UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO–USP
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Michele Cristina Valentino

**Extensão do princípio de invariância
para sistemas chaveados contínuos no
tempo**

São Carlos
2013

Michele Cristina Valentino

**Extensão do princípio de invariância
para sistemas chaveados contínuos no
tempo**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos

Orientador: Vilma Alves de Oliveira

São Carlos

2013

Trata-se da versão corrigida da tese. A versão original se encontra disponível na EESC/USP que aloja o Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica.

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

V156e Valentino, Michele Cristina
 Extensão do Princípio de Invariância para Sistemas
 Chaveados Contínuos no Tempo / Michele Cristina
 Valentino; orientadora Vilma Alves de Oliveira. São
 Carlos, 2013.

 Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas
Dinâmicos -- Escola de Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo, 2013.

 1. Sistemas chaveados. 2. sistemas fuzzy T-S. 3.
 extensão do princípio de invariância. 4. desigualdades
 matriciais lineares. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Licenciada **MICHELE CRISTINA VALENTINO**.

Título da tese: "Extensão do princípio de invariância para sistemas chaveados contínuos no tempo".

Data da defesa: 01/11/2013

Comissão Julgadora:

Prof^a. Titular **Vilma Alves de Oliveira (Orientadora)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Eugenio de Bona Castelan Neto**
(Universidade Federal de Santa Catarina/UFSC)

Prof. Dr. **Tiago Roux de Oliveira**
(Universidade Estadual do Rio de Janeiro/UERJ)

Prof. Dr. **Reinaldo Martinez Palhares**
(Universidade Federal de Minas Gerais/UFMG)

Prof. Dr. **Flávio Andrade Faria**
(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho/UNESP-Araraquara)

Resultado:

Aprovada

Aprovada

Aprovada

Aprovada

Aprovada

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

A minha família e meu companheiro por acreditarem no meu sonho.

Agradecimentos

A Deus, por estar presente em todos os momentos da minha vida, por guiar o meu caminho e me conceder sabedoria e saúde.

Aos meus pais Gilene e José Valentino e meus irmãos Lilian e Paulo Valentino pelo amor e apoio incondicional.

À minha orientadora Profa. Dra. Vilma Alves de Oliveira pela confiança, parceria e dedicação para a conclusão do trabalho.

Aos meus queridos Douglas e Bela pela paciência e companheirismo.

Aos meus queridos sobrinhos Wallaci, Jonathan e Vitória Valentino e meus cunhados pela força e atenção.

Aos colaboradores em especial Luís Fernando Costa Alberto e Flávio Andrade Faria pela parceria no desenvolvimento do trabalho.

As melhores amigas por sempre entenderem minha ausência.

A todos os meus amigos, colegas e pessoas que me ajudaram.

Ao CNPq e CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Valentino, Michele Cristina **Extensão do princípio de invariância para sistemas chaveados contínuos no tempo**. 80 p. Tese de doutorado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2013.

Este trabalho apresenta uma extensão do princípio de invariância para sistemas chaveados contínuos no tempo. Esta extensão fornece estimativas de atratores e suas respectivas áreas de atração para sistemas chaveados compostos por um número finito de subsistemas, a qual é obtida através de uma função auxiliar comum e múltiplas funções auxiliares que desempenham o mesmo papel que as funções de Lyapunov. As principais características desses novos resultados, são que a derivada da função auxiliar ou das múltiplas funções auxiliares podem assumir valores positivos em alguns conjuntos e também são usados para analisar o comportamento assintótico da solução do sistema chaveado. Resultados para sistemas chaveados com subsistemas com incertezas paramétricas também foram obtidos. Neste caso, as estimativas dos atratores e suas respectivas áreas de atração independem do parâmetro incerto. Analisando as propriedades da função auxiliar comum ao longo de um sistema formado pela combinação convexa de todos os subsistemas, os resultados passam a fornecer estimativas de atratores e suas áreas de atração mesmo na presença de subsistemas que não são ultimamente limitados. Este último resultado pode não evitar o chaveamento rápido, então surge o problema da existência da solução. Esta dificuldade pôde ser superada com o uso da teoria de sistemas descontínuos para garantir que sua solução seja definida para todo tempo mesmo que o chaveamento rápido ocorra. Portanto, uma escolha apropriada da lei de chaveamento possibilita o uso da solução de Krasovskii para garantir a existência da solução para todo tempo. Ainda, representando cada subsistema por um modelo fuzzy T-S, o comportamento assintótico da solução do sistema chaveado pôde ser estudado apenas verificando propriedades de alguns conjuntos do espaço de estado e a factibilidade de um conjunto de desigualdades matriciais lineares.

Palavras-chave: Sistemas Chaveados. Sistemas Fuzzy T-S. Extensão do Princípio de Invariância. Desigualdades Matriciais Lineares.

Abstract

Valentino, Michele Cristina **Extension of the invariance principle for continuous time switched systems.** 80 p. Tese de doutorado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2013.

This work presents an extension of the invariance principle for continuous time switched systems. This extension is useful to obtain estimates of the attractor and basin of attraction for switched systems composed by a finite number of subsystems, which are obtained by using a common auxiliary function or multiple auxiliary functions which play the same role as the Lyapunov function. The main feature of these new results are that the common auxiliary function or the multiple auxiliary functions can be positive in some sets and are used to analyze the asymptotic behavior of the switching solution. Results for switched systems with parametric uncertainties were also obtained. The estimates of the attractor and basin of attraction does not depend on the uncertain parameter. Analysing the auxiliary function along the solutions of the convex combination of the subsystems, estimates of the attractor and basin of attraction for switched systems with subsystems which are not necessarily ultimately bounded were given. This last result can not avoid the fast switching, then the switched solution may not exist for all time. This difficulty was overcome with the use of the theory of discontinuous systems to guarantee the existence of the switching system solution for all time. Furthermore, using a T-S fuzzy model approach, the asymptotic behavior of the switched solution could be analyzed only by checking properties of some sets and the feasibility of a set of linear matrix inequalities.

Keywords: Switched System. T-S Fuzzy Systems. Extension of the Invariance Principle. Linear Matrix Inequalities.

Lista de símbolos

$\nu(\mathbf{A})$	Conjunto de autovalores da matriz $\mathbf{A}$
B_A	Área de atração da origem
$B(a, \epsilon)$	Bola de centro em a e raio ϵ
x_0	Condição inicial
$\mathcal{P}$	Conjunto discreto
C^n	Conjunto das funções que possuem derivada de ordem n contínua
Ω_ℓ	Conjunto de nível da função V
f_p	Campo vetorial do subsistema p
$\mathcal{S}$	Conjunto das soluções do sistema chaveado
$\mathcal{S}_{dwell}$	Conjunto das soluções possuindo um chaveamento dwell-time
$\mathcal{M}$	Conjunto auxiliar
M	Conjunto limitado
M_1	Conjunto compacto
D_{pk}	Conjunto auxiliar
M_{pk}	Conjunto fuzzy
$\omega(x_0)$	Conjunto de todos os pontos limites de $\varphi(t, x_0)$
V	Função auxiliar
V_p	Função auxiliar para o subsistema f_p
$\mathcal{F}$	Família de campos vetoriais de classe C^1
I	Intervalo da reta
$\sigma(\cdot)$	Lei de chaveamento

N	Número de subsistemas
r_p	Número de regras para o subsistema p
ϕ, η	Números reais positivos
ℓ, L	Números reais
Λ	Vetor de parâmetros incertos
λ	Parâmetro auxiliar
$\mathcal{X}_p, \Theta$	Subconjuntos do $\mathbb{R}^n$
$\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$	Sequência de tempos de chaveamento
$\varphi(t, x_0)$	Solução do sistema chaveado com condição inicial x_0
$\star$	Termo transposto em matrizes simétricas
$\mathcal{N}, \mathcal{N}_1$	União de conjuntos fracamente invariantes
x	Vetor de estado
$\cdot$	Produto interno de $\mathbb{R}^n$
$2^{\mathbb{R}^n}$	Subconjunto do $\mathbb{R}^n$
u	Vetor de entrada
E^c	Complementar do conjunto E
$\bar{\Omega}$	Fecho do conjunto Ω
$\mathcal{R}_p$	Conjunto de regras para o subsistema p
$\mathcal{R}_\beta$	Conjunto de regras para o subsistema β

Sumário

1	Introdução	17
1.1	Organização do Trabalho	20
2	Conceitos Fundamentais	21
2.1	Sistemas Chaveados Contínuos no Tempo	21
2.1.1	Alguns Resultados de Estabilidade no Sentido de Lyapunov	22
2.1.2	Alguns Resultados de Estabilidade no Sentido de Krasovskii	24
2.1.3	Um Princípio de Invariância	28
2.2	Sistemas Chaveados Fuzzy Takagi-Sugeno (T-S)	31
2.2.1	Projeto de Controladores por Realimentação de Estados	32
2.2.2	Alguns Resultados de Estabilidade no Sentido de Lyapunov	32
3	Extensão do Princípio de Invariância para Sistemas Chaveados	45
3.1	Resultados Obtidos Através de uma Função Comum e Múltiplas Funções	46
3.2	Resultados Obtidos para Sistemas Chaveados com Incertezas Paramétricas	55
3.3	Resultados Obtidos Através de um Sistema Auxiliar	58
4	Extensão do Princípio de Invariância para Sistema T-S Fuzzy Chaveado	65
4.1	Resultados Obtidos para Subsistemas T-S Fuzzy	65
4.2	Resultados Obtidos para Subsistemas T-S Fuzzy Realimentados	70
5	Conclusões e Proposta de Trabalhos Futuros	75
	Referências	77

Introdução

Uma técnica popular de controle não linear é a técnica de ganho programado (gain scheduling em inglês), a qual tem sido aplicada com sucesso em áreas que vão desde controle espacial a controle de processos (RUGH; SHAMMA, 2000). As estratégias de controle também bem conhecidas como o chaveamento de controladores e ponderação de controladores podem ser interpretadas como abordagens de ganho programado. Essas abordagens têm aplicação na prática para regular sistemas cuja dinâmica muda com as suas condições de operação. Dentre as aplicações podem-se citar, sistemas de co-geração de energia, controle de voo, controle de motores de injeção direta e de motores a combustão, controle de conversores CC-CC e controle de sistemas em rede (ARRIFANO et al., 2007; NICHOLS; REICHERT; RUGH, 1993; RINEHART et al., 2008; DEAECTO et al., 2010; XIE; WU, 2010). Tipicamente, pode-se assegurar estabilidade local se o chaveamento for suficientemente lento, mas sem garantia de desempenho.

O sistema que é descrito por vários subsistemas e uma lei de chaveamento que seleciona a cada instante de tempo qual subsistema deve ser ativado para assim compor a trajetória do sistema global é denominado sistema chaveado. Na última década a teoria de sistemas chaveados tem atraído a atenção de muitos pesquisadores. Como consequência, resultados para a estabilidade e estabilização para essa classe de sistemas foram obtidos.

Quando um número finito de subsistemas possuem a origem como um ponto de equilíbrio comum, a existência de uma função de Lyapunov comum, radialmente ilimitada, por exemplo, é uma condição suficiente para a estabilidade assintótica de um sistema não-linear através de uma lei de chaveamento arbitrária (LIBERZON, 2003). Contudo, uma função de Lyapunov comum pode ser difícil de encontrar ou pode não existir. Para superar essa dificuldade e obter resultados menos conservadores, uma abordagem de múltiplas funções de Lyapunov tem sido considerada (LIBERZON, 2003; BRANICKY, 1998).

Ainda, existem muitos problemas práticos em que nem todos os subsistemas do sistema chaveado são estáveis. Neste caso, alguns trabalhos fornecem leis de chaveamento dependentes do estado, as quais são capazes de tornar a origem um ponto de equilíbrio assintoticamente estável (LIBERZON, 2003; DEAECTO; GEROMEL, 2008; WANG et al., 2009).

Contudo, essas leis podem causar chaveamentos rápidos e então a existência da solução do sistema chaveado pode não ser garantida para todo tempo, mesmo que a solução seja limitada. Portanto, a fim de incluir os casos em que o chaveamento rápido ocorre, vários trabalhos apresentam resultados que são obtidos considerando soluções generalizadas, como a solução de Filippov e Krasovskii, as quais têm uma relação, ou seja, toda solução de Filippov é uma solução de Krasovskii (COLANERI; GEROMEL; ASTOLFI, 2008; BACCIOTTI, 2004; LETH; WISNIEWSKI, 2011; BACCIOTTI, 2003; BACCIOTTI; MAZZI, 2010).

Apesar dos importantes avanços na teoria de estabilidade, os atratores de muitos sistemas chaveados podem não ser um ponto de equilíbrio. Um exemplo clássico é o sistema de controle de temperatura *on-off*. Para essa classe de problemas, o interesse não é estudar a estabilidade de um ponto de equilíbrio particular, mas o comportamento assintótico das soluções.

O princípio de invariância é uma poderosa ferramenta para analisar o comportamento assintótico das soluções de sistemas dinâmicos. Este foi primeiramente desenvolvido para equações diferenciais ordinárias (LASALLE, 1960; KRASOVSKI, 1959) e depois desenvolvida para outras classes de sistemas, incluindo equações diferenciais funcionais (HALE; KOÇAK, 1991), sistemas descontínuos (BACCIOTTI; CERAGIOLI, 1999) e sistemas chaveados (SHEVITZ; PADEN, 1994; BACCIOTTI; MAZZI, 2005; MANCILLA-AGUILAR; GARCÍA, 2006; HESPANHA, 2004).

O princípio de invariância baseia-se na existência de uma função do tipo Lyapunov para analisar o comportamento assintótico das soluções do sistema. Uma propriedade chave dessa função, é a não-positividade de sua derivada ao longo das soluções. Encontrar tal função, satisfazendo todas as suposições do princípio de invariância pode ser difícil para muitos sistemas dinâmicos. Portanto, uma extensão do princípio de invariância, a qual permite a derivada de uma função V ser positiva sobre alguns conjuntos e ainda não exige que todos os subsistemas compartilhem o mesmo ponto de equilíbrio, foi proposta para sistemas contínuos em Rodrigues, Alberto e Bretas (2000), para sistemas discretos em Alberto, Calliero e Martins (2007) e para sistemas com atraso em Rabelo e Alberto (2010). Esses resultados foram aplicados com sucesso para os problemas de sincronização (RODRIGUES; ALBERTO; BRETAS, 2000) e também para obter estimativas de atratores de sistemas dinâmicos incertos (RODRIGUES; ALBERTO; BRETAS, 2002).

Representando cada subsistema por um modelo fuzzy Takagi-Sugeno (T-S), pode-se obter uma aplicação dos resultados anteriores para sistemas chaveados T-S fuzzy. A principal característica desse novo método é expressar certos sistemas não lineares por uma soma ponderada de sistemas lineares invariantes no tempo, em que cada sistema linear representa a regra da implicação fuzzy e os pesos da soma são funções não-lineares, chamadas de funções de pertinência, as quais satisfazem a propriedade de soma-convexa (TAKAGI; SUGENO, 1985; SUGENO; KANG, 1988). Quando o sistema não linear é con-

siderado de classe C^2 , então a modelagem fuzzy pode ainda representar exatamente o modelo não linear em um subconjunto do espaço de estados (TANAKA; WANG, 2001). Portanto, a atratividade da modelagem fuzzy T-S é que a análise do comportamento assintótico das soluções pode ser formulada em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs), as quais podem ser eficientemente resolvidas por técnicas de programação convexa (STURM, 1999). Em Li, Yang e Zhang (2009) e Benzaouia e Tadeo (1999), múltiplas funções de Lyapunov quadráticas são usadas para assegurar a estabilidade de sistemas chaveados contínuos e discretos no tempo. Esses resultados são dados em termos de LMIs, sendo que o primeiro é aplicado somente em sistemas chaveados que possuem dois subsistemas. Em Chiou et al. (2010) e Yang, Dimirovski e Zhao (2006) condições suficientes para a estabilidade de sistemas chaveados são dadas em termos de LMIs. A análise foi feita através de uma função de Lyapunov comum para a combinação convexa dos subsistemas do sistema chaveado fuzzy T-S. Em Chiou et al. (2010) a presença de subsistemas instáveis é permitida, porém algumas restrições sobre as matrizes dos modelos locais devem ser satisfeitas. No presente trabalho foi obtida uma extensão do princípio de invariância para sistemas chaveados através de uma função auxiliar comum e também múltiplas funções auxiliares. Para isso, foi proposta uma extensão dos resultados de Rodrigues, Alberto e Bretas (2000) para sistemas chaveados composto de um número finito de subsistemas não-lineares contínuos no tempo. Os resultados também podem ser vistos como uma extensão do princípio de invariância dado em Bacciotti e Mazzi (2005), cuja principal vantagem é que a derivada das funções auxiliares ao longo da solução do sistema chaveado pode assumir valores positivos em alguns conjuntos e ainda não é exigido que todos os subsistemas compartilhem pontos de equilíbrio. Quando as propriedades da função auxiliar V foram analisadas ao longo de um sistema auxiliar formado pela combinação convexa de todos os subsistemas do sistema chaveado, os resultados passaram a fornecer estimativas de atratores e áreas de atração mesmo na presença de subsistemas que não são ultimamente limitados. Uma outra característica importante desses resultados é que mesmo que um chaveamento rápido aconteça o uso da teoria de sistemas descontínuos permite garantir a existência da solução generalizada de Krasovskii devido a escolha de uma lei de chaveamento apropriada. Ainda, cada subsistema foi descrito por um modelo fuzzy T-S e então uma aplicação da extensão citada anteriormente para sistemas chaveados fuzzy T-S, a qual é capaz de estudar o comportamento assintótico da solução chaveada verificando propriedades de alguns subconjuntos do espaço de estado e a factibilidade de um conjunto de LMIs foi obtida.

Os primeiros resultados obtidos da extensão proposta foram apresentados em Valentino et al. (2011) e em Valentino et al. (2012). Neste último trabalho, estimativas de atratores e suas respectivas áreas de atração para a classe de sistemas considerada e também para sistemas chaveados com incertezas paramétricas são apresentadas.

1.1 Organização do Trabalho

O presente texto está dividido em 5 capítulos. O Capítulo 2, seguinte a esta introdução, apresenta alguns conceitos fundamentais como definições de sistemas chaveados contínuos no tempo e também de sistemas chaveados fuzzy T-S, bem como alguns resultados de estabilidade para essas classes de sistemas. O Capítulo 3, apresenta as principais contribuições desta tese, ou seja, extensões do princípio de invariância para sistemas chaveados contínuos no tempo e também para sistemas chaveados com incertezas paramétricas. Estes resultados foram obtidos através de uma função auxiliar comum e múltiplas funções auxiliares e fornecem estimativas de atratores e suas respectivas áreas de atração para sistemas chaveados com subsistemas ultimamente limitados. Ainda, neste mesmo sentido, foi apresentado um resultado, o qual fornece estimativas de atratores e de suas respectivas áreas de atração para sistemas chaveados mesmo na presença de subsistemas que não são ultimamente limitados, o qual foi obtido através de um sistema formado pela combinação convexa de todos os subsistemas. O Capítulo 4, apresenta uma extensão do princípio de invariância para sistemas chaveados fuzzy T-S, que é uma aplicação dos resultados anteriores obtida a partir de modelos fuzzy T-S para cada subsistema. O Capítulo 5 apresenta conclusões e proposta de trabalhos futuros.

Conceitos Fundamentais

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns conceitos fundamentais que serão utilizados no desenvolvimento dos resultados principais desta tese. Inicialmente, são apresentadas definições de sistemas chaveados contínuos no tempo, alguns resultados de estabilidade da origem no sentido de Lyapunov, bem como a apresentação da solução generalizada de Krasovskii e alguns resultados de estabilidade da origem considerando essa solução generalizada. Ainda, é apresentado um princípio de invariância para sistemas chaveados, o qual é obtido através de uma função de Lyapunov comum e múltiplas funções de Lyapunov. Esse resultado fornece estimativas de atratores e suas respectivas áreas de atração, e ainda com algumas informações a mais, o resultado é capaz de garantir a estabilidade assintótica da origem sem exigir que as derivadas das funções auxiliares sejam estritamente negativas. Em seguida, cada subsistema é representado por um modelo fuzzy T-S e então definições de sistemas chaveados fuzzy T-S bem como alguns resultados de estabilidade da origem no sentido de Lyapunov para essa classe de sistemas são apresentados.

2.1 Sistemas Chaveados Contínuos no Tempo

Considera-se a família $\mathcal{F} = \{f_p\}_{p \in \mathcal{P}}$ de campos vetoriais de classe C^1 , completos do $\mathbb{R}^n$ e a seguinte classe de sistemas chaveados contínuos no tempo

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(\cdot)}(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (2.1)$$

em que $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, N\}$ é um conjunto de índices finito, N é o número de subsistemas, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ são vetores de estado e de entrada respectivamente, σ é uma função constante por partes chamada de lei de chaveamento, a qual pode depender do tempo $\sigma : I \rightarrow \mathcal{P}$ em que $I = [0, t_f)$ com $0 < t_f \leq \infty$, ou do estado $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}$ com $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. Uma função contínua suave por partes $x_{\sigma(\cdot)}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução do sistema chaveado (2.1) no intervalo I se $x_{\sigma(\cdot)}(t)$ satisfaz $\dot{x}_{\sigma(\cdot)}(t) = f_p(x_{\sigma(\cdot)}(t))$ para todo t tal que $\sigma(\cdot) = p$. O conjunto de todas as soluções chaveadas é denotado por $\mathcal{S}$. Denota-se

$\varphi_{\sigma(\cdot)}(t, x_0)$, ou simplesmente $\varphi(t, x_0)$, a solução de (2.1) iniciando em x_0 no tempo $t = 0$ através do lei de chaveamento $\sigma(\cdot)$.

2.1.1 Alguns Resultados de Estabilidade no Sentido de Lyapunov

Os resultados desta seção são apresentados para a entrada $u(t) = 0$ e têm interesse em estudar a estabilidade da origem do sistema chaveado. Para obtê-los, é considerada uma função de Lyapunov comum ou múltiplas funções de Lyapunov, as quais serão definidas no decorrer do texto.

Sejam $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de tempos de chaveamentos consecutivos associado a σ e $I_p = \{t \in [\tau_k, \tau_{k+1}) : \sigma(\tau_k) = p, k \in \mathbb{N}\}$ a união dos intervalos onde o subsistema p é ativo e considere as seguintes definições.

Definição 2.1 *Diz-se que a origem é um ponto de equilíbrio estável de (2.1) no sentido de Lyapunov através de um chaveamento arbitrário se, para todo $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que, para cada $\varphi \in \mathcal{S}$*

$$\|x_0\| \leq \delta \quad \text{então} \quad \|\varphi(t, x_0)\| \leq \epsilon$$

para todo $t \geq 0$.

Definição 2.2 *A origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (2.1) através de um chaveamento arbitrário se, é estável e ainda satisfaz*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x_0) = 0$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}$, com 0 sendo a origem do $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.3 *A origem é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável de (2.1) através de um chaveamento arbitrário se satisfaz a Definição 2.2 para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

O segundo método de Lyapunov para a análise de estabilidade (HALE; KOÇAK, 1991; DOERING; LOPES, 2007) tem uma extensão direta para sistemas chaveados, a qual fornece uma ferramenta básica para o estudo de estabilidade assintótica da origem. Esta extensão é obtida garantindo a existência de uma função de Lyapunov comum para todos os subsistemas de (2.1) como definida abaixo.

Definição 2.4 *Sejam $f_p(0) = 0, \forall p \in \mathcal{P}$, $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida positiva de classe C^1 . Diz-se que V é uma função de Lyapunov comum para o sistema (2.1) se*

$$\nabla V(x) \cdot f_p(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } x \neq 0 \text{ e } \forall p \in \mathcal{P}. \quad (2.2)$$

Definição 2.5 *Se a condição $V(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$ é satisfeita, diz-se que V é uma função radialmente ilimitada.*

O Teorema 2.1, fornece uma condição suficiente para a análise de estabilidade assintótica da origem de sistemas chaveados através de chaveamentos arbitrários.

Teorema 2.1 *Se todos os subsistemas de (2.1) com $f_p(0) = 0$ para todo $p \in \mathcal{P}$, compartilham uma função de Lyapunov, radialmente ilimitada, então a solução $x = 0$ do sistema chaveado (2.1) é globalmente assintoticamente estável.*

Demonstração: Veja Liberzon (2003). □

Uma função de Lyapunov comum pode ser difícil de encontrar ou nem mesmo existir. Para superar esta dificuldade e evitar resultados conservadores, uma abordagem de múltiplas funções de Lyapunov é considerada nos próximos resultados.

Teorema 2.2 *Sejam $f_p(0) = 0$ e V_p uma função de classe C^1 , definida positiva e radialmente ilimitada para todo $p \in \mathcal{P}$ satisfazendo:*

$$\square \nabla V_p(x) \cdot f_p(x) < 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n \text{ com } x \neq 0 \text{ e todo } p \in \mathcal{P}$$

$$\square \text{ para todo par de tempos de chaveamento } (\tau_i, \tau_j) \text{ com } i < j, \sigma(\tau_i) = \sigma(\tau_j) = p \in \mathcal{P} \text{ e } \sigma(\tau_k) \neq p \text{ para } \tau_i < \tau_k < \tau_j \text{ satisfaz } V_p(\varphi(\tau_j, x_0)) - V_p(\varphi(\tau_i, x_0)) < 0,$$

então, a solução $x = 0$ do sistema (2.1) é globalmente assintoticamente estável.

Demonstração: Veja Liberzon (2003). □

Note que no resultado anterior, todos os subsistemas são estáveis e ainda informações sobre as funções de Lyapunov nos tempos de chaveamentos são necessárias para a sua validade. O próximo teorema, garante a estabilidade da origem de (2.1), com subsistemas estáveis, através de um chaveamento *dwell-time*, o qual é definido a seguir, sem conhecer os valores das funções de Lyapunov nos tempos de chaveamento.

Definição 2.6 (Dwell-Time) *Diz-se que uma lei de chaveamento é dwell-time se existe uma sequência de tempos de chaveamentos $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $T > 0$ tal que*

$$\inf_k (\tau_{k+1} - \tau_k) \geq T. \quad (2.3)$$

O número T é chamado de tempo de permanência para $\varphi(t, x_0)$ e o conjunto de todas as soluções possuindo um chaveamento *dwell-time* é denotado por $\mathcal{S}_{\text{dwell}} \subset \mathcal{S}$ e essas soluções são chamadas de soluções *dwell-time*.

Teorema 2.3 *Seja $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ com T suficientemente grande, $f_p(0) = 0$ e V_p uma função de classe C^1 , definida positiva e radialmente ilimitada, para todo $p \in \mathcal{P}$ satisfazendo:*

$$\square \nabla V_p(x) \cdot f_p(x) < 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n \text{ com } x \neq 0,$$

então, a solução $x = 0$ do sistema (2.1) é globalmente assintoticamente estável.

Demonstração: Veja Liberzon (2003). □

É possível obter condições de estabilidade menos conservadoras envolvendo múltiplas funções de Lyapunov. Em particular, pode-se ainda garantir a estabilidade da origem do sistema chaveado, exigindo que cada V_p decresça apenas em I_p , ou seja, nos intervalos onde o subsistema p é ativo, como mostra o seguinte resultado.

Teorema 2.4 *Sejam $f_p(0) = 0$ e V_p uma função definida positiva de classe C^1 para todo $p \in \mathcal{P}$ satisfazendo:*

$$\square \nabla V_p(x) \cdot f_p(x) \leq 0, \quad \text{para todo } t \in I_p \text{ tal que } x(t) \neq 0 \text{ e todo } p \in \mathcal{P}$$

$$\square \text{ para todo par de tempos de chaveamento } (\tau_i, \tau_j) \text{ com } i < j \text{ e } \sigma(\tau_i) = \sigma(\tau_j) = p \in \mathcal{P} \\ \text{e } \sigma(\tau_k) \neq p \text{ para } \tau_i < \tau_k < \tau_j \text{ satisfaz } V_p(\varphi(\tau_j, x_0)) - V_p(\varphi(\tau_i, x_0)) \leq 0,$$

então, a origem do sistema (2.1) é estável no sentido de Lyapunov.

Demonstração: Veja Branicky (1998). □

Na próxima seção, são apresentados resultados que garantem a estabilidade da origem de (2.1) através de leis de chaveamento dependendo do estado. Algumas vezes, essas leis não evitam chaveamentos rápidos, então torna-se necessário o uso de soluções mais gerais para garantir a existência da solução do sistema chaveado.

2.1.2 Alguns Resultados de Estabilidade no Sentido de Krasovskii

Considere $[0, t_f)$ o intervalo máximo de existência da solução de (2.1) através de um chaveamento *dwell-time*. Quando a solução é limitada então é atraída para um conjunto fracamente invariante (BACCIOTTI; MAZZI, 2005), ou seja, $t_f = +\infty$. Porém, as leis de chaveamento dependentes do estado, mostradas nesta seção, podem algumas vezes, causar chaveamentos rápidos, ou seja, chaveamentos que não são *dwell-time* e então, mesmo que a solução seja limitada não é garantido que $t_f = +\infty$.

Afim de garantir a existência da solução de (2.1) para todo tempo mesmo ocorrendo o chaveamento rápido, considera-se agora soluções generalizadas de Krasovskii, as quais são definidas quando o campo vetorial $f(x) = f_{\sigma(\cdot)}(x)$ é descontínuo, porém mensurável. Antes

de apresentar a definição da solução generalizada de Krasovskii e os resultados que as utilizam, seguem algumas definições que podem ser vistas em Filippov (1988), Rudin (1976), Cabral (2010), Colaneri, Geromel e Astolfi (2008), Silveira (2009), Bacciotti e Ceragioli (1999), Bacciotti e Mazzi (2010), Bacciotti (2003).

Uma medida em um conjunto X é uma função que atribui um número real não negativo para subconjuntos de X . Porém, podem existir subconjuntos de X os quais a medida não está definida. Por isso, considera-se uma coleção especial de subconjuntos de X onde a medida está definida, a chamada σ -álgebra de subconjuntos de X .

Definição 2.7 Uma σ -álgebra de X é uma família Σ de subconjuntos de X tais que:

- (a) $\emptyset \in \Sigma$
- (b) para todo $E \in \Sigma$, o seu complementar $E^c \in \Sigma$
- (c) para toda sequência $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma$, sua união $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma$.

Todos os elementos de Σ são chamados de conjuntos mensuráveis e o próximo lema apresenta propriedades de uma σ -álgebra.

Lema 2.1 Se Σ é uma σ -álgebra de subconjuntos de X , então para todo $E, F \in \Sigma$:

- (a) $(E \cup F) \in \Sigma$; (b) $(E \cap F) \in \Sigma$; (c) $(E - F) \in \Sigma$
- (d) Se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em Σ , então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma$.

Demonstração: Veja Rudin (1976). □

Definição 2.8 Um espaço de medida é uma terna (X, Σ, μ) onde:

- (a) X é um conjunto;
- (b) Σ é uma σ -álgebra de subconjuntos de X ;
- (c) $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ é uma função tal que:
 - (c₁) $\mu(\emptyset) = 0$;
 - (c₂) se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência disjunta em Σ , então $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n)$. Os elementos de Σ são chamados de conjuntos mensuráveis, e μ é chamado de uma medida em X .

O próximo lema fornece propriedades de um espaço com medida e em seguida é definido funções mensuráveis.

Lema 2.2 Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida.

- (a) Se $E, F \in \Sigma$ e $E \cap F = \emptyset$, então $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$;
- (b) Se $E, F \in \Sigma$ e $E \subset F$, então $\mu(E) \leq \mu(F)$;
- (c) $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$ para todo $E, F \in \Sigma$;
- (d) Se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em Σ , então $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n)$.

Demonstração: Veja Rudin (1976). □

Definição 2.9 *Sejam (X, Σ_1, μ_1) e (Y, Σ_2, μ_2) espaços de medida, em que X, Y são os conjuntos munidos com as seguintes σ -álgebra Σ_1 e Σ_2 . A função $f : X \rightarrow Y$ é mensurável se*

$$f^{-1}(E) \in \Sigma_1, \quad (2.4)$$

para todo $E \in \Sigma_2$.

Observação 2.1 *A função $f_{\sigma(x)}$ de (2.1) é mensurável se e somente se $\sigma(x)$ é mensurável.*

Definição 2.10 *A função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é localmente limitada se para todo $a \in \mathbb{R}^n$ existe uma vizinhança de a e $z \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| < z$ para todo x nesta vizinhança.*

No intuito de assegurar a existência das soluções do sistema chaveado (2.1), em que $f(x) = f_{\sigma(x)}(x)$ é uma função descontínua, considera-se um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ denotado por $2^{\mathbb{R}^n}$ e uma aplicação $Kf : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ associada com a inclusão diferencial

$$\dot{x}(t) \in Kf(x(t)), \quad (2.5)$$

em que $Kf(x)$ é semi-contínua superiormente com valores convexos e compactos. É claro que, a noção da solução obtida neste caminho depende da construção da aplicação Kf . Diz-se que $\varphi(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução de Krasovskii da equação (2.1) se φ é absolutamente contínua e é solução de (2.5) com:

$$Kf(x) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\text{co}}\{f(B(x, \delta))\}. \quad (2.6)$$

em que $B(x, \delta)$ é a bola de centro x e raio δ e $\overline{\text{co}}$ é o fecho do envoltório convexo. Se f é mensurável e localmente limitada, então $Kf(x)$ é semi-contínua superiormente, localmente limitada com valores compactos e convexos. Portanto, para cada condição inicial x_0 , o sistema chaveado (2.1) tem solução de Krasovskii para todo $t \in [0, t_f)$ com $0 < t_f \leq +\infty$.

Definição 2.11 *Diz-se que a origem é um ponto de equilíbrio estável de (2.1) com respeito as soluções de Krasovskii se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cada solução de Krasovskii $\varphi(t, x_0)$ existe para todo $t \in [0, +\infty)$ e*

$$\|x_0\| < \delta \quad \text{então} \quad \|\varphi(t, x_0)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

A origem é dita um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável de (2.1) com respeito as soluções de Krasovskii se é estável e ainda $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, x_0)\| = 0$, para toda solução de Krasovskii de (2.1).

Os próximos lemas são usados na demonstração dos resultados apresentados nesta seção. O Lema 2.4 fornece condições suficientes para a análise de estabilidade da origem no sentido de Krasovskii.

Lema 2.3 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mensurável e localmente limitada. Então*

$$Kf(x) = \text{co}\{v \in \mathbb{R}^n : \exists x_j \rightarrow x \text{ e } f(x_j) \rightarrow v\}, \quad (2.7)$$

em que co é o envoltório convexo de um conjunto.

Demonstração: Veja Shevitz e Paden (1994). □

Lema 2.4 *Sejam $V(x)$ uma função de classe C^1 , definida positiva, radialmente ilimitada e $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, definida positiva satisfazendo*

$$\nabla V(x) \cdot v \leq -W < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ com } x \neq 0, \quad \forall v \in Kf(x),$$

então, a origem é uma solução de Krasovskii globalmente assintoticamente estável de (2.1).

Demonstração: Veja Filippov (1988). □

O próximo teorema fornece condições suficientes para a existência de uma lei de chaveamento que torna a origem um ponto de equilíbrio estável no sentido de Krasovskii, estas condições são obtidas através de uma única função escalar.

Teorema 2.5 *Considere a família de campos vetoriais $\{f_p\}_{p \in \mathcal{P}}$, uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , definida positiva e radialmente ilimitada, satisfazendo*

$$\forall x \neq 0, \quad \exists p \in \mathcal{P} \text{ tal que } \nabla V(x) \cdot f_p(x) < 0.$$

Então, existe uma lei de chaveamento que torna a origem globalmente assintoticamente estável com respeito a solução de Krasovskii.

Demonstração: Veja Bacciotti e Mazzi (2010). □

Observação 2.2 *A demonstração do resultado anterior, explora o Lema 2.3 e o Lema 2.4 e mostra que uma lei de chaveamento do tipo*

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Omega_{i1}, \quad i \in \mathbb{Z} \\ p, & \text{se } x \in \left(\Omega_{ip} - \left(\bigcup_{k < p} \Omega_{ik} \right) \right), \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad (2.8)$$

a qual é mensurável, torna a origem um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável de (2.1) com respeito a solução de Krasovskii, em que

$$\begin{aligned} C_i &= \overline{B(0, 2^{i+1}) - B(0, 2^i)}, \quad \forall i \in \mathbb{Z} \\ \Omega_{ip} &= \{x \in C_i : \nabla V(x) \cdot f_p(x) \leq -W < 0\}. \end{aligned}$$

O próximo resultado também pode ser aplicado na presença de subsistemas instáveis e fornece uma lei de chaveamento que torna a solução $x = 0$ do sistema chaveado (2.1) assintoticamente estável.

Teorema 2.6 *Assume-se a existência de um conjunto de funções $\{V_1, V_2, \dots, V_N\}$, as quais são diferenciáveis, definidas positivas, radialmente ilimitadas e assumem valor zero na origem, satisfazendo:*

$$\nabla V_k \cdot f_k + \sum_{k=1}^N \pi_{kj} V_k < 0, \quad j = 1, \dots, N$$

para todo $x \neq 0$, com

$$\pi_{kj} \geq 0, \quad \forall k \neq j, \quad \sum_{k=1}^N \pi_{kj} = 0.$$

Então, a lei de chaveamento

$$\sigma(x) = \arg \min_{k=1, \dots, N} V_k(x(t))$$

torna a solução $x = 0$ do sistema chaveado (2.1) assintoticamente estável.

Demonstração: Veja Colaneri, Geromel e Astolfi (2008). □

Observação 2.3 *No resultado anterior, mesmo que o chaveamento rápido aconteça, a estabilidade no sentido de Krasovskii é garantida. De fato, no conjunto dos pontos onde mais de um subsistema pode ser acionado, o chaveamento do subsistema i para o subsistema j só pode ocorrer se $\nabla V_j \cdot f_i \leq \nabla V_i \cdot f_i < 0$, então a derivada de V_j ao longo da solução da combinação convexa de f_i e f_j é negativa. Portanto, do Lema 2.4, a origem é uma solução de Krasovskii globalmente assintoticamente estável de (2.1).*

2.1.3 Um Princípio de Invariância

Esta seção apresenta um princípio de invariância para sistemas chaveados obtido através de uma função de Lyapunov comum fraca e múltiplas funções de Lyapunov fracas. Estes resultados fornecem estimativas de atratores e suas respectivas áreas de atração e ainda com hipóteses adicionais garantem que a solução $x = 0$ do sistema (2.1) é assintoticamente estável. A principal característica deste resultado é a não positividade das derivadas das funções de Lyapunov.

Definição 2.12 *Seja H um conjunto fechado e invariante para o sistema (2.1) através da lei de chaveamento σ . Diz-se que H é um atrator se existe uma vizinhança U de H tal que, para toda condição inicial $x_0 \in U$, $\varphi(t, x_0) \rightarrow H$ quando $t \rightarrow +\infty$.*

Na definição anterior, a solução é atraída para um conjunto H , ou seja, $\varphi(t, x_0) \rightarrow H$ significa que $d(\varphi(t, x_0), H) = 0$ quando $t \rightarrow +\infty$ e d é a distância de um ponto ao conjunto, por exemplo se a norma Euclidiana é utilizada, $d(\varphi(t, x_0), H) = \inf_{a \in H} \|\varphi(t, x_0) - a\|_2$. Ainda, a vizinhança U é chamada área de atração de H .

Definição 2.13 (Função de Lyapunov Comum Fraca) *Seja $\mathcal{X}$ um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ contendo a origem. Diz-se que $V : \mathcal{X} \rightarrow [0, +\infty)$ é uma função de Lyapunov comum fraca para o sistema (2.1) se é de classe C^1 , definida positiva e satisfaz:*

$$\nabla V(x) \cdot f_p(x) \leq 0 \quad (2.9)$$

para todo $x \in \mathcal{X}$ e todo $p \in \mathcal{P}$.

Definição 2.14 (Invariância Fraca) *Um conjunto $\mathcal{N}$ é fracamente invariante com respeito ao sistema chaveado (2.1) se para cada $x_0 \in \mathcal{N}$ existe um índice $p \in \mathcal{P}$, uma solução $\varphi(t, x_0)$ do campo vetorial $f_p(x)$ e um número real $b > 0$ tal que $\varphi(t, x_0)$ pertence ao conjunto $\mathcal{N}$ para qualquer $t \in [-b, 0]$ ou $t \in [0, b]$.*

Figura 2.1 – Interpretação geométrica de um conjunto fracamente invariante.

Definição 2.15 (Pontos Limites) *Um ponto $q \in \mathbb{R}^n$ é um ponto limite de $\varphi(t, x_0)$ se existe uma sequência de tempos de chaveamentos $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, com $t_k \rightarrow \infty$, quando $k \rightarrow \infty$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k, x_0) = q$. O conjunto de todos os pontos limites de $\varphi(t, x_0)$ é denotado por $\omega(x_0)$.*

Proposição 2.1 (Propriedades de Conjunto Limite) *Seja $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ uma solução chaveada limitada de (2.1) para $t \geq 0$. Então, $\omega(x_0)$ é não vazio, compacto e fracamente invariante. Além disso, $\varphi(t, x_0)$ é atraído para $\omega(x_0)$.*

Demonstração: Veja Bacciotti e Mazzi (2005). $\square$

O seguinte resultado apresenta o princípio de invariância para sistemas chaveados através de uma função de Lyapunov comum fraca.

Teorema 2.7 (*Um Princípio de Invariância para Sistemas Chaveados Obtido Através de uma Função de Lyapunov Comum Fraca*) *Sejam $V : \mathcal{X} \rightarrow [0, +\infty)$ uma função de Lyapunov comum fraca para o sistema (2.1) com $f_p(0) = 0$ para todo $p \in \mathcal{P}$, $\ell > 0$ e $\Omega_\ell = \{x \in \mathcal{X} : V(x) < \ell\}$ a componente conexa tal que $0 \in \Omega_\ell$. Assume-se que Ω_ℓ é limitado e seja $Z = \{x \in \mathcal{X} : \exists p \in \mathcal{P} \text{ tal que } \nabla V(x) \cdot f_p(x) = 0\}$. Finalmente, seja $\mathcal{N}$ a união de todos os conjuntos compactos fracamente invariante contidos em $Z \cap \Omega_\ell$. Então, toda solução $\varphi(t) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ tal que $\varphi(0) \in \Omega_\ell$ é atraída para $\mathcal{N}$. Além disso, se $\mathcal{N} = \{0\}$ então a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o sistema.*

Demonstração: Veja Bacciotti e Mazzi (2005). $\square$

Definição 2.16 (*Múltiplas Funções de Lyapunov Fracas*) *Seja $\mathcal{X}$ um conjunto aberto contendo a origem. Diz-se que o sistema chaveado admite múltiplas funções de Lyapunov fracas se existe uma família de funções $V_p(x), p \in \mathcal{P}$ tal que*

- $\square$ *Para todo $p \in \mathcal{P}$, $V_p : \mathcal{X} \rightarrow [0, +\infty)$ é definida positiva e de classe C^1 .*
- $\square$ *Para todo $p \in \mathcal{P}$ e todo $x \in \mathcal{X}$, $\nabla V_p(x) \cdot f_p(x) \leq 0$.*
- $\square$ *Para todo par de chaveamento $\tau_i < \tau_j$ tal que $\sigma(\tau_i) = \sigma(\tau_j) = p$ e toda solução $\varphi(t)$ tem-se que $V(\varphi(\tau_{i+1})) \geq V_p(\varphi(\tau_j))$.*

O Teorema 2.8 apresenta um princípio de invariância para sistemas chaveados através de múltiplas funções de Lyapunov fracas.

Teorema 2.8 (*Um Princípio de Invariância para Sistemas Chaveados Obtido através de Múltiplas Funções de Lyapunov Fracas*) *Seja $\{V_p : \mathcal{X} \rightarrow [0, +\infty)\}$ uma família de funções fracas de Lyapunov para o sistema (2.1) com $f_p(0) = 0$ para todo $p \in \mathcal{P}$. Assume-se que para todo $\ell > 0$ e todo $p \in \mathcal{P}$, o conjunto $\Omega_\ell^p = \{x \in \mathcal{X} : V_p(x) < \ell\}$ é conexo e limitado. Considere os conjuntos $\Omega_\ell = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \Omega_\ell^p$, $E = \{x \in \mathcal{X} : \exists p \in \mathcal{P} \text{ tal que } \nabla V_p(x) \cdot f_p(x) = 0\}$ e ainda $\mathcal{N}$ a interseção de todos os conjuntos fracamente invariantes contidos em E . Então, toda solução $\varphi(t) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ tal que $\varphi(0) \in \Omega_\ell$ é atraída para $\mathcal{N}$.*

Demonstração: Veja Bacciotti e Mazzi (2005). $\square$

Na próxima seção, cada subsistema de (2.1) é representado por um modelo fuzzy T-S e então são apresentados a definição de sistemas chaveados fuzzy T-S e alguns resultados de estabilidade para esta classe de sistemas.

2.2 Sistemas Chaveados Fuzzy Takagi-Sugeno (T-S)

A fim de obter condições suficientes para a análise de estabilidade da origem de sistemas chaveados em termos de LMIs, cada subsistema é descrito por um modelo fuzzy T-S, como segue.

Cada subsistema de (2.1) pode ser representado por um modelo fuzzy T-S no subconjunto do espaço de estado (TANAKA; WANG, 2001):

$$\mathcal{X}_p := \{x(t) \in \mathbb{R}^n : |x_j(t)| \leq \bar{x}_{pj}, j \in \mathcal{J} \text{ e } p \in \mathcal{P}\} \quad (2.10)$$

em que x_j , $j \in \mathcal{J} = \{1, 2, \dots, n\}$ são as variáveis premissas e $\bar{x}_{pj}$ é um número real positivo para cada $j \in \mathcal{J}$, $p \in \mathcal{P}$. Se não é preciso restrições sobre as variáveis de estado para algum $p \in \mathcal{P}$, então $\mathcal{X}_p = \mathbb{R}^n$. A modelagem fuzzy T-S consiste em descrever o sistema não linear por regras SE-ENTÃO da forma (YANG; DIMIROVSKI; ZHAO, 2008; CHIOU et al., 2010):

Regra k para o subsistema p :

SE $\mathbf{x}_1$ é M_{pk1} e $\mathbf{x}_2$ é M_{pk2} e $\dots$ e $\mathbf{x}_n$ é M_{pkn}

ENTÃO

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{pk}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{pk}\mathbf{u}(t), p \in \mathcal{P}, k \in \mathcal{R}_p. \quad (2.11)$$

em que $\mathcal{R}_p = \{1, 2, \dots, r_p\}$ e r_p é o número de regras para o subsistema p , M_{pkj} é o conjunto fuzzy para todo $p \in \mathcal{P}$, $j \in \mathcal{J}$ e $k \in \mathcal{R}_p$, $\mathbf{A}_{pk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{B}_{pk} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ para todo $p \in \mathcal{P}$ e $k \in \mathcal{R}_p$.

O modelo global para o subsistema p é descrito pela média ponderada das regras

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=1}^{r_p} h_{pk}(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{A}_{pk}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{pk}\mathbf{u}(t)), \quad (2.12)$$

em que a ponderação normalizada de cada regra é dada por

$$h_{pk}(\mathbf{x}(t)) = \frac{w_{pk}(\mathbf{x}(t))}{\sum_{k=1}^{r_p} w_{pk}(\mathbf{x}(t))}$$

com $w_{pk}(\mathbf{x}(t)) = \prod_{j=1}^n M_{pkj}(\mathbf{x}_{pj}(t))$, que satisfaz para todo $x \in \mathcal{X}_p$

$$\begin{aligned} h_{pk}(\mathbf{x}(t)) &\geq 0, \quad \forall k \in \mathcal{R}_p, p \in \mathcal{P}, \\ \sum_{k=1}^{r_p} h_{pk}(\mathbf{x}(t)) &= 1, \quad \forall p \in \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Usando (2.13), tem-se

$$h_{p\beta}^2(\mathbf{x}(t)) = 1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \beta}}^{r_p} h_{pk}^2(\mathbf{x}(t)) - \sum_{k=1}^{r_p-1} \sum_{i=k+1}^{r_p} 2h_{pk}(\mathbf{x}(t))h_{pi}(\mathbf{x}(t)), \quad (2.14)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{r_\beta} h_{\beta k} \right) - \frac{1}{N-1} \left(\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq \beta}}^N \sum_{k=1}^{r_p} h_{pk} \right) = 0 \quad (2.15)$$

e

$$\sum_{k=1}^{r_p} \dot{h}_{pk}(\mathbf{x}(t)) = 0, \quad (2.16)$$

para todo $p \in \mathcal{P}$ e $\beta \in \bigcap_{p=1}^N \mathcal{R}_p$ fixo. Por simplicidade, $h_{pk}(\mathbf{x}(t))$ será denotado por h_{pk} quando conveniente. Na próxima subseção a entrada $u(t)$ será representada por um controlador fuzzy PDC.

2.2.1 Projeto de Controladores por Realimentação de Estados

Nesta subseção usa-se a compensação distribuída paralela (do inglês, *parallel distributed compensation* (PDC)) (TANAKA; WANG, 2001) para o projeto de controladores fuzzy para o sistema chaveado (2.12). Este procedimento consiste em usar as regras fuzzy do sistema para projetar ganhos lineares para cada um dos modelos locais. Assim, o controlador fuzzy é da forma:

Regra k para o subsistema p :

SE $\mathbf{x}_1$ é M_{pk1} e $\mathbf{x}_2$ é M_{pk2} e $\dots$ e $\mathbf{x}_n$ é M_{pkn}

ENTÃO

$$u = \mathbf{K}_{pk}\mathbf{x}, \quad k \in \mathcal{R}_p, p \in \mathcal{P}.$$

em que $\mathbf{K}_{pk} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são os ganhos constantes. O controlador fuzzy global para o subsistema p é representado por:

$$u = \sum_{k=1}^{r_p} h_{pk} \mathbf{K}_{pk} \mathbf{x}. \quad (2.17)$$

Representando (2.17) em (2.12), tem-se a seguinte expressão para o subsistema p em malha fechada:

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{r_p} \sum_{j=1}^{r_p} h_{pk} h_{pj} \left(\mathbf{A}_{pk} + \mathbf{B}_{pk} \mathbf{K}_{pj} \right) x. \quad (2.18)$$

A próxima seção apresenta condições suficientes para a análise de estabilidade da origem do sistema chaveado (2.1) com cada subsistema p representado por um modelo fuzzy T-S da forma (2.18) em termos de LMIs.

2.2.2 Alguns Resultados de Estabilidade no Sentido de Lyapunov

Seguem alguns resultados de estabilidade em termos de LMIs obtidos por modelos fuzzy T-S da forma (2.18) para cada subsistema.

Considere os conjuntos

$$\mathcal{X} = \bigcap_{p=1}^N \mathcal{X}_p,$$

$$\text{e } \mathcal{M} = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N : \alpha_p \geq 0, \forall p \in \mathcal{P} \text{ e } \sum_{p=1}^N \alpha_p = 1\},$$

com constantes α_p definindo a combinação convexa dos subsistemas f_p para todo $p \in \mathcal{P}$, e as matrizes

$$\mathbf{A}_{pk} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{pk_11} & \mathbf{A}_{pk_12} & \dots & \mathbf{A}_{pk_1N} \\ \mathbf{A}_{pk_21} & \mathbf{A}_{pk_22} & \dots & \mathbf{A}_{pk_2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{pk_N1} & \mathbf{A}_{pk_N2} & \dots & \mathbf{A}_{pk_NN} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{P}_N \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

em que $\mathbf{P}$ é uma matriz simétrica definida positiva satisfazendo

$$\mathbf{A}'_{pk_pp} \mathbf{P}_p + \mathbf{P}_p \mathbf{A}_{pk_pp} < 0, \quad 1 \leq p \leq N. \quad (2.20)$$

O conjunto dos autovalores da matriz $\mathbf{A}$ será denotado por $\nu(\mathbf{A})$ e $\|\mathbf{A}\|$ denota a norma da matriz $\mathbf{A}$ definida da forma

$$\|\mathbf{A}\| = \max[\nu(\mathbf{A}'\mathbf{A})]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.21)$$

Os próximos resultados consideram uma combinação convexa de todos os subsistemas e as matrizes com estruturas especiais mostradas anteriormente e apresentam condições suficientes para a análise de estabilidade da origem em termos de LMIs. Esses resultados são obtidos com o auxílio de uma função de Lyapunov comum quadrática $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}'(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t). \quad (2.22)$$

A proposição a seguir, é usada na demonstração dos próximos resultados.

Proposição 2.2 *Seja $\alpha \in \mathcal{M}$ tal que*

$$\frac{\partial V}{\partial x} \left[\sum_{p=1}^N \alpha_p \sum_{k=1}^{r_p} h_{pk} \left(\mathbf{A}_{pk} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{2pk} \mathbf{u}(t) \right) \right] \leq 0, \quad (2.23)$$

então, existe uma lei de chaveamento que torna o sistema chaveado (2.1), com cada f_p representado por um modelo fuzzy T-S da forma (2.12), assintoticamente estável.

Demonstração: Veja Chiou et al. (2010). □

Teorema 2.9 *Sejam $\mathbf{u}(t) = 0$ e $\alpha \in \mathcal{M}$. Se existem matrizes simétricas definidas positivas $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_N$ satisfazendo*

$$\alpha_p v_{pp} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^N \alpha_i v_{pi} < 0, \quad p \in \mathcal{P} \quad (2.24)$$

em que

$$v_{pp} = \nu \min_{1 \leq k \leq r} (\mathbf{A}'_{pk_pp} \mathbf{P}_p + \mathbf{P}_p \mathbf{A}_{pk_pp}) + \frac{1}{2} \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^N \left(\max_{1 \leq k \leq r} \|\mathbf{A}'_{pk_pi} \mathbf{P}_p + \mathbf{P}_p \mathbf{A}_{pk_pi}\| \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^N \left(\max_{1 \leq k \leq r} \|\mathbf{A}'_{pk_ip} \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{A}_{pk_ip}\| \right) \right],$$

$$v_{pi} = \nu \min_{1 \leq k \leq r} (\mathbf{A}'_{ik_pp} \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{A}_{ik_pp}) + \frac{1}{2} \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^N \left(\max_{1 \leq k \leq r} \|\mathbf{A}'_{ik_pi} \mathbf{P}_p + \mathbf{P}_p \mathbf{A}_{ik_pi}\| \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^N \left(\max_{1 \leq k \leq r} \|\mathbf{A}'_{ik_ip} \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{A}_{ik_ip}\| \right) \right],$$

então, existe uma lei de chaveamento que torna a origem do sistema chaveado (2.1), com cada f_p representado por um modelo fuzzy T-S da forma (2.12) com $\mathbf{u}(t) = 0$, assintoticamente estável.

Demonstração: Veja Chiou et al. (2010) □

O Teorema 2.9 permite encontrar uma lei de chaveamento, como segue.

Lei de Chaveamento: O sistema chaveado (2.1) com f_p representado por um modelo fuzzy T-S da forma (2.12) para todo $p \in \mathcal{P}$ e $u(t) = 0$, permanece ou é chaveado para o subsistema l no tempo t se:

$$\mathbf{x}'(t) \left[\left(\sum_{i=1}^r h_{pk} \mathbf{A}_{pk} \right)' \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^r h_{pk} \mathbf{A}_{pk} \right) \right] \mathbf{x}(t) < 0, \quad p \in \mathcal{P}.$$

No próximo resultado foi incluído a entrada $\mathbf{u}(t)$ descrita por (2.17).

Teorema 2.10 *A origem do sistema chaveado (2.1) com f_p representado por um modelo fuzzy da forma (2.18) para todo $p \in \mathcal{P}$ é assintoticamente estável com $\alpha \in \mathcal{M}$ se existem matrizes $\mathbf{Q}$, $\mathbf{F}_{pk}$ satisfazendo as seguintes LMI's:*

$$\sum_{p=1}^N \alpha_p \left(\mathbf{Q} \mathbf{A}'_{pk} + \mathbf{A}_{pk} \mathbf{Q} + \mathbf{F}'_{pk} \mathbf{B}_{pk} + \mathbf{B}_{pk} \mathbf{K}_{pk} \right) < 0 \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^N \alpha_p \left(\mathbf{Q} \mathbf{A}'_{pk} + \mathbf{A}_{pk} \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}'_{pj} + \mathbf{A}_{pj} \mathbf{Q} + \mathbf{F}'_{pj} \mathbf{B}_{pk} + \mathbf{B}_{pk} \mathbf{K}_{pj} \right. \\ \left. + \mathbf{F}'_{pk} \mathbf{B}_{pj} + \mathbf{B}_{pj} \mathbf{K}_{pk} \right) \leq 0, \quad (2.26) \\ p \in \mathcal{P}, \quad k, j = 1, 2, \dots, r, k < j. \end{aligned}$$

Os ganhos são obtidos da forma

$$\mathbf{K}_{pk} = \mathbf{F}_{pk} \mathbf{Q}^{-1} \quad e \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}.$$

Demonstração: Veja Chiou et al. (2010). □

O Teorema 2.10 permite encontrar uma lei de chaveamento, como segue.

Lei de Chaveamento: O sistema chaveado (2.1) com f_p representado por um modelo fuzzy T-S da forma (2.18) para todo $p \in \mathcal{P}$, permanece ou é chaveado para o subsistema p no tempo t se:

$$\mathbf{x}'(t) \left[\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^r h_{pk} h_{pj} (\mathbf{A}_{pk} + \mathbf{B}_{pk} \mathbf{K}_{pj})' \mathbf{P} + \mathbf{P} \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^r h_{pk} h_{pj} (\mathbf{A}_{pk} + \mathbf{B}_{pk} \mathbf{K}_{pj}) \right] \mathbf{x}(t) < 0, \\ p \in \mathcal{P}.$$

As próximas condições de estabilidade são obtidas por considerar uma função do tipo Lyapunov fuzzy (VALENTINO; FARIA; OLIVEIRA, 2012; FARIA; VALENTINO; OLIVEIRA, 2013). Nenhuma restrição sobre as matrizes dos modelos locais é exigida, como acontece na equação (2.20), nos resultados de Chiou et al. (2010) mostrados anteriormente. Ainda, essas condições são baseadas no lema de Finsler. Este lema tem sido muito usado na análise de estabilidade (OLIVEIRA; SKELTON, 2001; MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009; TOGNETTI; OLIVEIRA; PERES, 2011; FARIA; SILVA; OLIVEIRA, 2013; MOZELLI, 2011), e em Lee, Park e Joo (2012) foi mostrado que a inclusão de variáveis de folga que fazem o desacoplamento entre as matrizes do sistema e da função de Lyapunov aumentam as estimativas da área de atração.

Lema 2.5 (Lema de Finsler) *Seja $w \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, de tal forma que posto(B) $< n$ e $B^\perp$ uma base para o espaço nulo de B (isto é $BB^\perp = 0$). As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. $w'Qw < 0, \quad \forall Bw = 0, \quad w \neq 0$
2. $B^{\perp'}QB^\perp < 0$
3. $\exists \mu \in \mathbb{R} : Q - \mu B'B < 0$
4. $\exists X \in \mathbb{R}^{n \times m} : Q + XB + B'X' < 0$.

O Lema de Finsler será aplicado na sequência para a análise de estabilidade da origem de sistemas chaveados fuzzy T-S. Considera-se matrizes $\mathbf{L}_{pk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{R}_{pk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $\mathbf{P}_{pk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e

$$Q = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}(h) & \mathbf{P}(h) \\ \mathbf{P}(h) & 0 \end{bmatrix}, \quad B = [\mathbf{A}(\alpha, h) \quad I], \quad X = [\mathbf{L}(h) \quad \mathbf{R}(h)]',$$

em que $\mathbf{P}(h) = \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} h_{pk} \mathbf{P}_{pk}$, $\dot{\mathbf{P}}(h) = \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \dot{h}_{pk} \mathbf{P}_{pk}$, $\mathbf{L}(h) = \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} h_{pk} \mathbf{L}_{pk}$, $\mathbf{R}(h) = \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} h_{pk} \mathbf{R}_{pk}$ e $\mathbf{A}(\alpha, h) = \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \alpha_p h_{pk} \mathbf{A}_{pk}$ com $\alpha \in \mathcal{M}$. Considera-se ainda a função de Lyapunov candidata $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma:

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)' \mathbf{P}(h) \mathbf{x}(t), \quad (2.27)$$

As derivadas de primeira ordem das funções de pertinência aparecem na derivada de (2.27) como segue

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \dot{\mathbf{x}}(t)' \mathbf{P}(h) \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)' (\dot{\mathbf{P}}(h) \mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(h) \dot{\mathbf{x}}(t)). \quad (2.28)$$

Considerando $w = [x' \quad \dot{x}']$, tem-se que $\dot{V} = w' Q w$ e portanto pelo Lema 2.5, $w' Q w < 0$ se, e somente se $Q + X B + B' X' < 0$ (item 1 $\iff$ item 4).

Então, afim de aumentar a região de factibilidade dos resultados em Valentino, Faria e Oliveira (2012), nos próximos teoremas considera-se a segunda desigualdade acima (FARIA; VALENTINO; OLIVEIRA, 2013). Para isso, definem-se os seguintes conjuntos

$$D_{pk} = \{\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X} : |\dot{h}_{pk}| \leq \phi_{pk}\}, \quad p \in \mathcal{P} \text{ e } k \in \mathcal{R}_p, \quad (2.29)$$

para números reais conhecidos ϕ_{pk} , e

$$B_A = \{x_0 \in \mathcal{X} : \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = 0\}$$

em que 0 é a origem do $\mathbb{R}^n$, sendo a área de atração de interesse, $\Omega(c) = \{\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X} : V(\mathbf{x}(t)) \leq c\}$ um conjunto de nível da candidata função de Lyapunov fuzzy (2.27) e $Z = \bigcap_{p=1}^N \left(\bigcap_{k=1}^{r_p} D_{pk} \right)$ um subconjunto de $\mathcal{X}$. Usando a Proposição 2.2, condições suficientes em termos de LMIs para a estabilidade assintótica da origem do sistema chaveado (2.1), com f_p para todo $p \in \mathcal{P}$ descrito por um modelo T-S fuzzy da forma (2.12) com $\mathbf{u}(t) = 0$, são dadas no próximo resultado, o qual foi publicado em Faria, Valentino e Oliveira (2013). Esse resultado ainda é aplicado mesmo quando o chaveamento rápido ocorre, devida a escolha da lei de chaveamento ser mensurável, como definida em (2.8) e demonstrada em Bacciotti e Mazzi (2010). Matrizes de folga também são adicionadas nas LMIs, escolhendo $\beta \in \bigcap_{p=1}^N \mathcal{R}_p$ de forma que a equação (2.14) seja satisfeita, com a finalidade de aumentar a região de factibilidade.

Teorema 2.11 *Sejam $\alpha \in \mathcal{M}$ e ϕ_{pk} números reais conhecidos satisfazendo (2.29). Se para algum $\beta \in \bigcap_{p=1}^N \mathcal{R}_p$ fixo, existir matrizes $\mathbf{L}_{pk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{R}_{pk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e matrizes simétri-*

cas $\mathbf{M}_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{P}_{pk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, satisfazendo

$$\mathbf{P}_{pk} > \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{P} \quad e \quad k \in \mathcal{R}_p, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{P}_{pk} + \mathbf{M}_p \geq \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{P} \quad e \quad k \in \mathcal{R}_p, \quad (2.31)$$

$$\Upsilon_{pk_li} + \Upsilon_{li_pk} - \frac{2}{N-1} \mathbf{T} < \mathbf{0}, \quad p < \ell, \quad p, \ell \in \mathcal{P}, \quad i \in \mathcal{R}_\ell \quad e \quad k \in \mathcal{R}_p, \quad (2.32)$$

$$\Upsilon_{pk_pi} + \Upsilon_{pi_pk} - 2\Upsilon_{p\beta_p\beta} + \frac{2}{N} \tilde{\Upsilon}_\phi + 2\mathbf{T} < \mathbf{0}, \quad k < i, \quad p \in \mathcal{P} \quad e \quad i, k \in \mathcal{R}_p, \quad (2.33)$$

$$\Upsilon_{pk_pk} - \Upsilon_{p\beta_p\beta} + \frac{1}{N} \tilde{\Upsilon}_\phi + \mathbf{T} < \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{P} \quad e \quad k \in \mathcal{R}_p - \{\beta\}, \quad (2.34)$$

$$\frac{1}{N} \tilde{\Upsilon}_\phi + \mathbf{T} < \mathbf{0} \quad (2.35)$$

em que

$$\Upsilon_{pk_li} = \begin{bmatrix} \alpha_\ell (\mathbf{L}_{pk} \mathbf{A}_{li} + \mathbf{A}'_{li} \mathbf{L}'_{pk}) & \star \\ \mathbf{P}_{pk} - \mathbf{L}'_{pk} + \alpha_\ell \mathbf{R}_{pk} \mathbf{A}_{li} & -\mathbf{R}_{pk} - \mathbf{R}'_{pk} \end{bmatrix}$$

e

$$\tilde{\Upsilon}_\phi = \sum_{g=1}^N \Upsilon_{g\beta_g\beta} + \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \phi_{pk} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{pk} + \mathbf{M}_p & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

então, existe uma lei de chaveamento que torna a origem do sistema chaveado (2.1), com f_p para todo $p \in \mathcal{P}$ descrito por um modelo fuzzy T-S da forma (2.12) e $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, assintoticamente estável para toda condição inicial $\mathbf{x}_0 \in \Omega(c^*)$, em que $c^* = \max\{c \in \mathbb{R} : \Omega(c) \subseteq Z\}$. Mais ainda, $\Omega(c^*)$ é uma estimativa da área de atração B_A .

Demonstração: Multiplicando (2.32) por $h_{pk}h_{li}$, (2.33) por $h_{pk}h_{pi}$, (2.34) por h_{pk}^2 , (2.35) por $h_{p\beta}^2$ e rearranjando todos os termos, segue que

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{\ell=p+1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \sum_{i=1}^{r_\ell} h_{pk}h_{li} \left\{ \Upsilon_{pk_li} + \Upsilon_{li_pk} - \frac{2}{N-1} \mathbf{T} \right\} + \sum_{p=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \beta}}^{r_p} h_{pk}^2 \{ \Upsilon_{pk_pk} \} \\ & + \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p-1} \sum_{i=k+1}^{r_p} h_{pk}h_{pi} \{ \Upsilon_{pk_pi} + \Upsilon_{pi_pk} + 2\mathbf{T} \} + \sum_{p=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \beta}}^{r_p} h_{pk}^2 \mathbf{T} \\ & + \sum_{p=1}^N \left(1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \beta}}^{r_p} h_{pk}^2 - 2 \sum_{k=1}^{r_p-1} \sum_{i=k+1}^{r_p} h_{pk}h_{pi} \right) \{ \Upsilon_{p\beta_p\beta} \} + \hat{\mathbf{P}}_\phi < \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\text{com } \hat{\mathbf{P}}_\phi = \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \phi_{pk} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{pk} + \mathbf{M}_p & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Substituindo (2.14) em (2.36), tem-se

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{\ell=p+1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \sum_{i=1}^{r_\ell} h_{pk}h_{li} \{ \Upsilon_{pk_li} + \Upsilon_{li_pk} \} + \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p-1} \sum_{i=k+1}^{r_p} h_{pk}h_{pi} \{ \Upsilon_{pk_pi} + \Upsilon_{pi_pk} \} \\ & + \sum_{p=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \beta}}^{r_p} h_{pk}^2 \{ \Upsilon_{pk_pk} \} + \sum_{p=1}^N h_{p\beta}^2 \{ \Upsilon_{p\beta_p\beta} \} + \hat{\mathbf{P}}_\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p=1}^N \sum_{\ell=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \sum_{i=1}^{r_\ell} h_{pk} h_{\ell i} \Upsilon_{pk_ \ell i} + \hat{\mathbf{P}}_\phi \\
&= \sum_{p=1}^N \sum_{\ell=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \sum_{i=1}^{r_\ell} h_{pk} h_{\ell i} \begin{bmatrix} \alpha_\ell (\mathbf{L}_{pk} \mathbf{A}_{\ell i} + \mathbf{A}'_{\ell i} \mathbf{L}'_{pk}) & \star \\ \mathbf{P}_{pk} - \mathbf{L}'_{pk} + \alpha_\ell \mathbf{R}_{pk} \mathbf{A}_{\ell i} & -\mathbf{R}_{pk} - \mathbf{R}'_{pk} \end{bmatrix} + \hat{\mathbf{P}}_\phi \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{L}(h) \mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{A}(\alpha, h)' \mathbf{L}(h)' + \mathbf{P}_\phi & \star \\ \mathbf{P}(h) - \mathbf{L}(h)' + \mathbf{R}(h) \mathbf{A}(\alpha, h) & -\mathbf{R}(h) - \mathbf{R}(h)' \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (2.37)
\end{aligned}$$

em que $\mathbf{P}_\phi = \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \phi_{pk} (\mathbf{P}_{pk} + \mathbf{M}_p)$. Pré-multiplicando e pós-multiplicando a LMI (2.37) pela matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}(\alpha, h)' \end{bmatrix}$ e sua transposta, respectivamente, segue que

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}(\alpha, h) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{L}(h) \mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{A}(\alpha, h)' \mathbf{L}(h)' + \mathbf{P}_\phi & \star \\ \mathbf{P}(h) - \mathbf{L}(h)' + \mathbf{R}(h) \mathbf{A}(\alpha, h) & -\mathbf{R}(h) - \mathbf{R}(h)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}(\alpha, h) \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{P}_\phi + \mathbf{A}(\alpha, h)' \mathbf{P}(h) + \mathbf{P}(h) \mathbf{A}(\alpha, h) < \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

De (2.16), como em Mozelli, Palhares e Avellar (2009) obtém-se:

$$\sum_{k=1}^{r_p} \dot{h}_{pk} \mathbf{P}_{pk} = \sum_{k=1}^{r_p} \dot{h}_{pk} (\mathbf{P}_{pk} + \mathbf{M}_p), \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad (2.38)$$

para qualquer matriz $\mathbf{M}_p$. Assim, através das suposições $|\dot{h}_{pk}| \leq \phi_{pk}$, $\forall p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathcal{R}_p$ e (2.38), tem-se que

$$\sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \dot{h}_{pk} \mathbf{P}_{pk} + \mathbf{A}(\alpha, h)' \mathbf{P}(h) + \mathbf{P}(h) \mathbf{A}(\alpha, h) < \mathbf{0}. \quad (2.39)$$

Pré-multiplicando e pós-multiplicando (2.39) por $\mathbf{x}(t)'$ e sua transposta, respectivamente, conclui-se que a equação (2.28) ao longo da solução do sistema chaveado (2.1), com cada subsistema descrito por um modelo fuzzy T-S da forma (2.12) e $u(t) = 0$ é negativa para todo $x \in Z$ tal que $x \neq 0$. Portanto, da Proposição 2.2, existe uma lei de chaveamento que torna a origem do sistema chaveado (2.1), com f_p para todo $p \in \mathcal{P}$ descrito por um modelo fuzzy T-S da forma (2.12) e $\mathbf{u}(t) = 0$, assintoticamente estável para toda condição inicial $\mathbf{x}_0 \in Z$.

A última parte é simples, pois pela definição $c^* = \max\{c \in \mathbb{R} : \Omega(c) \subseteq Z\}$. Uma vez que existe uma lei de chaveamento, tal que $V(x_0) < c^*$ e $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$ para todo $x \in Z$ tal que $x \neq 0$, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t)) = 0$. Como uma consequência, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ e portanto $\Omega(c^*)$ é uma estimativa de B_A . $\square$

Do Teorema 2.11, pode-se obter a seguinte lei de chaveamento.

Lei de Chaveamento: O sistema chaveado não linear (2.1) com $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, é chaveado ou permanece no subsistema p no tempo t se:

$$\mathbf{x}'(t) \left\{ \sum_{k=1}^{r_p} h_{pk} \left(\mathbf{A}'_{pk} \mathbf{P}(h) + \mathbf{P}(h) \mathbf{A}_{pk} \right) + \mathbf{P}_\phi \right\} \mathbf{x}(t) < 0, \quad (2.40)$$

e $\mathbf{x}'(t) \left\{ \sum_{k=1}^{r_j} h_{jk} \left(\mathbf{A}'_{jk} \mathbf{P}(h) + \mathbf{P}(h) \mathbf{A}_{jk} \right) + \mathbf{P}_\phi \right\} \mathbf{x}(t) \geq 0, \forall j \in \mathcal{P} \text{ com } j < p.$

A eficiência do Teorema 2.11 é ilustrada por um exemplo numérico.

Exemplo 2.1 Considere o sistema chaveado fuzzy T-S com $u(t) = 0$, $N = 2$, matrizes de modelos locais

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 6.2 & 1.9 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_{12} &= \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 6.2 & 0.9 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 3 & 0.73 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_{22} &= \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 3 & 0.27 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.41)$$

e funções de pertinência

$$h_{11} = \frac{1 + \sin(x_1(t))}{2}, \quad h_{12} = 1 - h_{11}, \quad h_{21} = \frac{1}{1 + e^{x_1(t)}}, \quad h_{22} = 1 - h_{21} \quad (2.42)$$

para os seguinte subconjuntos do espaço de estado: $\mathcal{X}_1 = \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{X}_2 = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n : |x_1(t)| \leq 1\}$.

Escolhendo $\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = 0.6$, $\beta = 1$ e $\phi_{pk} = 5.5$ para todo $p \in \mathcal{P}, k \in \mathcal{R}_p$, obtêm-se as seguintes soluções usando MATLAB toolboxes YALMIP (LÖFBERG, 2004) e SeDuMi (STURM, 1999) para resolver (2.30)-(2.35):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 30.68 & -10.28 & -2.71 & 3.68 \\ -10.28 & 3.49 & 0.97 & -1.34 \\ -2.71 & 0.97 & -0.01 & -0.08 \\ 3.68 & -1.34 & -0.08 & 0.06 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{11} &= \begin{bmatrix} 2.72 & 0.99 \\ 0.99 & 1.73 \end{bmatrix}, & \mathbf{P}_{12} &= \begin{bmatrix} 2.73 & 0.99 \\ 0.99 & 1.73 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_{21} &= \begin{bmatrix} 2.69 & 0.92 \\ 0.92 & 1.65 \end{bmatrix}, & \mathbf{P}_{22} &= \begin{bmatrix} 2.69 & 0.92 \\ 0.92 & 1.65 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{M}_1 &= \begin{bmatrix} -2.72 & -0.99 \\ -0.99 & -1.72 \end{bmatrix}, & \mathbf{M}_2 &= \begin{bmatrix} -2.69 & -0.92 \\ -0.92 & -1.65 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Os autovalores das matrizes $\mathbf{A}_{11}$ e $\mathbf{A}_{12}$ são $5.95 \pm 6.75i$ e $5.45 \pm 6.43i$, respectivamente e os autovalores das matrizes $\mathbf{A}_{21}$ e $\mathbf{A}_{22}$ são $-10.27, 1$ e $-10.28, 0.55$, respectivamente.

Embora, nem todos os modelos locais sejam assintoticamente estáveis, o Teorema 2.11 mostra que existe uma função de Lyapunov (2.27) com funções de pertinência (2.42) e matrizes (2.43) e (2.44) para o sistema chaveado (2.1) através da lei de chaveamento (2.40). As Figuras 2.2(a) e 2.2(b) mostram a solução do sistema não linear chaveado e sua respectiva lei de chaveamento. A Figura 2.3 mostra a função $V(\mathbf{x}(t))$ ao longo da solução do sistema chaveado (2.1) e subsistemas representados por modelos fuzzy T-S da forma (2.12) com $u(t) = 0$. Figura 2.4 mostra a estimativa da área de atração para $\Omega(c^*)$ com $c^* = 2.5$, a qual foi obtida numericamente através de testes numa grade de 0.01.

Figura 2.2 – a) Solução chaveada com condição inicial $x_0 = [-0.4 \ -0.37]'$ para o sistema chaveado do Exemplo 2.1, (b) lei de chaveamento satisfazendo (2.40).

Figura 2.3 – Função $V(\mathbf{x}(t))$ ao longo da solução do sistema chaveado do Exemplo 2.1 satisfazendo a lei de chaveamento (2.40).

O Teorema 2.9 (CHIOU et al., 2010) não pode ser usado para estabilizar este exemplo, pois as condições (2.20) não são satisfeitas. Ainda em Chiou et al. (2010) não é tratado o caso em que o chaveamento rápido ocorre.

Com a finalidade de aumentar a região de factibilidade das LMIs do resultado anterior, no próximo teorema foi incluída a entrada $\mathbf{u}(t)$ descrita da forma (2.17).

Teorema 2.12 *Sejam $\alpha \in \mathcal{M}$ e ϕ_{pk} números reais conhecidos satisfazendo (2.29). Se para algum $\beta \in \bigcap_{p=1}^N \mathcal{R}_p$ fixo e constantes positivas μ e λ existir matrizes $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$,*

Figura 2.4 – Plano de fase e área de atração para o sistema chaveado do Exemplo 2.1.

$\mathbf{Y}_{pk} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, e matrizes simétricas $\mathbf{X}_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{Q}_{pk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, satisfazendo

$$\mathbf{Q}_{pk} \succ \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{P} \quad e \quad k \in \mathcal{R}_p, \quad (2.45)$$

$$\mathbf{Q}_{pk} + \mathbf{X}_p \succeq \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{P} \quad e \quad k \in \mathcal{R}_p, \quad (2.46)$$

$$\Lambda_{pk_pi} + \Lambda_{pi_pk} - 2\Lambda_{p\beta_p\beta} + \frac{2}{N}\tilde{\Lambda}_\phi < \mathbf{0}, \quad i < k, \quad p \in \mathcal{P} \quad e \quad i, k \in \mathcal{R}_p, \quad (2.47)$$

$$\Lambda_{pk_pk} - \Lambda_{p\beta_p\beta} + \frac{1}{N}\tilde{\Lambda}_\phi < \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{P} \quad e \quad k \in \mathcal{R}_p - \{\beta\}, \quad (2.48)$$

$$\frac{1}{N}\tilde{\Lambda}_\phi < \mathbf{0} \quad (2.49)$$

com

$$\Lambda_{pk_pi} = \begin{bmatrix} \alpha_p(\mathbf{A}_{pk}\mathbf{W} + \mathbf{W}'\mathbf{A}'_{pk} + \mathbf{B}_{2pk}\mathbf{Y}_{pi} + \mathbf{Y}'_{pi}\mathbf{B}'_{pk}) & \star \\ \mathbf{Q}_{pk} - \mathbf{W}' + \mu\alpha_p(\mathbf{A}_{pk}\mathbf{W} + \mathbf{B}_{pk}\mathbf{Y}_{pi}) & -\mu(\mathbf{W} + \mathbf{W}') \end{bmatrix}$$

e

$$\tilde{\Lambda}_\phi = \sum_{p=1}^N \Lambda_{p\beta_p\beta} + \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \phi_{pk} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{pk} + \mathbf{X}_p & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

então, para todo $\mathbf{x}_0 \in \Omega(c^*)$ em que $c^* = \max\{c \in \mathbb{R} : \Omega(c) \subseteq Z\}$, existe uma lei de chaveamento que torna a origem do sistema chaveado (2.1) com f_p para todo $p \in \mathcal{P}$ descrito por um modelo fuzzy T-S da forma (2.17) com ganhos locais

$$\mathbf{K}_{pk} = \mathbf{Y}_{pk}\mathbf{W}^{-1}, \quad (2.50)$$

assintoticamente estável. Mais ainda, $\Omega(c^*)$ é uma estimativa da área de atração.

Demonstração: Multiplicando (2.47) por $h_{pk}h_{pi}$, (2.48) por h_{pk}^2 , (2.49) por $h_{p\beta}^2$ e seguindo os mesmos passos de (2.36), tem-se que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\alpha, h)\mathbf{W} + \mathbf{W}'\mathbf{A}(\alpha, h)' + \mathbf{B}_Y(\alpha, h) + \mathbf{B}_Y(\alpha, h)' + 2\lambda\mathbf{Q}(h) + \mathbf{Q}_\phi & \star \\ \mathbf{Q}(h) - \mathbf{W}' + \mu(\mathbf{A}(\alpha, h)\mathbf{W} + \mathbf{B}_Y(\alpha, h)) & -\mu(\mathbf{W} + \mathbf{W}') \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (2.51)$$

em que $\mathbf{B}_Y(\alpha, h) = \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \sum_{i=1}^{r_p} \alpha_p h_{pk} h_{pi} \mathbf{B}_{2pk} \mathbf{Y}_{pi}$, $\mathbf{Q}(h) = \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} h_{pk} \mathbf{Q}_{pk}$, $\mathbf{Q}_\phi = \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \phi_{pk} (\mathbf{Q}_{pk} + \mathbf{X}_p)$ e $\mathbf{A}(\alpha, h)$ como já definido. Executando a transformação da matriz

$$\mathbf{B}_Y(\alpha, h) = \left(\sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \sum_{i=1}^{r_p} \alpha_p h_{pk} h_{pi} \mathbf{B}_{2pk} \mathbf{K}_{pi} \right) \mathbf{W} = \mathbf{B}_K(\alpha, h) \mathbf{W} \quad (2.52)$$

e pré-multiplicando e pós-multiplicando (2.51) por $\begin{bmatrix} \mathbf{W}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}^{-1} \end{bmatrix}'$ e sua transposta, respectivamente, tem-se

$$\left[\begin{array}{c} (\mathbf{W}')^{-1} \left(\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h) \right) + \left(\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h) \right)' \mathbf{W}^{-1} + \mathbf{P}_\phi \\ \mathbf{P}(h) - \mathbf{W}^{-1} + \mu (\mathbf{W}')^{-1} \left(\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h) \right) \\ - \mu \left(\mathbf{W}^{-1} + (\mathbf{W}')^{-1} \right)^\star \end{array} \right] < \mathbf{0} \quad (2.53)$$

com $\mathbf{P}(h) = (\mathbf{W}')^{-1} \mathbf{Q}(h) \mathbf{W}^{-1}$ e $\mathbf{P}_\phi = (\mathbf{W}')^{-1} \mathbf{Q}_\phi \mathbf{W}^{-1}$. Então, pré-multiplicando e pós-multiplicando (2.53) pelo vetor $\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t)' & \mathbf{x}(t)' \left(\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h) \right)' \end{bmatrix}$ e seu transposto, respectivamente, segue de (2.29) e (2.38) que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) \left[\sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \dot{h}_{pk} \mathbf{P}_{pk} + \left(\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h) \right)' \mathbf{P}(h) \right. \\ \left. + \mathbf{P}(h) \left(\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h) \right) \right] \mathbf{x}(t) < \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Conclui-se então que (2.28) ao longo da solução de (2.23) é negativa para todo $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$ tal que $x(t) \in Z$. Portanto, da Proposição 2.2, existe uma lei de chaveamento que torna a origem do sistema chaveado (2.1), com f_p para todo $p \in \mathcal{P}$ descrito por um modelo fuzzy T-S da forma (2.18), assintoticamente estável para toda condição inicial $\mathbf{x}_0 \in Z$. A demonstração de que $\Omega(c^*)$ é uma estimativa da área de atração é análoga ao que foi feito na demonstração do Teorema 2.11. $\square$

O Teorema 2.12 permite encontrar uma lei de chaveamento, a qual pode ser vista abaixo.

Lei de Chaveamento: Sejam $\mathbf{P}_{pk}$ e $\mathbf{K}_{pi}$ soluções do Teorema 2.11. O sistema chaveado (2.1), com f_p para todo $p \in \mathcal{P}$ descrito por uma modelo fuzzy T-S da forma

(2.18), é chaveado ou permanece no subsistema p se no tempo t

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) \left\{ \sum_{k=1}^{r_p} \sum_{i=1}^{r_p} h_{pk} h_{pi} \left[(\mathbf{A}_{pk} + \mathbf{B}_{2pk} \mathbf{K}_{pi})' \mathbf{P}(h) + \mathbf{P}(h) (\mathbf{A}_{pk} + \mathbf{B}_{2pk} \mathbf{K}_{pi}) \right] \right. \\ \left. + \mathbf{P}_\phi \right\} \mathbf{x}(t) < 0, \quad (2.55) \\ \text{e } \mathbf{x}'(t) \left\{ \sum_{k=1}^{r_j} \sum_{i=1}^{r_j} h_{jk} h_{ji} \left[(\mathbf{A}_{jk} + \mathbf{B}_{2jk} \mathbf{K}_{ji})' \mathbf{P}(h) + \mathbf{P}(h) (\mathbf{A}_{jk} + \mathbf{B}_{2jk} \mathbf{K}_{ji}) \right] \right. \\ \left. + \mathbf{P}_\phi \right\} \mathbf{x}(t) \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{P}, \text{ com } j < p. \end{aligned}$$

A eficiência do Teorema 2.12 é ilustrada no próximo exemplo.

Exemplo 2.2 Considere o sistema chaveado (2.1) descrito pelos seguintes modelos locais:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 6.2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 6.2 & -1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 3 & 0.73 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 3 & 0.27 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\mathbf{B}_{211} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{212} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{221} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{222} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

e funções de pertinência

$$h_{11} = \frac{1 + \sin(x_1(t))}{2}, \quad h_{12} = 1 - h_{11}, \quad h_{21} = \frac{1}{1 + e^{x_1(t)}}, \quad h_{22} = 1 - h_{21}. \quad (2.58)$$

Para o caso $\mathbf{u}(t) = 0$ as LMIs (2.30)-(2.35) são infactíveis, mas a realimentação do estado com u da forma (2.17) pode tornar as LMIs factíveis. Portanto, escolhendo $\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = 0.6$, $\phi_{pk} = 5.5$ para todo $p \in \mathcal{P}, k \in \mathcal{R}_p$, $\beta = 1$ e $\mu = 0.1$, as seguintes matrizes são obtidas usando o MATLAB para resolver (2.45)-(2.49):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{11} &= \begin{bmatrix} 45.01 & 13.87 \\ 13.87 & 4.55 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} 32.08 & 9.80 \\ 9.80 & 3.27 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_{21} &= \begin{bmatrix} 45.01 & 13.87 \\ 13.87 & 4.55 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{22} = \begin{bmatrix} 32.08 & 9.80 \\ 9.80 & 3.27 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\mathbf{P}_\phi = \begin{bmatrix} 853.60 & 299.39 \\ 299.39 & 106.04 \end{bmatrix}, \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= \begin{bmatrix} -280.14 & -92.90 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} -276.06 & -89.68 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{21} &\approx 0, \quad \mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} 2.72 & 1.27 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Assim, pelo Teorema 2.12, a lei de chaveamento (2.55) torna a origem do sistema chaveado (2.1) com f_p descrito por modelos fuzzy T-S da forma (2.18), com modelos locais (2.56), (2.57), funções de pertinência (2.58), ganhos locais (2.61), assintoticamente estável. Para a condição inicial $x_0 = [-0.4 \ 1.2]'$, a Figura 2.5(a) mostra a solução do sistema chaveado em questão, a Figura 2.5(b) mostra a lei de chaveamento. Note que a entrada fuzzy (2.17) associado com a Proposição 2.2, foi capaz de estabilizar este exemplo. A Figura 2.6 mostra a estimativa da área de atração $\Omega(c^*)$, com $c^* = 1.8$. O valor de c^* foi obtido numericamente através de testes numa grade de 0.01.

Figura 2.5 – a) Solução chaveada com condição inicial $x_0 = [-0.4 \ 1.2]'$ para o Exemplo 2.2, (b) lei de chaveamento satisfazendo (2.55).

Figura 2.6 – Plano de fase e área de atração para o sistema chaveado do Exemplo 2.2.

Extensão do Princípio de Invariância para Sistemas Chaveados Não Lineares Contínuos no Tempo

Uma extensão do princípio de invariância é desenvolvida neste capítulo considerando o uso de uma função auxiliar comum para todos os subsistemas e também múltiplas funções auxiliares, as quais desempenham o mesmo papel das funções de Lyapunov. Nesta extensão não se tem interesse em estudar a estabilidade de um ponto de equilíbrio particular, como nos resultados do capítulo anterior, e sim estudar o comportamento assintótico da solução do sistema chaveado. A principal característica desse novo resultado é que as derivadas das funções auxiliares podem assumir valores positivos em alguns conjuntos e ainda não é exigido que todos os subsistemas tenham a origem como ponto de equilíbrio. Estimativas de atratores e suas respectivas áreas de atração para sistemas chaveados compostos com subsistemas ultimamente limitados também foram obtidas. Diz-se que, um sistema é ultimamente limitado em $\mathcal{X}$ se suas soluções são ultimamente limitadas, ou seja, se existe um conjunto limitado G com a propriedade de que, para todo compacto $\overline{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{X}$, existe um tempo $T > 0$ tal que $\varphi(t, x_0) \in G$ para todo $t \geq T$ e todo $x_0 \in \overline{\mathcal{X}}$ (LEVINE, 2010).

Finalmente, verificando se é limitado o conjunto dos pontos onde a derivada da função auxiliar V através de um sistema formado pela combinação convexa de todos os subsistemas assume valores positivos, então as estimativas de atratores e suas respectivas áreas de atração do sistema chaveado puderam ser encontradas mesmo na presença de subsistemas que não são ultimamente limitados. Mesmo que o chaveamento rápido ocorra nesse último resultado, a sua eficiência ainda é garantida devido a escolha da lei de chaveamento ser mensurável, o que garante a existência da solução generalizada de Krasovskii para todo tempo maior ou igual a zero.

3.1 Resultados Obtidos para Subsistemas Contínuos no Tempo Através de uma Função Auxiliar Comum e Múltiplas Funções Auxiliares

Nesta seção, considera-se a classe de funções $\dot{x} = f_\sigma(x, u)$ obtida de (2.1) com a entrada $u = 0$ e a existência de uma única função auxiliar V para todos os subsistemas desse sistema chaveado. Sejam $C_p = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V(x) \cdot f_p(x) > 0\}$ o conjunto dos pontos onde a derivada da função V ao longo da trajetória do subsistema p é positiva, $E_p = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V(x) \cdot f_p(x) = 0\}$ o conjunto dos pontos onde esta derivada ao longo do subsistema p é igual a zero e $\Omega_v = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq v\}$ um conjunto de nível da função V . Defina $C = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} C_p$, $E = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} E_p$, Seja $[0, t_f)$ o intervalo maximal de existência da solução do sistema chaveado. Considere que as soluções $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ sejam limitadas, o que implica que $t_f = +\infty$ (HALE; KOÇAK, 1991) e considere o seguinte lema que estabelece um resultado sobre a invariância dos conjuntos de nível da função auxiliar V .

Lema 3.1 (*Conjunto Positivamente Invariante*) *Considere o sistema chaveado (2.1) e $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$. Seja ℓ um número real satisfazendo $\sup_{x \in C} V(x) \leq \ell < \infty$. Se $x_0 \in \Omega_\ell = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \ell\}$, então toda solução limitada $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ permanece dentro de Ω_ℓ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração: Sejam $x_0 \in \Omega_\ell$ e $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ uma solução limitada. Suponha que exista $\tau > 0$ tal que $\varphi(\tau, x_0) \notin \Omega_\ell$. Então, existe $\bar{\tau} \in (0, \tau)$ tal que $V(\varphi(\bar{\tau}, x_0)) = \ell$ (pela continuidade de V e $\varphi(t, x_0)$) e $V(\varphi(t, x_0)) > \ell, \forall t \in (\bar{\tau}, \tau]$, isso é uma contradição uma vez que $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ e $\nabla V(x) \cdot f_p(x(t)) \leq 0$ fora de $\Omega_\ell, \forall p \in \mathcal{P}$. Portanto, $\varphi(t, x_0) \in \Omega_\ell, \forall t \geq 0$. □

Explorando o Lema 3.1, a seguinte extensão do princípio de invariância para sistemas chaveados é estabelecida (VALENTINO et al., 2012).

Teorema 3.1 (*Uma Extensão do Princípio de Invariância para Sistemas Chaveados Através de uma Função Auxiliar Comum*) *Considere o sistema chaveado (2.1) e seja $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$. Suponha a existência de um número real ℓ satisfazendo $\sup_{x \in C} V(x) \leq \ell < \infty$ e seja $\Omega_\ell = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \ell\}$. Finalmente, seja $\mathcal{N}_1$ a união de todos os conjuntos fracamente invariantes contidos em $E \cup \Omega_\ell$. Então, toda solução limitada $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ é atraída para $\mathcal{N}_1$.*

Demonstração: Suponha inicialmente $x_0 \in \Omega_\ell$ e $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$. Pelo Lema 3.1 tem-se que Ω_ℓ é um conjunto positivamente invariante, ou seja, $\varphi(t, x_0) \in \Omega_\ell$ para todo $t \geq 0$. Como $\varphi(t, x_0)$ é uma solução limitada, pela Proposição 2.1, $\omega(x_0)$ é não vazio, compacto,

fracamente invariante e $\omega(x_0) \subset \Omega_\ell$. Mais ainda, $\varphi(t, x_0)$ é atraída para $\omega(x_0)$. Então a solução é atraída para um conjunto fracamente invariante dentro de Ω_ℓ .

Agora, suponha $x_0 \notin \Omega_\ell$ e $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$. Se $\varphi(t, x_0)$ entra em Ω_ℓ para algum t , então o resultado segue da primeira parte desta prova. Suponha que a solução limitada $\varphi(t, x_0) \notin \Omega_\ell, \forall t \geq 0$. Como $\ell \geq \sup_{x \in C} V(x)$, $\varphi(t, x_0) \notin C \subset \Omega_\ell, \forall t \geq 0$, isto é, $V(\varphi(t, x_0)) > \ell$ e $\nabla V(\varphi(t, x_0)) \cdot f_p(\varphi(t, x_0)) \leq 0, \forall t \geq 0, \forall p \in \mathcal{P}$. Conclui-se que $V(\varphi(t, x_0))$ é uma função limitada inferiormente e não-crescente de t . Então, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $r = \lim_{t \rightarrow \infty} V(\varphi(t, x_0))$. Uma vez que a solução é limitada, $\omega(x_0)$ é não vazio. Seja $a \in \omega(x_0)$, então existe uma sequência $\{t_k\}$ with $t_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ tal que $\varphi(t_k, x_0) \rightarrow a$. A continuidade de V assegura que $V(\varphi(t_k, x_0)) \rightarrow V(a)$ quando $k \rightarrow \infty$, então $V(a) = r$, $\forall a \in \omega(x_0)$.

Finalmente, pela Proposição 2.1, $\omega(x_0)$ é um conjunto fracamente invariante. Assim, existe um intervalo $[\alpha, \beta]$ contendo a origem e uma função $v(t)$ tal que $v(0) = a$, $v(t) \in \omega^+(x_0), \forall t \in [\alpha, \beta]$ e $\exists j \in \mathcal{P}$ tal que $\dot{v}(t) = f_j(v(t)), \forall t \in [\alpha, \beta]$. Então $V(v(t)) = V(a) = r, \forall t \in [\alpha, \beta]$ e $\nabla V(v(t)) \cdot f_j(v(t)) = 0 \forall t \in [\alpha, \beta]$. Particularmente, para $t = 0$ tem-se $\nabla V(v(0)) \cdot f_j(v(0)) = \nabla V(a) \cdot f_j(a) = 0$. Por isso $a \in E$. Então $\omega(x_0) \subset E$ e a solução é atraída para um conjunto fracamente invariante em E . Portanto, toda solução limitada $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ é atraída para $\mathcal{N}_1$.

□

A Figura 3.1 ilustra o comportamento da solução chaveada para duas condições iniciais. Para a condição inicial $x_0 \notin \Omega_\ell$ e $\varphi(t, x_0) \notin \Omega_\ell$ para todo $t \geq 0$, a trajetória é atraída para um conjunto invariante em E . Por outro lado, a trajetória para a condição inicial $x_0 \in \Omega_\ell$ é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ .

Figura 3.1 – Interpretação geométrica do Teorema 3.1.

O próximo corolário, explora o Lema 3.1 e a extensão do princípio de invariância para obter estimativas do atrator para sistemas chaveados compostos por subsistemas ultimamente limitados. Mais precisamente, explora a limitação e invariância dos conjuntos de nível para garantir a limitação das trajetórias e estimar os atratores e a área de atração.

Corolário 3.1 Considere o sistema chaveado (2.1) e $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$. Sejam L e ℓ números reais satisfazendo $\sup_{x \in C} V(x) \leq \ell < L < \infty$ e suponha que Ω_L

é limitado. Então toda solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ tal que $x_0 \in \Omega_L$ é atraída para o maior conjunto fracamente invariante contido em $(E \cup \Omega_\ell) \cap \Omega_L$.

Demonstração: De acordo com o Lema 3.1 ambos Ω_L e Ω_ℓ são positivamente invariantes. Uma vez que Ω_L é um conjunto limitado e positivamente invariante, então toda solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ tal que $x_0 \in \Omega_L$ é limitada. Portanto, pelo Teorema 3.1, se $x_0 \in \Omega_L$, então $\varphi(t, x_0)$ é atraído para o maior conjunto fracamente invariante em $(E \cup \Omega_\ell) \cap \Omega_L$. $\square$

A próxima observação fornece estimativas de atratores e suas respectivas áreas de atração para sistemas chaveados compostos por subsistemas ultimamente limitados.

Observação 3.1 Se $E \subset \Omega_\ell$, então toda solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ começando em Ω_L é atraída para o maior conjunto fracamente invariante dentro de Ω_ℓ . Neste caso, Ω_ℓ e Ω_L são estimativas do atrator e da área de atração, respectivamente.

A Figura 3.2 ilustra o comportamento da solução chaveada para duas condições iniciais. Para qualquer a condição inicial $x_0 \in \Omega_L$ a trajetória é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ .

Figura 3.2 – Interpretação geométrica do Corolário 3.1.

Observação 3.2 No Teorema 3.1, considere $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função radialmente ilimitada, isto é, $V(x) \rightarrow \infty$, quando $\|x\| \rightarrow \infty$, então toda solução $\varphi(t, x_0)$ é limitada para $t \geq 0$ e as conclusões do Teorema 3.1 são válidas para qualquer solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$.

Exemplo 3.1 O sistema chaveado (2.1) com $\mathcal{P} = \{1, 2\}$ e

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{bmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix},$$

possui, para toda solução chaveada dwell-time, um atrator global. O Teorema 3.1 será explorado para obter estimativa deste atrator. Com esta finalidade, considere a seguinte função auxiliar $V(x) = (x_1^2 + x_2^2)/2$. Então $C = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\} - \{x : x_2 = 0\}$, $E = \{x_1^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{x : x_2 = 0\}$. Portanto, $\ell = \sup_{x \in C} V(x) = 1/2$ e $\Omega_\ell = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$.

Assim, pelo Teorema 3.1, toda solução limitada $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ é atraída para o maior conjunto fracamente invariante de $E \cup \Omega_\ell = \{(x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1) \cup \{x : x_2 = 0\}\}$. Uma vez que todas as trajetórias são transversais ao conjunto $\{x : x_2 = 0, x_1 \neq 0\}$, conclui-se que nenhum conjunto fracamente invariante está contido no conjunto $\{x : x_2 = 0, x_1 \neq 0\}$ e portanto o atrator global tem que estar contido no círculo unitário. A Figura 3.3 ilustra a simulação no domínio de tempo para $x_0 = [1 \ 1.2]'$ e $\tau_{k+1} = \tau_k + 1$, $k = 1, 2, \dots, 50$. Esta simulação confirma o resultado apresentado por mostrar um atrator dentro do círculo unitário. Observe na Figura 3.3(c) as mudanças no sinal da derivada ao longo da solução.

Figura 3.3 – (a) Solução chaveada com condição inicial $x_0 = [1 \ 1.2]'$ para o Exemplo 3.1, (b) plano de fase e (c) derivada ao longo da solução do sistema chaveado.

Embora o Teorema 3.1 apresente condições menos restritas sobre a função auxiliar quando comparada com o Teorema 1 em Bacciotti e Mazzi (2005), ainda pode ser difícil encontrar a tal função V satisfazendo todas as suposições impostas neste resultado. Além disso, uma função auxiliar comum pode levar a estimativas muito conservadoras dos atratores e área de atração. Para superar esta dificuldade, considere agora o uso de múltiplas funções auxiliares, isto é, considere a existência de funções de classe $\mathcal{C}^1$, $V_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \forall p \in \mathcal{P}$ e suponha que a sequência de tempos de chaveamentos $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é divergente e que cada subsistema é ativo infinitas vezes. Em outras palavras, para todo

$T_1 > 0$ e $p \in \mathcal{P}$, existe um k tal que $\sigma(\tau_k) = p$ e $\tau_k > T_1$. Sejam $\mathcal{C}_p = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V_p(x) \cdot f_p(x) > 0\}$ o conjunto dos pontos onde a derivada da função V_p ao longo das trajetórias do subsistema p é positiva e $\mathcal{E}_p = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V_p(x) \cdot f_p(x) = 0\}$ o conjunto dos pontos onde a derivada da função V_p ao longo da solução do subsistema p é zero. Defina $\mathcal{C} = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \mathcal{C}_p$ e $\mathcal{E} = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \mathcal{E}_p$. Levando em conta as múltiplas funções auxiliares, considere as seguintes suposições (BACCIOTTI; MAZZI, 2005; RODRIGUES; ALBERTO; BRETAS, 2002).

Suposição 3.1 *Existem funções contínuas $a, b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo $a(x) \leq \inf_p V_p(x)$ e $b(x) \geq \sup_p V_p(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Através da Suposição 3.1, defina $\Omega_{\ell_j} = \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \leq \ell_j\}$ e $\Theta = \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) \leq \ell_0\}$ com $\sup_{x \in \mathcal{C}} b(x) \leq \ell_0 < \infty$ e $\sup_{x \in \Omega_{\ell_{j-1}}} b(x) \leq \ell_j < \infty$, $j \in \mathcal{P}$. É claro por construção que

$$\mathcal{C} \subseteq \Theta \subset \Omega_{\ell_0} \subset \dots \subset \Omega_{\ell_j} \subset \Omega_{\ell_{j+1}} \subset \dots \subset \Omega_{\ell_{N+1}}. \quad (3.1)$$

Suposição 3.2 *Para todo par de instantes de chaveamento consecutivos $\tau_h < \tau_j$ tal que $\sigma(\tau_h) = \sigma(\tau_j) = p$, vale:*

$V_p(\varphi(\tau_h, x_0)) > V_p(\varphi(\tau_j, x_0))$ se $\varphi(\tau_h, x_0) \notin \Theta$ e $\varphi(\tau_j, x_0) \notin \Theta$, como mostra a Figura 3.4.

Figura 3.4 – Restrição na lei de chaveamento.

Antes do resultado principal para múltiplas funções auxiliares, é apresentado o seguinte lema o qual garante que a solução chaveada iniciando em $\Omega_{\ell_{j-1}}$ nunca deixa Ω_{ℓ_j} enquanto um índice $p \in \mathcal{P}$ fixo está ativo.

Lema 3.2 *Considere o sistema chaveado (2.1) e suponha que a Suposição 3.1 é satisfeita. Seja $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ a solução de (2.1) e suponha que $\varphi(t, x_0) \in \Omega_{\ell_{j-1}}$ para o tempo de chaveamento $t = \tau_k$ com $\sigma(\tau_k) = p \in \mathcal{P}$, então $\varphi(t, x_0) \in \Omega_{\ell_j}$ para todo $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$.*

Demonstração: Suponha por contradição a existência de $\tau \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, tal que $\varphi(\tau, x_0) \notin \Omega_{\ell_j}$. Então, existe $\bar{\tau} \in (\tau_k, \tau)$ tal que $V_p(\varphi(\bar{\tau}, x_0)) = \ell$ (pela continuidade da V e $\varphi(t, x_0)$) e $V_p(\varphi(t, x_0)) > \ell, \forall t \in (\bar{\tau}, \tau]$, o que é uma contradição, pois da equação (3.1) $\mathcal{C} \subset \Theta$ e assim $\nabla V_p(x) \cdot f_p(x) \leq 0$ para todo x fora de Θ e todo $p \in \mathcal{P}$. $\square$

Explorando o resultado do Lema 3.2, o próximo lema estabelece um resultado sobre a invariância dos conjuntos de nível da função $a(x)$ através da Suposição 3.1.

Lema 3.3 (*Conjunto Positivamente Invariante*) *Considere o sistema chaveado (2.1), $V_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ para todo $p \in \mathcal{P}$ e suponha que as Suposições 3.1- 3.2 são satisfeitas. Se $x_0 \in \Omega_{\ell_0}$, com $\ell_0 \in \mathbb{R}$ satisfazendo $\sup_{x \in \mathcal{C}} b(x) \leq \ell_0 < \infty$, então toda solução limitada $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ permanece em $\Omega_{\ell_{N+1}}$ para todo $t \geq 0$, isto é, $\Omega_{\ell_{N+1}}$ é um conjunto positivamente invariante de Ω_{ℓ_0} .*

Demonstração: A prova explora as mesmas ideias de indução sobre os N números de campos vetoriais usados na prova do Lema 2 em Bacciotti e Mazzi (2005).

Para $N = 1$, isto é, $\mathcal{P} = \{1\}$, é muito simples mostrar que a solução iniciando em Ω_{ℓ_0} não deixa Ω_{ℓ_1} . De fato, seja $x_0 \in \Omega_{\ell_0}$ e suponha a existência de um $T > 0$ tal que $\varphi(T, x_0) \notin \Omega_{\ell_1}$. Então $V_1(x_0) \leq \ell_1$ e $V_1(\varphi(T, x_0)) > \ell_1$. A continuidade assegura que $V_1(\varphi(t, x_0))$ deve crescer em algum intervalo de $[0, T)$ fora de Θ , mais isso é uma contradição. Portanto, $\varphi(t, x_0) \in \Omega_{\ell_1}, \forall t \geq 0$.

Como hipótese de indução, assume-se que o resultado é válido para $N = j - 1$ campos vetoriais, $\mathcal{P} = \{1, \dots, j - 1\}$, isto é, se $x_0 \in \Omega_{\ell_0}$ e $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ então $\varphi(t, x_0) \in \Omega_{\ell_N}$, para todo $t \geq 0$.

Agora, será mostrado que o resultado vale para $N = j$. Seja $x_0 \in \Omega_{\ell_0}$, enquanto os primeiros $j - 1$ campos vetoriais são ativos, a trajetória não deixa Ω_{ℓ_N} , então para o primeiro tempo de chaveamento que o $j - th$ sistema se torna ativo $t = \tau_k$, tem-se que $\varphi(\tau_k, x_0) \in \Omega_{\ell_N}$. Então pelo Lema 3.2, $\varphi(t, x_0) \in \Omega_{\ell_{N+1}}$ para todo $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$. Além disso, para qualquer τ_s tal que $s \geq k + 1$, $\sigma(\tau_s)$ será igual para qualquer dos sistemas $p \in \mathcal{P}$. Suposição 3.2 implica que $\varphi(\tau_s, x_0)$ tem que pertencer a algum Ω_{ℓ_i} com $i \leq N$. Portanto $\varphi(t, x_0) \in \Omega_{\ell_{N+1}}$ para todo $t \geq 0$. $\square$

A figura 3.5 fornece uma ideia da interpretação geométrica do Lema 3.3 para dois subsistemas. Considerando $x_0 \in \Omega_{\ell_0}$, então pelo Lema 3.2, $\varphi(t, x_0) \in \Omega_{\ell_1}$ para todo $t \in [\tau_0, \tau_1)$ e ainda $V_2(\varphi(\tau_1, x_0)) \in \Omega_{\ell_2}$, pois $V_p(\varphi(t, x_0)) \in \Omega_{\ell_2}$ para $p \in \{1, 2\}$ enquanto $\varphi(t, x_0) \in \Omega_{\ell_1}$. Novamente pelo Lema 3.2, $\varphi(t, x_0) \in \Omega_{\ell_3}$ para todo $t \in [\tau_1, \tau_2)$ e ainda $V_1(\varphi(\tau_2, x_0)) \in \Omega_{\ell_2}$, pois a lei de chaveamento garante que fora de Θ , $V_1(\varphi(\tau_1, x_0)) \geq V_1(\varphi(\tau_2, x_0))$, o mesmo acontece para o subsistema 2, $V_2(\varphi(\tau_2, x_0)) \geq V_2(\varphi(\tau_3, x_0))$. Portanto a solução permanecerá em Ω_{ℓ_3} .

O próximo teorema é uma versão do princípio de invariância estendido para múltiplas funções auxiliares.

Teorema 3.2 (*Uma Extensão do Princípio de Invariância para Sistemas Chaveados Através de Múltiplas Funções Auxiliares*) *Considere o sistema chaveado (2.1) e seja $V_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ para todo $p \in \mathcal{P}$. Através das Suposições*

Figura 3.5 – Interpretação geométrica do Lema 3.3 para dois subsistemas.

3.1 - 3.2 tem-se que, toda solução limitada de (2.1) $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ é atraída para o maior conjunto fracamente invariante de $\mathcal{E} \cup \Omega_{\ell_{N+1}}$.

Demonstração: Suponha inicialmente $x_0 \in \Theta$ e $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ uma solução limitada. Pelo Lema 3.3, pode-se provar que $x_0 \in \Theta \subset \Omega_{\ell_0}$ então $\varphi(t, x_0) \in \Omega_{\ell_{N+1}}$ para $t \geq 0$. Uma vez que $\varphi(t, x_0)$ é limitada, pela Proposição 2.1, $\omega(x_0)$ é não vazio, compacto, fracamente invariante e $\omega(x_0) \subset \Omega_{\ell_{N+1}}$. Então, a solução é atraída para um conjunto fracamente invariante em $\Omega_{\ell_{N+1}}$.

Agora suponha $x_0 \notin \Theta$ e $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ uma solução limitada. Se existe $T > 0$ tal que $\varphi(T, x_0) \in \Theta$ então a prova segue da primeira parte desta prova. Se $\varphi(t, x_0) \notin \Theta \forall t \geq 0$, da equação (3.1) $\mathcal{C} \subset \Theta$ assim $\nabla V_p(\varphi(t, x_0)) \cdot f_p(\varphi(t, x_0)) \leq 0, \forall t \in I_p$ e $\forall p \in \mathcal{P}$. Considere a subsequência dos tempos de chaveamento $\{\tau_{k_p}\}$ para os quais o sistema p vem a ser ativo, isto é, $\sigma(\tau_{k_p}) = p$. Da Suposição 3.2, tem-se que $V_p(\varphi(\tau_{k_p}, x_0))$ é uma sequência decrescente e limitada inferiormente de números reais. Então $V_p(\varphi(\tau_{k_p}, x_0)) \rightarrow r_p$ quando $k \rightarrow +\infty$ para todo $p \in \mathcal{P}$. Uma vez que $\varphi(t, x_0)$ é limitada então pela proposição 2.1, $\omega(x_0)$ é não vazio e fracamente invariante. Seja $c \in \omega(x_0)$, então existe uma sequência $\{t_j\}$ tal que $\varphi(t_j, x_0) \rightarrow c$ quando $j \rightarrow \infty$. Como o conjunto $\mathcal{P}$ é finito, existe pelo menos um índice $\bar{p} \in \mathcal{P}$ e uma subsequência $\{t_{j_i}\}$ tal que $t_{j_i} \in I_{\bar{p}}$. Então, $V_{\bar{p}}(\varphi(t_{j_i}, x_0)) \rightarrow V_{\bar{p}}(c) = r_{\bar{p}}$ para todo $c \in \omega(x_0)$. Como na prova da Proposição 2.1 em Bacciotti e Mazzi (2005), pode-se provar a existência de um intervalo $[\epsilon, \gamma]$ contendo a origem e funções $v_j(t) = \varphi(t + t_j)$ definidas sobre $[\epsilon, \gamma]$, satisfazendo as seguintes propriedades: $v_j(t)$ converge uniformemente para $v(t)$ sobre $[\epsilon, \gamma]$, $v(t) \subset \omega(x_0)$ para todo $t \in [\epsilon, \gamma]$, $\dot{v}(t) = f_{\bar{p}}(v(t))$ e $v(0) = c$. Então $V_{\bar{p}}(v(t)) = r_{\bar{p}}$ e $\nabla V_{\bar{p}}(v(t)) \cdot f_{\bar{p}}(v(t)) = 0$ para todo $t \in [\epsilon, \gamma]$. Particularmente, para $t = 0$, $\nabla V_{\bar{p}}(v(0)) \cdot f_{\bar{p}}(v(0)) = \nabla V_{\bar{p}}(c) \cdot f_{\bar{p}}(c) = 0$, então $c \in \mathcal{E}$ e $\omega(x_0) \subset \mathcal{E}$. O conjunto $\omega(x_0)$ é fracamente invariante, então a solução é atraída para um conjunto fracamente invariante em $\mathcal{E}$. Portanto, a solução é atraída para o maior conjunto fracamente invariante de $\Omega_{\ell_{N+1}} \cup \mathcal{E}$.

□

Observação 3.3 Considera-se o Teorema 3.2 e suponha que $V_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função

radialmente ilimitada para todo $p \in \mathcal{P}$, isto é, $V_p(x) \rightarrow \infty$, quando $\|x\| \rightarrow \infty$, então toda solução $\varphi(t, x_0)$ é limitada para $t \geq 0$ e as conclusões do Teorema 3.2 valem para qualquer solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$.

A Figura 3.6 ilustra o comportamento da solução chaveada para duas condições iniciais. Para a condição inicial $x_0 \notin \Theta$ e $\varphi(t, x_0) \notin \Theta$ para todo $t \geq 0$, a trajetória é atraída para o maior conjunto invariante em $\mathcal{E} \cup \Omega_{\ell_{N+1}}$. Por outro lado, a trajetória para a condição inicial $x_0 \in \Theta$ é atraída para o maior conjunto invariante em $\Omega_{\ell_{N+1}}$.

Figura 3.6 – Interpretação geométrica do Teorema 3.2.

Exemplo 3.2 Considere o sistema chaveado (2.1) com $\mathcal{P} = \{1, 2\}$ e

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} -x_1(-1 + x_1^2 + x_2^2) \\ -2x_2(-1 + x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix}.$$

Sejam $V_1(x) = 2x_1^2 + x_2^2$ e $V_2(x) = (x_1^2 + x_2^2)/2$. Tem-se que $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\} - \{(0, 0)\}$ e $\mathcal{E} = \{x_1^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$.

Escolha

$$a(x) = (x_1^2 + x_2^2)/2 \quad e \quad b(x) = 2x_1^2 + x_2^2.$$

Assim

$$\begin{aligned} \Theta &= \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1^2 + x_2^2 \leq 2\}; \\ \ell_0 &= \sup_{x \in \mathcal{C}} b(x) = 2, \quad \Omega_{\ell_0} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}; \\ \ell_1 &= \sup_{x \in \Omega_{\ell_0}} b(x) = 8, \quad \Omega_{\ell_1} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 16\}; \\ \ell_2 &= \sup_{x \in \Omega_{\ell_1}} b(x) = 32, \quad \Omega_{\ell_2} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 64\}; \\ \ell_3 &= \sup_{x \in \Omega_{\ell_2}} b(x) = 128, \quad \Omega_{\ell_3} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 256\}. \end{aligned}$$

Então, toda solução limitada $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ é atraída para o maior conjunto fracamente invariante em $\mathcal{E} \cup \Omega_{\ell_{N+1}} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 256\}$. A Figura 3.7 ilustra a simulação no domínio de tempo para $\tau_{k+1} = \tau_k + 1$, $k = 1, \dots, 50$.

Figura 3.7 – (a) Solução chaveada com condição inicial $x_0 = [1 \ 1.2]'$ para o Exemplo 3.2, (b) plano de fase e (c) derivada da função V_p ao longo da solução do subsistema p ($\nabla V_p(x) \cdot f_p(x)$).

O próximo corolário explora o Lema 3.3 e o Teorema 3.2 para fornecer estimativas dos atratores e área de atração na forma de conjuntos de nível da função $a(x)$ através da Suposição 3.2.

Corolário 3.2 *Considere o sistema chaveado (2.1) e seja $V_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ para todo $p \in \mathcal{P}$. Através das Suposições 3.1- 3.2, sejam L_0 e ℓ_0 números reais satisfazendo $\sup_{x \in \mathcal{C}} b(x) \leq \ell_0 < L_0 < \infty$ e suponha que $\Omega_{L_{N+1}}$ é limitado. Então toda solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ tal que $x_0 \in \Omega_{L_0}$ é atraída para o maior conjunto fracamente invariante contido em $(\mathcal{E} \cup \Omega_{\ell_{N+1}}) \cap \Omega_{L_{N+1}}$.*

Demonstração: Do Lema 3.3, conclui-se que $\Omega_{L_{N+1}}$ é um conjunto positivamente invariante de Ω_{L_0} . Uma vez que $\Omega_{L_{N+1}}$ é um conjunto limitado e positivamente invariante de Ω_{L_0} , toda solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ tal que $x_0 \in \Omega_{L_0}$ é limitado. Portanto, pelo Teorema 3.2, se $x_0 \in \Omega_{L_0}$, então $\varphi(t, x_0)$ é atraída para o maior conjunto fracamente invariante em $(\mathcal{E} \cup \Omega_{\ell_{N+1}}) \cap \Omega_{L_{N+1}}$. $\square$

Observação 3.4 Se $\mathcal{E} \subset \Omega_{\ell_{N+1}}$, então toda solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ iniciando em Ω_{L_0} é atraído para o maior conjunto fracamente invariante em $\Omega_{\ell_{N+1}}$. Neste caso, $\Omega_{\ell_{N+1}}$ e Ω_{L_0} são estimativas do atrator e da área de atração, respectivamente.

Exemplo 3.3 Considere o sistema chaveado do Exemplo 2. Tem-se que $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$ e $\Omega_{\ell_3} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 256\}$, então $\mathcal{E} \subset \Omega_{\ell_3}$. Seja $L_0 > \ell_0$,

$$\Omega_{L_0} = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1^2 + x_2^2)/2 \leq L_0\}.$$

Pelo Corolário 3.2 e Observação 3.4, conclui-se que toda solução limitada $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ tal que $x_0 \in \Omega_{L_0}$ é atraída para Ω_{ℓ_3} . Portanto Ω_{ℓ_3} é uma estimativa do atrator e Ω_{L_0} é uma estimativa da área de atração.

3.2 Resultados Obtidos para Subsistemas Contínuos no Tempo com Incertezas Paramétricas Através de uma Função Auxiliar Comum e Múltiplas Funções auxiliares

Nesta seção, considera-se a classe de funções $\dot{x} = f_\sigma(x, u)$ obtida de (2.1) com entrada $u = 0$, a qual foi estendida para incertezas paramétricas (3.2), e então é desenvolvido uma extensão do princípio de invariância para sistemas chaveados com incertezas paramétricas. Essa extensão é usada para obter estimativas de atratores e correspondentes áreas de atração para sistemas chaveados compostos por subsistemas ultimamente limitados, as quais independem dos parâmetros incertos. A existência da solução chaveada é garantida para todo tempo pela escolha de uma lei de chaveamento *dwell-time*.

A classe de sistemas chaveados contínuos no tempo (2.1) foi estendida para a classe de sistemas chaveados contínuos no tempo com incertezas paramétricas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_{\sigma(t)}(x, \lambda) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

em que $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$ é um vetor de parâmetros incertos. Agora, considere a existência de funções $V_p : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ para todo $p \in \mathcal{P}$ e as seguintes suposições.

Suposição 3.3 Existem funções contínuas $a_p, b_p, c_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $a_p(x) \leq V_p(x, \lambda) \leq b_p(x)$ e $-\nabla V_p(x, \lambda) \cdot f_p(x, \lambda) \geq c_p(x)$ para todo $p \in \mathcal{P}$ e $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \Lambda$.

Através da Suposição 3.3, escolha funções $\tilde{a}(x)$ e $\tilde{b}(x)$ satisfazendo $\tilde{a}(x) \leq \inf_{p \in \mathcal{P}} a_p(x)$, $\tilde{b}(x) \geq \sup_{p \in \mathcal{P}} b_p(x)$. Defina os conjuntos $\tilde{C}_p = \{x \in \mathbb{R}^n : c_p(x) < 0\}$ e $\tilde{C} = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \tilde{C}_p$.

Também, defina os conjuntos de nível $\Omega_{\ell_{j-1}} = \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{a}(x) \leq \ell_{j-1}\}$ com $\ell_0 \geq \sup_{x \in \tilde{C}} \tilde{b}(x)$ e $\ell_j \geq \sup_{x \in \Omega_{\ell_{j-1}}} \tilde{b}(x)$, $j \in \mathcal{P}$. Seja $\Theta = \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{b}(x) \leq \ell_0\}$, $\tilde{E}_p = \{x \in \mathbb{R}^n : c_p(x) = 0\}$ e $\tilde{E} = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \tilde{E}_p$. Por construção, tem-se que

$$\tilde{C} \subseteq \Theta \subset \Omega_{\ell_0} \subset \dots \subset \Omega_{\ell_j} \subset \Omega_{\ell_{j+1}} \subset \dots \subset \Omega_{\ell_{N+1}}. \quad (3.3)$$

Suposição 3.4 Para todo $\lambda \in \Lambda$ fixo e todo par de tempos de chaveamento consecutivos $\tau_h < \tau_j$ tal que $\sigma(\tau_h) = \sigma(\tau_j)$, vale a seguinte desigualdade:

$$\tilde{a}(\varphi(\tau_h, x_0, \lambda)) > \tilde{b}(\varphi(\tau_j, x_0, \lambda)) \text{ para } \varphi(\tau_h, x_0, \lambda) \notin \Theta \text{ e } \varphi(\tau_j, x_0, \lambda) \notin \Theta.$$

Lema 3.4 Considere o sistema chaveado (3.2) satisfazendo a Suposição 3.3. Para todo $\lambda \in \Lambda$ fixo, suponha que a solução $\varphi(t, x_0, \lambda) \in \Omega_{\ell_{j-1}}$ no tempo de chaveamento $t = \tau_k$ com $\sigma(\tau_k) = p \in \mathcal{P}$, então $\varphi(t, x_0, \lambda) \in \Omega_{\ell_j}$ para todo $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$.

Demonstração: Para todo $\lambda \in \Lambda$ fixo, a prova é análoga a prova do Lema 3.2. □

Lema 3.5 (Conjunto Positivamente Invariante) Considere o sistema chaveado (3.2) satisfazendo Suposições 3.3- 3.4 e seja $V_p : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ para todo $p \in \mathcal{P}$. Para todo $\lambda \in \Lambda$ fixo, seja ℓ_0 um número real satisfazendo $\sup_{x \in \tilde{C}} \tilde{b}(x) \leq \ell_0 < \infty$. Se $x_0 \in \Omega_{\ell_0}$, então toda solução limitada $\varphi(t, x_0, \lambda) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ permanece dentro de $\Omega_{\ell_{N+1}}$ para todo $t \geq 0$, isto é, $\Omega_{\ell_{N+1}}$ é um conjunto positivamente invariante de Ω_{ℓ_0} .

Demonstração: Para todo $\lambda \in \Lambda$ fixo, se Suposição 3.4 é satisfeita, então $V_p(\varphi(\tau_j, x_0, \lambda), \lambda) \leq \tilde{b}(\varphi(\tau_j, x_0, \lambda), \lambda) \leq \tilde{a}(\varphi(\tau_h, x_0, \lambda)) \leq V_p(\varphi(\tau_h, x_0, \lambda), \lambda)$, para todo par de tempos de chaveamento consecutivos $\tau_h < \tau_j$ e para todo $p \in \mathcal{P}$. Portanto, a prova é análoga a prova do Lema 3.3. □

Teorema 3.3 (Uma Extensão do Princípio de Invariância para Sistemas Chaveados com Incertezas Paramétricas Através de Múltiplas Funções Auxiliares) Considere o sistema chaveado (3.2) satisfazendo Suposições 3.3 - 3.4 e seja $V_p : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ para todo $p \in \mathcal{P}$. Para todo $\lambda \in \Lambda$ fixo, tem-se que toda solução limitada de (3.2) $\varphi(t, x_0, \lambda) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ é atraída para o maior conjunto fracamente invariante de $\tilde{E} \cup \Omega_{\ell_{N+1}}$.

Demonstração: Considerando Suposições 3.3 e 3.4 e Lemas 3.4 e 3.5, para cada $\lambda \in \Lambda$ fixo, a prova segue as mesmas ideias da prova do Teorema 3.2. □

O próximo corolário explora Lema 3.5 e o Teorema 3.3 para provar estimativas de atratores e correspondentes áreas de atração, para sistemas chaveados compostos por subsistemas ultimamente limitados, na forma de conjuntos de nível da função $\tilde{a}(x)$.

Corolário 3.3 *Considere o sistema chaveado (3.2) satisfazendo Suposições 3.3 - 3.4 e seja $V_p : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ para todo $p \in \mathcal{P}$. Através das Suposições 3.3- 3.4, para $\lambda \in \Lambda$ fixo, sejam L_0, ℓ_0 um números reais satisfazendo $\sup_{x \in \tilde{C}} \leq \ell_0 < L_0 < \infty$ e suponha que $\Omega_{L_{N+1}}$ é limitado. Então toda solução $\varphi(t, x_0, \lambda) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ tal que $x_0 \in \Omega_{L_0}$ é atraída para o maior conjunto fracamente invariante contido em $(\tilde{E} \cup \Omega_{\ell_{N+1}}) \cap \Omega_{L_{N+1}}$.*

Demonstração: Para todo $\lambda \in \Lambda$ fixo, a prova é análoga a prova do Corolário 3.2. $\square$

Observação 3.5 *Se $\tilde{a}(x) \rightarrow \infty$, quando $\|x\| \rightarrow \infty$, então para todo $\ell_{N+1} > 0$, $\Omega_{\ell_{N+1}} = \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{a}(x) \leq \ell_{N+1}\}$ é limitado. Portanto, toda solução é limitada para $t \geq 0$ e as conclusões do Teorema 3.3 valem para qualquer solução $\varphi(t, x_0, \lambda) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$.*

Observação 3.6 *Se $\tilde{E} \subset \Omega_{\ell_{N+1}}$, então para todo $\lambda \in \Lambda$ fixo, toda solução $\varphi(t, x_0, \lambda) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ começando em Ω_{L_0} é atraída para o maior conjunto fracamente invariante dentro de $\Omega_{\ell_{N+1}}$. Neste caso, $\Omega_{\ell_{N+1}}$ e Ω_{L_0} são estimativas do atrator e da área de atração, respectivamente,*

Corolário 3.4 (Uma Extensão do Princípio de Invariância para Sistemas Chaveados com Incertezas Paramétricas Através de um Função Auxiliar Comum) *Considere o sistema chaveado (3.2) satisfazendo Suposição 3.3. Se o sistema chaveado (3.2) possui uma função auxiliar comum V , isto é, $V_p(x, \lambda) = V(x, \lambda)$ para todo $p \in \mathcal{P}$, então para todo $\lambda \in \Lambda$ fixo, toda solução limitada de (3.2) $\varphi(t, x_0, \lambda) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ é atraída para o maior conjunto fracamente invariante em $\tilde{E} \cup \Omega_{\ell_0}$.*

Demonstração: Primeiro, sejam $x_0 \in \Omega_{\ell_0}$ e $\varphi(t, x_0, \lambda) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ uma solução limitada. Análogo a primeira parte do Teorema 3.1, prova-se que $\varphi(t, x_0, \lambda)$ é atraído para um conjunto fracamente invariante em Ω_{ℓ_0} .

Agora, seja $x_0 \notin \Omega_{\ell_0}$. Se existe $T > 0$ tal que $\varphi(T, x_0, \lambda) \in \Omega_{\ell_0}$ então a prova segue da primeira parte desta prova. Seja $\varphi(t, x_0, \lambda) \notin \Omega_{\ell_0}$ para todo $t \geq 0$. Por (3.3) $\tilde{C} \subset \Omega_{\ell_0}$ assim $-\nabla V(\varphi(t, x_0, \lambda), \lambda) \cdot f_p(\varphi(t, x_0, \lambda), \lambda) \geq c_p(\varphi(t, x_0, \lambda)) > 0$ para todo $t \geq 0$. Então, analogamente a segunda parte da prova do Teorema 3.1, pode-se provar que $\varphi(t, x_0, \lambda)$ é atraída para o maior conjunto fracamente invariante em $\tilde{E}$. Portanto, a solução é atraída para o maior conjunto fracamente invariante em $\tilde{E} \cup \Omega_{\ell_0}$. $\square$

Exemplo 3.4 *Considere o sistema chaveado (2.1) com $\mathcal{P} = \{1, 2\}$ e*

$$f_1(x, \lambda) = \begin{bmatrix} -lx_1(-1 + x_1^2 + x_2^2) \\ -2qx_2(-1 + x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}, \quad f_2(x, \lambda) = \begin{bmatrix} rx_2 \\ -sx_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

em que l, q, r e s são parâmetros incertos. Os valores dos parâmetros nominais são $l = q = r = 1$ e $s = 2$. Admite-se a existência de uma incerteza de $\pm 10\%$ nos parâmetros. Assim

$$\Lambda = \{\lambda = (l, q, r, s) \in \mathbb{R}^4 : l_m \leq l \leq l_M, q_m \leq q \leq q_M,$$

$$r_m \leq r \leq r_M, s_m \leq s \leq s_M\} \quad \text{com} \quad l_m = q_m = r_m = 0.9,$$

$$l_M = q_M = r_M = 1.1, s_m = 1.8 \quad e \quad s_M = 2.2.$$

Sejam $V_1(x, \lambda) = 2qx_1^2 + lx_2^2$ e $V_2(x, \lambda) = (sx_1^2 + rx_2^2)/2$. Escolha $\tilde{a}(x) = \frac{s_mx_1^2 + r_mx_2^2}{2}$ e $\tilde{b}(x) = 2q_Mx_1^2 + l_Mx_2^2$. A escolha dos marjorantes c_p com $p \in \{1, 2\}$ não é tão simples. As derivadas de V_p com $p \in \{1, 2\}$ ao longo da solução são

$$\begin{aligned} -\nabla V_1 \cdot f_1(x, \lambda) &= 4qt(x_1^2 + x_2^2)(-1 + x_1^2 + x_2^2) \geq c_1(x) \\ &= 4q_ml_m(-1 + x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

e

$$-\nabla V_2 \cdot f_2(x, \lambda) = rx_2^2 \geq c_2(x) = r_mx_2^2.$$

Tem-se que $\tilde{C} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ e $\tilde{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$. Portanto

$$\begin{aligned} \Theta &= \{x \in \mathbb{R}^2 : 2q_Mx_1^2 + l_Mx_2^2 \leq 2.2\}; \\ \ell_0 &= \sup_{x \in \tilde{C}} b(x) = 2.2; \\ \Omega_{\ell_0} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : s_mx_1^2 + r_mx_2^2 \leq 4.4\}; \\ \ell_1 &= \sup_{x \in \Omega_{\ell_0}} b(x) = 3.4365; \\ \Omega_{\ell_1} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : s_mx_1^2 + r_mx_2^2 \leq 6.8730\}; \\ \ell_2 &= \sup_{x \in \Omega_{\ell_1}} b(x) = 8.4003; \\ \Omega_{\ell_2} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : s_mx_1^2 + r_mx_2^2 \leq 16.8006\}; \\ \ell_3 &= \sup_{x \in \Omega_{\ell_2}} b(x) = 41.0681; \\ \Omega_{\ell_3} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : s_mx_1^2 + r_mx_2^2 \leq 82.1363\}. \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema 3.3, toda solução limitada $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{\text{dwell}}$ é atraída para o maior conjunto invariante de $\tilde{E} \cup \Omega_{\ell_3} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : s_mx_1^2 + r_mx_2^2 \leq 82.1363\}$. A Figura 3.8 ilustra o plano de fase para dois vetores de valores de parâmetros diferentes e $\tau_{k+1} = \tau_k + 1$, $k = 1, \dots, 30$.

3.3 Resultados Obtidos Através de um Sistema Auxiliar Formado pela Combinação Convexa de Todos os Subsistemas

Para obter os próximos resultados, um sistema auxiliar formado pela combinação convexa de todos os subsistemas foi explorado para estudar o comportamento assintótico

Figura 3.8 – Plano de fase para o Exemplo 3.4 com condição inicial $x_0 = [5 \ 4]'$, (a) $\lambda = (0.9, 0.9, 0.9, 1.8)$ e (b) $\lambda = (1.1, 1.1, 1.1, 2.2)$.

da solução do sistema chaveado. A diferença dos resultados anteriores é que fora do conjunto Ω_ℓ , uma lei de chaveamento mensurável dependendo do estado mensurável deve ser obedecida. Essa lei de chaveamento garante que a derivada da função auxiliar decresce ao longo da solução de Krasovskii do sistema chaveado. A vantagem dessa extensão é que as estimativas de atratores e suas respectivas áreas de atração podem ser encontradas mesmo na presença de subsistemas que não são ultimamente limitados.

Considere o sistema auxiliar

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{p=1}^N \alpha_p f_p(x) := f(x, \alpha), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

em que $f(x, \alpha)$ depende da escolha de $\alpha \in \mathcal{M}$, com $\mathcal{M}$ definido como o índice de conjuntos convexos mostrado no Capítulo 2. Seja $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e defina os seguintes conjuntos ao longo da solução do sistema (3.4):

$$\begin{aligned} C_\alpha &= \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V(x) \cdot f(x, \alpha) \geq 0\} \\ \Omega_v &= \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq v\} \\ \Gamma_p &= \{x \in \mathcal{B} : \nabla V(x) \cdot f_p(x) < 0\}. \end{aligned}$$

com $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$.

A proposição apresentada a seguir é usada na demonstração do resultado principal desta seção.

Proposição 3.1 *Sejam $\mathcal{B}$ um subconjunto do $\mathbb{R}^n$, $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e considere $\alpha \in \mathcal{M}$ tal que*

$$\frac{\partial V}{\partial x} \left[\sum_{p=1}^N \alpha_p f_p(x) \right] < 0 \quad (3.5)$$

para todo t enquanto $x(t) \in \mathcal{B}$. Então, existe uma lei de chaveamento $\sigma(x)$, a qual assegura que a função V decresce ao longo da solução do sistema chaveado (2.1) em $\mathcal{B}$. Mais ainda, se a lei de chaveamento é mensurável, então V decresce ao longo da solução de Krasovskii de (2.1) em $\mathcal{B}$.

Demonstração: Seguindo Chiou et al. (2010), sejam $\mathcal{B}$ um subconjunto do $\mathbb{R}^n$, V uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e considere $\alpha \in \mathcal{M}$, então para todo t enquanto $x(t) \in \mathcal{B}$ existe pelo menos um $p \in \mathcal{P}$ tal que

$$\frac{\partial V}{\partial x} [f_p(x)] < 0. \quad (3.6)$$

Portanto, existe uma lei de chaveamento $\sigma(x)$, tal que V decresce ao longo da solução do sistema chaveado (2.1) em $\mathcal{B}$ enquanto a solução existir. Caso a lei de chaveamento seja mensurável, então para toda condição inicial $x_0 \in \mathcal{B}$ pode-se assegurar a existência local da solução de Krasovskii de (2.1) e um $p \in \mathcal{P}$ tal que (3.6) seja satisfeita, então a derivada de V decresce ao longo dessa solução de Krasovskii de (2.1) em $\mathcal{B}$ enquanto a solução existir. $\square$

Seguindo os mesmos passos do Teorema 2.5 de Bacciotti e Mazzi (2010), uma lei de chaveamento mensurável $\sigma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}$ satisfazendo (3.6), pode ser definida da forma:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Gamma_1, \\ p, & \text{se } x \in \left(\Gamma_p - \left(\bigcup_{k < p} \Gamma_k \right) \right). \end{cases} \quad (3.7)$$

ou equivalentemente $\sigma(x) = \min\{p : \nabla V(x) \cdot f_p(x) < 0\}$. De fato, considere $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n - \Omega_\ell$, a função $\sigma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}$ dada por (3.9) e $F_p = \{x \in \mathcal{B} : \sigma(x) = p\}$ o qual satisfaz $F_i \cap F_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j \in \mathcal{P}$ e $\bigcup_{p \in \mathcal{P}} F_p = \mathcal{B}$. Sejam as σ -álgebra Σ_1 de Borel e Σ_2 formada pelo conjuntos das partes de $\mathcal{P}$, então

$$\sigma^{-1}(\{p\}) = \left(\Gamma_p - \left(\bigcup_{k < p} \Gamma_k \right) \right) = F_p. \quad (3.8)$$

Como $\Gamma_p \in \Sigma_1$ e $F_p = \left(\bigcup_{k < p} \Gamma_k \right)^c \cap \Gamma_p \in \Sigma_1$ para todo $p \in \mathcal{P}$ em que o primeiro termo da igualdade significa o complementar do conjunto $\left(\bigcup_{k < p} \Gamma_k \right)$, então $\sigma(x)$ é uma função mensurável.

Teorema 3.4 *Seja $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e considere $\alpha \in \mathcal{M}$. Se existe $\ell \in \mathbb{R}$ satisfazendo $\sup_{x \in \bar{C}_\alpha} V(x) < \ell < \infty$, então toda solução limitada $\varphi(t, x_0)$ de (2.1) possuindo um chaveamento dwell-time em Ω_ℓ e uma lei de chaveamento $\sigma(x)$ satisfazendo (3.9) para todo t enquanto $x(t) \in \bar{\Omega}_\ell^c$, é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ .*

Demonstração: Seja $x_0 \in \Omega_\ell$ e $\varphi(t, x_0)$ uma solução limitada de (2.1) possuindo um chaveamento *dwell-time* em Ω_ℓ e uma lei de chaveamento $\sigma(x)$ satisfazendo (3.9) para todo t enquanto $x(t) \in \overline{\Omega}_\ell^c$. Como a solução limitada é obtida através de um chaveamento *dwell-time* então existe para todo tempo. Suponha a existência de um $\tau > 0$ tal que $\varphi(\tau, x_0) \notin \Omega_\ell$. Então, existe $\bar{\tau} \in (0, \tau)$ tal que $V(\varphi(\bar{\tau}, x_0)) = \ell$ (pela continuidade de V e $\varphi(t, x_0)$) e $V(\varphi(t, x_0)) > \ell, \forall t \in (\bar{\tau}, \tau]$, mas isso é uma contradição, pois a lei de chaveamento dado por (3.9) não permite que a derivada da V ao longo da solução do sistema (2.1) cresça, portanto, $\varphi(t, x_0) \in \Omega_\ell$ para todo $t \geq 0$. Finalmente pela Proposição 2.1, para toda solução limitada, $\omega(x_0)$ é não vazio, compacto, fracamente invariante e $\omega(x_0) \subset \Omega_\ell$. Mais ainda, $\varphi(t, x_0)$ é atraída para $\omega(x_0)$. Então, a solução é atraída para um conjunto fracamente invariante dentro de Ω_ℓ .

Agora, seja $x_0 \notin \Omega_\ell$ e $\varphi(t, x_0)$ uma solução limitada de (2.1) através da lei de chaveamento mensurável (3.9). Então, para toda condição inicial x_0 do sistema (2.1) existe a solução de Krasovskii sobre algum intervalo $[0, t_f)$. Uma vez que a solução é limitada, então $t_f = +\infty$. Assim, a função V decresce ao longo da solução de Krasovskii de (2.1) para todo t enquanto $x(t) \in \overline{\Omega}_\ell^c$, assim existe um tempo t_1 tal que $V(x(t_1)) < \ell$ e o resultado segue da primeira parte desta demonstração. Portanto, toda solução limitada $\varphi(t, x_0)$ de (2.1) possuindo um chaveamento *dwell-time* em Ω_ℓ e uma lei de chaveamento $\sigma(x)$ satisfazendo (3.9) para todo t enquanto $x(t) \in \overline{\Omega}_\ell^c$, é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ . $\square$

A Figura 3.9, ilustra o comportamento da solução do sistema chaveado com três subsistemas para duas condições iniciais. Para a condição inicial $x_0 \in \Omega_\ell$, a solução através de uma lei de chaveamento *dwell-time* é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ . Para $x_0 \notin \Omega_\ell$, a solução através da lei de chaveamento

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Gamma_1, \\ 2, & \text{se } x \in (\Gamma_2 - \Gamma_1) \\ 3, & \text{se } x \in \left(\Gamma_3 - \left(\bigcup_{k < 3} \Gamma_k \right) \right) \end{cases} \quad (3.9)$$

é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ .

Figura 3.9 – Interpretação geométrica do Teorema 3.4.

O próximo corolário explora o Teorema 3.4 para obter estimativas de atratores e suas áreas de atração para sistemas chaveados. Note que, não é imposto que todos os subsistemas sejam ultimamente limitados.

Corolário 3.5 *Considere o sistema (3.4) e $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$. Sejam L, ℓ números reais satisfazendo $\sup_{x \in C_\alpha} V(x) \leq \ell < L < \infty$ e suponha que Ω_L é limitado. Então, toda solução $\varphi(t, x_0)$ possuindo um chaveamento dwell-time em Ω_ℓ e uma lei de chaveamento satisfazendo (3.9) para todo t enquanto $x(t) \in \overline{\Omega_\ell^c}$ tal que $x_0 \in \Omega_L$ é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ . Portanto, Ω_L e Ω_ℓ são estimativas da área de atração e atrator, respectivamente.*

Demonstração: Para qualquer solução $\varphi(t, x_0)$ possuindo um chaveamento dwell-time em Ω_ℓ e uma lei de chaveamento satisfazendo (3.9) para todo t enquanto $x(t) \in \overline{\Omega_\ell^c}$, tem-se que Ω_ℓ e Ω_L são conjuntos positivamente invariantes. Como Ω_L é limitado, então $\varphi(t, x_0)$ com $x_0 \in \Omega_L$ é limitada para todo $t \geq 0$. Portanto, pelo Teorema 3.4, se $x_0 \in \Omega_L$ então $\varphi(t, x_0)$ é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ . Logo, Ω_L e Ω_ℓ são estimativas da área de atração e atrator, respectivamente. $\square$

Exemplo 3.5 *Considere o sistema chaveado (2.1) com $\mathcal{P} = \{1, 2\}$ e*

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} -2x_1^3 - 2x_1x_2^2 + x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{bmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -2x_1^2x_2 - 2x_2^3 + x_1 \end{bmatrix}$$

Sejam $V(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$. Então

$$\begin{aligned} \nabla V(x) \cdot f(x) &= x_1(-x_1^3 - x_1x_2^2 + 0.5x_2 + x_1 - 0.5x_2) \\ &+ x_2(x_2 - 0.5x_1 - x_1^2x_2 - x_2^3 + 0.5x_1) \\ &= (x_1^2 + x_2^2)(-x_1^2 - x_2^2 + 1). \end{aligned}$$

Portanto, $C_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ e $\ell > 0.5$. Note que o conjunto onde a derivada assume zero está em Ω_ℓ . Assim, pelo Teorema 3.4, qualquer solução limitada $\varphi(t, x_0)$ possuindo um chaveamento dwell-time em Ω_ℓ e uma lei de chaveamento $\sigma(x)$ satisfazendo (3.9) para todo t enquanto $x(t) \in \overline{\Omega_\ell^c}$ é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ . A Figura 3.10 ilustra a solução chaveada para $x_0 = [-2 \ -2.2]$ e a lei de chaveamento e a Figura 3.11 mostra que a função V não cresce fora de Ω_ℓ , pois o chaveamento $\sigma(x)$ é determinado por (3.9). Esta simulação confirma o resultado do Teorema 3.4 por mostrar um atrator dentro de um círculo de raio 1.2, uma vez que $\ell = 0.6$ (Figura 3.11).

Figura 3.10 – (a) Solução chaveada para a condição inicial $x_0 = [-2 \ -2.2]$ para o Exemplo 3.5. (b) chaveamento $\sigma(t)$ para o Exemplo 3.5.

Figura 3.11 – (a) Plano de fase com $x_0 = [-2 \ -2.2]$ para o Exemplo 3.5 (b) função V ao longo da solução do sistema chaveado para o Exemplo 3.5.

Extensão do Princípio de Invariância para Sistema T-S Fuzzy Chaveado

Neste capítulo, é apresentado uma extensão do princípio de invariância para sistemas chaveados fuzzy T-S, que é uma aplicação do Teorema 3.4, obtida a partir de modelos fuzzy T-S para cada subsistema. O resultado permite analisar o comportamento assintótico da solução do sistema chaveado apenas verificando a factibilidade de um conjunto de LMIs e propriedades do conjunto dos pontos onde a derivada da função auxiliar sobre a solução do sistema formado pela combinação convexa de todos os subsistemas é positiva.

4.1 Resultados Obtidos para Subsistemas T-S Fuzzy

Considera-se o sistema (3.4) formado pela combinação convexa de todos os subsistemas com cada subsistema f_p descrito por um modelo fuzzy T-S da forma (2.12) com $u(t) = 0$, isto é:

$$\dot{x} = \sum_{p=1}^N \alpha_p \left(\sum_{k=1}^{r_p} h_{pk} \mathbf{A}_{pk} \right) x, \quad (4.1)$$

$$x(0) = x_0. \quad (4.2)$$

Os resultados apresentados são desenvolvidos usando a seguinte função $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ com $\mathcal{X} = \bigcap_{p=1}^N \mathcal{X}_p$, como definido em (2.10) na Seção 2.2.1, da forma:

$$V(x) = x' \left(\sum_{p=1}^N \sum_{k \in \mathcal{G}_p} h_{pk} \mathbf{P}_{pk} \right) x \quad (4.3)$$

com $\mathcal{R}_p = \{1, 2, \dots, r_p\}$ definido na Seção 2.2 e $\mathcal{G}_p$ um subconjunto de $\mathcal{R}_p$ para todo $p \in \mathcal{P}$, o qual é previamente escolhido de modo que

$$\Omega_L \supset D \supseteq \left\{ x \in \mathcal{X} : x' \left(\sum_{p=1}^N \sum_{k \in \mathcal{G}_p} \dot{h}_{pk}(x) \mathbf{P}_{pk} \right) x \geq 0 \right\} \quad (4.4)$$

em que $L \in \mathbb{R}$ e $\Omega_L \subset \mathcal{X}$.

O próximo teorema fornece um resultado em termos de LMIs para o estudo do comportamento assintótico da solução de sistemas chaveados. Com a finalidade de aumentar a região de factibilidade das LMIs, também foram acrescentadas matrizes de folga escolhendo $\beta \in \bigcap_{p=1}^N \mathcal{R}_p$ satisfazendo (2.15).

Teorema 4.1 *Considere o sistema chaveado (2.1) com cada f_p representado por um modelo fuzzy T-S da forma (2.12) em $\mathcal{X}$ com $u(t) = 0$. Se para algum $\beta \in \bigcap_{p=1}^N \mathcal{R}_p$ existir matrizes $\mathbf{P}_{pk} = \mathbf{P}'_{pk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\mathbf{L}_{pk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{R}_{pk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo (4.5)-(4.12) e um conjunto $\mathcal{G}_p$ de forma que (4.4) seja satisfeita, então existe $\ell \leq L$ tal que toda solução limitada $\varphi(t, x_0)$ de (2.1), com $x_0 \in \mathcal{X}$, possuindo um chaveamento dwell-time em Ω_ℓ e uma lei de chaveamento $\sigma(x)$ satisfazendo (3.9) para todo t enquanto $x(t) \in \overline{\Omega}_\ell^c$ é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ .*

$$\Upsilon_{\beta k_ \beta k} + \mathbf{Q}_\alpha < \mathbf{0}, \quad k \in \mathcal{G}_\beta, \quad (4.5)$$

$$\Upsilon_{\beta k_ ij} + \mathbf{Q}_\alpha < \mathbf{0}, \quad k \in \mathcal{R}_\beta - \mathcal{G}_\beta, \quad i \in \mathcal{P}, \quad j \in \mathcal{G}_i, \quad (4.6)$$

$$\Upsilon_{\beta k_ \beta j} + \Upsilon_{\beta j_ \beta k} + 2\mathbf{Q}_\alpha < \mathbf{0}, \quad j, k \in \mathcal{G}_\beta, \quad j < k, \quad (4.7)$$

$$\Upsilon_{pk_ pk} - \frac{1}{N-1} \mathbf{Q}_\alpha < \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{P} - \{\beta\}, \quad k \in \mathcal{G}_p, \quad (4.8)$$

$$\Upsilon_{pk_ ij} - \frac{1}{N-1} \mathbf{Q}_\alpha < \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{P} - \{\beta\}, \quad k \in \mathcal{R}_p - \mathcal{G}_p, \quad i \in \mathcal{P}, \quad j \in \mathcal{G}_i, \quad (4.9)$$

$$\Upsilon_{pk_ pj} + \Upsilon_{pj_ pk} - \frac{2}{N-1} \mathbf{Q}_\alpha < \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{P} - \{\beta\}, \quad k, j \in \mathcal{G}_p, \quad j < k, \quad (4.10)$$

$$\Upsilon_{pk_ ij} + \Upsilon_{ij_ pk} - \frac{2}{N-1} \mathbf{Q}_\alpha < \mathbf{0}, \quad p, i \in \mathcal{P} - \{\beta\}, \quad p < i, \quad k \in \mathcal{G}_p, \quad j \in \mathcal{G}_i, \quad (4.11)$$

$$\Upsilon_{\beta k_ ij} + \Upsilon_{ij_ \beta k} + \frac{N-2}{N-1} \mathbf{Q}_\alpha < \mathbf{0}, \quad k \in \mathcal{G}_\beta, \quad i \in \mathcal{P} - \{\beta\}, \quad j \in \mathcal{G}_i, \quad (4.12)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\alpha &= \sum_{p=1}^{r_p} \sum_{k \in (\mathcal{R}_p - \mathcal{G}_p)} \Upsilon_{pk_ pk} + \mathbf{M}, \\ \Upsilon_{pk_ ij} &= \begin{bmatrix} \alpha_i (\mathbf{L}_{pk} \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{A}'_{ij} \mathbf{L}'_{pk}) & \star \\ \mathbf{P}_{pk} - \mathbf{L}'_{pk} + \alpha_i \mathbf{R}_{pk} \mathbf{A}_{ij} & -\mathbf{R}_{pk} - \mathbf{R}'_{pk} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e $\alpha \in \mathcal{M}$ definido como o índice de conjuntos convexos mostrado no Capítulo 2.

Demonstração: Sejam as LMIs (4.5)-(4.12) factíveis com $\alpha \in \mathcal{M}$ então multiplicando (4.5) por $h_{\beta k}^2$, (4.6) por $h_{\beta k} h_{ij}$, (4.7) por $h_{\beta k} h_{\beta j}$, (4.8) por h_{pk}^2 , (4.9) e (4.11) por $h_{pk} h_{ij}$, (4.10) por $h_{pk} h_{pj}$, (4.12) por $h_{\beta k} h_{ij}$ e adicionando todos os termos, tem-se

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in (\mathcal{R}_\beta - \mathcal{G}_\beta)} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{G}_i} h_{\beta k} h_{ij} (\Upsilon_{\beta k_ij} + \mathbf{Q}_\alpha) + \sum_{k \in \mathcal{G}_\beta} \sum_{\substack{j \in \mathcal{G}_\beta \\ j < k}} h_{\beta k} h_{\beta j} (\Upsilon_{\beta k_ \beta j} + \Upsilon_{\beta j_ \beta k} + 2\mathbf{Q}_\alpha) \\
& + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq \beta}}^N \sum_{k \in \mathcal{G}_p} h_{pk}^2 \left(\Upsilon_{pk_pk} - \frac{1}{N-1} \mathbf{Q}_\alpha \right) + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq \beta}}^N \sum_{k \in (\mathcal{R}_p - \mathcal{G}_p)} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{G}_i} h_{pk} h_{ij} \left(\Upsilon_{pk_ij} - \frac{1}{N-1} \mathbf{Q}_\alpha \right) \\
& + \sum_{k \in \mathcal{G}_\beta} h_{\beta k}^2 (\Upsilon_{\beta k_ \beta k} + \mathbf{Q}_\alpha) + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq \beta}}^N \sum_{k \in \mathcal{G}_p} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \beta}}^N \sum_{\substack{j \in \mathcal{G}_i \\ i > p}} h_{pk} h_{ij} \left(\Upsilon_{pk_ij} + \Upsilon_{ij_pk} - \frac{2}{N-1} \mathbf{Q}_\alpha \right) \\
& + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq \beta}}^N \sum_{k \in \mathcal{G}_p} \sum_{\substack{j \in \mathcal{G}_p \\ j < k}} h_{pk} h_{pj} \left(\Upsilon_{pk_pj} + \Upsilon_{pj_pk} - \frac{2}{N-1} \mathbf{Q}_\alpha \right) \\
& + \sum_{k \in \mathcal{G}_\beta} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \beta}}^N \sum_{j \in \mathcal{G}_i} h_{\beta k} h_{ij} \left(\Upsilon_{\beta k_ij} + \Upsilon_{ij_ \beta k} + \frac{N-2}{N-1} \mathbf{Q}_\alpha \right) \\
& = \left(\sum_{p=1}^N \sum_{k \in \mathcal{G}_p} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{G}_i} h_{pk} h_{ij} \Upsilon_{pk_ij} \right. \\
& + \left. \left\{ \left(\sum_{k=1}^{r_\beta} h_{\beta k} \right) - \frac{1}{N-1} \left(\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq \beta}}^N \sum_{k=1}^{r_p} h_{pk} \right) \right\} \left(\sum_{p=1}^{r_p} \sum_{k \in \mathcal{G}_p} h_{pk} \right) \mathbf{Q}_\alpha \right\} < 0,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Representando (2.15) em (4.13) tem-se que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}(h) \mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{A}(\alpha, h)' \mathbf{L}(h)' & \star \\ \mathbf{P}(h) - \mathbf{L}(h)' + \mathbf{R}(h) \mathbf{A}(\alpha, h) & -\mathbf{R}(h) - \mathbf{R}(h)' \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{4.14}$$

em que $\mathbf{L}(h) = \sum_{p=1}^N \sum_{k \in \mathcal{G}_p} h_{pk} \mathbf{L}_{pk}$, $\mathbf{R}(h) = \sum_{p=1}^N \sum_{k \in \mathcal{G}_p} h_{pk} \mathbf{R}_{pk}$ e $\mathbf{A}(\alpha, h) = \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \alpha_p h_{pk} \mathbf{A}_{pk}$.

Pré-multiplicando e pós-multiplicando a LMI (4.14) pelo vetor $[x' \ x' \mathbf{A}(\alpha, h)']$ e seu transposto, respectivamente, segue que

$$x' \left\{ \mathbf{A}(\alpha, h)' \mathbf{P}(h) + \mathbf{P}(h) \mathbf{A}(\alpha, h) \right\} x < \mathbf{0}. \tag{4.15}$$

Como a derivada da função (4.3) ao longo das trajetórias do sistema (4.1) é dada por

$$\dot{V}(x) = x' \left\{ \sum_{p=1}^N \sum_{k \in \mathcal{G}_p} \dot{h}_{pk} \mathbf{P}_{pk} + \mathbf{A}(\alpha, h)' \mathbf{P}(h) + \mathbf{P}(h) \mathbf{A}(\alpha, h) \right\} x \tag{4.16}$$

então, conclui-se de (4.15) que $x' \left\{ \sum_{p=1}^N \sum_{k \in \mathcal{G}_p} \dot{h}_{pk} \mathbf{P}_{pk} \right\} x$ é o único termo que pode tornar (4.16) positiva, assim $C_\alpha \subseteq D$, com C_α definido na seção anterior. Uma vez que o conjunto $D \subset \Omega_L$, então existe $\ell \in \mathbb{R}$ tal que $\sup_{x \in C_\alpha} V(x) < \ell \leq L < \infty$. Portanto,

pelo Teorema 3.4 toda solução limitada $\varphi(t, x_0)$ de (2.1) com $x_0 \in \mathcal{X}$, possuindo um chaveamento dwell-time em Ω_ℓ e uma lei de chaveamento $\sigma(x)$ satisfazendo (3.9) para todo t enquanto $x(t) \in \overline{\Omega}_\ell^c$, é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ . $\square$

Observação 4.1 No Teorema 4.1, se Ω_L é limitado e $\Omega_\ell \subset \Omega_L$, então toda solução $\varphi(t, x_0)$ de (2.1) com $x_0 \in \Omega_L$, possuindo um chaveamento dwell-time em Ω_ℓ e uma lei de chaveamento $\sigma(x)$ satisfazendo (3.9) para todo t enquanto $x(t) \in \overline{\Omega}_\ell^c$, é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ . Portanto, Ω_ℓ e Ω_L são estimativas do atrator e sua respectiva área de atração, respectivamente.

Exemplo 4.1 Considera-se o sistema (4.1) com os seguintes modelos fuzzy T-S:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_{22} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.17)$$

e funções de pertinência

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{10}, & h_{12} &= 1 - h_{11}, \\ h_{21} &= \frac{x_1^2}{25}, & h_{22} &= 1 - h_{21} \end{aligned} \quad (4.18)$$

no conjunto $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 5 \text{ e } |x_2| \leq 5\}$. Usando MATLAB toolboxes YALMIP (LÖFBERG, 2004) e SeDuMi (STURM, 1999) para resolver (4.5)-(4.12) com parâmetros $\alpha_1 = 0.8$, $\alpha_2 = 0.2$ e $\beta = 1$ para todo $p \in \mathcal{P}$ e $k \in \mathcal{R}_p$, obtêm-se as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{11} &= - \begin{bmatrix} 1.0308 & 0.0025 \\ 0.0025 & 1.2732 \end{bmatrix}, & \mathbf{P}_{12} &= \begin{bmatrix} 0.3747 & 0.0077 \\ 0.0077 & 0.1266 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_{21} &= \begin{bmatrix} -0.7765 & 0.0049 \\ 0.0049 & -0.5276 \end{bmatrix}, & \mathbf{P}_{22} &= \begin{bmatrix} 0.8969 & 0.0244 \\ 0.0244 & 0.3155 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Seja $\mathcal{G}_1 = \{2\}$ and $\mathcal{G}_2 = \{2\}$, então

$$\begin{aligned} \dot{h}_{12} &= \frac{x_1^2(-0.2 - 0.08x_1x_2) - 0.8x_2^2(x_1^2 + x_2^2 - 2.5)}{5} \\ \dot{h}_{22} &= \frac{-0.4x_1^2}{25}, \end{aligned}$$

assim, $D = \{x \in \mathcal{X} : x_1^2 + x_2^2 \leq \sqrt{2.5}\}$. Através de testes numéricos pode-se verificar que com $L = 0.2$ tem-se que $D \subset \Omega_\ell \subset \mathcal{X}$ (Figura 4.2(a)) com $L = \ell$. Portanto, pelo Teorema 4.1, toda solução limitada $\varphi(t, x_0)$ de (2.1) com $x_0 \in \mathcal{X}$, possuindo um chaveamento dwell-time em Ω_ℓ e uma lei de chaveamento $\sigma(x)$ satisfazendo (3.9) para $x \in \overline{\Omega}_\ell^c$, é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ . A Figura 4.1(a) ilustra

a solução chaveada para $x_0 = [-2 \ 2]$, a Figura 4.1(b) mostra o chaveamento $\sigma(t)$ e a Figura 4.2(b) mostra que a função V não cresce fora de Ω_ℓ com $\ell = 0.2$. Esta simulação confirma o resultado do Teorema 4.1 por mostrar que a solução é atraída para um conjunto fracamente invariante de Ω_ℓ , o qual foi obtido numericamente para $\ell = 0.2$ (Figura 4.2(a)).

Figura 4.1 – (a) Solução chaveada com condição inicial $x_0 = [-2 \ 2]$ para o Exemplo 4.1 (b) chaveamento $\sigma(t)$ para o Exemplo 4.1.

Figura 4.2 – (a) Plano de fase com $x_0 = [-2 \ 2]$ para o Exemplo 4.1 (b) função V ao longo da solução do sistema chaveado para o Exemplo 4.1.

Para alguns sistemas, as LMIs apresentadas no resultado anterior podem não ser factíveis, logo nada pode-se concluir sobre o comportamento assintótico da solução do sistema chaveado através do Teorema 4.1. Portanto, com o intuito de estudar alguns desses sistemas que não podem ser analisados com o resultado anterior, a próxima seção, apresenta condições suficientes para o estudo do comportamento assintótico da solução de sistemas chaveados, com subsistemas realimentados, em termos de desigualdades matriciais lineares.

4.2 Resultados Obtidos para Subsistemas Representados por Modelos Fuzzy T-S Realimentados

Agora, considera-se o sistema (3.4), com cada subsistema f_p descrito por um modelo fuzzy T-S da forma (2.18), isto é:

$$\dot{x} = \sum_{p=1}^N \alpha_p \left(\sum_{k=1}^{r_p} \sum_{j=1}^{r_p} h_{pk} h_{pj} \left(\mathbf{A}_{pk} + \mathbf{B}_{pk} \mathbf{K}_{pj} \right) x \right), \quad \forall p \in \mathcal{P}, \quad (4.20)$$

$$x(0) = x_0. \quad (4.21)$$

Seguindo os mesmos passos da demonstração do Teorema 4.1, o objetivo agora é obter condições suficientes em termos de LMIs para a existência de matrizes $\mathbf{K}_{pk} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $p \in \mathcal{P}$ e $k \in \mathcal{R}_p$, que torna possível a análise do comportamento assintótico da solução do sistema chaveado (2.1).

Teorema 4.2 *Considere o sistema chaveado (2.1) com cada f_p representado por um modelo fuzzy T-S da forma (2.18) em $\mathcal{X}$ e números reais $\mu > 0$ e $\alpha \in \mathcal{M}$. Se existe um subconjunto $\mathcal{G}_p$ de forma que (4.4) seja satisfeita e se existem matrizes $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Y}_{pj} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $\mathbf{X}_{pk} = \mathbf{X}'_{pk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo (4.22)-(4.25) com ganhos locais $\mathbf{K}_{pj} = \mathbf{Y}_{pj} \mathbf{W}^{-1}$, então existe $\ell \leq L$ tal que toda solução limitada $\varphi(t, x_0)$ de (2.1) com $x_0 \in \mathcal{X}$, possuindo um chaveamento dwell-time em Ω_ℓ e uma lei de chaveamento $\sigma(x)$ satisfazendo (3.9) para todo t enquanto $x(t) \in \overline{\Omega}_\ell^c$, é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ .*

$$\Psi_{\beta k _ \beta k} + \mathbf{Z} < \mathbf{0}, \quad k \in \mathcal{R}_\beta \quad (4.22)$$

$$\Psi_{\beta k _ \beta j} + \Psi_{\beta j _ \beta k} + 2\mathbf{Z} < \mathbf{0}, \quad k, j \in \mathcal{R}_\beta, \quad k < j \quad (4.23)$$

$$\Psi_{pk _ pk} - \frac{1}{(N-1)} \mathbf{Z} < \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{P} - \{\beta\}, \quad k \in \mathcal{R}_p \quad (4.24)$$

$$\Psi_{pk _ pj} + \Psi_{pj _ pk} - \frac{2}{(N-1)} \mathbf{Z} < \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{P} - \{\beta\}, \quad k, j \in \mathcal{R}_p, \quad k < j \quad (4.25)$$

em que

$$\Psi_{pk _ pj} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha_p (\mathbf{A}_{pk} \mathbf{W} + \mathbf{W}' \mathbf{A}'_{pk} + \mathbf{B}_{pk} \mathbf{Y}_{pj} + \mathbf{Y}'_{pj} \mathbf{B}'_{pk}) & \star \\ \mathbf{X}_{pj} - \mathbf{W}' + \mu \alpha_p (\mathbf{A}_{pk} \mathbf{W} + \mathbf{B}_{pk} \mathbf{Y}_{pj}) & -\mu (\mathbf{W} + \mathbf{W}') \end{bmatrix}, & \text{se } j \in \mathcal{G}_p, \\ \begin{bmatrix} \alpha_p (\mathbf{A}_{pk} \mathbf{W} + \mathbf{W}' \mathbf{A}'_{pk} + \mathbf{B}_{pk} \mathbf{Y}_{pj} + \mathbf{Y}'_{pj} \mathbf{B}'_{pk}) & \star \\ -\mathbf{W}' + \mu \alpha_p (\mathbf{A}_{pk} \mathbf{W} + \mathbf{B}_{pk} \mathbf{Y}_{pj}) & -\mu (\mathbf{W} + \mathbf{W}') \end{bmatrix}, & \text{se } j \in \mathcal{R}_p - \mathcal{G}_p. \end{cases}$$

Demonstração: Se as LMIs (4.22)-(4.25) são factíveis, então, multiplicando (4.22) por $h_{\beta k}^2$, (4.23) por $h_{\beta k} h_{\beta j}$, (4.24) por h_{pk}^2 , (4.25) por $h_{pk} h_{pj}$ e adicionando todos os termos obtêm-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\alpha, h) \mathbf{W} + \mathbf{W}' \mathbf{A}(\alpha, h)' + \mathbf{B}_Y(\alpha, h) + \mathbf{B}_Y(\alpha, h)' & \star \\ \mathbf{X}(h) - \mathbf{W}' + \mu (\mathbf{A}(\alpha, h) \mathbf{W} + \mathbf{B}_Y(\alpha, h)) & -\mu (\mathbf{W} + \mathbf{W}') \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (4.26)$$

em que $\mathbf{B}_Y(\alpha, h) = \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \sum_{j=1}^{r_p} \alpha_p h_{pk} h_{pj} \mathbf{B}_{pk} \mathbf{Y}_{pj}$, $\mathbf{X}(h) = \sum_{p=1}^N \sum_{k \in \mathcal{G}_p} h_{pk} \mathbf{X}_{pk}$ e $\mathbf{A}(\alpha, h)$ como já definido na seção anterior. Aplicando a matriz de transformação

$$\mathbf{B}_Y(\alpha, h) = \left(\sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \sum_{j=1}^{r_p} \alpha_p h_{pk} h_{pj} \mathbf{B}_{pk} \mathbf{K}_{pj} \right) \mathbf{W} = \mathbf{B}_K(\alpha, h) \mathbf{W} \quad (4.27)$$

e pré multiplicando e pós multiplicando (4.26) por $\begin{bmatrix} \mathbf{W}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}^{-1} \end{bmatrix}'$ e sua transposta, respectivamente, tem-se

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{W}')^{-1} \left(\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h) \right) + \left(\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h) \right)' \mathbf{W}^{-1} & \star \\ \mathbf{P}(h) - \mathbf{W}^{-1} + \mu (\mathbf{W}')^{-1} \left(\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h) \right) & -\mu \left(\mathbf{W}^{-1} + (\mathbf{W}')^{-1} \right) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (4.28)$$

em que $\mathbf{P}(h) = (\mathbf{W}')^{-1} \mathbf{X}(h) \mathbf{W}^{-1}$. Então, pré multiplicando e pós multiplicando (4.28) pelo vetor $\begin{bmatrix} x' & x' \left(\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h) \right)' \end{bmatrix}$ e seu transposto, respectivamente, segue que

$$x' \left[\left(\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h) \right)' \mathbf{P}(h) + \mathbf{P}(h) \left(\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h) \right) \right] x < \mathbf{0} \quad (4.29)$$

a qual é equivalente a (4.15) ao longo das trajetórias do sistema chaveado fuzzy T-S (4.20). Portanto, do Teorema 4.1, toda solução limitada $\varphi(t, x_0)$ com $x_0 \in \mathcal{X}$, possuindo um chaveamento *dwell-time* em Ω_ℓ e uma lei de chaveamento $\sigma(x)$ satisfazendo (3.9) para todo t enquanto $x(t) \in \bar{\Omega}_\ell^c$, com ganhos $\mathbf{K}_{pj} = \mathbf{Y}_{pj} \mathbf{W}^{-1}$, é atraída para o maior conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ . $\square$

O Teorema 4.2 apresenta LMIs menos conservadoras do que as apresentadas no Teorema 4.1. Contudo, a propriedade a ser analisada do conjunto D , depende dos ganhos $\mathbf{K}_{pj}$, os quais são obtidos pela solução das LMIs (4.22)-(4.25). Portanto, o Teorema 4.2 pode não ser capaz de estudar o comportamento assintótico da solução do sistema chaveado. Mas, mesmo assim, pode-se garantir uma área de atração B_A para o sistema, como mostra o próximo resultado.

Corolário 4.1 *Sejam $\mathbf{P}_{pk}$ e $\mathbf{K}_{pj}$, com $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathcal{G}_p$ e $j \in \mathcal{R}_p$, soluções do Teorema 4.2. Então, existe um número real positivo ϕ , com $\Omega_\phi \subset \mathcal{X}$, tal que toda solução limitada $\varphi(t, x_0)$ com $x_0 \in \Omega_\phi$, é atraída para a origem através da lei de chaveamento (3.9).*

Demonstração: Sejam $\mathbf{P}_{pk}$ e $\mathbf{K}_{pj}$ soluções do Teorema 4.2, logo (4.29) é satisfeita. Então, existe um número real $\eta > 0$ suficientemente pequeno como em Guerra et al. (2012), tal que

$$\left(\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h) \right)' \mathbf{P}(h) + \mathbf{P}(h) \left(\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h) \right) + \eta \mathbf{I} < \mathbf{0}. \quad (4.30)$$

Então, para todo $x \in \Psi = \left\{ x \in \mathcal{X} : x' \left(\sum_{p=1}^N \sum_{k \in \mathcal{G}_p} \dot{h}_{pk} \mathbf{P}_{pk} - \eta \mathbf{I} \right) x \leq 0 \right\}$, a derivada de V ao longo da solução do sistema (4.20) é negativa. Pela Proposição 3.1, existe pelo menos um $p \in \mathcal{P}$ tal que a derivada de V ao longo da solução do subsistema p é negativa. Seja $\phi > 0$ tal que $\Omega_\phi \subseteq \Psi$, então qualquer solução $\varphi(t, x_0)$ com $x_0 \in \Omega_\phi$, através do chaveamento $\sigma(x)$ (3.9) satisfaz $V(\varphi(t, x_0)) \leq V(0, x_0)$, para todo $t \geq 0$, e ainda $\varphi(t, x_0) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. $\square$

Observação 4.2 Se Ω_ϕ é limitado, então as conclusões do Corolário 4.1 podem ser obtidas para qualquer solução $\varphi(t, x_0)$ através da lei de chaveamento (3.9).

A eficiência do Teorema 4.2 e Corolário 4.1 é ilustrada no próximo exemplo.

Exemplo 4.2 Considere o sistema (4.20) com os seguintes modelos fuzzy T-S

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_{11} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_{12} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 100 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_{21} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_{22} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_{22} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

e funções de pertinência

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{8}, & h_{12} &= 1 - h_{11}, \\ h_{21} &= \frac{x_1^2}{4}, & h_{22} &= 1 - h_{21} \end{aligned} \quad (4.32)$$

no conjunto $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 2 \text{ and } |x_2| \leq 2\}$. Assumindo $\mathcal{G}_1 = \{2\}$, $\mathcal{G}_2 = \{1\}$ e usando MATLAB para resolver (4.22)-(4.25) com parâmetros $\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = 0.6$, $\mu = 0.01$ e $\beta = 1$, obtêm-se as seguintes matrizes:

$$\mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} 0.38 & -0.48 \\ -0.48 & 0.95 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{21} = \begin{bmatrix} 0.37 & -0.42 \\ -0.42 & 0.82 \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= \begin{bmatrix} 139.36 & -3.56 \end{bmatrix}, & \mathbf{K}_{12} &= \begin{bmatrix} 144.76 & 4.89 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{21} &= \begin{bmatrix} 14.71 & -287.84 \end{bmatrix}, & \mathbf{K}_{22} &= \begin{bmatrix} 4.72 & -141.10 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

O conjunto D do sistema (4.20) com modelos locais (4.31), funções de pertinência (4.32) e ganhos (4.34) é mostrado na Figura 4.3.

Pela Figura 4.3, o conjunto $D \not\subset \mathcal{X}$ (região marcada com pontos vermelhos). Assim, o Teorema 4.2 não pode ser usado para assegurar a existência de um conjunto invariante dentro de $\mathcal{X}$. Contudo, pelo Corolário 4.1, tem-se que existe um número real positivo ϕ tal que, toda solução $\varphi(t, x_0)$ com $x_0 \in \Omega_\phi$ através do chaveamento (3.9) é atraída para a

Figura 4.3 – Conjunto D com ganhos (4.34). Figura 4.4 – (a) Conjunto Ψ (região pontilhada), conjunto de nível Ω_ϕ , e solução $\varphi(t, x_0)$ para $\eta = 0.67$, $\phi = 0.6$ e $x_0 = [1.6 \ 1.1]'$, (b) solução chaveada com condição inicial $x_0 = [1.6 \ 1.1]$ para o Exemplo 4.2.

origem. A Figura 4.4(a) mostra o conjunto Ψ e Ω_ϕ com $\eta = 0.67$ e $\phi = 0.6$, e a solução $\varphi(t, x_0)$ através da lei de chaveamento (3.9) com $x_0 = [1.6 \ 1.1]'$.

A Figura 4.4(a) mostra a solução $\varphi(t, x_0)$ sendo atraída para a origem. Mais ainda, $\varphi(t, x_0)$ não escapa do conjunto Ω_ϕ com $\phi = 0.6$, mostrando a eficiência do Corolário 4.1. Infelizmente, não há um caminho definido para obter os parâmetros η e ϕ . Neste exemplo os valores $\eta = 0.67$ e $\phi = 0.6$ foram obtidos através de testes.

Para a condição inicial $x_0 = [1.6 \ 1.1]'$, a simulação no domínio de tempo do sistema chaveado (2.1) com ganhos (4.34), a lei de chaveamento $\sigma(x)$ dado por (3.9) e função (4.3) com matrizes (4.33), podem ser vistas em Figuras 4.4(a)-4.5(a), respectivamente.

Pela Figura 4.5(b), a função (4.3) ao longo da trajetória do sistema chaveado (2.1) é positiva e decrescente, e portanto, é uma função de Lyapunov para o sistema. Esta não é necessariamente uma condição para o Teorema 4.2 e o Corolário 4.1 pois não é imposto que as matrizes $\mathbf{X}_{pk}$, $p \in \mathcal{P}$, $k \in \mathcal{G}_p$ sejam definidas positivas.

Figura 4.5 – (a) Chaveamento $\sigma(t)$ para o Exemple 4.2, (b) função $V(x(t))$ ao longo da solução do sistema chaveado para o Exemple 4.2.

Conclusões e Proposta de Trabalhos Futuros

Neste trabalho, foi obtida uma extensão do princípio de invariância para sistemas chaveados contínuos no tempo através de uma função auxiliar comum e múltiplas funções auxiliares. As principais características desse resultado são que as derivadas das funções auxiliares podem assumir valores positivos em alguns subconjuntos do espaço de estado e os subsistemas não precisam compartilhar pontos de equilíbrios comuns. Estimativas de atratores e áreas de atração também foram obtidas para sistemas chaveados com subsistemas ultimamente limitados. Quando o resultado foi obtido através da análise de um sistema auxiliar, formado pela combinação convexa dos subsistemas, então estas estimativas passaram a ser encontradas mesmo na presença de subsistemas que não são ultimamente limitados. Este último resultado garante a existência da solução limitada de Krasovskii do sistema chaveado para todo tempo, mesmo quando um chaveamento rápido ocorre, devida a escolha de chaveamento ser mensurável.

Finalmente, cada subsistema foi representado por um modelo fuzzy T-S e então o comportamento assintótico da solução do sistema chaveado pôde ser analisada apenas verificando propriedades sobre o conjunto dos pontos onde a derivada assume valores positivos e a factibilidade de um conjunto de LMIs.

Este trabalho servirá de referência para vários outros estudos. Então, propõe-se como trabalho futuro:

1. Obter uma extensão do Teorema 3.4 através de múltiplas funções auxiliares, a qual estuda o comportamento assintótico das soluções de sistemas chaveados. Este resultado pode ser obtido usando as mesmas ideias do Teorema 2.6 em

Colaneri, Geromel e Astolfi (2008), considerando o conjunto $C_p = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V_p f_p + \sum_{k=1}^N \pi_{kp} V_k \geq 0\}$, e $C = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} C_p$. Note que, a lei de chaveamento

$$\sigma(x) = \min \left(\arg \min_{p \in \mathcal{P}} V_p(x(t)) \right)$$

é mensurável, o que faz com que a derivada decresça ao longo da solução de Krasovskii do sistema chaveado fora do conjunto C . Desta forma, a solução será atraída para um conjunto fracamente invariante em $\Omega_\ell = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \ell\}$ com $\ell < \sup_{x \in C} V(x)$.

Referências

ALBERTO, L. F. C.; CALLIERO, T. R.; MARTINS, A. C. P. An invariance principle for nonlinear discrete autonomous dynamical systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2007. v. 52, n. 4, p. 692–697, 2007.

ARRIFANO, N. S. D. et al. Fuzzy stabilization of power systems in a co-generation scheme subject to random abrupt variations of operating conditions. **IEEE Transactions on Control System Technology**, 2007. v. 15, n. 2, p. 384–393, 2007.

BACCIOTTI, A. **On several notions of generalized solutions for discontinuous differential equations and their relationships**. 2003. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.108.593rep=rep1type=pdf>>. Acesso em: 02-09-2013.

_____. Stabilization by means of state space depending switching rules. **Systems & Control Letters**, 2004. v. 53, n. 3-4, p. 195–201, 2004.

BACCIOTTI, A.; CERAGIOLI, F. Stability and stabilization of discontinuous systems and nonsmooth Lyapunov functions. **ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations**, 1999. v. 4, n. 1, p. 361–376, 1999.

BACCIOTTI, A.; MAZZI, L. An invariance principle for nonlinear switched systems. **Systems & Control Letters**, 2005. v. 54, n. 11, p. 1109–1119, 2005.

_____. From artstein-sontag theorem to the min-projection strategy. **Transactions of the Institute of Measurement & Control**, 2010. v. 32, n. 6, p. 571–581, 2010.

BENZAOUIA, A. E. H. A.; TADEO, F. Stabilization of switching Takagi-Sugeno systems by switched Lyapunov function. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, 1999. v. 25, n. 12, p. 1039–1049, 1999.

BRANICKY, M. S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1998. v. 43, n. 4, p. 475–482, 1998.

CABRAL, M. A. P. **Introdução a Teoria de Medida e Integral de Lebesgue**. Rio de Janeiro: Notas de aula, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.

- CHIOU, J.-S. et al. Analysis and synthesis of switched nonlinear systems using the (T-S) fuzzy model. **Applied Mathematical Modelling**, 2010. v. 34, n. 6, p. 1467 – 1481, 2010.
- COLANERI, P.; GEROMEL, J. C.; ASTOLFI, A. Stabilization of continuous-time switched nonlinear systems. **Systems & Control Letters**, 2008. v. 1, n. 57, p. 95–103, 2008.
- DEAECTO, G. et al. Switched affine systems control design with application to DC-DC converters. **Control Theory Applications**, 2010. v. 4, n. 7, p. 1201 –1210, 2010.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C. Controle de sistemas lineares com comutação. **Revista Controle & Automação**, 2008. v. 19, n. 4, p. 431–443, 2008.
- DOERING, C. I.; LOPES, A. O. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitário, IMPA, 2007.
- FARIA, F. A.; SILVA, G. N.; OLIVEIRA, V. A. Reducing the conservatism of LMI-based stabilization conditions for TS fuzzy systems using fuzzy Lyapunov functions. **International Journal of Systems Science**, 2013. v. 44, n. 10, p. 1956–1969, 2013.
- FARIA, F. A.; VALENTINO, M. C.; OLIVEIRA, V. A. Stabilizing switched T-S fuzzy systems using a fuzzy Lyapunov function approach. In: **12th European Control Conference**. Zurich: Proceedings of the 12th European Control Conference, 2013. p. 4305–4310.
- FILIPPOV, A. F. **Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988.
- GUERRA, T. M. et al. Non-quadratic local stabilization for continuous-time takagisugeno models. **Fuzzy Sets and Systems**, 2012. v. 201, n. 0, p. 40 – 54, 2012.
- HALE, J. K.; KOÇAK, H. **Dynamics and Bifurcations**. New York: Springer Verlag, 1991.
- HESPANHA, J. P. Uniform stability of switched linear systems: Extensions of LaSalle’s invariance principle. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2004. v. 49, n. 4, p. 470–482, 2004.
- KRASOVSKI, N. N. **Some Problems of Theory of Stability of Motion**. Dissertação (Mestrado) — Translation of the Russian edition, Moscow, 1959.
- LASALLE, J. P. Some extensions of Liapunov’s second method. **IRE Transactions on Circuit Theory**, 1960. v. 7, n. 1, p. 520–527, 1960.
- LEE, D. H.; PARK, J. B.; JOO, Y. H. A fuzzy Lyapunov function approach to estimating the domain of attraction for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems. **Information Sciences**, 2012. v. 185, n. 1, p. 230–248, 2012.
- LETH, J.; WISNIEWSKI, R. On formalism and stability of switched systems. **Journal of Control Theory and Applications**, 2011. v. 9, n. 1, p. 123–130, 2011.
- LEVINE, W. S. **The Control Handbook**. Dallas: CRC Press, 2010.

- LI, S.; YANG, H.; ZHANG, L. Slack stability analysis of a class of switched fuzzy systems. In: **Control and Decision Conference**. Guilin: Control and Decision Conference, 2009. CCDC '09. Chinese, 2009. p. 6100–6104.
- LIBERZON, D. **Switching in Systems and Control**. Boston: Birkhäuser, 2003.
- LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: **Proceedings of the Computer Aided Control Systems Design Conference**. Taipei: IEEE International Symposium on, 2004. p. 284–289.
- MANCILLA-AGUILAR, J.; GARCÍA, R. An extension of LaSalle's invariance principle for switched systems. **Systems & Control Letters**, 2006. v. 55, n. 5, p. 376–384, 2006.
- MOZELLI, L. A. **Novas funções de Lyapunov e soluções numéricas para análise de estabilidade e controle de sistemas Takagi-Sugeno: aproximando os controles fuzzy e não-linear**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.
- MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M.; AVELLAR, G. S. C. A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems. **Information Sciences**, 2009. v. 179, n. 8, p. 1149–1162, 2009.
- NICHOLS, R. A.; REICHERT, R. T.; RUGH, W. J. Gain scheduling for h-infinity controllers: A flight control example. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, 1993. v. 1, p. 69–79, 1993.
- OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: MOHEIMANI, R. (Ed.). **Perspectives in Robust Control, Lecture Notes in Control and Information Science**. New York: Springer, 2001. v. 268, p. 241–257.
- RABELO, M. N.; ALBERTO, L. F. C. An extension of the invariance principle for a class of differential equations with finite delay. **Advances in Difference Equations**, 2010. n. 1, p. 1 – 14, 2010.
- RINEHART, M. et al. Suboptimal control of switched systems with an application to the disc engine. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, 2008. v. 16, n. 2, p. 189 – 201, 2008.
- RODRIGUES, H. M.; ALBERTO, L. F. C.; BRETAS, N. G. On the invariance principle. generalizations and applications to synchronism. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, 2000. v. 47, n. 5, p. 730–739, 2000.
- _____. Um princípio de invariância uniforme: Robustez com relação à variação de parâmetros. **Revista da Sociedade Brasileira de Automática**, 2002. v. 13, n. 1, p. 51–67, 2002.
- RUDIN, W. **Principle of Mathematical Analysis**. New York: McGrall-Hill International Editions, 1976.
- RUGH, W. J.; SHAMMA, J. S. Research on gain scheduling. **Automatica**, 2000. v. 36, n. 10, p. 1401 – 1425, 2000. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109800000583>>.

- SHEVITZ, D.; PADEN, B. Lyapunov stability theory of nonsmooth systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1994. v. 39, n. 9, p. 1910–1914, 1994.
- SILVEIRA, D. A. R. da. **Equações diferenciais descontínuas e inclusões diferenciais**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Aveiro, Aveiro, 2009.
- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization Methods and Software**, 1999. v. 11–12, p. 625–653, 1999.
- SUGENO, M.; KANG, G. T. Structure identification of fuzzy model. **Fuzzy Sets and Systems**, 1988. v. 28, n. 7, p. 15–33, 1988.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, 1985. New York, v. 15, n. 1, p. 116–132, 1985.
- TANAKA, K.; WANG, H. O. **Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach**. New York: John Wiley and Sons, 2001.
- TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Selective and stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, 2011. v. 19, n. 5, p. 890–900, 2011.
- VALENTINO, M. C.; FARIA, F. A.; OLIVEIRA, V. A. Análise de estabilidade de sistemas fuzzy T-S chaveados usando uma função de Lyapunov fuzzy. In: **XIX Congresso Brasileiro de Automática, CBA**. Campina Grande: Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática, 2012. p. 3394–3399.
- VALENTINO, M. C. et al. An extension of the invariance principle for dwell-time switched nonlinear systems. **Systems & Control Letters**, 2012. v. 61, n. 4, p. 580–586, 2012.
- _____. An extension of the invariance principle for switched nonlinear systems. In: **50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference CDC-ECC**. Orlando: 50th IEEE Conference on, 2011. p. 1178–1182.
- WANG, M. et al. Stabilization of switched nonlinear systems using multiple Lyapunov function method. In: **American Control Conference, ACC**. St. Louis-Missouri: Proceedings of the 2009 American Control Conference, 2009. p. 1778–1782.
- XIE, D.; WU, Y. Stabilisation of time-delay switched systems with constrained switching signals and its applications in networked control systems. **Control Theory Applications**, 2010. v. 4, n. 10, p. 2120–2128, 2010.
- YANG, H.; DIMIROVSKI, G. M.; ZHAO, J. Switched fuzzy systems: Representation modelling, stability analysis, and control design. In: **International IEEE Conference Intelligent Systems**. London: Proceedings of the 3rd International IEEE Conference Intelligent Systems, 2006. p. 306–311.
- _____. Switched fuzzy systems: Representation modelling, stability analysis, and control design. In: **Intelligent techniques and tools for novel system architectures**. Heidelberg: Springer Berlin, 2008, (Studies in Computational Intelligence, v. 109). p. 155–168.