Como f^{-k} é contínua e U é conexa por caminho, então $f^{-k}(U)$ também é conexa por caminho. Além disso, o conjunto $f^{-k}(U)$ contém x^s para todo $k > 0$, como a união arbitrária de conjuntos conexos por caminho com um ponto em comum é conexa por caminho, então $A(x^s)$ é conexa por caminho. ■

O exemplo seguinte ilustra o teorema acima para um sistema dinâmico discreto unidimensional.

Exemplo 3.1.4. *Considere o seguinte sistema unidimensional:*

$$x_{k+1} = x_k - 0.8x_k(x_k - 1)(x_k - 2)(x_k - 3) \quad (3.2)$$

O sistema 3.2 possui quatro pontos fixos: $x^1 = 0$, $x^2 = 1$, ponto fixo assintoticamente estável, e $x^3 = 2$, $x^4 = 3$. A região de estabilidade do sistema (3.2) é indicada na Figura 3.1. Em particular, a região de estabilidade não é um conjunto conexo. Além disso, a fronteira da região de estabilidade não é um conjunto invariante.

Se f é um homeomorfismo, isto é, f é uma bijeção contínua que admite inversa também contínua, então todas as propriedades enunciadas nos resultados acima são verdadeira e a seguinte caracterização é válida.

Teorema 3.1.5 ((CHIANG et al., 2012), (CHIANG; ALBERTO, 2015)). *Seja x^s um ponto fixo assintoticamente estável do sistema discreto (3.1). Se f é um homeomorfismo, então a região de estabilidade $A(x^s)$ é um conjunto*

Figura 3.1: A região de estabilidade do sistema unidimensional (3.2), indicada em preto na diagonal, não é um conjunto conexo.

1. *aberto*;
2. *invariante*;
3. *conexo por caminho*;

E a fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^s)$ é um conjunto

1. *fechado*;
2. *invariante*;

A demonstração do teorema acima segue diretamente dos teoremas demonstrados anteriormente. Para mais informações sobre as demonstrações feitas nessa seção ver a referência (CHIANG; ALBERTO, 2015).

3.2 Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade

Nesta seção apresentamos a caracterização da região de estabilidade de uma classe particular de sistemas dinâmicos discretos não lineares que não admite órbitas periódicas ou comportamentos complexos na fronteira da região de estabilidade.

Inicialmente, apresentamos condições necessárias e suficientes para que pontos fixos pertençam à fronteira da região de estabilidade. Em um segundo momento, sob algumas condições genéricas de sistemas dinâmicos, caracterizamos a fronteira da região de estabilidade através das variedades invariantes dos pontos fixos pertencentes à fronteira da região de estabilidade.

Teorema 3.2.1 ((CHIANG et al., 2012), (CHIANG; ALBERTO, 2015)). *Sejam x^s um ponto fixo assintoticamente estável do sistema (3.1) e $\hat{x} \neq x^s$ um ponto fixo hiperbólico do sistema (3.1). Suponha que f seja um difeomorfismo. Então, a seguinte caracterização é válida*

1. $\hat{x} \in \partial A(x^s) \Leftrightarrow \{W^u(\hat{x}) - \hat{x}\} \cap \overline{A(x^s)} \neq \emptyset$;
2. Se $\hat{x}$ não é um nó instável, então $\hat{x} \in \partial A(x^s) \Leftrightarrow \{W^s(\hat{x}) - \hat{x}\} \cap \partial A(x^s) \neq \emptyset$;

Demonstração. 1. ($\Leftarrow$) Suponha que $\{W^u(\hat{x}) - \hat{x}\} \cap \overline{A(x^s)} \neq \emptyset$, isto é, existe ao menos um $y \in \{W^u(\hat{x}) - \hat{x}\} \cap \overline{A(x^s)}$. Uma vez que $y \in W^u(\hat{x})$, então $\lim_{k \rightarrow -\infty} f^k(y) = \hat{x}$. Observe que y também pertence à $\overline{A(x^s)}$, como $\overline{A(x^s)}$ é um conjunto invariante, então $f^k(y) \in \overline{A(x^s)}$ para todo k e portanto $\hat{x} \in \overline{A(x^s)}$. Como $\hat{x} \notin A(x^s)$ então $\hat{x} \in \partial A(x^s)$.

($\Rightarrow$) Suponha que $\hat{x} \in \partial A(x^s)$, então toda vizinhança de $\hat{x}$ tem interseção não vazia com a região de estabilidade. Seja G^u um domínio fundamental de $W^u(\hat{x})$ e N_ϵ^u uma ϵ -vizinhança de G^u . De acordo com Corolário 2.4.2, existe uma vizinhança U de $\hat{x}$ tal que $\bigcup_{k>0} f^{-k}(N_\epsilon^u)$ contém $\{U - W^s(\hat{x})\}$. Como $W^s(\hat{x}) \cap A(x^s) \neq \emptyset$ e $U \cap A(x^s) \neq \emptyset$, então existe um ponto $q \in \{U - W^s(\hat{x})\}$ tal que $q \in A(x^s)$. Além disso, da invariância de $A(x^s)$, existe um ponto $p \in N_\epsilon^u$ tal que $p \in A(x^s)$. Como N_ϵ^u pode ser escolhido tão pequeno quanto necessário, então é possível encontrar uma sequência de pontos $\{p_j\}$, com $p_j \in A(x^s)$, para todo $j = 1, 2, \dots$, tal que $d(p_j, G^u) \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$. Como $\{p_j\}$ é limitada, então existe subsequência x_j que converge para p . Por construção, $p \in \{W^u(\hat{x}) - \hat{x}\} \cap \overline{A(x^s)}$.

2. A segunda parte do teorema é demonstrada de maneira análoga a primeira parte e portanto será omitida nesse trabalho. Para mais informações ver (CHIANG; ALBERTO, 2015). ■

A caracterização acima nos oferece condições numéricas para verificar se um ponto fixo pertence ou não à fronteira da região de estabilidade, uma vez que basta verificarmos a existência de uma trajetória em $W^u(\hat{x})$ que se aproxima de x^s .

O Teorema 3.2.1 pode ser melhorado impondo-se certas condições ao sistema (3.1). Considere as seguintes afirmações:

(A1) Todos os pontos fixos na fronteira da região de estabilidade são hiperbólicos;

(A2) As variedades, estável e instável, dos pontos fixos na fronteira da região de estabilidade satisfazem a condição de transversalidade;

(A3) Toda trajetória na fronteira da região de estabilidade se aproxima de algum ponto fixo quando $k \rightarrow \infty$;

As afirmações (A1) e (A2) são genéricas e ocorrem para quase todo sistema dinâmico discreto não linear modelado por um difeomorfismo, enquanto a propriedade (A3) não é uma propriedade genérica. No teorema a seguir, apresentamos uma caracterização dos pontos fixos pertencentes à fronteira da região de estabilidade para um sistema cujas afirmações (A1), (A2) e (A3) sejam verdadeiras.

Teorema 3.2.2. *Sejam x^s um ponto fixo assintoticamente estável de (3.1) e $\hat{x} \neq x^s$ um ponto fixo hiperbólico de (3.1). Suponha que f seja um difeomorfismo e que as afirmações (A1), (A2), (A3) sejam satisfeitas. Então vale a seguinte caracterização,*

1. $\hat{x} \in \partial A(x^s) \Leftrightarrow W^u(\hat{x}) \cap A(x^s) \neq \emptyset$;
2. se $\hat{x}$ não é um nó instável, então $\hat{x} \in \partial A(x^s) \Leftrightarrow W^s(\hat{x}) \subseteq \partial A(x^s)$;

A demonstração do Teorema 3.2.2 enunciado acima pode ser encontrada em (CHIANG; ALBERTO, 2015). Para exemplificar o teorema acima considere o seguinte sistema,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= dx_k + x_k^3 + ey_k^2 \\ y_{k+1} &= cy_k \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $c = d = e = 0,5$. O sistema (3.3) possui três pontos fixos, sendo a origem $x^s = (0, 0)$ um ponto fixo assintoticamente estável e os outros dois pontos, a saber $x_1 = (\sqrt{1-d}, 0)$ e $x_2 = (-\sqrt{1-d}, 0)$, pontos fixos instáveis.

Observe que a matriz jacobiana de $F(x, y) = (f_1, f_2) = (dx + x^3 + ey^2, cy)$ é dada por

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} d + 3x^2 & 2ey \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

Quando calculada nos pontos fixos, a matriz $DF(x, y)$ tem autovalores com módulo diferente de 1, logo todos os pontos fixos do sistema (3.3) são hiperbólicos, o que satisfaz (A1).

A região de estabilidade $A(x^s)$ é apresentada na Figura 3.2. É possível observar que as variedades instáveis de $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$ tem intersecção não vazia com a região de estabilidade, portanto, pelo Teorema 3.2.2, pertencem à $\partial A(x^s)$.

Além disso, as variedades estáveis e instáveis dos pontos fixos satisfazem a condição de transversalidade, portanto (A2) é verdadeira. Além disso, observe que $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$ são

os únicos pontos fixos na fronteira da região de estabilidade e todas as trajetórias em $\partial A(0,0)$ tendem para $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$ quando $k \rightarrow \infty$, logo **(A3)** também é satisfeita.

Ainda é possível observar na Figura 3.2 que $W^s(\hat{x}_1)$ e $W^s(\hat{x}_2)$ estão contidas na fronteira da região de estabilidade.

Figura 3.2: Caracterização da fronteira da região de estabilidade $\partial A(0,0)$.

Dada a caracterização de pontos fixos na fronteira da região de estabilidade proposta no Teorema 3.2.2, temos condições de caracterizar a fronteira da região de estabilidade.

Sob as afirmações **(A1)**, **(A2)** e **(A3)**, seguindo uma linha de raciocínio análoga àquela utilizada em (CHIANG; HIRSCH; WU, 1988), Chiang, Lee, Amaral e Alberto, em (CHIANG; ALBERTO, 2015) e (CHIANG et al., 2012), propuseram uma caracterização da fronteira da região de estabilidade através das variedades estáveis dos pontos fixos pertencentes à fronteira da região de estabilidade.

Teorema 3.2.3 (Caracterização da fronteira da região de estabilidade). *Seja x^s um ponto fixo assintoticamente estável do sistema (3.1), suponha que f seja um difeomorfismo e que **(A1)**, **(A2)** e **(A3)** sejam satisfeitas. Sejam $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots$ os pontos fixos hiperbólicos instáveis em $\partial A(x^s)$. Então, a fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^s)$ é completamente caracterizada por*

$$\partial A(x^s) = \bigcup_i W^s(\hat{x}_i)$$

Demonstração. Faremos a demonstração em duas partes. Primeiramente, mostraremos que $\bigcup_i W^s(\hat{x}_i) \subseteq \partial A(x^s)$. Da caracterização 3.2.2 segue que para cada $\hat{x}_i \in \partial A(x^s)$ vale que $W^s(\hat{x}_i) \subseteq \partial A(x^s)$, logo $\bigcup_i W^s(\hat{x}_i) \subseteq \partial A(x^s)$.

Por outro lado, como **(A3)** é válida, então toda trajetória na fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^s)$ tende para um ponto fixo quando $k \rightarrow \infty$. Uma vez que a fronteira é um conjunto positivamente invariante, toda trajetória na fronteira tende para algum ponto fixo na fronteira da região de estabilidade. Em particular, segue que, para cada $y \in \partial A(x^s)$, vale que $y \in W^s(\hat{x}_i)$, com $\hat{x}_i$ algum ponto fixo em $\partial A(x^s)$. Portanto $\partial A(x^s) \subset \bigcup_i W^s(\hat{x}_i)$. O que conclui a demonstração. ■

Para exemplificar o teorema acima, considere o seguinte sistema

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + hy_k \\ y_{k+1} &= (1 - dh)y_k - hcsen(x_k), \end{aligned} \quad (3.4)$$

com $c, d > 0$ e $0 < h < \frac{1}{d}$. Para h suficientemente pequeno, a função $F(x, y)$ é um difeomorfismo. Para $h = 0.1$, $k = 1$ e $d = 0.5$, temos três pontos fixos no sistema, dois instáveis, $(\pi, 0)$ e $(-\pi, 0)$ e um ponto fixo assintoticamente estável, $(0, 0)$. A região de estabilidade $A(0, 0)$ está ilustrada na Figura 3.3.

Figura 3.3: Caracterização da fronteira da região de estabilidade $\partial A(0, 0)$.

Observe que as afirmações **(A1)**, **(A2)** e **(A3)** são satisfeitas, então podemos aplicar o Teorema 3.2.3 para o sistema (3.4) e

$$\partial A(0, 0) = W^s(\pi, 0) \cup W^s(-\pi, 0)$$

Além disso, podemos aplicar também o Teorema 3.2.2 e verificar que, $W^u(\pi, 0)$ e $W^u(-\pi, 0)$ têm interseção não vazia com a região de estabilidade $A(x^s)$, como é possível observar na Figura 3.3.

Capítulo 4

Caracterização Completa da Região de Estabilidade de uma classe ampla de Sistemas Dinâmicos Discretos

Nesta seção, propomos uma caracterização completa da região de estabilidade uma classe de sistemas dinâmicos discretos não lineares que admitem órbitas periódicas na fronteira da região de estabilidade.

Mais precisamente, estendemos a caracterização da fronteira da região de estabilidade proposta em (CHIANG et al., 2012) e (CHIANG; ALBERTO, 2015), apresentada no Capítulo 3, para uma classe de sistemas dinâmicos discretos modelados por um difeomorfismo de forma a levar em conta órbitas periódicas na fronteira da região de estabilidade. Para isso, foi utilizado um sistema auxiliar associado ao sistema dinâmico discreto original, de modo que, as órbitas periódicas do sistema original são pontos fixos do novo sistema. Isto possibilitou o uso da caracterização apresentada no Capítulo 3 para tratar essa classe mais geral de sistemas dinâmicos.

4.1 Sistema p -iterado

Considere a seguinte classe de sistemas dinâmicos discretos não lineares

$$x_{k+1} = f(x_k), \tag{4.1}$$

com $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e $k \in \mathbb{Z}$, e considere o sistema p -iterado associado

$$x_{m+1} = f^p(x_m) \tag{4.2}$$

sendo p um inteiro maior que 1.

Inicialmente estabelecemos relações entre os pontos fixos e órbitas periódicas do sistema original (4.1) com os pontos fixos do sistema p -iterado associado (4.2).

Retomando a definição apresentada no Capítulo 2, diremos que $x^* \in \mathbb{R}^n$ é *ponto fixo* do sistema (4.1) se $f(x^*) = x^*$. Além disso, diremos que $x^* \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto periódico de período p* de (4.1) se $f^p(x^*) = x^*$ e $f^k(x^*) \neq x^*$, para todo $0 < k < p$. Para o sistema (4.2), diremos que um ponto x^* é um *ponto fixo* quando $f^p(x^*) = x^*$.

O seguinte teorema estuda a relação entre os pontos fixos e periódicos de período p do sistema original (4.1) e os pontos fixos do sistema p -iterado associado (4.2).

Lema 4.1.1. *Se x^* é ponto fixo do sistema (4.1), então x^* é ponto fixo do sistema p -iterado associado. Além disso, se x^* é ponto p -periódico do sistema (4.1), então x^* é ponto fixo do sistema (4.2).*

Demonstração. Seja x^* um ponto fixo de (4.1), então $f(x^*) = x^*$. Queremos mostrar que $f^p(x^*) = x^*$. Faremos a demonstração por indução finita. Para $n = 1$, temos que

$$f(x^*) = x^*$$

Suponha que a igualdade vale para n , isto é, $f^n(x^*) = x^*$, mostraremos que vale para $n + 1$.

$$f^{n+1}(x^*) = f(f^n(x^*)) = f(x^*) = x^*$$

Portanto, a igualdade é válida para todo $n \in \mathbb{Z}$, em particular é válida para $p \in \mathbb{Z}$. Agora, se x^* é ponto p -periódico, isto é $f^p(x^*) = x^*$ então o resultado segue naturalmente, portanto x^* é ponto fixo do sistema (4.2). ■

É imprescindível entendermos a relação entre os pontos fixos assintoticamente estáveis do sistema (4.1) e os pontos fixos assintoticamente estáveis do sistema p -iterado associado.

No resultado a seguir mostramos que, se $x^s \in \mathbb{R}^n$ é um ponto fixo assintoticamente estável do sistema original (4.1), então ele também é ponto fixo assintoticamente estável do sistema p -iterado associado (4.2).

Lema 4.1.2. *Se $x^s \in \mathbb{R}^n$ é um ponto fixo assintoticamente estável do sistema (4.1), então x^s é um ponto fixo assintoticamente estável do sistema (4.2).*

Demonstração. Seja x^s um ponto fixo assintoticamente estável do sistema (4.1), queremos mostrar que x^s também é ponto fixo assintoticamente estável de (4.2), logo devemos mostrar que x^s é ponto fixo estável e atrativo. Uma vez que x^s é assintoticamente estável de (4.1), então da definição vale que, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|x_0 - x^s\| < \delta$, então $\|f^k(x_0) - x^s\| = \|x_k - x^s\| < \epsilon$ para todo $k \geq 0$. Em particular, $\|f^{np}(x_0) - x^s\| < \epsilon$, para todo $n \geq 0$. Portanto, x^s é ponto fixo estável de (4.2).

Resta-nos mostrar que x^s é atrativo para o sistema (4.2), observe que $\delta > 0$ pode ser tomado pequeno suficiente de modo que $f^k(x_0) \rightarrow x^s$ quando $k \rightarrow \infty$, para todo x_0 , tal

que $\|x_0 - x^s\| < \delta$. Similarmente ao feito anteriormente, vale que $f^{np}(x_0) \rightarrow x^s$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, x^s é ponto atrativo de (4.2) e a demonstração fica concluída. ■

Ainda no intuito de estabelecermos relações entre os elementos críticos do sistema original (4.1) com os elementos críticos do sistema (4.2), seja x^* um ponto periódico hiperbólico de período p do sistema (4.1), isto é, $Df^p(x^*)$ não possui autovalores com módulo 1. Naturalmente, segue que x^* é *ponto fixo hiperbólico* de f^{np} , para todo $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, uma órbita periódica $\gamma = \{x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)\}$ de período p do sistema (4.1) é dita ser hiperbólica se, e somente se, todo ponto da órbita periódica γ é um ponto fixo hiperbólico do sistema (4.2) (SHUB, 1987).

Para o sistema (4.2) definimos as variedades invariantes de forma similar ao definido no Capítulo 2.

Definição 4.1.3. ¹ *Seja x^* um ponto fixo hiperbólico do sistema (4.2), então definimos a variedade estável e a variedade instável de x^* respectivamente como,*

$$W_p^s(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n; f^{np}(x) \rightarrow x^* \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}$$

$$W_p^u(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n; f^{np}(x) \rightarrow x^* \text{ quando } n \rightarrow -\infty\}$$

O teorema seguinte estabelece uma relação entre as variedades invariantes de uma órbita periódica hiperbólica γ de período p do sistema discreto (4.1) com as variedades invariantes dos pontos pertencentes à órbita periódica com respeito ao sistema p -iterado (4.2).

Teorema 4.1.4. *Seja $\gamma = \{x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)\}$ uma órbita periódica hiperbólica de período p do sistema (4.1) onde f é um difeomorfismo. Então,*

$$W^s(\gamma) = W_p^s(x^*) \cup W_p^s(f(x^*)) \cup \dots \cup W_p^s(f^{p-1}(x^*))$$

$$W^u(\gamma) = W_p^u(x^*) \cup W_p^u(f(x^*)) \cup \dots \cup W_p^u(f^{p-1}(x^*))$$

Demonstração. Primeiramente, mostramos que $\bigcup_{i=0}^{p-1} W_p^s(f^i(x^*)) \subset W^s(\gamma)$. Para isso, seja $x \in \bigcup_{i=0}^{p-1} W_p^s(f^i(x^*))$. Então, para algum $i = 0, \dots, p-1$, vale que $x \in W_p^s(f^i(x^*))$. Sem perda de generalidade, considere $i = 0$, isto é, $x \in W_p^s(x^*)$.

Uma vez que f é contínua, então dado $\epsilon_{p-1} > 0$, existe $\epsilon_{p-2} > 0$, que depende de ϵ_{p-1} , tal que $\|y - f^{p-2}(x^*)\| < \epsilon_{p-2}$ implica $\|f(y) - f^{p-1}(x^*)\| < \epsilon_{p-1}$. Repetindo esse argumento p vezes, concluímos, para um $\epsilon_{p-1} > 0$ dado, a existência dos números $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{p-2}$ tais

¹Para diferenciarmos as variedades invariantes do sistema (4.1) das variedades invariantes do sistema (4.2) usaremos o índice p .

que $\|y - x^*\| < \epsilon_0$ implica que $\|f^k(y) - f^k(x^*)\| < \epsilon_k$, para todo $k = 1, 2, \dots, p-1$. Além disso, sem perda de generalidade, sempre podemos escolher $\epsilon_0 \leq \dots \leq \epsilon_{p-2} \leq \epsilon_{p-1}$.

Como $x \in W_p^s(x^*)$, então existe número natural N tal que $\|f^{np}(x) - x^*\| < \epsilon_0$ para todo $n > N$, dessa maneira $\|f^{np+k}(x) - f^k(x^*)\| < \epsilon_k \leq \epsilon_{p-1}$ para todo $n > N$ e para todo $k = 0, 1, \dots, p-1$.

Portanto, podemos concluir que $\text{dist}(f^m(x), \gamma) \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$. Além disso, a órbita não pode acumular em nenhum ponto que não pertença à γ . Consequentemente, $\omega(x) \subset \gamma$ e $x \in W^s(\gamma)$.

Agora suponha que $x \in W^s(\gamma)$. Então, $\omega(x) \subset \gamma$, isto é, existe uma sequência $\{m\}$ tal que $f^m(x) \rightarrow \gamma$ quando $m \rightarrow +\infty$. Como γ é um conjunto finito de pontos isolados, existe uma subsequência m_j com $m_j \rightarrow +\infty$ quando $j \rightarrow \infty$ tal que $f^{m_j}(x) \rightarrow f^i(x^*)$ para algum $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.

Sem perda de generalidade, assumimos $i = 0$, isto é, $f^{m_j}(x) \rightarrow x^*$ quando $j \rightarrow +\infty$. Mais precisamente, para um $\epsilon > 0$ dado, existe número natural M tal que $\|f^{m_j}(x) - x^*\| < \epsilon$ para todo $m_j > M$.

Usando uma forma de argumentação análoga à utilizada na primeira parte deste teorema, é possível mostrar que, dado $\epsilon_{p-1} > 0$, existem números $\epsilon_0 \leq \epsilon_1 \leq \dots \leq \epsilon_{p-1}$ e natural M tal que $\|f^{m_j+k}(x) - f^k(x^*)\| < \epsilon_k < \epsilon_{p-1}$ para todo $k = 0, 1, \dots, p-1$ e todo $m_j > M$.

Observe que construímos uma sequência $\{m_j, m_{j+1}, \dots, m_{j+p-1}\}$ com p elementos, tal que necessariamente um elemento deve ser múltiplo de p . Denotaremos esse elemento por $np = m_j + l$, com $l \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Portanto, $f^{np}(x) \rightarrow f^l(x^*)$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, $x \in W_p^s(f^l)$, com $l \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ e $x \in \bigcup_{i=1}^{p-1} W_p^s(f^i(x^*))$. O que conclui a demonstração. ■

Para exemplificar o Teorema 4.1.4 acima, apresentamos o seguinte exemplo.

Exemplo 4.1.5. *Considere o seguinte sistema discreto não linear*

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -x_k^3 \\ y_{k+1} &= y_k^3 \end{aligned} \tag{4.3}$$

O sistema (4.3) possui três pontos fixos: $(0, 0)$ que é um ponto fixo assintoticamente estável, $(0, -1)$ e $(0, 1)$ que são pontos fixos instáveis. Além disso, o sistema (4.3) possui três órbitas periódicas de período 2, são elas: $\gamma_0 = \{(-1, 0), (1, 0)\}$, $\gamma_1 = \{(-1, 1), (1, 1)\}$ e $\gamma_2 = \{(-1, -1), (1, -1)\}$. O retrato de fase do sistema (4.3) pode ser visto na Figura 4.1.

Observe que as γ_1 e γ_2 são órbitas repulsoras do sistema (4.3), enquanto γ_0 é uma órbita periódica instável.

Para o sistema (4.3), considere o sistema 2-iterado associado,

Figura 4.1: Retrato de fase do sistema discreto não linear (4.3).

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= -(-x_m^3)^3 \\ y_{m+1} &= (y_m^3)^3 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Do Lema 4.1.1 segue que, todos os pontos fixos do sistema (4.4) são pontos fixos no sistema (4.3), isto é, $(0, 0)$, $(0, -1)$ e $(0, 1)$ são pontos fixos do sistema (4.4). Além disso, os pontos 2-periódicos do sistema (4.3) são pontos fixos do sistema (4.4), ou seja, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ são pontos fixos do sistema (4.4). Veja na Figura 4.2 o retrato de fase do sistema (4.4)

Observe que as variedades invariantes estáveis e instáveis das órbitas periódicas hiperbólicas γ_1 , γ_2 e γ_0 do sistema (4.3) pertencentes à fronteira da região de estabilidade $\partial A(0, 0)$ são compostas pela união das variedades estáveis e instáveis dos pontos fixos hiperbólicos do sistema (4.4) que as compõe, em concordância com o Teorema 4.1.4.

4.2 Caracterização Topológica da Região de Estabilidade

Uma vez que pontos fixos assintoticamente estáveis de (4.1) também são pontos fixos assintoticamente estáveis de (4.2), a consequência natural é compararmos a região de estabilidade de um ponto fixo assintoticamente estável qualquer do sistema original, com a região de estabilidade deste mesmo ponto no sistema (4.2).

Figura 4.2: Retrato de fase do sistema discreto não linear (4.4).

Para o sistema p -iterado, definimos a *Região de Estabilidade* de um ponto fixo assintoticamente estável x^s como o conjunto das condições iniciais cujas trajetórias tendem ao ponto fixo x^s quando $n \rightarrow \infty$, isto é,

$$A_p(x^s) = \{x \in \mathbb{R}^n; f^{np}(x) \rightarrow x^s, n \rightarrow \infty\}$$

O teorema seguinte estabelece a relação entre a região de estabilidade de um ponto assintoticamente estável x^s do sistema (4.1) com a região de estabilidade deste mesmo ponto no sistema p -iterado associado (4.2).

Teorema 4.2.1. *Seja x^s um ponto fixo assintoticamente estável de (4.1), então $A(x_s) = A_p(x^s)$.*

Demonstração. Faremos a demonstração em duas inclusões, primeiramente mostraremos que $A(x_s) \subset A_p(x^s)$. Seja $x \in A(x_s)$, então $f^k(x) \rightarrow x^s$ quando $k \rightarrow \infty$, em particular $f^{np}(x) \rightarrow x^s$ quando $n \rightarrow \infty$, portanto $x \in A_p(x^s)$ e $A(x^s) \subset A_p(x^s)$.

Por outro lado, seja $x \in A_p(x^s)$, para algum $p \in \mathbb{Z}$ maior que 1, então $f^{np}(x) \rightarrow x^s$ quando $n \rightarrow \infty$, precisamos mostrar que $f^k(x) \rightarrow x^s$ quando $k \rightarrow \infty$, mais precisamente, temos que demonstrar que dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f^k(x) - x^s\| < \epsilon$, para todo $k > N$.

Observe que x^s é ponto fixo assintoticamente estável de (4.1), portanto dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x_0 - x^s\| < \delta$ implica em $\|f^m(x_0) - x^s\| < \epsilon$ quando $m \rightarrow \infty$. Como $x \in A_p(x^s)$, então alguma iteração de x encontra-se suficientemente próximo ao ponto x^s , mais especificamente, existe inteiro l tal que $\|f^{lp}(x) - x^s\| < \delta$. Segue que

$\|f^m(f^{lp}(x)) - x^s\| = \|f^{m+lp}(x) - x^s\| < \epsilon$ quando $m \rightarrow \infty$, colocando $m + lp = k$ temos que, $k \rightarrow \infty$ quando $m \rightarrow \infty$ e $\|f^k(x) - x^s\| < \epsilon$. Logo, segue que $x \in A(x^s)$ e $A_p(x^s) \subset A(x^s)$, o que conclui a demonstração. ■

Corolário 4.2.2. *Se x^s é um ponto fixo assintoticamente estável do sistema (4.1), então $\partial A(x^s) = \partial A_p(x^s)$.*

Os dois resultados enunciados acima são peças chave no encadeamento lógico seguido neste trabalho. Como as órbitas periódicas de período p do sistema (4.1) são pontos fixos do sistema p -iterado associado (4.2), podemos usar a caracterização proposta em (CHIANG; ALBERTO, 2015) e (CHIANG et al., 2012) aplicada ao sistema (4.2) para estudar a região de estabilidade do sistema original (4.1).

Além disso, uma vez que a região de estabilidade de um ponto fixo assintoticamente estável é igual para os dois sistemas, então as caracterizações topológicas da região de estabilidade proposta em (CHIANG; ALBERTO, 2015) e (CHIANG et al., 2012) e demonstradas no Capítulo 3 ainda são válidas para ambos os sistemas.

Teorema 4.2.3. *Seja x^s um ponto fixo assintoticamente estável do sistema (4.1). Suponha que f seja um homeomorfismo, então a região de estabilidade $A_p(x^s)$ é um conjunto*

1. *aberto;*
2. *invariante;*
3. *conexo por caminhos;*

Além disso, a fronteira da região de estabilidade $\partial A_p(x^s)$ é um conjunto

1. *fechado;*
2. *positivamente invariante;*

A demonstração do teorema acima segue naturalmente dos resultados demonstrados no Capítulo 3 e será omitida neste trabalho.

4.3 Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade

Nesta seção, desenvolvemos uma caracterização dinâmica para a fronteira da região de estabilidade para sistemas dinâmicos discretos que admitem órbitas periódicas na fronteira da região de estabilidade.

Primeiramente, usamos o sistema p -iterado associado para oferecermos condições suficientes e necessárias para que órbitas periódicas hiperbólicas e pontos fixos hiperbólicos

pertencam à fronteira da região de estabilidade. Depois, sob certas condições sobre o campo vetorial, caracterizamos a fronteira da região de estabilidade de pontos fixos assintoticamente estáveis do sistema dinâmico (4.1).

O resultado seguinte nos oferece condições necessárias e suficientes para que uma órbita periódica hiperbólica de período p do sistema (4.1) pertença à fronteira da região de estabilidade.

Teorema 4.3.1. *Sejam x^s um ponto fixo assintoticamente estável e $\gamma = \{x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)\}$ uma órbita periódica hiperbólica de período p do sistema (4.1). Suponha que f seja um difeomorfismo, então*

1. *Se $\gamma \subseteq \partial A(x^s)$, então $\{W_p^u(\hat{x}) - \hat{x}\} \cap \overline{A_p(x^s)} \neq \emptyset$, para todo $\hat{x} = x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)$;*
2. *Se $\{W_p^u(f^k(x^*)) - f^k(x^*)\} \cap \overline{A_p(x^s)} \neq \emptyset$, para algum $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Então, $\gamma \in \partial A(x^s)$;*
3. *Se $\hat{x}$ não é um nó instável de (4.2) e $\gamma \subseteq \partial A(x^s)$, então $\{W_p^s(\hat{x}) - \hat{x}\} \cap \partial A(x^s) \neq \emptyset$, para todo $\hat{x} = x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)$;*
4. *Se $\hat{x}$ não é um nó instável de (4.2) e $\{W_p^s(\hat{x}) - \hat{x}\} \cap \partial A(x^s) \neq \emptyset$, para algum $\hat{x} = x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)$, então $\gamma \subseteq \partial A(x^s)$;*

Demonstração. 1. Seja γ uma órbita periódica hiperbólica de período p do sistema (4.1) tal que $\gamma \subseteq \partial A(x^s)$. Do Corolário 4.2.2 segue que $\gamma \in \partial A_p(x^s)$, portando $\hat{x} \in \partial A_p(x^s)$ para todo $\hat{x} = x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)$. Do Teorema 3.2.1 segue que $\{W_p^u(\hat{x}) - \{\hat{x}\}\} \cap \overline{A_p(x^s)} \neq \emptyset$, para todo $\hat{x} = x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)$.

2. Suponha agora que $\{W_p^u(f^k(x^*)) - f^k(x^*)\} \cap \overline{A_p(x^s)} \neq \emptyset$, para algum $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Do Teorema 3.2.1 podemos afirmar que $f^k(x^*) \in \partial A_p(x^s)$, para algum $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Uma vez que a fronteira da região de estabilidade é invariante, então $f^k(x^*) \in \partial A_p(x^s)$, para todo $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Portanto, $\gamma \subseteq \partial A_p(x^s) = \partial A(x^s)$.

3. Seja $\gamma \subseteq \partial A(x^s)$, em particular $\hat{x} \in \partial A_p(x^s)$ para todo $x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)$. Suponha que cada $\hat{x} = x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)$ não é um nó instável, então pelo Teorema 3.2.1 segue que $\{W_p^s(\hat{x}) - \{\hat{x}\}\} \cap \partial A_p(x^s) \neq \emptyset$.

4. Suponha que $\{W_p^s(\hat{x}) - \{\hat{x}\}\} \cap \partial A_p(x^s) \neq \emptyset$, para algum $\hat{x} = x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)$. Além disso, suponha que $\hat{x}$ não é um nó instável, então do Teorema 3.2.1 segue que $\hat{x} \in \partial A_p(x^s)$. Como a fronteira da região de estabilidade é invariante, então $\hat{x}, f(\hat{x}), \dots, f^{p-1}(\hat{x}) \in \partial A_p(x^s)$. Dessa maneira, $\gamma \subseteq \partial A_p(x^s)$. Portanto, do Corolário 4.2.2, concluímos que $\gamma \in \partial A(x^s)$. ■

Assim como no Capítulo 3, sob certas condições, o teorema acima pode ser melhorado. Considere as seguintes afirmações:

(A1) Todos os pontos fixos na fronteira da região de estabilidade são hiperbólicos;

(A2) As variedades invariantes, estável e instável, dos pontos fixos pertencentes à fronteira da região de estabilidade satisfazem a condição de transversalidade;

(A3) Toda trajetória na fronteira da região de estabilidade se aproxima de algum ponto fixo quando $k \rightarrow \infty$;

Para campos que sejam difeomorfismos, as afirmações (A1) e (A2) são propriedades genéricas, isto é, tais propriedades são verdadeiras para quase todo sistema dinâmico da classe de sistemas (4.1). Por outro lado, a propriedade (A3) não é uma propriedade genérica.

Sob as condições (A1), (A2) e (A3), condições necessárias e suficientes para que pontos fixos pertençam à fronteira da região de estabilidade no sistema p -iterado associado (4.2) podem ser dadas conforme o teorema a seguir:

Teorema 4.3.2. *Seja x^s um ponto fixo assintoticamente estável do sistema (4.1) e $\hat{x} \neq x^s$ um ponto fixo hiperbólico de (4.2). Suponha que as afirmações (A1), (A2) e (A3) sejam válidas para o sistema p -iterado (4.2), com f um difeomorfismo. Então, a seguinte caracterização é válida.*

1. $\hat{x} \in \partial A_p(x^s) \Leftrightarrow W_p^u(\hat{x}) \cap A_p(x^s) \neq \emptyset$;
2. se $\hat{x}$ não é um nó instável, então $\hat{x} \in \partial A_p(x^s) \Leftrightarrow W_p^s(\hat{x}) \subseteq \partial A_p(x^s)$;

A demonstração do teorema enunciado acima segue de maneira similar à feita para o Teorema 3.2.2, e portanto será omitida neste trabalho.

A seguir, propomos uma caracterização para a fronteira da região de estabilidade através das variedades estáveis, com relação ao sistema (4.2), dos pontos fixos e órbitas periódicas pertencentes à fronteira da região de estabilidade.

Teorema 4.3.3. *Seja x^s um ponto fixo assintoticamente estável do sistema (4.1). Suponha que as afirmações (A1), (A2) e (A3) sejam válidas para o sistema (4.2), onde f é um difeomorfismo. Sejam $\hat{x}_i$, com $i = 1, 2, \dots$, pontos fixos instáveis pertencentes à $\partial A(x^s)$ e $\tilde{x}_j$, $j = 1, 2, \dots$, pontos pertencentes às órbitas periódicas do sistema (4.1) pertencentes à fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^s)$. Supondo que p é múltiplo do período de todas as órbitas periódicas pertencentes à $\partial A(x^s)$. Então, a seguinte caracterização é válida:*

$$\partial A(x^s) = \left(\bigcup_i W_p^s(\hat{x}_i) \right) \cup \left(\bigcup_j W_p^s(\tilde{x}_j) \right)$$

Demonstração. Inicialmente mostraremos que $\partial A(x^s) \subset (\bigcup_i W_p^s(\hat{x}_i)) \cup (\bigcup_j W_p^s(\tilde{x}_j))$. Seja $y \in \partial A(x^s) = \partial A_p(x^s)$, uma vez que **(A3)** é válida para o sistema p -iterado associado (4.2), então $f^{kp}(y)$ tende para algum ponto fixo do sistema (4.2) quando $k \rightarrow \infty$. Existem duas possibilidades:

(1) $f^{kp}(y) \rightarrow \hat{x}_i$ quando $k \rightarrow \infty$, sendo $\hat{x}_i$ um ponto fixo do sistema (4.1). Então, $y \in W_p^s(\hat{x}_i)$. em particular, pela invariância da fronteira da região de estabilidade, segue que $\hat{x}_i \in \partial A(x^s)$. Portanto, $y \in W_p^s(\hat{x}_i)$, com $\hat{x}_i \in \partial A(x^s)$. Logo, $\partial A(x^s) \subset W_p^s(\hat{x}_i)$;

(2) $f^{kp}(y) \rightarrow \tilde{x}_j$ quando $k \rightarrow \infty$, sendo $\tilde{x}_j$ ponto pertencente a alguma órbita periódica do sistema (4.1). Então, novamente da invariância da fronteira da região de estabilidade, segue que $y \in W_p^s(\tilde{x}_j)$ e $\tilde{x}_j \in \partial A(x^s)$. Portanto, $\partial A(x^s) \subset W_p^s(\tilde{x}_j)$;

Segue dos itens (1) e (2) que $\partial A(x^s) \subset (\bigcup_i W_p^s(\hat{x}_i)) \cup (\bigcup_j W_p^s(\tilde{x}_j))$.

Suponha que $\hat{x}_i$ e $\tilde{x}_j$ não sejam nós instáveis. Uma vez que ambos $\hat{x}_i$ e $\tilde{x}_j$ são pontos fixos do sistema (4.2) pertencentes à $\partial A(x^s)$. Então, do Teorema 4.3.2 para o sistema p -iterado associado segue que $W_p^s(\hat{x}_i) \subset \partial A_p(x^s)$ e $W_p^s(\tilde{x}_j) \subset \partial A_p(x^s)$. Consequentemente, $(\bigcup_i W_p^s(\hat{x}_i)) \cup (\bigcup_j W_p^s(\tilde{x}_j)) \subset \partial A_p(x^s)$. Do Corolário 4.2.2, $(\bigcup_i W_p^s(\hat{x}_i)) \cup (\bigcup_j W_p^s(\tilde{x}_j)) \subset \partial A(x^s)$. O que conclui a demonstração. ■

O Teorema 4.3.3 oferece uma caracterização da fronteira da região de estabilidade do sistema (4.1) através das variedades estáveis dos pontos fixos do sistemas p -iterado (4.2).

Agora, no intuito de caracterizarmos a fronteira da região de estabilidade através dos elementos do próprio sistema original (4.1), estabelecemos uma relação entre suposições feitas no campo do sistema (4.1) com suposições **(A1)**, **(A2)** e **(A3)** impostas sobre campo do sistema p -iterado associado (4.2). Este resultado é de inteira importância no encadeamento lógico desse trabalho, uma vez que ele nos possibilitará estudarmos o sistema (4.1) sob certas condições, através do estudo do sistema (4.2).

Dessa maneira, considere as seguintes suposições:

(B1) Todos os pontos fixos e órbitas periódicas pertencentes à fronteira da região de estabilidade são hiperbólicos;

(B2) As variedades invariantes, estável e instável, dos pontos fixos e órbitas periódicas pertencentes à fronteira da região de estabilidade satisfazem a condição de transversali-

dade;

(B3) Toda trajetória na fronteira da região de estabilidade se aproxima de algum ponto fixo ou órbita periódica quando $k \rightarrow \infty$;

Teorema 4.3.4. *Se as afirmações (B1), (B2) e (B3) são válidas para o sistema (4.1) e p é um múltiplo comum de todos os períodos das órbitas periódicas do sistema (4.1). Então as afirmações (A1), (A2) e (A3) são válidas para o sistema p -iterado associado (4.2).*

Demonstração. **(B1) $\Rightarrow$ (A1)**

Seja $x^* \in \partial A(x^s)$ um ponto fixo. Por hipótese, x^* é ponto fixo hiperbólico de (4.1), então x^* também é ponto fixo hiperbólico de (4.2) (SHUB, 1987).

Agora, suponha que $\gamma \in \partial A(x^s)$ seja uma órbita periódica hiperbólica de (4.1), então cada $f^k(x^*)$, $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, é ponto fixo hiperbólico do sistema (4.2) (SHUB, 1987).

(B2) $\Rightarrow$ (A2)

Dividiremos esta prova em três passos:

1. Suponha que x^* e y^* sejam pontos fixos pertencentes à fronteira da região de estabilidade do sistema (4.1), como **(B2)** é satisfeita então, as variedades invariantes de x^* e y^* satisfazem a condição de transversalidade. Uma vez que o Lema 4.1.1 é válido, então **(A2)** é verdadeira para o sistema (4.2).

2. Sejam $\gamma = \{x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)\}$ e $\beta = \{y^*, f(y^*), \dots, f^{p-1}(y^*)\}$ órbitas periódicas de período p do sistema (4.1). Por hipótese, γ e β são hiperbólicas e suas variedades invariantes satisfazem a condição de transversalidade.

Como o Teorema 4.1.4 é válido, então $W_p^s(f^i(x^*)) \cap W_p^u(f^j(y^*))$ é uma interseção transversal para algum $i, j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.

Por outro lado, se $q \in W_p^s(f^i(x^*)) \cap W_p^u(f^j(y^*))$, então $q \in W^s(\gamma) \cap W^u(\beta)$ pelo Teorema 4.1.4, que é uma interseção transversal.

3. A demonstração de **(B2) $\Rightarrow$ (A2)** quando $\gamma = \{x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)\}$ é uma órbita periódica hiperbólica de período p do sistema (4.1) e y^* é um ponto fixo do sistema (4.1) é similar a demonstração feita no item 2 e será omitida neste trabalho.

(B3) $\Rightarrow$ (A3)

Seja $f^k(y)$ uma trajetória em $\partial A(x^s)$, como **(B3)** é válida, então $f^k(y)$ se aproxima de algum ponto fixo ou órbita periódica quando $k \rightarrow \infty$.

Suponha que $f^k(y)$ se aproxima do ponto fixo x^* do sistema (4.1) quando $k \rightarrow \infty$. Em particular, da continuidade de f , segue que $f^{np}(y) \rightarrow x^*$ quando $n \rightarrow \infty$.

Suponha agora que $f^k(y)$ se aproxima de uma órbita periódica $\gamma = \{x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)\}$ quando $k \rightarrow \infty$. Em particular, $f^{np}(y) \rightarrow \gamma$ quando $n \rightarrow \infty$. Como a órbita periódica γ é um conjunto finito de pontos isolados, então existe subsequência n_j tal que $f^{n_j p}(y) \rightarrow f^i(x^*)$, para algum $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, quando $n_j \rightarrow \infty$.

Observe que cada $f^i(x^*)$ é um ponto fixo no sistema p -iterado. Sem perda de generalidade, tome $i = 0$, então $f^{n_j p}(y) \rightarrow x^*$ quando $n_j \rightarrow \infty$. Pela continuidade de f e periodicidade p de x^* segue que, dado $\delta > 0$, existe $\epsilon < \delta$ tal que se $\|x - x^*\| < \epsilon$, então $\|f^p(x) - x^*\| < \delta$. Podemos escolher δ suficientemente pequeno de modo que, $\min_{1 \leq i \leq p-1} \text{dist}(f^i(x^*), B(x^*, \delta)) > \delta$, onde $B(x^*, \delta)$ é a bola de raio δ e centrada em x^* .

Agora, para dado ϵ , existem números naturais M e N , com $Np > M$, tais que $\text{dist}(f^k(y), \gamma) < \epsilon$, para todo $k > M$, e $\text{dist}(f^{n_j p}(y), x^*) < \epsilon$, para todo $n_j > N$.

Note que, para todo $n_j > N$, vale que $\|f^{(n_j+1)p}(y) - x^*\| < \delta$. Uma vez que $n_j + 1 > N$, então $(n_j + 1)p > M$, logo $\text{dist}(f^{(n_j+1)p}(y), \gamma) < \epsilon < \delta$. Portanto, $\|f^{(n_j+r)p}(y) - x^*\| < \epsilon$, para todo $n_j > N$ e $r \geq 0$. Isso implica que $f^{np}(y) \rightarrow x^*$ quando $n \rightarrow \infty$, o que conclui a demonstração. ■

O Teorema 4.3.4 demonstrado acima é de extrema importância no desenvolvimento deste trabalho, uma vez que, a partir dele momento, podemos oferecer condições necessárias e suficientes para que pontos fixos e órbitas periódicas pertençam à fronteira da região de estabilidade do sistema (4.1). Sendo assim, enunciamos a seguir uma versão do Teorema 3.2.2, que caracteriza pontos fixos pertencentes à fronteira da região de estabilidade, sob as condições **(B1)**, **(B2)** e **(B3)**, da seguinte maneira:

Teorema 4.3.5. *Sejam x^s um ponto fixo assintoticamente estável de (4.1) e $\hat{x} \neq x^s$ um ponto fixo do sistema (4.1). Supondo que f é um difeomorfismo e que as afirmações **(B1)**-**(B3)** sejam válidas para o sistema (4.1) e $p \in \mathbb{Z}_+^*$ é um múltiplo do período de todas as órbitas periódicas pertencentes a $\partial A(x^s)$. Então, a seguinte caracterização é válida*

1. $\hat{x} \in \partial A(x^s)$ se, e somente se, $W^u(\hat{x}) \cap A(x^s) \neq \emptyset$;
2. suponha que $\hat{x}$ não seja um nó instável, então $\hat{x} \in \partial A(x^s)$ se, e somente se, $W^s(\hat{x}) \subset \partial A(x^s)$;

Demonstração. 1. Primeiramente demonstraremos a condição somente se. Seja $\hat{x} \in \partial A(x^s)$ um ponto fixo hiperbólico do sistema (4.1). Então, pelo Corolário 4.2.2 segue que $\hat{x} \in \partial A_p(x^s)$. Como as afirmações **(A1)**, **(A2)** e **(A3)** são verdadeiras para o sistema (4.2). Então, aplicando o Teorema 3.2.2 para o sistema p -iterado associado, segue que $W_p^u(\hat{x}) \cap A_p(x^s) \neq \emptyset$. Como $W_p^s(\hat{x}) = W^s(\hat{x})$, do Teorema 4.2.1, podemos concluir que $W^s(\hat{x}) \cap A(x^s) \neq \emptyset$.

2 A demonstração do item 2 é similar à feita no item 1 e será omitida. ■

Ainda sob as condições **(B1)**, **(B2)** e **(B3)**, podemos oferecer condições suficientes e necessárias para que uma órbita periódica hiperbólica pertença à fronteira da região de estabilidade.

Teorema 4.3.6. *Sejam x^s um ponto fixo assintoticamente estável do sistema (4.1) e $\gamma = \{x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)\}$ uma órbita periódica hiperbólica de período p do sistema (4.1), com f um difeomorfismo. Suponha que as afirmações **(B1)**, **(B2)** e **(B3)** sejam válidas para o sistema (4.1) e $p \in \mathbb{Z}_+^*$ é um múltiplo do período de todas as órbitas periódicas pertencentes à $\partial A(x^s)$. Então, a seguinte caracterização é válida:*

1. $\gamma \subseteq \partial A(x^s)$ se, e somente se, $W^u(\gamma) \cap A(x^s) \neq \emptyset$;
2. $\gamma \subseteq \partial A(x^s)$ se, e somente se, $W^s(\gamma) \subseteq \partial A(x^s)$;

Demonstração. 1. Suponha que $W^u(\gamma) \cap A(x^s) \neq \emptyset$. Do Teorema 4.1.4 segue que $W_p^u(f^k(x^*)) \cap A(x^s) \neq \emptyset$, para algum $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Além disso, do Teorema 4.2.1, segue que $W_p^u(f^k(x^*)) \cap A_p(x^s) \neq \emptyset$, para algum $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.

Como cada $f^k(x^*)$, $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, é ponto fixo do sistema (4.2) e como **(B1)**, **(B2)** e **(B3)** são válidas para o sistema (4.1), então podemos aplicar o Teorema 4.3.2 e $f^k(x^*) \in \partial A_p(x^s)$, para algum $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Como a fronteira da região de estabilidade é invariante, então $f^k(x^*) \in \partial A_p(x^s)$, para todo $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, portanto $\gamma \in \partial A_p(x^s)$. Logo, $\gamma \in \partial A(x^s)$.

Suponha agora que $\gamma \subseteq \partial A(x^s)$, pelo Corolário 4.2.2 vem que $\gamma \subseteq \partial A_p(x^s)$. Em particular, $f^k(x^*) \in \partial A_p(x^s)$, para todo $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Uma vez que as afirmações **(B1)**, **(B2)** e **(B3)** são válidas para o sistema (4.1), do Teorema 4.3.2, segue que $W_p^u(f^k(x^*)) \cap A_p(x^s) \neq \emptyset$, para todo $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Portanto, do Teorema 4.1.4, $W^u(\gamma) \cap A_p(x^s) \neq \emptyset$. Logo, pelo Teorema 4.2.1, segue que $W^u(\gamma) \cap A(x^s) \neq \emptyset$.

2. A demonstração do item 2 é similar à feita no item 1 por isso será omitida neste trabalho. ■

Dadas as condições para que pontos fixos e órbitas periódicas pertençam à fronteira da região de estabilidade, podemos oferecer uma caracterização da fronteira da região de estabilidade de um ponto fixo assintoticamente estável para sistemas dinâmicos discretos não lineares modelados por um difeomorfismo e que admitem a presença de órbitas periódicas hiperbólicas na fronteira da região da fronteira da região de estabilidade.

Teorema 4.3.7 (Caracterização Completa da Fronteira da Região de Estabilidade). *Seja x^s um ponto fixo assintoticamente estável do sistema (4.1). Suponha que **(B1)**, **(B2)** e **(B3)** sejam válidas para o sistema (4.1), onde f é um difeomorfismo. Sejam x_i , $i = 1, 2, \dots$, pontos fixos instáveis e γ_j , $j = 1, 2, \dots$, órbitas periódicas pertencentes à fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^s)$. Suponha que $p \in \mathbb{Z}_+^*$ é um múltiplo do período de todas as órbitas periódicas pertencentes à $\partial A(x^s)$. Então,*

$$\partial A(x^s) = \left(\bigcup_i W^s(x_i) \right) \cup \left(\bigcup_j W^s(\gamma_j) \right)$$

Demonstração. Suponha que $y \in \partial A(x^s)$. Então, da afirmação **(B3)**, segue que $y \in W^s(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$, ou $y \in W^s(\gamma_j)$, $j = 1, 2, \dots$. Portanto, podemos concluir que $\partial A(x^s) \subseteq \left(\bigcup_i W^s(x_i) \right) \cup \left(\bigcup_j W^s(\gamma_j) \right)$.

Do Teorema 4.3.5 segue que $\bigcup_i W^s(x_i) \subset \partial A(x^s)$ e do Teorema 4.3.6 segue que $\bigcup_j W^s(\gamma_j) \in \partial A(x^s)$. Logo, $\left(\bigcup_i W^s(x_i) \right) \cup \left(\bigcup_j W^s(\gamma_j) \right) \subset \partial A(x^s)$. Isso conclui a demonstração. ■

Como esperado, a caracterização da fronteira da região de estabilidade para sistemas modelados por difeomorfismos proposta no teorema acima é similar à caracterização proposta em (CHIANG; HIRSCH; WU, 1988) para sistemas dinâmicos contínuos com órbitas periódicas na fronteira da região de estabilidade. O próximo exemplo ilustra a caracterização proposta no teorema 4.3.7.

Exemplo 4.3.8. *Considere o seguinte sistema dinâmico discreto bidimensional:*

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -ax_k^3 + bx_k \\ y_{k+1} &= cy_k^3 - dy_k \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde $a = c = 1$, $b = \frac{1}{10}$, e $d = \frac{1}{8}$. O campo vetorial do sistema (4.5) é um difeomorfismo e possui 3 pontos fixos: $(0, 0)$, ponto fixo assintoticamente estável, $(0, 1.0607)$ e $(0, -1.0607)$, pontos fixos instáveis. Além disso, o sistema possui 3 órbitas periódicas de período 2: $\gamma_1 = \{(-1.0488, 1.0607), (1.0488, 1.0607)\}$, $\gamma_2 = \{(-1.0488, -1.0607), (1.0488, -1.0607)\}$ e $\gamma_0 = \{(1.0488, 0), (-1.0488, 0)\}$. O retrato de fase e as variedades invariantes dos elementos críticos do sistema (4.5) estão ilustrados na Figura 4.3.

Agora, considere o sistema 2-iterado associado ao sistema (4.5):

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= a^4 x_m^9 - 3a^3 b x_m^7 + 3a^2 b^2 x_m^5 - ab^3 x_m^3 - abx_m^3 + b^2 x_m \\ y_{m+1} &= c^4 y_m^9 + 3c^3 d y_m^7 + 3c^2 d^2 y_m^5 + cd^3 y_m^3 - dcy_m^3 + d^2 y_m \end{aligned} \tag{4.6}$$

O campo vetorial do sistema acima é um difeomorfismo e o sistema (4.6) possui 9 pontos fixos: $(0, 0)$, ponto fixo assintoticamente estável, $(0, 1.0607)$, $(0, -1.0607)$, $(1.0488, 0)$, $(-1.0488, 0)$, pontos fixo instáveis, e $(-1.0488, 1.0607)$, $(1.0488, 1.0607)$, $(-1.0488, -1.0607)$, $(1.0488, -1.0607)$, pontos fixos do tipo-2 (repulsores). Os retrato de fase e as variedades invariantes dos pontos fixos do sistema (4.6) estão ilustrados na Figura 4.4.

A região de estabilidade dos sistemas (4.5) e (4.6) são iguais. Uma vez que as condições **(B1)**, **(B2)** e **(B3)** são satisfeitas para o sistema (4.5), podemos aplicar o Teorema 4.3.7 e a fronteira da região de estabilidade fica caracterizada da seguinte maneira:

Figura 4.3: Região de estabilidade de $(0,0)$ e variedades invariantes dos elementos críticos do sistema (4.5).

Figura 4.4: Região de estabilidade de $(0,0)$ e variedades invariantes dos pontos fixos do sistema (4.6).

$$\partial A(0,0) = W^s(\gamma_0) \cup W^s(\gamma_1) \cup W^s(\gamma_2) \cup W^s(0, 1.0607) \cup W^s(0, -1.0607)$$

Como as afirmações (A1), (A2) e (A3) são válidas para o sistema 2-iterado asso-

ciado (4.6), podemos aplicar o Teorema 4.3.3 e a fronteira da região de estabilidade fica completamente caracterizada como

$$\begin{aligned} \partial A(0, 0) = & W_2^s(1.0488, 0) \cup W_2^s(-1.0488, 0) \cup W_2^s(1.0488, 1.0607) \cup W_2^s(-1.0488, 1.0607) \\ & \cup W_2^s(1.0488, -1.0607) \cup W_2^s(-1.0488, -1.0607) \cup W_2^s(0, 1.0607) \cup W_2^s(0, -1.0607) \end{aligned}$$

Como esperado, as caracterizações da fronteira da região de estabilidade tanto no sistema original (4.5) quanto no sistema 2-iterado associado (4.6) são iguais.

O resultado a seguir nos oferece outra caracterização da fronteira da região de estabilidade através das variedades estáveis dos pontos fixos do tipo-1 do sistema p -iterado associado (4.2).

Teorema 4.3.9. *Seja x^s um ponto fixo assintoticamente estável do sistema (4.1). Suponha que as afirmações (B1), (B2) e (B3) sejam satisfeitas para (4.1), com f um difeomorfismo. Sejam x_i^1 , com $i = 1, 2, \dots$, os pontos fixos hiperbólicos instáveis do tipo-1, com relação ao sistema p -iterado (4.2), pertencentes à fronteira do fecho da região de estabilidade. Então,*

$$\overline{\partial A(x^s)} = \bigcup_i \overline{W_p^s(x_i^1)}$$

A demonstração segue de maneira análoga à feita no Teorema 9-12 em (CHIANG; ALBERTO, 2015).

Para o sistema (4.5), temos que $\overline{A(0, 0)} = A(0, 0) \cup \partial A(0, 0)$ com $\overline{\partial A(0, 0)} = \partial A(0, 0)$. Observe que no sistema (4.6) os pontos fixos hiperbólicos do tipo-1 pertencentes à fronteira do fecho da região de estabilidade são: $(-1.0488, 0)$, $(1.0488, 0)$, $(0, 1.0607)$ e $(0, -1.0607)$. Sendo $\overline{\partial A(0, 0)} = \overline{W_2^s(-1.0488, 0)} \cup \overline{W_2^s(1.0488, 0)} \cup \overline{W_2^s(0, 1.0607)} \cup \overline{W_2^s(0, -1.0607)}$.

Teorema 4.3.10. *Seja x^s um ponto fixo assintoticamente estável do sistema (4.1). Suponha que as afirmações (B1), (B2) e (B3) sejam válidas para (4.1) e que f seja um difeomorfismo. Se a região de estabilidade $A(x^s)$ não é um conjunto denso no $\mathbb{R}^n$, então a fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^s)$ deve conter ao menos um ponto fixo do tipo-1 com relação ao sistema p -iterado associado. Além disso, se $A(x^s)$ é limitada, então $\partial A(x^s)$ deve conter ao menos um ponto fixo do tipo- n com relação ao sistema p -iterado.*

Demonstração. Por hipótese, a região de estabilidade não é densa em $\mathbb{R}^n$, então pelo Teorema 3.1.2 segue que a fronteira $\partial A(x^s)$ tem dimensão $n - 1$. Como $\partial A(x^s) = \bigcup_i W_p^s(x_i)$, com $i = 1, 2, \dots$, sendo x_i os pontos fixos hiperbólicos ou pontos de alguma órbita p -periódica hiperbólica do sistema (4.1) pertencente à fronteira da região de estabilidade,

então no mínimo um dos pontos fixos tem que ser do tipo-1 para que a dimensão de $\bigcup_i W_p^s(x_i)$ seja $n - 1$.

Agora, seja $\partial W_p^s(x_1) \neq \emptyset$, então a dimensão de $\partial W_p^s(x_1)$ é $n - 2$. Da aplicação do Teorema 3.2.3 segue que $\partial W_p^s(x_1) = \bigcup_j W_p^s(x_j)$, sendo x_j os pontos fixos hiperbólicos e pontos de alguma órbita p -periódica hiperbólica pertencente à $\partial W_p^s(x_1)$. Dessa maneira, mostramos que se $\bigcup_j W_p^s(x_j)$ é de dimensão $n - 2$, então ao menos um ponto fixo x_j em $\partial W_p^s(x_1)$ deve ser um ponto fixo do tipo-2 para o sistema p -iterado. Uma vez que a região de estabilidade é um conjunto limitado, por hipótese, então o mesmo argumento utilizado acima pode ser repetido até que cheguemos a algum ponto fixo do tipo- n para o sistema p -iterado associado.

■

Para o Exemplo 4.3.8, note que $A(0,0)$ não é um conjunto denso no $\mathbb{R}^2$. De fato, é possível pegar um ponto $x \in \mathbb{R}^2$ de modo que, exista vizinhança U de x que não esteja contida em $\overline{A(0,0)}$.

Aplicando o Teorema 4.3.10, temos que a fronteira da região de estabilidade $\partial A(0,0)$ deve conter ao menos um ponto fixo hiperbólico do tipo-1 no sistema 2-iterado associado (4.6). Observe que $(-1.0488, 0)$, $(1.0488, 0)$, $(0, 1.0607)$ e $(0, -1.0607)$ são pontos fixos do tipo-1 pertencentes à fronteira da região de estabilidade. Além disso, pelo Teorema 4.3.10, uma vez que a região de estabilidade é um conjunto limitado, $\partial A(0,0)$ deve conter ao menos um ponto fixo hiperbólico do tipo- n . De fato, os pontos pertencentes às órbitas 2-periódicas γ_1 e γ_2 são pontos fixos do tipo-2 para o sistema 2-iterado associado.

Capítulo 5

Região de Estabilidade de Redes Neurais Simétricas Associativas em Tempo Discreto

Neste capítulo, aplicamos a teoria de região de estabilidade e a caracterização da sua fronteira proposta no Capítulo 4 no estudo da região de estabilidade de uma rede neural simétrica com 2 neurônios em tempo discreto. Mais precisamente, estendemos o resultado proposto por (BLUM; WANG, 1992), caracterizando a fronteira da região de estabilidade dos pontos fixos assintoticamente estáveis da rede neural.

Considere o seguinte sistema dinâmico discreto não linear:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = F \left(W \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right) \quad (5.1)$$

com $W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$ uma matriz simétrica, ou seja, $w_{12} = w_{21}$. A equação (5.1) modela uma classe de redes neurais analógicas simétricas em tempo discreto com 2 neurônios. Para mais informações sobre a rede (5.1), ver referência (BLUM; WANG, 1992).

Definiremos $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como a função não linear $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y) \\ f(x) \end{pmatrix}$, sendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alguma função topologicamente conjugada com a função sigmoidal:

$$\psi_a(x) = 2 \left(\frac{1}{1 + e^{-ax}} - \frac{1}{2} \right), \quad a > 0$$

Geralmente, a matriz de pesos W é definida com $w_{11} = w_{22} = 0$ e $w_{12} = w_{21} = 1$. Para essa matriz W , (BLUM; WANG, 1992) demonstram que a rede neural (5.1) possui apenas pontos fixos e órbitas 2-periódicas como atratores.

Teorema 5.0.1 ((BLUM; WANG, 1992)). *Na equação (5.1), seja $f = f_a$, onde f_a é topologicamente conjugada com ψ_a através de um homeomorfismo h , isto é, $f_a = h \circ \psi_a \circ h^{-1}$. Então, existe um ponto de bifurcação a_0 tal que*

1. *para $a \leq a_0$, a rede (5.1) tem um único ponto fixo $(h(0), h(0))$, que é um atrator global e não existem pontos p -periódicos para $p \geq 2$;*
2. *para $a > a_0$, a rede (5.1) tem três pontos fixos: $(h(0), h(0))$, que é um ponto repulsor, e $(h(c_a), h(c_a))$, $(h(-c_a), h(-c_a))$, $0 < c_a < 1$, que são pontos localmente atratores;*
e
3. *para $a > a_0$, existem dois pontos 2-periódicos $(h(c_a), h(-c_a))$ e $(h(-c_a), h(c_a))$, $0 < c_a < 1$, que pertencem a uma órbita fechada assintoticamente estável. Existem duas outras órbitas 2-periódicas: $\{(h(0), h(c_a), h(c_a), h(0))\}$ e $\{(h(0), h(-c_a), h(-c_a), h(0))\}$ que são órbitas periódicas instáveis do tipo sela. Não existem pontos p -periódicos para $p > 2$.*

Se h é um difeomorfismo, os pontos fixos são hiperbólicos para $a \neq a_0$ e não hiperbólicos para $a = a_0$.

Para $f = \psi_a$, Blum e Wang (BLUM; WANG, 1992) demonstram, usando análise real, o resultado enunciado acima. A seguir, estendemos o resultado de (5.1) caracterizando a região de estabilidade e a fronteira da região de estabilidade dos pontos fixos assintoticamente estáveis da rede neural simétrica com 2 neurônios (5.1).

Teorema 5.0.2. *Considere a rede neural (5.1), onde f é alguma função topologicamente conjugada com a função sigmoideal ψ_a por um difeomorfismo h , isto é, $f = h \circ \psi_a \circ h^{-1}$. Então, existe um ponto de bifurcação a_0 tal que*

1. *para $a \leq a_0$, a rede (5.1) tem um ponto fixo $x_0 = (h(0), h(0))$, que é um atrator global, e não existem pontos p -periódicos para $p \geq 2$;*
2. *para $a > a_0$, a rede (5.1) tem três pontos fixos: $x_0 = (h(0), h(0))$, que é um repulsor, e $x_+ = (h(c_a), h(c_a))$, $x_- = (h(-c_a), h(-c_a))$, para algum $0 < c_a < 1$, que são pontos fixos assintoticamente estáveis. A rede possui uma órbita 2-periódica assintoticamente estável: $\gamma_s = \{(h(c_a), h(-c_a)), (h(-c_a), h(c_a))\}$ e duas órbitas 2-periódicas: $\gamma_+ = \{(h(0), h(c_a)), (h(c_a), h(0))\}$ e $\gamma_- = \{(h(0), h(-c_a)), (h(-c_a), h(0))\}$, que são órbitas instáveis hiperbólicas do tipo-1. Não existem pontos p -periódicos para $p > 2$;*
3. *para $a > a_0$, a origem e a órbita periódica γ_+ pertencem à fronteira da região de estabilidade do ponto fixo x_+ e a fronteira da região de estabilidade $\partial A(x_+)$ é composta da união das variedades destes elementos críticos. Mais precisamente,*

$$\partial A(x_+) = W^s(x_0) \cup W^s(\gamma_+)$$

Simetricamente, a fronteira da região de estabilidade do ponto fixo assintoticamente estável x_- é dada por:

$$\partial A(x_-) = W^s(x_0) \cup W^s(\gamma_-)$$

e $A(x_+) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$ e $A(x_-) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, y < 0\}$ são conjuntos abertos, conexos e invariantes.

Demonstração. A demonstração dos itens 1 e 2 é similar àquela feita em (BLUM; WANG, 1992) e será omitida neste trabalho. Para provar 3, observe que F é um difeomorfismo e as afirmações **(B1)**, **(B2)** e **(B3)** são válidas para o sistema (5.1).

A variedade instável do ponto fixo x_0 tem interseção não vazia com a região de estabilidade $A(x_+)$. Então, pelo Teorema 4.3.5 enunciado no Capítulo 4, segue que $x_0 \in \partial A(x_+)$.

Além disso, a variedade instável da órbita periódica γ_+ tem interseção não vazia com a região de estabilidade $A(x_+)$. Então, de acordo com o Teorema 4.3.6 do Capítulo 4, segue que $\gamma_+ \in \partial A(x_+)$. Então, da caracterização 4.3.7, podemos afirmar que

$$\partial A(x_+) = W^s(x_0) \cup W^s(\gamma_+)$$

Simetricamente, a fronteira da região de estabilidade do ponto fixo assintoticamente estável x_- é completamente caracterizada por:

$$\partial A(x_-) = W^s(x_0) \cup W^s(\gamma_-)$$

■

Exemplo 5.0.3. Considere a rede neural simétrica com 2 neurônios (5.1) com a seguinte função ativação:

$$f(z) = \tanh(az), a > 0 \tag{5.2}$$

Essa função é topologicamente conjugada à função sigmoideal ψ_a . Para esta função ativação, a rede neural (5.1) tem um ponto de bifurcação em $a = 1$.

Para $a < 1$, o sistema (5.1) possui um único ponto fixo na origem, que é um atrator global para o sistema. Na Figura 5.1 ilustramos esse caso para $a = 0.5$.

Quando $a > 1$, o sistema (5.1) tem três pontos fixos e seis pontos 2-periódicos. Em particular, para $a = 1.5$, a rede neural (5.1) possui os seguintes pontos fixos: $(0, 0)$, que é um ponto fixo repulsor, $x_+ = (0.8586, 0.8586)$ e $x_- = (-0.8586, -0.8586)$ que são pontos fixos assintoticamente estáveis. Além disso, quando $a = 1.5$ o sistema (5.1) possui uma órbita

Figura 5.1: Retrato de fase da rede neural (5.1) para $a = 0.5$. A origem é um ponto fixo globalmente assintoticamente estável.

2-periódica assintoticamente estável, $\gamma_s = \{(0.8586, -0.8586), (-0.8586, 0.8586)\}$ e duas órbitas 2-periódicas instáveis: $\gamma_+ = \{(0.8586, 0), (0, 0.8586)\}$ e $\gamma_- = \{(0, -0.8586), (-0.8586, 0)\}$. Na Figura 5.2 ilustramos o retrato de fase do sistema (5.1) para o valor particular $a = 1.5$.

Considere o sistema 2-iterado associado ao sistema original (5.1)

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = F^2 \left(W \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right) \quad (5.3)$$

com $F^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^2(y) \\ f^2(x) \end{pmatrix}$, onde f é a mesma função ativação do sistema original (5.1).

Todos os pontos fixos do sistema original (5.1) são pontos fixos do sistema 2-iterado associado (5.3). Além disso, os seis pontos 2-periódicos da rede neural com 2 neurônios (5.1) são agora pontos fixos do sistema (5.3), isto é, o sistema (5.3) possui nove pontos fixos sendo: quatro pontos fixos assintoticamente estáveis e cinco pontos fixos instáveis. O retrato de fase do sistema 2-iterado associado, para $a = 1.5$, é ilustrado na Figura 5.3.

A região de estabilidade do ponto fixo assintoticamente estável x_+ é ilustrada na Figura 5.4. Em concordância com a caracterização proposta no Capítulo 4 no Teorema 4.3.7, a fronteira da região de estabilidade $\partial A(x_+)$ é composta pela união das variedades estáveis dos pontos fixos e órbitas periódicas pertencentes à fronteira da região de estabilidade.

Observe ainda que o Teorema 4.3.9 é verificado para a região de estabilidade $A(x_+)$, sendo os pontos fixos do tipo-1 os pontos pertencentes à órbita 2-periódica γ_+ .

Figura 5.2: Retrato de fase da rede neural (5.1) para $a = 1.5$. A origem é um ponto fixo repulsor e x_+ e x_- são pontos fixos assintoticamente estáveis do sistema. γ_s , γ_+ e γ_- são órbitas 2-periódicas do sistema (5.1).

Figura 5.3: Retrato de fase para o sistema (5.3). O sistema possui 9 pontos fixos.

Figura 5.4: Região de Estabilidade do ponto fixo assintoticamente estável x_+ . A fronteira da região de estabilidade é a união das variedades estáveis dos elementos críticos pertencentes a $\partial A(x_+)$.

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos o comportamento da região de estabilidade para uma classe particular de sistemas dinâmicos discretos autônomos não lineares que admitem comportamentos complexos na fronteira da região de estabilidade. Em particular, estendemos a caracterização proposta em (CHIANG; ALBERTO, 2015) e (CHIANG et al., 2012) para incluirmos sistemas que admitem órbitas periódicas e pontos fixos na fronteira da região de estabilidade.

Para obtenção da caracterização da fronteira da região de estabilidade, utilizou-se um sistema auxiliar associado ao sistema dinâmico discreto original. Órbitas periódicas de período p do sistema original são pontos fixos neste novo sistema. Dessa maneira, foi possível explorarmos a caracterização proposta em (CHIANG; ALBERTO, 2015) e (CHIANG et al., 2012) para obtenção de uma caracterização completa da fronteira da região de estabilidade para sistemas discretos cuja fronteira da região de estabilidade de algum ponto fixo admite a presença de órbitas periódicas hiperbólicas.

Verificou-se que pontos fixos assintoticamente estáveis do sistema original mantinham suas propriedades de atratividade e estabilidade no sistema p -iterado associado. Mais precisamente, mostrou-se que: *Se x^s é um ponto fixo assintoticamente estável no sistema original, então x^s é um ponto fixo assintoticamente estável do sistema p -iterado.*

Naturalmente, seguiu-se deste resultado que as regiões de estabilidade de um ponto fixo assintoticamente estável x^s eram iguais para os dois sistemas, ou seja, $A(x^s) = A_p(x^s)$. Dessa maneira, utilizando o sistema p -iterado associado, foi possível propor uma caracterização topológica da região de estabilidade do sistema original. Esta caracterização é similar à proposta em (CHIANG et al., 2012) e (CHIANG; ALBERTO, 2015).

Seguindo uma linha de raciocínio análoga à utilizada em (CHIANG et al., 2012) e (CHIANG; ALBERTO, 2015), foram dadas condições necessárias e suficientes para que órbitas periódicas hiperbólicas e pontos fixos hiperbólicos pertencessem à fronteira da região de estabilidade. Sob certas condições no sistema dinâmico original e supondo que o campo seja um difeomorfismo, propusemos uma caracterização completa da região de

estabilidade de um ponto fixo assintoticamente estável do sistema original através das variedades invariantes dos pontos fixos e órbitas periódicas hiperbólicas pertencentes à fronteira da região de estabilidade. Como esperado, para difeomorfismo, a caracterização proposta neste trabalho é similar à proposta em (CHIANG; HIRSCH; WU, 1988) para sistemas dinâmicos contínuos.

Uma aplicação das caracterizações da região de estabilidade e de sua fronteira para uma classe de redes neurais simétricas associativas com 2 - neurônios é apresentada para ilustrar os resultados deste trabalho.

6.1 Trabalhos Futuros

Como sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros nesta área, são propostas as seguintes questões:

- Relaxar a condição de f ser um difeomorfismo na caracterização proposta para a fronteira da região de estabilidade de sistemas dinâmicos discretos que admitem órbitas periódicas na fronteira da região de estabilidade;
- Estudar métodos para estimar a região de estabilidade de sistemas dinâmicos discretos autônomos não lineares que admitem comportamentos complexos na fronteira da região de estabilidade;
- Caracterizar a região de estabilidade de uma órbita periódica assintoticamente estável para uma classe de sistemas dinâmicos discretos autônomos não lineares;
- Propor um algoritmo computacional para localizar órbitas periódicas hiperbólicas na fronteira da região de estabilidade de um sistema dinâmico discreto não linear, bem como calcular o período desta órbita;

6.2 Publicações Relacionadas à Dissertação

1. Artigo aceito para apresentação no XXXVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional sob o título: Órbitas Periódicas Hiperbólicas na Fronteira da Região de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Discretos.
2. Artigo submetido a IEEE Transactions on Automatic Control sob o título: Stability Regions of a Large Class of Nonlinear Discrete Dynamical Systems. Sob avaliação.

Referências

- ABRAHAM, R.; ROBBIN, J. **Transversal Mappings an Flows**. New York: W. A. Benjamin Inc., 1967.
- AMARAL, F. M.; ALBERTO, L. F. C. Stability region bifurcations of nonlinear autonomous dynamical systems: type-zero saddle-node bifurcations. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, [S.l.], v.21, n.6, p.591–612, 2011.
- ARROW, K. J.; HAHN, F. H. **General Competitive analysis**. San Francisco: Holden-Day, 1971.
- BLUM, E.; WANG, X. Stability of fixed points and periodic orbits and bifurcations in analog neural networks. **Neural Networks**, [S.l.], v.5, n.4, p.577 – 587, 1992.
- BRIN, M.; STUCK, G. **Introcuction to Dynamical Systems**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. 120-123p.
- CHIANG, H. D.; ALBERTO, L. F. C. **Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems**: theory, estimation, and applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.
- CHIANG, H. D.; HIRSCH, M. W.; WU, F. F. Stability Regions of Nonlinear Autonomous Dynamical Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v.33, n.1, p.16–27, 1988.
- CHIANG, H.-d.; LEE, J.; AMARAL, F. M.; COSTA, F. Characterization of Stability Regions of Nonlinear Discrete Systems. **Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática**, [S.l.], p.4682–4689, 2012.
- CHIANG, H. D.; WU, F. F.; VARAIYA, P. A BCU Method for Direct Analysis of Power System Transient Stability. **IEEE Transactions on Power System**, [S.l.], v.9, n.1994, p.1194–1208, 1994.

- CHIANG, H.-D.; WU, F.; VARAIYA, P. Foundations of direct methods for power system transient stability analysis. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, [S.l.], v.34, n.2, p.160–173, Feb 1987.
- CLOOSTERMAN, M. B. G.; WOUW, N. van de; HEEMELS, W. P. M. H.; NIJMEIJER, H. Stability of Networked Control Systems With Uncertain Time-Varying Delays. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v.54, n.7, p.1575–1580, July 2009.
- DEVANEY, R. L. et al. **An introduction to chaotic dynamical systems**. [S.l.]: Addison-Wesley Reading, 1989. v.13046.
- ELAIW, A. M.; XIA, X. HIV dynamics : analysis and robust multirate mpc-based treatment schedules. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, [S.l.], v.359, n.1, p.285–301, 2009.
- FERREIRA, E. D.; KROGH, B. H. Using neural networks to estimate regions of stability. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1997, Albuquerque. **Anais...** IEEE, 1997. p.1989–1993.
- GRIZZLE, J. W.; KANG, J.-m. Discrete-time Control Design with Positive Semi-Definite Lyapunov Functions. **System and Control Letters**, [S.l.], v.33, p.481–504, 2001.
- HALE, J. K. **Asymptotic Behavior of Dissipative Systems**. Providence: Mathematical Surveys and Monographs, 1988.
- KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**. USA: Prentice Hall, 1996.
- LASALLE, J. P. **The Stability of Dynamical Systems**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976.
- LASALLE, J. P. Stability theory for difference equations. Studies in Ordinary differential equation. **Studies in ordinary differential equations, Studies in Math., Math. Assoc. of America, Washington, D.C (Reviewer G.R. Sell)**, [S.l.], v.14, p.1–31, 1977.
- LASALLE, J. P.; AIR, U. S. Stability Theory for Ordinary Differential Equations. , [S.l.], v.65, n.693, p.57–65, 1968.
- LIMA, E. **Variedades diferenciáveis**. [S.l.]: Instituto Matemática Pura e Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas, 1973. (Monografias de matemática).
- LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- LIMA, E. L. **Curso de Análise vol. 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- LIMA, E. L. **Curso de Análise vol. 2**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

- OLIVEIRA, M. de; BERNUSSOU, J.; GEROMEL, J. A new discrete-time robust stability condition. **Systems Control Letters**, [S.l.], v.37, n.4, p.261 – 265, 1999.
- PALIS, J. On Morse-Smale Dynamical Systems. , [S.l.], v.3, p.385–404, 1969.
- PALIS, J.; MELO, W. **Introdução aos Sistemas Dinâmicos**. Rio de Janeiro: IMPA, 1978.
- RAUGEL, G. Global Attractors in Partial Differential Equations. In: **Handbook of Dynamical Systems**. [S.l.]: Elseviers Science, 2002.
- ROBINSON, C. **Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos**. [S.l.]: CRC Press, 1999.
- SHUB, M. **Global Stability of Dynamical Systems**. New York: Springer Verlag, 1987.
- SILVA, F. H. J. R.; ALBERTO, L. F. C.; BRETAS, N. G. Smooth perturbation on a classical energy function for lossy power system stability analysis. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**, [S.l.], v.52, n.1, p.222–229, 2005.
- TSOLAS, N.; ARAPOSTATHIS, A.; VARAIYA, P. A structure preserving energy function for power system transient stability analysis. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, [S.l.], v.32, n.10, p.1041–1049, Oct 1985.
- WIGGINS, S. **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos**. New York: Springer, 1996.