Amanda Liz Pacífico Manfrim

Sistemas Lineares Singulares Sujeitos a Saltos Markovianos

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências, Programa de Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Sistemas Dinâmicos
Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra
Co-Orientador: Prof. Dr. Eduardo Fontoura Costa

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

M276s Manfrim, Amanda Liz Pacífico
 Sistemas lineares singulares sujeitos a saltos
Markovianos / Amanda Liz Pacífico Manfrim ; orientador
Marco Henrique Terra, co-orientador Eduardo Fontoura
Costa. -- São Carlos, 2010.

 Tese (Doutorado-Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas
Dinâmicos) -- Escola de Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo, 2010.

 1. Estabilidade de Lyapunov. 2. Sistemas
singulares. 3. Sistemas sujeitos a saltos Markovianos.
4. Regularidade. 5. Regulador linear quadrático.
I. Costa, Eduardo Fontoura. II. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato(a): Licenciada AMANDA LIZ PACÍFICO MANFRIM.

Tese defendida e julgada em 08.10.2010 perante a Comissão Julgadora:

Prof. Associado **MARCO HENRIQUE TERRA – (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) aprovado

Prof. Associado **EDUARDO FONTOURA COSTA – (Co-orientador)**
(Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação/USP) aprovada

Prof. Dr. **JOÃO YOSHIYUKI ISHIHARA**
(Universidade de Brasília/UnB) aprovada

Prof. Dr. **JOÃO BOSCO RIBEIRO DO VAL**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP) aprovada

Prof. Titular **OSWALDO LUIZ DO VALLE COSTA**
(Escola Politécnica/USP) Aprovada

Prof. Titular **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Dedico este trabalho aos meus pais, José e Kátia, e ao meu noivo, Leonardo, a base sólida das minhas conquistas, por suportarem minha ausência, por todo esforço, apoio e dedicação incomensuráveis, pelas inúmeras vezes terem me mostrado que este sonho era possível e por terem me concedido, sempre, a preciosa oportunidade de realizar-me cada vez mais nos estudos.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marco Henrique Terra, meus sinceros agradecimentos pelo empenho e dedicação demonstrados, pela competência, pelo incentivo, simpatia e presteza no auxílio às atividades e pelas valiosas discussões durante o andamento da pesquisa, pelo auxílio no desenvolvimento desta Tese e pela amizade a qual me mostrou o respeito pela minha caminhada no mundo científico. Ao Prof. Dr. Eduardo Fontoura Costa pela imprescindível co-orientação dispendida, pelo contínuo apoio em todas as fases de realização deste trabalho, pelas discussões críticas que tanto contribuíram para o meu crescimento intelectual e pessoal, pela amizade que pude desfrutar e por constituir um exemplo de pesquisador. Ao Prof. Dr. João Yoshiyuki Ishihara pela competência, pela atenção e pelas proveitosas sugestões para com a pesquisa.

A instituição Universidade de São Paulo em São Carlos por toda a infraestrutura oferecida. A todos os professores pela dedicação e entusiasmo demonstrado ao longo das disciplinas que cursei e aos demais funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica da USP de São Carlos que de alguma forma, direta ou indiretamente, contribuíram com o trabalho. Aos colegas do Laboratório de Sistemas Inteligentes - LASI, em especial Aline, Daniel, Darby, Gildson, Igor, João Paulo, Miguel, Roberto, Samuel, Tatiana e Tubota, pela recepção, pelos bons momentos que passamos juntos e pela espontaneidade na troca de informações e materiais numa grandiosa demonstração de amizade. À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pela bolsa concedida à este trabalho. A todos aqueles que através de uma simples sugestão, uma crítica ou um pensamento positivo, colaboraram de alguma forma com o sucesso deste trabalho.

Aos meus pais José e Kátia, ao meu noivo Leonardo e às minhas irmãs Séforah e Aline por todo amor, compreensão, incentivo, suporte e carinho que me motivaram a prosseguir, mesmo nos momentos mais difíceis. E, finalmente, a Deus pela benção, pela saúde, pela oportunidade e pelo privilégio que me foi concedido ao frequentar este curso e poder estabelecer mais esta etapa em minha vida.

“A persistência é o caminho do êxito.”

Charles Chaplin

Resumo

MANFRIM, A. L. P. *Sistemas Lineares Singulares Sujeitos a Saltos Markovianos*. São Carlos, 2010, Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Esta tese trata das propriedades estruturais e do controle de sistemas lineares singulares sujeitos a saltos Markovianos (SLSSM). Três questões fundamentais são consideradas para esta classe de sistemas. A primeira estabelece condições necessárias para que o sistema seja estocasticamente regular em um período de tempo determinado. A segunda trata da estabilidade exponencial estocástica de SLSSM. Equações de Lyapunov acopladas generalizadas são deduzidas para caracterizar estabilidade deste tipo de sistema. Em virtude da complexidade das soluções numéricas dessas equações, cada equação de Lyapunov do conjunto acoplado está em função de duas variáveis desconhecidas, estamos propondo um algoritmo para resolver este problema. A terceira questão diz respeito à síntese de um regulador para este tipo de sistema singular definida em termos de equações algébricas generalizadas de Riccati acopladas.

Palavras-Chave: *Sistemas singulares, sistemas sujeitos a saltos Markovianos, regularidade, estabilidade de Lyapunov, regulador linear quadrático.*

Abstract

This thesis deals with the structural features and with the control of singular linear systems with Markovian jump parameters (SLSMJP). Three fundamental questions are considered to this class of systems. The first provides necessary conditions to characterize stochastic regularity in a determined period of time. The second deals with exponential stability of SLSMJP. Coupled generalized Lyapunov Equations are deduced to check the stability of this class of systems. In virtue of the complexity of the numerical solutions of these equations, there exist two unknown variables for each equation of the set of coupled Lyapunov equations, we are proposing an algorithm to solve this problem. The third question is related with the synthesis of a regulator for this class of singular systems defined in terms of coupled algebraic generalized Riccati equations.

Keywords: *Singular systems, systems with Markov jump parameters, regularity, Lyapunov stability, linear quadract regulator.*

Lista de Figuras

1.1	Representação de uma cadeia de Markov	4
1.2	Juntas do braço de um robô.	5
3.1	Duas realizações de $\ x(k)\ ^2$ para o sistema do Exemplo 3.1.	46
3.2	Estimativa de $\mathcal{E}\{\ x(k)\ ^2\}$ para o sistema do Exemplo 3.1.	46

Lista de Abreviaturas e Siglas

EAR - **E**quações **A**lgébricas de **R**iccati

EARA - **E**quações **A**lgébricas de **R**iccati **A**copladas

ELAG - **E**quações de **L**yapunov **A**copladas **G**eneralizadas

ELG - **E**quações de **L**yapunov **G**eneralizadas

RLQ - **R**egulador **L**inear **Q**uadrático

SLSM - **S**istemas **L**inears sujeitos a **S**altos **M**arkovianos

SLSSM - **S**istemas **L**inears **S**ingulares sujeitos a **S**altos **M**arkovianos

SS - **S**istemas **S**ingulares

T -regularidade - **R**egularidade em horizonte finito **T**

Sumário

1	Introdução	3
1.1	Notações	6
1.2	Contribuições da tese e publicações	7
1.3	Organização da tese	9
2	Regularidade	11
2.1	Conceitos preliminares	12
2.2	Regularidade estocástica em horizonte finito T ou T -regularidade	13
2.3	Condições necessárias para a T -regularidade	16
2.3.1	Sistemas lineares singulares sujeitos a saltos Markovianos reduzidos a um modo de Markov	27
2.4	Sistema com saltos Markovianos na matriz singular	28
2.5	Conclusão	32
3	Estabilidade exponencial estocástica dos sistemas singulares lineares sujeitos a saltos Markovianos	33
3.1	Resultados preliminares	34
3.2	Condição de equações de Lyapunov acopladas generalizadas para a estabilidade exponencial	37
3.3	Algoritmo para a resolução das equações de Lyapunov acopladas generalizadas	40
3.4	Exemplo numérico	45
3.5	Conclusão	46
4	Regulador linear quadrático para os sistemas lineares singulares sujeitos a saltos Markovianos	47

4.1	O regulador	47
4.2	Conclusão	54
5	Conclusão	55
	Referências Bibliográficas	56

CAPÍTULO 1

Introdução

Os sistemas singulares (SS) foram mencionados pela primeira vez na literatura em 1973 [25]. Em muitas publicações eles são chamados também de semi-estados, sistemas descritores, sistemas degenerados e sistemas algébrico-diferenciais, por envolverem equações algébricas e equações diferenciais combinadas.

Os sistemas singulares têm recebido destaque na literatura devido a frequência com que aparecem em problemas de modelagem de sistemas econômicos [20], modelagem de imagem [10], robótica [23], entre outros.

Por outro lado, essas aplicações não podem ser representadas por modelos determinísticos quando suas estruturas variam em resposta a mudanças aleatórias. Nas últimas décadas, diversas técnicas têm sido desenvolvidas para tratar de sistemas desse tipo, que são frequentemente encontrados em problemas complexos onde as exigências de um bom desempenho devem ser respeitadas. Problemas dessa natureza, usualmente representados por modelos particulares, apresentam graus de sucesso variados, em geral dependendo do grau de adequação do modelo [3]. Uma possível classificação desses sistemas é a que surge quando eles sofrem alterações abruptas (saltos) em certos instantes, mas permanecem constantes nos demais instantes. Uma abordagem comum neste caso é através de modelos chaveados, nos quais se assume que o sistema real pode ser representado por um modelo que pertence a um conjunto finito ou enumerável de possíveis

modos (também denominados modos de operação). Como referência, mencionamos [17] e os artigos citados nele.

Considere, ainda, que em cada instante há uma probabilidade de que o sistema chaveie do modo de operação em que se encontra para um outro modo, dependendo apenas do modo atual. Ou seja, os saltos nos parâmetros ocorrem de acordo com as transições de uma cadeia de Markov, como apresentado na Figura 1.1, de forma que cada estado da cadeia representa um dos possíveis modos. Assim sendo, tratam-se de sistemas estocásticos cuja dinâmica muda de forma abrupta em certos instantes e comportam-se como sistemas lineares entre os saltos. Esse é o contexto dos denominados sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos (SLSM).

Figura 1.1: Representação de uma cadeia de Markov

Ao considerarmos, simultaneamente, singularidade e saltos Markovianos no modelo, surgem os chamados sistemas lineares singulares sujeitos a saltos Markovianos (SLSSM), veja por exemplo [24], [27] e [28].

Para ilustrar, consideremos os chamados manipuladores subatuados, que são sistemas robóticos que podem possuir tanto juntas ativas quanto juntas passivas. O chaveamento entre essas duas características de funcionamento pode ser em virtude de falhas que ocorrem no sistema. Quando ocorre uma falha em uma junta específica, ela se transforma em passiva e o sistema de controle posiciona o manipulador usando somente as juntas ativas restantes. Mudanças automáticas para recuperação de falhas se justificam principalmente em situações onde as operações desses manipuladores são críticas, em ambientes onde não é conveniente ou possível dar manutenção ao robô.

Modelando cada combinação das ℓ juntas como sendo um “estado”, teremos 2^ℓ estados que podem ser dados por: (1) quando todas as juntas estão ativas, (2) quando as $\ell - 1$ primeiras juntas estão ativas e a última está passiva, (3) quando a segunda e a terceira junta estão ativas e as demais estão passivas, e assim sucessivamente. Se a mudança entre dois estados ocorrer de acordo com uma probabilidade dependente apenas do estado atual, então podemos associar cada um

dos 2^ℓ estados aos estados de uma cadeia de Markov. Na Figura 1.2 estão representadas três juntas, assim sendo, temos 2^3 estados de Markov. De acordo com [6] e [26], enquanto as três juntas estão ativas, a posição do braço pode ser descrita por um sistema dinâmico singular da forma

$$Sx(k+1) = F_1x(k) + G_1u(k),$$

sendo u a entrada de controle; quando as duas primeiras juntas estão ativas e a última passiva, a posição do braço pode ser descrita por um segundo sistema singular

$$Sx(k+1) = F_2x(k) + G_2u(k),$$

e assim sucessivamente. Uma generalização deste exemplo leva à definição de SLSSM que iremos empregar neste trabalho, formalizada como segue.

Figura 1.2: Juntas do braço de um robô.

Os SLSSM, a tempo discreto, descrito em um espaço de probabilidade apropriado dado por $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, P)$, podem ser modelados como:

$$\Psi : \begin{cases} Sx(k+1) = F_{\theta(k)}x(k) + G_{\theta(k)}u(k), \\ x(0) = x_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

para $k = 0, 1, \dots$, sendo o par $(x(k), \theta(k))$ o estado do sistema, com $\theta \in \mathbb{T} = \{1, \dots, N\}$, chamado de variável de salto ou modo e $x(k)$ a variável do sistema dinâmico associado a cada modo $\theta(k)$, e $u(k)$ a entrada de controle do sistema. $\theta(k)$ é o estado de uma cadeia de Markov discreta no tempo com espaço de estado finito e com matriz de probabilidade de transição $\mathbb{P} = [p_{ij}]$, $i, j = 1, \dots, N$, tal que $p_{ij} := P(\theta(k+1) = j | \theta(k) = i)$ é a probabilidade do sistema passar do modo de operação i para j ; portanto $p_{ij} \geq 0$ deve ser satisfeita, para $i, j \in \mathbb{T}$ e, para

cada i , $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$. Define-se $\pi_i(k) = P(\theta(k) = i)$ sempre que $i \in \mathbb{T}$. S , F_i e G_i são matrizes de dimensão apropriada, $i = 1, \dots, N$, sendo S uma matriz singular, com $\text{posto}(S) = r \leq n$.

1.1 Notações

Nesta seção, apresentamos as notações para referência posterior. $\mathbb{R}^n$ denota o espaço linear Euclidiano de dimensão n , $\mathcal{R}^{r,n}$ (respectivamente, $\mathcal{R}^n$) o espaço linear normado formado por todas as matrizes reais de dimensão $r \times n$ (respectivamente, $n \times n$) e $\mathcal{R}^{n0}$ ($\mathcal{R}^{n+}$) o cone convexo fechado das matrizes simétricas semidefinidas positivas (o cone aberto das matrizes simétricas definidas positivas); U' denota o transposto de U , $U \geq V$ ($U > V$) significa que $U - V \in \mathcal{R}^{n0}$ ($U - V \in \mathcal{R}^{n+}$).

Denotamos por $\mathbb{I}$ uma matriz identidade de dimensão apropriada. Utilizando o produto de Kronecker $L \otimes K \in \mathcal{R}^{n^2}$ e o operador de vetorização vec , definidos de maneira usual, temos a seguinte proposição (cf [2]):

Lema 1.1. *Para todo $L, K \in \mathcal{R}^n$*

- (i) $(L \otimes K)^* = L^* \otimes K^*$;
- (ii) *Considere $H \in \mathcal{R}^n$, $Y = LKH'$ $\Leftrightarrow \text{vec}(Y) = (H \otimes L) \text{vec}(K)$;*
- (iii) *Sejam M, N matrizes de dimensões apropriadas,*

$$(K \otimes L)(M \otimes N) = KM \otimes LN.$$

Seja $\mathcal{M}^{n,q}$ o espaço linear formado por um número N de matrizes tais que $\mathcal{M}^{n,q} = \{U = (U_1, \dots, U_N) : U_i \in \mathcal{R}^{n,q}, i = 1, \dots, N\}$; ainda, $\mathcal{M}^n \equiv \mathcal{M}^{n,n}$. Denotamos como $\mathcal{M}^{n0}$ ($\mathcal{M}^{n+}$) o conjunto $\mathcal{M}^n$ quando ele é constituído de $U_i \in \mathcal{R}^{n0}$ ($U_i \in \mathcal{R}^{n+}$) para todo $i = 1, \dots, N$. Define-se, também, como $U \geq V$ ($U > V$) a representação de $U_i \geq V_i$ ($U_i > V_i$), para cada $i = 1, \dots, N$; estendemos, de forma análoga, esta representação para as outras relações matemáticas. Para $U \in \mathcal{M}^{n0}$, definimos $\|U\| = \max_{0 \leq i \leq N} \sigma(U_i)$, sendo $\sigma(U_i)$ o maior valor singular de U_i , e denotamos $U_i(j, l)$ como a j -ésima linha e l -ésima coluna da matriz U_i . Denotamos, sempre que não houver risco de confusão, o valor esperado condicional $\mathcal{E}\{\cdot | x_0, \theta_0\}$ simplesmente por $\mathcal{E}\{\cdot\}$ e a variância por $\text{Var}(\cdot)$. Para $D_i \in \mathcal{R}^n$, definimos $\text{diag}(D_i) \in \mathcal{R}^{Nn}$, $i = 1, \dots, N$, uma matriz formada pelos blocos D_i na diagonal principal e zeros nos demais elementos.

Para $\mathbb{A} \in \bar{\mathcal{F}}$, a função indicador $1_{\mathbb{A}}$ é definida de maneira usual, ou seja, para $w \in \Omega$,

$$1_{\mathbb{A}(w)} = \begin{cases} 1 & \text{se } w \in \mathbb{A} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que para cada $i = 1, \dots, N$, $1_{\{\theta(k)=i\}} = 1$ se $\theta(k) = i$, e 0 caso contrário. No tempo k , assumindo $\theta(k) = i$, a dinâmica do SLSSM apresentado em Ψ é determinada por

$$Sx(k+1) = F_i x(k) + G_i u(k), \quad (1.2)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, e as matrizes de parâmetros S , $F_i \in \mathbb{R}^n$ e $G_i \in \mathbb{R}^{q \times m}$, para todo $i = 1, \dots, N$. Sempre que os valores de $x(t)$ e $\theta(t)$ forem conhecidos para $0 \leq t \leq k$, denotaremos o conjunto desses valores por $\mathcal{F}_t$, ou seja, $\mathcal{F}_t = \{x(0), \theta(0), \dots, x(t), \theta(t)\}$ e consideramos $\mathbb{P} \in \mathcal{R}^N$.

1.2 Contribuições da tese e publicações

As contribuições principais deste trabalho estão relacionadas com o desenvolvimento de conceitos estruturais, tais como regularidade estocástica e estabilidade exponencial estocástica, a investigação de condições para a verificação desses conceitos e o desenvolvimento um regulador para os SLSSM.

No estudo de regularidade, a principal contribuição é o desenvolvimento de uma condição testável, necessária, para regularidade. Ela consiste em definições que levam em consideração o aspecto estocástico da regularidade de SLSSM, tanto para horizonte finito quanto para horizonte infinito (semelhantemente ao que se encontra para SS em [29, Theorem 1]). Os conceitos existentes na literatura analisam a regularidade “modo a modo”, não levam em consideração os dados das probabilidades de transição da cadeia de Markov. A condição necessária desenvolvida para horizonte finito baseia-se num sistema de primeiro momento condicionado associado ao sistema original. Esse sistema de primeiro momento foi, inicialmente, estudado com objetivo de obter condições necessárias e suficientes, mas concluímos ao longo do trabalho, que ele não leva a condições de suficiência. A regularidade diz respeito a existência e unicidade de solução dos SLSSM. O procedimento desenvolvido checka se o sistema de primeiro momento tem solução única, mas não é suficiente para dizer se o SLSSM original tem solução única.

Com relação à estabilidade, as maiores contribuições são um conjunto de equações de Lyapunov acopladas generalizadas (ELAG) para SLSSM e o desenvolvimento de um algoritmo para calcular essas ELAG. Mostramos que, quando o algoritmo converge, ele converge para a solução da Lyapunov proposta. Destacamos que a condição de Lyapunov envolve conjuntamente duas incógnitas, que devem ser encontradas simultaneamente. Isto gera uma dificuldade a mais quando comparada, por exemplo, às condições de Lyapunov para SLSM. Esta dificuldade foi superada no sentido de que o método proposto trata essas variáveis como sendo uma única. Elas foram agrupadas em uma única incógnita através de certas estruturas descritas na Seção 3.3.

Finalmente, quanto ao regulador, a principal contribuição é a obtenção de um conjunto de equações de Riccati acopladas para o ganho do regulador linear quadrático. Também, para cada equação de Riccati estão relacionadas duas incógnitas. Para resolver esse conjunto de equações estamos propondo um algoritmo iterativo, veja Observação 4.1.

Durante o período de desenvolvimento deste trabalho, foram publicados alguns artigos em conferências nacionais e internacionais que estão listados abaixo.

◇ **Artigos publicados em conferências internacionais**

ISHIHARA, J. Y., TERRA, M. H., CERRI, J. P., MANFRIM, A. L. P. *A New Procedure to Solve Generalized Lyapunov Equations*. In: 18th Mediterranean Conference on Control and Automation, 2010, Congress Palace, Marrakech, Morocco. v.1. p.214 - 219.

MANFRIM, A. L. P., TERRA, M. H., COSTA, E. F., ISHIHARA, J. Y. *On the Regularity for Singular Linear System with Markov Jump Parameters*. In: 17th IFAC World Congress, 2008, Seoul, Korea. v.4. p. 9987 - 9992.

MANFRIM, A. L. P., TERRA, M. H., COSTA, E. F., ISHIHARA, J. Y. *On the Solvability of Singular Linear System with Markov Jump Parameters*. In: 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, 2008, Ajaccio, Corsica, France. v.1. p.1016 - 1021.

MANFRIM, A. L. P., TERRA, M. H., COSTA, E. F., ISHIHARA, J. Y. *Stochastic Stability for Discrete-Time Singular Systems with Markov Jump Parameters*. In: American Control Conference (ACC), 2008, Seattle, WA, USA. Final Program and Book of Abstracts, v.1. p.1650 - 1655.

COSTA, E. F., MANFRIM, A. L. P., do Val, J. B. R. *Weak Controllability and Weak Stabilizability Concepts for Linear Systems with Markov Jump Parameters*. In: American Control Conference (ACC), 2006, Minneapolis, Minnesota, USA. Final Program and Book of Abstracts. LEXPIX, 2006. p.905 - 910.

◇ **Artigos publicados em conferências nacionais**

MANFRIM, A. L. P., TERRA, M. H., COSTA, E. F., ISHIHARA, J. Y. *Método Iterativo de Lyapunov para Estabilidade Exponencial Estocástica dos Sistemas Singulares Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos*. In: XVIII Congresso Brasileiro de Automática (CBA), 2010, Bonito, MS, Brasil.

MANFRIM, A. L. P., COSTA, E. F., do Val, J. B. R. *Estabilizabilidade de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos*. In: XVI Congresso Brasileiro de Automática (CBA), 2006, Salvador, Bahia, Brasil. v.1. p.2513 - 2518.

1.3 Organização da tese

Este trabalho está dividido como segue. No Capítulo 2 apresentamos o conceito de regularidade estocástica em horizonte finito T (denotada de T -regularidade) e condições necessárias para sua verificação. Uma vez que a T -regularidade é válida para todo horizonte de tempo T , apresentamos um conceito de regularidade estocástica e verificamos uma equivalência entre a regularidade dos sistemas singulares (sem salto de Markov) e T -regularidade dos SLSSM com apenas um modo de Markov. No Capítulo 3 apresentamos um conjunto de equações de Lyapunov acopladas (ELAG) para os SLSSM em tempo discreto, utilizamos essas ELAG para caracterizar a estabilidade exponencial estocástica do sistema e desenvolvemos um algoritmo utilizando uma formulação, a partir do produto de Kronecker e do operador vec, que leva a um sistema linear o qual pode ser resolvido de maneira convencional. As soluções obtidas servem para compor um método iterativo para solução das ELAG. No Capítulo 4 apresentamos um regulador linear quadrático para esta classe de sistemas.

CAPÍTULO 2

Regularidade

No estudo de sistemas singulares, a condição preliminar a ser verificada é a regularidade ([7], [18], [29]). Isto se deve ao fato da regularidade assegurar existência e unicidade de solução destes sistemas para cada lei de controle fixada e para cada condição inicial admissível correspondente a esta lei de controle. Nós observamos que as tentativas encontradas na literatura de estender esta noção aos SLSSM contínuos e discretos no tempo, consideram a regularidade de cada modo do sistema, [8, 11], a qual denotamos de regularidade modo a modo.

Uma vez que os SLSSM são sistemas estocásticos, observamos que é possível definir de diversas maneiras esta propriedade. Neste trabalho, propomos uma noção de regularidade que envolve a existência e unicidade de solução para cada realização da cadeia de Markov. Isto nos permite definir valores esperados associados ao SLSSM, como $\mathcal{E} \{x(k)\}$. Desta maneira, apresentamos dois conceitos de regularidade para os SLSSM denominados de regularidade estocástica e regularidade estocástica em horizonte finito T (ou T -regularidade).

Este capítulo está organizado da seguinte forma: Na Seção 2.1 apresentamos conceitos preliminares que serão utilizados em todo o capítulo. Os conceitos de T -regularidade e regularidade estocástica para os SLSSM são apresentados na Seção 2.2. Na Seção 2.3 apresentamos condições necessárias para a T -regularidade e verificamos uma equivalência entre os conceitos de regularidade dos SS e T -regularidade dos SLSSM com apenas um estado de Markov. E, na Seção

2.4, finalizamos este capítulo com uma extensão do conceito de regularidade estocástica para os SLSSM com salto Markoviano na matriz singular.

2.1 Conceitos preliminares

Na literatura de sistemas singulares (SS) a noção de regularidade se deve à verificação da existência e unicidade de solução da equação que descreve este tipo de sistema, veja [29]. Com base nesta noção, apresentamos em seguida, a definição de regularidade encontrada na literatura de sistemas singulares sem saltos Markovianos (veja [7], [29], e referências nelas citadas).

Definição 2.1. *(S, F) é regular se $\det(\lambda S - F) \neq 0$ para todo λ , exceto para um número finito de $\lambda \in \mathbb{C}$, no qual $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos.*

A caracterização de regularidade que segue, apresentada em [7], [29], é baseada na análise do “pencil” de matrizes [9] e na análise de sistemas singulares discretos [19].

Teorema 2.1. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *(S, F) é regular;*
- (ii) *Se $X(0)$ é o espaço nulo de F (denotado por $Ker(F)$) e $X(k) = \{x | Fx \in SX(k-1)\}$, então $Ker(S) \cap X(k) = 0$, para $k = 0, 1, \dots$;*
- (iii) *Se $Y(0) = Ker(F^T)$, $Y(k) = \{x | F'x \in S'Y(k-1)\}$, então $Ker(S') \cap Y(k) = 0$, para $k = 0, 1, \dots$.*
- (iv) *Seja*

$$G(t) = \begin{bmatrix} S & & & \\ F & S & & \\ & F & \ddots & \\ & & \ddots & S \\ & & & F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(t+1)n \times nt}.$$

Então $posto(G(t)) = nt$, $t = 1, 2, \dots$

(v) *Seja*

$$H(t) = \begin{bmatrix} S & F & & & \\ & S & F & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & S & F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nt \times n(t+1)}.$$

Então $\text{posto}(H(t)) = nt$, $t = 1, 2, \dots$

2.2 Regularidade estocástica em horizonte finito T ou T -regularidade

Considere o SLSSM em horizonte T satisfazendo

$$\Psi : \begin{cases} Sx(k+1) = F_{\theta(k)}x(k) + G_{\theta(k)}u(k), & 0 \leq k \leq T-1, \end{cases} \quad (2.1)$$

e condições de contorno, que podem ser

(i) $x(0) = x_0$, com x_0 admissível;

(ii) $x(0) = x_0$ e $x(T) = x_T$, com x_0 e x_T admissíveis,

sendo que x_m é admissível sempre que o Sistema Ψ admite solução no instante m .

O objetivo é desenvolver um conceito de regularidade que caracterize a existência e unicidade de soluções para toda realização da cadeia Θ , e que, paralelamente, garanta que os valores esperados envolvendo a trajetória (ou o processo) $\mathcal{X} = \{x(0), x(1), \dots, x(T)\}$ estejam bem definidos. Sistemas regulares no sentido proposto apresentam a propriedade fundamental de terem valores esperados bem definidos. Desta forma, pode-se tratar, com segurança, a média, momentos de ordem superior, momentos condicionados, e até mesmo funcionais de custo associados ao sistema.

Uma adaptação direta do conceito de regularidade dos SLSSM contínuos no tempo, encontrada por exemplo em [11] e [28], para os SLSSM discretos no tempo, seria a verificação de que o polinômio característico $\det(\lambda S - F_i)$ seja não identicamente nulo para cada modo $i \in \mathbb{T}$. Chamamos esta noção, por simplicidade, de regularidade modo a modo. Mas esta adaptação não caracteriza a noção de regularidade, uma vez que se considerarmos o Sistema Ψ , com $N = 2$, de

tal forma que

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $G_1 = G_2 = 0$. Temos que

$$\det(\lambda S - F_1) = 1 - \lambda \neq 0;$$

$$\det(\lambda S - F_2) = 0,$$

logo este sistema não seria regular modo a modo. Contudo, é simples verificar que $x(k) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \end{bmatrix}'$, sendo α uma constante real fixa e $k \geq 0$, para qualquer realização provável de Θ (no caso, $\Theta(\omega_1) = \{1, 1, 1, \dots\}$ e $\Theta(\omega_2) = \{2, 1, 1, \dots\}$). Neste cenário, valores esperados e valores esperados condicionais estão bem definidos. Diante dessas considerações, a evolução desse sistema é dada por $Sx(k+1) = F_1x(k)$ que é um sistema regular.

Observação 2.1. *Note que a tentativa de extensão da noção de regularidade modo a modo negligencia a informação da transição da matriz de probabilidade da cadeia de Markov, $\mathbb{P}$.*

Desta maneira, a tentativa de extensão do conceito de regularidade de sistemas singulares usuais para SLSSM, apresentada na literatura, não está bem ajustada para o cálculo de valores esperados para a trajetória $\mathcal{X}$. Diante desse impasse, propomos um novo conceito de regularidade para os SLSSM denominado de regularidade estocástica em horizonte finito T (T -regularidade) e uma extensão deste conceito em que este sistema é T -regular para todo $T \geq 0$.

Definição 2.2. *Dizemos que o Sistema Ψ , ou equivalentemente $(S, F, \mathbb{P})$, é regular estocasticamente de horizonte finito T (ou T -regular) sempre que para cada sequência de controle $\mathcal{U} = \{u(0), u(1), \dots, u(T-1)\}$ e distribuição inicial da cadeia, $\pi(0)$, existirem condições de contorno (i) ou (ii), tal que para cada realização da cadeia Θ , dada por $\Theta(\omega) = \{\theta(0), \theta(1), \dots, \theta(T-1)\}$, de probabilidade não nula, existir uma única trajetória $\mathcal{X} = \{x(0), x(1), \dots, x(T)\}$ satisfazendo o Sistema Ψ .*

Observe que a existência da condição de contorno (i), ou seja, $x(0)$ admissível está associada à ação de controle $\mathcal{U}$ e à distribuição inicial da cadeia, $\pi(0)$. De forma análoga, a existência da condição de contorno (ii), ou seja, $x(0)$ e $x(T)$ admissíveis dependem tanto da ação de controle $\mathcal{U}$ quanto da distribuição inicial da cadeia, $\pi(0)$.

Definição 2.3. *Dizemos que o Sistema Ψ , ou equivalentemente $(S, F, \mathbb{P})$, é regular estocasticamente quando o Sistema Ψ for T -regular para todo $T \geq 0$.*

Mostraremos na Seção 2.3 que, de fato, sistemas T -regulares admitem o cálculo de seus momentos finitos de toda ordem, como queríamos. As condições de contorno são importantes para a Definição 2.2, como ilustra o seguinte exemplo.

Exemplo 2.1. *Considere o Sistema Ψ , com $N = 2$, de tal forma que*

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e \quad G_1 = G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere ainda $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\pi(0) = [0,5 \quad 0,5]$, $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $u(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. As únicas trajetórias prováveis da cadeia de Markov Θ são dadas por

$$\Theta(\omega_1) = \{1, 2, 1, 2, \dots, 1\} \quad e \quad \Theta(\omega_2) = \{2, 1, 2, 1, \dots, 2\},$$

e, analisando o sistema considerando ω_1 e $T = 3$, temos que

$$\begin{aligned} \theta(0) = 1 : Sx(1) = F_1x(0) + G_1u(0) &\Rightarrow \begin{cases} x_1(1) = x_1(0) + u_1(0) \\ 0x_2(1) = x_2(0) + u_2(0) \end{cases} \Rightarrow x(1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}; \\ \theta(1) = 2 : Sx(2) = F_2x(1) + G_2u(1) &\Rightarrow \begin{cases} x_1(2) = 0x_1(1) + u_1(1) \\ 0x_2(2) = x_2(1) + u_2(1) \end{cases} \Rightarrow x(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \\ \theta(2) = 1 : Sx(3) = F_1x(2) + G_1u(2) &\Rightarrow \begin{cases} x_1(3) = x_1(2) + u_1(2) \\ 0x_2(3) = x_2(2) + u_2(2) \end{cases} \Rightarrow x(3) = \begin{bmatrix} 2 \\ x_2(3) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De acordo com a Definição 2.2, este Sistema não é 3-regular, pois temos multiplicidade no último elemento da trajetória

$$\mathcal{X} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ x_2(3) \end{bmatrix} \right\}$$

e, desta maneira, temos que a regularidade modo a modo não é condição suficiente para a T -regularidade com a condição de contorno (i). Considere, agora, o mesmo sistema com condição de contorno (ii). Fixando a condição final como $x(3) = [2 \quad \alpha]'$, α uma constante real fixa, este Sistema será 3-regular.

Observação 2.2. *Considerado o caso em que $N = 1$, também chamado de “caso de salto de Markov degenerado”, temos que a trajetória possível da cadeia Θ coincide com a trajetória provável da cadeia Θ . Neste sentido o SLSSM é reduzido ao sistema singular convencional. Ressaltamos*

que o mesmo não vale para o sistema com condição de contorno (i). Para ilustrar, considere

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = 0 \quad e \quad T = 4.$$

Empregando a Definição 2.1 obtemos $\det(\lambda S - F) = 1 - \lambda \neq 0$, logo este sistema é regular modo a modo. Desenvolvendo o sistema, considerando $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}'$, verificamos que

$$\mathcal{X} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1(3) \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1(4) \\ x_1(3) \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Empregando a Definição 2.2, considerando a condição de contorno (ii), com $x(4) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \end{bmatrix}'$ e α_u uma constante real fixa, $u \in \{1, 2\}$, temos que este sistema é 4-regular. Entretanto, considerando apenas a condição de contorno (i), devido a multiplicidade nos vetores $x_1(3)$ e $x_1(4)$, este sistema não é 4-regular.

Mostraremos adiante que regularidade estocástica do Sistema Ψ com condição de contorno (ii) implica em regularidade no sentido usual de sistemas singulares, vide Corolário 2.1 adiante.

Observação 2.3. Note que, considerando $S = \mathbb{I}_n$, $i \in \mathbb{T}$, o sistema Ψ é reduzido ao SLSM não singular. Considerando a Definição 2.2, este sistema é T -regular. As soluções de SLSM não singulares (com espaço de estado de Markov finito ou enumerável) certamente existem e são únicas, veja, por exemplo, [6].

Na próxima seção, iremos abordar condições necessárias para a T -regularidade baseadas no primeiro momento dos SLSSM.

2.3 Condições necessárias para a T -regularidade

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados com o objetivo de construir condições necessárias para a verificação da regularidade estocástica em horizonte finito T , denotada por T -regularidade, e apresentada na Definição 2.2. Apresentamos, inicialmente, um resultado em que a T -regularidade do Sistema Ψ garante que os valores esperados envolvendo a trajetória (ou o processo) $\mathcal{X} = \{x(0), x(1), \dots, x(T)\}$ estejam bem definidos.

Lema 2.1. *Seja r um número inteiro positivo. Se o Sistema Ψ é T -regular, então o processo $\mathcal{X}$ é limitado quase certamente e, além disso, existem $L_k \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq k \leq T$ tais que*

$$\mathcal{E} \{ ||(x(k))||^r \} \leq ||L_k||^r. \quad (2.2)$$

Demonstração. Por hipótese sabemos que o Sistema Ψ é T -regular, logo da Definição 2.2 temos que para cada par $(\mathcal{U}, \Theta)$, dado de sequência de entradas $\mathcal{U}$ e sequência de realizações dos modos da cadeia, existem as condições de contorno (i) e (ii) para os quais o processo $\mathcal{X}$ existe e é único. Considere $\mathcal{U}$ e $x(0)$ fixos, e $e_\ell \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tal que $e_\ell = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$, sendo o elemento não trivial na ℓ -ésima posição. Seja M o número das possíveis realizações da cadeia Θ distintas entre si e com probabilidade positiva, denotamos essas realizações por $\omega_1, \dots, \omega_M$ e $\mathcal{X}(\omega_m) = \{x(0, \omega_m), \dots, x(T, \omega_m)\}$, $1 \leq m \leq M$, a trajetória $\mathcal{X}$ associada a ω_m . Como, por hipótese, o sistema é T -regular temos que $\mathcal{X}(\omega_1), \dots, \mathcal{X}(\omega_M)$ existem e são únicas. Defina

$$L_{k,\ell} = \max_{d=\omega_1, \dots, \omega_M} |e_\ell x(k, \omega_d)|, \quad 0 \leq k \leq T,$$

logo $L_{k,\ell}$ é um limitante superior para $|e_\ell x(k)|$, então,

$$|(e_\ell x(k))|^r \leq L_{k,\ell}^r,$$

quase certamente, pois pode haver realizações, por exemplo w_{M+1} , com probabilidade nula, que violem a desigualdade acima. Seja $L_k = [L_{k,1} \ \dots \ L_{k,n}]' \in \mathbb{R}^n$, então $||x(k)|| \leq ||L_k||$. Uma vez que r é um número inteiro positivo, podemos escrever

$$||x(k)||^r \leq ||L_k||^r,$$

completando a primeira afirmação. Aplicando o valor esperado em ambos os lados da desigualdade obtemos

$$\mathcal{E} \{ ||x(k)||^r \} \leq \mathcal{E} \{ ||L_k||^r \} = ||L_k||^r,$$

portanto $x(k)$ admite momentos finitos de ordem r . □

Observação 2.4. *Note que a Definição 2.2, de T -regularidade, implica na existência de uma única trajetória $\mathcal{X}$ para cada realização distinta da trajetória Θ .*

Uma vez que o Sistema Ψ possui todos seus momentos bem definidos, podemos empregar o

Teorema Central do Limite para fazer uma aproximação destes momentos, pois, como veremos adiante, o cálculo direto pode ser uma tarefa difícil. O próximo resultado é uma extensão direta dos resultados apresentados em [16], desta maneira a prova é omitida.

Proposição 2.1. *Considere o Sistema Ψ T -regular. Se $0 \leq ||(x(k))||^r \leq ||L_k||^r$, então*

$$\text{Var} (||(x(k))||^r) \leq \frac{||L_k||^{2r}}{4}.$$

Lema 2.2. *Considere o Sistema Ψ T -regular. Sejam $\mu_k = \mathcal{E} \{||x(k)||^r\}$, sendo r um inteiro positivo, $\bar{X}_{k,M}$ a média para uma amostra de tamanho M , ou seja,*

$$\bar{X}_{k,M} = \frac{\sum_{b=1}^M ||x(k, w_b)||^r}{M},$$

e $\Sigma_{k,M} = \text{Var}(\bar{X}_{k,M})$ então existe L_k tal que $\Sigma_{k,M} \leq \frac{||L_k||^{2r}}{4M}$, e a distribuição de $\bar{X}_{k,M}$ converge para $N(\mu_k, \Sigma_{k,M})$, quando M tende a infinito. Em particular, $\bar{X}_{k,M}$ converge em probabilidade para μ_k .

Demonstração. Sejam $x(k, \omega_1), \dots, x(k, \omega_M)$, $0 \leq k \leq T$, realizações de $x(k)$ associadas a realizações da cadeia Θ . Uma vez que ω_p é independente de ω_q , $p \neq q$, vide Seção 3.1 temos que $x(k, \omega_p)$ e $x(k, \omega_q)$ são independentes entre si, sempre que $p \neq q$. Logo $x(k)$, $0 \leq k \leq T$, são vetores aleatórios n -dimensionais, independentes e identicamente distribuídos. Do Lema 2.1 e Proposição 2.1 temos que $\text{Var} (||(x(k))||^r)$ é limitada. Diante destas hipóteses utilizamos o Teorema Central do Limite e temos que a distribuição de $\bar{X}_{k,M}$ converge para $N(\mu_k, \Sigma_{k,M})$, quando M tende ao infinito, e

$$\Sigma_{k,M} = \text{Var}(\bar{X}_{k,M}) = \text{Var} \left(\frac{\sum_{b=1}^M ||x(k, w_b)||^r}{M} \right), \quad (2.3)$$

como $\bar{X}_{k,M}$ é independente e identicamente distribuída, podemos reescrever (2.3) como

$$\Sigma_{k,M} = \frac{1}{M^2} \sum_{b=1}^M (\text{Var} (||x(k, w_b)||^r)) \leq \frac{1}{M} \text{Var} (||x(k)||^r) \leq \frac{||L_k||^{2r}}{4M}. \quad (2.4)$$

Utilizando a desigualdade de Tchebycheff temos que

$$P (||\bar{X}_{k,M} - \mu_k|| \geq \epsilon) \leq \frac{\Sigma_{k,M}}{\epsilon^2} \leq \frac{||L_k||^{2r}}{4M\epsilon^2} \rightarrow 0, \quad M \rightarrow \infty.$$

Portanto $\bar{X}_{k,M}$ converge em probabilidade para μ_k . $\square$

Observação 2.5. *Se o Sistema Ψ é T -regular, através do Lema 2.1 sabemos que $\mathcal{E}\{x(k)\}$ é bem definido para todo $0 \leq k \leq T$. Utilizando o Teorema da Probabilidade Total podemos desenvolver expressões, como a (2.5) a seguir, que serão úteis ao longo do texto.*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\{x(k)\} &= \sum_{i=1}^N \mathcal{E}\{x(k) 1_{\{\theta(k)=i\}}\} \\ \mathcal{E}\{x(k)\} &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \mathcal{E}\{x(k) 1_{\{\theta(k)=i, \theta(k+1)=j\}}\}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

O próximo resultado é uma consequência direta do Lema 2.1 e da Observação 2.5, que nos permite impor uma condição de primeiro momento para o Sistema Ψ e com isso obter uma condição necessária testável para a T -regularidade no Teorema 2.2 adiante. Outras podem ser obtidas através de diversas relações de equivalência para $\mathcal{E}\{x(k)\}$ como em (2.5).

Lema 2.3. *Seja o seguinte sistema nas variáveis $q_i(k) \in \mathbb{R}^n$, sendo $i \in \mathbb{T}$ e $k \geq 0$,*

$$S q_j(k+1) = \sum_{i=1}^N p_{ij} F_i q_i(k) + \sum_{i=1}^N p_{ij} \pi_i(k) G_i u(k), \quad j \in \mathbb{T}.\tag{2.6}$$

Se o Sistema Ψ é T -regular com condição de contorno (i) ou (ii), como apropriado, então

$$q_i(k) = \mathcal{E}\{x(k) 1_{\{\theta(k)=i\}}\}$$

satisfaz (2.6).

Demonstração. Pré-multiplicando (2.1) por $1_{\{\theta(k+1)=j\}}$ temos que

$$S x(k+1) 1_{\{\theta(k+1)=j\}} = F_{\theta(k)} x(k) 1_{\{\theta(k+1)=j\}} + G_{\theta(k)} u(k) 1_{\{\theta(k+1)=j\}}.\tag{2.7}$$

Aplicando o valor esperado em ambos os lados da igualdade (2.7) obtemos:

$$\mathcal{E}\{S x(k+1) 1_{\{\theta(k+1)=j\}}\} = \mathcal{E}\{F_{\theta(k)} x(k) 1_{\{\theta(k+1)=j\}}\} + \mathcal{E}\{G_{\theta(k)} u(k) 1_{\{\theta(k+1)=j\}}\}.\tag{2.8}$$

Utilizando a seguinte propriedade: “Seja A uma variável aleatória, então

$$\mathcal{E}\{A\} = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}\{A 1_{\{\theta(k)=i\}}\}”$$

podemos reescrever (2.8) como

$$S \mathcal{E} \{x(k+1) 1_{\{\theta(k+1)=j\}}\} = \sum_{i=1}^N \mathcal{E} \{F_{\theta(k)} x(k) 1_{\{\theta(k+1)=j\}} 1_{\{\theta(k)=i\}}\} + \sum_{i=1}^N \mathcal{E} \{G_{\theta(k)} u(k) 1_{\{\theta(k+1)=j\}} 1_{\{\theta(k)=i\}}\},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} S \mathcal{E} \{x(k+1) 1_{\{\theta(k+1)=j\}}\} &= \sum_{i=1}^N F_i \mathcal{E} \{x(k) 1_{\{\theta(k+1)=j, \theta(k)=i\}}\} \\ &+ \sum_{i=1}^N G_i \mathcal{E} \{u(k) 1_{\{\theta(k+1)=j, \theta(k)=i\}}\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Considerando também

$$\mathcal{E} \{Z_w 1_{\{w=i\}}\} = \mathcal{E} \{Z_w | w=i\} P(w=i)$$

podemos reescrever (2.9) como

$$\begin{aligned} S \mathcal{E} \{x(k+1) 1_{\{\theta(k+1)=j\}}\} &= \\ &= \sum_{i=1}^N F_i \mathcal{E} \{x(k) | \theta(k+1)=j, \theta(k)=i\} P(\theta(k+1)=j, \theta(k)=i) \\ &+ \sum_{i=1}^N G_i \mathcal{E} \{u(k) | \theta(k+1)=j, \theta(k)=i\} P(\theta(k+1)=j, \theta(k)=i) \\ &= \sum_{i=1}^N F_i \mathcal{E} \{x(k) | \theta(k+1)=j, \theta(k)=i\} P(\theta(k+1)=j | \theta(k)=i) P(\theta(k)=i) \\ &+ \sum_{i=1}^N G_i \mathcal{E} \{u(k) | \theta(k+1)=j, \theta(k)=i\} P(\theta(k+1)=j | \theta(k)=i) P(\theta(k)=i) \\ &= \sum_{i=1}^N F_i \mathcal{E} \{x(k) | \theta(k+1)=j, \theta(k)=i\} p_{ij} P(\theta(k)=i) \\ &+ \sum_{i=1}^N G_i \mathcal{E} \{u(k) | \theta(k+1)=j, \theta(k)=i\} p_{ij} P(\theta(k)=i) \\ &= \sum_{i=1}^N F_i \mathcal{E} \{x(k) 1_{\{\theta(k)=i\}}\} p_{ij} + \sum_{i=1}^N G_i \mathcal{E} \{u(k) 1_{\{\theta(k)=i\}}\} p_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^N p_{ij} F_i \mathcal{E} \{x(k) 1_{\{\theta(k)=i\}}\} + \sum_{i=1}^N p_{ij} G_i \mathcal{E} \{u(k) 1_{\{\theta(k)=i\}}\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Sabendo que $u(k)$ é independente de $1_{\{\theta(k)=i\}}$ temos que

$$\mathcal{E} \{u(k) 1_{\{\theta(k)=i\}}\} = \mathcal{E} \{u(k)\} \mathcal{E} \{1_{\{\theta(k)=i\}}\} = u(k) P(\theta(k)=i) = \pi_i(k) u(k), \quad (2.11)$$

assim podemos reescrever (2.10) como

$$S \mathcal{E} \{x(k+1) 1_{\{\theta(k+1)=j\}}\} = \sum_{i=1}^N p_{ij} F_i \mathcal{E} \{x(k) 1_{\{\theta(k)=i\}}\} + \sum_{i=1}^N p_{ij} \pi_i(k) G_i u(k). \quad (2.12)$$

Definindo $q_i(k) := \mathcal{E} \{x(k) 1_{\{\theta(k)=i\}}\}$, podemos reescrever (2.12) como (2.6). $\square$

Observação 2.6. *Note que (2.6) pode ter multiplicidade de soluções. O Lema 2.3 afirma que uma dessas soluções coincide com $q_i(k) := \mathcal{E} \{x(k) 1_{\{\theta(k)=i\}}\}$.*

O Lema 2.3 fornece uma condição necessária testável para a T -regularidade, como destacamos no próximo resultado.

Teorema 2.2. *Se o Sistema Ψ é T -regular então existe solução para o Sistema (2.6).*

Demonstração. Uma vez que o Sistema Ψ é T -regular, através do Lema 2.2 temos que a variável aleatória $x(k)$ está bem definida e tem momentos finitos, logo $q_i(k) = \mathcal{E} \{x(k) 1_{\{\theta(k)=i\}}\}$ está bem definido. Aplicando o Lema 2.3 segue o resultado. $\square$

Com o objetivo de fazer análises a respeito do Sistema (2.6), vamos reescrevê-lo na forma aumentada. Para isso, introduzimos a seguinte notação considerando $0 \leq k \leq T$:

$$\begin{aligned} q_i(k) &:= \mathcal{E} \{x(k) 1_{\{\theta(k)=i\}}\} \in \mathbb{R}^n; \\ q(k) &:= \begin{bmatrix} q'_1(k) & q'_2(k) & \cdots & q'_N(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Nn}; \\ q &:= [q'(0) \ q'(1) \ \cdots \ q'(T)]' \in \mathbb{R}^{(T+1)Nn}; \\ u &:= [u'(0) \ u'(1) \ \cdots \ u'(T-1)]' \in \mathbb{R}^{Tn}; \\ \mathbb{S} &:= \begin{pmatrix} S & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{Nn} \\ \mathbb{F} &:= \begin{pmatrix} p_{11}F_1 & p_{21}F_2 & \cdots & p_{N1}F_N \\ p_{12}F_1 & p_{22}F_2 & \cdots & p_{N2}F_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N}F_1 & p_{2N}F_2 & \cdots & p_{NN}F_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{Nn}; \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
\bar{G}(k) &:= \begin{pmatrix} p_{11}\pi_1(k)G_1 + p_{21}\pi_2(k)G_2 + \cdots + p_{N1}\pi_N(k)G_N \\ p_{12}\pi_1(k)G_1 + p_{22}\pi_2(k)G_2 + \cdots + p_{N2}\pi_N(k)G_N \\ \vdots \\ p_{1N}\pi_1(k)G_1 + p_{2N}\pi_2(k)G_2 + \cdots + p_{NN}\pi_N(k)G_N \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^{Nn \times n}; \\
\mathbb{H} &= \begin{pmatrix} -\mathbb{F} & \mathbb{S} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{F} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\mathbb{F} & \mathbb{S} \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^{TNn \times (T+1)Nn}, \\
\mathbb{G} &= \begin{pmatrix} \bar{G}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{G}(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{G}(T-1) \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^{TNn \times Tn}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Utilizando as notações apresentadas anteriormente, obtemos uma representação para o Sistema (2.6) como segue.

Lema 2.4. *O Sistema (2.6) dado por*

$$S q_j(k+1) = \sum_{i=1}^N p_{ij} F_i q_i(k) + \sum_{i=1}^N p_{ij} \pi_i(k) G_i u(k), \quad j \in \mathbb{T},$$

pode ser reescrito como

$$\mathbb{H} q = \mathbb{G} u. \tag{2.15}$$

Demonstração. Considere o Sistema (2.6), sempre que

$$\begin{aligned}
j = 1: S q_1(k+1) &= \sum_{i=1}^N p_{i1} F_i q_i(k) + \sum_{i=1}^N p_{i1} \pi_i(k) u(k) \\
S q_1(k+1) &= p_{11} F_1 q_1(k) + p_{21} F_2 q_2(k) + \cdots + p_{N1} F_N q_N(k) \\
&\quad + p_{11} \pi_1(k) G_1 u(k) + p_{21} \pi_2(k) G_2 u(k) + \cdots + p_{N1} \pi_N(k) G_N u(k)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
j = N : S q_N(k+1) &= \sum_{i=1}^N p_{iN} F_i q_i(k) + \sum_{i=1}^N p_{iN} \pi_i(k) u(k)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
S q_N(k+1) &= p_{1N} F_1 q_1(k) + p_{2N} F_2 q_2(k) + \cdots + p_{NN} F_N q_N(k) \\
&+ p_{1N} \pi_1(k) G_1 u(k) + p_{2N} \pi_2(k) G_2 u(k) + \cdots + p_{NN} \pi_N(k) G_N u(k)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} S & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S \end{pmatrix} \begin{bmatrix} q_1(k+1) \\ q_2(k+1) \\ \vdots \\ q_N(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} p_{11}F_1 & p_{21}F_2 & \cdots & p_{N1}F_N \\ p_{12}F_1 & p_{22}F_2 & \cdots & p_{N2}F_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N}F_1 & p_{2N}F_2 & \cdots & p_{NN}F_N \end{pmatrix} \begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ \vdots \\ q_N(k) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} p_{11}\pi_1(k)G_1 + p_{21}\pi_2(k)G_2 + \cdots + p_{N1}\pi_N(k)G_N \\ p_{12}\pi_1(k)G_1 + p_{22}\pi_2(k)G_2 + \cdots + p_{N2}\pi_N(k)G_N \\ \vdots \\ p_{1N}\pi_1(k)G_1 + p_{2N}\pi_2(k)G_2 + \cdots + p_{NN}\pi_N(k)G_N \end{pmatrix} u(k).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

De (2.14) temos que (2.18) pode ser reescrito como

$$\mathbb{S} q(k+1) = \mathbb{F} q(k) + \bar{G}(k) u(k)$$

assim

$$\begin{pmatrix} -\mathbb{F} & \mathbb{S} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{F} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\mathbb{F} & \mathbb{S} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} q(0) \\ q(1) \\ \vdots \\ q(T-1) \\ q(T) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{G}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{G}(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{G}(T-1) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(T-1) \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

Desta maneira segue o resultado. $\square$

Observação 2.7. Note que sempre que existirem as soluções de (2.15), elas podem estar relacionadas com $q_i(0)$ não admissíveis, ou seja, valores que não correspondem a $\mathcal{E} \{x(0) 1_{\{\theta(0)=i\}}\}$. Por exemplo, considerando o Sistema Ψ com $N = 2$, $n = 1$ e $x(0) = 1$, temos que

$$q_1(0) = \pi_1(0) \quad e \quad q_2(0) = \pi_2(0) = 1 - \pi_1(0),$$

levando a

$$\frac{q_1(0)}{q_2(0)} = \frac{\pi_1(0)}{1 - \pi_1(0)},$$

mas (2.15) não atende esta restrição. Para corrigir este possível problema avaliamos

$$q_i(0) = \mathcal{E} \{x(0) 1_{\{\theta(0)=i\}}\} = \mathcal{E} \{x(0)\} \mathcal{E} \{1_{\{\theta(0)=i\}}\} = \mathcal{E} \{x(0)\} \pi_i(0)$$

e, consequentemente,

$$q_i(0) = \frac{\pi_i(0)}{\pi_j(0)} q_j(0).$$

Logo, definindo

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{1 \times n} & -\left(\frac{\pi_1(0)}{\pi_2(0)}\right) \mathbb{I}_{1 \times n} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{1 \times n} & -\left(\frac{\pi_2(0)}{\pi_3(0)}\right) \mathbb{I}_{1 \times n} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbb{I}_{1 \times n} & -\left(\frac{\pi_{N-1}(0)}{\pi_N(0)}\right) \mathbb{I}_{1 \times n} \\ -\left(\frac{\pi_N(0)}{\pi_1(0)}\right) \mathbb{I}_{1 \times n} & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbb{I}_{1 \times n} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

podemos reescrever (2.19) como

$$\begin{pmatrix} -\mathbb{F} & \mathbb{S} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{F} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\mathbb{F} & \mathbb{S} \\ \mathbb{Q} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} q(0) \\ q(1) \\ \vdots \\ q(T-1) \\ q(T) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{G}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{G}(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{G}(T-1) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(T-1) \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Note que (2.6) representa um sistema singular sem saltos, permitindo utilizar o Teorema 2.1 para obter o seguinte resultado.

Lema 2.5. *Sempre que a matriz $\mathbb{H} \in \mathcal{R}^{TNn \times (T+1)Nn}$ tem posto linha pleno então existe $q(k) \in \mathbb{R}^{Nn}$ satisfazendo (2.6).*

Demonstração. Do Lema 2.4 podemos reescrever o Sistema (2.6) como $\mathbb{H}q = \mathbb{G}u$. Utilizando resultados básicos de álgebra linear e identificando com o item (v) do Teorema 2.1 segue o resultado. $\square$

O próximo resultado nos apresenta uma associação entre a T -regularidade do Sistema Ψ e a matriz $\mathbb{H}$ do Sistema (2.15).

Teorema 2.3. *Se o Sistema Ψ é T -regular então $\mathbb{H}$ tem posto linha pleno.*

Demonstração. Por hipótese, sabemos que o Sistema Ψ é T -regular, assim, do Lema 2.3, $q_i(k) = \mathcal{E} \{x(k) 1_{\{\theta(k)=i\}}\}$ satisfaz o Sistema (2.6). Do Lema 2.4 temos que o Sistema (2.6) pode ser reescrito como (2.15) e, finalmente, no Lema 2.5 temos que (2.6) tem solução se, e só se, a matriz $\mathbb{H}$ tem posto linha pleno. $\square$

Apresentamos, na sequência, resultados que auxiliam no cálculo de $\mathcal{E} \{x(k) 1_{\{\theta(k)=i\}}\}$, $i \in \mathbb{T}$ e $k \geq 0$. Este resultado é importante, pois, como comentado na Observação 2.6, o Sistema (2.6) pode apresentar multiplicidade de soluções, mas, dentre elas, estamos interessados naquela que representa $q_i(k) = \mathcal{E} \{x(k) 1_{\{\theta(k)=i\}}\}$.

Lema 2.6. *Se a matriz $\mathbb{H}$ tem posto linha pleno então para cada sequência de controle $\mathcal{U} = \{u(0), u(1), \dots, u(T-1)\}$ e condição de contorno (ii) temos que o Sistema (2.6) tem unicidade de solução.*

Demonstração. Do Lema 2.4 temos que o Sistema (2.6) pode ser reescrito como (2.15). Uma vez que $q(0) := x_0\pi(0)$ e $q(T)$ é dado, podemos fazer

$$\begin{cases} \mathbb{S}q(1) = \bar{G}(0)u(0) + \mathbb{F}q(0) \\ -\mathbb{F}q(T-1) = \bar{G}(T-1)u(T-1) - \mathbb{S}q(T) \end{cases}$$

de tal forma que

$$\begin{pmatrix} \mathbb{S} & 0 & \cdots & 0 \\ -\mathbb{F} & \mathbb{S} & \cdots & 0 \\ 0 & -\mathbb{F} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\mathbb{F} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} q(1) \\ q(2) \\ q(3) \\ \vdots \\ q(T-1) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{G}(0) & 0 & \cdots & 0 & \mathbb{F} & 0 \\ 0 & \bar{G}(1) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{G}(T-1) & 0 & -\mathbb{S} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(T-1) \\ q(0) \\ q(T) \end{bmatrix},$$

identificando

$$\check{\mathbb{H}} := \begin{pmatrix} \mathbb{S} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\mathbb{F} & \mathbb{S} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mathbb{F} & \mathbb{S} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\mathbb{F} \end{pmatrix}, \quad \check{\mathbb{G}} := \begin{pmatrix} \bar{G}(0) & 0 & \cdots & 0 & \mathbb{F} & 0 \\ 0 & \bar{G}(1) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{G}(T-1) & 0 & -\mathbb{S} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

$$\check{q} := \begin{bmatrix} q'(1) & \cdots & q'(T-1) \end{bmatrix}' \text{ e } \check{u} := \begin{bmatrix} u'(0) & \cdots & u'(T-1) & q'(0) & q'(T) \end{bmatrix}'$$

temos que o Sistema (2.6) pode ser reescrito como

$$\check{\mathbb{H}}\check{q} = \check{\mathbb{G}}\check{u}.$$

Como, por hipótese, $\mathcal{U}$, $q(0) = x_0\pi(0)$ e $x(T)$ são dados temos que $\check{\mathbb{G}}$ e $\check{u}$ são fixos, logo $\check{q}$ é único se, e só se, $\check{\mathbb{H}}$ tem posto pleno. Uma vez que $\mathbb{H}$ tem posto linha pleno, o sistema

$$\begin{pmatrix} -\mathbb{F} & \mathbb{S} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{F} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\mathbb{F} & \mathbb{S} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} q(0) \\ q(1) \\ \vdots \\ q(T-1) \\ q(T) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{G}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{G}(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{G}(T-1) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(T-1) \end{bmatrix},$$

tem solução, logo

$$\begin{pmatrix} \mathbb{S} & -\mathbb{F} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{S} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbb{S} & -\mathbb{F} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} q(T) \\ q(T-1) \\ q(T-2) \\ \vdots \\ q(1) \\ q(0) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{G}(T-1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{G}(T-2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{G}(0) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u(T-1) \\ u(T-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix},$$

também tem solução, portanto $\check{\mathbb{H}}'$ tem posto linha pleno.

□

Teorema 2.4. *Se o Sistema Ψ é T -regular com condição de contorno (ii), $\mathbb{H}$ tem posto linha pleno e $\mathcal{U}$, $q(0)$ e $q(T)$ são dados, então (2.15) tem uma única solução q e, além disso, $q_i(k) = \mathcal{E} \{x(k) 1_{\{\theta(k)=i\}}\}$.*

Demonstração. Uma vez que o Sistema Ψ é T -regular, aplicando o Teorema 2.2 concluímos que

existe solução para o Sistema (2.6). Assim, do Lema 2.4 também concluímos que existe solução para (2.15). Por outro lado, como $\mathbb{H}$ tem posto linha pleno, aplicando o Lema 2.4 temos que (2.15) tem unicidade de solução. Desta maneira segue o resultado. $\square$

2.3.1 Sistemas lineares singulares sujeitos a saltos Markovianos reduzidos a um modo de Markov

Como veremos, os resultados anteriores têm relevância também quando analisamos os sistemas singulares sem saltos (isto é, com $N = 1$) como segue. Considere a noção de T -regularidade aplicada ao Sistema Ψ com $N = 1$; pode-se verificar que esta noção é equivalente ao seguinte resultado.

Definição 2.4. Dizemos que o Sistema Ψ com $N = 1$, ou equivalentemente $(S, F) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n$, é T -regular sempre que para cada sequência de controle $\mathcal{U} = \{u(0), u(1), \dots, u(T)\}$ existirem condições de contorno (i) ou (ii), tais que a trajetória $\mathcal{X} = \{x(0), x(1), \dots, x(T)\}$, satisfazendo Ψ , seja única.

O seguinte resultado sintetiza o conceito apresentado no Lema 2.6 para o Sistema Ψ com $N = 1$.

Lema 2.7. Considere o Sistema Ψ com $N = 1$. Se $\mathbb{H}$ tem posto linha pleno então o Sistema Ψ é T -regular com a condição de contorno (ii).

Demonstração. Note que, considerando $\mathcal{U}$ e $x(0)$ fixos e como $N = 1$, podemos escrever $q(k)$ como

$$q(k) = \mathcal{E} \{x(k) 1_{\{\theta(k)=1\}}\} = x(k),$$

assim, aplicando o Lema 2.3 temos que $x(k)$ satisfaz

$$S x(k+1) = F x(k) + G u(k). \quad (2.23)$$

Desta maneira, a matriz $\mathbb{H}$ pode ser reescrita como

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} -F & S & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -F & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -F & S \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^{Tn \times (T+1)n}. \quad (2.24)$$

Do Lema 2.6 segue o resultado.

□

As relações entre os conceitos de regularidade de sistemas singulares sem saltos, apresentada no Teorema 2.1, e T -regularidade é estabelecida no seguinte resultado.

Corolário 2.1. *Considere o Sistema Ψ com $N = 1$. Dizemos que Ψ é regular se, e só se, Ψ é T -regular com condição de contorno (ii) para todo $T \geq 0$.*

Demonstração. Observe que a matriz $\mathbb{H}$ em (2.24) é equivalente à matriz H do Teorema 2.1. Desta maneira a prova é análoga à apresentada em [29]. □

O exemplo a seguir ilustra o Corolário 2.1 .

Exemplo 2.2. *Considere o sistema apresentado na Observação 2.2. Note que, para $T = 3$*

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz $\mathbb{H}$ tem posto linha pleno, considerando a condição de contorno (ii) este sistema é 3-regular. Verificando a condição de regularidade via Teorema 2.1, temos que Ψ é regular.

2.4 Sistema com saltos Markovianos na matriz singular

Nesta seção vamos considerar o Sistema Ψ generalizado de tal maneira que a matriz singular S dependa da cadeia Θ como segue

$$\bar{\Psi} : \begin{cases} S_{\theta(k)}x(k+1) = F_{\theta(k)}x(k) + G_{\theta(k)}u(k), \\ x(0) = x_0, \quad \theta(0) = \theta_0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Note que também neste caso uma adaptação direta do conceito de regularidade dos SLSSM contínuos no tempo, encontrado por exemplo em [11] e [28], para os SLSSM discretos no tempo, é a verificação de que $\det(\lambda S_i - F_i)$ não seja identicamente nulo para cada modo $i \in \mathbb{T}$. Mas esta adaptação não caracteriza a noção de regularidade, pois considerando o Sistema $\bar{\Psi}$, com $N = 2$, de tal forma que

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F_1 = S_2, F_2 = S_1 \text{ e } G_1 = G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

obtemos

$$\det(\lambda S_1 - F_1) = \det(\lambda S_2 - F_2) = -\lambda \neq 0,$$

o que nos leva a concluir que esse sistema é regular modo a modo mas, quando considerarmos $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, as únicas trajetórias prováveis da cadeia de Markov são dadas por

$$\omega_1 = \{1, 2, 1, 2, \dots\} \text{ e } \omega_2 = \{2, 1, 2, 1, \dots\},$$

e analisando o sistema, considerando por exemplo a trajetória ω_1 , temos que:

$$\begin{aligned} S_1 x(1) = F_1 x(0) &\Rightarrow \begin{cases} x_1(1) &= 0 x_1(0) \\ 0 x_2(1) &= x_2(0) \end{cases} \Rightarrow x(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \end{bmatrix}; \\ S_2 x(2) = F_2 x(1) &\Rightarrow \begin{cases} 0 x_1(2) &= x_1(1) \\ x_2(2) &= 0 x_2(1) \end{cases} \Rightarrow x(2) = \begin{bmatrix} c_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ S_1 x(3) = F_1 x(2) &\Rightarrow \begin{cases} x_1(3) &= 0 x_1(2) \\ 0 x_2(3) &= x_2(2) \end{cases} \Rightarrow x(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ c_3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e assim sucessivamente, sendo c_m , para cada $m = 1, 2, \dots$, uma constante arbitrária. Note que $x_2(1) = c_1$, $x_1(2) = c_2$ e $x_2(3) = c_3$ são variáveis livres e, portanto, esse sistema não tem unicidade de solução e, consequentemente, não temos unicidade de solução da trajetória $\mathcal{X}$.

As condições necessárias para a regularidade estocástica apresentadas na Seção 2.3 são válidas, com pequenas modificações, para o sistema $\bar{\Psi}$. Desta maneira, vamos apresentar os resultados sem as respectivas demonstrações.

Teorema 2.5. *Seja r um número inteiro positivo. Se o Sistema $\bar{\Psi}$ é T -regular, então o processo*

$\mathcal{X}$ é limitado quase certamente e, além disso, existem $L_k \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq k \leq T$, tal que

$$\mathcal{E} \{ \|x(k)\|^r \} \leq \|L_k\|^r.$$

O Lema 2.3 também tem um análogo para o Sistema $\bar{\Psi}$, no entanto precisamos lidar com o primeiro momento *duplamente* condicionado, pois definimos

$$q_{mi}(k) = \mathcal{E} \{ x(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k-1)=m\}} \mid \theta(k) = i \}$$

o que traz certa complexidade adicional. O resultado é apresentado no lema a seguir.

Lema 2.8. *Seja o seguinte sistema nas variáveis $q_{mi}(k)$, com $m, i \in \mathbb{T}$ e $k \geq 0$,*

$$S_i \sum_{j=1}^N p_{ij} q_{ij}(k+1) = F_i \sum_{m=1}^N p_{mi} q_{mi}(k) + \pi_i(k) G_i u(k), \quad i \in \mathbb{T}. \quad (2.27)$$

Se o sistema $\bar{\Psi}$ é T -regular com condição (i) ou (ii), como apropriado, então

$$q_{mi}(k) = \mathcal{E} \{ x(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k-1)=m\}} \mid \theta(k) = i \}$$

satisfaz (2.27).

A prova do Lema 2.8 é omitida por ser semelhante, em estrutura, à prova do Lema 2.3. Ressaltamos apenas que em (2.7) multiplicamos o Sistema Ψ por $\mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}}$ e que neste caso multiplicamos o Sistema $\bar{\Psi}$ por $\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}$ e posteriormente aplicamos o valor esperado obtendo

$$\mathcal{E} \{ S_{\theta(k)} x(k+1) \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \} = \mathcal{E} \{ F_{\theta(k)} x(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \} + \mathcal{E} \{ G_{\theta(k)} u(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \}. \quad (2.28)$$

Utilizando propriedades básicas de valor esperado temos que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \mathcal{E} \{ S_{\theta(k)} x(k+1) \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j, \theta(k)=i\}} \} \\ &= \sum_{m=1}^N \mathcal{E} \{ F_{\theta(k)} x(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i, \theta(k-1)=m\}} \} + \mathcal{E} \{ G_{\theta(k)} u(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \} \end{aligned} \quad (2.29)$$

e, consequentemente, obtemos

$$\begin{aligned}
& S_i \sum_{j=1}^N \mathcal{E} \left\{ x(k+1) \mid \theta(k+1) = j, \theta(k) = i \right\} P(\theta(k+1) = j, \theta(k) = i) \\
&= F_i \sum_{m=1}^N \mathcal{E} \left\{ x(k) \mid \theta(k) = i, \theta(k-1) = m \right\} P(\theta(k) = i, \theta(k+1) = m) \\
&\quad + G_i \mathcal{E} \{ u(k) 1_{\{\theta(k)=i\}} \} \\
& S_i \sum_{j=1}^N \mathcal{E} \left\{ x(k+1) \mid \theta(k+1) = j, \theta(k) = i \right\} P(\theta(k+1) = j \mid \theta(k) = i) P(\theta(k) = i) \\
&= F_i \sum_{m=1}^N \mathcal{E} \left\{ x(k) \mid \theta(k) = i, \theta(k-1) = m \right\} P(\theta(k) = i \mid \theta(k-1) = m) P(\theta(k-1) = m) \\
&\quad + G_i \mathcal{E} \{ u(k) 1_{\{\theta(k)=i\}} \} \\
& S_i \sum_{j=1}^N p_{ij} \mathcal{E} \left\{ x(k+1) 1_{\{\theta(k)=i\}} \mid \theta(k+1) = j \right\} \\
&= F_i \sum_{m=1}^N p_{mi} \mathcal{E} \left\{ x(k) 1_{\{\theta(k-1)=m\}} \mid \theta(k) = i \right\} + G_i \mathcal{E} \{ u(k) 1_{\{\theta(k)=i\}} \}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Lembrando que $u(k)$ é independente de $1_{\{\theta(k)=i\}}$ e, definindo

$$q_{mi}(k) := \mathcal{E} \left\{ x(k) 1_{\{\theta(k-1)=m\}} \mid \theta(k) = i \right\},$$

segue o resultado. Para o Sistema $\bar{\Psi}$, redefinimos

$$\begin{aligned}
\mathbb{S} &= \begin{pmatrix} p_{11}S_1 & \cdots & p_{1N}S_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p_{21}S_2 & \cdots & p_{2N}S_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & p_{N1}S_N & \cdots & p_{NN}S_N \end{pmatrix} \\
\mathbb{F} &= \begin{pmatrix} p_{11}F_1 & \cdots & 0 & p_{21}F_1 & \cdots & 0 & \cdots & p_{N1}F_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{1N}F_N & 0 & \cdots & p_{2N}F_N & \cdots & 0 & \cdots & p_{NN}F_N \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

e, desta maneira, as definições de $\mathbb{H}$ e $\tilde{\mathbb{H}}$ permanecem com a mesma estrutura apresentada em

(2.14). Com isso, analogamente a (2.15)

$$\mathbb{H} q = \mathbb{G} u.$$

Com essas alterações, os Lemas 2.5 e 2.6 e os Teoremas 2.3 e 2.4 permanecem válidos.

2.5 Conclusão

Complementando estudos anteriores, neste capítulo aperfeiçoamos o conceito de regularidade, denominada de regularidade estocástica de horizonte finito T (ou T -regularidade), e apresentamos condições necessárias para a verificação da T -regularidade, baseadas no primeiro momento dos SLSSM. Observamos que quando reduzimos os SLSSM para os sistemas lineares convencionais, a T -regularidade se reduz à regularidade de horizonte infinito encontrada na literatura sempre que consideramos condições de contorno no sistema original que fixam o estado inicial e final.

CAPÍTULO 3

Estabilidade exponencial estocástica dos sistemas singulares lineares sujeitos a saltos Markovianos

Neste capítulo, apresentamos um conjunto de equações de Lyapunov acopladas generalizadas (ELAG) para SLSSM em tempo discreto que estendem resultados apresentados em [12] e [13], para sistemas singulares convencionais, e os resultados apresentados em [4], para os sistemas lineares singulares sujeitos a saltos Markovianos (SLSM) convencionais. Essas ELAG servem para caracterizar a estabilidade exponencial do sistema. Essa análise exponencial da estabilidade estocástica complementa os resultados apresentados em [21], onde estabelecemos uma condição de Lyapunov para a estabilidade na média quadrática de SLSSM.

Desenvolvemos um algoritmo para resolver essas ELAG baseado em iterações de equações de Lyapunov generalizadas (ELG). Tendo em vista que cada ELG possui duas variáveis, X e R (para cada modo do sistema), construímos uma nova variável $\mathbb{X}$ que incorpora, com uma certa estrutura fixa, estas duas variáveis de tal maneira que elas são determinadas simultaneamente.

Para resolver cada uma das ELG, apresentamos uma formulação, a partir de produto de Kronecker e o operador vec, que leva a um sistema linear o qual pode ser resolvido de maneira convencional. As soluções assim obtidas das ELG servem para compor um método iterativo para solução das ELAG, veja [14] e [22]. Os métodos encontrados na literaturam não apresentam estas características. O algoritmo apresenta a importante e obviamente desejada propriedade de

que, se a sequência gerada pela recursão converge, então ela converge para a solução das ELAG.

Este capítulo está organizado como segue. Na Seção 3.1 apresentamos o conceito de estabilidade exponencial estocástica existente na literatura de sistemas estocásticos e resultados preliminares que serão utilizados ao longo do texto. Na Seção 3.2 contruímos um resultado em que as ELAG são condições necessárias para a verificação da estabilidade exponencial para os SLSSM. Na Seção 3.3 desenvolvemos um algoritmo para resolver as ELAG propostas, e na Seção 3.4 apresentamos um exemplo numérico que ilustra o método.

3.1 Resultados preliminares

Com o objetivo de desenvolver as ELAG para os SLSSM, apresentamos, nesta seção, alguns conceitos preliminares. Considerando o sistema Ψ , com $u = 0$, dado por

$$\Psi : \begin{cases} S x(k+1) = F_{\theta(k)} x(k), & k \geq 0, \end{cases}$$

e recordando o seguinte resultado encontrado na literatura de sistemas estocásticos, veja [6].

Definição 3.1. Dizemos que o Sistema Ψ é estocasticamente exponencialmente estável se para algum $\beta \geq 1$, $0 < \zeta < 1$, temos para todo $x(0)$ admissível e todo $\theta(0) \in \Theta$,

$$\mathcal{E} \{ \|x(k)\|^2 \} \leq \beta \zeta^k \|x(0)\|^2, \quad k \geq 0.$$

Na sequência, apresentamos um resultado de observabilidade que é fundamental na análise da estabilidade do Sistema Ψ , veja [1].

Definição 3.2. Considere $S \in \mathcal{R}^n$, $F = (F_1, \dots, F_N) \in \mathcal{M}^n$ e $Q = (Q_1, \dots, Q_N) \in \mathcal{M}^{n0}$. O Sistema Ψ é observável em Q , ou (S, F, Q) é observável, se para todo $k \geq 0$ existirem $\gamma > 0$ e $T > 0$, independentes de k e de $\theta(k) = \theta_k$, tais que

$$\mathcal{E} \left\{ \sum_{t=k}^{k+T} x'(t) Q_{\theta(t)} x(t) \mid \mathcal{F}_k \right\} \geq \gamma \|x(k)\|^2.$$

Uma vez que $F_{\theta(k)}$ não depende explicitamente de k , para a observabilidade, esta é uma condição necessária e suficiente para a verificação da observabilidade no caso em que $k = 0$.

Lema 3.1. Considere $Q_{\theta(k)} \geq 0 \in \mathbb{R}^n$, $x(k)$ estável e a função candidata de Lyapunov dada por

$$V(x(k), \theta(k)) := \mathcal{E} \left\{ \sum_{t=k}^T x'(t) Q_{\theta(t)} x(t) \mid \mathcal{F}_k \right\}, \quad (3.1)$$

então

$$\mathcal{E} \left\{ V(x(k), \theta(k)) - V(x(k+1), \theta(k+1)) \mid \mathcal{F}_k \right\} = x'(k) Q_{\theta(k)} x(k). \quad (3.2)$$

Demonstração. A partir de (3.1) podemos escrever,

$$\begin{aligned} & \mathcal{E} \left\{ V(x(k), \theta(k)) - V(x(k+1), \theta(k+1)) \mid \mathcal{F}_k \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ \sum_{t=k}^T x'(t) Q_{\theta(t)} x(t) - \sum_{t=k+1}^T x'(t) Q_{\theta(t)} x(t) \mid \mathcal{F}_k \right\} \\ &= x'(k) Q_{\theta(k)} x(k) + \mathcal{E} \left\{ \sum_{t=k+1}^T x'(t) Q_{\theta(t)} x(t) \mid \mathcal{F}_k \right\} - \mathcal{E} \left\{ \sum_{t=k+1}^T x'(t) Q_{\theta(t)} x(t) \mid \mathcal{F}_k \right\} \\ &= x'(k) Q_{\theta(k)} x(k). \end{aligned}$$

□

Lema 3.2. Se existirem $Q_{\theta(k)} \geq 0 \in \mathbb{R}^n$ e $S' X_{\theta(k)} S \geq 0 \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$x'(k) S' X_{\theta(k)} S x(k) := \mathcal{E} \left\{ \sum_{t=k}^{\infty} x'(t) Q_{\theta(t)} x(t) \mid \mathcal{F}_k \right\} \quad (3.3)$$

então, para $\theta(k) = i \in \mathbb{T}$,

$$S' X_i S = F_i' \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j \right) F_i + Q_i + F_i' S_0 R_i + R_i' S_0' F_i, \quad i \in \mathbb{T} \quad (3.4)$$

nas quais $R_i \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ e S_0 é tal que $S' S_0 = 0$.

Demonstração. De (3.3), considerando $Q_{\theta(k)} \geq 0 \in \mathbb{R}^n$ e $X_{\theta(k)} > 0 \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\begin{aligned} x'(k) S' X_{\theta(k)} S x(k) &= \mathcal{E} \left\{ x'(k) Q_{\theta(k)} x(k) \mid \mathcal{F}_k \right\} + \mathcal{E} \left\{ \sum_{t=k+1}^{\infty} x'(t) Q_{\theta(t)} x(t) \mid \mathcal{F}_k \right\} \\ x'(k) S' X_{\theta(k)} S x(k) &= x'(k) Q_{\theta(k)} x(k) + x'(k+1) S' X_{\theta(k+1)} S x(k+1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Definindo $R_{\theta(k)} \in \mathcal{R}^{(n-r) \times n}$ e considerando S_0 tal que $S' S_0 = 0$, podemos reescrever (3.5) como

$$\begin{aligned}
& x'(k) S' X_{\theta(k)} S x(k) \\
&= x'(k+1) S' X_{\theta(k+1)} S x(k+1) + x'(k) Q_{\theta(k)} x(k) + x'(k+1) S' S_0 R_{\theta(k)} x(k) \\
&\quad + x'(k) R'_{\theta(k)} S'_0 S x(k+1) \\
&= x'(k) F'_{\theta(k)} X_{\theta(k+1)} F_{\theta(k)} x(k) + x'(k) Q_{\theta(k)} x(k) + x'(k) F'_{\theta(k)} S_0 R_{\theta(k)} x(k) \\
&\quad + x'(k) R'_{\theta(k)} S'_0 F_{\theta(k)} x(k) \\
& \\
& x'(k) S' X_{\theta(k)} S x(k) \\
&= x'(k) \left[F'_{\theta(k)} X_{\theta(k+1)} F_{\theta(k)} + F'_{\theta(k)} S_0 R_{\theta(k)} + R'_{\theta(k)} S'_0 F_{\theta(k)} + Q_{\theta(k)} \right] x(k)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

ou equivalentemente,

$$S' X_{\theta(k)} S = F'_{\theta(k)} X_{\theta(k+1)} F_{\theta(k)} + F'_{\theta(k)} S_0 R_{\theta(k)} + R'_{\theta(k)} S'_0 F_{\theta(k)} + Q_{\theta(k)}. \tag{3.7}$$

Aplicando o valor esperado condicional $\mathcal{E} \{ \cdot \mid \mathcal{F}_k \}$ em (3.7),

$$\mathcal{E} \{ S' X_{\theta(k)} S \mid \mathcal{F}_k \} = \mathcal{E} \left\{ \left[F'_{\theta(k)} X_{\theta(k+1)} F_{\theta(k)} + F'_{\theta(k)} S_0 R_{\theta(k)} + R'_{\theta(k)} S'_0 F_{\theta(k)} + Q_{\theta(k)} \right] \mid \mathcal{F}_k \right\}$$

logo

$$\begin{aligned}
S' X_{\theta(k)} S &= F'_{\theta(k)} S_0 R_{\theta(k)} + R'_{\theta(k)} S'_0 F_{\theta(k)} + Q_{\theta(k)} \\
&\quad + F'_{\theta(k)} \sum_{j=1}^N \mathcal{E} \left\{ X_{\theta(k+1)} 1_{\{\theta(k+1)=j\}} \mid \mathcal{F}_k \right\} F_{\theta(k)} \\
S' X_{\theta(k)} S &= F'_{\theta(k)} \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j \right) F_{\theta(k)} + Q_{\theta(k)} + F'_{\theta(k)} S_0 R_{\theta(k)} + R'_{\theta(k)} S'_0 F_{\theta(k)}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Então, para $\theta(k) = i$, podemos reescrever (3.8) como

$$S' X_i S = F'_i \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j \right) F_i + Q_i + F'_i S_0 R_i + R'_i S'_0 F_i, \quad i \in \mathbb{T}.$$

□

Observação 3.1. Note que (3.3) é válida considerando

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{t=k}^T x'(t) Q_{\theta(k)} x(t) \mid \mathcal{F}_k \right\}$$

com termo final $x'(T) S' M_{\theta(T)} S x(T)$, ou seja, $Q_{\theta(T)} = S' M_{\theta(T)} S$.

3.2 Condição de equações de Lyapunov acopladas generalizadas para a estabilidade exponencial

Nesta seção apresentamos uma análise de Lyapunov dos SLSSM que nos permite verificar a estabilidade exponencial. Esta é uma extensão dos resultados apresentados em [21]. As análises convencionais encontradas na literatura, veja por exemplo [15] e referências nela citada, não abordam estabilidade desta classe de sistemas Markovianos neste contexto.

Teorema 3.1. Considere o Sistema Ψ regular estocasticamente, (S, F, Q) observável e $S_0 \in \mathcal{R}^{n \times (n-r)}$ posto coluna plena tal que $S' S_0 = 0$, $r = \text{posto}(S)$. Seja a seguinte ELAG com variáveis $(X_i, R_i) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^{(n-r) \times n}$

$$S' X_i S = F_i' \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j \right) F_i + F_i' S_0 R_i + R_i' S_0' F_i + Q_i, \quad i \in \mathbb{T}, \quad (3.9)$$

na qual $S, F_i \in \mathcal{R}^n$. Se existir uma solução para (3.9) com $S' X_i S \geq 0$, $i \in \mathbb{T}$, então o Sistema Ψ é estocasticamente exponencialmente estável.

Demonstração. Para mostrar a estabilidade, considere

$$V(x(k), \theta(k)) := \mathcal{E} \left\{ \sum_{t=k}^{\infty} x'(t) Q_{\theta(t)} x(t) \mid \mathcal{F}_k \right\}.$$

Do Lema 3.1 temos que

$$\mathcal{E} \left\{ V(x(k), \theta(k)) - V(x(k+1), \theta(k+1)) \mid \mathcal{F}_k \right\} = x'(k) Q_{\theta(k)} x(k), \quad k \geq 0. \quad (3.10)$$

Empregando propriedades básicas do operador $\mathcal{E}\{\cdot\}$, de (3.10) temos que, para $0 \leq k \leq T$,

$$\begin{aligned}
V(x(0), \theta(0)) - \mathcal{E}\{V(x(1), \theta(1)) \mid \mathcal{F}_0\} &= \mathcal{E}\{x'(0)Q_{\theta(0)}x(0) \mid \mathcal{F}_0\} \\
\mathcal{E}\{V(x(1), \theta(1)) \mid \mathcal{F}_0\} - \mathcal{E}\{V(x(2), \theta(2)) \mid \mathcal{F}_0\} &= \mathcal{E}\{x'(1)Q_{\theta(1)}x(1) \mid \mathcal{F}_0\} \\
&\vdots \\
\mathcal{E}\{V(x(T-1), \theta(T-1)) \mid \mathcal{F}_0\} - \mathcal{E}\{V(x(T), \theta(T)) \mid \mathcal{F}_0\} \\
&= \mathcal{E}\{x'(T-1)Q_{\theta(T-1)}x(T-1) \mid \mathcal{F}_0\}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Somando todas as equações de (3.11) obtemos

$$V(x(0), \theta(0)) - \mathcal{E}\{V(x(T), \theta(T)) \mid \mathcal{F}_0\} = \mathcal{E}\left\{\sum_{t=0}^{T-1} x'(t)Q_{\theta(t)}x(t) \mid \mathcal{F}_0\right\}. \tag{3.12}$$

Uma vez que (S, F, Q) é observável, empregando a Definição 3.2, podemos reescrever (3.12) como

$$V(x(0), \theta(0)) - \mathcal{E}\{V(x(T), \theta(T)) \mid \mathcal{F}_0\} \geq \gamma \|x(0)\|^2, \tag{3.13}$$

com $\gamma > 0$. Similarmente, para $\ell > 1 \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}\{V(x(\ell T), \theta(\ell T)) \mid \mathcal{F}_0\} - \mathcal{E}\{V(x((\ell+1)T), \theta((\ell+1)T)) \mid \mathcal{F}_0\} \\
&= \mathcal{E}\left\{\sum_{t=\ell T}^{((\ell+1)T)-1} x'(t)Q_{\theta(t)}x(t) \mid \mathcal{F}_0\right\} > \|x(\ell T)\|^2.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Para cada $\theta(k)$ conhecido, defina $\delta = \sup(\sigma(S'X_{\theta(k)}S))$, $k \geq 0$, então

$$V(x(k), \theta(k)) \leq \delta \|x(k)\|^2, \quad k \geq 0, \tag{3.15}$$

de (3.13) e (3.15) obtemos

$$V(x(0), \theta(0)) - \mathcal{E}\{V(x(T), \theta(T)) \mid \mathcal{F}_0\} \geq \gamma \frac{\delta}{\delta} \|x(0)\|^2 \geq \gamma \frac{1}{\delta} V(x(0), \theta(0)), \tag{3.16}$$

de (3.16) temos que

$$\mathcal{E}\{V(x(T), \theta(T)) \mid \mathcal{F}_0\} \leq \left(1 - \frac{\gamma}{\delta}\right) V(x(0), \theta(0)). \tag{3.17}$$

Similarmente, para $\ell > 1 \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\begin{aligned} & \mathcal{E} \left\{ V(x(\ell T), \theta(\ell T)) \mid \mathcal{F}_0 \right\} - \mathcal{E} \left\{ V(x((\ell+1)T), \theta((\ell+1)T)) \mid \mathcal{F}_0 \right\} \\ & > \frac{\gamma}{\delta} \mathcal{E} \left\{ V(x(\ell T), \theta(\ell T)) \mid \mathcal{F}_0 \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

então

$$\mathcal{E} \left\{ V(x((\ell+1)T), \theta((\ell+1)T)) \mid \mathcal{F}_0 \right\} \leq \left(1 - \frac{\gamma}{\delta}\right) \mathcal{E} \left\{ V(x(\ell T), \theta(\ell T)) \mid \mathcal{F}_0 \right\}. \quad (3.19)$$

De (3.19) podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left\{ V(x(\ell T), \theta(\ell T)) \mid \mathcal{F}_0 \right\} & \leq \left(1 - \frac{\gamma}{\delta}\right) \mathcal{E} \left\{ V(x((\ell-1)T), \theta((\ell-1)T)) \mid \mathcal{F}_0 \right\} \\ & \leq \left(1 - \frac{\gamma}{\delta}\right)^2 \mathcal{E} \left\{ V(x((\ell-2)T), \theta((\ell-2)T)) \mid \mathcal{F}_0 \right\} \\ & \quad \vdots \\ & \leq \left(1 - \frac{\gamma}{\delta}\right)^\ell \mathcal{E} \left\{ V(x(0), \theta(0)) \mid \mathcal{F}_0 \right\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Note que, da Definição 3.2, podemos escrever $\gamma \|x(k)\|^2 \leq \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{T-1} x'(k) Q_{\theta(k)} x(k) \mid \mathcal{F}_0 \right\}$, ou seja,

$$\gamma \|x(k)\|^2 \leq V(x(k), \theta(k)). \quad (3.21)$$

Aplicando o valor esperado em (3.21), considerando $k = \ell T$, segue que

$$\gamma \mathcal{E} \left\{ \|x(\ell T)\|^2 \mid \mathcal{F}_0 \right\} \leq \mathcal{E} \left\{ V(x(\ell T), \theta(\ell T)) \mid \mathcal{F}_0 \right\}. \quad (3.22)$$

Aplicando (3.15), (3.20) e (3.22), obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \gamma \mathcal{E} \left\{ \|x(\ell T)\|^2 \mid \mathcal{F}_0 \right\} & \leq \mathcal{E} \left\{ V(x(\ell T), \theta(\ell T)) \mid \mathcal{F}_0 \right\} \\ & \leq \left(1 - \frac{\gamma}{\delta}\right)^\ell V(x(0), \theta(0)) \\ & \leq \left(1 - \frac{\gamma}{\delta}\right)^\ell \delta \|x(0)\|^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

assim, podemos reescrever (3.23) como segue

$$\mathcal{E} \left\{ \|x(\ell T)\|^2 \mid \mathcal{F}_0 \right\} \leq \alpha \|x(0)\|^2, \quad (3.24)$$

na qual $\alpha = \left(1 - \frac{\gamma}{\delta}\right)^\ell \delta$. Desta maneira, para ℓ suficientemente grande, $\alpha < 1$ satisfazendo $\delta \geq 1$. $\square$

Observação 3.2. *Pode-se verificar de forma direta que, quando $N = 1$, as ELAG (3.9) se reduzem às ELG dos sistemas lineares singulares convencionais (sem salto), veja [13]. Note que, como $\mathbb{P} = 1$, podemos reescrever (3.9) como*

$$F_1' X_1 F_1 - S' X_1 S + F_1' S_0 R_1 + R_1' S_0' F_1 + C_1' C_1 = 0.$$

Além disso, fazendo $S = \mathbb{I}$, espaço de estados usual, as ELAG (3.9) se reduzem às ELGA dos SLSM, veja [5], dadas por

$$X_i = F_i' \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j \right) F_i + Q_i.$$

3.3 Algoritmo para a resolução das equações de Lyapunov acopladas generalizadas

Nesta seção propomos um algoritmo para resolver as ELAG. Tendo em vista que o conjunto das ELAG consiste de matrizes desconhecidas

$$(X_i, R_i) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^{(n-r) \times n}$$

associadas às matrizes conhecidas $S, F_i, C_i, i = 1, \dots, N$, construímos uma nova variável $\mathbb{X}$, com uma estrutura fixa, que incorpora estas matrizes desconhecidas de tal maneira que elas são determinadas simultaneamente. Para resolver cada uma das ELG, apresentamos uma formulação que leva a um sistema linear que pode ser resolvido de maneira convencional. Os métodos encontrados na literatura não apresentam estas características.

Com o objetivo de compatibilizar o método que estamos propondo com o método proposto em [4] para SLSM, em que $S = I_n$ e $R = 0$, no sentido de acelerar a convergência dele, introduzimos constantes $\kappa_i > 0, i \in \mathbb{T}$, de tal maneira que adicionamos e subtraímos em (3.9) termos extras como $\kappa_i p_{ii} F_i' X_i(k) F_i$ e $\kappa_i p_{ii} F_i' X_i(k-1) F_i$, obtemos

$$\kappa_i p_{ii} F_i' X_i(k) F_i - S' X_i(k) S + F_i' S_0 R_i(k) + R_i'(k) S_0' F_i - W_i(k) = 0, \quad (3.25)$$

na qual

$$W_i(k) = -F_i' \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j(k-1) - \kappa_i p_{ii} X_i(k-1) \right) F_i - Q_i(k). \quad (3.26)$$

Podemos reescrever (3.25) como

$$M_i \mathbb{X}_i(k) M_i' + N_i \mathbb{X}_i(k) N_i' = W_i(k) \quad (3.27)$$

em que

$$\begin{aligned} M_i &= \begin{bmatrix} S' & (\kappa_i p_{ii})^{\frac{1}{2}} F_i' & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n \times (3n-r)}, \\ N_i &= \begin{bmatrix} I_n & I_n & F_i' S_0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n \times (3n-r)} \end{aligned}$$

e $\mathbb{X}_i(k) \in \mathcal{R}^{(3n-r) \times (3n-r)}$ é dada na seguinte forma

$$\mathbb{X}_i(k) = \begin{bmatrix} -X_i(k) & 0 & 0 \\ 0 & X_i(k) & R_i'(k) \\ 0 & R_i(k) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

lembrando que $X_i(k) = X_i'(k)$. Com base no produto de Kronecker e no operador vec , veja [2], temos que

$$\mathcal{A}_i \text{vec}(\mathbb{X}_i(k)) = b_i(k), \quad i \in \mathbb{T}, \quad (3.29)$$

na qual

$$\mathcal{A}_i = (M_i \otimes M_i) + (N_i \otimes N_i) \quad \text{e} \quad b_i(k) = \text{vec}(W_i(k)). \quad (3.30)$$

Com o intuito de se obter uma solução para (3.27) definimos $X_i(k) = X_i'(k)$ e ressaltamos que nenhuma restrição é imposta às matrizes $R_i(k)$, sendo $i \in \mathbb{T}$ e $k \geq 0$. Estas propriedades são definidas no seguinte conjunto:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} = \left\{ \mathbb{X}_i(k) = \begin{bmatrix} -X_i(k) & 0 & 0 \\ 0 & X_i(k) & R_i'(k) \\ 0 & R_i(k) & 0 \end{bmatrix} : X_i(k) = X_i'(k) \in \mathcal{R}^n, R_i(k) \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}, \right. \\ \left. \text{para cada } i \in \mathbb{T} \text{ e } k \geq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Note que a estrutura de $\mathbb{X}_i(k)$ é composta de simetria e de entradas nulas. Desta maneira sempre podemos encontrar uma matriz de posto linha pleno $\mathcal{V}$ que garante a seguinte condição

$$\mathcal{V} \text{vec}(\mathbb{X}_i(k)) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{X}_i(k) \in \mathfrak{X}, \quad i \in \mathbb{T}, \quad k \geq 0. \quad (3.32)$$

Uma questão importante que surge é como encontrar $\mathcal{V}$. Podemos encontrar uma solução para

(3.9) gerando as sequências $X(k) = \{X_1(k), \dots, X_N(k)\} \in \mathcal{M}^n$ e $R(k) = \{R_1(k), \dots, R_N(k)\} \in \mathcal{M}^{(n-r) \times n}$, $k \geq 0$ de acordo com o seguinte algoritmo:

Algoritmo 1 - [Método para solução das ELAG] Para resolver (3.29), siga os seguintes passos:

Passo 1. Entre com as matrizes S , F_i , S_0 e P , e construa a matriz $\mathcal{A}_i$ e o vetor $b_i(k)$ como em (3.30), para cada $i \in \mathbb{T}$.

Passo 2. Escolha $\mathcal{V}$ adequadamente como em (3.32), $X(0) \in \mathcal{M}^{n_0}$ como $X_i(0) = 0$ e $\kappa_i > 0$, para cada $i \in \mathbb{T}$. Seja $k = 1$.

Passo 3. Encontre $q_i(k) \in \mathbb{R}^{(3n-r)^2}$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_i \\ \mathcal{V} \end{bmatrix} q_i(k) = \begin{bmatrix} b_i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Faça $\text{vec}(\mathbb{X}_i(k)) = q_i(k)$.

Passo 4. Se $X_i(k)$ satisfaz $\|X_i(k) - X_i(k-1)\| \leq \epsilon$, para algum ϵ escolhido previamente, então pare, caso contrário faça $k = k + 1$ e volte para o Passo 2.

◇

Observação 3.3. Com respeito às constantes κ_i , $i \in \mathbb{T}$, as várias simulações que realizamos sugerem fortemente que valores muito baixos de κ_i (levando as matrizes $(\kappa_i p_{ii})^{\frac{1}{2}} F_i$ com autovalores próximos da origem) acarretam sequências de $X_i(k)$ com pouca variação ao longo do tempo k , o que leva a uma desaceleração, enquanto valores muito altos de κ_i resultam em variações altas e um comportamento oscilatório que também desacelera o método.

Teorema 3.2. Se, para cada $i \in \mathbb{T}$, $X_i(k)$ e $R_i(k)$ convergem para algum X_i^∞ e R_i^∞ , respectivamente, com $k \rightarrow \infty$, então X_i^∞ e R_i^∞ satisfazem a ELAG em (3.9).

Demonstração. Assumindo que, para cada $i \in \mathbb{T}$, $X_i(k)$ e $R_i(k)$ convergem para algum X_i^∞ e

R_i^∞ , respectivamente, com $k \rightarrow \infty$. Empregando (3.25) e (3.26) temos que

$$\begin{aligned} & \kappa_i p_{ii} F_i' X_i^\infty F_i - S' X_i^\infty S + F_i' S_0 R_i^\infty + R_i^\infty S_0' F_i \\ & + F_i' \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j^\infty - \kappa_i p_{ii} X_i^\infty \right) F_i + C_i' C_i = 0 \\ & F_i' \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j^\infty \right) F_i - S' X_i^\infty S + F_i' S_0 R_i^\infty + R_i^\infty S_0' F_i + C_i' C_i = 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

que satisfaz a ELAG em (3.9). $\square$

Na sequência, apresentamos o algoritmo para o compute da matriz $\mathcal{V}$.

Algoritmo 2 - [Método para o compute de $\mathcal{V}$] Para calcular $\mathcal{V}$, apresentada em (3.32), siga os seguintes passos:

Passo 1. Considere o par de matrizes $(X_i(k) = X_i'(k), R_i(k))$ e construa uma matriz solução $\mathbb{X}_i(k)$ com a seguinte estrutura

$$\mathbb{X}_i(k) = \begin{bmatrix} -X_i(k) & 0 & 0 \\ 0 & X_i(k) & R_i'(k) \\ 0 & R_i(k) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1_i}(k) & \cdots & c_{(3n-r)_i}(k) \end{bmatrix},$$

no qual $c_{m_i}(k) \in \mathbb{R}^{(3n-r)}$ denota cada coluna de $\mathbb{X}_i(k)$, com $i \in \mathbb{T}$ e $k \geq 0$.

Passo 2. Construa o seguinte vetor

$$q_i(k) := \text{vec}(\mathbb{X}_i(k)) = \begin{bmatrix} c_{1_i}(k) \\ \vdots \\ c_{(3n-r)_i}(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(3n-r)^2},$$

a partir das colunas da matriz $\mathbb{X}_i(k)$.

Passo 3. Determine uma base $\mathcal{Z} := \{z_1, \dots, z_{(3n-r)}\}$ que gera o seguinte conjunto

$$\mathcal{Q}_i = \left\{ q_i(k) \in \mathbb{R}^{(3n-r)^2} \mid q_i(k) = \text{vec}(\mathbb{X}_i(k)) \right\}$$

$$\begin{aligned}
\text{vec}(\mathbb{X}_i(k)) = & \begin{bmatrix} -X_{11_i}(k) \\ -X_{12_i}(k) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -X_{12_i}(k) \\ -X_{22_i}(k) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ X_{11_i}(k) \\ X_{12_i}(k) \\ R_{11_i}(k) \\ 0 \\ 0 \\ X_{12_i}(k) \\ X_{22_i}(k) \\ R_{12_i}(k) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{11_i}(k) \\ R_{12_i}(k) \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{z_1} X_{11_i}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{z_2} X_{12_i}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{z_3} X_{22_i}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{z_4} R_{11_i}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{z_5} R_{12_i}(k). \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Passo 4. Construa, a partir da base $\mathbb{Z}$, o conjunto de vetores linearmente independentes maximal

$$\mathcal{W} := \{w_\ell, \ell = 1, \dots, p \mid w'_\ell z_m = 0, m = 1, \dots, (3n - r)\}$$

Passo 5. A partir de $\mathcal{W}$, construa a seguinte matriz

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_p \end{bmatrix}$$

garantindo que

$$\mathcal{V} \text{vec}(\mathbb{X}_i(k)) = 0.$$

◇

Para ilustrar como computamos uma base $\mathbb{Z}$, consideramos um exemplo com $n = 2$, $r = 1$, $i \in \mathbb{T}$ e $k \geq 0$. Temos, para este caso, o seguinte par de matrizes a serem determinadas

$$X_i(k) = \begin{bmatrix} -X_{11_i}(k) & -X_{12_i}(k) \\ -X_{12_i}(k) & -X_{22_i}(k) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R_i(k) = \begin{bmatrix} R_{11_i}(k) & R_{12_i}(k) \end{bmatrix}.$$

Do Passo 1, obtemos $\mathbb{X}_i(k)$ em (3.32) dado por

$$\mathbb{X}_i(k) = \begin{bmatrix} -X_{11_i}(k) & -X_{12_i}(k) & 0 & 0 & 0 \\ -X_{12_i}(k) & -X_{22_i}(k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{11_i}(k) & X_{12_i}(k) & R_{11_i}(k) \\ 0 & 0 & X_{12_i}(k) & X_{22_i}(k) & R_{12_i}(k) \\ 0 & 0 & R_{11_i}(k) & R_{12_i}(k) & 0 \end{bmatrix}.$$

Dos Passos 2 e 3 obtemos a seguinte decomposição

$$\text{vec}(\mathbb{X}_i(k)) = X_{11_i}(k)z_1 + X_{12_i}(k)z_2 + X_{22_i}(k)z_3 + R_{11_i}(k)z_4 + R_{12_i}(k)z_5,$$

e obtemos a base $\mathcal{Z} := \{z_1, \dots, z_5\}$, com vetores apresentados em (3.35). A matriz $\mathcal{V}$ é facilmente obtida através dos Passos 4 e 5. $\diamond$

3.4 Exemplo numérico

Nesta seção ilustramos o uso do método proposto na Seção 3.3 através de um exemplo numérico.

Exemplo 3.1. Considere o Ψ , com $N = 2$, dado por

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, S_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad C_1' C_1 = C_2' C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$ e $\mathcal{V}$ computado a partir do Algoritmo 2, temos que o Algoritmo 1, na Seção 3.3, converge em 4 passos para a solução

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1.6667 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} 2.0390 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que $S'X_1S \geq 0$ e $S'X_2S \geq 0$, portanto, do Teorema 3.1 segue que o sistema é estocasticamente estável. Por ilustração, na Figura 3.1 traçamos duas realizações de $\|x(k)\|^2$ com

$$\Theta(\omega_1) = \{2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1\}$$

$$\Theta(\omega_2) = \{2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2\}$$

e condição inicial dada por $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}'$.

Figura 3.1: Duas realizações de $\|x(k)\|^2$ para o sistema do Exemplo 3.1.

A Figura 3.2 ilustra a estimativa $\mathcal{E}\{\|x(k)\|^2\}$, denotada por $\overline{\|x(k)\|^2}$, obtida através de simulações Monte Carlo baseadas em 1000 realizações. Assumimos para este caso $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}'$.

Figura 3.2: Estimativa de $\mathcal{E}\{\|x(k)\|^2\}$ para o sistema do Exemplo 3.1.

3.5 Conclusão

Neste capítulo foi proposto um conjunto de equações de Lyapunov Acopladas Generalizadas (ELAG), para sistemas lineares singulares com salto de Markov, que é utilizado como uma condição suficiente para a estabilidade exponencial e um algoritmo para resolver as ELAG. Tendo em vista que o conjunto das ELAG consiste de matrizes desconhecidas (X_i, R_i) , construímos uma nova variável $\mathbb{X}$, com uma estrutura fixa, que incorpora estas matrizes desconhecidas de tal maneira que elas são determinadas simultaneamente. Para resolver cada uma das ELG, apresentamos uma formulação que leva a um sistema linear e pode ser resolvido de maneira usual. Quando a sequência de soluções gerada pelo método converge, então o SLSSM é estocasticamente exponencialmente estável. Os métodos convencionais encontrados na literaturam não abordam este contexto. Um exemplo ilustrativo da eficiência do método é apresentado.

CAPÍTULO 4

Regulador linear quadrático para os sistemas lineares singulares sujeitos a saltos Markovianos

O objetivo deste capítulo é apresentar um regulador linear quadrático para SLSSM. Serão utilizados para isto resultados fundamentais de estabilidade segundo Lyapunov encontrados em sistemas lineares singulares convencionais, eles serão estendidos para sistemas lineares singulares sujeitos a saltos Markovianos. Também, os conceitos de regularidade desenvolvidos nesta tese são levados em consideração na regulação deste tipo de sistema.

4.1 O regulador

Considere o problema do regulador ótimo quadrático para sistemas singulares a tempo discreto modelados como no Sistema Ψ , apresentado na equação (4.1), dado por:

$$\Psi : \begin{cases} Sx(k+1) = F_{\theta(k)}x(k) + G_{\theta(k)}u(k), \\ x(0) = x_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

com $S, F_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^n$ e $G_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Deseja-se determinar a matriz $\mathbb{K}_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ do vetor de controle ótimo

$$u(k) = -\mathbb{K}_{\theta(k)} x(k) \quad (4.2)$$

de tal modo a estabilizar o sistema realimentado e minimizar o índice de desempenho

$$J(x_0, \theta_0) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{E} \left\{ x'(k) Q_{\theta(k)} x(k) + u'(k) R_{\theta(k)} u(k) \mid \mathcal{F}_0 \right\} \quad (4.3)$$

sendo $Q_{\theta(k)} \geq 0$ e $R_{\theta(k)} > 0$ matrizes Hermitianas de dimensões apropriadas. Substituindo (4.2) em (4.1) obtemos:

$$\begin{aligned} Sx(k+1) &= F_{\theta(k)}x(k) + G_{\theta(k)}(-\mathbb{K}_{\theta(k)}x(k)) \\ Sx(k+1) &= (F_{\theta(k)} - G_{\theta(k)}\mathbb{K}_{\theta(k)})x(k) \end{aligned} \quad (4.4)$$

e, substituindo (4.2) em (4.3) obtemos

$$\begin{aligned} J(x_0, \theta_0) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{E} \left\{ x'(k) Q_{\theta(k)} x(k) + (-\mathbb{K}_{\theta(k)}x(k))' R_{\theta(k)} (-\mathbb{K}_{\theta(k)}x(k)) \mid \mathcal{F}_0 \right\} \\ J(x_0, \theta_0) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{E} \left\{ x'(k) \left(Q_{\theta(k)} + \mathbb{K}_{\theta(k)}' R_{\theta(k)} \mathbb{K}_{\theta(k)} \mid \mathcal{F}_0 \right) x(k) \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Considerando o Sistema Ψ , o problema do regulador quadrático, neste caso, se resume em encontrar $\mathbb{K}_{\theta(k)} = \mathbb{K}_{\theta(k)}^{\text{ótimo}}$ tal que o sistema (4.4) seja estável e o custo (4.5) seja mínimo.

Definição 4.1. *O custo de continuação é dado por*

$$V(x_k, \theta_k) = \mathcal{E} \left\{ \sum_{t=k}^{\infty} (x'(t) Q_{\theta(t)} x(t) + u'(t) R_{\theta(t)} u(t)) \mid \mathcal{F}_k \right\}, \quad (4.6)$$

sempre que $x(k) = x_k$ e $\theta(k) = \theta_k$ são arbitrários, e que a série convirja.

Definição 4.2. *A regularidade estocástica e a admissibilidade de um regulador ótimo para o SLSSM (4.1) podem ser definidas pelos seguintes conjuntos*

(i) $\mathcal{G} = \{\mathbb{K}_{\theta_k} \in \mathbb{R}^n : (F_{\theta_k} - G_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k}, S) \text{ seja regular estocasticamente}\};$

(ii) $\bar{\mathcal{X}} = \{(x_k, \theta_k) : x_k \text{ seja admissível e } V(x_k, \theta_k) < \infty\}.$

Lema 4.1. *Considere $x(k) = x_k \in \mathbb{R}^n$, $\theta(k) = \theta_k$ arbitrários e $u(k) = \mathbb{K}_{\theta(k)} u(k)$. Então para $\mathbb{K}_{\theta_k} \in \mathcal{G}$ podemos escrever*

$$V(x_k, \theta_k) = x_k' S' X_{\theta_k} S x_k \quad (4.7)$$

sendo

$$S'X_{\theta_k}S = Q_{\theta_k} + \mathbb{K}'_{\theta_k}R_{\theta_k}\mathbb{K}_{\theta_k} + \sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} F'_{\theta_k} X_j F_{\theta_k} + \mathbb{A}'_{\theta_k} S_0 T_{\theta_k} + T'_{\theta_k} S'_0 \mathbb{A}_{\theta_k}, \quad (4.8)$$

$$e \mathbb{A}_{\theta_k} := (F_{\theta_k} - G_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k}).$$

Demonstração. Da Definição 4.1 sabemos que o custo de continuação é dado por

$$V(x_k, \theta_k) = \mathcal{E} \left\{ \sum_{t=k}^{\infty} (x'(t) Q_{\theta(t)} x(t) + u'(t) R_{\theta(t)} u(t)) \mid \mathcal{F}_k \right\}, \quad (x_k, \theta_k) \in \bar{\mathcal{X}},$$

ou seja,

$$V(x_k, \theta_k) = \mathcal{E} \left\{ \sum_{t=k}^{\infty} \left(x'(t) \left[Q_{\theta(t)} + \mathbb{K}'_{\theta(t)} R_{\theta(t)} \mathbb{K}_{\theta(t)} \right] x(t) \right) \mid \mathcal{F}_k \right\}. \quad (4.9)$$

Assim, aplicando o valor esperado condicionado em (4.9) obtemos

$$\begin{aligned} V(x_k, \theta_k) &= x'_k \left[Q_{\theta_k} + \mathbb{K}'_{\theta_k} R_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k} \right] x_k \\ &\quad + \mathcal{E} \left\{ \mathcal{E} \left\{ \sum_{t=k+1}^{\infty} \left(x'(t) \left[Q_{\theta(t)} + \mathbb{K}'_{\theta(t)} R_{\theta(t)} \mathbb{K}_{\theta(t)} \right] x(t) \right) \mid \mathcal{F}_{k+1} \right\} \mid \mathcal{F}_k \right\}, \end{aligned}$$

sendo $(x_k, \theta_k) \in \bar{\mathcal{X}}$. Usando a Definição 4.1 novamente, obtemos

$$\begin{aligned} V(x_k, \theta_k) &= x'_k \left[Q_{\theta_k} + \mathbb{K}'_{\theta_k} R_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k} \right] x_k \\ &\quad + \mathcal{E} \left\{ \mathcal{V}(x(k+1), \theta(k+1)) \mid \mathcal{F}_k \right\} \\ &= x'_k \left[Q_{\theta_k} + \mathbb{K}'_{\theta_k} R_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k} \right] x_k \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \mathcal{V}(x(k+1), \theta(k+1) = j) P(\theta(k+1) = j \mid \theta_k) \\ &= x'_k \left[Q_{\theta_k} + \mathbb{K}'_{\theta_k} R_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k} \right] x_k \\ &\quad + \sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} \mathcal{V}(x(k+1), \theta(k+1) = j), \quad (x_k, \theta_k) \in \bar{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Por *Hipótese de Indução* temos que

$$\mathcal{V}(x(k+1), j) = x'(k+1) S' X_j S x(k+1),$$

para algum $X_{\theta_{k+1}}$, assim

$$\begin{aligned} V(x_k, \theta_k) &= x'_k [Q_{\theta_k} + \mathbb{K}'_{\theta_k} R_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k}] x_k \\ &\quad + \sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} (x'(k+1) S' X_j S x(k+1)), \quad (x_k, \theta_k) \in \bar{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Definindo $\mathbb{A}_{\theta_k} = (F_{\theta_k} - G_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k})$ temos que

$$\begin{aligned} V(x_k, \theta_k) &= x'_k [Q_{\theta_k} + \mathbb{K}'_{\theta_k} R_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k}] x_k \\ &\quad + \sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} (x'_k \mathbb{A}'_{\theta_k} X_j \mathbb{A}_{\theta_k} x_k) \\ &= x'_k \left[Q_{\theta_k} + \mathbb{K}'_{\theta_k} R_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k} + \mathbb{A}'_{\theta_k} \left(\sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} X_j \right) \mathbb{A}_{\theta_k} \right] x_k \end{aligned} \tag{4.10}$$

sendo $(x_k, \theta_k) \in \bar{\mathcal{X}}$. Para estender a igualdade (4.10) para todo $x_k \in \mathbb{R}^n$ (não necessariamente admissíveis), sem alterar os custos para os $(x_k, \theta_k) \in \bar{\mathcal{X}}$, sempre que $S' S_0 = 0$ e considerando T_{θ_k} uma variável, incorporamos os termos da forma

$$x'(k+1) S' S_0 T_{\theta_k} x_k \quad \text{e} \quad x'_k T'_{\theta_k} S'_0 S x(k+1),$$

os quais são nulos para $(x_k, \theta_k) \in \bar{\mathcal{X}}$. Eles assumem um valor arbitrário para $(x_k, \theta_k) \notin \bar{\mathcal{X}}$ (dependendo da escolha de T_{θ_k}). Ou seja, reescrevendo (4.10) obtemos

$$\begin{aligned} V(x_k, \theta_k) &= x'_k \left[Q_{\theta_k} + \mathbb{K}'_{\theta_k} R_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k} + \mathbb{A}'_{\theta_k} \left(\sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} X_j \right) \mathbb{A}_{\theta_k} \right] x_k \\ &\quad + x'(k+1) S' S_0 T_{\theta_k} x_k + x'_k T'_{\theta_k} S'_0 S x(k+1) \\ &= x'_k \left[Q_{\theta_k} + \mathbb{K}'_{\theta_k} R_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k} + \mathbb{A}'_{\theta_k} \left(\sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} X_j \right) \mathbb{A}_{\theta_k} \right] x_k \\ &\quad + x'_k \mathbb{A}'_{\theta_k} S_0 T_{\theta_k} x_k + x'_k T'_{\theta_k} S'_0 \mathbb{A}_{\theta_k} x_k \\ &= x'_k \left[Q_{\theta_k} + \mathbb{K}'_{\theta_k} R_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k} + \mathbb{A}'_{\theta_k} \left(\sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} X_j \right) \mathbb{A}_{\theta_k} \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{A}'_{\theta_k} S_0 T_{\theta_k} + T'_{\theta_k} S'_0 \mathbb{A}_{\theta_k} \right] x_k, \quad x_k \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Pode-se mostrar que existe $X_i \in \mathcal{R}^n$ tal que

$$Q_i + \mathbb{K}'_i R_i \mathbb{K}_i + \mathbb{A}'_i \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j \right) \mathbb{A}_i + \mathbb{A}'_i S_0 T_i + T'_i S'_0 \mathbb{A}_i = S' X_i S, \quad (4.12)$$

desde que ajustemos T_{θ_k} de tal forma que, para $(x_k, \theta_k) \notin \mathcal{X}$, o lado direito de (4.12) resulte em um valor nulo. Pré multiplicando (4.12) por x'_k e pós multiplicando por x_k obtemos

$$\begin{aligned} x'_k [S' X_i S] x_k &= x'_k \left[Q_i + \mathbb{K}'_i R_i \mathbb{K}_i + \mathbb{A}'_i \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j \right) \mathbb{A}_i \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{A}'_i S_0 T_i + T'_i S'_0 \mathbb{A}_i \right] x_k, \quad x_k \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Identificando (4.11) e (4.12) segue que

$$V(x_k, \theta_k) = x'_k S' X_{\theta_k} S x(k), \quad x_k \in \mathbb{R}^n,$$

sempre que $\theta_k = i$, $i \in \mathbb{T}$, completando a indução. $\square$

Teorema 4.1. *Considere o Sistema Ψ regular estocasticamente e $x(k) = x_k \in \mathbb{R}^n$ e $\theta(k) = \theta_k$ arbitrários. Se existirem $X_{\theta_k} \in \mathcal{R}^n$ e $T_{\theta_k} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ satisfazendo equação algébrica de Riccati acoplada (EARA) dada por*

$$\begin{aligned} S' X_{\theta_k} S &= F'_{\theta_k} \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j \right) F_{\theta_k} + Q_{\theta_k} + F'_{\theta_k} S_0 T_{\theta_k} + T'_{\theta_k} S'_0 F_{\theta_k} + \\ &\quad \left[F'_{\theta_k} \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j \right) G_{\theta_k} + T'_{\theta_k} S'_0 G_{\theta_k} \right] \left[R_{\theta_k} - G'_{\theta_k} \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j \right) G_{\theta_k} \right]^{-1} \\ &\quad \times \left[G'_{\theta_k} \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j \right) F_{\theta_k} + G'_{\theta_k} S'_0 T_{\theta_k} \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

sendo S_0 tal que $S' S_0 = 0$, então a lei de controle ótima que satisfaz

$$\min_u J(x_0, \theta_0) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} \mathcal{E} \{ x'(t) Q_{\theta(t)} x(t) + u'(t) R_{\theta(t)} u(t) \mid \mathcal{F}_0 \}$$

é dada por $u(k) = -\mathbb{K}_{\theta_k} x(k)$, com

$$\mathbb{K}_{\theta_k} = \left[R_{\theta_k} - G'_{\theta_k} \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j \right) G_{\theta_k} \right]^{-1} \left[G'_{\theta_k} \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j \right) F_{\theta_k} + G'_{\theta_k} S_0 T_{\theta_k} \right]. \quad (4.15)$$

Demonstração. Uma vez que $u(k) = -\mathbb{K}_{\theta(k)} x(k)$, do Lema 4.1 temos que (4.6) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} x'_k [S' X_{\theta_k} S] x_k &= x'_k \left[Q_{\theta_k} + \mathbb{K}'_{\theta_k} R_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k} + \mathbb{A}'_{\theta_k} S_0 T_{\theta_k} \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{A}'_{\theta_k} \left(\sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} X_j \right) \mathbb{A}_{\theta_k} + T'_{\theta_k} S'_0 \mathbb{A}_{\theta_k} \right] x_k, \end{aligned}$$

sendo $x_k \in \mathbb{R}^n$. Sendo $\mathbb{A}_{\theta_k} = (F_{\theta_k} - G_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k})$, temos que

$$\begin{aligned} x'_k [S' X_{\theta_k} S] x_k &= x'_k \left[Q_{\theta_k} + \mathbb{K}'_{\theta_k} R_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k} \right. \\ &\quad \left. + (F_{\theta_k} - G_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k})' \left(\sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} X_j \right) (F_{\theta_k} - G_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k}) \right. \\ &\quad \left. + (F_{\theta_k} - G_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k}) S_0 T_{\theta_k} + T'_{\theta_k} S'_0 (F_{\theta_k} - G_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k}) \right] x_k, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} S' X_{\theta_k} S &= Q_{\theta_k} + \mathbb{K}'_{\theta_k} R_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k} \\ &\quad + (F_{\theta_k} - G_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k})' \left(\sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} X_j \right) (F_{\theta_k} - G_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k}) \\ &\quad + (F_{\theta(k)} - G_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k})' S_0 T_{\theta_k} + T'_{\theta_k} S'_0 (F_{\theta_k} - G_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k}) \\ &= Q_{\theta_k} + \mathbb{K}'_{\theta_k} R_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k} + F'_{\theta_k} \left(\sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} X_j \right) F_{\theta_k} \\ &\quad - F'_{\theta_k} \left(\sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} X_j \right) G_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k} - \mathbb{K}'_{\theta_k} G'_{\theta_k} \left(\sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} X_j \right) F_{\theta_k} \\ &\quad + \mathbb{K}'_{\theta_k} G'_{\theta_k} \left(\sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} X_j \right) G_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta(k)} + F'_{\theta(k)} S_0 T_{\theta(k)} \\ &\quad - \mathbb{K}'_{\theta_k} G'_{\theta_k} S_0 T_{\theta_k} + T'_{\theta_k} S'_0 F_{\theta_k} - T'_{\theta_k} S'_0 G_{\theta_k} \mathbb{K}_{\theta_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S' X_{\theta_k} S &= Q_{\theta_k} + F'_{\theta_k} \left(\sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} X_j \right) F_{\theta_k} + F'_{\theta_k} S_0 T_{\theta_k} + T'_{\theta_k} S'_0 F_{\theta_k} \\
&+ \mathbb{K}'_{\theta_k} \left[R_{\theta_k} + G'_{\theta_k} \left(\sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} X_j \right) G_{\theta_k} \right] \mathbb{K}_{\theta_k} \\
&- \mathbb{K}'_{\theta_k} \left[G'_{\theta_k} \left(\sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} X_j \right) F_{\theta_k} + G'_{\theta_k} S_0 T_{\theta_k} \right] \\
&- \left[F'_{\theta_k} \left(\sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} X_j \right) G_{\theta_k} + T'_{\theta_k} S'_0 G_{\theta_k} \right] \mathbb{K}_{\theta_k}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Considere $\bar{X}_{\theta_k} = \sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} X_j$, podemos reescrever (4.16) como

$$\begin{aligned}
&F'_{\theta_k} \bar{X}_{\theta_k} F_{\theta_k} - S' X_{\theta_k} S + Q_{\theta_k} + F'_{\theta_k} S_0 T_{\theta_k} + T'_{\theta_k} S'_0 F_{\theta_k} \\
&+ \left\{ [R_{\theta_k} + G'_{\theta_k} \bar{X}_{\theta_k} G_{\theta_k}]^{\frac{1}{2}} \mathbb{K}_{\theta_k} - [R_{\theta_k} + G'_{\theta_k} \bar{X}_{\theta_k} G_{\theta_k}]^{-\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \times [G'_{\theta_k} \bar{X}_{\theta_k} F_{\theta_k} + G'_{\theta_k} S_0 T_{\theta_k}] \left. \right\}' \left\{ [R_{\theta_k} + G'_{\theta_k} \bar{X}_{\theta_k} G_{\theta_k}]^{\frac{1}{2}} \mathbb{K}_{\theta_k} \right. \\
&\quad \left. - [R_{\theta_k} + G'_{\theta_k} \bar{X}_{\theta_k} G_{\theta_k}]^{-\frac{1}{2}} [G'_{\theta_k} \bar{X}_{\theta_k} F_{\theta_k} + G'_{\theta_k} S_0 T_{\theta_k}] \right\} \\
&- [F'_{\theta_k} \bar{X}_{\theta_k} G_{\theta_k} + T'_{\theta_k} S'_0 G_{\theta_k}] [R_{\theta_k} - G'_{\theta_k} \bar{X}_{\theta_k} G_{\theta_k}]^{-1} \\
&\quad \times [G'_{\theta_k} \bar{X}_{\theta_k} F_{\theta_k} + G'_{\theta_k} S_0 T_{\theta_k}].
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Logo a matriz de ganho $\mathbb{K}_{\theta_k}$ que minimiza o funcional de custo (4.3) é dada por

$$[R_{\theta_k} - G'_{\theta_k} \bar{X}_{\theta_k} G_{\theta_k}]^{-1} [G'_{\theta_k} \bar{X}_{\theta_k} F_{\theta_k} + G'_{\theta_k} S_0 T_{\theta_k}],$$

sendo $\bar{X}_{\theta_k} = \sum_{j=1}^N p_{\theta_k j} X_j$ e a EARA pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
S' X_{\theta_k} S &= F'_{\theta_k} \bar{X}_{\theta_k} F_{\theta_k} + Q_{\theta_k} + F'_{\theta_k} S_0 T_{\theta_k} + T'_{\theta_k} S'_0 F_{\theta_k} \\
&- [F'_{\theta_k} \bar{X}_{\theta_k} G_{\theta_k} + T'_{\theta_k} S'_0 G_{\theta_k}] [R_{\theta_k} - G'_{\theta_k} \bar{X}_{\theta_k} G_{\theta_k}]^{-1} \\
&\times [G'_{\theta_k} \bar{X}_{\theta_k} F_{\theta_k} + G'_{\theta_k} S_0 T_{\theta_k}].
\end{aligned}$$

□

Observação 4.1. Um método para solução da equação algébrica de Riccati acoplada (4.14) nas

variáveis X e T deve, inicialmente, considerar como entrada do algoritmo as matrizes S , F_i , S_0 , Q_i , G_i e P , tal que $S'S_0 = 0$, escolher $X_i(0)$, $T_i(0)$ de maneira apropriada e estipular o critério de parada. Em seguida, é necessário fazer k variar e calcular a EARA

$$S' X_i(k) S = F'_i \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j(k-1) \right) F_i + Q_i + F'_i S_0 T_i(k) + T'_i(k) S'_0 F_i + \\ \left[F'_i \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j(k-1) \right) G_i + T'_i(k) S'_0 G_i \right] \left[R_i - G'_i \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j(k-1) \right) G_i \right]^{-1} \\ \times \left[G'_i \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} X_j(k-1) \right) F_i + G'_i S'_0 T_i(k) \right],$$

nas variáveis $X_i(k)$ e $T_i(k)$ e analisar a convergência da variável X . Note que não é uma extensão direta considerar as variáveis $X_i(k)$ e $T_i(k)$ de forma agrupada, de maneira semelhante ao método que resolve as ELAG proposto no capítulo anterior. Portanto, deixaremos como trabalho futuro um possível desenvolvimento de um método recursivo para resolver (4.14).

Observação 4.2. Pode-se verificar de forma direta que, quando $N = 1$, as EARA (4.14) se reduzem na EAR dos sistemas lineares singulares convencionais (sem salto), veja [13]. Note que, como $\mathbb{P} = 1$, podemos reescrever (4.14) como

$$S' X S = F' X F + F' S_0 T + T' S'_0 F + Q \\ + (F' X G + T' S'_0 G) (R - G' X G)^{-1} (G' X F + G' S'_0 T).$$

Além disso, fazendo $S = \mathbb{I}$, espaço de estados usual, as EARA (4.14) se reduzem na EARA dos SLSSM, veja [5].

4.2 Conclusão

Neste capítulo, apresentamos um estudo de um regulador linear quadrático para SLSSM. Estabelecemos um funcional de custo, uma representação algébrica para a matriz de ganho do controlador e as EARA.

CAPÍTULO 5

Conclusão

As contribuições principais desta tese estão relacionadas com o desenvolvimento de conceitos estruturais, tais como regularidade estocástica e estabilidade exponencial estocástica, a investigação de condições para a verificação desses conceitos e o início do estudo de um regulador para os SLSSM.

No estudo de regularidade, a principal contribuição é uma condição testável, necessária, para regularidade. Na verdade, a primeira contribuição consiste em definições adequadas de regularidade para SLSSM, tanto para horizonte finito quanto para horizonte infinito, pois os conceitos existentes na literatura são de natureza “modo a modo” e não levam em consideração os dados das probabilidades de transição da cadeia de Markov. A condição necessária desenvolvida para horizonte finito baseia-se num sistema de primeiro momento condicionado associado ao sistema original. Este sistema de primeiro momento foi, inicialmente, estudado com objetivo de obter condições necessárias e suficientes, mas concluímos ao longo do trabalho, que ele não leva a condições de suficiência. Diferentemente do contexto de estabilidade em SLSM (sem singularidade) em que o sistema de primeiro momento caracteriza completamente (no sentido de gerar condições necessárias e suficientes) a estabilidade, ao tratar da regularidade, que envolve existência e unicidade de soluções, conseguimos apenas condições necessárias, pois por exemplo o sistema de primeiro momento pode ter soluções mas o SLSSM não ter. Estendemos a condição necessária de regularidade para o caso de horizonte infinito de maneira natural, semelhantemente

ao que se encontra para SS em [29, Theorem 1].

Com relação à estabilidade, as maiores contribuições são um conjunto de equações de Lyapunov acopladas generalizadas (ELAG) para SLSSM e o desenvolvimento de um algoritmo para verificação dessas ELAG. Mostramos que, quando o algoritmo converge, ele converge para a solução da Lyapunov proposta. Destacamos que a condição de Lyapunov envolve conjuntamente duas variáveis, que têm de ser resolvidas simultaneamente, gerando uma dificuldade a mais quando comparado, por exemplo, às condições de Lyapunov para SLSM. Esta dificuldade foi vencida no sentido que o método proposto trata estas variáveis agrupadas, empregando certas estruturas descritas na Seção 3.3.

Finalmente, quanto ao problema de controle para SLSSM, a principal contribuição é a obtenção de uma formulação de Riccati para um regulador linear quadrático. Como trabalho futuro pretendemos pesquisar a possibilidade de se deduzir um método recursivo para resolver o conjunto de equações de Riccati acopladas encontradas no Capítulo 4.

Referências Bibliográficas

- [1] Bender, D. (1987). Lyapunov-like equations and reachability/observability gramians for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 32(4), 343–348.
- [2] Brewer, J. (1978). Kronecker products and matrix calculus in system theory. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 25(9), 772–781.
- [3] Costa, E. F. (2001). Detetabilidade de sistemas sujeitos a saltos Markovianos. *Tese de Doutorado apresentada a UNICAMP*.
- [4] Costa, E. F. e J. B. R. do Val (2002). Weak detectability and the linear-quadratic control problem of discrete-time Markov jump linear systems. *International Journal of Control* 75(16), 1282 – 1292.
- [5] Costa, O. L. V. e M. Fragoso (1995). Discrete-time LQ-optimal control problems for infinite Markov jump parameter systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-40, 2076–2088.
- [6] Costa, O. L. V., M. D. Fragoso, e R. P. Marques (2005). *Discrete-time Markov jump linear systems: Probability and its applications*. Springer-Verlag, London.
- [7] Dai, L. (1989). *Singular Control Systems*, Volume 118 of Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, Berlin.
- [8] Fu Yan-Ming, D. G.-R. e Q. Lei (2006). Robust guaranteed cost observer design for uncertain

- descriptor systems with state delays and Markovian jumping parameters. *IMA Journal of Mathematical Control and Information* 23(1), 403 – 412.
- [9] Gantmacher, F. R. (1974). *The Theory of Matrices*. New York: Chelsea.
- [10] Hasan, M. A. e M. R. Azim-Sadjani (1995). Noncausal image modeling using descriptor approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems. II, Analog and Digital Signal Processing* 42(8), 536–540.
- [11] Ibrir, S. e E. K. Boukas (2003). Stabilization of singular switching systems with constant gain controllers. *Les Cahiers du GERARD* 66(1), 1–12.
- [12] Ishihara, J. Y. e M. H. Terra (2002). On the Lyapunov theorem for singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control, Estados Unidos* 47, 1926–1930.
- [13] Ishihara, J. Y. e M. H. Terra (2003). A new Lyapunov equation for discrete-time descriptor systems. *American Control Conference, 2003* 1(1), 5078–5082.
- [14] Ishihara, J. Y., M. H. Terra, J. P. Cerri, e A. L. P. Manfrim (2010). A new procedure to solve generalized Lyapunov equations. *Proceedings of 18th Mediterranean Conference on Control and Automation, Congress Palace, Marrakech, Morocco* 1(1).
- [15] J. Lam, Z. Shu, S. X. e E. K. Boukas (2007). Robust H_∞ control of descriptor discrete-time Markovian jump systems. *International Journal of Control* 80(3), 374 – 385.
- [16] James, B. (1996). *Probabilidade: Um curso em nível intermediário.*, Volume 2. IMPA.
- [17] Johansen, T. A., R. V. Molengraft, e H. Nijmeijer (2002). Guest editorial: Switched, piecewise and polytopic linear systems. *International Journal of Control. Special issue on Switched and Polytopic Linear Systems* 75, 1241–1242.
- [18] Lewis, F. L. (1986). A survey of linear singular systems. *Circuits, Systems, and Signal Processing* 5(1), 3–36.
- [19] Luenberger, D. G. (1978). Time-invariant descriptor systems. *Automatica* 14(5), 473 – 480.
- [20] Luenberger, D. G. e A. Arbel (1977). Singular dynamic leontief systems. *Econometrica* 45(4), 991–995.
- [21] Manfrim, A. L. P., M. H. Terra, E. F. Costa, e J. Y. Ishihara (2008). Stochastic stability for discrete-time singular systems with Markov jump parameters. *Proceedings of the 2008 American Control Conference* 1(1), 1650–1655.

-
- [22] Manfrim, A. L. P., M. H. Terra, E. F. Costa, e J. Y. Ishihara (2010). Método iterativo de Lyapunov para estabilidade exponencial estocástica dos sistemas singulares lineares sujeitos a saltos Markovianos. *Proceedings of XVIII Congresso Brasileiro de Automática, Bonito, MS, Brasil 1*(1).
- [23] Mills, J. K. e A. A. Goldenberg (1989). Force and position control of manipulators during constrained motion tasks. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 5(1), 30–46.
- [24] Raouf, J. e E. K. Boukas (2007). Stabilization of discontinuous singular systems with Markovian switching and saturating inputs. *Proceedings of the 2007 American Control Conference 1*(1), 2442–2447.
- [25] Schweppe, F. C. (1973). *Uncertain Dynamic Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- [26] Siqueira, A. A. G. e M. H. Terra (2004). Nonlinear and Markovian H_∞ controls of underactuated manipulators. *IEEE Transactions on Control System Technology* 12(6), 811–826.
- [27] Xu, S. e J. Lam (2006). *Robust Control and Filtering of Singular Systems*. Springer.
- [28] Yan-Ming, F., D. Guang-Ren, e Q. Lei (2006). Robust guaranteed cost observer design for uncertain descriptor systems with state delays and Markovian jumping parameters. *IMA Journal of Mathematical Control and Information* 23(1), 403–412.
- [29] Yip, E. e R. Sincovec (1981). Solvability, controllability, and observability of continuous descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 26(3), 702–707.