UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DA COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

WENDHEL RAFFA COIMBRA

**Extensão do Princípio de Invariância de
LaSalle para Sistemas Periódicos e
Sistemas Fuzzy**

São Carlos
2016

WENDHEL RAFFA COIMBRA

**Extensão do Princípio de Invariância de
LaSalle para Sistemas Periódicos e
Sistemas Fuzzy**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Luis Fernando Costa Alberto

São Carlos

2016

Trata-se da versão corrigida da tese. A versão original se encontra disponível na EESC/USP que aloja o Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica.

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

R
136e Raffa Coimbra, Wendhel
 Extensão do princípio de invariância de lasalle
 para sistemas periódicos e sistemas fuzzy / Wendhel
 Raffa Coimbra; orientador Luis Fernando Costa Alberto.
 São Carlos, 2016.

 Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas
Dinâmicos -- Escola de Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo, 2016.

 1. Sistemas periódicos. 2. Sistemas fuzzy. 3.
Princípio de invariância. 4. Equações diferenciais. 5.
Sincronização. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Licenciado **WENDHEL RAFFA COIMBRA**.

Título da tese: "Extensão do princípio de invariância de LaSalle para sistemas periódicos e sistemas fuzzy".

Data da defesa: 26/02/2016

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Associado **Luis Fernando Costa Alberto (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Dr. **Fabíolo Moraes Amaral**
(Instituto Federal da Bahia/IFBA)

Aprovado

Profa. Dra. **Luciana Takata Gomes**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

Aprovado

Prof. Dr. **Adilson José Vieira Brandão**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO

Prof. Associado **Rogério Andrade Flauzino**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica:
Prof. Associado **Luis Fernando Costa Alberto**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Paulo César Lima Segantine**

Ao meu avô, avó e minha mãe.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela saúde e sabedoria.

À minha avó Santina de Castro Raffa e mãe Valdete Fátima Raffa por todo apoio, amor e dedicação.

Ao meu orientador Prof. Dr. Luis Fernando Costa Alberto, pela paciência e confiança.

Aos meus tios Sérgio Ferreira, Waldir Raffa, Patrícia Mara Raffa Ferreira e Neuza Rigueti Raffa e meus primos Guilherme Rigueti Raffa, Marcelo Henrique Rigueti Raffa, Lídia Pimenta Raffa, Maria Eduarda Raffa Ferreira, Tiago Raffa Ferreira e Felipe Pimenta Raffa por sempre acreditarem em mim, apoiarem mesmo à distância e pelos momentos de alegria.

Aos amigos Pedro Fonzar, Hueliton Wilian Kido, César Klayson Soares dos Santos, Thiago de Souza Pinto, Mateus Rigueti Gazola, Luis Fernando Braga, Mário Fernando de Oliveira, Marcio Antônio da Silva Árias, Rafael Blanco Spegiorin, Rafael Tiago da Silva, Marcel Bernardi Marques, Leandro Nunes dos Santos, Bruno Andrade de Souza, Raildo Santos de Lima, Hiran Aparecido Silva, Douglas Azevedo Sant Anna, Michele Cristina Valentino, Danilo Bellucci, Ludmila Santos Reis Bellucci, Alexandre Manhe e Julien Tomazini pelos momentos de descontração e incentivo.

Aos amigos do laboratório LACO, pelo aprendizado e contribuição para melhoria deste trabalho.

Resumo

Coimbra, Wendhel Raffa **Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle para Sistemas Periódicos e Sistemas Fuzzy**. 85 p. Tese de doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2016.

O princípio de invariância de LaSalle estuda o comportamento assintótico das soluções sem conhecer as soluções das equações diferenciais. Para isto, utiliza uma função auxiliar V usualmente chamada de função de Lyapunov. Este trabalho apresenta um princípio de invariância fuzzy e sua versão global para a classe de sistemas dinâmicos fuzzy descrito, via extensão de Zadeh, por equações diferenciais autônomas com incertezas na condição inicial. Ainda, apresentamos um princípio de invariância uniforme, no qual não se exige que a derivada da função de Lyapunov seja sempre definida negativa, para a classe de sistemas dinâmicos não lineares não autônomos que são descritos por um conjunto de equações diferenciais ordinárias periódicas. Aplicações para as duas classes de sistemas foram desenvolvidas.

Palavras-chave: Sistemas Periódicos, Sistemas Fuzzy, Princípio de Invariância, Equações Diferenciais, Sincronização.

Abstract

Coimbra, Wendhel Raffa **Extension of the LaSalle's invariance principle for periodic systems and fuzzy systems**. 85 p. Tese de doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2016.

The LaSalle's invariance principle studies the asymptotic behavior of the solutions without requiring the knowledge of the solutions of differential equations. For this, it uses an auxiliary function V usually called Lyapunov function. This work proposes a fuzzy invariance principle and its global version for the class of fuzzy dynamic systems described, via Zadeh's extension, by autonomous ordinary differential equation with uncertainties in the initial condition. Moreover, we develop an uniform invariance principle, in which the derivative of the Lyapunov function is not required to be always negative definite, for the class of non autonomous non linear dynamical system described by a set of periodic ordinary differential equations. Applications for the two classes of systems are also developed.

Keywords: Periodic Systems, Fuzzy Systems, Invariance Principle, Differential Equations, Synchronization.

Lista de Ilustrações

2.1	Interpretação geométrica do conceito de estabilidade.	24
2.2	Interpretação geométrica do conceito de estabilidade assintótica.	24
2.3	Interpretação geométrica da área de atração.	25
2.4	Interpretação geométrica do princípio de invariância para sistemas autônomos. Para as condições iniciais $x_1, x_2 \in \Omega_L$, as soluções não saem de Ω_L e tendem para o maior conjunto invariante contido em E	28
2.5	Interpretação geométrica do Teorema 2.3. Para a condição inicial x_1 em Ω_L , a solução entra em Ω_l e não sai de Ω_l e tende para o maior conjunto invariante contido em $\overline{\Omega_l}$. Para as condições iniciais x_0 e x_2 em Ω_L , as soluções não saem de Ω_L e tendem para o maior conjunto invariante contido em E	30
3.1	Interpretação geométrica dos Lemas 3.4 and 3.5. Para as condições iniciais x_1 e x_2 em $A(L)$, as soluções não saem de $S(L)$. Para $x_0 \in S(L)$, existe t_0 tal que a solução iniciando nesse tempo não sai de $S(L)$	37
3.2	Interpretação geométrica do princípio de invariância para sistemas autônomos. Para a condição inicial $x_1 \in A(L)$, a solução não sai de $S(L)$ e tende para o maior conjunto invariante B contido em E , para qualquer t_1 . Para as condições iniciais x_0 e x_2 em $S(L)$, existem t_0 e t_2 tais que as soluções iniciando em x_0 e x_2 nesses tempos, respectivamente, não saem de $S(L)$ e tendem para o maior conjunto invariante B em E	38
3.3	Interpretação geométrica dos Lemas 3.6 e 3.7. Para a condição inicial x_2 em $A(L)$, a solução não sai de $S(L)$ para qualquer t_2 . Para as condições iniciais x_0 e x_1 em $S(L)$, existem t_0 e t_1 tais que as soluções iniciando em x_0 e x_1 nestes tempos, respectivamente, não saem de $S(L)$	43
3.4	Interpretação geométrica da extensão do princípio de invariância para sistemas periódicos. A solução iniciando em $x_0 \in A(L)$ não sai de $S(L)$ e tende para o maior conjunto invariante em E . Para as condições iniciais x_1 e x_2 , as soluções entrando em $A(l)$, não saem de $S(l)$ e tendem para o maior conjunto invariante em $\overline{S(l)}$	45

3.5	Estimativa do atrator do sistema (3.7). O atrator está contido no conjunto $\overline{S(l)}$. A trajetória inicia no ponto $(1, 5, 1)$ e tende para o atrator periódico dentro de $\overline{S(l)}$	46
3.6	Estimativa do atrator global do sistema (3.8). O atrator está contido no conjunto $\overline{S(l)}$. As trajetórias iniciando nos pontos $x_1 = (0, 7, 3)$ e $x_0 = (-3, 4)$ tendem para o atrator periódico dentro de $\overline{S(l)}$	47
3.7	A trajetória inicia no ponto $x_0 = (0, 5, 2)$ e tende para um atrator periódico.	48
3.8	Interpretação geométrica do Teorema 3.5. Para a condição inicial $x_1 \in A(L)$, a solução não sai de $S(L)$ e tende para o maior conjunto invariante B em E . Para as soluções iniciando em $S(L) - A(L)$, nada se pode concluir, por exemplo, a solução iniciando em x_2 deixa o conjunto $S(L)$ e não retorna. Para a condição inicial x_3 em $A(L)$, a solução está entrando no conjunto $A(l)$, não sai do conjunto $S(l)$ e tende para o maior conjunto invariante em $\overline{S(l)}$	51
3.9	Derivada da Função Lyapunov.	52
3.10	Função de Lyapunov.	52
3.11	Estimativa do atrator global do sistema (3.11) para $\alpha_m = 1.9$ e $\alpha_M = 2.1$. O atrator está contido no conjunto $\overline{S(l)}$ para qualquer $\alpha \in [\alpha_m, \alpha_M]$. As trajetórias que iniciam nos pontos $x_0 = (-2, 1, 5)$ e $x_1 = (1, -1, 5)$, tendem para um atrator periódico em $\overline{S(l)}$ para $\alpha = 2$ e $\alpha = 1,95$, respectivamente.	54
3.12	Diferença entre as soluções dos subsistemas (3.12) e (3.13).	56
3.13	As trajetórias dos subsistemas (3.12) (iniciando em $(-3, 5)$) e (3.13) (iniciando em $(2, 10)$) sincronizam e aproximam do atrator periódico. Condição inicial $(x, y, \theta, \omega) = (2, 10, -3, 5)$	56
4.1	(BARROS L.C.; BASSANEZI, 2006) Interpretação geométrica do princípio da extensão de Zadeh. O gráfico representa a imagem de um subconjunto fuzzy a partir do princípio de extensão de Zadeh.	59
4.2	(BARROS L.C.; BASSANEZI, 2006) O gráfico ilustra um subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ do Exemplo 4.1.	60
4.3	Representação da função auxiliar V e sua derivada $\dot{V}$	74
4.4	(CECCONELLO, 2010) Representa a evolução da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ do sistema (4.5). Constantes $a = 50, r = 0, 1$ e $k = 100$. Note que para a condição inicial fuzzy abaixo do limiar Allee ($a = 50$), a evolução da solução fuzzy tende para a origem. Caso esteja acima do limiar Allee, a evolução da solução fuzzy tende para a capacidade suporte ($k = 100$). Quanto mais escuro a solução fuzzy, maior o grau de pertinência e quanto menos escuro, menor o grau de pertinência.	74
4.5	Estimativa do atrator global do sistema (4.6). A trajetória representa a evolução da projeção de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$. Nota-se que quanto mais escuro a solução fuzzy, mais aproxima da solução determinística.	76

4.6 A trajetória representa a evolução da projeção de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ em tempos diferentes. Os tempos capturados são $t = 0.05, t = 0.45, t = 1.90, t = 2.95, t = 4.05, t = 5.50, t = 9.60, t = 12.80$ e $t = 20.00$, onde a evolução tende para a origem. 77

Lista de Símbolos

x_0	Condição inicial.
V	Função auxiliar.
Λ	Conjunto em que os parâmetros do sistema variam.
λ	Parâmetro do sistema.
α_m	Valor mínimo do parâmetro α .
α_M	Valor máximo do parâmetro α .
$\varphi(t, t_0, x_0)$	Solução da equação diferencial com condição inicial x_0 no tempo t_0 .
Ω_L	Estimativa da bacia de atração na extensão do Princípio de Invariância e no Princípio de Invariância Original.
Ω_l	Componente da estimativa do atrator na extensão do Princípio de Invariância e no Princípio de Invariância Original.
C	Conjunto em que a derivada da função auxiliar de Lyapunov é maior que zero em $S(L)$.
∂C	Fronteira do conjunto C .
a	Estimativa uniforme inferior da função de Lyapunov.
b	Estimativa uniforme superior da função de Lyapunov.
c	Estimativa uniforme da derivada da função de Lyapunov.
C^1	Conjunto das funções contínuas cujas derivadas de primeira ordem são também contínuas.
E	Estimativa do atrator do Princípio de Invariância e na extensão do Princípio de Invariância para a classe de sistemas periódicos.
f	Campo vetorial.
k	Parâmetro de acoplamento.
L	Valor da função de Lyapunov que define os conjuntos Ω_L , $S(L)$ e $A(L)$.
l	Valor da função de Lyapunov que define os conjuntos Ω_l , $S(l)$ e $A(l)$.
$\mathbb{R}$	Espaço dos números reais.

t	Tempo.
T	Período do tempo t .
V	Função de Lyapunov.
x_e	Ponto de equilíbrio estável.
z_e	Ponto de equilíbrio estável. Utilizado em exemplos.
y	Variável de estado.
z	Variável de estado.
θ	Variável de estado.
ω	Variável de estado ou conjunto ω -limite.
$S(L)$	Conjunto que contém a bacia de atração no Princípio de Invariância, na extensão do Princípio de Invariância e em sua versão uniforme, para classe de sistemas periódicos.
$A(L)$	Estimativa da bacia de atração no Princípio de Invariância, na extensão do Princípio de Invariância e em sua versão uniforme, para classe de sistemas periódicos.
$S(l)$	Componente da estimativa da bacia de atração no Princípio de Invariância, na extensão do Princípio de Invariância e em sua versão uniforme, para classe de sistemas periódicos.
$A(l)$	Conjunto auxiliar no Princípio de Invariância, na extensão do Princípio de Invariância e em sua versão uniforme, para classe de sistemas periódicos.
$\overline{S(l)}$	Fecho do conjunto $S(l)$.
μ	Função de pertinência.
$\mathcal{F}(X)$	Conjunto formado por todos os subconjuntos fuzzy de X .
$\mathbf{x}_0$	Condição inicial fuzzy.
$\hat{f}$	Extensão de Zadeh de f .
$\chi_{\{x\}}$	Função característica de x .
$\mathcal{E}(X)$	Subconjuntos fuzzy de um conjunto X cujos α -níveis são subconjuntos compactos e não vazios em X .
$d_H(A, B)$	Distância de Hausdorff entre os conjuntos A e B .
$\mathbf{x}_e$	Ponto de equilíbrio estável fuzzy.
ω	Conjunto ω -limite determinado pelo fluxo fuzzy.
Ω_L	Estimativa da bacia de atração no Princípio de Invariância Fuzzy.
$\hat{\phi}$	Fluxo fuzzy.
$\mathbf{E}$	Estimativa do atrator do Princípio de Invariância fuzzy.

Sumário

1	Introdução	19
1.1	Contribuições da tese	21
1.2	Organização do Trabalho	21
2	O Princípio de Invariância de LaSalle	23
2.1	Conceitos Preliminares	23
2.2	Princípio de Invariância de LaSalle	26
2.3	Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle	28
3	Extensão do Princípio de Invariância para Sistemas Periódicos	31
3.1	Sistemas Não Autônomos	31
3.2	Propriedades de Sistemas Periódicos	33
3.3	Princípio de Invariância para Sistemas Periódicos	37
3.4	Versão Global do Princípio de Invariância para Sistemas Periódicos	40
3.5	Extensão do Princípio de Invariância para Sistemas Periódicos	41
3.6	Versão Global da Extensão do Princípio de Invariância para Sistemas Periódicos	48
3.7	Princípio de Invariância Uniforme para Sistemas Periódicos	49
3.8	Aplicação de Sincronização	54
4	Sistemas Dinâmicos Fuzzy	57
4.1	Conceitos Preliminares	58
4.2	Princípio de Invariância Fuzzy	71
5	Conclusões e Proposta de Trabalhos Futuros	79
	Referências	81

Capítulo 1

Introdução

O Princípio de Invariância de LaSalle é uma das ferramentas mais importantes para estudar o comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais. Tal teorema foi conjecturado e demonstrado para equações diferenciais autônomas definidas em espaços de dimensão finita por LaSalle em 1960 (LASALLE, 1960a,b) e por Krasovski em 1959 (KRASOVSKI, 1959).

Em seguida, este resultado foi estendido para equações diferenciais definidas em espaços de dimensão infinita (HALE, 1969; SLEMROD, 1970), para equações diferenciais funcionais (HALE J.K.; LUNEL, 1993) e para equações com descontinuidade no campo vetorial (sistemas chaveados) (BACCIOTTI; MAZZI, 2005; GOEBEL; SANFELICE; TEEL, 2008; HESPANHA, 2004; MANCILLA-AGUILAR; GARCIA, 2006; SHEVITZ; PADEN, 1994).

A extensão para equações diferenciais não autônomas periódicas foi provada por LaSalle (LASALLE, 1962) e quase-periódicas por Miller (MILLER, 1965). A extensão de equações diferenciais ordinárias mais gerais foi provada por Sell (SELL, 1967). A extensão para equações não autônomas retardadas, foi apresentada por Rodrigues (RODRIGUES, 1970) e para equações de diferença por LaSalle (LASALLE, 1977).

O Princípio de Invariância de LaSalle estuda o comportamento assintótico das soluções de um sistema sem a necessidade de conhecer explicitamente as soluções das equações diferenciais. Para isto, uma função escalar auxiliar, denominada função de Lyapunov, é utilizada. Mesmo sendo um resultado de extrema importância em diversas aplicações, apresenta alguns problemas, sendo o principal deles a não existência de um método específico para encontrar a função escalar auxiliar ou também chamada função de Lyapunov. Uma das condições mais restritivas na busca por esta função é que a derivada da mesma deve ser semi-definida negativa ao longo das trajetórias do sistema. Em vários sistemas, tais como os sistemas caóticos com grau de complexibilidade em suas trajetórias, é difícil encontrar uma função escalar satisfazendo as condições do princípio de invariância e em particular satisfazendo a condição da derivada ser semi-definida negativa.

Uma versão mais geral do princípio de invariância, denominada extensão do princípio de invariância de LaSalle, simplifica em parte este problema, permitindo que a derivada da função escalar assuma valores positivos em algumas regiões limitadas do espaço. Esta extensão foi provada para os casos contínuo (RODRIGUES; ALBERTO; BRETAS, 2000, 2001) e discreto (ALBERTO et al., 2007; RODRIGUES; WU; GABRIEL FILHO, 2011), para uma classe de equações diferenciais com retardo limitado (RABELO; ALBERTO, 2010) e para uma classe de sistemas chaveados (VALENTINO et al., 2012).

A extensão do princípio de invariância de LaSalle não exige que a derivada da função escalar seja semi-definida negativa, facilitando a obtenção desta função, e assim, diversos problemas que não poderiam ser tratados por esta teoria, passam a ser resolvidos pela extensão do princípio de invariância.

Além da sua importância na teoria de estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares, a extensão do princípio de invariância foi aplicada com sucesso em problemas de análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência (BRETAS; ALBERTO, 2003; SILVA et al., 2005; BRETAS et al., 2005) e em problemas de sincronização (RODRIGUES; ALBERTO; BRETAS, 2000; MIJOLARO; ALBERTO; BRETAS, 2010; RODRIGUES; WU; GABRIEL FILHO, 2011).

Em 1981, Kandel e Byatt iniciaram estudos sobre equações diferenciais fuzzy (KANDEL; BYATT, 1981). Em seguida, diversos autores interpretam as equações diferenciais de maneiras distintas, tais como a H -diferenciabilidade adotada por Kaleva e Seikkala em 1987 (KALEVA, 1987; SEIKKALA, 1987) e, em 1983, Puri e Ralescu a desenvolveram a partir da derivada de Hukuhara (PURI; RALESCU, 1983). As equações diferenciais fuzzy podem ser estudadas via inclusões diferenciais, e com isso, Hüllermeier em 1997, estudou as soluções (HÜLLERMEIER, 1997), onde pode apresentar estabilidade, periodicidade e bifurcação (VOROBIEV; SEIKKALA, 2002). Neste trabalho, em particular, iremos interpretar o estudo de equações diferenciais fuzzy via princípio de extensão de Zadeh. Oberguggenberger e Pittschamnn em 1999 e Buckley e Feuring em 2000 apresentaram as soluções fuzzy aplicando a extensão de Zadeh sobre as soluções determinísticas (OBERGUGGENBERGER; PITTSCHMANN, 1991; BUCKLEY; FEURING, 2000). Para as equações diferenciais autônomas $\dot{x} = f(x)$ com condição inicial $x(0) = x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$, as propriedades das soluções fuzzy, via extensão de Zadeh foram apresentadas em 2004 por Mizukoshi (MIZUKOSHI, 2004), satisfazendo as propriedades de um semigrupo e então as soluções podem ser caracterizadas como um fluxo sobre o conjunto formado pelos subconjuntos fuzzy de U .

Este trabalho tem como objetivo apresentar o princípio de invariância fuzzy e sua versão global para a classe de sistemas dinâmicos fuzzy, onde consideramos, para equações diferenciais autônomas, o problema de valor inicial com incertezas apenas na condição inicial, obtendo as soluções fuzzy a partir da aplicação da extensão de Zadeh sobre as soluções determinísticas. Além disso, no processo de investigarmos o princípio de in-

variância para sistemas dinâmicos fuzzy, desenvolvemos uma extensão do princípio de invariância para a classe de sistemas periódicos. Esta extensão é também contribuição inédita desta tese. Nesta extensão, não se exige que a derivada da função de Lyapunov seja sempre definida negativa. As versões globais e a versão uniforme destes resultados são utilizadas para obter estimativas de atratores uniformes com respeito a incertezas nos parâmetros (RAFFA; ALBERTO, 2015). Por fim, aplicações sobre sistemas periódicos (sincronismo de sistemas bidimensionais acoplados) e sistemas fuzzy (Efeito Allee Demográfico) ilustram os resultados desenvolvidos.

1.1 Contribuições da tese

As contribuições deste trabalho são:

- Apresentar a existência de extensões do princípio de invariância para a classe de sistemas dinâmicos não lineares descrito por um conjunto de equações diferenciais ordinárias periódicas;
- Apresentar a existência de um princípio de invariância uniforme para a classe de sistemas dinâmicos citada no item anterior;
- Apresentar as versões globais das extensões do princípio de invariância para a classe de sistemas dinâmicos citada acima;
- Apresentar o princípio de invariância para a classe de sistemas dinâmicos fuzzy, considerando-se um problema de valor inicial com incerteza na condição inicial (PVIF), via extensão de Zadeh.
- Apresentar a versão global do princípio de invariância para a classe de sistemas dinâmicos fuzzy.
- Desenvolver aplicações para os resultados obtidos.

1.2 Organização do Trabalho

O trabalho está dividido em cinco capítulos. Informações sobre cada capítulo estão descritas abaixo.

No Capítulo 2, apresentamos conceitos fundamentais sobre sistemas dinâmicos conforme a Seção 2.1. Além disso, uma revisão do Princípio de Invariância de LaSalle e a extensão do Princípio de Invariância de LaSalle para classe de sistemas autônomos são apresentadas nas Seções 2.2 e 2.3. No Capítulo 3, introduzimos resultados fundamentais para o desenvolvimento da teoria de sistemas periódicos sobre sistemas não autônomos, conforme a Seção 3.1. Propriedades de sistemas periódicos são apresentadas na Seção

3.2 e o princípio de invariância para essa classe de sistemas na Seção 3.3. Em seguida, as principais contribuições desta tese para a classe de sistemas periódicos são pontuadas: a versão global do princípio de invariância (Seção 3.4), a extensão do princípio de invariância (Seção 3.5), a versão global da extensão do princípio de invariância (Seção 3.6), a versão uniforme do princípio de invariância (Seção 3.7) e a aplicação do princípio de invariância no estudo de sincronização de sistemas bidimensionais acoplados (Seção 3.8). Todos resultados aqui apresentados são úteis para estimar atratores e as respectivas áreas de atração para a classe de sistemas periódicos. No Capítulo 4 estudamos conceitos fundamentais sobre sistemas dinâmicos fuzzy, apresentando definições e resultados já existentes sobre o problema de valor inicial fuzzy via extensão de Zadeh, pontos de equilíbrio fuzzy, órbitas, conjuntos limites e conjuntos invariantes (Seção 4.1). Estes conceitos são necessários para o desenvolvimento do princípio de invariância fuzzy e sua versão global para o sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$ com incertezas apenas na condição inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(U)$ (Seção 4.2). Estes resultados desenvolvidos nesta tese para a classe de sistemas dinâmicos fuzzy são úteis para obter estimativas de atratores e região de atração de sistemas autônomos com condições iniciais fuzzy. O Capítulo 5 apresenta conclusões e proposta de trabalhos futuros.

Capítulo 2

O Princípio de Invariância de LaSalle

Inicialmente apresentamos neste capítulo a grande motivação deste trabalho, o princípio de invariância na Seção 2.2 e a extensão do princípio de invariância na Seção 2.3 para a classe de sistemas contínuos de equações diferenciais, mas antes disso, é fundamental revisar alguns conceitos sobre sistemas dinâmicos (Seção 2.1) para facilitar o entendimento nos próximos capítulos.

2.1 Conceitos Preliminares

Considere o sistema dinâmico autônomo

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 . Um ponto $y \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio de (2.1) se $f(y) = 0$. Denota-se por $\varphi(t, x_0)$ a solução de (2.1) com condição inicial em x_0 , ou seja, $\varphi(0, x_0) = x_0$. Definindo $x(t) = \varphi(t, x_0)$, então $\dot{x}(t) = f(x(t))$ e $x(0) = 0$.

Na equação diferencial $\dot{x} = f(x)$, para que exista a solução e seja única, necessitamos impor restrição sobre a função f .

Teorema 2.1 (Existência e Unicidade) *Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e suponha que $f \in C^k(U)$ ($k \geq 1$). Então, para cada $x_0 \in U$ existe um intervalo $I_{x_0} = (t_1, t_2)$, contendo $t = 0$, tal que a solução $\varphi(t, x_0)$ de (2.1) existe, é única e além disso, é de classe C^k .*

Omitiremos a demonstração deste teorema (BIRKHOFF, 1966; HARTMAN, 1964).

Dizer que $\varphi(t, x_0)$ é solução da Equação (2.1) é equivalente a dizer que

$$\varphi(t, x_0) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds,$$

para todo $x_0 \in U$ e $t \in I_{x_0}$.

A seguir definiremos o conceito de ponto de equilíbrio estável, assintoticamente estável, globalmente assintoticamente estável e a área de atração de um ponto de equilíbrio.

Definição 2.1 Um ponto de equilíbrio x_e é um ponto de equilíbrio estável, no sentido de Lyapunov, se dado $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que se $\|x_0 - x_e\| < \delta$ então $\|\varphi(t, x_0) - x_e\| < \varepsilon$ para $t \geq 0$.

A Figura 2.1 ilustra o conceito de estabilidade. Em palavras, um ponto de equilíbrio é estável se as soluções que começam suficientemente próximas do equilíbrio permanecem nas vizinhanças do equilíbrio para todo tempo futuro.

Figura 2.1: Interpretação geométrica do conceito de estabilidade.

Definição 2.2 Um ponto de equilíbrio é instável se não for estável.

Definição 2.3 Um ponto de equilíbrio x_e é assintoticamente estável se for estável e $\varphi(t, x_0) \rightarrow x_e$ quando $t \rightarrow \infty$ sempre que $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$.

A Figura 2.2 ilustra o conceito de estabilidade assintótica. Além de estabilidade, tem-se que as soluções se aproximam do equilíbrio quando $t \rightarrow +\infty$. Estabilidade é um conceito local. O conceito de área de atração oferece uma visão mais completa do comportamento assintótico de soluções e relação ao equilíbrio (CHIANG; ALBERTO, 2015).

Figura 2.2: Interpretação geométrica do conceito de estabilidade assintótica.

Definição 2.4 A bacia de atração ou área de atração $A(x_e)$ de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável x_e é o conjunto de todas as condições iniciais cujas órbitas tendem para x_e quando $t \rightarrow +\infty$. Em outras palavras, temos:

$$A(x_e) := \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \varphi(t, x_0) \rightarrow x_e \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}.$$

A Figura 2.3 ilustra o conceito de área de atração.

Figura 2.3: Interpretação geométrica da área de atração.

Definição 2.5 Um ponto de equilíbrio x_e é globalmente assintoticamente estável se for estável e $A(x_e) = \mathbb{R}^n$.

Pela definição anterior, podemos dizer que um ponto de equilíbrio é globalmente assintoticamente estável se é estável e todas as órbitas tendem para ele quando $t \rightarrow +\infty$.

A noção de invariância é relevante no estudo de sistemas dinâmicos.

É importante destacar que as Definições 2.6 e 2.7 são casos particulares das Definições 3.7 e 3.8 (Seção 3.1).

Definição 2.6 Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é invariante com relação à equação diferencial (2.1) se, para todo $x_0 \in M$, $\varphi(t, x_0) \in M$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Exemplos de conjuntos invariantes são pontos de equilíbrio e órbitas periódicas.

Definição 2.7 Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é chamado positivamente invariante (negativamente invariante) com relação à equação diferencial (2.1) se, para todo $x_0 \in M$, $\varphi(t, x_0) \in M$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ ($t \in \mathbb{R}_-$).

O conceito de conjunto limite é relevante para o estudo do comportamento assintótico das soluções de sistemas dinâmicos. Conjuntos limites capturam o comportamento do sistema em “regime permanente”.

Definição 2.8 Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é chamado um ponto limite da trajetória $\varphi(t, x_0)$ se existir uma sequência $\{t_i\}$ tal que $t_i \rightarrow \infty$ e

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|p - \varphi(t_i, x_0)\| = 0.$$

O conjunto dos pontos limites de $\varphi(\cdot, x_0)$ é chamado conjunto limite de $\varphi(\cdot, x_0)$ e é denotado por $\omega(x_0)$.

Antes de enunciarmos a Definição 2.10, definimos a solução φ de um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ no tempo t , ou seja:

Definição 2.9 *Seja $B \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que a solução $\varphi_t(B)$ é o conjunto de todas as soluções $\varphi(t, x_0)$ tais que x_0 está em B , ou seja,*

$$\varphi_t(B) = \{\varphi(t, x_0) : x_0 \in B\}.$$

Uma outra forma de definir o conjunto ω -limite, equivalente a Definição 2.8, é dada da seguinte maneira:

Definição 2.10 *Seja $B \subset \mathbb{R}^n$. O conjunto ω -limite de B é definido por*

$$\omega(B) = \bigcup_{s \geq 0} \overline{\bigcap_{t \geq s} \varphi_t(B)}.$$

Observação 2.1 *O conjunto ω -limite é um conjunto invariantes.*

2.2 Princípio de Invariância de LaSalle

Uma das ferramentas mais significativas para se estudar o comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais é chamada de Princípio de Invariância de LaSalle, resultado este conjecturado e provado por Krasovski (KRASOVSKI, 1959) e LaSalle (LASALLE, 1960a,b) para equações diferenciais autônomas definidas em espaços de dimensão finita. Antes de apresentarmos a versão deste resultado para a classe de sistemas periódicos (VIDYASAGAR, 1993) e os resultados obtidos neste trabalho (Seções 3.4, 3.5, 3.6 e 3.7), é importante a apresentação da versão original do Princípio de Invariância de LaSalle (LASALLE, 1960a,b).

Explorando a propriedade de uma função escalar V com o conceito de invariância, o Lema 2.1 mostra que para toda condição inicial x_0 em Ω_L , a solução $\varphi(t, x_0)$ permanece em Ω_L para $t \geq 0$. A derivada da função escalar V , denotada por $\dot{V}$, é dada por $\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(x(t)) = \langle \text{grad}(V), f \rangle$. Sendo assim, temos o seguinte resultado:

Lema 2.1 *Considere o sistema (2.1). Sejam $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e L uma constante real. Admitindo que $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega_L := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$ então o conjunto Ω_L é positivamente invariante.*

Demonstração. Seja $x_0 \in \Omega_L$. Provaremos que $\varphi(t, x_0) \in \Omega_L$, para $t \geq 0$.

Admita que exista $\tilde{t} > 0$ tal que $V(\varphi(\tilde{t}, x_0)) \geq L$. Então podemos considerar o primeiro tempo t^* em que a solução sai de Ω_L tal que $V(\varphi(t^*, x_0)) = L > V(x_0)$, para $t^* \in [0, \tilde{t})$.

Portanto, existe $t \in [0, t^*)$ tal que $\dot{V} > 0$, ou seja, V é uma função crescente em $[0, t^*)$. Contradição, pois $\dot{V} \leq 0$ em Ω_L . $\square$

Utilizando as propriedades da Seção 2.1, podemos então apresentar o resultado provado por LaSalle em 1960.

Teorema 2.2 (Princípio de Invariância de LaSalle) *Sejam $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1 . Seja $L \in \mathbb{R}$ uma constante real tal que $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$ seja limitado. Admita que $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega_L$ e defina $E := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) = 0\}$. Seja B o maior conjunto invariante contido em E . Então, toda solução de (2.1) iniciando em Ω_L tende para B quando $t \rightarrow \infty$.*

Uma primeira versão da demonstração do Teorema 2.2 pode ser encontrada em (KRA-SOVSKI, 1959; LASALLE, 1960b). A demonstração será apresentada a seguir com intuito de que o leitor possa comparar com as demonstrações que irão aparecer ao longo deste trabalho.

Demonstração.(ALBERTO, 2000) Seja $\varphi(t, x_0)$ a solução da equação diferencial com condição inicial $x_0 \in \Omega_L$ em $t = 0$. Seja $[0, t_+)$ o máximo intervalo de existência desta solução enquanto esta permanece dentro de Ω_L . Então, $\dot{V}(\varphi(t, x_0)) \leq 0$ neste intervalo e $V(\varphi(t, x_0))$ é decrescente. Consequentemente $V(\varphi(t, x_0)) \leq V(x_0) < L$. Isto implica que $t_+ = \infty$ e o ω -limite $\omega(x_0)$ de $\varphi(t, x_0)$ está contido no conjunto $\{x \in \Omega_L : V(x) \leq V(x_0)\}$, o qual é um subconjunto compacto de Ω_L . Como $V(\varphi(t, x_0))$ é decrescente e inferiormente limitada, $V(\varphi(t, x_0)) \rightarrow v \in \mathbb{R}$, quando $t \rightarrow \infty$. Uma vez que $\omega(x_0)$ é um conjunto invariante de (2.1), tem-se que $V \equiv v$ em $\omega(x_0)$ e portanto $\dot{V} \equiv 0$ em $\omega(x_0)$. Conclui-se portanto que $\varphi(t, x_0) \rightarrow \omega(x_0) \subset B$, quando $t \rightarrow \infty$. $\square$

As principais vantagens do princípio de invariância de LaSalle é estudar o comportamento assintótico das soluções sem conhecer as soluções das equações diferenciais e utilizar uma função auxiliar V , conhecida como função de Lyapunov.

Algumas desvantagens deste teorema são apresentadas a seguir:

Observação 2.2 *a) O resultado admite a existência da função escalar V , chamada função de Lyapunov, mas não oferece uma maneira explícita de como encontrar a função V .*

b) O resultado garante a existência de um conjunto atrativo dentro de E mas não demonstra estabilidade.

c) *O resultado oferece condições suficientes para garantir a existência do conjunto atrativo, mas estas condições não são necessárias.*

Pela observação anterior, podemos concluir que se as hipóteses do Teorema 2.2 não forem satisfeitas, nada se pode afirmar com respeito ao comportamento das soluções.

A Figura 2.4 ilustra o Teorema 2.2. Note que Ω_L é um conjunto limitado. No conjunto Ω_L a derivada é não positiva ao longo das soluções e o conjunto E representa o conjunto em que $\dot{V} = 0$. Portanto, com todas hipóteses satisfeitas, o teorema garante que todas as soluções de (2.1) iniciando em Ω_L tendem para o maior conjunto invariante contido em E .

Figura 2.4: Interpretação geométrica do princípio de invariância para sistemas autônomos. Para as condições iniciais $x_1, x_2 \in \Omega_L$, as soluções não saem de Ω_L e tendem para o maior conjunto invariante contido em E .

Esta versão do princípio de invariância de LaSalle é um caso particular da extensão do princípio de invariância que será apresentado na Seção 2.3.

2.3 Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle

Nesta seção, apresentaremos uma versão mais geral do princípio de invariância, chamada extensão do princípio de invariância (RODRIGUES; ALBERTO; BRETAS, 2000). Esta versão considera que em algumas regiões do espaço de estado a derivada da função auxiliar V seja positiva. Desta forma, torna-se mais simples a obtenção da V e portanto, problemas que não poderiam serem solucionados pela teoria convencional, podem pela extensão do princípio de invariância. Um desses problemas são os sistemas caóticos.

Fundamentado os conceitos na Seção 2.2, podemos então apresentar a versão da extensão do princípio de invariância para classe de sistemas contínuos (RODRIGUES; ALBERTO; BRETAS, 2000).

Teorema 2.3 (Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle) *Sejam $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1 . Seja $L \in \mathbb{R}$ uma constante real tal que $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$ seja limitado. Seja $C := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) > 0\}$, e admita que*

$\sup_{x \in C} V(x) = l < L$. Defina $\bar{\Omega}_l = \{x \in \Omega_L : V(x) \leq l\}$ e $E := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) = 0\} \cup \bar{\Omega}_l$. Seja B o maior conjunto invariante de (2.1) contido em E . Então, toda solução de (2.1) iniciando em Ω_L converge para o conjunto invariante B quando $t \rightarrow \infty$.

Além disto, se $x_0 \in \bar{\Omega}_l$ então $\varphi(t, x_0) \in \bar{\Omega}_l$ para todo $t \geq 0$ e $\varphi(t, x_0)$ tende para o maior conjunto invariante de (2.1) contido em $\bar{\Omega}_l$.

Demonstração.(ALBERTO, 2000) Suponha que $x_0 \in \Omega_L$ e $x_0 \notin \bar{\Omega}_l$. Seja $\varphi(t, x_0)$ a solução da equação diferencial com condição inicial x_0 em $t = 0$. Seja $[0, t_+)$ o máximo intervalo de existência desta solução enquanto esta permanece dentro de Ω_L . Admita inicialmente que a solução $\varphi(t, x_0)$ permaneça fora do conjunto $\bar{\Omega}_l$ para $t \in [0, t_+)$. Como $C \subset \bar{\Omega}_l$, então, $\dot{V}(\varphi(t, x_0)) \leq 0$ neste intervalo. Portanto $V(\varphi(t, x_0))$ é decrescente e consequentemente $V(\varphi(t, x_0)) \leq V(x_0) < L$. Isto implica que $t_+ = \infty$ e o ω -limite $\omega(x_0)$ de $\varphi(t, x_0)$ está contido no conjunto $\{x \in \Omega_L : V(x) \leq V(x_0)\}$, o qual é um subconjunto compacto de Ω_L . Como $V(\varphi(t, x_0))$ é decrescente e inferiormente limitada, $V(\varphi(t, x_0)) \rightarrow v \in \mathbb{R}$, quando $t \rightarrow \infty$. Uma vez que $\omega(x_0)$ é um conjunto invariante de (2.1), tem-se que $V \equiv v$ em $\omega(x_0)$ e portanto $\dot{V} \equiv 0$ em $\omega(x_0)$. Portanto, $\omega(x_0) \subset \Omega_L - C$, logo conclui-se que $\varphi(t, x_0) \rightarrow \omega(x_0) \subset B$, quando $t \rightarrow \infty$.

Admita agora que $x_0 \in \bar{\Omega}_l$. Então $V(x_0) \leq l$. Afirma-se que a solução $\varphi(t, x_0)$ permanece em $\bar{\Omega}_l$ para todo $t \in [0, t_+)$. Para provar esta afirmação, admita que exista um tempo $t^* > 0$ tal que $V(\varphi(t^*, x_0)) > l$. Então existe um $t_1 \in [0, t^*)$ tal que $V(\varphi(t_1, x_0)) = l$ e $V(\varphi(t, x_0)) > l$ para $t \in (t_1, t^*)$. Portanto, existe $\tilde{t} \in (t_1, t^*)$, tal que $\dot{V}(\tilde{t}) > 0$, o que contradiz o fato de que $\dot{V} \leq 0$ fora de $\bar{\Omega}_l \supset C$. Como antes, $t_+ = \infty$ e a solução permanece dentro de Ω_L , para $t \geq 0$. Portanto o conjunto ω -limite é não vazio e a solução aproxima-se dele quando $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, o conjunto $\omega(x_0)$ é um subconjunto invariante que está contido em $\bar{\Omega}_l$. Portanto a solução aproxima-se do maior conjunto invariante contido em $\bar{\Omega}_l$ quando $t \rightarrow \infty$.

□

A Figura 2.5 ilustra a interpretação geométrica do Teorema 2.3. Observe que Ω_L é um conjunto limitado e que a derivada da função auxiliar V é não positiva ao longo das soluções, exceto no conjunto C , em que a derivada é positiva. Uma vez que $l < L$, este conjunto nunca irá atingir a fronteira de Ω_L . Desta forma, o Teorema 2.3 afirma que todas as soluções de (2.1) iniciando dentro de Ω_L tendem para o maior conjunto invariante contido em E . Em particular, se o maior conjunto invariante contido em E estiver contido em $\bar{\Omega}_l$, então todas as soluções com condição inicial em Ω_L tendem para o maior conjunto invariante contido em $\bar{\Omega}_l$. Uma vez dentro de $\bar{\Omega}_l$, as soluções não saem deste conjunto o qual é uma estimativa do atrator. Em $\bar{\Omega}_l$ podem ocorrer dois comportamentos, ou as soluções permanecem entrando e saindo do conjunto C indefinidamente ou as soluções tendem para o conjunto $\{x \in \bar{\Omega}_l : \dot{V}(x) = 0\}$.

Figura 2.5: Interpretação geométrica do Teorema 2.3. Para a condição inicial x_1 em Ω_L , a solução entra em Ω_l e não sai de Ω_l e tende para o maior conjunto invariante contido em $\overline{\Omega_l}$. Para as condições iniciais x_0 e x_2 em Ω_L , as soluções não saem de Ω_L e tendem para o maior conjunto invariante contido em E .

Capítulo 3

Extensão do Princípio de Invariância para Sistemas Periódicos

Neste capítulo apresentamos algumas propriedades de sistemas dinâmicos não autônomos e não lineares para a classe particular de sistemas periódicos, conforme descrita na Seção 3.2. Em seguida, a Seção 3.3 apresenta a versão clássica do princípio de invariância para sistemas periódicos. Na Seção 3.4 é demonstrada uma versão global do princípio de invariância para classe de sistemas periódicos. Na Seção 3.5, prova-se uma extensão do princípio de invariância para a classe de sistemas periódicos. Esta extensão é uma generalização da extensão para sistemas autônomos e é uma das contribuições desta tese. Uma característica importante desta extensão é a possibilidade da derivada da função escalar auxiliar V , também conhecida por função de Lyapunov, assumir valores positivos em regiões limitadas no espaço de estado. A versão global deste resultado é apresentada na Seção 3.6. Um princípio de invariância uniforme para a classe de sistemas periódicos é provado na Seção 3.7, sendo sua principal utilidade obter estimativas de atratores que são uniformes com respeito a parâmetros. Por fim, uma aplicação do princípio de invariância no estudo de sincronização de um sistema bidimensional acoplado é apresentada na Seção 3.8.

3.1 Sistemas Não Autônomos

Nesta seção apresentaremos propriedades fundamentais sobre sistemas dinâmicos em que consideramos um sistema não autônomo não linear

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{3.1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 . As soluções de (3.1) iniciando em x_0 no tempo t_0 serão denotadas por $\varphi(t, t_0, x_0)$.

A solução $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (3.1) satisfaz as seguintes propriedades:

$$\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\varphi(t, t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0)) = \varphi(t, t_0, x_0), \quad \forall t, t_1, t_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

As propriedades apresentadas nesta seção podem ser encontradas em Vidyasagar (1993).

Definição 3.1 Dizemos que x_e é um ponto de equilíbrio do sistema (3.1) se $f(t, x_0) = 0, \forall t \geq 0$.

Pela definição anterior, podemos afirmar que $\varphi(t, t_0, x_0) = x_0, \forall t \geq t_0 \geq 0$, ou seja, se o sistema inicia em um equilíbrio, permanece no mesmo. A recíproca é verdadeira, sendo facilmente mostrada e portanto omitiremos aqui.

Definição 3.2 Um ponto de equilíbrio x_e é um ponto de equilíbrio estável, no sentido de Lyapunov, se dado $\varepsilon > 0$, para cada $t_0 \in \mathbb{R}_+$, existir um $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que se $\|x_0 - x_e\| < \delta$ então $\|\varphi(t, t_0, x_0) - x_e\| < \varepsilon$ para $t \geq t_0$.

Definição 3.3 O equilíbrio x_e é dito uniformemente estável se, para cada $\varepsilon > 0$, existir um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0, t_0 \geq 0$ tal que se $\|x_0 - x_e\| < \delta, t_0 \geq 0$ então $\|\varphi(t, t_0, x_0) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$.

Definição 3.4 O equilíbrio x_e é atrativo se, para cada $t_0 \in \mathbb{R}_+$, existir um $\delta = \delta(t_0) > 0$ tal que se $\|x_0 - x_e\| < \delta, t_0 \geq 0$ então $\varphi(t_0 + t, t_0, x_0) \rightarrow x_e$ quando $t \rightarrow \infty$, uniformemente em x_0, t_0 .

Para a definição anterior, a palavra “uniformemente” refere-se a convergência da solução φ .

A partir das Definições 3.2 e 3.4, podemos definir um equilíbrio assintoticamente estável da seguinte maneira:

Definição 3.5 Se o equilíbrio x_e é estável e atrativo então x_e é assintoticamente estável.

Definição 3.6 Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é chamado um **ponto limite** da trajetória $\varphi(t, t_0, x_0)$ se existe uma sequência $\{t_i\}$ de números em $[t_0, +\infty)$ tal que $t_i \rightarrow +\infty$ e

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|p - \varphi(t_i, t_0, x_0)\| = 0.$$

O conjunto dos pontos limites de $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ é chamado **conjunto limite** de $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ e é denotado por $\omega(t_0, x_0)$.

A seguir iremos discutir algumas propriedades de invariância de conjuntos limites para sistemas periódicos.

Definição 3.7 Um conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamado de **conjunto invariante** com relação à equação diferencial (3.1) se, para cada $x_0 \in M$, existir $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t, t_0, x_0) \in M, \forall t \in (\omega_-, \omega_+)$, onde (ω_-, ω_+) é o intervalo maximal de existência da solução $\varphi(t, t_0, x_0)$.

Definição 3.8 Um conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamado de **conjunto positivamente invariante** com relação à equação diferencial (3.1) se, para cada $x_0 \in M$, existir $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t, t_0, x_0) \in M, \forall t \in [t_0, \omega_+)$.

Os Lemas (3.1) e (3.2) discutem propriedades de conjuntos ω -limite.

Lema 3.1 (VIDYASAGAR, 1993) Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Seja $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ a solução do sistema (3.1) iniciando em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ no tempo $t_0 \in \mathbb{R}$ e admita que a solução φ esteja definida para todo $t \in [t_0, \infty)$, então $\omega(t_0, x_0)$ é um conjunto fechado.

A propriedade de ser fechado é verdadeira para todos os conjuntos limites. Quando a solução é limitada, ganham-se algumas propriedades importantes.

Lema 3.2 (VIDYASAGAR, 1993) Suponha que a solução $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ seja limitada para $t \geq t_0$. Então, $\omega(t_0, x_0)$ é não vazio, limitado e $d(\varphi(t, t_0, x_0), \omega(t_0, x_0)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Em geral, conjuntos limites de sistemas não autônomos não são invariantes. No caso particular de sistemas periódicos e autônomos, os conjuntos limites são também invariantes (Lema 3.3 - Seção 3.2).

A seguir, definimos a distância entre um ponto e um conjunto.

Definição 3.9 Sejam a um ponto e X um subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}^n$. A distância do ponto a ao conjunto X é dada por

$$d(a, X) = \inf_{x \in X} d(a, x).$$

3.2 Propriedades de Sistemas Periódicos

Os conceitos de sistemas periódicos apresentados nesta seção são fundamentais para um melhor entendimento do princípio de invariância para sistemas periódicos (VIDYASAGAR, 1993), apresentado na Seção 3.3, e para contribuição dos resultados inéditos na literatura (veja Seções 3.4, 3.5, 3.6 e 3.7).

Definição 3.10 O campo vetorial é periódico com período $T \in \mathbb{R}$ se

$$f(t + T, x) = f(t, x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

A seguir, apresentam-se algumas propriedades das soluções de sistemas periódicos.

Em um sistema periódico em que T é o período de (3.1) temos que

$$\varphi(t + T, t_0 + T, x_0) = \varphi(t, t_0, x_0), \forall t, t_0 \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (3.2)$$

De fato, supondo que $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ é solução de (3.1), mostraremos que $x(t - T)$ também é solução.

Ora, $\frac{d}{dt}\varphi(t, t_0, x_0) = f(t, \varphi(t, t_0, x_0))$ e daí, $x(t - T) = \varphi(t - T, t_0, x_0)$ é uma translação da solução no tempo. Considere agora a seguinte mudança de variável: $t = \tau - T \Rightarrow dt = d\tau$.

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\varphi(\tau - T, t_0, x_0) &= f(\tau - T, \varphi(\tau - T, t_0, x_0)) \\ &\stackrel{\text{period.}}{=} f(\tau, \varphi(\tau - T, t_0, x_0)) \end{aligned}$$

e portanto $\varphi(\tau - T, t_0, x_0)$ é solução da equação diferencial.

Em particular, $x(t - T)$ é a solução que satisfaz $x(t_0 + T) = x_0$ e pela unicidade da solução, temos que $\varphi(t - T, t_0, x_0) = \varphi(t, t_0 + T, x_0)$. Fazendo $t = u + T \Rightarrow u = t - T$, podemos concluir que $\varphi(u, t_0, x_0) = \varphi(u + T, t_0 + T, x_0)$.

Para esse mesmo período T , pode-se mostrar por indução que

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t + kT, t_0 + kT, x_0), \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Para $k = 1$ temos que

$$\begin{aligned} \varphi(t + 1T, t_0 + 1T, x_0) &= \varphi(t + T, t_0 + T, x_0) \\ &\stackrel{(3.2)}{=} \varphi(t, t_0, x_0) \end{aligned}$$

Suponha que valha para k , ou seja, a equação (3.3) é verdadeira. Verificaremos que ela também será verdadeira para $(k + 1)$, isto é, $\varphi(t + (k + 1)T, t_0 + (k + 1)T, x_0) = \varphi(t, t_0, x_0)$. Daí

$$\begin{aligned} \varphi(t, t_0, x_0) &\stackrel{\text{hip}}{=} \varphi(t + kT, t_0 + kT, x_0) \\ &\stackrel{(3.2)}{=} \varphi((t + kT) + T, (t_0 + kT) + T, x_0) \\ &= \varphi(t + (kT + T), t_0 + (kT + T), x_0) \\ &= \varphi(t + (k + 1)T, t_0 + (k + 1)T, x_0) \end{aligned}$$

Se o sistema (3.1) fôsse autônomo, isto é, se f não dependesse explicitamente de t , então poderia-se pensar neste sistema como um sistema periódico com um período arbitrário. Portanto, todos os resultados apresentados abaixo para os sistemas periódicos

aplicam-se igualmente bem aos sistemas autônomos. Consequentemente, os resultados em Rodrigues (2000, 2001) são casos particulares dos que estão provado nesta tese.

O Lema 3.3 a seguir apresenta esta propriedade sobre conjunto invariante para a classe de sistemas periódicos.

Lema 3.3 (VIDYASAGAR, 1993) *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Seja $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ a solução do sistema (3.1) iniciando em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ no tempo $t_0 \in \mathbb{R}$ e admita que φ seja definida para todo $t \in [t_0, \infty)$. Suponha que o sistema (3.1) seja periódico, então o conjunto limite $\Omega(t_0, x_0)$ é um conjunto invariante.*

A prova do Lema 3.3 explora a periodicidade do campo vetorial e as propriedades correspondentes do fluxo para provar invariância. Embora esta demonstração já seja conhecida na literatura (VIDYASAGAR, 1993), será apresentada aqui pelo fato de conter idéias que serão fortemente exploradas nas provas dos resultados desenvolvidos neste trabalho.

Demonstração.

Seja T o período de (3.1) e seja $p \in \Omega(t_0, x_0)$. Mostraremos que existe um tempo inicial $\tau \in \mathbb{R}_+$ tal que $\varphi(t, \tau, p) \in \Omega(t_0, x_0), \forall t \in (\omega_-, \omega_+)$.

Dado $p \in \Omega(t_0, x_0)$, temos que existe uma sequência $\{t_i\}$, com $t_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$, tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} \|p - \varphi(t_i, t_0, x_0)\| = 0$.

Para cada i , encontra-se um inteiro k_i tal que $(t_i - k_i T) \in [0, T)$. Então a sequência $\{\tau_i\} = \{t_i - k_i T\}$ é limitada e portanto admite uma subsequência convergente. Escolha tal subsequência $\{\tau'_i\} = \{t'_i - k'_i T\}$ e enumere mais uma vez como $\{\tau_i\}$. Seja $\tau \in [0, T]$ o limite desta subsequência. As soluções dependem de maneira contínua das condições iniciais e do tempo, então

$$\begin{aligned} \varphi(t, \tau, p) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi[t, \tau, \varphi(t_i, t_0, x_0)] \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi[t + k_i T, \tau + k_i T, \varphi(t_i, t_0, x_0)] \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi[t + k_i T, t_i, \varphi(t_i, t_0, x_0)] \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi[t + k_i T, t_0, x_0] \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde usamos o fato que $\tau = \lim_{i \rightarrow \infty} (t_i - k_i T)$.

Portanto existe uma sequência de tempos $\{t + k_i T\}$ com $\{t + k_i T\} \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(t + k_i T, t_0, x_0) = \varphi(t, \tau, p)$. Portanto, $\varphi(t, \tau, p) \in \Omega(t_0, x_0), \forall t \in \mathbb{R}$. $\square$

A seguir definiremos dois conjuntos de nível, $S(L)$ e $A(L)$, respectivamente. A importância destes conjuntos de nível é fornecer estimativa da bacia de atração de conjuntos atratores. Para uma função escalar $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , os conjuntos de nível são considerados:

$$S(L) := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } V(t, x) < L\}$$

e

$$A(L) := \{x \in \mathbb{R}^n : V(t, x) < L, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Claramente $A(L) \subseteq S(L)$. Para sistemas não autônomos, se considerarmos a existência de uma função escalar de classe C^1 com sua derivada menor ou igual a 0, obtemos alguns resultados importantes relativos a propriedade de invariância de conjuntos de nível. Estas propriedades são desenvolvidas nos Lemas 3.4 e 3.5.

Lema 3.4 *Considere o sistema (3.1) e seja $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $\dot{V}(t, x) \leq 0$ em $S(L)$. Então $S(L)$ é positivamente invariante.*

Demonstração. Dado $x_0 \in S(L)$, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $V(t_0, x_0) < L$. Mostraremos que $\varphi(t, t_0, x_0) \in S(L), \forall t \in [t_0, \omega_+)$.

Por hipótese temos que $V(t_0, x_0) < L$. Suponha, por contradição, a existência de um tempo $t^* > t_0$ tal que $\varphi(t^*, t_0, x_0) \notin S(L)$. Da continuidade da função V e da continuidade das soluções, existe um tempo t_1 tal que $V(t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0)) = L$ e $\varphi(t, t_0, x_0) \in S(L), \forall t \in [t_0, t_1)$. Se $V(t_0, x_0) < L$ e $V(t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0)) = L$, então existe um tempo t no intervalo $[t_0, t_1)$ tal que $\dot{V}(t, \varphi(t, t_0, x_0)) > 0$, o que nos leva a uma contradição.

Então, para todo tempo $\tau \in [t_0, \omega_+)$, temos que $V(\tau, \varphi(\tau, t_0, x_0)) \leq V(t_0, \varphi(t_0, t_0, x_0)) = V(t_0, x_0) < L$.

Logo, $\varphi(\tau, t_0, x_0) \in S(L), \forall \tau \in [t_0, \omega_+)$. Portanto o conjunto $S(L)$ é positivamente invariante. □

O Lema 3.4 garante que o conjunto de nível $S(L)$ da função V é positivamente invariante. Considere o conjunto de nível $A(L)$. Este conjunto não é necessariamente positivamente invariante, entretanto mostraremos no Lema 3.5 que soluções que começam em $A(L)$ não saem de $S(L)$.

Lema 3.5 *Considere o sistema (3.1) e seja $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $\dot{V}(t, x) \leq 0$ em $S(L)$. Se $x_0 \in A(L)$, então a solução $\varphi(t, t_0, x_0) \in S(L), \forall t \in [t_0, \omega_+), \forall t_0 \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $x_0 \in A(L)$. Então $V(t_0, x_0) < L, \forall t_0 \in \mathbb{R}$. Suponha, por contradição, a existência de um tempo $t^* > t_0$ tal que $\varphi(t^*, t_0, x_0) \notin S(L)$. Da continuidade da função V e da continuidade das soluções, existe um tempo t_1 tal que $V(t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0)) = L$ e $\varphi(t, t_0, x_0) \in S(L), \forall t \in [t_0, t_1)$. Se $V(t_0, x_0) < L$ e $V(t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0)) = L$, então existe um tempo t no intervalo $[t_0, t_1)$ tal que $\dot{V}(t, \varphi(t, t_0, x_0)) > 0$, o que nos leva a uma contradição.

Como V é decrescente em $S(L)$, podemos dizer que $V(t, \varphi(t, t_0, x_0)) \leq V(t_0, \varphi(t_0, t_0, x_0)) = V(t_0, x_0) < L$, para todo $t \in [t_0, \omega_+)$. Consequentemente, $\varphi(t, t_0, x_0) \in S(L), \forall t \in [t_0, \omega_+)$ e o lema está provado. □

A Figura 3.1 ilustra os Lemas 3.4 and 3.5.

Figura 3.1: Interpretação geométrica dos Lemas 3.4 and 3.5. Para as condições iniciais x_1 e x_2 em $A(L)$, as soluções não saem de $S(L)$. Para $x_0 \in S(L)$, existe t_0 tal que a solução iniciando nesse tempo não sai de $S(L)$.

3.3 Princípio de Invariância para Sistemas Periódicos

Explorando as propriedades de sistemas não autônomos e dos conjuntos de nível estudadas nas Seções 3.1 e 3.2, o teorema do princípio de invariância para a classe de sistemas periódicos (LASALLE, 1960b; VIDYASAGAR, 1993) é apresentado a seguir:

Teorema 3.1 (*Princípio de Invariância para Sistemas Periódicos*)

Suponha que o sistema (3.1) seja periódico e $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função de classe C^1 com o mesmo período do sistema (3.1). Seja $L \in \mathbb{R}$ uma constante real, e considere os conjuntos $S(L)$ e $A(L)$. Suponha que $S(L)$ seja limitado e $\dot{V}(t, x) \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in S(L)$. Defina $E := \{x \in S(L) : \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } \dot{V}(t, x) = 0\}$ e seja B o maior conjunto invariante contido em E . Então

- (i) $x_0 \in A(L) \Rightarrow \varphi(t, t_0, x_0) \rightarrow B$ para todo $t_0 \in \mathbb{R}$;
- (ii) $x_0 \in S(L) \Rightarrow \exists t_0$ tal que $\varphi(t, t_0, x_0) \rightarrow B$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Demonstração.

Provaremos inicialmente a afirmação (i). Seja $x_0 \in A(L)$. Pelo Lema 3.5, sabemos que $\varphi(t, t_0, x_0) \in S(L), \forall t \in [t_0, \omega_+)$, onde ω_+ é o tempo maximal de existência da solução φ .

Como $S(L)$ é limitado, $\omega_+ = +\infty$ e a solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ existe e é limitada para todo $t \geq t_0$. Pelo Lema 3.2, podemos afirmar que $\Omega(t_0, x_0)$ é não vazio e $d(\varphi(t, t_0, x_0), \Omega(t_0, x_0)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Por outro lado, $\dot{V}(t, \varphi(t, t_0, x_0)) \leq 0, \forall t \geq t_0$, e portanto $V(t, \varphi(t, t_0, x_0))$ é decrescente. Por V ser contínua e periódica em t e, pelo fato de $S(L)$ ser limitado, temos que $V(t, \varphi(t, t_0, x_0))$ é limitada para $t \geq t_0$, e em particular, inferiormente limitada para $t \geq t_0$. Então $V \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Seja $p \in \Omega(t_0, x_0)$. Então existe uma sequência $\{t_i\}, t_i \rightarrow \infty$, tal que $\varphi(t_i, t_0, x_0) \rightarrow p$. Para cada i , encontra-se um inteiro $k_i \in \mathbb{Z}$ tal que $t_i - k_i T \in [0, T)$, onde T é o período. Então a sequência $\{\tau_i\} = \{t_i - k_i T\}$ é limitada, e portanto admite uma subsequência convergente. Escolha tal subsequência $\{\tau'_i\} = \{t'_i - k'_i T\}$ e enumere mais uma vez como $\{\tau_i\}$. Seja $\tau \in [0, T)$ o limite desta subsequência.

$V(t_i, \varphi(t_i, t_0, x_0)) = V(\tau_i + k_i T, \varphi(t_i, t_0, x_0)) \stackrel{\text{period. da } V}{=} V(\tau_i, \varphi(t_i, t_0, x_0))$, onde $t_i = \tau_i + k_i T$. Então podemos concluir que $\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} V(t_i, \varphi(t_i, t_0, x_0)) = \lim_{i \rightarrow \infty} V(\tau_i, \varphi(t_i, t_0, x_0)) \stackrel{\text{cont. da } V}{=} V(\tau, p)$, implicando em $V(\tau, p) = \alpha$.

Vamos mostrar que $V(u, \varphi(u, \tau, p)) = \alpha, \forall u \in \mathbb{R}$. Pela demonstração do Lema 3.3, temos que $\varphi(u + k_i T, t_0, x_0) \rightarrow \varphi(u, \tau, p)$ quando $i \rightarrow \infty$. Assim, $\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} V(u + k_i T, \varphi(u + k_i T, t_0, x_0)) \stackrel{\text{period. da } V}{=} \lim_{i \rightarrow \infty} V(u, \varphi(u + k_i T, t_0, x_0)) = V(u, \varphi(u, \tau, p))$, então $V(u, \varphi(u, \tau, p)) = \alpha, \forall u$. Pelo Lema 3.3 temos que $\Omega(t_0, x_0)$ é um conjunto invariante e para mesma condição inicial τ , $\varphi(u, \tau, p) \in \Omega(t_0, x_0), \forall u$, o que implica, para todo $p \in \Omega(t_0, x_0)$, que existe $\tau \in \mathbb{R}$, dependente de p , tal que $\dot{V}(\tau, p) = 0$. Logo, $p \in E$ e $\Omega(t_0, x_0) \subseteq E$. Portanto, $\varphi(t, t_0, x_0) \rightarrow \Omega(t_0, x_0) \subset B$ quando $t \rightarrow +\infty$, o que prova (i).

Para provar a afirmação (ii), considere $x_0 \in S(L)$. Pelo Lema 3.4, temos que existe t_0 tal que $\varphi(t, t_0, x_0) \in S(L), \forall t \in [t_0, \omega_+)$, onde ω_+ é o tempo maximal de existência da solução φ .

Como $S(L)$ é limitado, $\omega_+ = +\infty$ e a solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ existe e é limitada para todo $t \geq t_0$. De maneira análoga ao caso em que $x_0 \in A(L)$, prova-se que $\exists t_0$ tal que $\varphi(t, t_0, x_0) \rightarrow B$ quando $t \rightarrow +\infty$. $\square$

A Figura 3.2 ilustra o Teorema 3.1.

Figura 3.2: Interpretação geométrica do princípio de invariância para sistemas autônomos. Para a condição inicial $x_1 \in A(L)$, a solução não sai de $S(L)$ e tende para o maior conjunto invariante B contido em E , para qualquer t_1 . Para as condições iniciais x_0 e x_2 em $S(L)$, existem t_0 e t_2 tais que as soluções iniciando em x_0 e x_2 nesses tempos, respectivamente, não saem de $S(L)$ e tendem para o maior conjunto invariante B em E .

Os exemplos a seguir ilustram os resultados do Teorema 3.1.

Exemplo 3.1 (VIDYASAGAR, 1993) Considere o sistema não linear e periódico descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y - (2 + \sin(t))x \end{cases} \quad (3.5)$$

A origem é um ponto de equilíbrio deste sistema. Vamos empregar o princípio de invariância de LaSalle para sistemas periódicos para mostrar que a origem é um ponto de equilíbrio globalmente atrativo.

Seja V uma função escalar dada por $V(t, x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2 + \sin(t)}$. A função V é periódica com o mesmo período do sistema (3.5).

Calculando-se a derivada de V ao longo das trajetórias, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x, y) &= 2x\dot{x} + \frac{2y}{2 + \sin(t)}\dot{y} + y^2 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2 + \sin(t)} \right) \\ &= 2x\dot{x} + \frac{2y}{2 + \sin(t)}\dot{y} + y^2 \cdot \left[\frac{0 - (0 + \cos(t))}{(2 + \sin(t))^2} \right] \\ &= 2x\dot{x} + \frac{2y}{2 + \sin(t)}\dot{y} - y^2 \frac{\cos(t)}{(2 + \sin(t))^2} \\ &= 2xy + \frac{2y}{2 + \sin(t)}(-y - (2 + \sin(t))x) - y^2 \frac{\cos(t)}{(2 + \sin(t))^2} \\ &= 2xy - \frac{2y^2}{2 + \sin(t)} - 2xy - \frac{y^2 \cos(t)}{(2 + \sin(t))^2} \\ &= \frac{-2y^2}{2 + \sin(t)} - \frac{y^2 \cos(t)}{(2 + \sin(t))^2} \\ &= -\frac{4 + 2\sin(t) + \cos(t)}{(2 + \sin(t))^2} y^2 \\ &\leq 0, \forall t \in \mathbb{R}, \forall x, y. \end{aligned}$$

A função auxiliar V é positiva definida e sua derivada é semi-definida negativa, satisfazendo as condições do Teorema 3.1. Também, a função V é radialmente ilimitada¹ e portanto os conjuntos $S(L)$ e $A(L)$ são limitados para qualquer $L > 0$. Logo, todas as condições do Teorema 3.1 estão satisfeitas e portanto todas as soluções deste sistema tendem para o maior conjunto invariante B contido em $E := \{(x, y) \in S(L) : y = 0\}$. Explorando o campo vetorial, observa-se que $\dot{y} = 0$ apenas na origem, logo, a origem é o único conjunto invariante contido em E . Consequentemente todas as soluções tendem para a origem quando $t \rightarrow +\infty$, ou seja, a origem é um ponto de equilíbrio globalmente atrativo.

Exemplo 3.2 Considere o sistema não linear e periódico descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y(2 + \sin(t)) \\ \dot{y} = -x(2 + \sin(t)) - y \end{cases} \quad (3.6)$$

¹Uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser radialmente ilimitada se $V(x) \rightarrow \infty$ sempre que $\|x\| \rightarrow \infty$.

A origem é um ponto de equilíbrio do sistema de (3.6). Vamos utilizar o princípio de invariância de LaSalle para sistemas periódicos para mostrar que a origem é um ponto de equilíbrio globalmente atrativo.

Seja V a função escalar dada por $V(t, x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2 + \sin(t)}$. Note que a função V é periódica com o mesmo período do sistema (3.6). Calculando a derivada de V ao longo das trajetórias obtemos

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, x, y) &= \frac{2x}{2 + \sin(t)} \cdot \dot{x} + \frac{2y}{2 + \sin(t)} \cdot \dot{y} - (x^2 + y^2) \cdot \frac{\cos(t)}{(2 + \sin(t))^2} \\ &= \frac{-2(x^2 + y^2)(2 + \sin(t)) - (x^2 + y^2) \cos(t)}{(2 + \sin(t))^2} \\ &= -\frac{(4 + 2\sin(t) + \cos(t))}{(2 + \sin(t))^2} \cdot (x^2 + y^2) \\ &\leq 0, \forall t \in \mathbb{R}, \forall x, y.\end{aligned}$$

Como $V(t, x, y) \leq x^2 + y^2$ e $V(t, x, y) \geq \frac{x^2 + y^2}{3}$ então V é definida positiva e a derivada de V é definida negativa, satisfazendo as condições do Teorema 3.1. A função V é radialmente ilimitada e portanto os conjuntos $S(L)$ e $A(L)$ são limitados para qualquer $L > 0$. Logo, todas as condições do Teorema 3.1 estão satisfeitas e portanto todas as soluções deste sistema tendem para o maior conjunto invariante B contido em $E := \{(x, y) \in S(L) : \exists t \in \mathbb{R}; (x, y) = (0, 0)\}$. Consequentemente todas as soluções tendem para a origem quando $t \rightarrow +\infty$, ou seja, a origem é um ponto de equilíbrio globalmente atrativo.

3.4 Versão Global do Princípio de Invariância para Sistemas Periódicos

Nesta seção, uma versão global do Teorema 3.1 é proposta. Nesta versão, troca-se a suposição de que o conjunto $S(L)$ seja limitado pela suposição de que a solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ seja limitada. Esta versão é útil quando existe garantia a priori de limitação das soluções.

Teorema 3.2 (*Versão Global do Princípio de Invariância de LaSalle para Sistemas Periódicos*)

Suponha que o sistema (3.1) seja periódico, com período T , e $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função de classe C^1 com o mesmo período do sistema (3.1). Suponha que a solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ seja limitada para $t \geq t_0$ e que $\dot{V}(t, x) \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Defina $E := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } \dot{V}(t, x) = 0\}$ e seja B o maior conjunto invariante contido em E . Então $\varphi(t, t_0, x_0)$ tende para o maior conjunto invariante contido em E .

Demonstração.

Temos que $\dot{V}(t, \varphi(t, t_0, x_0)) \leq 0, \forall t \in [t_0, \infty)$, ou seja, V é uma função decrescente em t .

Por hipótese, a função V é contínua e periódica em t , e como $\varphi(t, t_0, x_0)$ é limitada para $t \geq t_0$ então $V(t, \varphi(t, t_0, x_0))$ é limitada para $t \geq t_0$. Em particular, $V(t, \varphi(t, t_0, x_0))$ é inferiormente limitada para $t \geq t_0$. Consequentemente, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $V(t, x) \rightarrow \alpha$ quando $t \rightarrow \infty$.

A limitação da solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ implica que o conjunto $\Omega(t_0, x_0)$ seja não vazio (veja Lema 3.2). Seja $p \in \Omega(t_0, x_0)$. Então existe uma sequência $\{t_i\}$ com $t_i \rightarrow \infty$ tal que $\varphi(t_i, t_0, x_0) \rightarrow p$ quando $i \rightarrow \infty$. Para cada i , encontra-se $k_i \in \mathbb{Z}$ tal que $t_i - k_i T \in [0, T)$. Então a sequência $\{\tau_i\} = \{t_i - k_i T\}$ é limitada, e portanto admite uma subsequência convergente. Escolha tal subsequência $\{\tau'_i\} = \{t'_i - k'_i T\}$ e enumere mais uma vez como $\{\tau_i\}$. Seja $\tau \in [0, T)$ o limite desta subsequência.

$V(t_i, \varphi(t_i, t_0, x_0)) = V(\tau_i + k_i T, \varphi(t_i, t_0, x_0)) \stackrel{\text{period. da } V}{=} V(\tau_i, \varphi(t_i, t_0, x_0))$, onde $t_i = \tau_i + k_i T$. Então podemos concluir que $\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} V(t_i, \varphi(t_i, t_0, x_0)) = \lim_{i \rightarrow \infty} V(\tau_i, \varphi(t_i, t_0, x_0)) \stackrel{\text{cont. da } V}{=} V(\tau, p)$, implicando em $V(\tau, p) = \alpha$.

Vamos mostrar que $V(u, \varphi(u, \tau, p)) = \alpha, \forall u \in \mathbb{R}$. Pela demonstração do Lema 3.3, temos que $\varphi(u + k_i T, t_0, x_0) \rightarrow \varphi(u, \tau, p)$ quando $i \rightarrow \infty$. Assim, $\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} V(u + k_i T, \varphi(u + k_i T, t_0, x_0)) \stackrel{\text{period. da } V}{=} \lim_{i \rightarrow \infty} V(u, \varphi(u + k_i T, t_0, x_0)) = V(u, \varphi(u, \tau, p))$, então $V(u, \varphi(u, \tau, p)) = \alpha, \forall u$. Pelo Lema 3.3 temos que $\Omega(t_0, x_0)$ é um conjunto invariante e, para a mesma condição inicial τ , $\varphi(u, \tau, p) \in \Omega(t_0, x_0), \forall u$, o que implica, para todo $p \in \Omega(t_0, x_0)$, que existe $\tau \in \mathbb{R}$, dependendo de p , tal que $\dot{V}(\tau, p) = 0$. Logo, $p \in E$ e $\Omega(t_0, x_0) \subseteq E$. Portanto, $\varphi(t, t_0, x_0) \rightarrow \Omega(t_0, x_0) \subset B$ quando $t \rightarrow +\infty$. □

3.5 Extensão do Princípio de Invariância para Sistemas Periódicos

Nesta seção, propõe-se uma extensão do princípio de invariância para a classe de sistemas periódicos (Teorema 3.3) e são ilustrados alguns exemplos importantes, tais como o de um sistema Duffing forçado (Exemplo 3.4) para encontrar uma estimativa do atrator global. Esta extensão é uma generalização da extensão apresentada na Seção 2.3, Teorema 2.3. A característica fundamental desta extensão é a possibilidade da derivada da função escalar auxiliar V assumir valores positivos em algumas regiões limitadas do espaço de estados. Esta característica simplifica, de certo modo, a busca pela função V e permite que problemas que não podiam ser tratados com o princípio de invariância, seja pela não existência de uma função escalar V ou pela dificuldade em exibí-la, passem a ser possíveis de serem tratados com este resultado. Antes de apresentar esta extensão, estudaremos algumas propriedades de invariância de conjuntos de nível de uma função escalar V .

Os Lemas 3.4 e 3.5 estudam a invariância de $S(L)$ e $A(L)$ quando $\dot{V} \leq 0$. Quando a derivada de V não é semi-definida negativa, podemos ainda obter propriedades similares de invariância impondo algum controle sobre a região onde a derivada de V fica positiva. Os Lemas 3.6 e 3.7 estudam estas propriedades.

Antes de enunciarmos esses lemas, é importante notarmos que o conjunto C , em que a derivada da função auxiliar V é positiva em $S(L)$, pode ser definido com a igualdade, entretanto em muitas situações é mais prático estimar o conjunto ao invés de exibí-lo. Por este motivo utilizamos a inclusão ao invés da igualdade.

Lema 3.6 *Considere o sistema (3.1) e seja $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 periódica com período T . Seja $C \supseteq \{x \in S(L) : \exists t, \dot{V}(t, x) > 0\}$ e admita que $\sup_{(t,x) \in [0,T] \times C} V(t, x) = l < L$, então $S(L)$ é um conjunto positivamente invariante.*

Demonstração.

Seja $x_0 \in S(L)$. Então existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $V(t_0, x_0) < L$. Suponha, por contradição, a existência de um tempo $t^* > t_0$ tal que $\varphi(t^*, t_0, x_0) \notin S(L)$.

Da continuidade da função V e da continuidade das soluções, existe um tempo t_1 tal que $V(t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0)) = L$ e $\varphi(t, t_0, x_0) \in S(L), \forall t \in [t_0, t_1]$. Se $\varphi(t, t_0, x_0) \notin C, \forall t \in [t_0, t_1]$ então $\dot{V}(t, \varphi(t, t_0, x_0)) \leq 0, \forall t \in [t_0, t_1]$, o que nos leva a uma contradição. Então, existe $\tilde{t} \in [t_0, t_1]$ tal que $\varphi(\tilde{t}, t_0, x_0) \in C$, implicando em $V(\tilde{t}, \varphi(\tilde{t}, t_0, x_0)) < l$. Então, existe um tempo $t_2 \in [\tilde{t}, t_1]$ tal que $V(t_2, \varphi(t_2, t_0, x_0)) = l < L$ e $\varphi(t, t_0, x_0) \notin C$ para todo $t \in (t_2, t_1)$. Neste intervalo, $\dot{V} \leq 0$ e $l = V(t_2, \varphi(t_2, t_0, x_0)) < V(t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0)) = L$, o que novamente nos leva a uma contradição. Portanto $S(L)$ é um conjunto positivamente invariante. $\square$

Lema 3.7 *Considere o sistema (3.1) e seja $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 periódica com período T . Seja $C \supseteq \{x \in S(L) : \exists t, \dot{V}(t, x) > 0\}$ e admita que $\sup_{(t,x) \in [0,T] \times C} V(t, x) = l < L$. Suponha que $x_0 \in A(L)$, então a solução $\varphi(t, t_0, x_0) \in S(L), \forall t \in [t_0, \omega_+), \forall t_0$.*

Demonstração.

Seja $x_0 \in A(L)$. Como $A(L) \subset S(L)$, então $x_0 \in S(L)$. Além disso $V(t_0, x_0) < L, \forall t_0$. Pelo Lema 3.6, sabemos que $S(L)$ é positivamente invariante e portanto $\varphi(t, t_0, x_0) \in S(L), \forall t \in [t_0, \omega_+), \forall t_0$ e então o lema está provado. $\square$

A Figura 3.3 a seguir ilustra os Lemas 3.6 and 3.7.

Explorando as propriedades de invariância estudadas na Seção 3.2 e nesta seção, o teorema da extensão do princípio de invariância de LaSalle para sistemas periódicos é provado a seguir:

Figura 3.3: Interpretação geométrica dos Lemmas 3.6 e 3.7. Para a condição inicial x_2 em $A(L)$, a solução não sai de $S(L)$ para qualquer t_2 . Para as condições iniciais x_0 e x_1 em $S(L)$, existem t_0 e t_1 tais que as soluções iniciando em x_0 e x_1 nestes tempos, respectivamente, não saem de $S(L)$.

Teorema 3.3 (*Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle para Sistemas Periódicos*)

Suponha que o sistema (3.1) seja periódico e $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função de classe C^1 tal que V seja periódica e com o mesmo período do sistema (3.1). Seja $L \in \mathbb{R}$ uma constante real, e considere os conjuntos $S(L)$ e $A(L)$. Suponha que $S(L)$ seja limitado. Seja $C \supseteq \{x \in S(L) : \exists t, \dot{V}(t, x) > 0\}$ e admita que $\sup_{(t,x) \in [0,T] \times C} V(t, x) = l < L$.

Defina $S(l) := \{x \in S(L) : \exists t \in \mathbb{R}, V(t, x) < l\}$, $A(l) := \{x \in A(L) : V(t, x) < l, \forall t \in \mathbb{R}\}$ e $E := \{x \in S(L) : \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } \dot{V}(t, x) = 0\} \cup \overline{S(l)}$. Seja B o maior conjunto invariante contido em E . Então

- (i) $x_0 \in A(L) \Rightarrow \varphi(t, t_0, x_0) \rightarrow B$ quando $t \rightarrow \infty$ para todo $t_0 \in \mathbb{R}$;
- (ii) $x_0 \in S(L) \Rightarrow \exists t_0$ tal que $\varphi(t, t_0, x_0) \rightarrow B$ quando $t \rightarrow \infty$;
- (iii) $x_0 \in A(l) \Rightarrow \varphi(t, t_0, x_0)$ tende para o maior conjunto invariante contido em $\overline{S(l)}$ para todo $t_0 \in \mathbb{R}$;
- (iv) $x_0 \in S(l) \Rightarrow \exists t_0$ tal que $\varphi(t, t_0, x_0)$ tende para o maior conjunto invariante contido em $\overline{S(l)}$.

Demonstração. Provaremos primeiramente a afirmação (iii).

Sejam $\varphi(t, t_0, x_0)$ a solução da equação diferencial (3.1) com condição inicial (t_0, x_0) e $\omega_+ > t_0$ o máximo tempo de existência da solução φ à direita.

Seja $x_0 \in A(l)$. Então $V(t, x_0) < l, \forall t \in \mathbb{R}$. Mostraremos que $\varphi(t, t_0, x_0) \in \overline{S(l)}, \forall t \in [t_0, \omega_+)$. De fato, suponha por contradição que exista um tempo $t^* > t_0$ tal que $\varphi(t^*, t_0, x_0) \notin \overline{S(l)}$, o que implica em $V(t^*, \varphi(t^*, t_0, x_0)) > l$. Então, existe $t_1 \in [t_0, t^*)$ tal que $V(t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0)) = l$ e $V(t, \varphi(t, t_0, x_0)) > l$ para $t \in (t_1, t^*)$. Assim, existe $\tilde{t} \in (t_1, t^*)$ tal que $\dot{V}(\tilde{t}, x) > 0$. Sabemos que $\varphi(t, t_0, x_0) \notin A(l), \forall t \in (t_1, t^*)$ e, além disso $C \subset A(l)$. Consequentemente, $\dot{V}(\tilde{t}, x)$ não pode ser maior que zero, o que nos leva a uma contradição. Então a afirmação que $\varphi(t, t_0, x_0)$ deixa $\overline{S(l)}$ é falsa.

Como $\varphi(t, t_0, x_0) \in \overline{S(l)} \subset S(L)$, $\forall t \geq t_0$ e $S(L)$ é limitado, então $\varphi(t, t_0, x_0)$ é limitado para $t \geq t_0$, implicando em $\omega_+ = +\infty$. Logo a solução pertence a $\overline{S(l)}$ para todo $t \geq t_0$.

Portanto, pelo Lema 3.2, o conjunto $\Omega(t_0, x_0)$ é não vazio e a solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ se aproxima dele quando $t \rightarrow +\infty$. Por outro lado, o conjunto $\Omega(t_0, x_0)$ é um conjunto invariante e $\Omega(t_0, x_0) \subset \overline{S(l)}$. Como conclusão, a solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ se aproxima do maior conjunto invariante contido em $\overline{S(l)}$ quando $t \rightarrow +\infty$. Isto prova a afirmação (iii). A afirmação (iv) pode ser provada de maneira análoga e portanto sua demonstração será omitida.

O próximo passo é provar (i). Considere $x_0 \in A(L) - A(l)$. Do Lema 3.7 temos que a solução $\varphi(t, t_0, x_0) \in S(L)$, $\forall t \in [t_0, \omega_+)$. Pelo fato de que $S(L)$ é um conjunto limitado, pode-se concluir que $\omega_+ = +\infty$ e a solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ pertence a $S(L)$ para todo $t \geq t_0$.

Suponha que $\varphi(t, t_0, x_0) \notin C$, para todo $t \geq t_0$. Então $\dot{V}(t, \varphi(t, t_0, x_0)) \leq 0$, para todo $t \geq t_0$ e V é uma função decrescente em t , i.e., $V(t, \varphi(t, t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) < L$ para todo $t \geq t_0$. Por hipótese, temos que V é contínua e periódica em t e $S(L)$ é limitada, então $V(t, \varphi(t, t_0, x_0))$ é limitada para $t > t_0$. Em particular, é inferiormente limitada para $t \geq t_0$, o que implica em $V \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ quando $t \rightarrow \infty$.

Pelo Lema 3.2, temos que $\Omega(t_0, x_0) \neq \emptyset$. Seja $p \in \Omega(t_0, x_0)$. Então existe uma sequência $\{t_i\}$, $t_i \rightarrow \infty$ tal que $\varphi(t_i, t_0, x_0) \rightarrow p$. Para cada i , encontra-se $k_i \in \mathbb{Z}$ tal que $t_i - k_i T \in [0, T)$. Então a sequência $\{\tau_i\} = \{t_i - k_i T\}$ é limitada, e portanto admite uma subsequência convergente. Escolha tal subsequência $\{\tau'_i\} = \{t'_i - k'_i T\}$ e enumere mais uma vez como $\{\tau_i\}$. Seja $\tau \in [0, T)$ o limite desta subsequência.

$V(t_i, \varphi(t_i, t_0, x_0)) = V(\tau_i + k_i T, \varphi(t_i, t_0, x_0)) \stackrel{\text{period. da } V}{=} V(\tau_i, \varphi(t_i, t_0, x_0))$, onde $t_i = \tau_i + k_i T$. Então podemos concluir que $\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} V(t_i, \varphi(t_i, t_0, x_0)) = \lim_{i \rightarrow \infty} V(\tau_i, \varphi(t_i, t_0, x_0)) \stackrel{\text{cont. da } V}{=} V(\tau, p)$, implicando em $V(\tau, p) = \alpha$.

Mostraremos que $V(u, \varphi(u, \tau, p)) = \alpha$, $\forall u \in \mathbb{R}$. Da prova do Lema 3.3, temos que $\varphi(u + k_i T, t_0, x_0) \rightarrow \varphi(u, \tau, p)$ quando $i \rightarrow \infty$. Assim, $\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} V(u + k_i T, \varphi(u + k_i T, t_0, x_0)) \stackrel{\text{period. da } V}{=} \lim_{i \rightarrow \infty} V(u, \varphi(u + k_i T, t_0, x_0)) = V(u, \varphi(u, \tau, p))$. Então $V(u, \varphi(u, \tau, p)) = \alpha$ para todo u . Pelo Lema 3.3, $\Omega(t_0, x_0)$ é um conjunto invariante, e $\varphi(u, \tau, p) \in \Omega(t_0, x_0)$, $\forall u$. Então, existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\dot{V}(\tau, p) = 0$, para qualquer $p \in \Omega(t_0, x_0)$. Logo, podemos dizer que $\Omega(t_0, x_0) \subseteq E$. Portanto, $\varphi(t, t_0, x_0) \rightarrow \Omega(t_0, x_0) \subset B$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Finalmente, suponha $\varphi(t, t_0, x_0) \in C$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Então $\varphi(t, t_0, x_0) \in A(l)$, e para este caso já provamos acima que $\varphi(t, t_0, x_0) \rightarrow B$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, a afirmação (i) está provada.

Para provar a afirmação (ii), considere $x_0 \in S(L)$. Pelo Lema 3.6, existe t_0 tal que $\varphi(t, t_0, x_0) \in S(L)$, $\forall t \in [t_0, \omega_+)$, onde ω_+ é o tempo maximal de existência da solução s .

Como $S(L)$ é limitado, $\omega_+ = +\infty$ e a solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ existe e é limitado para todo $t \geq t_0$. De maneira análoga ao caso em que $x_0 \in A(L) - A(l)$, a segunda afirmação do teorema é provada. $\square$

A Figura 3.4 ilustra o Teorema 3.3.

Figura 3.4: Interpretação geométrica da extensão do princípio de invariância para sistemas periódicos. A solução iniciando em $x_0 \in A(L)$ não sai de $S(L)$ e tende para o maior conjunto invariante em E . Para as condições iniciais x_1 e x_2 , as soluções entrando em $A(l)$, não saem de $S(l)$ e tendem para o maior conjunto invariante em $\overline{S(l)}$.

Exemplo 3.3 Considere o sistema não linear e periódico descrito pela equação diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(x^2 + y^2 - 1) + y(2 + \sin(t)) \\ \dot{y} = -x(2 + \sin(t)) - y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} \quad (3.7)$$

Vamos empregar a extensão do princípio de invariância (Teorema 3.3) para obter uma estimativa do atrator global do sistema (3.7).

Seja V a função auxiliar dada por $V(t, x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2 + \sin(t)}$. A função V é periódica com o mesmo período do sistema e radialmente ilimitada, portanto $S(L)$ e $A(L)$ são limitados para qualquer $L \in \mathbb{R}$. A derivada de V é obtida pela seguinte expressão:

$$\dot{V}(t, x, y) = -\frac{(x^2 + y^2)}{(2 + \sin(t))^2} \cdot M(t, x, y),$$

onde $M(t, x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(4 + 2\sin(t)) + \cos(t)$.

O sinal de M define a região onde a derivada de V é positiva. Desta forma, podemos determinar o conjunto C da seguinte maneira: $C = \{(x, y) \in S(L) : x^2 + y^2 < \frac{3}{2}\}$. Como $V = \frac{x^2 + y^2}{2 + \sin(t)} \leq x^2 + y^2$, então $\sup_{(t,x) \in [0,T] \times C} V \leq \sup_{(t,x) \in [0,T] \times C} (x^2 + y^2)$ e daí $l = \sup_{(t,x) \in [0,T] \times C} V = \frac{3}{2} < L$.

Sendo assim, temos $S(l) := \{(x, y) \in S(L) : x^2 + y^2 < \frac{9}{2}\}$, $A(l) := \{(x, y) \in A(L) : x^2 + y^2 < \frac{3}{2}, \forall t \geq 0\}$ e $E := \{(x, y) \in S(L) : (x, y) = (0, 0)\} \cup \overline{S(l)} = \{(x, y) \in S(L) : x^2 + y^2 \leq \frac{9}{2}\}$.

Portanto, pelo Teorema 3.3 podemos concluir que todas as soluções tendem para o maior conjunto invariante contido em $\overline{S(l)}$ que é uma estimativa do atrator global. A Figura 3.5 ilustra esta estimativa.

Figura 3.5: Estimativa do atrator do sistema (3.7). O atrator está contido no conjunto $\overline{S(l)}$. A trajetória inicia no ponto $(1,5, 1)$ e tende para o atrator periódico dentro de $\overline{S(l)}$.

Exemplo 3.4 Neste exemplo, aplicamos a extensão do princípio de invariância para sistemas periódicos para obter uma estimativa do atrator do sistema de Duffing forçado. Considere o sistema dinâmico não linear e periódico descrito por

$$M\ddot{z} + K_c\dot{z} + K_m z + k_m \rho^2 z^3 = k_u \cos(\omega t).$$

Fazendo $x = z$ e $y = \dot{z}$, e escolhendo $k_m/M = 3, k_c/M = 3, k_m \rho^2/M = 0, 1, k_u/M = 2$ e $\omega = 1$, temos a seguinte equação diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -3y - 3x - 0,1x^3 + 2\cos(t) \end{cases} \quad (3.8)$$

Seja V uma função escalar dada por $V(t, x, y) = 9x^2 + 2xy + y^2$. A função V não depende de t e portanto é trivialmente periódica com o mesmo período do sistema (3.8). Além disso, V é radialmente ilimitada. Portanto $S(L)$ e $A(L)$ são limitados para qualquer escolha de $L \in \mathbb{R}$. Calculando a derivada de V ao longo das trajetórias, obtemos $\dot{V} = 6xy + (4x + 4y)\cos(t) - (6x^2 + 4y^2 + 0,2x^3y + 0,2x^4)$. Defina o conjunto $C := \{(x, y) \in S(L) : [6xy + (4|x| + 4|y|) - (6x^2 + 4y^2 + 0,2x^3y + 0,2x^4)] > 0\}$.

Note que $C \supset \{(x, y) \in S(L) : \exists t \text{ tal que } [6xy + (4x + 4y)\cos(t) - (6x^2 + 4y^2 + 0,2x^3y + 0,2x^4)] > 0\}$. O máximo da função V em C é aproximadamente 31,3531 em $(x, y) \approx (1,57056, 1,83824)$.

Então, $A(l) = S(l) := \{x, y \in \mathbb{R}^n : 9x^2 + 2xy + y^2 < 31,3531\}$ e $E := \{(x, y) \in S(L) : \exists t \in \mathbb{R}; \dot{V} = 0\} \cup \overline{S(l)} = \overline{S(l)}$. Pelo Teorema 3.3, provamos que todas as soluções tendem para o maior conjunto invariante contido em $\overline{S(l)}$ e $\overline{S(l)}$ é uma estimativa do atrator global. A Figura 3.6 ilustra esta estimativa do atrator.

Figura 3.6: Estimativa do atrator global do sistema (3.8). O atrator está contido no conjunto $\overline{S(l)}$. As trajetórias iniciando nos pontos $x_1 = (0, 7, 3)$ e $x_0 = (-3, 4)$ tendem para o atrator periódico dentro de $\overline{S(l)}$.

Exemplo 3.5 Considere o sistema dinâmico não linear e periódico descrito pela equação diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -k \sin(x) - dy + a \cos(x), \end{cases} \quad (3.9)$$

onde $a = \sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $d = 2$ e $k = 1$. Este sistema modela a dinâmica de um pêndulo excitado.

Seja $V = \frac{1}{2}y^2 - k \cos(x) + \beta y a \sin(x)$, onde $\beta = 0, 1$. A função V é periódica com o mesmo período do sistema (3.9).

Calculando a derivada de V ao longo das trajetórias, obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -dy^2 + \beta[y^2 \cos(x)\sin(t) + y\sin(x) \cos(t) - k(\sin(x))^2\sin(t) - \\ & dy\sin(x)\sin(t) + \sin(x) \cos(x)(\sin(t))^2] + y \cos(x)\sin(t), \end{aligned}$$

o que nos leva a estimativa:

$$\dot{V} \leq -dy^2 + \beta(y^2 |\cos(x)| + (1+d)|y||\sin(x)| - k(\sin(x))^2 + |\sin(x)||\cos(x)|) + |y||\cos(x)|.$$

Então podemos definir o conjunto C da seguinte maneira: $C := \{(x, y) \in S(L) : -dy^2 + \beta(y^2 |\cos(x)| + (1+d)|y||\sin(x)| - k(\sin(x))^2 + |\sin(x)||\cos(x)|) + |y||\cos(x)| > 0\}$. O maior valor de L que podemos escolher tal que a condição $\sup_{(t,x) \in [0,T] \times C} V(t, x) = l < L$ seja satisfeita é $L = 0,36$, e $S(L) := \{x, y \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2}y^2 - k \cos(x) - \beta|y||\sin(x)| < 0,36\}$.

O máximo da função V em C é aproximadamente igual a $-0,38$ em $(x, y) \approx (-1, 18, 0)$.

Definindo $S(l) = A(l) := \{x, y \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2}y^2 - k \cos(x) + \beta|y||\sin(x)| < -0,38\}$ e $E = \{(x, y) \in S(L) : \exists t \text{ tal que } \dot{V} = 0\} \cup \overline{S(l)}$, todas as hipóteses do Teorema 3.3 estão satisfeitas e portanto toda solução tende para o maior conjunto invariante em $\overline{S(l)}$.

Referente ao sistema (3.9), a Figura 3.7 ilustra a estimativa do atrator e uma trajetória com condição inicial $x_0 = (0, 5, 2)$.

Figura 3.7: A trajetória inicia no ponto $x_0 = (0.5, 2)$ e tende para um atrator periódico.

3.6 Versão Global da Extensão do Princípio de Invariância para Sistemas Periódicos

A proposta desta seção é apresentar uma versão global da extensão do princípio de invariância (Teorema 3.4). Nesta versão, a suposição de que $S(L)$ seja limitada é trocada pela suposição de que a solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ seja limitada.

Teorema 3.4 (*Versão Global da Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle para Sistemas Periódicos*)

Suponha que o sistema (3.1) seja periódico, com período T , e $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função periódica de classe C^1 com o mesmo período do sistema (3.1). Seja $C \supseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R}, \dot{V}(t, x) > 0\}$ e admita que $\sup_{(t,x) \in [0,T] \times C} V(t, x) = l < \infty$. Defina os conjuntos $S(l) := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } V(t, x) < l\}$, $A(l) := \{x \in \mathbb{R}^n : V(t, x) < l, \forall t \in \mathbb{R}\}$ e $E := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } \dot{V}(t, x) = 0\} \cup \overline{S(l)}$. Admita que a solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ seja limitada para todo $t \geq t_0$. Seja B o maior conjunto invariante contido em E . Então, $\varphi(t, t_0, x_0) \rightarrow B$ quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração. Suponha inicialmente que $x_0 \in A(l)$. Então $V(t, x_0) < l, \forall t \in \mathbb{R}$. Mostraremos que $\varphi(t, t_0, x_0) \in \overline{S(l)}, \forall t \in [t_0, \infty)$. Suponha por contradição a existência de um tempo $t^* > t_0$ tal que $\varphi(t^*, t_0, x_0) \notin \overline{S(l)}$, o que implica em $V(t^*, \varphi(t^*, t_0, x_0)) > l$. Assim, existe $t_1 \in [t_0, t^*)$ tal que $V(t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0)) = l$ e $V(t, \varphi(t, t_0, x_0)) > l$ para todo $t \in (t_1, t^*)$. Então, existe $\tilde{t} \in (t_1, t^*)$ tal que $\dot{V}(\tilde{t}, x) > 0$. Sabemos que $\varphi(t, t_0, x_0) \notin A(l), \forall t \in (t_1, t^*)$ e além disso que $C \subset A(l)$. Consequentemente $\dot{V}(\tilde{t}, x)$ não pode ser maior do que zero, o que nos leva a contradição. Então a afirmação de que $\varphi(t, t_0, x_0)$ deixa $\overline{S(l)}$ é falsa. Portanto, a solução $\varphi(t, t_0, x_0) \in \overline{S(l)}, \forall t \in [t_0, \infty)$ e por hipótese $\varphi(t, t_0, x_0)$ é limitada para toda $t \geq t_0$. Pelo Lema 3.2, $\Omega(t_0, x_0)$ é não vazio e a solução aproxima dele quando $t \rightarrow \infty$. Desde que $\Omega(t_0, x_0)$ é um conjunto invariante e $\Omega(t_0, x_0) \subset \overline{S(l)}$, então a solução aproxima do maior conjunto invariante contido em $\overline{S(l)}$ quando $t \rightarrow \infty$.

Suponha que $x_0 \notin A(l)$. Se a solução $\varphi(t, t_0, x_0) \in A(l)$ para algum $t \geq t_0$, então retornamos ao caso anterior, que já está provado.

Suponha agora que a solução $\varphi(t, t_0, x_0) \notin A(l)$ para todo $t \geq t_0$. Assumindo que a solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ seja limitada para $t \geq t_0$, temos que $\dot{V}(t, \varphi(t, t_0, x_0)) \leq 0$, para $t \in [t_0, \infty)$ e V é uma função decrescente em t .

Por hipótese, V é uma função contínua e periódica em t e $\varphi(t, t_0, x_0)$ é limitada para $t \geq t_0$, consequentemente $V(t, \varphi(t, t_0, x_0))$ é limitada para $t \geq t_0$. Em particular, $V(t, \varphi(t, t_0, x_0))$ é inferiormente limitada para $t \geq t_0$, implicando em $V \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ quando $t \rightarrow \infty$.

De maneira análoga a prova do Teorema 3.2, pode ser provado que $\varphi(t, t_0, x_0) \rightarrow \Omega(t_0, x_0) \subseteq B$ quando $t \rightarrow \infty$.

□

3.7 Princípio de Invariância Uniforme para Sistemas Periódicos

Nesta seção, conceitos mais gerais serão apresentados, a saber, um princípio de invariância uniforme para a classe de sistemas periódicos será desenvolvido (Teorema 3.5). A extensão do princípio de invariância provada na Seção 3.3 permite que a derivada da função auxiliar seja positiva em certas regiões limitadas. Nesta seção, consideramos incertezas na determinação dos parâmetros do sistema. Tal extensão será chamada de Princípio de Invariância Uniforme e é uma generalização dos resultados apresentados na Seção 3.5. O princípio de invariância uniforme para a classe de sistemas periódicos é útil para obter estimativas de atratores uniformes com respeito a seus parâmetros. É importante ressaltar que este resultado (Teorema 3.5) é útil para o estudo de sincronização global de sistemas de duffing acoplados (veja Seção 3.8).

Considere o sistema dinâmico não autônomo não linear

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda) \quad (3.10)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$ é um vetor de parâmetros do sistema. Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 .

Teorema 3.5 (*Princípio de Invariância Uniforme para Sistemas Periódicos*)

Suponha que o sistema (3.10) seja periódico e $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função de classe C^1 periódica com o mesmo período do sistema (3.10). Sejam $a, b, c : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e periódicas, com o mesmo período do sistema (3.10) e admita que para qualquer $(t, x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Lambda$, temos $a(t, x) \leq V(t, x, \lambda) \leq b(t, x)$, $-\dot{V}(t, x, \lambda) \geq c(t, x)$. Para $L > 0$, seja $S(L) := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } a(t, x) < L\}$. Admita que $S(L)$ seja

não-vazio e limitado. Considere os conjuntos $A(L) := \{x \in \mathbb{R}^n : b(t, x) < L, \forall t \in \mathbb{R}\}$ e $C \supseteq \{x \in S(L) : \exists t \text{ tal que } c(t, x) < 0\}$. Suponha que $\sup_{(t,x) \in [0,T] \times C} b(t, x) \leq l < L$ e defina os conjuntos $S(l) := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } a(t, x) < l\}$ e $A(l) := \{x \in \mathbb{R}^n : b(t, x) < l, \forall t \in \mathbb{R}\}$. Defina $E := \{x \in S(L) : \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } c(t, x) = 0\} \cup \overline{S(l)}$ e seja B o maior conjunto invariante contido em E . Se $\lambda \in \Lambda$ é um parâmetro fixo, então as seguintes conclusões são obtidas:

- (i) Se $x_0 \in A(l)$ então $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) \in S(l)$ para todo $t > t_0$ e $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ tende para o maior conjunto invariante contido em $\overline{S(l)}$ quando $t \rightarrow \infty$, para qualquer $t_0 \in \mathbb{R}$;
- (ii) Se $x_0 \in A(L) - A(l)$, então $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ não sai de $S(L)$ e $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) \rightarrow B$ quando $t \rightarrow \infty$, para qualquer $t_0 \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Provaremos primeiramente a afirmação (i). Sejam $x_0 \in A(l)$ e $[t_0, \omega_+)$ o intervalo maximal de existência da solução $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ de (3.10). Suponha que existe um tempo $\bar{t} \in [t_0, \omega_+)$ tal que $\varphi(\bar{t}, t_0, x_0, \lambda) \notin \overline{S(l)}$. Então, temos que $V(t_0, \varphi(t_0, t_0, x_0, \lambda)) \leq b(t_0, \varphi(t_0, t_0, x_0, \lambda)) < l$ e $V(\bar{t}, \varphi(\bar{t}, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \geq a(\bar{t}, \varphi(\bar{t}, t_0, x_0, \lambda)) > l$, o que implica que existe $\tilde{t} < \bar{t}$ tal que $V(\tilde{t}, \varphi(\tilde{t}, t_0, x_0, \lambda), \lambda) = l$ e $b(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)) \geq V(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) > l$ para $t \in (\tilde{t}, \bar{t})$. Logo $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) \notin A(l)$ para $t \in (\tilde{t}, \bar{t})$, o que nos leva a uma contradição, pois $-\dot{V}(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \geq c(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)) \geq 0$ para $t \in (\tilde{t}, \bar{t})$, o que significa que $V(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)$ é uma função decrescente de t neste intervalo. Consequentemente, a afirmação que $\varphi(\bar{t}, t_0, x_0, \lambda) \notin \overline{S(l)}$ é falsa e portanto $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) \in \overline{S(l)} \subset S(L), \forall t \in [t_0, \omega_+)$. O conjunto $S(L)$ é limitado, implicando em $\omega_+ = \infty$ e portanto $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) \in \overline{S(l)}, \forall t \in [t_0, \infty)$.

Pelo Lema 3.2, temos que Ω -limite, $\Omega(t_0, x_0, \lambda) = \Omega_\lambda$, é não-vazio e a solução $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) \rightarrow \Omega_\lambda$ quando $t \rightarrow \infty$. Como Ω_λ é um conjunto invariante (veja Lema 3.3) e $\Omega_\lambda \subset \overline{S(l)}$, então a solução $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ tende para o maior conjunto invariante de (3.10) contido em $\overline{S(l)}$, quando $t \rightarrow \infty$, provando assim a afirmação (i).

Agora provaremos a afirmação (ii). Considere $x_0 \in A(L) - A(l)$ e seja $[t_0, \omega_+)$ o intervalo maximal de existência da solução $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ de (3.10). Se existir t^* tal que $\varphi(t^*, t_0, x_0, \lambda) \in A(l)$, então o problema se reduz ao item anterior.

Suponha agora que $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) \notin A(l)$ para $t \in [t_0, \omega_+)$ e portanto $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) \notin C$ para $t \in [t_0, \omega_+)$. Se existe $\bar{t} \in [t_0, \omega_+)$ tal que $\varphi(\bar{t}, t_0, x_0, \lambda) \notin S(L)$ então $L < a(\bar{t}, \varphi(\bar{t}, t_0, x_0, \lambda)) \leq V(\bar{t}, \varphi(\bar{t}, t_0, x_0, \lambda), \lambda)$ e $V(t_0, \varphi(t_0, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \leq b(t_0, \varphi(t_0, t_0, x_0, \lambda)) < L$, o que é uma contradição, uma vez que fora de $A(l)$ temos que $\dot{V}(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \leq 0$.

Para todo tempo $t \in [t_0, \omega_+)$, temos que $a(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)) \leq V(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \leq V(t_0, \varphi(t_0, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \leq b(t_0, \varphi(t_0, t_0, x_0, \lambda)) = b(t_0, x_0) \leq L$ e portanto, $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) \in S(L), \forall t \in [t_0, \omega_+), \forall \lambda$. Como $S(L)$ é limitado então $\omega_+ = \infty$.

Como $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) \notin C, \forall t \geq t_0$, então $-\dot{V}(t, x, \lambda) \geq c(t, x) \geq 0, \forall t \geq t_0$, implicando em $-\dot{V}(t, x, \lambda) \geq 0, \forall t \geq t_0$, isto é, $\dot{V}(t, x, \lambda) \leq 0$. Assim, V é uma função decrescente

em t e então $V(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \leq V(t_0, \varphi(t_0, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \leq b(t_0, \varphi(t_0, t_0, x_0, \lambda)) = b(t_0, x_0) < L$.

Por hipótese V é contínua e periódica em t e, por $S(L)$ ser limitado, então V é limitada. Em particular, inferiormente limitada para $t \geq t_0$ e então $\lim_{i \rightarrow \infty} V(t_i, \varphi(t_i, t_0, x_0, \lambda), \lambda) = \alpha \in \mathbb{R}$.

Seja $p \in \Omega_\lambda$. Então existe uma sequência $\{t_i\}$ com $t_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$, tal que $\varphi(t_i, t_0, x_0, \lambda) \rightarrow p$ quando $i \rightarrow \infty$. Para cada i , encontra-se $k_i \in \mathbb{Z}$ tal que $t_i - k_i T \in [0, T)$. Então a sequência $\{\tau_i\} = \{t_i - k_i T\}$ é limitada, e portanto admite uma subsequência convergente. Escolha tal subsequência $\{\tau'_i\} = \{t'_i - k'_i T\}$ e enumere mais uma vez como $\{\tau_i\}$. Seja $\tau \in [0, T)$ o limite desta subsequência.

$V(t_i, \varphi(t_i, t_0, x_0, \lambda), \lambda) = V(\tau_i + k_i T, \varphi(t_i, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \stackrel{\text{period. da } V}{=} V(\tau_i, \varphi(t_i, t_0, x_0, \lambda), \lambda)$, quando $t_i = \tau_i + k_i T$. Podemos concluir que $\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} V(t_i, \varphi(t_i, t_0, x_0, \lambda), \lambda) = \lim_{i \rightarrow \infty} V(\tau_i, \varphi(t_i, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \stackrel{\text{cont. da } V}{=} V(\tau, p, \lambda)$, implicando em $V(\tau, p, \lambda) = \alpha$.

Mostraremos que $V(u, \varphi(u, \tau, p, \lambda), \lambda) = \alpha, \forall u \in \mathbb{R}$. A partir da prova do Lema 3.3, temos que $\varphi(u + k_i T, t_0, x_0, \lambda) \rightarrow \varphi(u, \tau, p, \lambda)$ quando $i \rightarrow \infty$. Assim, $\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} V(u + k_i T, \varphi(u + k_i T, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \stackrel{\text{period. da } V}{=} \lim_{i \rightarrow \infty} V(u, \varphi(u + k_i T, t_0, x_0, \lambda), \lambda) = V(u, \varphi(u, \tau, p, \lambda), \lambda)$. Como Ω_λ é um conjunto invariante, então existe $\tau^* = \tau$ tal que $\varphi(u, \tau, p, \lambda) \in \Omega_\lambda, \forall u$. Portanto $V(u, \varphi(u, \tau, p, \lambda), \lambda) = \alpha, \forall u \Rightarrow \dot{V}(\tau, p, \lambda) = 0$.

Como $p \notin C$, então $0 = -\dot{V}(\tau, p, \lambda) \geq c(\tau, p) \geq 0$ para $p \in \Omega_\lambda$ e $t \geq t_0$. Então $\Omega_\lambda \subset E$ e portanto $d(\varphi(t, t_0, x_0, \lambda), B) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, a segunda afirmação do teorema está provada. $\square$

A Figura 3.8 ilustra o Teorema 3.5.

Figura 3.8: Interpretação geométrica do Teorema 3.5. Para a condição inicial $x_1 \in A(L)$, a solução não sai de $S(L)$ e tende para o maior conjunto invariante B em E . Para as soluções iniciando em $S(L) - A(L)$, nada se pode concluir, por exemplo, a solução iniciando em x_2 deixa o conjunto $S(L)$ e não retorna. Para a condição inicial $x_3 \in A(L)$, a solução está entrando no conjunto $A(l)$, não sai do conjunto $S(l)$ e tende para o maior conjunto invariante em $\overline{S(l)}$.

Observação 3.1 Com a existência das funções a, b e c , as quais não dependem dos parâmetros do sistema, a uniformidade com respeito aos parâmetros é garantida. Nas Figuras 3.9 e 3.10, pode-se analisar geometricamente este resultado, em que as relações entre estas funções e as estimativas obtidas com o teorema são ilustradas.

Figura 3.9: Derivada da Função Lyapunov.

Figura 3.10: Função de Lyapunov.

A seguir apresentaremos um exemplo que ilustra o Teorema 3.5.

Exemplo 3.6 Considere o sistema dinâmico não linear e periódico descrito pela equação diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(x^2 + y^2 - 1) + y(\alpha + \sin(t)) \\ \dot{y} = -x(\alpha + \sin(t)) - y(x^2 + y^2 - 1), \end{cases} \quad (3.11)$$

onde α é o parâmetro do sistema. O valor nominal do parâmetro é $\alpha = 2$ e existe uma incerteza de $\pm 5\%$ na determinação deste parâmetro. Então, o parâmetro α pertence ao seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$: $\Lambda := \{\lambda := \alpha \in \mathbb{R} : \alpha_m \leq \alpha \leq \alpha_M\}$, onde $\alpha_m = 1,9$ e $\alpha_M = 2,1$.

Vamos empregar o princípio de invariância uniforme (Teorema 3.5) para obter uma estimativa do atrator, uniforme com respeito ao parâmetro α do sistema.

Considere a função $V(t, x, y, \alpha) = \frac{x^2 + y^2}{\alpha + \sin(t)}$ que é uma função periódica com o mesmo período do sistema (3.10). Neste caso, podemos escolher as funções a e b como sendo: $a(t, x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\alpha_M + \sin(t)}$ e $b(t, x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\alpha_m + \sin(t)}$. A função a é radialmente ilimitada, consequentemente, $S(L)$ é limitado para qualquer escolha de L . É importante ressaltar que as funções a e b são contínuas e periódicas, com o mesmo período do sistema (3.10).

A escolha da função c não é tão simples. Calculando a derivada de V ao longo das soluções de (3.10), obtemos:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, x, y, \alpha) &= \frac{2x}{\alpha + \sin(t)} \cdot \dot{x} + \frac{2y}{\alpha + \sin(t)} \cdot \dot{y} - (x^2 + y^2) \cdot \frac{\cos(t)}{(\alpha + \sin(t))^2} \\
&= -2 \frac{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1)}{\alpha + \sin(t)} - (x^2 + y^2) \frac{\cos(t)}{(\alpha + \sin(t))^2} \\
&= -\frac{(x^2 + y^2)}{(\alpha + \sin(t))^2} [2(x^2 + y^2 - 1)(\alpha + \sin(t)) + \cos(t)]
\end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
-\dot{V} &= \frac{(x^2 + y^2)}{(\alpha + \sin(t))^2} [2(x^2 + y^2 - 1)(\alpha + \sin(t)) + \cos(t)] \\
&\geq -\frac{(x^2 + y^2)}{(\alpha + \sin(t))^2} + \frac{2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1)(\alpha + \sin(t))}{(\alpha + \sin(t))^2} \\
&\geq -\frac{(\alpha_m - 1)^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\alpha + \sin(t)}{2(x^2 + y^2)^2} \\
&\geq -\frac{(\alpha_m - 1)^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2(x^2 + y^2)^2}{\alpha_M + 1} - \frac{2(x^2 + y^2)}{\alpha_m - 1} \\
&= \frac{2(x^2 + y^2)^2}{\alpha_M + 1} - \frac{(x^2 + y^2)}{(\alpha_m - 1)^2} [1 + 2(\alpha_m - 1)] \\
&= (x^2 + y^2) \left[\frac{2}{\alpha_M + 1} (x^2 + y^2) - \frac{1 + 2(\alpha_m - 1)}{(\alpha_m - 1)^2} \right] \\
&= c(t, x, y) := (x^2 + y^2) [\gamma(x^2 + y^2) - \beta],
\end{aligned}$$

onde $\gamma = \frac{2}{\alpha_M + 1}$ e $\beta = \frac{1 + 2(\alpha_m - 1)}{(\alpha_m - 1)^2}$.

Para que $c(t, x, y) < 0$, é necessário que $\gamma(x^2 + y^2) - \beta < 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < \frac{\beta}{\gamma}$.

Desta forma, definimos o conjunto C da seguinte maneira:

$$C = \left\{ x \in S(L) : x^2 + y^2 < \frac{\beta}{\gamma} \right\}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\sup_{(t,x) \in [0,T] \times C} b(t, x) &= \sup_{(t,x) \in [0,T] \times C} \frac{x^2 + y^2}{\alpha_m + \sin(t)} = \sup_{x \in C} \frac{x^2 + y^2}{\alpha_m - 1} \\
&= \frac{1}{\alpha_m - 1} \sup_{x \in C} (x^2 + y^2) = \frac{1}{\alpha_m - 1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \Rightarrow \\
\sup_{(t,x) \in [0,T] \times C} b(t, x) &= \frac{\beta}{\gamma(\alpha_m - 1)} = 5,9534 < l := 5,96
\end{aligned}$$

e sabemos que $\frac{x^2 + y^2}{\alpha_M + 1} \leq \frac{x^2 + y^2}{\alpha_M + \sin(t)} < l \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{\alpha_M + 1} < l \Rightarrow x^2 + y^2 < (\alpha_M + 1)l$.

Logo, podemos definir os conjuntos de nível $S(l)$ e $A(l)$ da seguinte maneira:

$$S(l) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 18,476\} \text{ e } A(l) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 5,96\}.$$

Definimos também o conjunto $E := \{(x, y) \in S(L) : (x, y) = (0, 0)\} \cup \overline{S(l)} = \overline{S(l)}$.

Portanto, as hipóteses do Teorema 3.5 são satisfeitas e então temos que as soluções tendem para o maior conjunto invariante contido em $\overline{S(l)}$.

A estimativa anterior do atrator é ilustrada na Figura 3.11. A circunferência externa é o conjunto $S(l)$ e a circunferência interna é o conjunto $A(l)$.

Figura 3.11: Estimativa do atrator global do sistema (3.11) para $\alpha_m = 1.9$ e $\alpha_M = 2.1$. O atrator está contido no conjunto $\overline{S(l)}$ para qualquer $\alpha \in [\alpha_m, \alpha_M]$. As trajetórias que iniciam nos pontos $x_0 = (-2, 1.5)$ e $x_1 = (1, -1.5)$, tendem para um atrator periódico em $\overline{S(l)}$ para $\alpha = 2$ e $\alpha = 1.95$, respectivamente.

3.8 Aplicação de Sincronização

Uma técnica poderosa para provar a sincronização foi introduzido em Rodrigues (2000). Esta técnica divide o problema de provar sincronização global em duas partes. Em primeiro lugar, prova-se que as soluções do sistema acoplado são limitadas para todos os valores do parâmetro de acoplamento e estimativas limitadas para o atrator são fornecidas. Explorando esses limites, a sincronização local é provada. O princípio de invariância uniforme provado na Seção 3.7 é uma poderosa ferramenta para oferecer estimativas limitadas para soluções que são uniformes com respeito aos parâmetros de acoplamento. Nesta seção, iremos explorar o princípio de invariância uniforme para sistemas periódicos e os resultados de sincronização demonstrados em Mijolaro (2010) para estudar a sincronização global de duas equações de duffing acopladas.

Exemplo 3.7 (Sistemas bidimensionais acoplados) *Considere o seguinte sistema dinâmico periódico não linear composto por duas equações de Duffing forçadas e linearmente acopladas:*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -3y - 3x - 0.1x^3 + 2\cos(t) - k_1(x - \theta) - k_2(y - \omega), \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -3\omega - 3\theta - 0.1\theta^3 + 2\cos(t) - k_1(\theta - x) - k_2(\omega - y), \end{cases} \quad (3.13)$$

onde $t \in \mathbb{R}$.

Nosso objetivo é estudar o sincronismo entre os sistemas acoplados (3.12) e (3.13). Para esta finalidade, usaremos o Teorema 3.5.

Escolhemos a função $V(x, y, \theta, \omega) = 9(x^2 + \theta^2) + 2(xy + \theta\omega) + (y^2 + \omega^2)$ para estimar o atrator e para garantir que as soluções do sistema (3.12)-(3.13) sejam limitadas.

A derivada da função V é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V} = & 6(xy + \theta\omega) + [4(x + \theta) + 4(y + \omega)] \cos(t) - [6(x^2 + \theta^2) + \\ & + 4(y^2 + \omega^2) + 0, 2(x^3y + \theta^3\omega) + 0, 2(x^4 + \theta^4)]\end{aligned}$$

e então:

$$\begin{aligned}-\dot{V} \geq & -\{6(xy + \theta\omega) + 4(|x| + |\theta|) + 4(|y| + |\omega|) - [6(x^2 + \theta^2) + 4(y^2 + \omega^2) + \\ & + 0, 2(x^3y + \theta^3\omega) + 0, 2(x^4 + \theta^4)]\} := c(x, y, \theta, \omega).\end{aligned}$$

Note que as funções V e c não dependem dos parâmetros de acoplamento k_1 e k_2 . Escolhemos $a(t, x, y, \theta, \omega) = V(t, x, y, \theta, \omega) = b(t, x, y, \theta, \omega)$ e então, pelo Teorema 3.5, podemos obter uma estimativa do atrator que não dependa dos parâmetros de acoplamento k_1 e k_2 .

O valor máximo da função $V(t, x, y, \theta, \omega)$ em $C := \{(x, y, \theta, \omega) \in S(L) : -\{6(xy + \theta\omega) + 4(|x| + |\theta|) + 4(|y| + |\omega|) - [6(x^2 + \theta^2) + 4(y^2 + \omega^2) + 0, 2(x^3y + \theta^3\omega) + 0, 2(x^4 + \theta^4)]\} < 0\}$ é 62,7062. Então, $A(l) = S(l) := \{x, y, \theta, \omega \in \mathbb{R}^n : 9(x^2 + \theta^2) + 2(xy + \theta\omega) + (y^2 + \omega^2) < 62,7062\}$ e $E := \{(x, y) \in S(L) : \exists t \in \mathbb{R}; \dot{V} = 0\} \cup \overline{S(l)} = \overline{S(l)}$.

O Teorema 3.5 garante que todas as soluções de (3.12)-(3.13) tendem para o maior conjunto invariante contido em $\overline{S(l)}$ e $\overline{S(l)}$ é uma estimativa do atrator global, a qual é uniforme com respeito aos parâmetros de acoplamento k_1 e k_2 . Em outras palavras, as soluções de (3.12)-(3.13) são limitadas para todo $k_1, k_2 > 0$ e eventualmente entram em $\overline{S(l)}$.

Em $\overline{S(l)}$, as soluções tornam-se limitadas e o Teorema 1 (MIJOLARO; ALBERTO; BRETAS, 2010) garante que os sistemas acoplados (3.12) e (3.13) sincronizam se $k_1 > 1$ e $k_2 > \frac{-3}{2} + 3,3691\sqrt{k_1}$.

A Figura 3.12 ilustra as trajetórias com condição inicial $(x, y, \theta, \omega) = (2, 10, -3, 5)$ sincronizando e a Figura 3.13 mostra essas trajetórias se aproximando de um atrator periódico para $k_1 = 2$ e $k_2 = 3,2646$.

Figura 3.12: Diferença entre as soluções dos subsistemas (3.12) e (3.13).

Figura 3.13: As trajetórias dos subsistemas (3.12) (iniciando em $(-3, 5)$) e (3.13) (iniciando em $(2, 10)$) sincronizam e aproximam do atrator periódico. Condição inicial $(x, y, \theta, \omega) = (2, 10, -3, 5)$.

Capítulo 4

Sistemas Dinâmicos Fuzzy

A teoria de sistemas dinâmicos fuzzy aparece em diversas aplicações em engenharia (BARROS, 1997; MIZUKOSHI, 2004; BARROS L.C.; BASSANEZI, 2006; LEITE, 2011; CECCONELLO, 2010; CECCONELLO et al., 2015), incentivando-nos a investigar novos resultados sobre o princípio de invariância para uma classe de sistemas dinâmicos fuzzy. Dentro da teoria de estabilidade, Mizukoshi (2004) define o fluxo fuzzy e pontos de equilíbrio fuzzy, apresentando suas propriedades. Cecconello (2010) define os conceitos de órbitas periódicas fuzzy, conjuntos invariantes e atratores no espaço $\mathcal{E}(U)$ e suas propriedades (Seção 4.1.4), que serão fundamentais para as principais contribuições deste capítulo: o princípio de invariância fuzzy e sua versão global para a classe de sistemas autônomos (Seção 4.2).

Na Seção 4.1, apresentamos conceitos preliminares sobre a teoria fuzzy e sistemas dinâmicos fuzzy, em que consideramos, para a classe de sistemas autônomos, o problema de valor inicial com incertezas apenas na condição inicial, via princípio da extensão de Zadeh, como definido em Mizukoshi (2004). Os resultados da Seção 4.1 são adaptações dos textos apresentados em Cecconello (2010, 2015) e Mizukoshi (2004). Além disso, alguns resultados nesta seção são inéditos na literatura, sendo fundamentais para o desenvolvimento da Seção 4.2.

Os principais resultados deste trabalho, referentes à teoria de sistemas dinâmicos fuzzy, encontram-se na Seção 4.2, em que desenvolvemos o princípio de invariância para uma classe de sistemas dinâmicos fuzzy (Teorema 4.3) e sua versão global (Teorema 4.4). Estes resultados estudam o comportamento assintótico das soluções de equações diferenciais autônomas com condições iniciais fuzzy.

É importante ressaltar que, para o desenvolvimento da Seção 4.2, consideramos incertezas apenas na condição inicial do Problema de Valor Inicial (PVI), denominado Problema de Valor Inicial Fuzzy (PVIF), via Princípio de Extensão de Zadeh. Alguns exemplos serão ilustrados, tais como o do efeito Allee demográfico.

4.1 Conceitos Preliminares

Apresentaremos nesta seção conceitos fundamentais sobre a teoria fuzzy e sistemas dinâmicos fuzzy as quais serão fundamentais para melhor compreensão dos resultados inéditos obtidos na Seção 4.2.

Definição 4.1 *Seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto formado pelos subconjuntos de um conjunto X . Para cada $A \in \mathcal{P}(X)$ definimos a função característica $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ de A por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

O conjunto $\mathcal{C}(X)$ de todas as funções características com domínio em X é isomorfo ao conjunto $\mathcal{P}(X)$ (NEGOITA; RALESCU, 1975), e portanto as funções características representam o próprio conjunto.

Cada subconjunto fuzzy F de X é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_F : X \rightarrow [0, 1]$, denominada função de pertinência, que associa para cada $x \in X$ o grau de pertinência $\mu_F(x)$ de x em F . A função de pertinência é uma generalização da função característica.

Definição 4.2 *Seja X um conjunto não vazio. Um subconjunto fuzzy F de X é um subconjunto $\{(x, \mu_F(x)) : x \in X\}$ de $X \times [0, 1]$ para alguma função $\mu_F : X \rightarrow [0, 1]$.*

O conjunto formado por todos os subconjuntos fuzzy de X será denotado por $\mathcal{F}(X)$.

A forma mais correta seria dizer que F é um subconjunto fuzzy de X , mas em muitos casos, dizemos que F é conjunto fuzzy, ficando implícita a existência de um conjunto X onde está definida a função de pertinência de F .

Se $A \in \mathcal{P}(X)$, isto é, $A \subset X$, então $\{(x, \chi_A(x)) : x \in X\}$ é um subconjunto não vazio de $X \times [0, 1]$. Pela Definição 4.2, o subconjunto A determina um subconjunto fuzzy de X que será identificado aqui, com abuso de notação, por χ_A . Para uma melhor distinção, o subconjunto fuzzy χ_A será denominado aqui, como na língua inglesa, um subconjunto *crisp* de X (conjunto usual, no sentido clássico).

Definição 4.3 *Dado um subconjunto fuzzy A em $\mathcal{F}(X)$ definimos, para cada $\alpha \in (0, 1]$, o conjunto $[A]^\alpha \subset X$ como sendo o conjunto dos elementos de X tal que o grau de pertinência em A é maior ou igual a α . O conjunto $[A]^\alpha \subset X$ é denominado α -nível de A e é definido por*

$$[A]^\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } \alpha \in (0, 1].$$

Definição 4.4 *O 0-nível de um subconjunto fuzzy A é definido por*

$$[A]^0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} [A]^\alpha} = \overline{\text{supp}(A)}$$

onde $\text{supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$ é o suporte do subconjunto fuzzy A .

Portanto, dois subconjuntos fuzzy de um conjunto X são iguais se, e somente se, as funções de pertinência são iguais, isto é,

$$A = B \iff \mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X.$$

Dois conjuntos fuzzy são iguais quando os α -níveis coincidem para todo $\alpha \in (0, 1]$ (BARROS L.C.; BASSANEZI, 2006).

O princípio da extensão de Zadeh se baseia em estender o domínio de uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ para os subconjuntos fuzzy em $\mathcal{F}(X)$. Observe que para cada $A \subset X$, temos que $f(A) \subset Y$. Agora, sendo $A \in \mathcal{F}(X)$, ou seja, A é um subconjunto fuzzy X , então a maneira como a imagem se caracteriza é feita através do Princípio da Extensão de Zadeh, proposta em 1965, conforme a seguinte definição:

Definição 4.5 (Princípio da Extensão de Zadeh) *Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação e A um subconjunto fuzzy de X . A extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ é a aplicação cuja imagem $\hat{f}(A)$ tem a função de pertinência*

$$\mu_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(z)} \mu_A(x) & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset. \end{cases}$$

Observação 4.1 *Dizemos que $f^{-1}(z)$ é a pré-imagem de z (não necessariamente a inversa).*

A Figura 4.1 representa o Princípio da Extensão de Zadeh.

Figura 4.1: (BARROS L.C.; BASSANEZI, 2006) Interpretação geométrica do princípio da extensão de Zadeh. O gráfico representa a imagem de um subconjunto fuzzy a partir do princípio de extensão de Zadeh.

A seguir, apresentamos um exemplo que ilustra o princípio da extensão de Zadeh.

Exemplo 4.1 Para ilustrar o conceito da extensão de Zadeh, vamos utilizar este exemplo extraído de BARROS L.C.; BASSANEZI (2006). Considere o subconjunto fuzzy A de números reais cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 4(x - x^2) & \text{se } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Os α -níveis de A são os intervalos

$$[A]^\alpha = \left[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha}) \right].$$

Consideremos a função real $f(x) = x^2$ para $x \geq 0$. Como f é crescente, temos

$$\begin{aligned} f([A]^\alpha) &= \left[f\left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \alpha})\right), f\left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \alpha})\right) \right] \\ &= \left[\frac{1}{4}(1 - \sqrt{1 - \alpha})^2, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2 \right] \\ &= [\hat{f}(A)]^\alpha. \end{aligned}$$

A Figura 4.2 ilustra o subconjunto $\hat{f}(A)$.

Figura 4.2: (BARROS L.C.; BASSANEZI, 2006) O gráfico ilustra um subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ do Exemplo 4.1.

Um subconjunto $A \subset X$ determina o conjunto fuzzy χ_A de X cuja função de pertinência é a função característica de A . A imagem de χ_A através da extensão $\hat{f}$ de uma função f coincide com o conjunto fuzzy $\chi_{f(A)}$ definido por $f(A)$, isto é, $\hat{f}(\chi_A) = \chi_{f(A)}$. Esta igualdade é garantida pela Definição 4.1 (CECCONELLO, 2010).

4.1.1 O Subespaço $\mathcal{E}(X)$

Adiante, iremos restringir a análise aos subconjuntos fuzzy de um conjunto X cujos α -níveis são subconjuntos compactos e não vazios em X , isto é,

$$\mathcal{E}(X) := \{A \in \mathcal{F}(X) : [A]^\alpha \text{ é compacto e não vazio, } \forall \alpha \in [0, 1]\}.$$

Notação:

1. Os subconjuntos fuzzy que estão em $\mathcal{E}(X)$ serão denotados por letras minúsculas em negrito para diferenciar dos elementos de X .
2. Os subconjuntos, no sentido clássico, do conjunto $\mathcal{E}(X)$ serão representados aqui por letras maiúsculas em negrito.

Definição 4.6 Dado $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(Y), Y \subset X$, definimos $\overline{\mathbf{u}} \in \mathcal{E}(X)$ através da função de pertinência

$$\mu_{\overline{\mathbf{u}}}(x) = \begin{cases} \mu_{\mathbf{u}}(x) & \text{se } x \in Y, \\ 0 & \text{se } x \notin Y. \end{cases} \quad (4.1)$$

Seguindo da Definição 4.6, temos que $[\overline{\mathbf{u}}]^\alpha = [\mathbf{u}]^\alpha, \forall \alpha \in [0, 1]$, de tal forma que identificamos $\mathcal{E}(Y)$ como um subconjunto de $\mathcal{E}(X)$. Com abuso de notação, dizemos que $\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$.

Por outro lado, dado $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ com $[\mathbf{u}]^\alpha \subset Y \subset X$, definimos $\overline{\mathbf{u}} \in \mathcal{E}(Y)$ como função de pertinência $\mu_{\overline{\mathbf{u}}}(x) = \mu_{\mathbf{u}}(x), \forall x \in Y$. Como antes, temos que $[\overline{\mathbf{u}}]^\alpha = [\mathbf{u}]^\alpha, \forall \alpha \in [0, 1]$ e novamente dizemos que $\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$.

Como exemplo, dado $Y \subset X$, representaremos por $\mathbf{Y} \subset \mathcal{E}(X)$ o subconjunto formado pelos elementos de $\mathcal{E}(X)$ cujos α -níveis são subconjuntos de Y . Isto é,

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X) : [\mathbf{u}]^\alpha \subset Y \subset X \text{ para todo } \alpha \in [0, 1]\}.$$

Algumas propriedades sobre o conjunto $\mathcal{E}(X)$ podem ser encontradas em Cecconello (2010).

A seguir, iremos definir uma métrica sobre $\mathcal{E}(X)$, que será por meio da métrica de Hausdorff para subconjuntos compactos de X .

Definição 4.7 (KREYSZIG, 1978) Seja $\mathcal{K}(X)$ o conjunto formado pelos subconjuntos compactos não vazios do espaço métrico (X, d) . Dados os conjuntos A e B em $\mathcal{K}(X)$, a distância entre os conjuntos é dada por:

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b).$$

A Definição 4.7 é chamada de *pseudométrica* para $\mathcal{K}(X)$, pois $\text{dist}(A, B) = 0 \iff A \subseteq B$. Sendo assim, definimos a distância de Hausdorff entre os conjuntos A e B em $\mathcal{K}(X)$ a seguir.

Definição 4.8 *Sejam os conjuntos $A, B \in \mathcal{K}(X)$. A distância de Hausdorff entre A e B é definida por*

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b)\right\} = \max\{\text{dist}(A, B), \text{dist}(B, A)\}.$$

Observe que $(\mathcal{K}(X), d_H)$ é um espaço métrico. Se (X, d) é um espaço métrico completo então $(\mathcal{K}(X), d_H)$ também é um espaço métrico completo (ALIPRANTIS C.D.; BORDER, 2005).

A seguir, definiremos a métrica para o conjunto $\mathcal{E}(X)$ a partir da Definição 4.8.

Definição 4.9 *Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{E}(X)$, dizemos que a distância, definida por d_∞ , entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, é dada por*

$$d_\infty(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H([\mathbf{u}]^\alpha, [\mathbf{v}]^\alpha).$$

Observação 4.2 *É de simples verificação que $(\mathcal{E}(X), d_\infty)$ é um espaço métrico.*

Definição 4.10 *Sejam os conjuntos $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{E}(U)$. A distância entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é definida por*

$$\text{dist}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}} \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{B}} d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Lema 4.1 (CECCONELLO, 2010) *Dado $A \subset U$, seja $\mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset A \subset U\}$. Se $\mathbf{y} \in \mathcal{E}(U)$ então vale a desigualdade*

$$\text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{A}) \leq \text{dist}(\mathbf{y}, A)$$

para todo $y \in [\mathbf{y}]^0$.

Definição 4.11 *Dizemos que o conjunto ω é limitado se, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \omega$, existe $r > 0$ tal que a distância $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r$.*

Em Cecconello (2010) podemos encontrar mais propriedades de espaços métricos para o conjunto $\mathcal{E}(X)$ as quais omitiremos aqui. Além disso, omitiremos também as demonstrações dos resultados a seguir, que serão fundamentais para o desenvolvimento da Seção 4.2.

Teorema 4.1 (CECCONELLO, 2010) *Sejam X e Y espaços de Hausdorff. Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então a extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ está bem definida e vale*

$$[\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha = f([\mathbf{u}]^\alpha)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$.

Muitas vezes não conseguimos garantir a continuidade da aplicação $f : X \rightarrow Y$ em todo o domínio X , mas apenas em um subconjunto $A \subset X$. Sendo assim, apresentamos a seguinte proposição.

Proposição 4.1 (CECCONELLO, 2010) *Suponha que $f : A \subset X \rightarrow Y$ seja contínua. Se $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ é tal que $[\mathbf{u}]^\alpha \subset A, \forall \alpha \in [0, 1]$, então $[\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha = f([\mathbf{u}]^\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

O princípio da extensão de Zadeh preserva algumas propriedades importantes sobre uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (BARROS, 1997) e a principal delas é a continuidade, ou seja, se f é uma função contínua então a aplicação $\hat{f}$ é contínua. O próximo resultado mostra que se X for um espaço métrico localmente compacto e a aplicação $f : X \rightarrow Y$ for contínua, então a extensão de Zadeh $\hat{f}$ é contínua.

Proposição 4.2 (CECCONELLO, 2010) *Sejam (X, d) e $(Y, \tilde{d})$ espaços métricos e X localmente compacto. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua, então a extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ é contínua.*

A recíproca também é verdadeira, conforme a proposição a seguir.

Proposição 4.3 (CECCONELLO, 2010) *Suponha que (X, d) e $(Y, \tilde{d})$ sejam espaços métricos e seja $\hat{f} : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ a extensão de Zadeh de uma aplicação $f : X \rightarrow Y$. Se $\hat{f}$ é contínua então f é contínua.*

4.1.2 Problema de Valor Inicial Fuzzy via Extensão de Zadeh

O conjunto $\mathcal{E}(X)$ é formado pelos subconjuntos fuzzy de X cujos α -níveis são subconjuntos com suporte compacto e define um espaço métrico com a métrica d_∞ induzida através da métrica de Hausdorff sobre os conjuntos compactos de X . Neste trabalho, denominaremos por sistema dinâmico fuzzy, ou fluxo fuzzy, os sistemas dinâmicos definidos sobre o espaço $\mathcal{E}(X)$, obtidos pelo princípio da extensão de Zadeh de soluções determinísticas de equações diferenciais autônomas. Mizukoshi (2004) apresenta diversas interpretações do problema de valor inicial e uma delas é via princípio de extensão de Zadeh, a qual iremos tratar aqui.

Definição 4.12 *Seja $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(X), t \in \mathbb{R}$ uma família de aplicações contínuas. Se*

$$a) \hat{\varphi}_0 = I;$$

$$b) \hat{\varphi}_t \circ \hat{\varphi}_s = \hat{\varphi}_{t+s}, \forall t, s \in \mathbb{R},$$

então dizemos que a família de aplicações $\hat{\varphi}_t$ é um sistema dinâmico fuzzy (ou fluxo fuzzy).

Considere o problema de valor inicial determinístico autônomo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

onde $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Iremos admitir neste trabalho que as soluções do sistema (4.2) existem para todo $t \in \mathbb{R}$.

Agora, considerando incerteza na condição inicial do sistema (4.2), temos o Problema de Valor Inicial Fuzzy (PVIF) dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) \\ x(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (4.3)$$

onde $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 4.13 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $x_0 \in U$. Dizemos que $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U), t \in \mathbb{R}$ é uma solução fuzzy para a Equação (4.3) quando $\hat{\varphi}_t(\chi_{\{x_0\}}) = \chi_{\{\varphi_t(x_0)\}}, \forall x_0$, onde $\varphi_t : U \rightarrow U$ é a solução da equação (4.2).*

Observa-se que, a partir da Definição 4.13, a solução fuzzy coincide com a solução do sistema (4.2) quando o conjunto $\mathbf{x}_0$ é um conjunto “crisp”.

Partindo da condição em que o PVI possua soluções e que possa ser estendido, então para obter a solução do PVIF com condição inicial fuzzy, o princípio de extensão de Zadeh aplicado nessas soluções de problema determinístico mantém os resultados de existência e unicidade das soluções do problema de valor inicial original.

Mizukoshi (2004) prova o seguinte resultado:

Proposição 4.4 *Seja $\varphi_t : U \rightarrow U$ o fluxo determinístico do problema (4.2). Então a extensão de Zadeh de $\varphi_t, \hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U), t \in \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:*

$$(a) \hat{\varphi}_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$$

$$(b) \hat{\varphi}_{t+s}(\mathbf{x}_0) = \hat{\varphi}_t \circ \hat{\varphi}_s(\mathbf{x}_0)$$

para todo $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(U)$ e $t, s \in \mathbb{R}$.

Pela Proposição 4.4, temos que a extensão de Zadeh $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U), t \in \mathbb{R}$ de um fluxo determinístico $\varphi_t : U \rightarrow U$ gera um fluxo fuzzy, de acordo com a Definição 4.13.

4.1.3 Pontos de Equilíbrio Fuzzy

A seguir, apresentaremos alguns resultados sobre pontos de equilíbrio fuzzy para o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$.

Definição 4.14 Dizemos que $\mathbf{x}_e \in \mathcal{E}(U)$ é um ponto de equilíbrio fuzzy $\hat{\varphi}_t$ quando

$$\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e) = \mathbf{x}_e$$

para todo $t \geq 0$.

Cecconello (2010) afirma que se pode caracterizar um ponto de equilíbrio fuzzy por meio dos α -níveis. Se $\mathbf{x}_e$ é um ponto de equilíbrio fuzzy então vale a igualdade

$$[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e)]^\alpha = \varphi_t([\mathbf{x}_e]^\alpha) = [\mathbf{x}_e]^\alpha$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{R}_+$.

A Proposição 4.5 revela uma equivalência sobre os pontos de equilíbrio para as soluções determinísticas e fuzzy, ou seja:

Proposição 4.5 (MIZUKOSHI, 2004) *Seja $x_e \in U$. Então x_e é um ponto de equilíbrio do sistema (4.2) se, e somente se, χ_{x_e} é um ponto de equilíbrio do sistema (4.3).*

Podemos assim definir estabilidade para pontos de equilíbrio no conjunto $\mathcal{E}(U)$.

Definição 4.15 *Um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e \in \mathcal{E}(U)$ é estável se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d_\infty(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_e) < \delta$ então $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_e) < \varepsilon$, para todo $t \geq 0$. Além disso, se existe $r > 0$ tal que para todo $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(U)$ satisfazendo $d_\infty(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_e) < r$ temos que $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_e) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, então $\mathbf{x}_e$ é assintoticamente estável.*

Definição 4.16 *O ponto de equilíbrio é instável quando não for estável.*

A Proposição 4.6 mostra uma equivalência entre as propriedades de estabilidade dos pontos de equilíbrio para o fluxo determinístico e do fluxo fuzzy.

Proposição 4.6 (MIZUKOSHI, 2004) *Sejam $x_e \in U$ um ponto de equilíbrio para o sistema determinístico (4.2) e $\hat{\varphi}_t$ o fluxo fuzzy associado ao fluxo determinístico φ_t . Então valem as seguintes afirmações:*

- a) x_e é estável para φ_t se, e somente se, $\chi_{\{x_e\}}$ é estável para $\hat{\varphi}_t$;
- b) x_e é assintoticamente estável para φ_t se, e somente se, $\chi_{\{x_e\}}$ é assintoticamente estável para $\hat{\varphi}_t$.

4.1.4 Órbitas, Conjuntos Limites e Conjuntos Invariantes

Os conceitos de órbita e conjunto limite definidos para fluxos fuzzy $\hat{\varphi}_t$ são análogos aos conceitos definidos para fluxos em espaços métricos.

Para facilitar ao leitor, alguns resultados sobre conjuntos invariantes e conjuntos atratores, conforme citados neste trabalho, são encontrados em Ceccconello (2010, 2015).

Definição 4.17 (CECCONELLO, 2010) *Definimos uma órbita fuzzy $\gamma(\mathbf{x}_0) \subset \mathcal{E}(U)$ de um estado inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(U)$ como sendo o subconjunto no espaço de fase $\mathcal{E}(U)$ definido por*

$$\gamma(\mathbf{x}_0) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0) = \{\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{E}(U) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Definição 4.18 (CECCONELLO, 2010) *Seja $\mathbf{B} \subset \mathcal{E}(U)$. O conjunto ω -limite fuzzy de $\mathbf{B}$ é definido por*

$$\omega(\mathbf{B}) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \hat{\varphi}_t(\mathbf{B})}.$$

A notação de união deve ser entendida no sentido de obter uma coleção de subconjuntos fuzzy e não interpretada pela definição usual dada por $\mu_{A \cup B}(x) := \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$. Agora, quando $\mathbf{B}$ é um conjunto unitário, podemos definir o conjunto ω -limite fuzzy de $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(U)$ como sendo o conjunto

$$\omega(\mathbf{x}_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)}.$$

Usamos aqui o adjetivo fuzzy devido ao fato de que os conjuntos $\gamma(\mathbf{x}_0)$ e $\omega(\mathbf{B})$ estão contidos em $\mathcal{E}(U)$.

Definição 4.19 (CECCONELLO, 2010) *Seja $\omega(\mathbf{B})$, $\mathbf{B} \subset U$, o ω -limite determinado pelo fluxo determinístico e consideremos o conjunto $\omega(\mathbf{B}) \subset \mathcal{E}(U)$ definido por*

$$\omega(\mathbf{B}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset \omega(\mathbf{B})\}.$$

Na Definição 4.19, o conjunto fuzzy $\omega(\mathbf{B})$ é constituído pelos elementos fuzzy $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U)$ que possuem 0-nível contido em $\omega(\mathbf{B})$, ou seja, $\omega(\mathbf{B})$ é definido a partir do conjunto ω -limite do conjunto determinístico $\mathbf{B}$. A seguir, estudaremos propriedades de $\omega(\mathbf{B})$ e $\omega(\mathbf{B})$ e suas relações.

Proposição 4.7 (CECCONELLO, 2010) *Sejam $\omega(\mathbf{A})$ e $\mathbf{A}$ subconjuntos de U . O conjunto $\omega(\mathbf{A})$ atrai $\mathbf{A}$ pelo fluxo determinístico φ_t se, e somente se, $\omega(\mathbf{A})$ atrai $\mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset \mathbf{A} \subset U\}$ pelo fluxo $\hat{\varphi}_t$.*

Omitiremos esta prova, podendo ser encontrada em Cecconello (2010).

Como consequência deste resultado, o Corolário 4.1 apresentado a seguir é de nossa autoria.

Corolário 4.1 *Se $[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)]^\alpha, \forall \alpha \in [0, 1]$ é limitada para $t \geq 0$ pelo fluxo fuzzy então $\omega([\mathbf{x}_0]^0)$ atrai $\mathbf{x}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset [\mathbf{x}_0]^0\}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.1 temos que para todo $\alpha \in [0, 1]$, $[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)]^\alpha = \varphi_t([\mathbf{x}_0]^\alpha)$ e então $\varphi_t([\mathbf{x}_0]^\alpha)$ é limitado para $t \geq 0$ e para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Como $\varphi_t([\mathbf{x}_0]^\alpha), \forall \alpha \in [0, 1]$ é limitada pelo fluxo determinístico então sabemos que o conjunto $\omega([\mathbf{x}_0]^\alpha)$ é não vazio e atrai $[\mathbf{x}_0]^\alpha$, e assim, pela Proposição 4.7 podemos concluir que $\omega([\mathbf{x}_0]^0)$ atrai $\mathbf{x}_0$ pelo fluxo $\hat{\varphi}_t$ e portanto o resultado está provado. $\square$

É importante destacar que o Lema 4.2 apresentado a seguir é inédito na literatura.

Lema 4.2 *Se $\omega(B)$ é limitado então $\omega(B)$ é limitado.*

Demonstração. Do fato de $\omega(B)$ ser limitado, temos que $d_\infty(\mathbf{u}, \mathbf{v}) < \infty, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \omega(B)$. Em particular, $d_\infty(\chi_{\{u\}}, \chi_{\{v\}}) < \infty, \forall u, v \in \omega(B)$. Mas $d(u, v) = d_\infty(\chi_{\{u\}}, \chi_{\{v\}}) < \infty, \forall u, v \in \omega(B)$. De fato, $d_\infty(\chi_{\{u\}}, \chi_{\{v\}}) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) = d_H(\{u\}, \{v\}) = d(u, v)$.

Portanto ω é limitado. $\square$

Não se pode garantir que o conjunto $\omega(B)$ seja um conjunto compacto (ROMÁN-FLORES, 1998). Sendo assim, temos o seguinte resultado:

Proposição 4.8 (CECCONELLO, 2010) *Seja $\omega(B)$ um conjunto compacto. Então, o conjunto $\omega(B)$ é fechado e limitado.*

Demonstração. De fato, $\omega(B)$ é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^n$ e, portanto, $\omega(B)$ é subespaço completo de $\mathbb{R}^n$. A proposição 2.6 em Cecconello (2010) mostra que $\omega(B)$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{E}(U)$.

Se $\omega(B)$ é limitado, então existe $r > 0$ tal que $\|x - y\| < r$, para todo $x, y \in \omega(B)$. Segue diretamente da definição de d_∞ que $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r$, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \omega(B)$.

Portanto, $\omega(B)$ é limitado. $\square$

A partir do conjunto $B \subset U$, podemos definir o conjunto $\mathbf{B} \subset \mathcal{E}(U)$ da seguinte maneira:

$$\mathbf{B} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset B \subset U\}.$$

Com esta relação entre os conjuntos B e $\mathbf{B}$, é interessante observar também a relação entre os conjuntos $\omega(\mathbf{B})$ e $\omega(B)$, conforme a Proposição 4.9, inédita na literatura.

A Proposição 4.9 mostra que o conjunto $\omega(\mathbf{B})$ está contido no conjunto $\omega(B)$.

Proposição 4.9 *Seja $B \subset U$ e defina $\mathbf{B} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset B \subset U\}$. Então o conjunto $\omega(\mathbf{B})$ está contido em $\omega(B)$, ou seja,*

$$\omega(\mathbf{B}) \subset \omega(B).$$

Demonstração. Suponha por absurdo que $\omega(\mathbf{B}) \not\subset \omega(B)$. Como $\omega(B)$ é fechado (Proposição 4.8) então existe $\mathbf{a} \in \omega(\mathbf{B}) - \omega(B)$ e $\varepsilon > 0$, tal que $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap \omega(B) = \emptyset$.

Como $\omega(B)$ atrai $B \subset U$ pelo fluxo determinístico φ_t , então pela Proposição 4.7 temos que $\omega(B)$ atrai $\mathbf{B}$ pelo fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$, e então

$$\exists T > 0 \text{ tal que } d_\infty(\mathbf{a}, \hat{\varphi}_t(\mathbf{B})) > \frac{\varepsilon}{2}, \forall t > T.$$

Por outro lado, sabemos que, pela Definição 4.18, o conjunto ω -limite fuzzy é dado por $\omega(\mathbf{B}) = \bigcap_{s \geq 0} \bigcup_{t \geq s} \hat{\varphi}_t(\mathbf{B})$. Então, $\mathbf{a} \notin \bigcup_{t > T} \hat{\varphi}_t(\mathbf{B})$, $\forall T$. Logo, $\mathbf{a} \notin \omega(\mathbf{B})$, o que nos leva a um absurdo.

Portanto, segue-se a tese. □

Observação 4.3 *Não podemos afirmar nada a respeito da inclusão $\omega(B) \subset \omega(\mathbf{B})$.*

Os Lemas 4.3 e 4.4 apresentados a seguir serão fundamentais para o desenvolvimento do princípio de invariância para a classe de sistemas dinâmicos fuzzy (Seção 4.2). Estes resultados são inéditos na literatura.

Lema 4.3 *Sejam os conjuntos $\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset S\}$ e $S' = \{x \in [x]^0 \subset U : \mathbf{x} \in \mathbf{S}\}$. Então $S' = S$.*

Demonstração. Primeiramente provaremos que $S' \subset S$.

Seja $x \in S'$. Então existe $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$ tal que $[\mathbf{x}]^0 \ni x$ por definição do conjunto S' . Se $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$, então $[\mathbf{x}]^0 \subset S$, o que implica em $x \in S$, ou seja, $S' \subset S$.

Mostraremos agora que $S \subset S'$.

Seja $y \in S$. Temos que o crisp $(x, \chi_y(x)) \in \mathbf{S}$ e como $\{y\} = [(x, \chi_y(x))]^0 \subset S'$, então $y \in S'$. Logo $S \subset S'$.

Portanto, $S' = S$. □

A importância do resultado a seguir é saber que vale a igualdade em certos conjuntos fuzzy definidos em seus α -cortes. Esses conjuntos são extensões dos conjuntos de nível definidos em sistemas autônomos para o fluxo determinístico.

Lema 4.4 *Sejam os conjuntos $\Lambda_L = \{x : V(x) < L\}$, $\mathbf{\Lambda}_L = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : [\mathbf{x}]^\alpha \subset \Lambda_L, \forall \alpha \in [0, 1]\}$, $\mathbf{\Omega}_L = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : [\hat{V}(\mathbf{x})]^\alpha \subset (-\infty, L), \forall \alpha \in [0, 1]\}$ e $\Omega_L = \{x \in [\mathbf{x}]^\alpha \subset \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in [0, 1] : \mathbf{x} \in \mathbf{\Omega}_L\}$. Então $\mathbf{\Lambda}_L = \mathbf{\Omega}_L$.*

Demonstração. Mostraremos que $\mathbf{\Lambda}_L \subset \mathbf{\Omega}_L$.

Seja $\mathbf{x} \in \mathbf{\Lambda}_L$. Então $[\mathbf{x}]^\alpha \subset \Lambda_L, \forall \alpha \in [0, 1]$, o que implica em $V([\mathbf{x}]^\alpha) \subset (-\infty, L), \forall \alpha \in [0, 1]$, mas pela Proposição 4.1 temos que $V([\mathbf{x}]^\alpha) = [\hat{V}(\mathbf{x})]^\alpha, \forall \alpha \in [0, 1]$, e então $[\hat{V}(\mathbf{x})]^\alpha \subset (-\infty, L), \forall \alpha \in [0, 1]$, então $\mathbf{x} \in \mathbf{\Omega}_L$, ou seja, $\mathbf{\Lambda}_L \subset \mathbf{\Omega}_L$.

Mostraremos agora que $\mathbf{\Omega}_L \subset \mathbf{\Lambda}_L$.

Seja $\mathbf{x} \in \mathbf{\Omega}_L$. Então $[\hat{V}(\mathbf{x})]^\alpha \subset (-\infty, L), \forall \alpha \in [0, 1]$, mas pela Proposição 4.1, temos que $[\hat{V}(\mathbf{x})]^\alpha = V([\mathbf{x}]^\alpha), \forall \alpha \in [0, 1]$, e então $V([\mathbf{x}]^\alpha) \subset (-\infty, L), \forall \alpha \in [0, 1]$, implicando em $[\mathbf{x}]^\alpha \subset \Lambda_L, \forall \alpha \in [0, 1]$, então $\mathbf{x} \in \mathbf{\Lambda}_L$, ou seja, $\mathbf{\Omega}_L \subset \mathbf{\Lambda}_L$.

Portanto, segue-se a tese. □

Apresentamos a seguir o conceito de conjuntos invariantes para o fluxo fuzzy, que é importante para o estudo do comportamento assintótico dos sistemas dinâmicos (MILANI; KOKSCH, 2005).

Definição 4.20 *Um conjunto $S \subset \mathcal{E}(U)$ é dito ser invariante (positivamente invariante) pelo fluxo $\hat{\varphi}_t$ se*

$$\hat{\varphi}_t(S) = S$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ ($t \geq 0$).

Como resultado inédito nesta teoria de sistemas dinâmicos fuzzy, apresentamos os Lemas 4.5 e 4.6.

Lema 4.5 *Se $B \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto positivamente invariante pelo fluxo determinístico, então o conjunto $\mathbf{B} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : [\mathbf{x}]^\alpha \subset B, \forall \alpha \in [0, 1]\}$ é positivamente invariante pelo fluxo fuzzy.*

Demonstração. Seja $\mathbf{p} \in \mathbf{B}$. Então $[\mathbf{p}]^\alpha \subset B, \forall \alpha \in [0, 1]$, mas B é positivamente invariante, então $\varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha) \subset B, \forall \alpha \in [0, 1], \forall t \geq 0$.

Pela Proposição 4.1, sabemos que $\varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha) = [\hat{\varphi}_t(\mathbf{p})]^\alpha, \forall \alpha \in [0, 1], \forall t \geq 0$ e então $[\hat{\varphi}_t(\mathbf{p})]^\alpha \subset B, \forall \alpha \in [0, 1], \forall t \geq 0$, o que implica em $\hat{\varphi}_t(\mathbf{p}) \in \mathbf{B}, \forall t \geq 0$. □

Portanto segue-se a tese.

Observação 4.4 1. *Seja $B \subset U = \mathbb{R}^n$ e $\omega(B) := \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : [\mathbf{x}]^0 \subset \omega(B)\}$. Então podemos definir o α -corte da seguinte maneira: $\omega([\mathbf{x}_0]^\alpha) := \{\mathbf{p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : [\mathbf{p}]^0 \subset \omega([\mathbf{x}_0]^\alpha), \forall \alpha \in [0, 1]\}$. Como $\omega(B)$ é invariante pelo fluxo determinístico então, pelo mesmo argumento do Lema 4.5 temos que $\omega(B)$ é invariante pelo fluxo fuzzy, em particular vale que $\omega([\mathbf{x}_0]^\alpha)$ é invariante pelo fluxo fuzzy.*

O Lema 4.6 (inédito na literatura) será útil na demonstração do Teorema 4.3 (Princípio de Invariância Fuzzy). Ele explora a relação de invariância com os conjuntos de nível de uma função $\hat{V}$.

Lema 4.6 *Seja o conjunto $\Omega_L := \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : [\hat{V}(\mathbf{x})]^\alpha \subset (-\infty, L), \forall \alpha \in [0, 1]\}$ com $L \in \mathbb{R}$ e admita que $[\hat{V}(\mathbf{x})]^\alpha \subset (-\infty, 0], \forall \mathbf{x} \in \Omega_L, \forall \alpha \in [0, 1]$. Então Ω_L é positivamente invariante.*

Demonstração. Primeramente precisamos provar que $\dot{V}(y) \leq 0, \forall y \in \Lambda_L$.

Seja $y \in \Lambda_L$. Então $V(y) < L, \forall y$.

Considere então $\mathbf{y} = (x, \chi_y(x))$. Pela Extensão de Zadeh, temos que $\hat{V}(\mathbf{y}) = (x, \chi_{V(y)}(x))$, e como consequência temos que $\{V(y)\} = [\hat{V}(\mathbf{y})]^\alpha \subset (-\infty, L), \forall \alpha \in [0, 1]$, implicando em $\mathbf{y} \in \Omega_L$.

Sabemos que $[\hat{V}(\mathbf{y})]^\alpha \subset (-\infty, 0], \forall \alpha \in [0, 1]$, mas pela Proposição 4.1, temos que $[\hat{V}(\mathbf{y})]^\alpha = \dot{V}([\mathbf{y}]^\alpha), \forall \alpha \in [0, 1]$ e então $\dot{V}([\mathbf{y}]^\alpha) \subset (-\infty, 0], \forall \mathbf{y} \in \Omega_L, \forall \alpha \in [0, 1]$. Em particular, $\dot{V}([\mathbf{y}]^\alpha) \subset (-\infty, 0], \forall \alpha \in [0, 1]$, implicando em $\dot{V}(y) \leq 0, \forall y \in \Lambda_L$.

Ω_L é positivamente invariante (Lema 2.1), mas pelo Lema 4.3, temos que $\Lambda_L = \Omega_L$, então Λ_L é positivamente invariante.

Pelo fato que Λ_L é um conjunto positivamente invariante, então pelo Lema 4.5 podemos concluir que Λ_L é um conjunto positivamente invariante, mas pelo Lema 4.4, temos que $\Lambda_L = \Omega_L$ e então Ω_L é um conjunto positivamente invariante. □

O teorema a seguir estabelece equivalências entre os conjuntos S e $\mathbf{S}$. As demonstrações do Lema 4.7, Teorema 4.2 e Corolário 4.2 podem ser encontradas em Cecconello (2010) e portanto omitiremos aqui.

Lema 4.7 (CECCONELLO, 2010) *Se $S \subset U$ é um conjunto assintoticamente estável então existe uma vizinhança W com $S \subset W \subset U$ tal que S atrai conjuntos compactos contidos em W .*

Teorema 4.2 (CECCONELLO, 2010) *Seja $S \subset U$ um conjunto invariante pelo fluxo determinístico e consideremos o conjunto $\mathbf{S} \subset \mathcal{E}(U)$ definido por*

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset S\}.$$

Sob essas condições temos:

- (a) S é invariante para φ_t se, e somente se, $\mathbf{S}$ é invariante para o fluxo $\hat{\varphi}_t$;
- (b) S é estável para φ_t se, e somente se, $\mathbf{S}$ é estável para o fluxo $\hat{\varphi}_t$;
- (c) S é assintoticamente estável para φ_t se, e somente se, $\mathbf{S}$ é assintoticamente estável para o fluxo $\hat{\varphi}_t$.

O Teorema 4.2(a) é fundamental, pois pela extensão de Zadeh de um fluxo determinístico, conseguimos obter conjuntos invariantes para o fluxo fuzzy.

Como caso particular da Definição 4.19, temos a seguinte relação entre o ω -limite $\omega(B)$ e $\omega(B)$.

Corolário 4.2 (CECCONELLO, 2010) *O conjunto $\omega(B)$, $B \subset U$, é invariante por φ_t se, e somente se, o conjunto $\omega(B)$ é invariante pelo fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$.*

4.2 Princípio de Invariância Fuzzy

Nesta seção, apresentamos os principais resultados deste capítulo: o princípio de invariância para a classe de sistemas dinâmicos fuzzy e sua versão global, baseando-se na teoria apresentada em Mizukoshi (2004) e por Cecconello (CECCONELLO, 2010; CECCONELLO et al., 2015).

Antes de apresentarmos o princípio de invariância fuzzy (Teorema 4.3) e sua versão global (Teorema 4.4), é importante ressaltar que estamos trabalhando com equações diferenciais autônomas, considerando apenas incertezas na condição inicial (PVIF via extensão de Zadeh).

Conforme a Seção 4.1, as propriedades de invariância e comportamento assintótico (conjuntos limites e suas propriedades) de sistemas dinâmicos fuzzy são fundamentais para o desenvolvimento destes resultados.

Sendo assim, apresentamos o princípio de invariância fuzzy, resultado este que requer incertezas na condição inicial de um PVI, tornando-se um PVIF via extensão de Zadeh.

Teorema 4.3 (Princípio de Invariância Fuzzy) *Considere o sistema (4.3) e sejam $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1 . Sejam $\hat{V} : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R})$ e $\hat{V} : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R})$ as extensões de Zadeh de V e $\dot{V}$, respectivamente. Seja $L \in \mathbb{R}$ uma constante real tal que $\Omega_L := \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : [\hat{V}(\mathbf{x})]^\alpha \subset (-\infty, L), \forall \alpha \in [0, 1]\}$ seja limitado. Admita que $[\hat{V}(\mathbf{x})]^\alpha \subset (-\infty, 0], \forall \mathbf{x} \in \Omega_L, \forall \alpha \in [0, 1]$. Defina $\mathbf{E} := \{\mathbf{x} \in \Omega_L : \hat{V}(\mathbf{x}) = \{0\}\}$. Seja $\mathbf{B}$ o maior conjunto fuzzy invariante contido em $\mathbf{E}$, então toda solução fuzzy de $\dot{x} = f(x)$ iniciando em Ω_L converge para $\mathbf{B}$ quando $t \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Sejam $\mathbf{x}_0 \in \Omega_L$ e $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ o fluxo fuzzy com condição inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ em $t = 0$.

Defina os conjuntos $\Lambda_L = \{x : V(x) < L\}$, $\mathbf{\Lambda}_L = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : [\mathbf{x}]^\alpha \subset \Lambda_L, \forall \alpha \in [0, 1]\}$ e $\Omega_L = \{x \in [\mathbf{x}]^\alpha \subset \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in [0, 1] : \mathbf{x} \in \Omega_L\}$. Pelo Lema 4.4 temos que $\mathbf{\Lambda}_L = \Omega_L$ e então pelo Lema 4.3 podemos afirmar que $\Lambda_L = \Omega_L$. Pelo Lema 4.6, Ω_L é positivamente invariante e então o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t(\cdot)$ permanece em Ω_L para $t \geq 0$.

Pela extensão de Zadeh podemos afirmar que a solução do fluxo fuzzy possui o intervalo maximal $t_+ = +\infty$. Assim, o conjunto ω -limite $\omega([\mathbf{x}_0]^\alpha)$ de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ está contido no conjunto $\{\mathbf{x} \in \Omega_L : [\hat{V}(\mathbf{x})]^\alpha \subset (-\infty, \sup_{\alpha \in [0, 1]} [\hat{V}(\mathbf{x}_0)]^\alpha)\}$.

Seja $y \in [\mathbf{x}_0]^\alpha$. Então $\varphi_t(y) \in \Omega_L, \forall t$ e sabemos que $\omega(y) \subset \omega([\mathbf{x}_0]^\alpha)$ é não vazio. Como V é decrescente e $V(\varphi_t(y))$ é limitada inferiormente, então $V(\varphi_t(y)) \rightarrow v(y) \in \mathbb{R}$ quando $t \rightarrow \infty$.

Como $V(\varphi_t(y))$ tende para $\omega(y)$ então da continuidade da V temos que $V(x) = V(y), \forall x \in \omega(y)$. Da invariância de $\omega(y)$, $\dot{V}(x) = 0, \forall x \in \omega(y)$ e por y ser arbitrário, então $\dot{V}(x) = 0, \forall x \in \omega([\mathbf{x}_0]^\alpha)$.

Tome $\mathbf{x} \in \omega([\mathbf{x}_0]^\alpha)$. Pela Definição 4.19 temos que $[\mathbf{x}]^\alpha \subset \omega([\mathbf{x}_0]^\alpha), \forall \alpha \in [0, 1]$ e pela Proposição 4.1 temos que $[\hat{V}(\mathbf{x})]^\alpha = \dot{V}([\mathbf{x}]^\alpha), \forall \alpha \in [0, 1]$, então $\dot{V}([\mathbf{x}]^\alpha) = \{0\}$, pois $[\mathbf{x}]^\alpha \subset \omega([\mathbf{x}_0]^\alpha)$. Logo $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ e $\omega([\mathbf{x}_0]^\alpha) \subset \mathbf{E}$.

Portanto, pelo Corolário 4.1 podemos afirmar que $\omega([\mathbf{x}_0]^\alpha)$ atrai $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$, isto é, $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0) \rightarrow \omega([\mathbf{x}_0]^\alpha) \subset \mathbf{B}$ quando $t \rightarrow \infty$.

□

O exemplo a seguir é útil para apresentar, de forma didática, o Teorema 4.3.

Exemplo 4.2 *Considere o sistema linear unidimensional descrito pela seguinte equação diferencial:*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ x(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) \end{cases} \quad (4.4)$$

Note que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para φ_t e então pela Proposição 4.6 temos que a origem, $\mathbf{x}_e = \chi_{\{0\}}$, é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para $\hat{\varphi}_t$. Sendo $V(x) = \frac{x^2}{2}$ a função de Lyapunov associada ao sistema (4.4), então a derivada da função V é dada por $\dot{V}(x) = -x^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Como V é positiva e radialmente ilimitada e $\dot{V} \leq 0$, então pela Extensão de Zadeh podemos afirmar que $\hat{V}$ é radialmente ilimitada e $\hat{V}([\mathbf{x}]^\alpha) \subset (-\infty, 0], \forall \alpha \in (0, 1]$ e portanto o conjunto Ω_L é limitado para qualquer $L > 0$.

Logo, as hipóteses do Teorema 4.3 estão satisfeitas para qualquer $L > 0$ e portanto todas as soluções tendem para o maior conjunto invariante $\mathbf{B}$ contido em $\mathbf{E} := \{\mathbf{x} \in \Omega_L : \hat{V}(\mathbf{x}) = \{0\}\} = \{\mathbf{x} \in \Omega_L : \mathbf{x} = \{0\}\}$. Como a origem é o único conjunto invariante contido em $\mathbf{E}$, então podemos concluir que todas as soluções tendem para a origem quando $t \rightarrow \infty$.

O exemplo a seguir (pode ser encontrado em Cecconello (2010)) origina-se de um modelo logístico para estudos de dinâmica populacional de uma espécie onde a taxa de reprodução per capita é inversamente proporcional à quantidade de indivíduos para baixas densidades populacionais. A quantidade de um número mínimo de indivíduos, abaixo do qual a população vai à extinção, é denominado *efeito Allee demográfico* (CECCONELLO, 2010).

Exemplo 4.3 (Efeito Allee) *Considere o sistema descrito pela seguinte equação diferencial:*

$$\begin{cases} \dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) \left(\frac{x}{a} - 1\right) \\ x(0) = x_0 > 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

onde denota-se a taxa de reprodução intrínseca por $r > 0$, capacidade suporte por $k > 0$ e o limiar Allee por $a \in (0, k)$.

Observe que para condições iniciais $x_0 \in \mathbb{R}$ com $x_0 < a$ temos que a população vai à extinção. Caso $x_0 \in (a, k)$ temos que a população aumenta e é limitada pela capacidade suporte k (CECCONELLO, 2010).

Consideramos então que a condição inicial do sistema (4.5) seja fuzzy, isto é, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$.

Sabemos que a origem (análogo para $z_e = k$) é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para φ_t e então pela Proposição 4.6 temos que a origem, $\mathbf{x}_e = \chi_{\{0\}}$ (análogo para $\mathbf{z}_e = \chi_{\{k\}}$), é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para $\hat{\varphi}_t$.

Cecconello (2010) afirma que $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0) \rightarrow \chi_{\{0\}}$ quando $t \rightarrow \infty$ para todo $\mathbf{x}_0$ com $[\mathbf{x}_0]^0 \subset [0, a)$ (Análogo para $\mathbf{z}_e = \chi_{\{k\}}$, para qualquer $\mathbf{x}_0$ com $[\mathbf{x}_0]^0 \subset (a, \infty)$).

A função

$$V(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{r(k+a)x^3}{3ka} + \frac{rx^4}{4ka}$$

é uma função de Lyapunov associada ao sistema (4.5). A derivada da função V ao longo das soluções do sistema é dada por:

$$\dot{V}(x) = \frac{r}{ka} \left[-akx^2 + (r+1)(k+a)x^3 - \left(1 + r + \frac{r(k+a)}{ka} \right) x^4 \right] + \frac{r^2[2(k+a)x^5 - x^6]}{(ka)^2}.$$

Note que a função V é definida positiva e radialmente ilimitada.

Além disso, $\dot{V} \leq 0$ no intervalo $(-10, 38)$ e então, pela Extensão de Zadeh, temos que $\hat{V}$ é radialmente ilimitada e $\hat{V}([\mathbf{x}]^\alpha) \subset (-\infty, 0]$, $\forall \alpha \in (0, 1]$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{\Omega}_L$ e portanto o conjunto $\mathbf{\Omega}_L$ é limitado para $L \approx 38$, ou seja, $\mathbf{\Omega}_L := \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : [\hat{V}(\mathbf{x})]^\alpha \subset (-\infty, 38), \forall \alpha \in [0, 1]\}$.

Logo, as hipóteses do Teorema 4.3 estão satisfeitas e portanto as soluções tendem para o maior conjunto invariante $\mathbf{B}$ contido em $\mathbf{E} := \{\mathbf{x} \in \mathbf{\Omega}_L : \hat{V}(\mathbf{x}) = \{0\}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{\Omega}_L : \mathbf{x} = \{0\}\}$.

Como a origem é o único conjunto invariante contido em $\mathbf{E}$, então podemos concluir que as soluções tendem para a origem quando $t \rightarrow \infty$.

As Figuras 4.3 e 4.4 ilustram o Exemplo 4.3.

Figura 4.3: Representação da função auxiliar V e sua derivada $\dot{V}$.

Figura 4.4: (CECCONELLO, 2010) Representa a evolução da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ do sistema (4.5). Constantes $a = 50, r = 0,1$ e $k = 100$. Note que para a condição inicial fuzzy abaixo do limiar Allee ($a = 50$), a evolução da solução fuzzy tende para a origem. Caso esteja acima do limiar Allee, a evolução da solução fuzzy tende para a capacidade suporte ($k = 100$). Quanto mais escuro a solução fuzzy, maior o grau de pertinência e quanto menos escuro, menor o grau de pertinência.

4.2.1 Versão Global do Princípio de Invariância Fuzzy

A seguir, apresentamos a versão global do Teorema 4.3.

Teorema 4.4 *Considere o sistema (4.3) e sejam $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1 . Sejam $\hat{V} : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R})$ e $\hat{\dot{V}} : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R})$ as extensões de Zadeh de V e $\dot{V}$, respectivamente. Admita que $[\hat{V}(\mathbf{x})]^\alpha \subset (-\infty, 0], \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), \forall \alpha \in [0, 1]$ e defina $\mathbf{E} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : \hat{\dot{V}}(\mathbf{x}) = \{0\}\}$. Seja $\mathbf{B}$ o maior conjunto invariante contido em $\mathbf{E}$. Então toda solução fuzzy $\hat{\varphi}_t$ limitada para $t \geq 0$ de $\dot{x} = f(x)$ converge para $\mathbf{B}$ quando $t \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Seja $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ a solução fuzzy limitada para $t \geq 0$ e seja $\omega([\mathbf{x}_0]^\alpha)$ o conjunto ω -limite.

Seja $y \in [\mathbf{x}_0]^\alpha$. Sabemos que $\omega(y) \subset \omega([\mathbf{x}_0]^\alpha)$ é não vazio. Como V é decrescente e $V(\varphi_t(y))$ é limitada inferiormente, então $V(\varphi_t(y)) \rightarrow v(y) \in \mathbb{R}$ quando $t \rightarrow \infty$.

Como $V(\varphi_t(y))$ tende para $\omega(y)$ então da continuidade da V temos que $V(x) = V(y), \forall x \in \omega(y)$. Da invariância de $\omega(y)$, $\dot{V}(x) = 0, \forall x \in \omega(y)$ e por y ser arbitrário, então $\dot{V}(x) = 0, \forall x \in \omega([\mathbf{x}_0]^\alpha)$.

Tome $\mathbf{x} \in \omega([\mathbf{x}_0]^\alpha)$. Pela Definição 4.19 temos que $[\mathbf{x}]^\alpha \subset \omega([\mathbf{x}_0]^\alpha), \forall \alpha \in [0, 1]$ e pela Proposição 4.1 temos que $[\hat{V}(\mathbf{x})]^\alpha = \dot{V}([\mathbf{x}]^\alpha), \forall \mathbf{x} \in \omega([\mathbf{x}_0]^\alpha), \forall \alpha \in [0, 1]$, então $\dot{V}([\mathbf{x}]^\alpha) = \{0\}$, pois $[\mathbf{x}]^\alpha \subset \omega([\mathbf{x}_0]^\alpha)$. Logo $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ e $\omega([\mathbf{x}_0]^\alpha) \subset \mathbf{E}$.

Portanto, pelo Corolário 4.1 podemos afirmar que $\omega([\mathbf{x}_0]^\alpha)$ atrai $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$, isto é, $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0) \rightarrow \omega([\mathbf{x}_0]^\alpha) \subset \mathbf{B}$ quando $t \rightarrow \infty$. $\square$

O exemplo a seguir ilustra o Teorema 4.4.

Exemplo 4.4 (HALE; KOCAK, 1991) Considere a equação diferencial de segunda ordem

$$\ddot{z} + 2a\dot{z} + z + z^3 = 0,$$

onde $a \in (0, 1)$. O sistema pode ser descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 2ay - x^3 \end{cases} \quad (4.6)$$

Note que a origem $x_e = 0$ é o único ponto de equilíbrio para φ_t . Então, pela Proposição 4.6, a origem, $\mathbf{x}_e = \chi_{\{0\}}$ é um ponto de equilíbrio para $\hat{\varphi}_t$.

Pode-se notar que para $a = 0$ temos um sistema conservativo com a função energia:

$$V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

Há uma perda de energia quando $a > 0$ e portanto obtemos $\dot{V}$ dado por

$$\dot{V}(x, y) = -2ay^2 \leq 0, \forall x, y, \forall a > 0.$$

Como $V(x, y) \rightarrow +\infty$ quando $\|x\|, \|y\| \rightarrow +\infty$ então V é radialmente ilimitada e por $\dot{V}(x, y) \leq 0$ então V é uma função decrescente. Assim, pela extensão de Zadeh, podemos dizer que $\hat{V}$ é radialmente ilimitada e que $\hat{V}([\mathbf{x}]^\alpha) \subset (-\infty, 0], \forall \alpha \in (0, 1]$ e portanto o conjunto Ω_L é limitado para qualquer $L > 0$.

Definindo o conjunto $\mathbf{E} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : \mathbf{x} = \{0\}\}$, temos que todas as hipóteses do Teorema 4.3 estão satisfeitas e portanto as soluções tendem para o maior conjunto invariante $\mathbf{B}$ contido em $\mathbf{E}$. Como a origem é o maior conjunto invariante, então as soluções tendem para origem quando $t \rightarrow \infty$.

Figura 4.5: Estimativa do atrator global do sistema (4.6). A trajetória representa a evolução da projeção de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$. Nota-se que quanto mais escuro a solução fuzzy, mais aproxima da solução determinística.

A Figura 4.5 apresenta a projeção da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ no espaço de fase.

A Figura 4.6 apresenta a projeção da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ para tempos diferentes ($t = 0$ a $t = 20$).

Figura 4.6: A trajetória representa a evolução da projeção de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ em tempos diferentes. Os tempos capturados são $t = 0.05, t = 0.45, t = 1.90, t = 2.95, t = 4.05, t = 5.50, t = 9.60, t = 12.80$ e $t = 20.00$, onde a evolução tende para a origem.

Capítulo 5

Conclusões e Proposta de Trabalhos Futuros

Neste trabalho utilizamos todo ferramental teórico do princípio de invariância de LaSalle (LASALLE, 1960a,b) e de sua extensão (RODRIGUES; ALBERTO; BRETAS, 2000) para o desenvolver uma extensão do princípio de invariância para a classe de sistemas periódicos. Assim como a extensão do princípio de invariância desenvolvida (RODRIGUES; ALBERTO; BRETAS, 2000), a extensão provada neste trabalho permite que a derivada da função escalar auxiliar possa admitir valores positivos em regiões limitadas do espaço de estado. Esta extensão pode auxiliar à procura pela função escalar V e possibilitar o tratamento de casos em que encontrar a V , satisfazendo as condições do princípio de invariância convencional, é impossível. Versões globais e uma versão uniforme com relação aos parâmetros também foram desenvolvidas. Alguns exemplos foram utilizados para ilustrar estes resultados. Em particular, estes resultados são úteis para estimar atratores e região de estabilidade de sistemas dinâmicos periódicos. Os resultados obtidos são inéditos na literatura.

Para a classe de sistemas dinâmicos fuzzy, apresentada no Capítulo 4, utilizamos conceitos fundamentais desenvolvidos por Ceccconello (CECCONELLO, 2010; CECCONELLO et al., 2015) e Mizukoshi (2004), conforme apresentados na Seção 4.1. Além disso, destacamos os principais resultados sobre sistemas dinâmicos fuzzy desenvolvidos nesta tese, tais como o princípio de invariância fuzzy e sua versão global (Teoremas 4.3 e 4.4). Estes resultados desenvolvidos, conforme a Seção 4.2, foram obtidos via extensão de Zadeh, em que para o Problema de Valor Inicial Fuzzy (PVIF), consideremos apenas incertezas na condição inicial (Seção 4.1). O objetivo principal destes resultados é estimar atratores e região de estabilidade para classe de sistemas dinâmicos fuzzy, com incertezas apenas na condição inicial de um PVIF.

Aplicações deste princípio foram investigadas e desenvolvidas para ambas as classes. Aplicações para a classe de sistemas periódicos serão os modelos que descrevem um pêndulo excitado, conforme visto no exemplo da equação (3.9), de um sistema duffing

forçado, equação (3.8) e a sincronização global de dois sistemas duffing forçado acoplados (Exemplo 3.7). Aplicação do Teorema 4.3 para a classe de sistemas dinâmicos fuzzy foi desenvolvida sobre o modelo de Allee demográfico (Exemplo 4.3), exemplo este que pode ser encontrado em Ceconello (2010).

Os objetivos relacionados ao desenvolvimento de uma extensão do princípio de invariância para sistemas periódicos foi cumprido. Esta extensão foi apresentada na Seção 3.5. Também foram desenvolvidas versões globais (Seções 3.4 e 3.5) e uniforme (Seção 3.7) com exemplos e aplicações (Seção 3.8). Os estudos desenvolvidos neste trabalho referentes aos resultados da extensão do princípio de invariância para sistemas periódicos foram essenciais para desenvolvermos o princípio de invariância e sua versão global para a classe de sistemas dinâmicos fuzzy (Seção 4.2).

Diante aos resultados obtidos no decorrer desta tese, propomos desenvolver como trabalhos futuros:

- O princípio de invariância para a classe de sistemas quase periódicos;
- A extensão do princípio de invariância para a classe de sistemas quase periódicos;
- A versão uniforme do princípio de invariância para a classe de sistemas quase periódicos e suas versões globais;
- A extensão do princípio de invariância via extensão de Zadeh para a classe de sistemas dinâmicos fuzzy sendo o PVIF com incertezas na condição inicial;
- A versão global da extensão do princípio de invariância via extensão de Zadeh para a classe de sistemas dinâmicos fuzzy sendo o PVIF com incertezas na condição inicial;
- A versão uniforme com incertezas no parâmetro λ da equação diferencial $\dot{x} = f(x, \lambda)$;
- A versão uniforme com incertezas no parâmetro λ da equação diferencial $\dot{x} = f(x, \lambda)$ e na condição inicial.

Referências

- ALBERTO, L. F. C. **O princípio de invariância de LaSalle aplicado ao estudo de coerência de geradores e à análise de estabilidade transitória multi-“swing”**. 2000. Tese de Doutorado — Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- ALBERTO, L. F. C.; CALLIERO, T. R.; MARTINS, A. C. P.; BRETAS, N. G. An Invariance Principle for Nonlinear Discrete Autonomous Dynamical Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, NY, v.52, p.692–697, 2007.
- ALIPRANTIS C.D.; BORDER, K. **Infinite Dimensional Analysis**. New York, NY - 3rd edition: Springer, 2005.
- BACCIOTTI, A.; MAZZI, L. An invariance principle for nonlinear switched systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, NL, v.54, n.11, p.1109–1119, 2005.
- BARROS, L. **Sobre Sistemas Dinâmicos Fuzzy: teoria e aplicações**. 1997. Tese de Doutorado — Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.
- BARROS L.C.; BASSANEZI, R. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. Campinas, SP: Volume 5 de Coleção IMECC - Textos Didáticos. IMECC, 2006.
- BIRKHOFF, G. D. **Dynamical Systems**. USA: volume 9 de Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence., 1966.
- BRETAS, N. G.; ALBERTO, L. F. C. Lyapunov Function for Power System with Transfer Conductances: extension of the invariance principle. **IEEE Transactions on Power Systems**, Piscataway, NJ, v.18, n.2, p.769–777, 2003.
- BRETAS, N. G.; LONDON JR, J. B. A.; ALBERTO, L. F. C.; BRETAS, A. S. A topological approach to the identification of critical measurements in power-system state estimation. **IEEE Transactions on Circuits and Systems. I, Fundamental Theory and Applications**, Piscataway, NJ, v.52, p.139–147, 2005.

- BUCKLEY, J.; FEURING, T. Fuzzy differential equations. **Fuzzy Sets Syst.**, New York, NY, v.110, n.1, p.43–54, 2000.
- CECCONELLO, M. **Sistemas Dinâmicos em Espaços Métricos Fuzzy - Aplicações em Biomatemática**. 2010. Tese de Doutorado — Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.
- CECCONELLO, M.; LEITE, J.; BASSANEZI, R.; BRANDÃO, A. Invariant and attractor sets for fuzzy dynamical systems. **Fuzzy Sets and Systems**, USA, v.265, n.11, p.99–109, 2015.
- CHIANG, H.-D.; ALBERTO, L. **Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems - Theory, Estimation, and Applications**. Cambridge: Cambridge University Press, 2015. v. 1. 500p, 2015.
- GOEBEL, R.; SANFELICE, R.; TEEL, A. Invariance principles for switching systems via hybrid systems techniques. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, NL, v.57, n.12, p.980–986, 2008.
- HALE, J. Dynamical systems and stability. **J. Math. Anal. and Appl**, New York, NY, v.26, p.39–59, 1969.
- HALE, J.; KOCAK, H. **Dynamics and Bifurcation**. Springer - Verlag, New York: vol. 3 de Text in Applied Mathematics., 1991.
- HALE J.K.; LUNEL, S. Introduction to Functional Differential Equations. **Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences**, New York, NY, v.99, 1993.
- HARTMAN, P. **Ordinary Differential Equations**. New York: John Wiley & Sons, 1964.
- HESPANHA, J. Uniform stability of switched linear systems: extensions of lasalle's invariance principle. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, NY, v.49, n.4, p.470–482, 2004.
- HÜLLERMEIER, E. An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical systems. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, Paris, v.5, n.2, p.117–137, 1997.
- KALEVA, O. Fuzzy differential equations. **Fuzzy Sets Syst.**, New York, NY, v.24, n.3, p.301–318, 1987.
- KANDEL, A.; BYATT, W. Fuzzy differential equations. in **“Proc. Internat. Conf. Cybernetics and Society”**, Tóquio, 1981.

- KRASOVSKI, N. **Some problems of theory of stability of motion**. 1959. Masters thesis — Translation of the Russian edition, Moscow.
- KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis With Applications**. New York, NY: John Wiley & Sons, 1978.
- LASALLE, J. The extent of asymptotic stability. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, Washington, DC, v.46, n.3, p.363–365, 1960a.
- LASALLE, J. Some extensions of liapunov's second method. **IRE Trans. on Circuit Theory**, New York, NY, v.CT-7, p.520–527, 1960b.
- LASALLE, J. Asymptotic stability criteria. **Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Hydrodynamic Instability**, New York, NY, v.AMS-13, p.299–307, 1962.
- LASALLE, J. Stability theory for difference equations. studies in ordinary differential equation. **Studies in ordinary differential equations, Stud. in Math., Math. Assoc. of America, Washington, D. C. (Reviewer G.R.Sell)**, US, v.14, p.1–31, 1977.
- LEITE, J. **Sistemas dinâmicos fuzzy aplicado a processos difusivos**. 2011. Tese de Doutorado — Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.
- MANCILLA-AGUILAR, J.; GARCIA, R. An extension of LaSalle's invariance principle for switched systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, NL, v.55, n.5, p.376–384, 2006.
- MIJOLARO, A.; ALBERTO, L. F. C.; BRETAS, N. Synchronization of a Class of Second-Order Nonlinear Systems. **International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering**, Singapore, SG, v.18, p.3461–3471, 2010.
- MILANI, A.; KOKSCH, N. **An Introduction to Semiflows**. New York, NY: Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Chapman & Hall/CRC, 2005.
- MILLER, R. Assymptotic behavior os solutions of nonlinear differential equations. **Transactions of the American Mathematical Society**, US, v.115, n.3, p.400–416, 1965.
- MIZUKOSHI, M. **Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Fuzzy**. 2004. Tese de Doutorado — Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.
- NEGOITA, C.; RALESCU, D. **Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis**. New York, NY: Wiley, 1975.

- OBERGUGGENBERGER, M.; PITTSCHMANN, S. Differential equations with fuzzy parameters. **Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems**, Austria, v.5, p.181–202, 1991.
- PURI, M.; RALESCU, D. Differentials of fuzzy functions. **J. Math. Analysis and Applications**, Amsterdam, NL, v.91, p.552–558, 1983.
- RABELO, M.; ALBERTO, L. F. C. An Extension of the Invariance Principle for a Class of Differential Equations with Finite Delay. **Advances in Difference Equations**, US, v.2010, p.1–14, 2010.
- RAFFA, W. C.; ALBERTO, L. F. C. A uniform invariance principle for periodic systems with applications to synchronization. **Submetido para Systems & Control Letters**, Amsterdam, NL, v..., n..., p..., 2015.
- RODRIGUES, H. **Invariância para sistemas não autônomos de equações diferenciais com retardamento e aplicações**. 1970. Tese de Mestrado — Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- RODRIGUES, H.; ALBERTO, L. F. C.; BRETAS, N. On the Invariance Principle. Generalizations and Applications to Synchronism. **IEEE Transactions on Circuits and Systems. I, Fundamental Theory and Applications**, Piscataway, NJ, v.47, n.5, p.730–739, 2000.
- RODRIGUES, H.; ALBERTO, L. F. C.; BRETAS, N. Uniform Invariance Principle and Synchronization. Robustness with respect to parameter variation. **Journal of Differential Equations**, Amsterdam, NL, v.169, n.1, p.228–254, 2001.
- RODRIGUES, H.; WU, J.; GABRIEL FILHO, L. Uniform Dissipativeness and Robust Synchronization of Parametrized Discrete Systems: location of the attractor. **International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering**, Singapore, v.21, p.1–14, 2011.
- ROMÁN-FLORES, H. The of compactness $e(x)$. **Appl. Math. Lett**, US, v.11, p.13–17, 1998.
- SEIKKALA, S. On the fuzzy initial value problem. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, NY, v.24, n.3, p.319–330, 1987.
- SELL, G. Nonautonomous differential equations and topological dynamics. **i, ii, Trans. Amer. Math. Soc.**, US, v.127, p.(I)241–262, (II)263–283, 1967.
- SHEVITZ, D.; PADEN, B. Lyapunov stability theory of nonsmooth systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, NY, v.39, n.9, p.1910–1914, 1994.

- SILVA, F. H. J. R. d.; ALBERTO, L.; LONDON JR, J. B. A.; BRETAS, N. G. Smooth perturbation on a classical energy function for lossy power system stability analysis. **IEEE Transactions on Circuits and Systems. I, Fundamental Theory and Applications**, Piscataway, NJ, v.52, n.1, p.222–229, 2005.
- SLEMROD, M. Asymptotic behavior of a class of abstract dynamical systems. **J. Diff. Equations**, Amsterdam, NL, v.7, n.3, p.584–600, 1970.
- VALENTINO, M.; OLIVEIRA, V.; ALBERTO, L. F. C.; AZEVEDO, D. An extension of the invariance principle for dwell-time switched nonlinear systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, NL, v.61, p.580–586, 2012.
- VIDYASAGAR, M. **Nonlinear Systems Analysis**. New Jersey, NJ: PRENTICE HALL, Englewood Cliffs, New Jersey - Second Edition, 1993. 498p.
- VOROBIEV, D.; SEIKKALA, S. Towards the theory of fuzzy differential equations. **Fuzzy Sets Syst.**, New York, NY, v.125, n.2, p.231–237, 2002.