UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO–USP
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Felipe Taha Sant’Ana

**Estimação de Probabilidade de Colisão
com Obstáculos Móveis para Navegação
Autônoma**

São Carlos
2015

Felipe Taha Sant'Ana

**Estimação de Probabilidade de Colisão
com Obstáculos Móveis para Navegação
Autônoma**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências, Programa de Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos

Orientador: Prof. Dr. Valdir Grassi Junior

São Carlos

2015

Trata-se da versão corrigida da Dissertação. A versão original se encontra disponível na EESC/USP que aloja o Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica.

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

S231e Sant'Ana, Felipe
Estimação de Probabilidade de Colisão com
Obstáculos Móveis para Navegação Autônoma / Felipe
Sant'Ana; orientador Valdir Grassi. São Carlos, 2015.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica e Área de Concentração em
Sistemas Dinâmicos -- Escola de Engenharia de São
Carlos da Universidade de São Paulo, 2015.

1. probabilidade de colisão. 2. ambientes
dinâmicos. 3. obstáculos móveis. 4. robôs móveis. 5.
planejamento de trajetória. 6. navegação autônoma. I.
Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Bacharel **FELIPE TAHA SANT'ANA**.

Título da dissertação: "Estimação de probabilidade de colisão com obstáculos móveis para navegação autônoma".

Data da defesa: 01/07/2015

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Dr. **Valdir Grassi Junior (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Associado **Denis Fernando Wolf**
(Instituto de Ciências Matemáticas e Computação/ICMC)

Aprovado

Prof. Associado **Marco Henrique Terra**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica:
Prof. Associado **Luis Fernando Costa Alberto**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Paulo César Lima Segantine**

Aos meus pais, Mário e Leila, que me apoiaram desde o início da minha trajetória e me proporcionaram as condições necessárias para esta realização.

Agradecimentos

Meus agradecimentos são direcionados, primeiramente, à minha família: meu pai, Mário, minha mãe, Leila e meu irmão, Vitor, pelo apoio incondicional e suporte.

Agradeço ao Prof. Valdir pela oportunidade, orientação e dedicação durante todo o trabalho.

Também agradeço ao CNPq pela bolsa concedida.

Sou grato à minha namorada, Fernanda, pela paciência e incentivo a todo momento.

Às verdadeiras amigas: "*Diga-me com quem andas e te direi quem és*".

À fraternidade FT: FULL TIME - Philosophia Vitae, pelos valiosos ensinamentos de vida durante todas as reuniões.

Agradeço aos funcionários da secretaria de pós-graduação do Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação da Escola de Engenharia de São Carlos pela disposição e inúmeras ajudas prestadas durante os anos.

Às diversas amigas conquistadas no departamento ao longo dos anos.

Por fim, aos colegas do laboratório de sistemas inteligentes (LASI) pelos bons momentos que passei quando lá estive.

*"A vida é como andar de bicicleta,
para manter o equilíbrio é
preciso manter o movimento."*

Albert Einstein

Resumo

Sant’Ana, F. T. **Estimação de Probabilidade de Colisão com Obstáculos Móveis para Navegação Autônoma**. 72 p. Dissertação de mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2015.

Na área de robótica móvel autônoma é importante que o robô siga uma trajetória livre de obstáculos. Estes podem ser desde obstáculos estáticos, como paredes e cadeiras em um ambiente interno, ou mesmo obstáculos móveis, como pessoas caminhando na calçada e carros passando pela rua, quando consideramos ambientes externos. No caso de um ambiente estático, o problema pode ser resolvido planejando uma trajetória livre de colisões, sendo que não é necessário um replanejamento se todos os obstáculos estáticos foram considerados. Para ambientes onde os obstáculos estão em constante movimento, é necessário um constante replanejamento da trajetória para que se evite colisões. Alternativamente, pode ser verificada a possibilidade de se manter na rota planejada, alterando apenas a velocidade de cruzeiro do robô para que este desvie dos obstáculos móveis. Este trabalho propõe uma metodologia para calcular uma velocidade de cruzeiro para o robô de forma a minimizar a probabilidade de colisão com os obstáculos detectados pelos seus sensores. A escolha da variação de velocidade para o robô considera a sua velocidade atual, e as velocidades estimadas para os obstáculos. A metodologia para resolução deste problema é apresentada considerando incertezas na posição do robô e obstáculos. São apresentados resultados de simulação que exemplificam a aplicação da metodologia.

Palavras-chave: probabilidade de colisão, ambientes dinâmicos, obstáculos móveis, robôs móveis, planejamento de trajetória, navegação autônoma.

Abstract

Sant'Ana, F. T. **Mobile Obstacle Collision Probability Estimation for Autonomous Navigation**. 72 p. Master Thesis – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, 2015.

Following a free path is an important issue in the area of autonomous mobile robotics. The obstacles can be anything from walls and chairs in an indoor environment, or they can also be people walking on the sidewalk and cars moving through the street. In the case of a static environment, the problem can be solved by planning a path free from collisions, thus it is not essential another path planning as all static obstacles were considered. For an environment where the obstacles are constantly moving, it is necessary an unceasing path replanning to avoid possible collisions. Alternatively, keeping the robot on the previously calculated path can be verified modifying the robot's traffic velocity to avoid moving obstacles. Our proposal is to calculate a velocity for the robot which minimizes its collision probability with moving obstacles detected by its sensors. Varying the robot's velocity takes into account its current velocity and the estimated velocities of obstacles. The methodology for solving this problem is presented regarding uncertainties in robot's and obstacles' positions. Results from simulations that exemplifies an application for the methodology are presented.

Keywords: collision probability, dynamic environments, velocity obstacles, mobile robots, path planning, autonomous navigation.

Lista de figuras

Figura 1	Ilustração de uma arquitetura usual para robôs móveis atuando em um ambiente real (SIEGWART; NOURBAKHS, 2004).	26
Figura 2	Ilustração de uma curva genérica no plano xy.	34
Figura 3	Representação das PDFs do robô e de um obstáculo no plano.	40
Figura 4	Gráfico de $P(t)$ referente à equação (9) para a situação descrita.	41
Figura 5	Gráfico de $P(t, v)$ utilizando a equação (41).	43
Figura 6	Probabilidade de colisão $P(t)$ para diferentes valores de velocidade em (a), e curva representando os valores máximos da probabilidade de colisão para diferentes velocidades $P_{max}(v)$, em (b).	45
Figura 7	Comparação entre as duas alternativas de abordagem de colisão com ao menos um obstáculo, evidenciando que a equação (66) é uma boa aproximação da equação (65).	47
Figura 8	Ambiente de simulação com 3 obstáculos.	51
Figura 9	robô e obstáculo trafegando em um ambiente.	52
Figura 10	Probabilidade em função do tempo calculada pelo robô a respeito do obstáculo detectado na situação um.	53
Figura 11	robô trafegando em um ambiente que contém dois potenciais obstáculos.	54
Figura 12	Gráfico do tempo de execução dos algoritmos por n	55
Figura 13	Amostras geradas aleatoriamente a partir de uma PDF de duas variáveis e seus histogramas.	66

Lista de tabelas

Tabela 1	Comparativo entre as características que os trabalhos relacionados levam em consideração e que este trabalho considera.	31
Tabela 2	Tempo de execução dos algoritmos n obstáculos.	55

Lista de siglas

PDF - **P**robability **D**ensity **F**unction

KKT - **K**arush-**K**uhn-**T**ucker

Lista de símbolos

X - vetor de variáveis aleatórias (Apêndice A)

d - dimensão

Σ - matrix de covariância genérica (Apêndice A)

E - operador valor médio

μ - vetor médio

N_X - PDF normal genérica

L - lagrangeano

λ - multiplicador de KKT

f e g - funções genéricas quaisquer (cap. 3)

c - constante qualquer

μ_r e μ_o - vetor com as informações dos objetos, robô e obstáculo, obtidas pelo sensor

$(x^{(r)}, y^{(r)})$ e $(x^{(o)}, y^{(o)})$ - posições no plano dos objetos

θ_r e θ_o - orientações dos objetos

Δx_0 e Δy_0 - diferença das posições iniciais do robô e do obstáculo

$\Delta \theta$ - diferença das orientações do robô e do obstáculo

$\Delta \mu$ - vetor com as diferenças das posições e da orientação dos objetos

X - vetor genérico com as variáveis x , y e θ

p - PDF genérica

p_r e p_o - PDFs do robô e do obstáculo

P - probabilidade de colisão entre o robô e o obstáculo

t - tempo

$v^{(r)}$ e $v^{(o)}$ - velocidades dos objetos

$v_x^{(o)}$ e $v_y^{(o)}$ - velocidades nas direções x e y do obstáculo

v - velocidade do robô

$K, J, X, A, B, C, D, E, F, A', B', N$ - parâmetros definidos no texto

Σ_r - matrix de covariância do robô

Σ_o - matrix de covariância do obstáculo

Σ - soma das matrizes de covariância do robô e do obstáculo (cap. 3)

τ - valor limiar

v^* - velocidade ótima

n - número de obstáculos

$P^{(n)}$ - probabilidade de colisão com n obstáculos

$f'(x)$ - derivada da função genérica f em x

$P^{(n)'} - derivada da probabilidade de colisão com n obstáculos em $v$$

P_i - probabilidade de colisão com o i -ésimo obstáculo

P_i' - derivada da probabilidade de colisão com o i -ésimo obstáculo em v

v_0 - velocidade inicial do robô

ϵ - valor arbitrário muito pequeno

m - número de iterações do método de Newton

z - distância entre o robô e o obstáculo

r_s - raio de alcance do sensor

Sumário

1	Introdução	25
1.1	Objetivos	27
1.2	Organização do Texto	27
2	Revisão Bibliográfica	29
3	Metodologia Proposta para Evitar Colisões com Obstáculos Móveis	33
3.1	Probabilidade de colisão com um obstáculo móvel considerando trajetórias genéricas	33
3.2	Cálculo da velocidade de translação do robô adequada para evitar colisão	35
3.3	Expansão do método: evitar colisão com n obstáculos móveis considerando trajetórias genéricas	38
4	Aplicação do Método para Trajetórias Específicas	39
4.1	Aplicação de caso: evitar colisão com um obstáculo móvel executando trajetórias retilíneas uniformes	39
4.1.1	Cálculo de velocidade de translação adequada para o robô	43
4.2	Expansão do caso: evitar colisão com n obstáculos móveis executando trajetórias retilíneas uniformes	46
4.2.1	Primeira abordagem: probabilidade conjunta	46
4.2.2	Abordagem alternativa: probabilidades independentes	47
5	Simulações e Resultados	51
5.1	Aplicação do método: evitar colisão com um obstáculo móvel	51
5.2	Aplicação da generalização: evitar colisão com n obstáculos móveis	54
6	Conclusões	57
6.1	Trabalhos Futuros	57
	Referências	59

Apêndices	63
APÊNDICE A Distribuições Normais Multivariáveis	65
A.1 Produto de duas distribuições	67
A.1.1 Integral do produto	69
APÊNDICE B Matrizes de Covariância	71
B.1 Simetria	71
B.2 Valores Numéricos	72

Capítulo 1

Introdução

A área da robótica móvel autônoma vem ganhando espaço na comunidade científica devido ao seu grande potencial de desenvolvimento. A característica fundamental dessa área de estudos é exatamente a autonomia do robô, fazendo com que as ações e intervenções humanas sejam reduzidas. Um robô autônomo precisa extrair informações do ambiente a fim de tomar decisões. Para isso são utilizados diversos tipos de sensores, por exemplo: unidade de medida inercial, IMU (*Inertial Measurement Unit*); sistema de posicionamento global, GPS (*Global Positioning System*); câmeras; sonares; laser; entre outros tipos de sensores que visam extrair informações intrínsecas e extrínsecas ao robô.

A respeito dos sensores, existem várias fontes de ruídos que causam incertezas nas suas medidas (THRUN; BURGARD; FOX, 2005). É impossível fazer com que um sistema esteja livre de ruídos por conta da imprevisibilidade destes e das inúmeras formas pelas quais os ruídos podem ser gerados. Sendo assim, o tratamento determinístico deve ser substituído por uma abordagem probabilística a fim de suprir essa deficiência.

Tais informações extraídas pelos sensores são usadas para mapeamento do ambiente, localização, detecção de obstáculos e planejamento de trajetória. A fim de ilustrar como as informações extraídas do ambiente são utilizadas pelo robô, a Figura 1 traz uma representação de uma arquitetura para robôs móveis (SIEGWART; NOURBAKHS, 2004): primeiramente o robô adquire informações do ambiente através de seus sensores e interpreta-as; o robô, tendo um modelo do mapa do ambiente, seu propósito e as informações interpretadas, consegue se localizar no ambiente (RODRÍGUEZ et al., 2010; RODRÍGUEZ; FRÉMONT; BONNIFAIT,) e planejar a trajetória que o leve até seu objetivo; por fim, após extrair todas as informações necessárias e fazer os cálculos, os atuadores do robô entram em ação para sua locomoção dentro do ambiente.

No caso de robótica terrestre autônoma, fazer a detecção dos obstáculos presentes no ambiente é importante para evitar colisões (CHOSSET et al., 2005; HU et al., 2006; EL-DEHALL; PETERSSON, 2008; JANSSON, 2005). Para que o robô consiga atingir seu objetivo de locomoção dentro do ambiente, a partir das informações coletadas, faz-se necessário o planejamento de trajetória (ALTHOFF; STURBERG; BUSS, 2008; ALTHOFF; STURBERG;

Figura 1: Ilustração de uma arquitetura usual para robôs móveis atuando em um ambiente real (SIEGWART; NOURBAKSH, 2004).

BUSS, 2009; KRISHNA; ALAMI; SIMEON, 2006; PIVTORAIKO; KELLY, 2005). Mas este problema não é tão simples quanto aparenta, pois, dentro do ambiente, podem haver tanto os obstáculos estáticos (como paredes, mesas e cadeiras) quanto os que mudam de posição durante o tempo, chamados de obstáculos dinâmicos.

O planejamento de trajetória é um processo necessário para robótica autônoma, uma vez que o robô em questão possui um objetivo em relação a sua posição: ir da posição atual até uma posição desejada evitando colisões. Para isso existem vários algoritmos de planejamento de trajetória (GERAERTS; OVERMARS, ; PETTI; FRAICHARD, 2005a; KUWATA et al., 2009; LAVALLE, ; LAVALLE; KUFFNER, 1999) que consideram um mapa dos obstáculos estáticos. Uma vez que a trajetória foi planejada e o robô está realizando-a, é preciso detectar obstáculos que não foram considerados durante a etapa de planejamento. Estes obstáculos são detectados pelo robô, e geralmente um replanejamento é feito para se evitar colisões. No caso de obstáculos dinâmicos, embora o replanejamento seja uma alternativa possível, pode ser menos custoso apenas fazer um ajuste da velocidade do robô ao longo da rota planejada. Dessa forma, a motivação deste trabalho está em encontrar uma variação de velocidade do robô que evite colisões com obstáculos dinâmicos detectados.

1.1 Objetivos

Um robô móvel autônomo deve seguir uma trajetória livre de colisão com obstáculos até o seu objetivo. Estando este seguindo o caminho planejado, que foi calculado para evitar obstáculos estáticos presentes no ambiente, assume-se que há incertezas nas medidas de posição e orientação do robô e dos obstáculos móveis que ocasionalmente entram na área de alcance do sensor. Portanto, o ponto de partida do estudo é utilizar um modelo de tratamento de incertezas, i.e., utilizar uma função densidade de probabilidade (PDF - *Probability Density Function*) em torno dos valores de posição e orientação medidos pelos sensores.

O segundo ponto importante nesse estudo é a caracterização das trajetórias sendo executadas pelo robô e pelos obstáculos. Serão consideradas equações parametrizadas no tempo das curvas que descrevem as rotas. Estas podem ser incluídas nas PDFs a ponto de ter uma estimativa probabilística de futuras posições dos objetos. A intersecção entre duas PDFs pode ser considerada como uma área que contém pontos representados por ambas, sendo esta a idéia principal para o cálculo da probabilidade de colisão em função do tempo.

A fim de evitar uma possível colisão, é considerada a velocidade do robô como variável da função probabilidade de colisão para fazer um estudo sobre possíveis valores de velocidades com as quais o robô deve trafegar com o intuito de minimizar a chance de colisão com os obstáculos móveis detectados pelos sensores. Tendo a velocidade de translação adequada para o robô, faz-se desnecessário o replanejamento de trajetória neste caso.

1.2 Organização do Texto

A organização do texto se dará na seguinte distribuição:

- ❑ Capítulo 2: Serão apresentados os trabalhos relacionados e estudos feitos até então a respeito do problema de evitar colisões com obstáculos dinâmicos e as diferenças entre eles e a proposta deste trabalho.
- ❑ Capítulo 3: Serão apresentadas descrições generalizadas dos métodos: desenvolvimento sobre uma trajetória genérica para um e vários obstáculos móveis detectados pelos sensores.
- ❑ Capítulo 4: Os métodos propostos serão aplicados para o caso onde o robô e os obstáculos estão executando trajetórias retilíneas.
- ❑ Capítulo 5: Serão apresentados os resultados adquiridos utilizando os métodos aplicados no capítulo 4.

- Capítulo 6: Conclusões a respeito do trabalho e futuras perspectivas serão discutidas a fim de finalizar o estudo.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Desde a década de 80 era conhecida a importância de se investigar a complexidade de se fazer um planejamento de movimento que evitasse colisões com objetos móveis. Reif e Sharir (1985) investigaram uma classe de problemas dinâmicos que era chamada de *asteroid avoidance problems*: o objeto em questão era um poliedro convexo que estava livre para se mover com módulo da velocidade translacional delimitada, em um espaço contendo obstáculos com trajetórias conhecidas. Esse tipo de problema possui várias aplicações para anulação de colisão de robôs, automóveis e aeronaves.

Uma variedade de trabalhos relacionados a este problema começou a surgir na década seguinte. Hu, Brady e Probert (1991) abordaram probabilisticamente os problemas de navegação e controle de um robô móvel na presença de obstáculos móveis inesperados com incertezas na posição do obstáculo, a fim de evitar colisões. Os autores definiram uma área de segurança modelada por um círculo (centrada na posição do robô), cujo raio é proporcional à velocidade. A condição de colisão era baseada em um teste de interseção entre o círculo e elipses de erro de posição. O controle da velocidade e direção do robô ao longo de um caminho pré-planejado foi feito usando a condição de colisão.

Burlina, DeMenthon e Davis (1992) idealizaram um método probabilístico para calcular a probabilidade de colisão levando em consideração ruídos nas medidas dos sensores. A probabilidade de colisão era calculada em dois passos: um modelo estocástico era definido no espaço de estados do obstáculo e, neste mesmo, era feita uma caracterização geométrica para a colisão.

Em seguida, Fiorini e Shiller (1993), Fiorini e Shiller (1998) apresentaram um método de planejamento de movimento em ambientes dinâmicos. Sua abordagem consistia em selecionar manobras de evasão para evitar obstáculos estáticos e móveis no espaço de velocidades, baseado nas atuais posições e velocidades, tanto do robô quanto do obstáculo. As manobras de evasão eram geradas selecionando-se as velocidades para o robô que estavam fora de um conjunto de velocidades que resultaria em uma futura colisão. Para assegurar que a manobra de evasão fosse factível, fazia-se uma intersecção entre o conjunto de velocidades de evasão e o conjunto de velocidades admissíveis, definida pelas restrições

de aceleração. Por fim, a trajetória ótima era calculada por uma árvore de busca das manobras factíveis. Outros trabalhos vieram por seguinte utilizando métodos parecidos com os já discutidos para estimação de probabilidade de colisão com obstáculos móveis em robótica, como em (KRUSE; GUTSCHE; WAHL, 1996), (CHAKRAVARTHY; GHOSE, 1998) e (SHILLER; LARGE; SEKHAVAT, 2001).

Autores também abordaram o problema no espaço de velocidades, como em (OWEN; MONTANO, 2005). O enfoque do método era voltado para o planejamento de movimento do robô em ambientes dinâmicos, evitando obstáculos móveis e estáticos. O trabalho consistia em mapear o ambiente dinâmico no espaço de velocidades utilizando o conceito de *estimated arriving time* para calcular o tempo de uma potencial colisão ou evasão. Dessa forma, podia-se achar uma trajetória ótima obedecendo tais critérios de otimização.

Existem trabalhos que utilizam métodos de tratamento de incertezas para estimar a probabilidade de colisão utilizando distribuição gaussiana nas incertezas de movimento e de sensores, como em (PATIL; BERG; ALTEROVITZ, 2012) e (FULGENZI et al., 2008). O primeiro estima a probabilidade de colisão para um planejamento de movimento baseado em distribuições de probabilidade do estado do robô. A probabilidade de colisão em cada estágio do processo é condicionada ao estágio anterior, sendo este livre de colisão ou não. A cada estágio são geradas amostras para o robô em questão a partir de sua distribuição. Caso o robô e o obstáculo estejam próximos um ao outro, algumas dessas amostras estarão em contato com o obstáculo, e outras não. A partir da razão entre as amostras que estão em contato com o obstáculo e o total de amostras, é calculada a probabilidade de colisão. O último descreve um algoritmo para navegação em ambientes dinâmicos, onde são supostos padrões de movimento para os obstáculos, representados por processos gaussianos. De uma forma parecida com esses dois trabalhos citados, Berg et al. (2012) abordaram o problema de colisão tratando o movimento e as informações dos sensores com incertezas gaussianas.

Lambert, Gruyer e Pierre (2008) utilizaram um modelo gaussiano para tratar as incertezas sobre as informações do robô e do obstáculo, posição e orientação, a fim de estimar a probabilidade de colisão a partir de amostras geradas pelo método de Monte Carlo. Tal abordagem se limitou a obstáculos estáticos.

Neste trabalho é proposto utilizar a PDF das informações do robô e dos obstáculos, posição, orientação e velocidade, para definir a probabilidade de colisão, como feito em (LAMBERT; GRUYER; PIERRE, 2008), porém este trabalho considera a mobilidade dos obstáculos. Além de considerar incertezas na obtenção dessas informações e estimar a probabilidade de colisão em função do tempo, o estudo visa encontrar uma velocidade ótima para o robô que faça com que a probabilidade de colisão entre este e o obstáculo seja significativamente pequena a ponto de poder concluir que não haverá uma colisão na trajetória executada pelo robô.

É válido fazer uma comparação entre os trabalhos relacionados e o que é proposto aqui,

Capítulo 3

Metodologia Proposta para Evitar Colisões com Obstáculos Móveis

A partir de informações de posição e orientação coletadas sobre o robô e os obstáculos, adotando uma modelagem gaussiana para as incertezas de medidas, é possível equacionar densidades de probabilidade para estas. Tendo em mãos tal modelo para a representação das incertezas, também é possível calcular probabilidades de colisão entre o robô e os obstáculos presentes no ambiente. No caso de haver uma grande chance de colisão em algum momento na rota que o robô está executando, para que este não precise fazer o replanejamento de trajetória, torna-se conveniente uma mudança na velocidade de translação do robô. Com a finalidade de encontrar uma velocidade adequada aos objetivos será utilizado um método de otimização para fazer o cálculo de uma velocidade que minimize a probabilidade de colisão entre obstáculo e o robô no caminho sendo executado.

3.1 Probabilidade de colisão com um obstáculo móvel considerando trajetórias genéricas

Considere a situação na qual o robô executa uma trajetória genérica descrita pela curva $C^{(r)}$, Figura 2, cujas equações parametrizadas no tempo são dadas por $C^{(r)} : (x^{(r)}, y^{(r)}) = (x^{(r)}(t), y^{(r)}(t))$.

O vetor que contém as informações de posição e orientação do robô,

$$\mu_r = \begin{bmatrix} x^{(r)} \\ y^{(r)} \\ \theta^{(r)} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

pode ser escrito utilizando-se a parametrização do ponto $(x^{(r)}, y^{(r)})$ na curva:

$$\mu_r(t) = \begin{bmatrix} x^{(r)}(t) \\ y^{(r)}(t) \\ \theta^{(r)}(t) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Figura 2: Ilustração de uma curva genérica no plano xy.

A PDF associada às informações de posição e orientação do robô é dada por (JOHNSON; WICHERN, 2007)

$$p_r(X, t) = |2\pi\Sigma_r|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [X - \mu_r(t)]^T \Sigma_r^{-1} [X - \mu_r(t)] \right\}, \quad (3)$$

onde X é um vetor genérico das coordenadas utilizadas,

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Da mesma maneira, um obstáculo detectado pelo robô executando uma trajetória genérica descrita pela curva $C^{(o)}$ com equações paramétricas no tempo $C^{(o)} : (x^{(o)}, y^{(o)}) = (x^{(o)}(t), y^{(o)}(t))$ possui o vetor de informações

$$\mu_o = \begin{bmatrix} x^{(o)} \\ y^{(o)} \\ \theta^{(o)} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

que também pode ser escrito utilizando-se a parametrização do ponto $(x^{(o)}, y^{(o)})$ na curva:

$$\mu_o(t) = \begin{bmatrix} x^{(o)}(t) \\ y^{(o)}(t) \\ \theta^{(o)}(t) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Equivalentemente ao robô, a PDF associada às informações de posição e orientação do obstáculo é dada por:

$$p_o(X, t) = |2\pi\Sigma_o|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [X - \mu_o(t)]^T \Sigma_o^{-1} [X - \mu_o(t)] \right\}. \quad (7)$$

A probabilidade de colisão entre o robô e o obstáculo em função do tempo, i.e., entre as duas PDFs, é a soma de toda área correspondente à intersecção entre as curvas. No

caso contínuo, por soma entende-se integral, e assim a probabilidade de colisão pode ser interpretada matematicamente como:

$$P(t) = \int p_r(X, t) p_o(X, t) dX , \quad (8)$$

que se resume a (Apêndice A):

$$P(t) = |2\pi(\Sigma_r + \Sigma_o)|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Delta\mu(t)^T (\Sigma_r + \Sigma_o)^{-1} \Delta\mu(t) \right\} , \quad (9)$$

onde

$$\Delta\mu(t) = \mu_r(t) - \mu_o(t) = \begin{bmatrix} x^{(r)}(t) - x^{(o)}(t) \\ y^{(r)}(t) - y^{(o)}(t) \\ \theta^{(r)}(t) - \theta^{(o)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ \Delta y(t) \\ \Delta \theta(t) \end{bmatrix} . \quad (10)$$

3.2 Cálculo da velocidade de translação do robô adequada para evitar colisão

A fim de se fazer um estudo sobre possíveis velocidades de translação adequadas para que o robô navegue evitando colisões, escreve-se a função probabilidade de colisão também em função da velocidade do robô, v :

$$P(t) \longrightarrow P(t, v) . \quad (11)$$

Dessa forma, a equação (9) deve ser reescrita como:

$$P(t, v) = |2\pi(\Sigma_r + \Sigma_o)|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Delta\mu(t, v)^T (\Sigma_r + \Sigma_o)^{-1} \Delta\mu(t, v) \right\} , \quad (12)$$

com

$$\Delta\mu(t, v) = \mu_r(t, v) - \mu_o(t, v) = \begin{bmatrix} x^{(r)}(t, v) - x^{(o)}(t, v) \\ y^{(r)}(t, v) - y^{(o)}(t, v) \\ \theta^{(r)}(t, v) - \theta^{(o)}(t, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x(t, v) \\ \Delta y(t, v) \\ \Delta \theta(t, v) \end{bmatrix} . \quad (13)$$

Definindo:

$$K \equiv |2\pi(\Sigma_r + \Sigma_o)|^{-1/2} , \quad (14)$$

$$\Sigma \equiv (\Sigma_r + \Sigma_o) . \quad (15)$$

A equação (12) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$P(t, v) = K \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Delta\mu(t, v)^T \Sigma^{-1} \Delta\mu(t, v) \right\} . \quad (16)$$

Uma vez que a função probabilidade de colisão foi definida em função da velocidade do robô, deseja-se encontrar uma velocidade para o robô cuja $P(t)$ tenha um máximo menor que um valor adequado para que seja possível considerar que a velocidade do robô está dentro do limite de segurança.

Importantes questões começam a surgir ao procurar uma velocidade minimizadora da probabilidade de colisão. Caso a velocidade seja muito grande, o robô passará muito rapidamente pelo local onde haveria uma área de risco. Na outra extremidade do raciocínio, caso o robô diminua sua velocidade até atingir um valor muito baixo, também estará livre de colisão. Portanto, acelerar demasiadamente o robô ou pará-lo são duas soluções indesejáveis para o problema. Dessa forma, a questão a ser solucionada é encontrar uma velocidade que se encaixe no limite de segurança, minimizando a variação entre as velocidades atual e final do robô.

Os valores máximos de $P(t, v)$ em função do tempo podem ser encontrados através de uma análise em t : a primeira diferenciação em t resultará em informações sobre os pontos críticos; a segunda diferenciação em t concluirá a característica dos pontos críticos encontrados: mínimo, máximo ou de sela. Essa análise, resultará em uma função $t(v)$, e, utilizando-a para reescrever a equação (16),

$$P(t(v), v) = K \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Delta\mu(t(v), v)^T \Sigma^{-1} \Delta\mu(t(v), v) \right\}, \quad (17)$$

esta ficará expressa apenas em função da velocidade:

$$P_{max}(v) = K \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Delta\mu(v)^T \Sigma^{-1} \Delta\mu(v) \right\}. \quad (18)$$

Agora o problema se resume em encontrar uma velocidade v^* para o robô cuja probabilidade associada em relação ao tempo tenha um valor máximo igual ou menor que um determinado valor, digamos um limiar de segurança, conotado por τ . Refletindo sobre esse problema com uma maior cautela, é possível perceber várias soluções indesejáveis para tal, e.g., $v^* = 0$. Esse problema pode ser contornado pela introdução de uma condição de minimização na variação da velocidade do robô, i.e., achar uma velocidade v^* que esteja dentro do limiar de segurança e cuja diferença absoluta em relação à velocidade inicial, i.e. $|v_0^{(r)} - v^*|$, tenha o menor valor possível. Sumarizando o problema:

$$\min_v |v_0^{(r)} - v| \text{ condicionado à } P_{max}(v) \leq \tau.$$

Um problema de maximização com uma restrição de desigualdade do tipo

$$\max_x f(x) \text{ condicionado à } g(x) \leq c$$

pode ser resolvido através das condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) (BOYD; VANDERBERGHE, 2004; BERTSEKAS, 1982), que são formuladas como:

$$\begin{cases} \nabla_x L(x^*) = 0 \\ \lambda(g(x^*) - c) = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ g(x^*) \leq c \end{cases}, \quad (19)$$

onde

$$L(x) = f(x) - \lambda(g(x) - c) . \quad (20)$$

λ é chamado de multiplicador de KKT, que, no caso de existir condição de desigualdade, é conhecido como multiplicador de Lagrange.

Porém é perceptível uma diferença básica entre o problema que existe na abordagem apresentada e o problema resolvível pelas condições de KKT: o método requer uma minimização, enquanto as condições de KKT visam encontrar um valor ótimo de x que maximiza uma função condicionado a restrições. Isso pode ser facilmente resolvido por uma mudança de sinal: minimizar uma função $f(x)$ é equipolente a maximizar a função $-f(x)$. Outra complicação é trabalhar com a função módulo, pois esta não é diferenciável em todo $\mathfrak{R}$. Como o valor de qualquer função puramente quadrática é sempre positivo, há a igualdade:

$$|a - x|^2 = (a - x)^2 \quad \forall x \in \mathfrak{R} . \quad (21)$$

A partir deste ponto, o índice (r) , que faz referência ao robô, torna-se desnecessário uma vez que a abordagem leva em consideração apenas o controle sobre a velocidade do robô. Portanto, fazendo a substituição $|v_0 - v| \rightarrow (v_0 - v)^2$, o problema original se transforma em:

$$\max_v -(v_0 - v)^2 \text{ condicionado à } P_{max}(v) \leq \tau .$$

Utilizando-se do método de KKT para resolver o problema: o lagrangeano do sistema é:

$$L(v) = -(v_0 - v)^2 - \lambda(P_{max}(v) - \tau) , \quad (22)$$

e sua diferenciação com respeito à velocidade,

$$L'(v) = 2(v_0 - v) - \lambda P'_{max}(v) . \quad (23)$$

Com isso, conclui-se das condições (19):

$$\begin{cases} 2(v_0 - v^*) - \lambda P'_{max}(v^*) = 0 \\ \lambda(P_{max}(v^*) - \tau) = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ P_{max}(v^*) \leq \tau \end{cases} . \quad (24)$$

Nas condições (24) existe um sistema de duas equações:

$$2(v_0 - v^*) - \lambda P'_{max}(v^*) = 0 \quad (25a)$$

$$\lambda(P_{max}(v^*) - \tau) = 0 , \quad (25b)$$

e duas condições:

$$\lambda \geq 0 \quad (26a)$$

$$P_{max}(v^*) \leq \tau . \quad (26b)$$

Isolando λ em (25a) e substituindo em (25b), esta fica expressa da seguinte maneira:

$$\frac{2(v_0 - v^*)}{P'_{max}(v^*)}(P_{max}(v^*) - \tau) = 0, \quad (27)$$

que é a equação cuja solução resultará na velocidade ótima. Duas soluções podem ser facilmente percebidas: $v^* = v_0$ ou $P_{max}(v^*) = \tau$. Como é sabido, possivelmente haverá uma colisão se o robô continuar a trafegar com a sua velocidade inicial, portanto pode-se descartar a primeira solução. Dito isso, a solução a se considerar é $P_{max}(v^*) = \tau$.

Resolvendo $P_{max}(v^*) = \tau$,

$$P_{max}(v^*) = K \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Delta\mu(v^*)^T \Sigma^{-1} \Delta\mu(v^*) \right\} = \tau, \quad (28)$$

encontra-se a velocidade ótima v^* para o problema.

3.3 Expansão do método: evitar colisão com n obstáculos móveis considerando trajetórias genéricas

Nesta seção será apresentada uma expansão do método desenvolvido para um obstáculo, compreendendo uma abordagem para n objetos executando trajetórias genéricas que possivelmente sejam detectados pelos sensores do robô e estejam em rota de colisão.

Suponha um cenário onde existam n obstáculos detectados e seja a probabilidade de colisão com o i -ésimo obstáculo P_i . A probabilidade de não haver uma colisão é o complemento da probabilidade de colisão, $1 - P_i$. Portanto, a probabilidade de não-colisão com o obstáculo $i = 1, 2, \dots, n$ é $(1 - P_1)(1 - P_2) \dots (1 - P_n)$. O complemento do último expressa a probabilidade de colisão com ao menos um objeto,

$$P^{(n)} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_i), \quad (29)$$

sendo a probabilidade de colisão a ser considerada nessa expansão.

Da mesma maneira abordada para um obstáculo, o problema se resume em calcular uma velocidade ótima dentro do limiar de segurança e cuja diferença com a velocidade inicial do robô seja a menor possível:

$$\max_v -(v_0 - v)^2 \text{ condicionado à } P_{max}^{(n)}(v) \leq \tau.$$

Utilizando-se do método de KKT para resolver o problema, a velocidade ótima é encontrada resolvendo-se a equação análoga à (28):

$$P_{max}^{(n)}(v^*) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_i(v^*)) = \tau. \quad (30)$$

Empregando os métodos desenvolvidos para um e n obstáculos, o próximo capítulo abordará uma trajetória específica a fim de concretizar as formulações feitas.

Capítulo 4

Aplicação do Método para Trajetórias Específicas

Este capítulo traz uma aplicação específica do método apresentado no capítulo anterior: robô e obstáculos executando trajetórias retilíneas uniformes. O método será aplicado e desenvolvido a partir das equações parametrizadas no tempo das curvas sendo executadas pelos objetos.

4.1 Aplicação de caso: evitar colisão com um obstáculo móvel executando trajetórias retilíneas uniformes

Esteja o robô na posição inicial $(x_0^{(r)}, y_0^{(r)})$ e orientação $\theta^{(r)}$ e um obstáculo na posição inicial $(x_0^{(o)}, y_0^{(o)})$ e orientação $\theta^{(o)}$, pode-se escrever o vetores relativos a essas informações no seguinte formato:

$$\mu_r = \begin{bmatrix} x_0^{(r)} \\ y_0^{(r)} \\ \theta^{(r)} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mu_o = \begin{bmatrix} x_0^{(o)} \\ y_0^{(o)} \\ \theta^{(o)} \end{bmatrix} . \quad (31)$$

A partir dessas informações, que são coletadas por sensores, assumindo-se que existam fontes de incertezas associadas às medidas e que uma modelagem gaussiana satisfaça-as, pode-se associá-las a uma PDF do tipo (Figura 3):

$$p(X) = |2\pi\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu) \right\} , \quad (32)$$

com:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} . \quad (33)$$

Figura 3: Representação das PDFs do robô e de um obstáculo no plano.

É possível observar na Figura 3 que, como os objetos estão distantes entre si, a probabilidade de colisão é praticamente nula neste caso, podendo ser interpretada como a área total da intersecção entre as duas curvas. Considerando-se essa abordagem, apenas é possível saber se o robô e obstáculo estão colidindo no momento da medida, i.e., se as curvas das PDFs estão se intersectando no instante em questão. Uma vez que o objetivo é evitar a colisão e que não se trata de um obstáculo estático, é inconveniente saber se está havendo uma colisão a cada instante. Por isso torna-se fundamental considerar sua velocidade a fim de ter uma estimativa das chances de colisão entre eles em relação ao tempo com o propósito de tomar decisões a partir desta.

Os vetores configurações $\mu = (x \ y \ \theta)^T$ dos objetos em função do tempo podem ser escritos como:

$$\mu_r(t) = \begin{bmatrix} x_0^{(r)} + tv^{(r)} \cos(\theta^{(r)}) \\ y_0^{(r)} + tv^{(r)} \sin(\theta^{(r)}) \\ \theta^{(r)} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mu_o(t) = \begin{bmatrix} x_0^{(o)} + tv^{(o)} \cos(\theta^{(o)}) \\ y_0^{(o)} + tv^{(o)} \sin(\theta^{(o)}) \\ \theta^{(o)} \end{bmatrix}, \quad (34)$$

assumindo uma trajetória retilínea uniforme para ambos.

Dessa forma, as PDFs também serão dependentes do tempo:

$$p_r(X, t) = |2\pi\Sigma_r|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2}[X - \mu_r(t)]^T \Sigma_r^{-1} [X - \mu_r(t)] \right\} , \quad (35a)$$

$$p_o(X, t) = |2\pi\Sigma_o|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2}[X - \mu_o(t)]^T \Sigma_o^{-1} [X - \mu_o(t)] \right\} . \quad (35b)$$

Como já discutido anteriormente, a probabilidade de colisão entre duas PDFs é expressa pela equação (9), com:

$$\Delta\mu(t) = \mu_r(t) - \mu_o(t) = \begin{bmatrix} \Delta x_0 + t(v^{(r)} \cos(\theta^{(r)}) - v_x^{(o)}) \\ \Delta y_0 + t(v^{(r)} \sin(\theta^{(r)}) - v_y^{(o)}) \\ \Delta\theta \end{bmatrix} , \quad (36)$$

onde:

$$\Delta x_0 = x_0^{(r)} - x_0^{(o)} , \quad (37a)$$

$$\Delta y_0 = y_0^{(r)} - y_0^{(o)} , \quad (37b)$$

$$\Delta\theta = \theta^{(r)} - \theta^{(o)} , \quad (37c)$$

$$v_x^{(o)} = v^{(o)} \cos(\theta^{(o)}) , \quad (37d)$$

$$v_y^{(o)} = v^{(o)} \sin(\theta^{(o)}) . \quad (37e)$$

Situação 1: suponha que o robô esteja trafegando com velocidade $v^{(r)} = 1$ m/s e orientação $\theta^{(r)} = 0$ e, no momento em que sua posição é $(x_0^{(r)}, y_0^{(r)}) = (10, 10)$, seu sensor detecta um obstáculo na posição $(x_0^{(o)}, y_0^{(o)}) = (20, 0)$, velocidade $v^{(o)} = 1$ m/s e orientação $\theta^{(o)} = \pi/2$. Nesta situação haverá uma grande chance de colisão no tempo $t = 10$ s, como mostra a Figura 4.

Figura 4: Gráfico de $P(t)$ referente à equação (9) para a situação descrita.

Sabendo que possivelmente haverá uma colisão em um tempo posterior qualquer, faz-se necessária uma mudança de velocidade para que o robô não colida com o obstáculo. Com essa finalidade, é possível fazer da velocidade do robô uma variável em seu vetor

configuração:

$$\mu_r(t, v) = \begin{bmatrix} x_0^{(r)} + t v \cos(\theta^{(r)}) \\ y_0^{(r)} + t v \sin(\theta^{(r)}) \\ \theta^{(r)} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Fazendo as seguintes definições:

$$\begin{cases} J & \equiv v \cos(\theta^{(r)}) - v_x^{(o)} \\ X & \equiv v \sin(\theta^{(r)}) - v_y^{(o)} \end{cases}, \quad (39)$$

a diferença entre os vetores μ_r e μ_o pode ser expressa na seguinte maneira:

$$\Delta\mu(t, v) = \begin{bmatrix} \Delta x_0 + t J \\ \Delta y_0 + t X \\ \Delta\theta \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Substituindo (38) em (9), tem-se a probabilidade de colisão em função da velocidade e do tempo:

$$P(t, v) = |2\pi(\Sigma_r + \Sigma_o)|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Delta\mu(t, v)^T (\Sigma_r + \Sigma_o)^{-1} \Delta\mu(t, v) \right\}. \quad (41)$$

Sendo a função principal que compõe o argumento da exponencial dada por

$$f(t, v) = \Delta\mu(t, v)^T \Sigma^{-1} \Delta\mu(t, v), \quad (42)$$

e utilizando as definições (14) e (15), a equação (41) pode ser reescrita no formato:

$$P(t, v) = K \exp \left\{ -\frac{1}{2} f(t, v) \right\}. \quad (43)$$

É importante visualizar o valor explícito da função $f(t, v)$ a fim de saber como a função probabilidade deve se comportar:

$$\begin{aligned} \Delta\mu(t, v)^T \Sigma^{-1} \Delta\mu(t, v) &= (\Delta x_0 + t J) [\Sigma_{11}(\Delta x_0 + t J) + \Sigma_{12}(\Delta y_0 + t X) + \Sigma_{13}\Delta\theta] \\ &+ (\Delta y_0 + t X) [\Sigma_{12}(\Delta x_0 + t J) + \Sigma_{22}(\Delta y_0 + t X) + \Sigma_{23}\Delta\theta] \\ &+ \Delta\theta [\Sigma_{13}(\Delta x_0 + t J) + \Sigma_{23}(\Delta y_0 + t X) + \Sigma_{33}\Delta\theta], \end{aligned} \quad (44)$$

onde

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (45)$$

É importante ressaltar que a matriz Σ^{-1} também é simétrica, uma vez que Σ_r e Σ_o são matrizes simétricas (Apêndice B).

Dessa forma é possível perceber que o argumento da função exponencial de (43) obedece o seguinte formato:

$$f(t, v) = At^2v^2 + Bt^2v + Ctv + Dt^2 + Et + F, \quad (46)$$

com

$$A = 2\Sigma_{12} \sin(\theta^{(r)}) \cos(\theta^{(r)}) + \Sigma_{11} \cos^2(\theta^{(r)}) + \Sigma_{22} \sin^2(\theta^{(r)}) , \quad (47a)$$

$$B = -2(\Sigma_{11}v_x^{(o)} \cos(\theta^{(r)}) + \Sigma_{12}v_y^{(o)} \cos(\theta^{(r)}) + \Sigma_{12}v_x^{(o)} \sin(\theta^{(r)}) + \Sigma_{22}v_y^{(o)} \sin(\theta^{(r)})) , \quad (47b)$$

$$C = 2(\Sigma_{13}\Delta\theta \cos(\theta^{(r)}) + \Sigma_{23}\Delta\theta \sin(\theta^{(r)}) + \Sigma_{12}\Delta x_0 \sin(\theta^{(r)}) + \Sigma_{11}\Delta x_0 \cos(\theta^{(r)}) + \Sigma_{12}\Delta y_0 \cos(\theta^{(r)}) + \Sigma_{22}\Delta y_0 \sin(\theta^{(r)})) , \quad (47c)$$

$$D = 2\Sigma_{12}v_y^{(o)}v_x^{(o)} + \Sigma_{11}(v_x^{(o)})^2 + \Sigma_{22}(v_y^{(o)})^2 , \quad (47d)$$

$$E = -2(\Sigma_{13}v_x^{(o)}\Delta\theta + \Sigma_{23}v_y^{(o)}\Delta\theta + \Sigma_{12}v_y^{(o)}\Delta x_0 + \Sigma_{11}v_x^{(o)}\Delta x_0 + \Sigma_{12}v_x^{(o)}\Delta y_0 + \Sigma_{22}v_y^{(o)}\Delta y_0) , \quad (47e)$$

$$F = \Sigma_{11}(\Delta x_0)^2 + \Sigma_{22}(\Delta y_0)^2 + \Sigma_{33}(\Delta\theta)^2 + 2(\Sigma_{13}\Delta\theta\Delta x_0 + \Sigma_{23}\Delta\theta\Delta y_0 + \Sigma_{12}\Delta x_0\Delta y_0) . \quad (47f)$$

Utilizando-se dessa nova função de duas variáveis, Figura 5, é praticável estudar qual dessas curvas, associadas à velocidade, terá uma probabilidade de colisão segura para o robô.

Figura 5: Gráfico de $P(t, v)$ utilizando a equação (41).

4.1.1 Cálculo de velocidade de translação adequada para o robô

Os valores máximos de $P(t, v)$ em função do tempo podem ser encontrados através da diferenciação em relação ao tempo,

$$\frac{\partial P(t, v)}{\partial t} = 0 , \quad (48)$$

uma vez que a função $P(t)$ é uma curva gaussiana, i.e., sua derivada é nula apenas no valor máximo, desconsiderando valores positivos e negativos extremamente grandes ($\lim_{t \rightarrow \pm\infty}$). Portanto, derivando $P(t, v)$ no tempo obtém-se:

$$\frac{\partial P(t, v)}{\partial t} = -\frac{1}{2}P(t, v) \left\{ \frac{\partial \Delta\mu^T}{\partial t} \Sigma^{-1} \Delta\mu + \Delta\mu^T \Sigma^{-1} \frac{\partial \Delta\mu}{\partial t} \right\} = 0 . \quad (49)$$

Para que (49) seja zero, desconsiderando $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} P(t, v) = 0$, é preciso que os termos entre parênteses se anulem:

$$\frac{\partial \Delta\mu^T}{\partial t} \Sigma^{-1} \Delta\mu + \Delta\mu^T \Sigma^{-1} \frac{\partial \Delta\mu}{\partial t} = 0 . \quad (50)$$

Cada termo da equação é mostrado a seguir:

$$\frac{\partial \Delta\mu^T}{\partial t} \Sigma^{-1} \Delta\mu = \begin{bmatrix} J \\ X \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_0 + t J \\ \Delta y_0 + t X \\ \Delta\theta \end{bmatrix} , \quad (51)$$

$$\Delta\mu^T \Sigma^{-1} \frac{\partial \Delta\mu}{\partial t} = \begin{bmatrix} \Delta x_0 + t J \\ \Delta y_0 + t X \\ \Delta\theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ X \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (52)$$

A maximização resultará em uma função $t(v)$, cuja expressão é

$$t(v) = \frac{-J(\Sigma_{11}\Delta x_0 + \Sigma_{12}\Delta y_0 + \Sigma_{13}\Delta\theta) - X(\Sigma_{12}\Delta x_0 + \Sigma_{22}\Delta y_0 + \Sigma_{23}\Delta\theta)}{\Sigma_{11}J^2 + \Sigma_{22}X^2 + 2\Sigma_{12}JX} . \quad (53)$$

Substituindo-a em $P(t, v)$:

$$\begin{aligned} \Delta\mu(t(v), v)^T \Sigma^{-1} \Delta\mu(t(v), v) &= (\Delta x_0 + t(v) J)[\Sigma_{11}(\Delta x_0 + t(v) J) + \Sigma_{12}(\Delta y_0 + t(v) X) + \Sigma_{13}\Delta\theta] \\ &\quad + (\Delta y_0 + t(v) X)[\Sigma_{12}(\Delta x_0 + t(v) J) + \Sigma_{22}(\Delta y_0 + t(v) X) + \Sigma_{23}\Delta\theta] \\ &\quad + \Delta\theta[\Sigma_{13}(\Delta x_0 + t(v) J) + \Sigma_{23}(\Delta y_0 + t(v) X) + \Sigma_{33}\Delta\theta] , \end{aligned} \quad (54)$$

a probabilidade de colisão ficará em função apenas da velocidade e será constituída pelos valores máximos, $P_{max}(v)$:

$$P(t(v), v) = K \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Delta\mu(t(v), v)^T \Sigma^{-1} \Delta\mu(t(v), v) \right\} = P_{max}(v) . \quad (55)$$

O argumento da função exponencial em (55), (54), parece complicado e de longa expressão, mas, se ao invés de utilizar (41) for considerada (46) para a diferenciação no tempo, tem-se:

$$\frac{\partial f(t, v)}{\partial t} = 0 \longrightarrow 2(Av^2 + Bv + D)t + Cv + E = 0 , \quad (56)$$

resultando em

$$t(v) = -\frac{1}{2} \frac{(Cv + E)}{(Av^2 + Bv + D)} . \quad (57)$$

Substituindo (57) em (46):

$$f(v) = -\frac{1}{4} \frac{(Cv + E)^2}{(Av^2 + Bv + D)} + F. \quad (58)$$

A interpretação desses últimos passos é a seguinte: a maximização da função probabilidade de colisão em relação ao tempo resulta em uma função $t(v)$, cujos valores são todos os valores máximos das curvas de $P(t)$ para cada velocidade do robô, como ilustrado na Figura 6.a.

Figura 6: Probabilidade de colisão $P(t)$ para diferentes valores de velocidade em (a), e curva representando os valores máximos da probabilidade de colisão para diferentes velocidades $P_{max}(v)$, em (b).

Resolvendo $P_{max}(v^*) = \tau$:

$$P_{max}(v^*) = K \exp \left\{ -\frac{1}{2} f(v^*) \right\} = K \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \frac{(Cv^* + E)^2}{(Av^{*2} + Bv^* + D)} - F \right] \right\} = \tau. \quad (59)$$

Dividindo (59) por K e tirando o logaritmo natural:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \frac{(Cv^* + E)^2}{(Av^{*2} + Bv^* + D)} - F \right] = \ln \left(\frac{\tau}{K} \right). \quad (60)$$

Agrupando os termos com v^* de um lado da equação,

$$\frac{(Cv^* + E)^2}{(Av^{*2} + Bv^* + D)} = 4 \left[\ln \left(\frac{\tau}{K} \right)^2 + F \right], \quad (61)$$

e definindo

$$\alpha \equiv 4 \left[\ln \left(\frac{\tau}{K} \right)^2 + F \right], \quad (62)$$

o problema é resumido em uma equação de segundo grau:

$$(C^2 - \alpha A)v^{*2} + (2CE - \alpha B)v^* + E^2 - \alpha D = 0, \quad (63)$$

cujas soluções são

$$v^* = \frac{-(2CE - \alpha B)}{2(C^2 - \alpha A)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2CE - \alpha B}{C^2 - \alpha A} \right)^2 - 4 \left(\frac{E^2 - \alpha D}{C^2 - \alpha A} \right)}. \quad (64)$$

Pode-se observar em (64) que existem duas soluções, i.e., duas velocidades ótimas, uma acelerada e a outra desacelerada: $v_1^* > v_0$ e $v_2^* < v_0$.

4.2 Expansão do caso: evitar colisão com n obstáculos móveis executando trajetórias retilíneas uníformes

Nesta seção será apresentada uma expansão do método desenvolvido para um obstáculo, que consiste em uma generalização para n objetos detectados pelos sensores do robô e que estejam em rota de colisão. Duas abordagens distintas são apresentadas: a primeira considera a probabilidade de colisão com ao menos um objeto, i.e., as probabilidades de colisão com cada obstáculo são conjuntamente consideradas no cálculo; a segunda abordagem considera a probabilidade de colisão com cada obstáculo independentemente, fazendo-se um estudo de cada velocidade ótima sobre as funções não geradoras desta.

4.2.1 Primeira abordagem: probabilidade conjunta

Considere o cenário descrito na seção 3.2. Abrindo a equação (29) é possível observar seu formato,

$$P^{(n)} = \sum_i P_i - \sum_{i_1 \neq i_2} P_{i_1} P_{i_2} + \dots + (-1)^{n-1} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n} P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_n} . \quad (65)$$

Nota-se que o primeiro termo predomina sobre os demais, Figura 7, já que $P_i \ll 1$. Portanto, é conveniente escrevê-la considerando somente o primeiro termo; e isso torna-se evidente quando se pensa na ocorrência exclusiva de cada colisão, i.e., a probabilidade do robô colidir com o primeiro obstáculo, ou com o segundo obstáculo, e assim sucessivamente até o n -ésimo obstáculo:

$$P^{(n)} = \sum_{i=1}^n P_i . \quad (66)$$

É importante ressaltar que essa aproximação só é válida no cenário com baixas probabilidades de colisão, como nesse estudo. Em casos com altas probabilidades de colisão, os termos que possuem produtos de probabilidades são consideráveis.

Vale lembrar que a expressão da probabilidade de colisão é

$$P_i = K_i e^{-\frac{1}{2}f_i(v)} , \quad (67)$$

com $f(v)$ dada por (58). Todo o formalismo utilizado na primeira seção do capítulo, para um obstáculo, serve para a expansão em questão. Dito isso, a condição expressa em (59) também pode ser reproduzida aqui:

$$P^{(n)} = K_1 e^{-\frac{1}{2}f_1(v)} + K_2 e^{-\frac{1}{2}f_2(v)} + \dots + K_n e^{-\frac{1}{2}f_n(v)} = \tau . \quad (68)$$

Existe uma dificuldade considerável em calcular as raízes de (68) devido à expressão de $f(v)$: uma divisão entre polinômios de segundo grau. Frente essa dificuldade, é proposto utilizar o método de Newton (ATKINSON, 1989) para fazer o cálculo numérico das raízes.

(a) Gráficos de $P^{(n)}$ utilizando as equações (65) e (66).

(b) Erro entre as equações (65) e (66): valor absoluto da diferença entre elas.

Figura 7: Comparação entre as duas alternativas de abordagem de colisão com ao menos um obstáculo, evidenciando que a equação (66) é uma boa aproximação da equação (65).

O método de Newton pode ser utilizado para calcular as raízes de uma função $f(x) = 0$ e é constituído por um processo iterativo onde este é repetido $m + 1$ vezes da seguinte maneira:

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}. \quad (69)$$

A função $f(x)$ em questão é $P^{(n)} - \tau = 1 - \tau - \prod_{i=1}^n (1 - P_i)$, com

$$P^{(n)'} = \sum_j \{P_j' \prod_{i \neq j} (1 - P_i)\}. \quad (70)$$

Dessa forma, o processo de Newton, (69), expresso em termos do problema em questão é:

$$v_{m+1} = v_m - \frac{P_{max}^{(n)}(v_m)}{P_{max}^{(n)'}(v_m)} = v_m - \frac{1 - \tau - \prod_i (1 - P_i(v_m))}{\sum_j \{P_j' \prod_{i \neq j} (1 - P_i)\}}. \quad (71)$$

4.2.2 Abordagem alternativa: probabilidades independentes

Ao invés de considerar a probabilidade de colisão com ao menos um obstáculo, cuja expressão depende de todas as probabilidades independentes juntas, utiliza-se o estudo individual de cada uma, como feito para um obstáculo. Em um ambiente onde o robô esteja detectando n obstáculos, a probabilidade de colisão em função da velocidade com cada um é P_i , cuja expressão é dada por (55).

Resolvendo-se o problema de minimização para encontrar a velocidade ótima de cada uma do mesmo modo que foi resolvido na primeira seção do capítulo, utilizando-se das condições de KKT e chegando na equação (27), tem-se as velocidades ótimas referentes a cada obstáculo i , v_i^* .

O próximo passo consiste em estudar a probabilidade de colisão com cada obstáculo com cada velocidade ótima calculada, $P_i(v_j^*)$ com $i \neq j$, para isso pode-se organizar os valores em uma matriz:

$$M_{col} = \begin{bmatrix} P_1(v_1^*) & P_2(v_1^*) & \cdots & P_n(v_1^*) \\ P_1(v_2^*) & P_2(v_2^*) & \cdots & P_n(v_2^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(v_n^*) & P_2(v_n^*) & \cdots & P_n(v_n^*) \end{bmatrix}. \quad (72)$$

Agora o problema se resume em buscar uma velocidade entre todas calculadas que seja a melhor a respeito de ter valores seguros para as probabilidades associadas. Uma solução aparentemente boa que pode vir ao primeiro pensamento é considerar a menor média entre todas as velocidades, $\min_{v_j^*} \{P_{med}^{(j)} = (\sum_{i=1}^n P_i(v_j^*)) / n\}$. Porém, pode ocorrer o seguinte problema: haver uma grande probabilidade de colisão com a velocidade cuja média é a menor entre todas. Para ilustrar melhor essa situação suponha que a velocidade v_k^* tenha a menor média entre as probabilidades, nada garante que não possa haver uma $P_m(v_k^*)$, probabilidade de colisão com o m -ésimo obstáculo na velocidade v_k^* , cujo valor seja suficientemente alto a ponto de aferir que não é seguro para o robô trafegar com tal velocidade. Contudo, esse problema pode ser facilmente contornado com uma condição restritiva: $\min_{v_j^*} \{P_{med}^{(j)} = (\sum_{i=1}^n P_i(v_j^*)) / n\}$ com $P_{med}^{(min)} < n\tau$, onde $P_i(v_i^*) = \tau$. Com essa restrição, o pior dos casos não poderá transcender a condição $\max_i \{P_i(v_k^*)\} < n\tau$, uma vez que essa hipótese acontece onde todos os valores são nulos exceto um, cujo valor é próximo a $n\tau$: $C_{P_i(v_k^*)} = \{0, \dots, 0, P_m(v_k^*) = n\tau - \epsilon, 0, \dots, 0\}$, com ϵ muito pequeno. Mesmo nessa situação, o valor $n\tau - \epsilon$ pode ser seguro se for fixado um baixo valor para τ .

Uma forma mais eficiente de tratar o problema é encontrar possíveis valores altos de $P_i(v_j^*)$ e descartá-los. Isso pode ser feito da seguinte maneira:

1. Identifica-se os valores máximos para cada velocidade ótima v_j^* , $P_i^{(max)}(v_j^*)$, que são os maiores valores de cada linha da matriz (72),

$$M_{col}^{(max)} = \begin{bmatrix} P_i^{(max)}(v_1^*) \\ P_j^{(max)}(v_2^*) \\ \vdots \\ P_k^{(max)}(v_n^*) \end{bmatrix}, \quad (73)$$

2. Toma-se o menor valor entre os máximos, i.e, o menor valor da matriz (73), cuja velocidade será considerada ótima para o problema. Portanto, a velocidade ótima é:

$$v^* = \arg \min_j \{\max_i \{P_i(v_j^*)\}\}. \quad (74)$$

Sumarizando os métodos desenvolvidos neste capítulo e fazendo um elo com o próximo, que descreve as simulações realizadas, a equação (64) será utilizada para encontrar as soluções acelerada e desacelerada da velocidade ótima para o problema de um obstáculo. Fazendo a expansão para n obstáculos, primeiramente estuda-se a abordagem de probabilidade conjunta, utilizando o método de Newton para encontrar as raízes da equação (68), i.e., (71). Após, é utilizado o método de probabilidades independentes, equação (74).

Capítulo 5

Simulações e Resultados

Este capítulo relata as simulações realizadas utilizando o método estudado. Seguindo, serão discutidos os resultados referentes aos testes, cujo ambiente de simulação foi desenvolvido em MATLAB. A Figura 8 é uma ilustração do ambiente de simulação, onde o círculo azul representa o robô e os obstáculos são representados pelos círculos vermelhos. A circunferência em torno do robô representa o alcance do sensor que será responsável pela detecção dos obstáculos.

Figura 8: Ambiente de simulação com 3 obstáculos.

5.1 Aplicação do método: evitar colisão com um obstáculo móvel

Começando as simulações com um obstáculo, assim como feito com o desenvolvimento do método, esteja o robô na posição $(x_0^{(r)}, y_0^{(r)}) = (10, 10)$ trafegando com velocidade

$v^{(r)} = 1$ m/s e orientação $\theta^{(r)} = 0$ e um obstáculo na posição $(x_0^{(o)}, y_0^{(o)}) = (20, 0)$ com velocidade $v^{(o)} = 1$ m/s e orientação $\theta^{(o)} = \pi/2$, i.e., estando estes em rota de colisão, Figura 9.

(a) Ambiente dinâmico com um potencial obstáculo no caminho do robô. (b) O obstáculo entra na área de alcance do sensor

Figura 9: robô e obstáculo trafegando em um ambiente.

Seja o raio de alcance do sensor do robô r_s (nas simulações foi utilizado $r_s = 5$ m), o obstáculo será detectado após um tempo t_1 na posição $(x_1^{(o)}, y_1^{(o)})$, Figura 9.b. Após a detecção, o robô calcula a probabilidade de colisão com o obstáculo em função do tempo através da equação (9), Figura 10. Contudo, observando a Figura 10, é notável que a probabilidade máxima de colisão possui um valor pequeno, 2.5%; e seria um grande erro se o robô achasse que, por ser um valor pequeno de probabilidade, não haverá colisão. Esse pequeno valor pode ser explicado por dois fatores: primeiramente, os objetos são considerados pontuais, i.e., seu formato não é considerado; e, além disso, quaisquer incertezas na posição e na orientação destes contribuem para a diminuição do valor máximo da probabilidade de colisão. A probabilidade de colisão em função do tempo possui a seguinte forma:

$$P(t) = Ke^{-\frac{1}{2}f(t)}, \quad (75)$$

com

$$f(t) = A't^2 + B't + F, \quad (76)$$

onde

$$A' = Av^2 + Bv + D, \quad (77a)$$

$$B' = Cv + E, \quad (77b)$$

devido à (46). Derivando (75) e igualando a zero,

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{1}{2}P(t)\frac{df}{dt} = 0, \quad (78)$$

tira-se o valor do tempo correspondente ao máximo da probabilidade:

$$t_{max} = -\frac{B'}{2A'} . \quad (79)$$

Portanto, o valor do pico da probabilidade de colisão em função do tempo é $P(t_{max})$. Observa-se que esse valor depende apenas dos parâmetros do sistema, vide (47), portanto, sendo este constante, convém denominá-lo de N . Conclusão: pode-se considerar que haverá colisão caso a probabilidade seja igual a N .

Quanto menor o valor do limiar τ , mais longe o robô há de passar do obstáculo, acelerando ou desacelerando mais. Um valor empírico para τ a fim de evitar as colisões em diversas situações é $0.1\%N$, i.e., verificou-se em diferentes situações que este valor faz com que o robô sempre evite colisões.

Figura 10: Probabilidade em função do tempo calculada pelo robô a respeito do obstáculo detectado na situação um.

A distância entre o robô e o obstáculo é $z = \sqrt{(x^{(r)} - x^{(o)})^2 + (y^{(r)} - y^{(o)})^2}$. Quando esta é igual ao raio de alcance do sensor, significa que o obstáculo está sendo detectado. A partir desse momento o robô calcula a velocidade ótima a fim de minimizar a probabilidade de colisão com o obstáculo a partir da equação (64). Nota-se que existem duas velocidades ótimas na solução (64), uma acelerada e a outra desacelerada. Ambas são eficientes para evitar as colisões.

O método desenvolvido para um obstáculo é aplicado na forma do algoritmo 1. O algoritmo 1 foi executado vinte vezes, e seu tempo médio de execução é de 0.029 segundo. Com esse resultado de tempo, seria possível recalculer a estimativa de velocidade a uma taxa aproximada de 34.5Hz. Alguns sensores fornecem uma nova leitura a frequências menores. Dessa forma, aplicando esse método seria possível adequar a velocidade do robô a cada nova leitura do sensor, assumindo que robô e obstáculo estão momentaneamente em trajetórias retilíneas.

Algoritmo 1 Algoritmo $n = 1$

```

if  $z \leq r_s$  then
   $r_o = (\mu_o, \Sigma_o) \mid r_r = (\mu_r, \Sigma_r)$ 
   $P(t, v) \longrightarrow P(v)$ 
   $v^* = \text{sol}\{P(v) = \tau\}$ 
   $v = v^*$ 
else  $v = v_0$ 
end if

```

5.2 Aplicação da generalização: evitar colisão com n obstáculos móveis

Para n obstáculos, foi simulado um ambiente onde os n obstáculos estão dentro da área de alcance do sensor, Figura 11.

(a) Ambiente dinâmico com dois potenciais obstáculos no caminho do robô.

(b) Os obstáculos entram na área de alcance do sensor

Figura 11: robô trafegando em um ambiente que contém dois potenciais obstáculos.

Primeiramente utilizando o método de probabilidade conjunta, equação (29), cuja solução foi aproximada pelo método de Newton, o resultado foi insatisfatório, isso porque seu tempo de execução é maior que o método de probabilidades independentes, por volta de 1.15 segundo para 10^5 iterações no caso de três obstáculos.

Por último, utilizando o método de probabilidades independentes, cujo algoritmo é o 3, foi obtido um resultado melhor que o anterior. Para todos os casos onde haveria uma colisão, a velocidade ótima encontrada para um limiar de $10^{-5}N$ foi suficiente para que o robô e os obstáculos não oferecessem perigo mútuo algum.

O algoritmo 3 foi executado vinte vezes para cada valor de n , e seus tempos médios de execução estão listados na tabela 2, junto com o tempo médio de execução do algoritmo 1. A partir da Figura 12, é possível observar a dependência linear do tempo de execução com o valor de n : $t(n) = 0.029n - 0.0016$.

É possível observar na Figura 12 que, mesmo para cinco obstáculos, o tempo de execução é pequeno. Contudo, pode-se pensar sobre o crescimento linear da dependência

Algoritmo 2 Algoritmo probabilidade conjunta para n obstáculos.

```

if  $z \leq r_s$  then
   $r_o^{(i)} = (\mu_o^{(i)}, \Sigma_o^{(i)}) \ i = 1, \dots, n \mid r_r = (\mu_r, \Sigma_r)$ 
   $P_{col}^{(n)} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_i)$ 
   $m = 10^5$ 
  for  $i=1$  to  $m$  do
     $v_{i+1} = v_i - \frac{P_{col}^{(n)}(v_i)}{P_{col}^{(n)'}(v_i)} = v_i - \frac{1-\tau - \prod_i (1-P_i(v_i))}{\sum_j \{P_j' \prod_{i \neq j} (1-P_i)\}}$ 

  end for  $v_m = v^*$ 
else  $v = v_0$ 
end if

```

Algoritmo 3 Algoritmo probabilidades independentes para n obstáculos

```

if  $z \leq r_s$  then
   $r_o^{(i)} = (\mu_o^{(i)}, \Sigma_o^{(i)}) \ i = 1, \dots, n \mid r_r = (\mu_r, \Sigma_r)$ 
   $P_i(t, v) \longrightarrow P_i(v)$ 
   $v_i^* = \text{sol}\{P_i(v) = \tau\}$ 
   $v^* = \arg \min \{\max_i \{P_i(v_i^*)\}\}$ 
   $v = v^*$ 
else  $v = v_0$ 
end if

```

Tabela 2: Tempo de execução dos algoritmos n obstáculos.

n	1	2	3	4	5
tempo (s)	0.029	0.056	0.087	0.114	0.147

do tempo com o número de obstáculos, e.g., caso o robô detecte trinta e cinco obstáculos, o tempo de execução chegará a um segundo. Essa seria um situação hipotética difícil de ocorrer uma vez que o sensor possui um alcance limitado. Portanto, a eficiência e a praticabilidade do algoritmo 3 são conclusivas.

Figura 12: Gráfico do tempo de execução dos algoritmos por n .

Capítulo 6

Conclusões

Este trabalho abordou o problema de haver obstáculos móveis na trajetória que o robô está executando para navegação autônoma. A partir de informações coletadas pelos sensores do robô, um modelo de incertezas é adicionado a fim de tratar ruídos presentes. A partir desse modelo, nesse trabalho foi utilizado um modelo gaussiano, é possível calcular a probabilidade de colisão entre o robô e o obstáculo em função do tempo e da velocidade do robô. Dessa forma, sabendo que é provável haver uma colisão na rota que o robô executa, torna-se conveniente variar sua velocidade a fim de evitar a colisão e o replanejamento da trajetória. Para isso utiliza-se métodos de otimização, nesse caso é tratado um problema de minimização com uma restrição de desigualdade que pôde ser resolvido através das condições de KKT.

O método desenvolvido para um obstáculo foi expandido para n obstáculos. Foram consideradas duas abordagens distintas: primeiramente considerou-se o caso de minimizar a probabilidade do robô colidir com ao menos um dos n obstáculos detectados pelos sensores; a sua abordagem considerou cada obstáculo individualmente, calculando a velocidade ótima para cada um e fazendo um estudo a respeito das probabilidades de colisão com cada velocidade calculada. A segunda abordagem tornou-se necessária frente à dificuldade de encontrar a solução da equação (68). Mesmo assim, o método de Newton foi proposto com o intuito de calcular numericamente a solução da equação. Contudo, o resultado obtido foi insatisfatório por dois motivos: tempo de execução e solução acelerada. Dito isso, a abordagem de probabilidades independentes se mostrou bem sucedida: tempo de execução muito pequeno e eficiência para evitar colisões.

6.1 Trabalhos Futuros

Em relação a futuras perspectivas sobre esse trabalho, considerar os formatos dos objetos é uma abordagem que daria uma característica mais realista para o problema, além de sanar algumas deficiências que apareceram durante o trabalho, e.g., o pico de probabilidade de colisão possuir um valor tão pequeno que foi preciso utilizar valores

bem menores a fim de evitar a colisão. Também é proposto aplicar e desenvolver o método para trajetórias mais complexas, e.g., que possuam acelerações e variações nas orientações dos objetos em estudo. Além disso, fazer simulações que incluam cenários e objetos reais dariam uma percepção mais realista ao trabalho. Por fim, experimentar os desenvolvimentos do trabalho em um robô real para concluir a aplicabilidade do método.

Sumarizando as perspectivas para os trabalhos futuros:

- ❑ Considerar os formatos dos objetos;
- ❑ Aplicar o método em trajetórias mais complexas;
- ❑ Utilizar um ambiente de simulação realista e aplicação do método em um robô real.

Referências

- ALTHOFF, M.; STURSBURG, O.; BUSS, M. Stochastic reachable sets of interacting traffic participants. **IEEE Intelligent Vehicles Symposium**, 2008. p. 1086–1092, 2008.
- ALTHOFF, M.; STURSBURG, O.; BUSS, M. Model-based probabilistic collision detection in autonomous driving. **IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems**, 2009. p. 299 – 310, 2009.
- ATKINSON, K. E. **An Introduction to Numerical Analysis**. : John Wiley, 1989.
- BERG, J. P. van den; NIEUWENHUISEN, D.; JAILLET, L.; OVERMARS, M. H. Creating robust roadmaps for motion planning in changing environments. **IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems**, 2005. p. 1053 – 1059, 2005.
- BERG, J. P. van den; OVERMARS, M. H. Using workspace information as a guide to non-uniform sampling in probabilistic roadmap planners. **IEEE International Conference on Robotics and Automation**, 2004. p. 453–460, 2004.
- BERG, J. P. van den; OVERMARS, M. H. Prioritized motion planning for multiple robots. **IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems**, 2005. p. 430 – 435, 2005.
- BERG, J. P. van den; OVERMARS, M. H. Roadmap-based motion planning in dynamic environments. **IEEE Transactions on robotics**, 2005. v. 22, p. 885–897, 2005.
- BERG, J. P. van den; OVERMARS, M. H. Kinodynamic motion planning on roadmaps in dynamic environments. **IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems**, 2007. p. 4253 – 4258, 2007.
- BERG, J. van den; WILKIE, D.; GUY, S.; NIETHAMMER, M.; MANOCHA, D. Lqg-obstacles: Feedback control with collision avoidance for mobile robots with motion and sensing uncertainty. **Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation**, 2012. p. 346–353, 2012.
- BERTSEKAS, D. P. **Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Method**. : Athena Scientific, 1982.
- BOYD, S.; VANDERBERGHE, L. **Convex Optimization**. : Cambridge University Press, 2004.
- BURLINA, P.; DEMENTHON, D.; DAVIS, L. Navigation with uncertainty: reaching a goal in a high collision risk regions. **IEEE International Conference on Robotics and Automation**, 1992. v. 3, p. 2440–2445, 1992.

- CHAKRAVARTHY, A.; GHOSE, D. Obstacle avoidance in a dynamic environment: A collision cone approach. **IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics - part A: Systems and humans**, 1998. p. 562–574, 1998.
- CHOSSET, H.; LYNCH, K. M.; HUTCHINSON, S.; KANTOR, G.; BURGARD, W.; KAVRAKI, L. E.; THRUN, S. **Principles of Robot Motion: Theory, Algorithms, and Implementations**. Boston: MIT Press, 2005.
- EIDEHALL, A.; PETERSSON, L. Statistical threat assessment for general road scenes using monte carlo sampling. **IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems**, 2008. v. 9, p. 137–147, 2008.
- FIORINI, P.; SHILLER, Z. Motion planning in dynamic environments using the relative velocity paradigm. **IEEE International Conference on Robotics and Automation**, 1993. p. 560–565, 1993.
- FIORINI, P.; SHILLER, Z. Motion planning in dynamic environments using velocity obstacles. **International Journal of Robotics Research**, 1998. v. 17, p. 760 – 772, 1998.
- FULGENZI, C.; SPALANZANI, A.; LAUGIER, C. Probabilistic motion planning among moving obstacles following typical motion patterns. **IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems**, 2009. p. 4027–4033, 2009.
- FULGENZI, C.; TAY, C.; SPALANZANI, A.; LAUGIER, C. Probabilistic navigation in dynamic environment using rapidly-exploring random trees and gaussian processes. **IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems**, 2008. p. 1056–1062, 2008.
- GERAERTS, R.; OVERMARS, M. H. A comparative study of probabilistic roadmap planners.
- HU, H.; BRADY, M.; PROBERT, P. Navigation and control of a mobile robot among moving obstacles. **Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control**, 1991. p. 698–703, 1991.
- HU, W.; XIAO, X.; FU, Z.; XIE, D.; TAN, T. A system for learning statistical motion patterns. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, 2006. v. 28, p. 1450 – 1463, 2006.
- JANSSON, J. Collision avoidance theory with application to automotive collision mitigation. **Department of Electrical Engineering - Linköping University - Sweden**, 2005. 2005.
- JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. : Pearson Prentice Hall, 2007.
- KRISHNA, K. M.; ALAMI, R.; SIMEON, T. Safe proactive plans and their executions. **Robotics and Autonomous Systems**, 2006. v. 54, p. 244–255, 2006.
- KRUSE, E.; GUTSCHE, R.; WAHL, F. M. Estimation of collision probabilities in dynamic environments for path planning with minimum collision probability. **IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems**, 1996. p. 1288 – 1295, 1996.

- KUWATA, Y.; KARAMAN, S.; TEO, J.; FRAZZOLI, E.; HOW, J. P.; FIORE, G. Real-time motion planning with applications to autonomous urban driving. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, 2009. v. 17, n. 5, p. 1105 –1118, 2009.
- LAMBERT, A.; GRUYER, D.; PIERRE, G. S. A fast monte carlo algorithm for collision probability estimation. **10th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV)**., 2008. p. 406–411, 2008.
- LAVALLE, S. M. Rapidly-exploring random trees: A new tool for path planing.
- LAVALLE, S. M.; KUFFNER, J. J. Randomized kinodynamic planning. **IEEE International Conference on Robotics and Automation**, 1999. v. 1, p. 473 – 479, 1999.
- NARAYANAN, V.; PHILLIPS, M.; LIKHACHEV, M. Anytime safe interval path planning for dynamic environments. **Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)**, 2012. p. 4708 –4715, 2012.
- NIEUWENHUISEN, D.; BERG, J. P. van den; OVERMARS, M. H. Efficient path planning in changing environments. **IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems**, 2007. p. 3295 – 3301, 2007.
- OWEN, E.; MONTANO, L. Motion planning in dynamic environments using the velocity space. **IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems**, 2005. p. 2833 – 2838, 2005.
- PATIL, S.; BERG, J. van den; ALTEROVITZ, R. Estimating probability of collision for safe motion planning under gaussian motion and sensing uncertainty. **IEEE International Conference on Robotics and Automation**, 2012. v. 3, p. 3238–3244, 2012.
- PETTI, S.; FRAICHARD, T. Safe motion planning in dynamic environments. **Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)**, 2005. p. 2210 – 2215, 2005.
- PETTI, S.; FRAICHARD, T. Safe motion planning in dynamic environments. **IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems**, 2005. p. 2210 – 2215, 2005.
- PIVTORAIKO, M.; KELLY, A. Generating near minimal spanning control sets for constrained motion planning in discrete state spaces. **Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)**., 2005. p. 3231 – 3237, 2005.
- REIF, J.; SHARIR, M. Motion planning in the presence of moving obstacles. **26th Annual Symposium on Foundations of Computer Science**, 1985. p. 144 – 154, 1985.
- RODRÍGUEZ, S. A.; FRÉMONT, V.; BONNIFAIT, P. Multi-modal object detection and localization for high integrity driving assistance.

RODRÍGUEZ, S. A.; FRÉMONT, V.; BONNIFAIT, P.; CHERFAOUI, V. An embedded multi-modal system for object localization and tracking. **IEEE Intelligent Vehicles Symposium**, 2010. p. 211 – 216, 2010.

SHILLER, Z.; LARGE, F.; SEKHAVAT, S. Motion planning in dynamic environments: Obstacles moving along arbitrary trajectories. **IEEE International Conference on Robotics and Automation**, 2001. p. 3716–3721, 2001.

SIEGWART, R.; NOURBAKHSH, I. R. **Introduction to Autonomous Mobile Robots**. : The MIT Press, 2004.

THRUN, S.; BURGARD, W.; FOX, D. **Probabilistic Robotics**. : The MIT Press, 2005.

Apêndices

APÊNDICE A

Distribuições Normais Multivariáveis

Em teoria de probabilidades, uma função densidade de probabilidade, PDF (do inglês, *probability density function*), é uma função que descreve a probabilidade relativa para que uma variável aleatória assuma um determinado valor. A probabilidade de uma variável aleatória assumir um valor dentro de uma particular faixa de valores é dada pela soma da densidade da variável sobre o intervalo em questão.

Seja um vetor de variáveis aleatórias de dimensão d

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_d \end{bmatrix}, \quad (80)$$

valor esperado $\mu_i = E[X_i]$ e covariância $\text{cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] = \Sigma_{ij}$. A matriz de covariância é dada por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} E[(X_1 - \mu_1)(X_1 - \mu_1)] & E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] & \cdots & E[(X_1 - \mu_1)(X_d - \mu_d)] \\ E[(X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1)] & E[(X_2 - \mu_2)(X_2 - \mu_2)] & \cdots & E[(X_2 - \mu_2)(X_d - \mu_d)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(X_d - \mu_d)(X_1 - \mu_1)] & E[(X_d - \mu_d)(X_2 - \mu_2)] & \cdots & E[(X_d - \mu_d)(X_d - \mu_d)] \end{bmatrix}. \quad (81)$$

Proposição A.1. *Seja Σ a matriz de covariância de um vetor aleatório X , Σ é simétrica e semidefinida positiva.*

Demonstração. Para qualquer vetor $X \in \mathbb{R}^d$ tem-se

$$X^T \Sigma X = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \Sigma_{ij} X_i X_j \quad (82a)$$

$$= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \text{cov}[X_i, X_j] X_i X_j \quad (82b)$$

$$= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])] X_i X_j \quad (82c)$$

$$= E \left[\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j]) X_i X_j \right]. \quad (82d)$$

Observa-se que a expressão entre parênteses na última equação é da forma $\sum_i \sum_j Z_i Z_j X_i X_j = U^2 \geq 0$. Sendo assim, a expressão dentro da média é sempre não-negativa, sendo possível concluir que $X^T \Sigma X \geq 0$, que é a definição de matriz semidefinida positiva. De acordo com a igualdade $E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] = E[(X_j - \mu_j)(X_i - \mu_i)]$, segue que Σ também é simétrica.

□

A PDF gaussiana, ou normal, associada ao vetor X , N_X , possui a seguinte expressão

$$\begin{aligned} N_X(\mu, \Sigma) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu) \right\} \\ &= |2\pi \Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu) \right\}. \end{aligned} \quad (83)$$

Figura 13: Amostras geradas aleatoriamente a partir de uma PDF de duas variáveis e seus histogramas.

A.1 Produto de duas distribuições

Sejam duas distribuições normais multivariáveis

$$N_X(\mu_a, \Sigma_a) = |2\pi\Sigma_a|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu_a)^T \Sigma_a^{-1} (X-\mu_a)} , \quad (84a)$$

$$N_X(\mu_b, \Sigma_b) = |2\pi\Sigma_b|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu_b)^T \Sigma_b^{-1} (X-\mu_b)} , \quad (84b)$$

e o produto entre elas

$$\begin{aligned} N_X(\mu_a, \Sigma_a) \cdot N_X(\mu_b, \Sigma_b) = \\ |2\pi\Sigma_a|^{-1/2} |2\pi\Sigma_b|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu_a)^T \Sigma_a^{-1} (X-\mu_a) - \frac{1}{2}(X-\mu_b)^T \Sigma_b^{-1} (X-\mu_b)} . \end{aligned} \quad (85)$$

Reescrevendo

$$\Sigma_a \Sigma_b = (\Sigma_a + \Sigma_b)(\Sigma_a^{-1} + \Sigma_b^{-1})^{-1} \quad (86)$$

e definindo

$$\Sigma_c \equiv (\Sigma_a^{-1} + \Sigma_b^{-1})^{-1} , \quad (87)$$

a equação (85) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} N_X(\mu_a, \Sigma_a) \cdot N_X(\mu_b, \Sigma_b) = \\ |2\pi(\Sigma_a + \Sigma_b)|^{-1/2} |2\pi\Sigma_c|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu_a)^T \Sigma_a^{-1} (X-\mu_a) - \frac{1}{2}(X-\mu_b)^T \Sigma_b^{-1} (X-\mu_b)} . \end{aligned} \quad (88)$$

Para não carregar termos desnecessariamente, a partir daqui o trabalho se dará apenas sobre o argumento da função exponencial. Abrindo os termos do argumento, tem-se

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(X-\mu_a)^T \Sigma_a^{-1} (X-\mu_a) - \frac{1}{2}(X-\mu_b)^T \Sigma_b^{-1} (X-\mu_b) = \\ & -\frac{1}{2}(X^T \Sigma_a^{-1} X - X^T \Sigma_a^{-1} \mu_a - \mu_a^T \Sigma_a^{-1} X + \mu_a^T \Sigma_a^{-1} \mu_a \\ & + X^T \Sigma_b^{-1} X - X^T \Sigma_b^{-1} \mu_b - \mu_b^T \Sigma_b^{-1} X + \mu_b^T \Sigma_b^{-1} \mu_b) . \end{aligned} \quad (89)$$

Deixando $-\frac{1}{2}$ de lado e separando termos com X e termos sem X , a equação (89) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & (\mu_a^T \Sigma_a^{-1} \mu_a + \mu_b^T \Sigma_b^{-1} \mu_b) \\ & + (X^T \Sigma_a^{-1} X - X^T \Sigma_a^{-1} \mu_a - \mu_a^T \Sigma_a^{-1} X + X^T \Sigma_b^{-1} X - X^T \Sigma_b^{-1} \mu_b - \mu_b^T \Sigma_b^{-1} X) . \end{aligned} \quad (90)$$

Reescrevendo os termos seguintes termos de uma maneira diferente:

$$\mu_a^T \Sigma_a^{-1} \mu_a = \mu_a^T \Sigma_a^{-1} \mu_a \Sigma_c \Sigma_c^{-1} = \mu_a^T \Sigma_a^{-1} \mu_a \Sigma_c (\Sigma_a^{-1} + \Sigma_b^{-1}) , \quad (91a)$$

$$\mu_b^T \Sigma_b^{-1} \mu_b = \mu_b^T \Sigma_b^{-1} \mu_b \Sigma_c \Sigma_c^{-1} = \mu_b^T \Sigma_b^{-1} \mu_b \Sigma_c (\Sigma_a^{-1} + \Sigma_b^{-1}) . \quad (91b)$$

Como as matrizes são simétricas, pode-se escrever:

$$\mu_a^T \Sigma_a^{-1} \mu_a = \mu_a^T \Sigma_a^{-1} \mu_a (\Sigma_c \Sigma_b^{-1} + \Sigma_c^T \Sigma_a^{-T}) = \mu_a^T \Sigma_a^{-1} \mu_a \Sigma_c \Sigma_b^{-1} + \mu_a^T \Sigma_a^{-1} \mu_a \Sigma_c^T \Sigma_a^{-T} , \quad (92a)$$

$$\mu_b^T \Sigma_b^{-1} \mu_b = \mu_b^T \Sigma_b^{-1} \mu_b (\Sigma_c^T \Sigma_b^{-T} + \Sigma_c \Sigma_a^{-1}) = \mu_b^T \Sigma_b^{-1} \mu_b \Sigma_c^T \Sigma_b^{-T} + \mu_b^T \Sigma_b^{-1} \mu_b \Sigma_c \Sigma_a^{-1} . \quad (92b)$$

E sabendo-se as igualdades:

$$0 = \Sigma_c^T \Sigma_a^{-T} \mu_a^T \Sigma_b^{-1} \mu_b - \Sigma_c \Sigma_a^{-1} \mu_a^T \Sigma_b^{-1} \mu_b , \quad (93a)$$

$$0 = \Sigma_c^T \Sigma_b^{-T} \mu_b^T \Sigma_a^{-1} \mu_a - \Sigma_c \Sigma_b^{-1} \mu_b^T \Sigma_a^{-1} \mu_a , \quad (93b)$$

a expressão

$$0 + 0 + \mu_a^T \Sigma_a^{-1} \mu_a + \mu_b^T \Sigma_b^{-1} \mu_b \quad (94)$$

pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \Sigma_c^T \Sigma_a^{-T} \mu_a^T \Sigma_b^{-1} \mu_b - \Sigma_c \Sigma_a^{-1} \mu_a^T \Sigma_b^{-1} \mu_b + \Sigma_c^T \Sigma_b^{-T} \mu_b^T \Sigma_a^{-1} \mu_a \\ & - \Sigma_c \Sigma_b^{-1} \mu_b^T \Sigma_a^{-1} \mu_a + \mu_b^T \Sigma_b^{-1} \mu_b \Sigma_c^T \Sigma_b^{-T} + \mu_b^T \Sigma_b^{-1} \mu_b \Sigma_c \Sigma_a^{-1} \\ & + \mu_a^T \Sigma_a^{-1} \mu_a \Sigma_c \Sigma_b^{-1} + \mu_a^T \Sigma_a^{-1} \mu_a \Sigma_c^T \Sigma_a^{-T} \end{aligned} \quad (95)$$

Evidenciando os termos $(\mu_a - \mu_b)$, a equação (95) pode ser reescrita no formato:

$$\begin{aligned} & (\mu_a - \mu_b)^T \Sigma_c \Sigma_a^{-1} \Sigma_b^{-1} (\mu_a - \mu_b) + \Sigma_c^T (\Sigma_a^{-1} \mu_a + \Sigma_b^{-1} \mu_b)^T (\Sigma_a^{-1} \mu_a + \Sigma_b^{-1} \mu_b) \\ & = (\mu_a - \mu_b)^T \Sigma_c \Sigma_a^{-1} \Sigma_b^{-1} (\mu_a - \mu_b) + \Sigma_c^T (\Sigma_a^{-1} \mu_a + \Sigma_b^{-1} \mu_b)^T \Sigma_c^{-1} \Sigma_c (\Sigma_a^{-1} \mu_a + \Sigma_b^{-1} \mu_b) \\ & = (\mu_a - \mu_b)^T \Sigma_c \Sigma_a^{-1} \Sigma_b^{-1} (\mu_a - \mu_b) + \Sigma_c^T (\Sigma_a^{-1} \mu_a + \Sigma_b^{-1} \mu_b)^T (\Sigma_a^{-1} \mu_a + \Sigma_b^{-1} \mu_b) . \end{aligned} \quad (96)$$

Definindo

$$\mu_c \equiv \Sigma_c (\Sigma_a^{-1} \mu_a + \Sigma_b^{-1} \mu_b) , \quad (97)$$

pode-se observar a igualdade:

$$\begin{aligned} & (\mu_a - \mu_b)^T \Sigma_c \Sigma_a^{-1} \Sigma_b^{-1} (\mu_a - \mu_b) + \Sigma_c^T (\Sigma_a^{-1} \mu_a + \Sigma_b^{-1} \mu_b)^T (\Sigma_a^{-1} \mu_a + \Sigma_b^{-1} \mu_b) \\ & = (\mu_a - \mu_b)^T (\Sigma_a + \Sigma_b)^{-1} (\mu_a - \mu_b) + \mu_c^T \Sigma_c^{-1} \mu_c . \end{aligned} \quad (98)$$

Portanto

$$\mu_a^T \Sigma_a^{-1} \mu_a + \mu_b^T \Sigma_b^{-1} \mu_b = (\mu_a - \mu_b)^T (\Sigma_a + \Sigma_b)^{-1} (\mu_a - \mu_b) + \mu_c^T \Sigma_c^{-1} \mu_c . \quad (99)$$

Voltando aos termos com X , tem-se:

$$\begin{aligned} & X^T \Sigma_a^{-1} X - X^T \Sigma_a^{-1} \mu_a - \mu_a^T \Sigma_a^{-1} X + X^T \Sigma_b^{-1} X - X^T \Sigma_b^{-1} \mu_b - \mu_b^T \Sigma_b^{-1} X \\ & = X^T \Sigma_a^{-1} X + X^T \Sigma_b^{-1} X - X^T \Sigma_a^{-1} \mu_a - X^T \Sigma_b^{-1} \mu_b - (\Sigma_a^{-T} \mu_a^T X + \Sigma_b^{-T} \mu_b^T X) \\ & = X^T (\Sigma_a^{-1} + \Sigma_b^{-1}) X - X^T \Sigma_c^{-1} \Sigma_c (\Sigma_a^{-1} \mu_a + \Sigma_b^{-1} \mu_b) - \Sigma_c^T (\Sigma_a^{-1} \mu_a + \Sigma_b^{-1} \mu_b)^T \Sigma_c^{-1} X \\ & = X^T \Sigma_c^{-1} X - X^T \Sigma_c^{-1} \mu_c - \mu_c^T \Sigma_c^{-1} X . \end{aligned} \quad (100)$$

Dessa forma, conclui-se as igualdades:

$$\begin{aligned} & X^T \Sigma_a^{-1} X - X^T \Sigma_a^{-1} \mu_a - \mu_a^T \Sigma_a^{-1} X + X^T \Sigma_b^{-1} X - X^T \Sigma_b^{-1} \mu_b - \mu_b^T \Sigma_b^{-1} X \\ & = X^T \Sigma_c^{-1} X - X^T \Sigma_c^{-1} \mu_c - \mu_c^T \Sigma_c^{-1} X , \end{aligned} \quad (101)$$

$$\begin{aligned}
& X^T \Sigma_a^{-1} X - X^T \Sigma_a^{-1} \mu_a - \mu_a^T \Sigma_a^{-1} X + X^T \Sigma_b^{-1} X - X^T \Sigma_b^{-1} \mu_b \\
& - \mu_b^T \Sigma_b^{-1} X + \mu_b^T \Sigma_a^{-1} \mu_a + \mu_b^T \Sigma_b^{-1} \mu_b \\
& = (X - \mu_a)^T \Sigma_a^{-1} (X - \mu_a) + (X - \mu_b)^T \Sigma_b^{-1} (X - \mu_b) \\
& = X^T \Sigma_c^{-1} X - X^T \Sigma_c^{-1} \mu_c - \mu_c^T \Sigma_c^{-1} X + (\mu_a - \mu_b)^T (\Sigma_a + \Sigma_b)^{-1} (\mu_a - \mu_b) + \mu_c^T \Sigma_c^{-1} \mu_c \\
& = (\mu_a - \mu_b)^T (\Sigma_a + \Sigma_b)^{-1} (\mu_a - \mu_b) + (X - \mu_c)^T \Sigma_c^{-1} (X - \mu_c) .
\end{aligned} \tag{102}$$

Após essa série algébrica, conclui-se a expressão para o produto das distribuições normais:

$$\begin{aligned}
& N_X(\mu_a, \Sigma_a) \cdot N_X(\mu_b, \Sigma_b) \\
& = |2\pi(\Sigma_a + \Sigma_b)|^{-1/2} |2\pi\Sigma_c|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(\mu_a - \mu_b)^T (\Sigma_a + \Sigma_b)^{-1} (\mu_a - \mu_b)} e^{-\frac{1}{2}(X - \mu_c)^T \Sigma_c^{-1} (X - \mu_c)} \\
& = |2\pi(\Sigma_a + \Sigma_b)|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(\mu_a - \mu_b)^T (\Sigma_a + \Sigma_b)^{-1} (\mu_a - \mu_b)} N_X(\mu_c, \Sigma_c) .
\end{aligned} \tag{103}$$

A.1.1 Integral do produto

Um ponto importante na abordagem do problema é a integral de um produto de duas distribuições gaussianas. Utilizando o resultado do produto de duas distribuições da seção anterior,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} N_X(\mu_a, \Sigma_a) \cdot N_X(\mu_b, \Sigma_b) \, dX = \\
& \int_{\mathbb{R}^d} |2\pi(\Sigma_a + \Sigma_b)|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(\mu_a - \mu_b)^T (\Sigma_a + \Sigma_b)^{-1} (\mu_a - \mu_b)} N_X(\mu_c, \Sigma_c) \, dX ,
\end{aligned} \tag{104}$$

e tendo em mente que

$$\int_{\mathbb{R}^d} N_X(\mu, \Sigma) \, dX = 1 , \tag{105}$$

pode-se chegar à expressão:

$$\int_{\mathbb{R}^d} N_X(\mu_a, \Sigma_a) \cdot N_X(\mu_b, \Sigma_b) \, dX = |2\pi(\Sigma_a + \Sigma_b)|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(\mu_a - \mu_b)^T (\Sigma_a + \Sigma_b)^{-1} (\mu_a - \mu_b)} . \tag{106}$$

APÊNDICE B

Matrizes de Covariância

B.1 Simetria

A partir da prova de simetria das matrizes de covariância no apêndice A, seguem as proposições:

Proposição B.1. *Seja Σ_r a matriz de covariância do robô simétrica, Σ_r^{-1} também é simétrica.*

Demonstração. Seja a relação entre Σ_r e sua inversa Σ_r^{-1} ,

$$\Sigma_r \Sigma_r^{-1} = \mathbb{I} , \quad (107)$$

sendo $\Sigma_r = \Sigma_r^T$, tem-se

$$\Sigma_r^T \Sigma_r^{-1} = \mathbb{I} . \quad (108)$$

Como

$$\Sigma_r^T (\Sigma_r^T)^{-1} = \mathbb{I} , \quad (109)$$

conclui-se que

$$\Sigma_r^{-1} = (\Sigma_r^T)^{-1} = (\Sigma_r^{-1})^T . \quad (110)$$

Portanto, sendo as matrizes de covariância do robô e do obstáculo, Σ_r e Σ_o , simétricas, Σ_r^{-1} e Σ_o^{-1} também são simétricas. □

Proposição B.2. *Sejam Σ_r e Σ_o simétricas, $\Sigma = \Sigma_r + \Sigma_o$ e Σ^{-1} também são simétricas.*

Demonstração.

$$\Sigma = \Sigma_r + \Sigma_o \quad (111a)$$

$$\Sigma = \Sigma_r^T + \Sigma_o^T = (\Sigma_r + \Sigma_o)^T = \Sigma^T \quad (111b)$$

Sendo $\Sigma = \Sigma_r + \Sigma_o$ simétrica, de acordo com a proposição B.1 Σ^{-1} também é simétrica. □

B.2 Valores Numéricos

Nesse trabalho foram utilizadas duas combinações de valores para as matrizes de covariância. O gráfico da Figura 4 foi gerado utilizando valores diferentes:

$$\Sigma_r = \begin{bmatrix} 1.1748 & -0.5966 & 0.3784 \\ -0.5966 & 0.8503 & -0.6850 \\ 0.3784 & -0.6850 & 0.8265 \end{bmatrix}, \Sigma_o = \begin{bmatrix} 0.1142 & 0.0528 & 0.2904 \\ 0.0528 & 0.2891 & 0.1681 \\ 0.2904 & 0.1681 & 1.3068 \end{bmatrix}. \quad (112)$$

Para o gráfico da Figura 7.a foram utilizados os seguintes valores para as matrizes de covariância:

$$\Sigma_r = \Sigma_o = \begin{bmatrix} 0.1142 & 0.0528 & 0.2904 \\ 0.0528 & 0.2891 & 0.1681 \\ 0.2904 & 0.1681 & 1.3068 \end{bmatrix} \quad (113)$$

Pode-se observar que a mudança nos valores das matrizes de covariância reflete em diferentes valores para a probabilidade de colisão, mas essa mudança não afeta as análises uma vez que foram utilizados valores proporcionais aos valores máximos de cada função probabilidade de colisão.