Gildson Queiroz de Jesus

Filtragem Robusta Recursiva para Sistemas Lineares a Tempo Discreto com Parâmetros Sujeitos a Saltos Markovianos[1]

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências, Programa de Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Sistemas Dinâmicos
Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra
Co-orientador: Prof. Dr. João Yoshiyuki Ishihara

São Carlos
2011

[1] **Trata-se da versão corrigida da tese. A versão original se encontra disponível na EESC/USP que aloja o Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica.**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

J58f

Jesus, Gildson Queiroz de.
Filtragem robusta recursiva para sistemas lineares a tempo discreto com parâmetros sujeitos a saltos Markovianos / Gildson Queiroz de Jesus ; orientador Marco Henrique Terra. -- São Carlos, 2011.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas Dinâmicos) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2011.

1. Sistemas lineares. 2. Estimativa robusta. 3. Filtros discretos no tempo. 4. Saltos Markovianos. 5. Filtragem H_∞. Algoritmos *array*. Filtros de informação. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Bacharel **GILDSON QUEIROZ DE JESUS**

Título da tese: **Filtragem robusta recursiva para sistemas lineares a tempo discreto com parâmetros sujeitos a saltos markovianos.**

Data da defesa: 26/08/2011:

Comissão Julgadora:	**Resultado:**
Prof. Associado **Marco Henrique Terra (Orientador)** (Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)	Aprovado
Dr. **Marcos Garcia Todorov** (Laboratório Nacional de Computação Científica/LNCC)	Aprovado
Profª. Associada **Mariane Rembold Petraglia** (Universidade Federal do Rio de Janeiro/UFRJ)	Aprovado
Prof. Dr. **João Yoshiyuki Ishihara** (Universidade de Brasília/UNB)	APROVADO
Prof. Associado **Paulo Sergio Pereira da Silva** (Escola Politécnica/USP)	APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica:
Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Paulo Cesar Lima Segantine**

A Idelberto e Jocélia, meus pais, com amor, admiração e gratidão pela compreensão, carinho, presença e incansável apoio ao longo do período de elaboração deste trabalho.

A Deus, que me concedeu graça, força e capacidade na execução deste trabalho. A Ele toda honra e glória eternamente.

A Idelberto, Jocélia, Ainá e Raquel, minha família, pelo carinho e constante apoio nesta jornada.

Ao Prof. Dr. Marco Henrique Terra, que, nos anos de convivência, muito me ensinou, contribuindo para meu crescimento científico e intelectual.

Ao Prof. Dr. João Y. Ishihara, pela atenção e apoio durante o processo deste trabalho.

Ao pessoal do Laboratório de Sistemas Inteligentes (LASI) pela amizade e companherísmo cotidiano.

À Escola de Engenharia de São Carlos, pela oportunidade de realização do curso de doutorado.

Epígrafe

“ ...Seja bendito o nome de Deus de eternidade a eternidade, porque dele são a sabedoria e a força; E ele muda os tempos e as estações; ele remove os reis e estabelece os reis; ele dá sabedoria aos sábios e conhecimento aos entendidos.”

Dan. 2:20,21

Resumo

Jesus, G. Q. Filtragem Robusta Recursiva para Sistemas Lineares a Tempo Discreto com Parâmetros Sujeitos a Saltos Markovianos. 2011. 134 f . Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

Este trabalho trata de filtragem robusta para sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos discretos no tempo. Serão desenvolvidas estimativas preditoras e filtradas baseadas em algoritmos recursivos que são úteis para aplicações em tempo real. Serão desenvolvidas duas classes de filtros robustos, uma baseada em uma estratégia do tipo $\mathcal{H}_\infty$ e a outra baseada no método dos mínimos quadrados regularizados robustos. Além disso, serão desenvolvidos filtros na forma de informação e seus respectivos algoritmos array para estimar esse tipo de sistema. Neste trabalho assume-se que os parâmetros de saltos do sistema Markoviano não são acessíveis.

Palavras–Chave: *Sistemas lineares, estimativa robusta, filtros discretos no tempo, saltos Markovianos, filtragem $\mathcal{H}_\infty$, algoritmos array, filtros de informação.*

Abstract

Jesus, G. Q. Recursive Robust Filtering for Discrete-time Markovian Jump Linear Systems. 2011. 134 f. Thesis (Doctoral) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

This work deals with the problem of robust state estimation for discrete-time uncertain linear systems subject to Markovian jumps. Predicted and filtered estimates are developed based on recursive algorithms which are useful in on-line applications. We develop two classes of filters, the first one is based on a $\mathcal{H}_\infty$ approach and the second one is based on a robust regularized least-square method. Moreover, we develop information filter and their respective array algorithms to estimate this kind of system. We assume that the jump parameters of the Markovian system are not acessible.

Keywords: *Linear systems, robust estimation, discrete-time filters, Markovian systems, $\mathcal{H}_\infty$ filtering, array algorithms, information filter.*

Lista de Figuras

3.1 Raiz quadrada do erro médio quadrático dos filtros $\mathcal{H}_\infty$ baseados em equações de Riccati recursivas e desigualdades matriciais lineares. 40

4.1 Máximo Valor Singular de Z_i^U versus α_i. 49

4.2 Filtro preditor nominal e filtro preditor robusto para SLSM. 58

4.3 Comparação entre o Filtro de [8] e o Filtro Preditor Robusto Recursivo. 59

5.1 Raiz do erro médio quadrático (rms) dos filtros preditores, nominal e robusto, na forma de informação. 70

6.1 Valores singulares de $\tilde{Z}_{i|i-1}$ para implementações via equação de Riccati e algoritmos *array*, nas configurações de ponto fixo e ponto flutuante. 88

7.1 Valores singulares mínimo e máximo de $\tilde{Z}_{i|i-1}$ calculados através de arquiteturas de ponto fixo e ponto flutuante. 104

7.2 Posto e os valores singulares mínimo ($\sigma_m(.)$) e máximo ($\sigma_M(.)$) de M_i. 105

7.3 Raiz do erro médio quadrático (rms) do filtro LMSEE calculado através do algoritmo *array* raiz quadrada da Tabela (6.1) e do algoritmo *array* rápido da Tabela (7.1). 105

Lista de Tabelas

2.1 Estimativa Nominal Preditora para o SLSM (2.17) 22

2.2 Estimativa Nominal Filtrada para o SLSM (2.17) 23

3.1 Estimativa $\mathcal{H}_\infty$ Preditora para o SLSM (3.4) 36

3.2 Estimativa $\mathcal{H}_\infty$ Filtrada para o SLSM (3.4) 39

4.1 Estimativa Robusta Preditora para o SLSM (4.14) 54

4.2 Estimativa Robusta Filtrada para o SLSM (4.14) 57

5.1 Estimativa Nominal Preditora na Forma de Informação 63

5.2 Estimativa $\mathcal{H}_\infty$ Preditora na Forma de Informação 65

5.3 Estimativa $\mathcal{H}_\infty$ Filtrada na Forma de Informação 66

5.4 Estimativa Robusta Preditora na Forma de Informação 67

5.5 Estimativa Robusta Filtrada na Forma de Informação 69

6.1 Algoritmo Array Raiz Quadrada para a Estimativa Nominal Preditora 77

6.2 Algoritmo Array Raiz Quadrada para a Estimativa Nominal Preditora na Forma de Informação 78

6.3 Algoritmo Array Raiz Quadrada para a Estimativa $\mathcal{H}_\infty$ Preditora na Forma de Informação 81

6.4 Algoritmo Array Raiz Quadrada para a Estimativa $\mathcal{H}_\infty$ Filtrada na Forma de Informação 82

6.5 Algoritmo Array Raiz Quadrada para a Estimativa Robusta Preditora na Forma de Informação 85

6.6 Algoritmo Array Raiz Quadrada para a Estimativa Robusta Filtrada na Forma de Informação 86

7.1 Algoritmo Array Rápido para a Estimativa Nominal Preditora 95

7.2 Algoritmo Array Rápido para a Estimativa $\mathcal{H}_\infty$ Preditora na Forma de Informação 98

7.3 Algoritmo Array Rapido $\mathcal{H}_\infty$ para Filtros na Forma de Informação 99

7.4 Algoritmo Array Rápido para a Estimativa Robusta Preditora na Forma de Informação 101

7.5 Algoritmo Array Rápido para a Estimativa Robusta Filtrada 102

Sumário

1 Introdução **3**

1.1 Motivação 3

1.2 Organização do Texto 5

1.3 Artigo Publicado em Revista 6

1.4 Artigos Publicados em Conferência 7

2 Filtragem Nominal para SLSM **9**

2.1 Preliminares 9

2.2 Filtragem Nominal para SLSM: Abordagem Estocástica 15

2.3 Filtragem Nominal para SLSM: Abordagem Determinística 18

2.3.1 Estimativa Nominal Preditora 19

2.3.2 Estimativa Nominal Filtrada 23

3 Filtragem $\mathcal{H}_\infty$ para SLSM **25**

3.1 Preliminares 25

3.2 Estimativa $\mathcal{H}_\infty$ Preditora 29

3.3 Estimativa $\mathcal{H}_\infty$ Filtrada 37

3.4 Exemplo Numérico 39

4 Filtragem Robusta para SLSM **41**

4.1 Preliminares 41

4.2 Estimativa Robusta Preditora 51

4.3 Estimativa Robusta Filtrada 56

4.4 Exemplos Numéricos 58

5 Filtragem na Forma de Informação para SLSM **61**

5.1 Filtragem Nominal na Forma de Informação 61

5.2 Filtragem $\mathcal{H}_\infty$ na Forma de Informação 63

5.3 Filtragem Robusta na Forma de Informação 66

5.4 Exemplo Numérico 70

6 Algoritmos *Array* Raiz Quadrada para Filtragem de SLSM **73**

6.1 Algoritmos *Array* Raiz Quadrada para Filtragem Nominal 74

6.2 Algoritmos *Array* Raiz Quadrada para Filtragem $\mathcal{H}_\infty$ 79

6.3 Algoritmos *Array* Raiz Quadrada para Filtragem Robusta 83

6.4 Exemplo Numérico 87

7 Algoritmos *Array* Rápidos para Filtragem de SLSM **89**

7.1 Algoritmos *Array* Rápidos para Filtragem Nominal 90

7.2 Algoritmos *Array* Rápidos para Filtragem $\mathcal{H}_\infty$ 96

7.3 Algoritmos *Array* Rápido para Filtragem Robusta 100

7.4 Exemplo Numérico 103

8 Conclusão e Trabalhos Futuros **107**

Referências Bibliográficas **109**

A Resultados Auxiliares **113**

B Transformações Unitárias e J-Unitárias **115**

B.1 Transformações de Householder 115

B.2 Transformações de Givens 116

B.3 Rotações de Givens Hiperbólicas 117

B.4 Lemas Auxiliares 118

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Motivação

O problema de estimar estados de sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos (SLSM) tem sido tratado por diversos autores através de diferentes abordagens, veja por exemplo [1], [2], [3], [6], [9], [10], [30], [32]. Uma abordagem interessante para solucionar este problema é o estimador linear de erro mínimo médio quadrático (EMMQ) proposto em [9]. Uma das características interessantes desta abordagem é a sua boa adequação para implementações em tempo real.

Um fato bem conhecido na literatura, principalmente quando se trata dos filtros de Kalman para sistemas que não estão sujeitos a saltos Markovianos, é que se o SLSM a ser estimado estiver sujeito a incertezas paramétricas ou a erros de modelagem, o desempenho do filtro nominal pode se deteriorar consideravelmente.

Nos últimos anos vários estudos foram realizados com o objetivo de desenvolver filtros robustos para SLSM, veja por exemplo [8], [13], [21], [22], [23], [29], [31], [35], [36], [37], [38]. Em geral, essas soluções robustas têm sido apresentadas em termos de desigualdades matriciais lineares (DML). A despeito do excelente potencial desta abordagem, existem algumas limitações que podem ser superadas com estimativas recursivas principalmente quando se necessita fazer estimativas em tempo real. Dentre os métodos aplicados para a obtenção de estimadores robustos

que podem ser calculados recursivamente podemos citar o método $\mathcal{H}_\infty$ apresentado em [18] e o método dos mínimos quadrados regularizados com incertezas apresentado em [28].

O método $\mathcal{H}_\infty$ tem sido amplamente usado na literatura como uma alternativa para estimar estados de sistemas sujeitos a erros de modelagem ou sujeitos a distúrbios desconhecidos. Este procedimento de projeto garante estimadores com menor erro de estimativa sobre todos os possíves distúrbios. Ou seja, a técnica $\mathcal{H}_\infty$ resolve o seguinte problema:

$$\sup_{x_0,\{u_j\},\{v_j\}} \frac{\sum_{j=0}^{i} \tilde{s}_{j|j}^{*} \tilde{s}_{j|j}}{x_0^{*}\Pi_0^{-1}x_0 + \sum_{j=0}^{i} u_j^{*}u_j + \sum_{j=0}^{i} v_j^{*}v_j} < \gamma^2, \tag{1.1}$$

sendo $\{x_0, u_j, v_j\}$ distúrbios e $\tilde{s}_{j|j}$ o erro de estimação.

Outro método alternativo para tratar desta classe de problemas de filtragem é através do consagrado mínimos quadrados regularizados proposto em [26]. Essa estratégia resolve o seguinte problema de otimização:

$$\hat{x} = arg \min_{x} \max_{\|y\| \leq \phi(x)} J(x, y) \tag{1.2}$$

sendo

$$J(x, y) := x^T Q x + R(x, y), \tag{1.3}$$

$$R(x, y) := (Ax - b + Hy)^T W (Ax - b + Hy), \tag{1.4}$$

$x^T Q x$ o termo de regularização, A e H matrizes conhecidas de dimensões apropriadas, $Q > 0$ e $W \geq 0$ são matrizes Hermitianas, x é um vetor desconhecido, b é um vetor de medida conhecido e y denota um vetor de perturbação.

Esta tese tem como objetivo principal desenvolver filtros robustos para SLSM que podem ser calculados através de equações algébricas de Riccati. Serão deduzidas duas categorias de estimadores robustos recursivos, uma baseada no método $\mathcal{H}_\infty$ e a outra baseada no método dos mínimos quadrados regularizados com incertezas.

Uma das limitações das equações algébricas de Riccati é que, apesar das indiscutíveis e inúmeras vantagens numéricas apresentadas por elas, podem ocorrer erros numéricos que não garantem a propagação de soluções simétricas em cada passo da iteração. Esse tipo de erro pode resultar na instabilidade do filtro. Alternativas computacionais para tratar desse problema, tais como algoritmos *array* raiz quadrada e algoritmos *array* rápidos, têm sido propostas em várias

referências, veja por exemplo [11], [20], [19], [33], [24], [25].

Dentre as vantagens dos algoritmos *array* raiz quadrada podemos destacar que eles aumentam a eficiência e a estabilidade numérica devido ao uso de transformações ortogonais nos cálculos e reduzem a faixa dinâmica dos valores calculados em implementações por aritmética de ponto fixo.

Os algoritmos *array* rápidos, por sua vez, conservam as boas propriedades dos algoritmos *array* raiz quadrada, com a vantagem adicional de apresentarem um esforço computacional menor. Além disso, esses algoritmos assumem uma importante função no cálculo de filtros para SLSM em virtude das dimensões de suas matrizes de parâmetros. Na abordagem que estamos considerando nesta tese, elas crescem com o número dos estados Markovianos e com a cadeia de Markov.

Outro problema que ocorre em filtragem é quando se tem pouca ou nenhuma informação a respeito das condições iniciais do sistema. Filtros na forma de informação são alternativas computacionais utilizadas para solucionar este problema. Na forma de informação a covariância e o estado estimado são substituídos pela matriz de informação (inversa da covariância) e pelo vetor de informação (produto da inversa da covariância com o estado original) do sistema.

A recursividade é uma das vantagens destas abordagens se comparadas com os filtros robustos para SLSM existentes na literatura. É importante ressaltar neste capítulo introdutório que no desenvolvimento dos estimadores robustos desta tese assume-se que os parâmetros de salto da cadeia de Markov não são acessíveis.

1.2 Organização do Texto

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 2 : Este capítulo tem o objetivo de apresentar um filtro recursivo para SLSM sem incertezas paramétricas deduzido através de uma abordagem determinística e outra estocástica. Traçar esse paralelo entre essas abordagens será útil para a compreensão dos filtros robustos que serão apresentados nos próximos capítulos. Os argumentos determinísticos estão baseados no método dos mínimos quadrados regularizados. Os argumentos estocásticos estão baseados no filtro proposto em [9].

- Capítulo 3 : Seguindo os argumentos considerados em [9] e [18], serão desenvolvidos neste capítulo filtros $\mathcal{H}_\infty$ recursivos para SLSM baseados na teoria dos jogos. Uma característica

importante deste filtro é que são encontradas condições necessárias para se encontrar o parâmetro γ mínimo, típico deste tipo de filtro, que define o nível de atenuação dos ruídos do sistema nas variáveis a serem estimadas.

- Capítulo 4 : Baseado em [9] e [27], neste capítulo serão desenvolvidos filtros robustos recursivos para SLSM. Os filtros robustos foram projetados utilizando o método dos mínimos quadrados regularizados com incertezas, onde são minimizados os erros das estimativas dos estados Markovianos em um funcional que leva em consideração a influência máxima das incertezas paramétricas admissíveis.

- Capítulo 5 : Neste capítulo serão desenvolvidas as versões na forma de informação do filtro nominal de [9] e dos filtros robustos apresentados nos Capítulos 3 e 4. O principal objetivo aqui, e que também pode ser definido como filosofia desta tese, é mostrar que com alguma álgebra é possível utilizar as técnicas de filtragem recursiva desenvolvida para sistemas convencionais, que não estão sujeitos a saltos, em SLSM.

- Capítulo 6 : Este capítulo trata do desenvolvimento de algoritmos *array* raiz quadrada para os filtros na forma de informação apresentados no Capítulo 5. Algoritmos *array* raiz quadrada, propagam o fator raiz quadrada da matriz de covariância do erro de estimativa, o que pode evitar erros de arredondamento que podem ocorrer na propagação do cálculo da covariância.

- Capítulo 7 : Neste capítulo serão desenvolvidos algoritmos *array* rápidos para os filtros na forma de informação apresentados no Capítulo 5. Estes algoritmos produzem um esforço computacional menor se comparados com o algoritmo *array* raiz quadrada.

1.3 Artigo Publicado em Revista

- Terra, M. H.; Ishihara, J. Y. e Jesus, G. "Information Filtering and Array Algorithms for Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems". IEEE Transactions Automatic Control, vol. 54(1), January 2009.

- Terra, M. H.; Ishihara, J. Y.; Jesus, G. "Fast Array Algorithm for Filtering of Markovian Jump Linear Systems". International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2011.

1.4 Artigos Publicados em Conferência

- Terra, M. H.; Ishihara, J. Y. e Jesus, G. "Algoritmo Array Rápido para Filtragem de Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos". XVII Congresso Brasileiro de Automática, 2008, Juiz de Fora - MG, Brasil. Anais do XVII Congresso Brasileiro de Automática, 2008.

- Terra, M. H.; Ishihara, J. Y. e Jesus, G. "Robust estimates for discrete-time Markovian jump linear systems". 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2009), December 16-18, 2009, Shangai, China.

- Jesus, G.; Ishihara, J. Y. and Terra, M. H. "Information filtering and array algorithms for discrete-time Markovian jump linear systems subject to parameter uncertainties". American Control Conference (ACC 2010), June 30-July 02 , 2010, Baltimore, MD.

- Jesus, G.; Terra, M. H. and Ishihara, J. Y. "$\mathcal{H}_\infty$ estimates for discrete-time Markovian jump linear systems". American Control Conference (ACC 2010), June 30-July 02 , 2010, Baltimore, MD.

- Jesus, G.; Terra, M. H. and Ishihara, J. Y. "Algoritmos para filtragem $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos". Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2010), $12 - 16$ Setembro, 2010, Bonito, MS.

CAPÍTULO 2

Filtragem Nominal para SLSM

Este capítulo trata da filtragem de SLSM sem incertezas paramétricas. Serão apresentadas duas abordagens equivalentes de projeto, uma baseada em argumentos determinísticos utilizando o métodos dos mínimos quadrados regularizados, e a outra baseada no estimador linear de erro médio quadrático mínimo (EMMQ) desenvolvido em [9] baseado em argumentos estocáticos. Argumentos determinísticos serão úteis para o desenvolvimento desta tese.

2.1 Preliminares

Sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos representam uma classe de sistemas dinâmicos cujos modelos podem sofrer mudanças abruptas em seus parâmetros. Tais mudanças são modeladas por uma cadeia de Markov finita $\Theta_i \in \{1, ..., N\}$. Ou seja, para cada modo da cadeia existe um conjunto de parâmetros que compõe o modelo em um determinado instante de tempo i. Falhas em interconexões e/ou componentes, e variáveis que mudam de maneira abrupta estão entre os fenômenos que caracterizam esta classe de sistemas. Aplicações de SLSM podem ser encontradas, por exemplo, em sistemas de manipuladores robóticos, sistemas de controle de aeronaves e grandes estruturas flexíveis para estações espaciais.

Considere o seguinte sistema linear sujeito a saltos Markovianos sobre o espaço de probabil-

idade $\big(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P}\big)$:

$$x_{i+1} = F_{i,\Theta_i} x_i + G_{i,\Theta_i} u_i, \quad i = 0, 1... \tag{2.1}$$

$$y_i = H_{i,\Theta_i} x_i + D_{i,\Theta_i} w_i, \tag{2.2}$$

sendo $x_i \in \mathbb{R}^n$ a sequência de estado, $y_i \in \mathbb{R}^m$ a sequência de saída, $u_i \in \mathbb{R}^{q_1}$, $w_i \in \mathbb{R}^{q_2}$ distúrbios aleatórios independentes com média zero e covariâncias U_i e W_i respectivamente, Θ_i é uma cadeia de Markov discreta no tempo com espaço de estado finito $\big\{1, ..., N\big\}$ e matriz de probabilidade de transição $P = [p_{jk}]$, sendo $p_{jk} = \mathcal{P}\big(\Theta_{i+1} = k | \Theta_i = j\big)$; $\pi_{i,j} := \mathcal{P}\big(\Theta_i = j\big)$ é a distribuição de probabilidade da cadeia de Markov; $F_{i,k} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G_{i,k} \in \mathbb{R}^{n\times q_1}$, $H_{i,k} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $D_{i,k} \in \mathbb{R}^{m\times q_2}$ são matrizes de parâmetros variantes no tempo; x_0 e $\{\Theta_i\}$ são independentes de u_i e w_i.

Baseado em [9], as estimativas que serão desenvolvidas neste capítulo consideram o seguinte estado aumentado:

$$z_i = \begin{bmatrix} z_{i,1} \\ \vdots \\ z_{i,N} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Nn}, \tag{2.3}$$

$$z_{i,k} = x_i 1_{\{\Theta_i = k\}} \in \mathbb{R}^n, \tag{2.4}$$

sendo que $1_{\{.\}}$ representa a medida de Dirac.

Um dos objetivos aqui, com esse reordenamento da sequência de estado Markoviano, é fazer com que o Sistema (2.1) seja redefinido para independer da cadeia de Markov. Nesse sentido, pode-se reescrever (2.1), baseado em z_i, da seguinte forma:

$$z_{i+1,k} = 1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} \begin{bmatrix} F_{i,1} & \dots & F_{i,N} \end{bmatrix} z_i + 1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} G_{i,\Theta_i} u_i. \tag{2.5}$$

Somando e subtraindo o termo $\begin{bmatrix} p_{1k}F_{i,1} & \dots & p_{Nk}F_{i,N} \end{bmatrix} z_i$ na Equação (2.5) tem-se:

$$\begin{aligned} z_{i+1,k} &= \begin{bmatrix} p_{1k}F_{i,1} & \dots & p_{Nk}F_{i,N} \end{bmatrix} z_i + \Big(1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} \begin{bmatrix} F_{i,1} & \dots & F_{i,N} \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} p_{1k}F_{i,1} & \dots & p_{Nk}F_{i,N} \end{bmatrix}\Big) z_i + 1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} G_{i,\Theta_i} u_i, \end{aligned} \tag{2.6}$$

que, por sua vez, pode ainda ser reescrita como

$$\begin{aligned} z_{i+1,k} &= \begin{bmatrix} p_{1k}F_{i,1} & \dots & p_{Nk}F_{i,N} \end{bmatrix} z_i \\ &+ \begin{bmatrix} \left(1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} - p_{1k}\right) F_{i,1} & \dots & \left(1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} - p_{Nk}\right) F_{i,N} \end{bmatrix} z_i \\ &+ 1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} G_{i,\Theta_i} u_i. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Com base nas seguintes definições:

$$\mathcal{M}_{i+1} := \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{i+1,1} \\ \vdots \\ \mathcal{M}_{i+1,N} \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

$$\mathcal{M}_{i+1,k} := \begin{bmatrix} \left(1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} - p_{1k}\right) F_{i,1} & \dots & \left(1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} - p_{Nk}\right) F_{i,N} \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

$$\vartheta_i := \begin{bmatrix} 1_{\{\Theta_{i+1}=1\}} G_{i,\Theta_i} u_i \\ \vdots \\ 1_{\{\Theta_{i+1}=N\}} G_{i,\Theta_i} u_i \end{bmatrix}, \mathcal{F}_i := \begin{bmatrix} p_{11}F_{i,1} & \cdots & p_{N1}F_{i,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N}F_{i,1} & \cdots & p_{NN}F_{i,N} \end{bmatrix}, \tag{2.10}$$

a Equação (2.7) pode ser reescrita como

$$z_{i+1} = \mathcal{F}_i z_i + \mathcal{M}_{i+1} z_i + \vartheta_i. \tag{2.11}$$

Tomando $\psi_i = \mathcal{M}_{i+1} z_i + \vartheta_i$, obtém-se:

$$z_{i+1} = \mathcal{F}_i z_i + \psi_i. \tag{2.12}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, a equação da medida (2.2) pode ser escrita como

$$y_i = \begin{bmatrix} H_{i,1} & \dots & H_{i,N} \end{bmatrix} z_i + D_{i,\Theta_i} w_i. \tag{2.13}$$

Renomeando as variáveis

$$\mathcal{H}_i := \begin{bmatrix} H_{i,1} & \dots & H_{i,N} \end{bmatrix}, \tag{2.14}$$

$$\varphi_i := D_{i,\Theta_i} w_i, \tag{2.15}$$

segue que a Equação (2.2) pode ser reescrita como

$$y_i = \mathcal{H}_i z_i + \varphi_i. \tag{2.16}$$

Assim, o sistema aumentado em termos de z_i é dado por

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= \mathcal{F}_i z_i + \psi_i \\ y_i &= \mathcal{H}_i z_i + \varphi_i. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Das hipóteses sobre os distúrbios u_i e v_i, as seguintes propriedades para o sistema aumentado (2.17) são válidas

- $\mathbb{E}\{\psi_i\} = \mathbb{E}\{\varphi_i\} = 0,$
- $\mathbb{E}\{z_i \psi_i^T\} = \mathbb{E}\{z_i \varphi_i^T\} = \mathbb{E}\{\psi_i \varphi_i^T\} = 0.$

Considere as seguintes definições das variáveis de segundo momento para $i \geq 0$ e $k \in \{1, ..., N\}$,

$$\begin{aligned} Z_{i,k} &:= \mathbb{E}\left\{z_{i,k} z_{i,k}^T\right\} \in \mathbb{R}^{nxn}, \\ Z_i &:= \mathbb{E}\left\{z_i z_i^T\right\} = diag\left[Z_{i,k}\right] \in \mathbb{R}^{NnxNn}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

sendo que $Z_{i,k}$ é dado pela seguinte equação recursiva

$$\begin{aligned} Z_{i+1,k} &:= \sum_{j=1}^{N} p_{jk} F_{i,j} Z_{i,j} F_{i,j}^T + \sum_{j=1}^{N} p_{jk} \pi_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T, \\ Z_{0,k} &:= V_k. \end{aligned} \tag{2.19}$$

As variâncias dos distúbios aleatórios ψ_i e φ_i serão calculadas na sequência. A variância de ψ_i pode ser calculada da seguinte forma:

$$\Pi_i := \mathbb{E}\Big\{\big(\psi_i - \mathbb{E}\{\psi_i\}\big)\big(\psi_i - \mathbb{E}\{\psi_i\}\big)^T\Big\}. \tag{2.20}$$

Como $\mathbb{E}\{\psi_i\} = 0$, a Equação (2.20) fica sendo

$$\Pi_i = \mathbb{E}\Big\{\big(\mathcal{M}_{i+1}z_i + \vartheta_i\big)\big(\mathcal{M}_{i+1}z_i + \vartheta_i\big)^T\Big\}, \tag{2.21}$$

então, (2.21) pode ser reescrito como

$$\Pi_i = \mathbb{E}\Big\{\big(\mathcal{M}_{i+1}z_i\big)\big(\mathcal{M}_{i+1}z_i\big)^T\Big\} + \mathbb{E}\Big\{\vartheta_i\vartheta_i^T\Big\}. \tag{2.22}$$

Considerando o primeiro termo de (2.22), note que

$$\mathcal{M}_{i+1}z_iz_i^T\mathcal{M}_{i+1}^T = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{i+1,1}z_i \\ \vdots \\ \mathcal{M}_{i+1,N}z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i^T\mathcal{M}_{i+1,1}^T & \cdots & z_i^T\mathcal{M}_{i+1,N}^T \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

Para $k, l \in \{1, ..., N\}$, (2.23) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathcal{M}_{i+1,k}z_iz_i^T\mathcal{M}_{i+1,l}^T = \sum_{t=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\big(1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} - p_{tk}\big)F_{i,t}z_{i,t}z_{i,s}^TF_{i,s}^T\big(1_{\{\Theta_{i+1}=l\}} - p_{sl}\big)^T. \tag{2.24}$$

Observe que o produto $z_{i,t}z_{i,s}^T$ será diferente de zero quando $t = s$. Portanto depois de desenvolver esse produto, a expressão (2.24) se reduz a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i+1,k}z_iz_i^T\mathcal{M}_{i+1,l}^T &= \sum_{j=1}^{N}\Big[\big(1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} - p_{jk}\big)\big(1_{\{\Theta_{i+1}=l\}} - p_{jl}\big)F_{i,j}z_{i,j}z_{i,j}^TF_{i,j}^T\Big] \\ &= \sum_{j=1}^{N}\Big[\big(1_{\{\Theta_{i+1}=k\}}1_{\{\Theta_{i+1}=l\}} - 1_{\{\Theta_{i+1}=k\}}p_{jl} - p_{jk}1_{\{\Theta_{i+1}=l\}} + p_{jk}p_{jl}\big) \\ &\times \quad F_{i,j}z_{i,j}z_{i,j}^TF_{i,j}^T\Big]. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Usando a propriedade

$$\mathbb{E}\Big\{\mathcal{M}_{i+1,k}z_iz_i^T\mathcal{M}_{i+1,l}^T\Big\} = \mathbb{E}\Big\{\mathbb{E}\big\{\mathcal{M}_{i+1,k}z_iz_i^T\mathcal{M}_{i+1,l}^T|\mathfrak{F}_i\big\}\Big\}, \tag{2.26}$$

sendo $\mathfrak{F}_i$ o σ-campo gerado pelos vetores e variáveis aleatórias $\big\{x_t,\, y_t,\, \Theta_t;\, t = 0, ..., i\big\}$, em (2.25) pode-se caracterizar a relação entre k e l em dois momentos distintos:

- *Caso* 1*:* Considere $k \neq l$. Neste caso $1_{\{\Theta_{i+1}=k\}}1_{\{\Theta_{i+1}=l\}} = 0$ e $\mathbb{E}\big\{p_{jk}1_{\{\Theta_{i+1}=l\}}|\mathfrak{F}_i\big\} =$

$-p_{jk}p_{jl}$, então

$$\mathbb{E}\{\mathcal{M}_{i+1,k}z_iz_i^T\mathcal{M}_{i+1,l}^T|\mathfrak{F}_i\} = -\begin{bmatrix} p_{1k}F_{i,1} & \cdots & p_{Nk}F_{i,N}\end{bmatrix} z_iz_i^T \begin{bmatrix} F_{i,1}^T p_{1l} \\ \vdots \\ F_{i,N}^T p_{Nl}\end{bmatrix}. \tag{2.27}$$

- *Caso* 2*:* Considere $k = l$. Neste caso

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\mathcal{M}_{i+1,k}z_iz_i^T\mathcal{M}_{i+1,l}^T|\mathfrak{F}_i\} &= \begin{bmatrix} \sqrt{p_{1k}}F_{i,1} & \cdots & \sqrt{p_{Nk}}F_{i,N}\end{bmatrix} z_iz_i^T \begin{bmatrix} F_{i,1}^T\sqrt{p_{1k}} \\ \vdots \\ F_{i,N}^T\sqrt{p_{Nk}}\end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} p_{1k}F_{i,1} & \cdots & p_{Nk}F_{i,N}\end{bmatrix} z_iz_i^T \begin{bmatrix} F_{i,1}^T p_{1k} \\ \vdots \\ F_{i,N}^T p_{Nk}\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{2.28}$$

Combinando ambos os casos numa única expressão, encontra-se:

$$\mathbb{E}\Big\{\mathbb{E}\{\mathcal{M}_{i+1}z_iz_i^T\mathcal{M}_{i+1}^T|\mathfrak{F}_i\}\Big\} = diag\Big[\sum_{j=1}^{N} p_{jk}F_{i,j}Z_{i,j}F_{i,j}^T\Big] - \mathcal{F}_i diag\big[Z_{i,j}\big]\mathcal{F}_i^T, \tag{2.29}$$

sendo $\mathcal{F}_i = \begin{bmatrix} p_{1k}F_{i,1} & \cdots & p_{Nk}F_{i,N}\end{bmatrix}$, para $k = 1, ..., N$. Portanto,

$$\mathbb{E}\Big\{\big(\mathcal{M}_{i+1}z_i\big)\big(\mathcal{M}_{i+1}z_i\big)^T\Big\} = diag\Big[\sum_{j=1}^{N} p_{jk}F_{i,j}Z_{i,j}F_{i,j}^T\Big] - \mathcal{F}_iZ_i\mathcal{F}_i^T. \tag{2.30}$$

Considere agora o segundo termo de (2.22), usando a propriedade

$$\mathbb{E}\Big\{\vartheta_i\vartheta_i^T\Big\} = \mathbb{E}\Big\{\mathbb{E}\{\vartheta_i\vartheta_i^T|\mathfrak{F}_i\}\Big\} \tag{2.31}$$

e sabendo que $\mathbb{E}\{u_iu_i^T\} = U_i$, após alguma álgebra, tem-se que

$$\mathbb{E}\{\vartheta_i\vartheta_i^T\} = diag\Big[\sum_{j=1}^{N} p_{jk}\pi_{i,j}G_{i,j}U_iG_{i,j}^T\Big]. \tag{2.32}$$

Enfim, segue que a variância de ψ_i é dada por

$$\Pi_i := diag\Big[\sum_{j=1}^{N} p_{jk} F_{i,j} Z_{i,j} F_{i,j}^T\Big] - \mathcal{F}_i Z_i \mathcal{F}_i^T + diag\Big[\sum_{j=1}^{N} p_{jk} \pi_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T\Big] \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}. \quad (2.33)$$

A variância de φ_i pode ser calculada como segue

$$R_i := \mathbb{E}\Big\{\big(\varphi_i - \mathbb{E}\{\varphi_i\}\big)\big(\varphi_i - \mathbb{E}\{\varphi_i\}\big)^T\Big\}. \quad (2.34)$$

Como $\mathbb{E}\{\varphi_i\} = 0$, a Equação (2.34) pode ser reescrita como

$$R_i = \mathbb{E}\{D_{i,\Theta_i} w_i w_i^T D_{i,\Theta_i}^T\}, \quad (2.35)$$

e por hipótese $\mathbb{E}\{w_i w_i^T\} = W_i$, então

$$R_i := \mathcal{D}_i \mathcal{D}_i^T \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad (2.36)$$

sendo

$$\mathcal{D}_i := \Big[D_{i,1} \pi_{i,1}^{1/2} W_i^{1/2} \quad \dots \quad D_{i,N} \pi_{i,N}^{1/2} W_i^{1/2}\Big]. \quad (2.37)$$

Dentro dos objetivos deste capítulo, que podem ser resumidos em demonstrar através de duas abordagens distintas a dedução de um filtro recursivo para SLSM, reproduziremos na sequência o estimador linear desenvolvido em [9].

2.2 Filtragem Nominal para SLSM: Abordagem Estocástica

Considere as seguintes definições para $i \geq 0$ e $k \in \{1, ..., N\}$,

$$\begin{aligned} z_i &:= \begin{bmatrix} z_{i,1}^T \\ \vdots \\ z_{i,N}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Nn}, \\ z_{i,k} &:= x_i 1_{\{\Theta_i = k\}} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

e $\hat{z}_{i|i-1}$ é a projeção de z_i em $\mathcal{L}(y^{i-1})$ (subespaço linear dado por $y^{i-1} := \left(y_{i-1}^T ... y_0^T\right)^T$) com

$$\tilde{z}_{i|i-1} \quad := \quad z_i - \hat{z}_{i|i-1}.$$

Estas variáveis estão associadas com as seguintes matrizes de segundo momento

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{i|l} &:= \mathbb{E}\left\{\hat{z}_{i|l}\hat{z}_{i|l}^T\right\} \in \mathbb{R}^{NnxNn}, \quad l \leq i \\ \tilde{Z}_{i|l} &:= \mathbb{E}\left\{\tilde{z}_{i|l}\tilde{z}_{i|l}^T\right\} \in \mathbb{R}^{NnxNn}, \quad l \leq i \end{aligned}$$

e interagem com as seguintes matrizes aumentadas

$$\mathcal{F}_i := \begin{bmatrix} p_{11}F_{i,1} & \dots & p_{N1}F_{i,N} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ p_{1N}F_{i,1} & \dots & p_{NN}F_{i,N} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{NnxNn}, \tag{2.38}$$

$$\mathcal{H}_i := \begin{bmatrix} H_{i,1} & \dots & H_{i,N} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mxNn}, \tag{2.39}$$

$$\mathcal{D}_i := \begin{bmatrix} D_{i,1}\pi_{i,1}^{1/2} & \dots & D_{i,N}\pi_{i,N}^{1/2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mxNq_2}, \tag{2.40}$$

$$\pi_{i,k} := \mathcal{P}\left(\Theta_i = k\right), \tag{2.41}$$

sendo que $diag[Z_{i,k}]$ denota uma matriz formada por $Z_{i,k}$, $k = 1, \dots, N$ nas diagonais e zero nas outras posições. A estimativa $\hat{x}_{i|i}$ é considerada como

$$\hat{x}_{i|i} = \sum_{j=1}^{N} \hat{z}_{i,j|i}. \tag{2.42}$$

O cálculo de $\hat{z}_{i|i}$ é executado pelo seguinte algoritmo recursivo

$$\hat{z}_{i|i} = \hat{z}_{i|i-1} + \tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}_i^T\left(\mathcal{H}_i\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}_i^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}\left(y_i - \mathcal{H}_i\hat{z}_{i|i-1}\right), \tag{2.43}$$

$$\hat{z}_{i+1|i} = \mathcal{F}_i\hat{z}_{i|i}, \tag{2.44}$$

$$\hat{z}_{0|-1} = \mathbb{E}(z_0) = \begin{bmatrix} \mu_1^T & \dots & \mu_N^T \end{bmatrix}^T, \tag{2.45}$$

sendo que $\tilde{Z}_{i|i-1} \in \mathbb{R}^{NnxNn}$ são matrizes definidas positivas dadas por

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_{i+1|i} &= \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T + \mathcal{B}(Q_i) + diag\Big[\sum_{j=1}^{N} \pi_{i,j} p_{jk} G_{i,j} G_{i,j}^T\Big] - \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{H}_i^T \\
&\times \big(\mathcal{H}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{H}_i^T + \mathcal{D}_i \mathcal{D}_i^T\big)^{-1} \mathcal{H}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T, \qquad (2.46) \\
\mathcal{B}(Q_i) &= diag\Big[\sum_{j=1}^{N} p_{jk} F_{i,j} Z_{i,j} F_{i,j}^T\Big] - \mathcal{F}_i diag\big[Z_{i,k}\big] \mathcal{F}_i^T \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

sendo $Q_i = \big(Z_{i,1}, ..., Z_{i,N}\big)$, e $Z_{i,k} \geq 0, k = 1, ..., N$ dadas pela equação recursiva

$$\begin{aligned}
Z_{i+1,k} &= \sum_{j=1}^{N} p_{jk} F_{i,j} Z_{i,j} F_{i,j}^T + \sum_{j=1}^{N} p_{jk} \pi_{i,j} G_{i,j} G_{i,j}^T, \qquad (2.48) \\
Z_{0,k} &= V_k, \;\; k \in \{1, \ldots, N\}.
\end{aligned}$$

Em [9] foi estabelecida a convergência assintótica da equação de Riccati dada em (2.46), cujo resultado será apresentado na sequência. Assuma que todas as matrizes de parâmetros do modelo (2.1) e a probabilidade de transição p_{jk} são invariantes no tempo, considere também que o sistema é estável na média quadrática, e que a cadeia de Markov Θ_i é ergódica. Baseado nestas hipóteses tem-se que

$$\lim_{i \to \infty} \mathcal{P}\big(\Theta_i = k\big) = \lim_{i \to \infty} \pi_{i,k} = \pi_k \qquad (2.49)$$

e de [7] segue que $Q_i \to Q$ quando $i \to \infty$, sendo $Q = \big(Z_1, ..., Z_N\big)$, e

$$Z_k = \sum_{j=1}^{N} p_{jk} F_j Z_j F_j^T + \sum_{j=1}^{N} p_{jk} \pi_{i,j} G_j G_j^T, \quad k = 1, ..., N. \qquad (2.50)$$

O próximo teorema estabelece a convergência assintótica da equação de Riccati (2.46).

Teorema 2.2.1. *[9] Suponha que a cadeia de Markov Θ_i é ergódica e que o sistema (2.1) é estável na média quadrática (MSS, sigla em inglês). Considere a equação de Riccati dada por*

$$\tilde{Z} = \mathcal{F} \tilde{Z} \mathcal{F}^T + \mathcal{B}(Q) + diag\Big[\sum_{j=1}^{N} \pi_j p_{jk} G_j G_j^T\Big] - \mathcal{F} \tilde{Z} \mathcal{H}^T \big(\mathcal{H} \tilde{Z} \mathcal{H}^T + \mathcal{D} \mathcal{D}^T\big)^{-1} \mathcal{H} \tilde{Z} \mathcal{F}^T \qquad (2.51)$$

sendo $Q = \big(Z_1, ..., Z_N\big)$ e satisfaz (2.50). Então existe uma única solução semi-definida positiva $P \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$ para (2.51). Além disto, $r_\sigma\big(\mathcal{F} - T(P)\mathcal{H}\big) < 1$, sendo $T(P) := \mathcal{F} P \mathcal{H}^T \big(\mathcal{H} P \mathcal{H}^T + \mathcal{D} \mathcal{D}^T\big)^{-1}$

e $r_\sigma(.)$ *representa o raio espectral, e para qualquer* $Q_0 = \big(Z_{0,1}, ..., Z_{0,N}\big)$ *com* $Z_{0,k} \geq 0$, $k = 1, ..., N$, *e* $\tilde{Z}_{0|-1} = diag\big[Z_{0,k}\big] - \mathbb{E}\big\{z_0\big\}\mathbb{E}\big\{z_0\big\}^T \geq 0$, *tem-se então que* $\tilde{Z}_{i+1|i}$ *dado por (2.46) e (2.47) satisfaz*

$$\tilde{Z}_{i+1|i} \overset{i\to\infty}{\to} P. \tag{2.52}$$

Na próxima seção será mostrada uma maneira alternativa para deduzir o filtro mostrado nesta seção cuja álgebra se aproxima das álgebras utilizadas nos próximos capítulos para a dedução dos filtros robustos.

2.3 Filtragem Nominal para SLSM: Abordagem Determinística

O objetivo desta seção é deduzir as estimativas preditora e filtrada para SLSM baseado no sistema aumentado (2.17). Para tanto, define-se $\hat{z}_{i|i-1}$ como a variável de predição de z_i, $\tilde{Z}_{i|i-1}$ como a matriz de ponderação para o erro de predição $z_i - \hat{z}_{i|i-1}$, e a observação da medida é dada por y_i. Para atualizar a estimativa $\hat{z}_{i|i-1}$ para $\hat{z}_{i+1|i}$, é necessário resolver o seguinte problema de otimização:

$$\min_{z_i, z_{i+1}} \left[\big\|z_i - \hat{z}_{i|i-1}\big\|^2_{\tilde{Z}^{-1}_{i|i-1}} + \|z_{i+1} - \mathcal{F}_i z_i\|^2_{\Pi_i^{-1}} + \|y_i - \mathcal{H}_i z_i\|^2_{R_i^{-1}} \right]. \tag{2.53}$$

Define-se também $\hat{z}_{i|i}$ como a variável de filtragem de z_i, $\tilde{Z}_{i|i}$ como matriz de ponderação do erro de filtragem $z_i - \hat{z}_{i|i}$, e a medida de observação é dada por y_{i+1}. Neste caso, para atualizar a estimativa $\hat{z}_{i|i}$ para $\hat{z}_{i+1|i+1}$, será necessário resolver o seguinte problema de otimização:

$$\min_{z_i, z_{i+1}} \left[\big\|z_i - \hat{z}_{i|i}\big\|^2_{\tilde{Z}^{-1}_{i|i}} + \|z_{i+1} - \mathcal{F}_i z_i\|^2_{\Pi_i^{-1}} + \|y_{i+1} - \mathcal{H}_{i+1} z_{i+1}\|^2_{R_{i+1}^{-1}} \right]. \tag{2.54}$$

As matrizes de ponderação Π_i e R_i nos funcionais (2.53) e (2.54) são definidas como as variâncias dos distúbios aleatórios ψ_i e φ_i dados por

$$\Pi_i \;:=\; diag\Big[\sum_{j=1}^{N} p_{jk} F_{i,j} Z_{i,j} F_{i,j}^T\Big] - \mathcal{F}_i Z_i \mathcal{F}_i^T + diag\Big[\sum_{j=1}^{N} p_{jk} \pi_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T\Big], \tag{2.55}$$

$$R_i := \mathcal{D}_i \mathcal{D}_i^T, \tag{2.56}$$

sendo

$$\mathcal{D}_i := \begin{bmatrix} D_{i,1}\pi_{i,1}^{1/2}W_i^{1/2} & \dots & D_{i,N}\pi_{i,N}^{1/2}W_i^{1/2} \end{bmatrix}. \tag{2.57}$$

O próximo lema resolve os problemas de otimização (2.53) e (2.54) de forma determinística.

Lema 2.3.1. *[27] Considere o seguinte problema*

$$\min_x \Big[\|x\|_V^2 + \|Ax - b\|_W^2 \Big] \tag{2.58}$$

sendo A uma matriz conhecida, b um vetor de medida conhecido, x um vetor desconhecido, $V = V^T \geq 0$ e $W = W^T > 0$ são matrizes de ponderação assumidas conhecidas. A solução do problema de otimização (2.58) é dada por

$$\hat{x} = \Big[V + A^T W A \Big]^{-1} A^T W b \tag{2.59}$$

sendo $V, W \geq 0$, tais que $V + A^T W A$ é invertível.

2.3.1 Estimativa Nominal Preditora

Para deduzir a estimativa preditora do sistema (2.17), considere o funcional (2.53) reescrito na forma de blocos matriciais como

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_{i|i-1} - z_i \\ z_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_{i|i-1} - z_i \\ z_{i+1} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \mathcal{F}_i & I \\ \mathcal{H}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_{i|i-1} - z_i \\ z_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} \\ \mathcal{H}_i \hat{z}_{i|i-1} - y_i \end{bmatrix} \right)^T$$
$$\times \begin{bmatrix} \Pi_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_i^{-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{F}_i & I \\ \mathcal{H}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_{i|i-1} - z_i \\ z_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} \\ \mathcal{H}_i \hat{z}_{i|i-1} - y_i \end{bmatrix} \right). \tag{2.60}$$

Comparando os funcionais (2.60) e (2.58), obtêm-se as seguintes equivalências:

$$x \leftarrow \begin{bmatrix} \hat{z}_{i|i-1} - z_i \\ z_{i+1} \end{bmatrix}, b \leftarrow \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} \\ \mathcal{H}_i \hat{z}_{i|i-1} - y_i \end{bmatrix}, A \leftarrow \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i & I \\ \mathcal{H}_i & 0 \end{bmatrix},$$
$$V \leftarrow \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, W \leftarrow \begin{bmatrix} \Pi_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_i^{-1} \end{bmatrix}. \tag{2.61}$$

Portanto o problema de otimização (2.53) pode ser resolvido aplicando o Lema (2.3.1). Pode-se reescrever a Equação (2.59) usando as identificações (2.61). Procedendo desta forma, tem-se que

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\hat{z}_{i|i-1}-\hat{z}_{i|i}\\ \hat{z}_{i+1|i}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1}+\mathcal{F}_i^T\Pi_i^{-1}\mathcal{F}_i+\mathcal{H}_i^TR_i^{-1}\mathcal{H}_i & \mathcal{F}_i^T\Pi_i^{-1}\\ \Pi_i^{-1}\mathcal{F}_i & \Pi_i^{-1}\end{bmatrix}^{-1}\\ &\times \begin{bmatrix}\mathcal{F}_i^T\Pi_i^{-1}\mathcal{F}_i\hat{z}_{i|i-1}+\mathcal{H}_i^TR_i^{-1}\left(\mathcal{H}_i\hat{z}_{i|i-1}-y_i\right)\\ \Pi_i^{-1}\mathcal{F}_i\hat{z}_{i|i-1}\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{2.62}$$

Explicitando-se o termo $\hat{z}_{i+1|i}$, obtém-se:

$$\begin{aligned}\hat{z}_{i+1|i} &= \begin{bmatrix}0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1}+\mathcal{F}_i^T\Pi_i^{-1}\mathcal{F}_i+\mathcal{H}_i^TR_i^{-1}\mathcal{H}_i & \mathcal{F}_i^T\Pi_i^{-1}\\ \Pi_i^{-1}\mathcal{F}_i & \Pi_i^{-1}\end{bmatrix}^{-1}\\ &\times \begin{bmatrix}\mathcal{F}_i^T\Pi_i^{-1}\mathcal{F}_i\hat{z}_{i|i-1}+\mathcal{H}_i^TR_i^{-1}\left(\mathcal{H}_i\hat{z}_{i|i-1}-y_i\right)\\ \Pi_i^{-1}\mathcal{F}_i\hat{z}_{i|i-1}\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{2.63}$$

Aplicando o Lema da inversão de blocos matriciais (A.0.3), a Equação (2.63) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\hat{z}_{i+1|i} &= \begin{bmatrix}-\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & \left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}\end{bmatrix}\\ &\times \begin{bmatrix}\left(\mathcal{F}_i^T\Pi_i^{-1}\mathcal{F}_i+\mathcal{H}_i^TR_i^{-1}\mathcal{H}_i\right)\hat{z}_{i|i-1}-\mathcal{H}_i^TR_i^{-1}y_i\\ \Pi_i^{-1}\mathcal{F}_i\hat{z}_{i|i-1}.\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{2.64}$$

Segue que

$$\begin{aligned}\hat{z}_{i+1|i} &= \left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}\\ &\times \left(\Pi_i^{-1}\mathcal{F}_i\hat{z}_{i|i-1}-CA^{-1}\Big(\left(\mathcal{F}_i^T\Pi_i^{-1}\mathcal{F}_i+\mathcal{H}_i^TR_i^{-1}\mathcal{H}_i\right)\hat{z}_{i|i-1}-\mathcal{H}_i^TR_i^{-1}y_i\Big)\right).\end{aligned} \tag{2.65}$$

Definindo $\tilde{Z}_{i+1|i}=\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}$ tem-se que

$$\tilde{Z}_{i+1|i}=\left(\Pi_i^{-1}-\Pi_i^{-1}\mathcal{F}_i\left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1}+\mathcal{F}_i^T\Pi_i^{-1}\mathcal{F}_i+\mathcal{H}_i^TR_i^{-1}\mathcal{H}_i\right)^{-1}\mathcal{F}_i^T\Pi_i^{-1}\right)^{-1}. \tag{2.66}$$

Aplicando o Lema da inversão de matrizes (A.0.1) na Equação (2.66) obtém-se

$$\tilde{Z}_{i+1|i}=\Pi_i+\mathcal{F}_i\left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1}+\mathcal{H}_i^TR_i^{-1}\mathcal{H}_i\right)^{-1}\mathcal{F}_i^T. \tag{2.67}$$

Assim, pode-se reescrever a Equação (2.67) como

$$\tilde{Z}_{i+1|i} = \Pi_i + \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T - \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{H}_i^T \big(R_i + \mathcal{H}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{H}_i^T\big)^{-1} \mathcal{H}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T. \tag{2.68}$$

Voltando à expressão (2.65) do preditor, tem-se que

$$\begin{aligned} \hat{z}_{i+1|i} &= \tilde{Z}_{i+1|i} \Bigg(\Pi_i^{-1} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} - \Pi_i^{-1} \mathcal{F}_i \big(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{F}_i^T \Pi_i^{-1} \mathcal{F}_i + \mathcal{H}_i^T R_i^{-1} \mathcal{H}_i\big)^{-1} \\ &\times \Big(\big(\mathcal{F}_i^T \Pi_i^{-1} \mathcal{F}_i + \mathcal{H}_i^T R_i^{-1} \mathcal{H}_i\big) \hat{z}_{i|i-1} - \mathcal{H}_i^T R_i^{-1} y_i \Big) \Bigg) \end{aligned} \tag{2.69}$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \hat{z}_{i+1|i} &= \tilde{Z}_{i+1|i} \Big(\Pi_i^{-1} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} - \Pi_i^{-1} \mathcal{F}_i \big(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{F}_i^T \Pi_i^{-1} \mathcal{F}_i + \mathcal{H}_i^T R_i^{-1} \mathcal{H}_i\big)^{-1} \\ &\times \mathcal{F}_i^T \Pi_i^{-1} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} - \Pi_i^{-1} \mathcal{F}_i \big(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{F}_i^T \Pi_i^{-1} \mathcal{F}_i + \mathcal{H}_i^T R_i^{-1} \mathcal{H}_i\big)^{-1} \\ &\times \mathcal{H}_i^T R_i^{-1} \mathcal{H}_i \hat{z}_{i|i-1} + \Pi_i^{-1} \mathcal{F}_i \big(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{F}_i^T \Pi_i^{-1} \mathcal{F}_i + \mathcal{H}_i^T R_i^{-1} \mathcal{H}_i\big)^{-1} \\ &\times \mathcal{H}_i^T R_i^{-1} y_i \Big). \end{aligned} \tag{2.70}$$

Considere as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} &\tilde{Z}_{i+1|i} \Big(\Pi_i^{-1} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} - \Pi_i^{-1} \mathcal{F}_i \big(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{F}_i^T Q_i^{-1} \mathcal{F}_i + \mathcal{H}_i^T R_i^{-1} \mathcal{H}_i\big)^{-1} \mathcal{F}_i^T \Pi_i^{-1} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} \Big) \\ &= \tilde{Z}_{i+1|i} \Big(\Pi_i + \mathcal{F}_i \big(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}_i^T R_i^{-1} \mathcal{H}_i\big)^{-1} \mathcal{F}_i^T \Big)^{-1} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} \\ &= \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} \end{aligned} \tag{2.71}$$

e

$$\begin{aligned} &\tilde{Z}_{i+1|i} \Pi_i^{-1} \mathcal{F}_i \big(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{F}_i^T \Pi_i^{-1} \mathcal{F}_i + \mathcal{H}_i^T R_i^{-1} \mathcal{H}_i\big)^{-1} \\ &= \tilde{Z}_{i+1|i} \Big(\Pi_i + \mathcal{F}_i \big(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}_i^T R_i^{-1} \mathcal{H}_i\big) \mathcal{F}_i^T \Big)^{-1} \mathcal{F}_i \big(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}_i^T R_i^{-1} \mathcal{H}_i\big)^{-1} \\ &= \mathcal{F}_i \big(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}_i^T R_i^{-1} \mathcal{H}_i\big)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Então

$$\begin{aligned} \hat{z}_{i+1|i} &= \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} + \mathcal{F}_i \big(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}_i^T R_i^{-1} \mathcal{H}_i\big)^{-1} \mathcal{H}_i^T R_i^{-1} \big(y_i - \mathcal{H}_i \hat{z}_{i|i-1}\big) \\ \hat{z}_{i+1|i} &= \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} + \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{H}_i^T \big(R_i + \mathcal{H}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{H}_i^T\big)^{-1} \big(y_i - \mathcal{H}_i \hat{z}_{i|i-1}\big). \end{aligned} \tag{2.73}$$

O algoritmo da Tabela (2.1) apresenta os passos para calcular a estimativa nominal preditora.

Tabela 2.1: Estimativa Nominal Preditora para o SLSM (2.17)

Passo 0 : Considere as seguintes condições iniciais conhecidas:

$$\tilde{Z}_{0|-1} := P_0,$$
$$\hat{z}_{0|-1} := \overline{z}_0.$$

Passo 1: Atualize $\left\{\tilde{Z}_{i|i-1}, \hat{z}_{i|i-1}\right\}$ para $\left\{\tilde{Z}_{i+1|i}, \hat{z}_{i+1|i}\right\}$ da seguinte forma:

$$\tilde{Z}_{i+1|i} = \Pi_i + \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T - \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{H}_i^T \big(R_i + \mathcal{H}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{H}_i^T\big)^{-1} \mathcal{H}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T,$$
$$\hat{z}_{i+1|i} = \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} + \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{H}_i^T \big(R_i + \mathcal{H}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{H}_i^T\big)^{-1} \big(y_i - \mathcal{H}_i \hat{z}_{i|i-1}\big),$$

sendo

$$\Pi_i = diag\Big[\textstyle\sum_{j=1}^N p_{jk} F_{i,j} Z_{i,j} F_{i,j}^T\Big] - \mathcal{F}_i Z_i \mathcal{F}_i^T + diag\Big[\textstyle\sum_{j=1}^N p_{jk} \pi_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T\Big],$$
$$R_i = \mathcal{D}_i \mathcal{D}_i^T,$$

as variáveis $Z_{i,j}$ e Z_i podem ser calculadas como (2.18)-(2.19).

Note que este filtro preditor é equivalente àquele deduzido em [9], definido pelas Equações (2.43)-(2.48).

Observação 2.3.1. *Para o caso sem saltos* $(N = 1)$ *a estimativa nominal preditora para SLSM é reduzida para a estimativa preditora do filtro de Kalman padrão dado em [17] (quando o sistema singular desta referência é considerado na forma espaço de estados).*

2.3.2 Estimativa Nominal Filtrada

Segue que o funcional (2.54) pode ser reescrito na forma de blocos matriciais como

$$\begin{bmatrix} z_i - \hat{z}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i - \hat{z}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -\mathcal{F}_i & I \\ 0 & \mathcal{H}_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i - \hat{z}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} \right)^T$$
$$\times \begin{bmatrix} \Pi_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -\mathcal{F}_i & I \\ 0 & \mathcal{H}_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i - \hat{z}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} \right). \tag{2.74}$$

Comparando o funcional (2.74) com o funcional (2.58), obtêm-se as seguintes equivalências:

$$x \leftarrow \begin{bmatrix} z_i - \hat{z}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}, b \leftarrow \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i} \\ y_{i+1} \end{bmatrix}, A \leftarrow \begin{bmatrix} -\mathcal{F}_i & I \\ 0 & \mathcal{H}_{i+1} \end{bmatrix},$$
$$V \leftarrow \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, W \leftarrow \begin{bmatrix} \Pi_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{2.75}$$

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado na dedução da estimativa nominal preditora pode-se deduzir a estimativa nominal filtrada que é apresentada na Tabela (2.2).

Tabela 2.2: Estimativa Nominal Filtrada para o SLSM (2.17)

Passo 0 : Considere as seguintes condições iniciais:

$$\tilde{Z}_{0|0} := \left(P_0^{-1} + \mathcal{H}_0^T R_0 \mathcal{H}_0\right)^{-1},$$
$$\hat{z}_{0|0} := \tilde{Z}_{0|0} \mathcal{H}_0 R_0^{-1} z_0.$$

Passo 1: Atualize $\left\{\tilde{Z}_{i|i}, \hat{z}_{i|i}\right\}$ para $\left\{\tilde{Z}_{i+1|i+1}, \hat{z}_{i+1|i+1}\right\}$ da seguinte forma:

$$\tilde{Z}_{i+1|i+1} = \left(\left(\Pi_i + \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i} \mathcal{F}_i^T\right)^{-1} + \mathcal{H}_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} \mathcal{H}_{i+1}\right)^{-1},$$
$$\hat{z}_{i+1|i+1} = \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i} + \tilde{Z}_{i+1|i+1} \mathcal{H}_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} \left(y_{i+1} - \mathcal{H}_{i+1} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i}\right),$$

sendo

$\Pi_i = diag\left[\sum_{j=1}^N p_{jk} F_{i,j} Z_{i,j} F_{i,j}^T\right] - \mathcal{F}_i Z_i \mathcal{F}_i^T + diag\left[\sum_{j=1}^N p_{jk} \pi_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T\right]$,
$R_i = \mathcal{D}_i \mathcal{D}_i^T$,
as variáveis $Z_{i,j}$ e Z_i podem ser calculadas como (2.18)-(2.19).

Observação 2.3.2. *Para o caso sem saltos ($N = 1$) a estimativa nominal filtrada para SLSM é reduzida para a estimativa filtrada do filtro de Kalman padrão dado em [17] (quando o sistema singular desta referência é considerado na forma espaço de estados).*

Observação 2.3.3. *Comparando as estimativas filtradas, para os casos determinístico e estocático, pode-se notar que as equações são diferentes. Para o caso determinístico tem-se*

$$\tilde{Z}_{i+1|i+1} = \Big(\big(\Pi_i + \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i} \mathcal{F}_i^T\big)^{-1} + \mathcal{H}_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} \mathcal{H}_{i+1}\Big)^{-1}, \tag{2.76}$$

$$\hat{z}_{i+1|i+1} = \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i} + \tilde{Z}_{i+1|i+1} \mathcal{H}_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} \big(y_{i+1} - \mathcal{H}_{i+1} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i}\big). \tag{2.77}$$

E a estimativa filtrada para o caso estocástico é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{i+1|i} &= \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T + \mathcal{B}(Q_i) + diag\Big[\sum_{j=1}^{N} \pi_{i,j} p_{j,k} G_{i,j} G_{i,j}^T\Big] - \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{H}_i^T \\ &\times \big(\mathcal{D}_i \mathcal{D}_i^T + \mathcal{H}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{H}_i^T\big)^{-1} \mathcal{H}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T, \end{aligned} \tag{2.78}$$

sendo

$$\mathcal{B}\big(Q_i\big) = diag\Big[\sum_{j=1}^{N} p_{jk} F_{i,j} Z_{i,j} F_{i,j}^T\Big] - \mathcal{F}_i diag\big[Z_{i,k}\big] \mathcal{F}_i^T, \tag{2.79}$$

$$\hat{z}_{i|i} = \mathcal{F}_{i-1} \hat{z}_{i-1|i-1} + \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{H}_i^T \big(\mathcal{H}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{H}_i^T + \mathcal{D}_i \mathcal{D}_i^T\big)^{-1} \big(y_i - \mathcal{H}_i \mathcal{F}_{i-1} \hat{z}_{i-1|i-1}\big). \tag{2.80}$$

Esta diferença deve-se ao fato de que foi utilizado um funcional específico para a dedução da estimativa filtrada para o caso determinístico. No caso estocástico ambos os filtros foram deduzidos a partir de um único problema de minimização.

CAPÍTULO 3

Filtragem $\mathcal{H}_\infty$ para SLSM

Neste capítulo serão apresentadas estimativas $\mathcal{H}_\infty$ recursivas para SLSM nas formas preditora e filtrada. Foi utilizada uma abordagem baseada na teoria dos jogos para deduzir tais filtros. Dois funcionais independentes foram utilizados para as respectivas deduções. Para ambos os filtros o objetivo é minimizar os erros das estimativas dos estados Markovianos em contraposição à tentativa de maximização desses erros gerada por ruídos nas variáveis medidas. De maneira semelhante aos filtros $\mathcal{H}_\infty$ convencionais, define-se um limitante γ para esta relação de atenuação dos ruídos nas variáveis estimadas, que do ponto de vista da teoria dos jogos atua como mediador entre dois jogadores. Assume-se no desenvolvimento de ambos os estimadores $\mathcal{H}_\infty$ que os parâmetros de salto não são acessíveis.

3.1 Preliminares

Os filtros $\mathcal{H}_\infty$ desenvolvidos nesta tese são baseados no seguinte SLSM discreto no tempo

$$x_{i+1} = F_{i,\Theta_i} x_i + G_{i,\Theta_i} u_i, \quad i = 0, 1... \tag{3.1}$$

$$y_i = H_{i,\Theta_i} x_i + D_{i,\Theta_i} w_i \tag{3.2}$$

$$s_i = L_{i,\Theta_i} x_i + R_{i,\Theta_i} v_i \tag{3.3}$$

sendo $x_i \in \mathbb{R}^n$ a sequência de estado, $y_i \in \mathbb{R}^m$ a sequência de saída, $u_i \in \mathbb{R}^{q_1}$, $w_i \in \mathbb{R}^{q_2}$ e $v_i \in \mathbb{R}^{q_2}$ distúrbios aleatórios independentes com média zero e covariâncias U_i, W_i e V_i respectivamente, Θ_i é uma cadeia de Markov discreta no tempo, com espaço de estado finito $\{1, ..., N\}$ e matriz de probabilidade de transição $P = [p_{jk}]$, sendo $p_{jk} = \mathcal{P}\big(\Theta_{i+1} = k|\Theta_i = j\big)$; $\pi_{i,j} := \mathcal{P}\big(\Theta_i = j\big)$ é a distribuição de probabilidade da cadeia de Markov; $F_{i,k} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G_{i,k} \in \mathbb{R}^{n\times q_1}$, $H_{i,k} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D_{i,k} \in \mathbb{R}^{m\times q_2}$, $L_{i,k} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ e $R_{i,k} \in \mathbb{R}^{p\times q_2}$ são matrizes de parâmetros variantes no tempo; $x_0 1_{\{\Theta_0=k\}}$, $k = 1, ..., N$, são vetores aleatórios com $\mathbb{E}\big\{x_0 1_{\{\Theta_0=k\}}\big\} = \mu_k$, (sendo que $1_{\{.\}}$ denota a medida de Dirac) e $\mathbb{E}\big\{x_0 x_0^T 1_{\{\Theta_0=k\}}\big\} = V_k$; x_0 e $\{\Theta_i\}$ são independentes de u_i, w_i e v_i.

Seguindo a proposta desenvolvida em [9] e conforme foi apresentado na Capítulo (2), as equações do sistema (3.1), (3.2) e (3.3) podem ser reescritas em termos de z_i como

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= \mathcal{F}_i z_i + \psi_i, \quad i = 0, 1... \\ y_i &= \mathcal{H}_i z_i + \varphi_i \\ s_i &= \mathcal{L}_i z_i + \sigma_i \end{aligned} \tag{3.4}$$

sendo as matrizes de parâmetros aumentadas dadas por

$$\mathcal{F}_i := \begin{bmatrix} p_{11}F_{i,1} & \dots & p_{N1}F_{i,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N}F_{i,1} & \dots & p_{NN}F_{i,N} \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

$$\mathcal{H}_i := \begin{bmatrix} H_{i,1} & \dots & H_{i,N} \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

$$\mathcal{L}_i := \begin{bmatrix} L_{i,1} & \dots & L_{i,N} \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

e as variáveis aleatórias

$$\psi_i := \mathcal{M}_{i+1} z_i + \vartheta_i, \tag{3.8}$$

$$\varphi_i := D_{i,\Theta_i} w_i, \tag{3.9}$$

$$\sigma_i := R_{i,\Theta_i} v_i, \tag{3.10}$$

$$\vartheta_i := \begin{bmatrix} 1_{\{\Theta_{i+1}=1\}} G_{i,\Theta_i} u_i \\ \vdots \\ 1_{\{\Theta_{i+1}=N\}} G_{i,\Theta_i} u_i \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}_{i+1} := \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{i+1,1} \\ \vdots \\ \mathcal{M}_{i+1,N} \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

$$\mathcal{M}_{i+1,k} \quad := \quad \Big[\big(1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} - p_{1k}\big)F_{i,1} \quad \ldots \quad \big(1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} - p_{Nk}\big)F_{i,N}\Big]. \tag{3.12}$$

Pelas hipóteses anteriormente consideradas sobre os distúrbios u_i, w_i e v_i, segue que para o sistema aumentado (3.4), as seguintes propriedades são válidas:

- $\mathbb{E}\{\psi_i\} = \mathbb{E}\{\varphi_i\} = \mathbb{E}\{\sigma_i\} = 0$;

- $\mathbb{E}\{z_i\psi_i^T\} = \mathbb{E}\{z_i\varphi_i^T\} = \mathbb{E}\{z_i\sigma_i^T\} = \mathbb{E}\{\psi_i\varphi_i^T\} = \mathbb{E}\{\psi_i\sigma_i^T\} = \mathbb{E}\{\sigma_i\varphi_i^T\} = 0.$

O problema de predição $\mathcal{H}_\infty$ recursivo para SLSM pode ser estabelecido da seguinte maneira: dado um escalar $\gamma > 0$, e uma sequência de conjuntos de observação

$$\{y_0\},\ \{y_0,\ y_1\},\ ...,\ \{y_0,\ y_1,\ ...,\ y_l\},\ ..., \tag{3.13}$$

encontrar para cada l, se existir, uma predição $\hat{s}_{l+1|l}$ de s_{l+1} em termos das medidas $\{y_0,\ ...,\ y_l\}$, que satisfaça

$$\sup_{z_0} \frac{\left\|s_{0|-1} - \mathcal{L}_0 z_0\right\|^2_{\Lambda_0^{-1}}}{\left\|z_0 - \mathcal{F}_{-1}\overline{z}_0\right\|^2_{\tilde{Z}_0^{-1}}} < \gamma^2, \tag{3.14}$$

para $l = -1$, e

$$\sup_{\{z_i\}_{i=0}^{l+1}} \frac{\sum_{i=0}^{l+1} \left\|s_{i|l} - \mathcal{L}_i z_i\right\|^2_{\Lambda_i^{-1}}}{\left\|z_0 - \mathcal{F}_{-1}\overline{z}_0\right\|^2_{\tilde{Z}_0^{-1}} + \sum_{i=0}^{l} \left\|y_i - \mathcal{H}_i z_i\right\|^2_{\Pi_i^{-1}} + \sum_{i=0}^{l} \left\|z_{i+1} - \mathcal{F}_i z_i\right\|^2_{\Gamma_i^{-1}}} < \gamma^2, \tag{3.15}$$

para $l \geq 0$.

Analogamente, o problema de filtragem $\mathcal{H}_\infty$ recursivo para SLSM pode ser estabelecido da seguinte maneira: dado um escalar $\gamma > 0$, e uma sequência de conjuntos de observação (3.13) encontrar para cada l, se existir, uma sequência de estimativa filtrada $\hat{s}_{l|l}$ de s_l em termos das medidas $\{y_0,\ ...,\ y_l\}$, que satisfaça

$$\sup_{z_0} \frac{\left\|s_{0|0} - \mathcal{L}_0 z_0\right\|^2_{\Lambda_0^{-1}}}{\left\|z_0 - \mathcal{F}_{-1}\overline{z}_0\right\|^2_{\tilde{Z}_0^{-1}} + \left\|y_0 - \mathcal{H}_0 z_0\right\|^2_{\Pi_0^{-1}}} < \gamma^2, \tag{3.16}$$

para $l = 0$, e

$$\sup_{\{z_i\}_{i=0}^{l}} \frac{\sum_{i=0}^{l} \left\| s_{i|l} - \mathcal{L}_i z_i \right\|_{\Lambda_i^{-1}}^2}{\left\| z_0 - \mathcal{F}_{-1}\overline{z}_0 \right\|_{\tilde{Z}_0^{-1}}^2 + \sum_{i=0}^{l} \left\| y_i - \mathcal{H}_i z_i \right\|_{\Pi_i^{-1}}^2 + \sum_{i=0}^{l-1} \left\| z_{i+1} - \mathcal{F}_i z_i \right\|_{\Gamma_i^{-1}}^2} < \gamma^2 \tag{3.17}$$

para $l > 0$.

Em (3.14), (3.15), (3.16) e (3.17) o vetor $\overline{z}_0$ denota uma condição inicial para z_0 e a matriz $\mathcal{F}_{-1} = I$. A seguir serão definidas as matrizes de ponderação Γ_i, Π_i e Λ_i como as variâncias dos distúrbios aleatórios ψ_i, φ_i e σ_i, respectivamente. Considere as definições para $i \geq 0$ e $k \in \{1, ..., N\}$,

$$\begin{aligned} Z_{i,k} &:= \mathbb{E}\left\{ z_{i,k} z_{i,k}^T \right\} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ Z_i &:= \mathbb{E}\left\{ z_i z_i^T \right\} = diag[Z_{i,k}] \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

sendo que $Z_{i,k}$ é calculado pela seguinte equação recursiva

$$\begin{aligned} Z_{i+1,k} &:= \sum_{j=1}^{N} p_{jk} F_{i,j} Z_{i,j} F_{i,j}^T + \sum_{j=1}^{N} p_{jk} \pi_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T, \\ Z_{0,k} &:= V_k. \end{aligned} \tag{3.19}$$

As variâncias de ψ_i, φ_i e σ_i são dadas por

$$\begin{aligned} \Gamma_i &:= \mathbb{E}\{\psi_i \psi_i^T\} = diag\Big[\sum_{j=1}^{N} p_{jk} F_{i,j} Z_{i,j} F_{i,j}^T\Big] - \mathcal{F}_i Z_i \mathcal{F}_i^T \qquad (3.20) \\ &+ diag\Big[\sum_{j=1}^{N} p_{jk} \pi_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T\Big] \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}, \\ \Pi_i &:= \mathbb{E}\{\varphi_i \varphi_i^T\} = \mathcal{D}_i \mathcal{D}_i^T \in \mathbb{R}^{m \times m}, \qquad (3.21) \\ \Lambda_i &:= \mathbb{E}\{\sigma_i \sigma_i^T\} = \mathcal{R}_i \mathcal{R}_i^T \in \mathbb{R}^{p \times p}, \qquad (3.22) \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i &:= \begin{bmatrix} D_{i,1} \pi_{i,1}^{1/2} W_i^{1/2} & \dots & D_{i,N} \pi_{i,N}^{1/2} W_i^{1/2} \end{bmatrix}, \qquad (3.23) \\ \mathcal{R}_i &:= \begin{bmatrix} R_{i,1} \pi_{i,1}^{1/2} V_i^{1/2} & \dots & R_{i,N} \pi_{i,N}^{1/2} V_i^{1/2} \end{bmatrix}. \qquad (3.24) \end{aligned}$$

Nas próximas seções serão apresentadas as estimativas $\mathcal{H}_\infty$ nas formas preditora e filtrada.

3.2 Estimativa $\mathcal{H}_\infty$ Preditora

O problema de predição $\mathcal{H}_\infty$ (3.14)-(3.15) pode ser relacionado a um problema de teoria dos jogos com dois jogadores dado por

$$\min_{\{z_{i|l}\}_{i=0}^{l+1}} \max_{\{s_{i|l}\}_{i=0}^{l+1}} J_l^p\Big(\{y_i\}_{i=0}^{l},\, \{s_{i|l}\}_{i=0}^{l+1}, \{z_{i|l}\}_{i=0}^{l+1}\Big) > 0 \tag{3.25}$$

sendo $J_{-1}^p := \big\|z_{0|-1} - \mathcal{F}_{-1}\overline{z}_0\big\|^2_{\tilde{Z}_0^{-1}} - \gamma^{-2}\big\|s_{0|-1} - \mathcal{L}_0 z_{0|-1}\big\|^2_{\Lambda_0^{-1}}$, para $l = -1$, e

$$\begin{aligned} J_l^p \;&:=\; \big\|z_{0|l} - \mathcal{F}_{-1}\overline{z}_0\big\|^2_{\tilde{Z}_0^{-1}} + \sum_{i=0}^{l}\big\|y_i - \mathcal{H}_i z_{i|l}\big\|^2_{\Pi_i^{-1}} + \sum_{i=0}^{l}\big\|z_{i+1|l} - \mathcal{F}_i z_{i|l}\big\|^2_{\Gamma_i^{-1}} \\ &-\; \gamma^{-2}\sum_{i=0}^{l+1}\big\|s_{i|l} - \mathcal{L}_i z_{i|l}\big\|^2_{\Lambda_i^{-1}}, \end{aligned} \tag{3.26}$$

para $l \geq 0$.

A expressão (3.26) do problema (3.25) estabelece que para cada $l \geq 0$, dadas as medidas $\{y_i\}_{i=0}^{l}$, o primeiro jogador gera as estimativas $\hat{s}_{i|l}$ de s_i, $i = 0, ..., l+1$ e o segundo jogador define as estimativas $\{z_{i|l}\}_{i=0}^{l+1}$ com o objetivo de comprometer a precisão da estimativa do primeiro jogador. Para resolver o problema de predição $\mathcal{H}_\infty$, observa-se que não é necessário maximizar J_l^p sobre $\{s_{i|l}\}_{i=0}^{l+1}$. O preditor $\mathcal{H}_\infty$ existe no instante l se e somente se existir um $\{\hat{s}_{i|l}\}_{i=0}^{l+1}$ tal que $J_l^p\big(\{y_i\}_{i=0}^{l}, \{\hat{s}_{i|l}\}_{i=0}^{l+1}, \{z_{i|l}\}_{i=0}^{l+1}\big)$ tenha um mínimo em $\{\hat{z}_{i|l}\}_{i=0}^{l+1}$ tal que $J_l^p\big(\{y_i\}_{i=0}^{l}, \{\hat{s}_{i|l}\}_{i=0}^{l+1}, \{\hat{z}_{i|l}\}_{i=0}^{l+1}\big) > 0$. Para cada $l \geq 0$, o funcional em (3.26) pode ser reescrito como

$$J_l^p := \big(\mathfrak{U}_l\mathfrak{X}_{l+1|l} - \mathfrak{B}_l\big)^T\mathfrak{R}_l\big(\mathfrak{U}_l\mathfrak{X}_{l+1|l} - \mathfrak{B}_l\big) \tag{3.27}$$

sendo

$$\mathfrak{X}_{l|l-1} := \begin{bmatrix} z_{i|j} \\ \vdots \\ z_{1|j} \\ z_{0|j} \end{bmatrix}, \mathfrak{B}_l := \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_l \\ \vdots \\ \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{Z}_0 \\ \mathbb{Z}_{-1} \end{bmatrix}, \mathfrak{R}_l := \begin{bmatrix} \mathcal{R}_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{U}_l := \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{l+1} & \mathcal{A}_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_l & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \mathcal{A}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_1 & \mathcal{A}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_0 \end{bmatrix}, \mathcal{E}_i := \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \mathcal{L}_i \end{bmatrix}, \mathfrak{U}_{-1} = \mathcal{E}_0 = \begin{bmatrix} I \\ \mathcal{L}_0 \end{bmatrix}, 1 \leq i,$$

$$\mathcal{R}_i := \begin{bmatrix} \Gamma_i^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^{-2}\Lambda_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}, \mathcal{A}_i := \begin{bmatrix} -\mathcal{F}_i \\ \mathcal{H}_i \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{Z}_i := \begin{bmatrix} 0 \\ y_i \\ s_{i+1|l} \end{bmatrix}, i \geq 0,$$

$$\mathcal{R}_{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_0^{-1} & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2}\Lambda_0^{-1} \end{bmatrix}, \mathbb{Z}_{-1} := \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{-1}\overline{z}_0 \\ s_{0|l} \end{bmatrix}. \tag{3.28}$$

Considerando as variáveis em (3.28) para todo $l \geq 0$, pode-se obter as seguintes relações recorrentes:

$$\mathfrak{R}_l := \begin{bmatrix} \mathcal{R}_l & 0 \\ 0 & \mathfrak{R}_{l-1} \end{bmatrix}, \mathfrak{B}_l := \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_l \\ \mathfrak{B}_{l-1} \end{bmatrix}, \mathfrak{X}_{l+1|l} := \begin{bmatrix} z_{l+1|l} \\ \mathfrak{X}_{l|l-1} \end{bmatrix}, \mathfrak{U}_l := \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{l+1} & \alpha_l \\ 0 & \mathfrak{U}_{l-1} \end{bmatrix},$$
$$\alpha_l := \begin{bmatrix} \mathcal{A}_l & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

O próximo lema será útil para deduzir os estimadores $\mathcal{H}_\infty$ para SLSM.

Lema 3.2.1. *[4] Considere as matrizes $\mathfrak{U}_l$ e $\mathfrak{R}_l$ e os vetores colunas $\mathfrak{B}_l$ e $\mathfrak{X}_{l|l}$ de dimensões apropriadas com $\mathfrak{R}_l$ simétrica. Para qualquer $\mathfrak{B}_l$ tem-se*

$$\inf_{\mathfrak{X}} \big(\mathfrak{U}_l\mathfrak{X}_{l|l} - \mathfrak{B}_l\big)^T \mathfrak{R}_l \big(\mathfrak{U}_l\mathfrak{X}_{l|l} - \mathfrak{B}_l\big) > -\infty \tag{3.30}$$

se e somente se $\mathfrak{U}_l^T\mathfrak{R}_l\mathfrak{U}_l \geq 0$ e $Ker\big(\mathfrak{U}_l^T\mathfrak{R}_l\mathfrak{U}_l\big) \subset Ker\big(\mathfrak{R}_l\mathfrak{U}_l\big)$. Se o mínimo é atingido, ele é único se e somente se $\mathfrak{U}_l^T\mathfrak{R}_l\mathfrak{U}_l > 0$. Isto garante que a solução ótima será dada por $\hat{\mathfrak{X}}_{l|l} = \big(\mathfrak{U}_l^T\mathfrak{R}_l\mathfrak{U}_l\big)^{-1}\mathfrak{U}_l^T\mathfrak{R}_l\mathfrak{B}_l$.

Baseado no Lema (3.2.1), pode-se obter uma condição necessária para existência do preditor $\mathcal{H}_\infty$ que será desenvolvido a seguir. Tem-se que existe uma única solução mínima se e somente

se $\mathfrak{U}_l^T\mathfrak{R}_l\mathfrak{U}_l > 0$, sendo $\mathfrak{U}_l$ e $\mathfrak{R}_l$ definidos em (3.29). O termo $\mathfrak{U}_l^T\mathfrak{R}_l\mathfrak{U}_l$ pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_{l+1}^T\mathcal{R}_l\mathcal{E}_{l+1} & \mathcal{E}_{l+1}^T\mathcal{R}_l\alpha_l \\ \alpha_l^T\mathcal{R}_l\mathcal{E}_{l+1} & \mathfrak{U}_{l-1}^T\mathfrak{R}_{l-1}\mathfrak{U}_{l-1} + \alpha_l^T\mathcal{R}_l\alpha_l \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

Portanto, uma condição necessária para $\mathfrak{U}_l^T\mathfrak{R}_l\mathfrak{U}_l > 0$ é a positividade do termo $\mathcal{E}_{l+1}^T\mathcal{R}_l\mathcal{E}_{l+1}$ para $l \geq -1$, que pode ser estabelecida pela seguintes condições:

$$\begin{aligned} P_0^{-1} - \gamma^{-2}\mathcal{L}_0^T\Lambda_0^{-1}\mathcal{L}_0 > 0, \quad l = -1, \\ \Gamma_l^{-1} - \gamma^{-2}\mathcal{L}_{l+1}^T\Lambda_{l+1}^{-1}\mathcal{L}_{l+1} > 0, \quad l \geq 0. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Com o objetivo de deduzir o preditor $\mathcal{H}_\infty$ para SLSM, considere as seguintes variáveis auxiliares definidas como $M_{0|-1}^{-1} := \mathfrak{U}_{-1}^T\mathfrak{R}_{-1}\mathfrak{U}_{-1}$ e $M_{l+1|l}^{-1}$ como o complemento de Schur do bloco $(2,2)$ em (3.31). Pode-se mostrar que o problema de predição $\mathcal{H}_\infty$ tem solução se e somente se $M_{l+1|l} > 0$, para $l = -1, 0, 1, ...$ Para termos $\mathfrak{U}_l^T\mathfrak{R}_l\mathfrak{U}_l > 0$, o sub-bloco $(2,2)$ em (3.31) deve ser definido positivo. Usando a hipótese de que o problema de predição tem sido resolvido até o último passo, a positividade de $\mathfrak{U}_{l-1}^T\mathfrak{R}_{l-1}\mathfrak{U}_{l-1}$ é garantida, portanto resta somente verificar se $\alpha_l^T\mathcal{R}_l\alpha_l$ é positivo. Em termos dos dados originais, tem-se que

$$\begin{aligned} \alpha_l^T\mathcal{R}_l\alpha_l &= \begin{bmatrix} \mathcal{A}_l^T \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{R}_l \begin{bmatrix} \mathcal{A}_l & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathcal{F}_l \\ \mathcal{H}_l \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Gamma_l^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_l^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2\Lambda_{l+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathcal{F}_l \\ \mathcal{H}_l \\ 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Consequentemente, o termo $(2,2)$ em (3.31) é definido positivo e $\mathfrak{U}_l^T\mathfrak{R}_l\mathfrak{U}_l > 0$ se e somente se o complemento de Schur do bloco $(2,2)$ em (3.31) é definido positivo. Defina para $l \geq 0$, a variável auxiliar $M_{l+1|l}^{-1}$ como complemento de Schur do bloco $(2,2)$ em (3.31), ou equivalentemente, $M_{l+1|l}$ como o bloco $(1,1)$ da inversa de (3.31). Tem-se

$$M_{l+1|l}^{-1} := \mathcal{E}_{l+1}^T\mathcal{R}_l\mathcal{E}_{l+1} - \mathcal{E}_{l+1}^T\mathcal{R}_l\alpha_l\big(\alpha_l^T\mathcal{R}_l\alpha_l + \mathfrak{U}_{l-1}^T\mathfrak{R}_{l-1}\mathfrak{U}_{l-1}\big)^{-1}\alpha_l^T\mathcal{R}_l\mathcal{E}_{l+1} \tag{3.34}$$

e a Equação (3.34) pode ser reescrita como

$$M_{l+1|l}^{-1} = \mathcal{E}_{l+1}^T\Big(\mathcal{R}_l - \mathcal{R}_l\alpha_l\big(\alpha_l^T\mathcal{R}_l\alpha_l + \mathfrak{U}_{l-1}^T\mathfrak{R}_{l-1}\mathfrak{U}_{l-1}\big)^{-1}\alpha_l^T\mathcal{R}_l\Big)\mathcal{E}_{l+1}. \tag{3.35}$$

Aplicando o lema da inversão de matrizes (A.0.1) em (3.35) obtém-se

$$M_{l+1|l}^{-1} = \mathcal{E}_{l+1}^T\Big(\mathcal{R}_l^{-1} + \alpha_l\big(\mathfrak{U}_{l-1}^T\mathfrak{R}_{l-1}\mathfrak{U}_{l-1}\big)^{-1}\alpha_l^T\Big)^{-1}\mathcal{E}_{l+1}. \tag{3.36}$$

Reafirmando que $M_{l|l-1}$ é o bloco $(1,1)$ de $\big(\mathfrak{U}_{l-1}^T\mathfrak{R}_{l-1}\mathfrak{U}_{l-1}\big)^{-1}$ tem-se

$$\begin{aligned} M_{l+1|l}^{-1} &= \mathcal{E}_{l+1}^T\big(\mathcal{R}_l^{-1} + \alpha_l M_{l|l-1}\alpha_l^T\big)^{-1}\mathcal{E}_{l+1} \\ &= \mathcal{E}_{l+1}^T\Big(\mathcal{R}_l - \mathcal{R}_l\alpha_l\big(M_{l|l-1}^{-1} + \alpha_l^T\mathcal{R}_l\alpha_l\big)^{-1}\alpha_l^T\mathcal{R}_l\Big)\mathcal{E}_{l+1}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Reescrevendo (3.37) em termos dos dados originais de (3.28) obtém-se

$$M_{l+1|l}^{-1} = \Gamma_l^{-1} - \Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l\big(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l\big)^{-1}\mathcal{F}_l^T\Gamma^{-1} - \gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_{l+1}^{-1}\mathcal{L}_l. \tag{3.38}$$

Definindo $\tilde{Z}_{l|l-1}^{-1} := M_{l|l-1}^{-1} + \gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_{l+1}^{-1}\mathcal{L}_l$, a Equação (3.38) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} &= \Gamma_l^{-1} - \Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l\big(\tilde{Z}_{l|l-1}^{-1} - \gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_{l+1}^{-1}\mathcal{L}_l + \mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l\big)^{-1}\mathcal{F}_l^T\Gamma^{-1} \\ &= \Big(\Gamma_l + \mathcal{F}_l\big(\tilde{Z}_{l|l-1}^{-1} - \gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_{l+1}^{-1}\mathcal{L}_l + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l\big)^{-1}\mathcal{F}_l^T\Big)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Também, duas outras formas úteis para análise da Equação (3.39) são consideradas a seguir:

$$\tilde{Z}_{l+1|l} = \Gamma_l + \mathcal{F}_l\left(\tilde{Z}_{l|l-1}^{-1} + \begin{bmatrix}\mathcal{H}_l\\ \mathcal{L}_l\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\Pi_l^{-1} & 0\\ 0 & -\gamma^{-2}\Lambda_{l+1}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathcal{H}_l\\ \mathcal{L}_l\end{bmatrix}\right)^{-1}\mathcal{F}_l^T, \tag{3.40}$$

e

$$\tilde{Z}_{l+1|l} = \Gamma_l + \mathcal{F}_l\tilde{Z}_{l|l-1}\mathcal{F}_l^T - \mathcal{F}_l\tilde{Z}_{l|l-1}\begin{bmatrix}\mathcal{H}_l\\ \mathcal{L}_l\end{bmatrix}^T W_{e\infty,l}^{-1}\begin{bmatrix}\mathcal{H}_l\\ \mathcal{L}_l\end{bmatrix}\tilde{Z}_{l|l-1}\mathcal{F}_l^T, \tag{3.41}$$

sendo

$$W_{e\infty,l} := \begin{bmatrix}\Pi_l & 0\\ 0 & -\gamma^2\Lambda_{l+1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathcal{H}_l\\ \mathcal{L}_l\end{bmatrix}\tilde{Z}_{l|l-1}\begin{bmatrix}\mathcal{H}_l^T & \mathcal{L}_l^T\end{bmatrix}. \tag{3.42}$$

A solução mínima para o funcional (3.27) pode ser obtida aplicando o Lema (3.2.1) como

$$\hat{\mathfrak{X}}_{l+1|l} = \mathfrak{P}_{l+1|l}\mathfrak{U}_l^T\mathfrak{R}_l\mathfrak{B}_l, \tag{3.43}$$

sendo para cada $l \geq 0$

$$\mathfrak{P}_{l|l-1} := \left(\mathfrak{U}_{l-1}^T\mathfrak{R}_{l-1}\mathfrak{U}_{l-1}\right)^{-1}. \tag{3.44}$$

A Equação (3.43) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_{l+1|l} \\ \hat{\mathfrak{X}}_{l|l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{l+1}^T\mathcal{R}_l\mathcal{E}_{l+1} & \mathcal{E}_{l+1}^T\mathcal{R}_l\alpha_l \\ \alpha_l^T\mathcal{R}_l\mathcal{E}_{l+1} & \mathfrak{U}_{l-1}^T\mathfrak{R}_{l-1}\mathfrak{U}_{l-1} + \alpha_l^T\mathcal{R}_l\alpha_l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{l+1}^T\mathcal{R}_l\mathcal{Z}_l \\ \alpha_l^T\mathcal{R}_l\mathcal{Z}_l + \mathfrak{U}_{l-1}^T\mathfrak{R}_{l-1}\mathfrak{B}_{l-1} \end{bmatrix}. \tag{3.45}$$

Considera-se a solução do último passo

$$\hat{\mathfrak{X}}_{l|l-1} = \mathfrak{P}_{l|l-1}\mathfrak{U}_{l-1}^T\mathfrak{R}_{l-1}\mathfrak{B}_{l-1}, \tag{3.46}$$

pode-se reescrever a equação (3.45) como

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_{l+1|l} \\ \hat{\mathfrak{X}}_{l|l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{l+1|l} & P_{12,l} \\ P_{21,l} & P_{22,l} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{E}_{l+1}^T \\ \alpha_l^T \end{bmatrix} \mathcal{R}_l\mathcal{Z}_l + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathfrak{P}_{l|l-1}^{-1}\hat{\mathfrak{X}}_{l|l-1} \end{bmatrix} \right), \tag{3.47}$$

sendo

$$\begin{bmatrix} M_{l+1|l} & P_{12,l} \\ P_{21,l} & P_{22,l} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{l+1}^T\mathcal{R}_l\mathcal{E}_{l+1} & \mathcal{E}_{l+1}^T\mathcal{R}_l\alpha_l \\ \alpha_l^T\mathcal{R}_l\mathcal{E}_{l+1} & \mathfrak{U}_{l-1}^T\mathfrak{R}_{l-1}\mathfrak{U}_{l-1} + \alpha_l^T\mathcal{R}_l\alpha_l \end{bmatrix}^{-1}. \tag{3.48}$$

Consequentemente, a Equação (3.47) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\hat{z}_{l+1|l} = \left(M_{l+1|l}\mathcal{E}_{l+1}^T + P_{12,l}\alpha_l^T\right)\mathcal{R}_l\mathcal{Z}_l + P_{12,l}\mathfrak{P}_{l|l-1}^{-1}\hat{\mathfrak{X}}_{l|l-1}. \tag{3.49}$$

Dois termos desta Equação (3.49), $P_{12,l}$ e $M_{l+1|l}$, podem ser obtidos com a aplicação do Lema da inversão de blocos matriciais (A.0.3) em (3.48)

$$\begin{aligned} P_{12,l} &= -\Big(\mathcal{E}_{l+1}^T\mathcal{R}_l\mathcal{E}_{l+1} - \mathcal{E}_l^T\mathcal{R}_l\alpha_l\left(\mathfrak{U}_{l-1}^T\mathfrak{R}_{l-1}\mathfrak{U}_{l-1} + \alpha_l^T\mathcal{R}_l\alpha_l\right)^{-1}\alpha_l^T\mathcal{R}_l\mathcal{E}_{l+1}\Big)^{-1} \\ &\times \mathcal{E}_{l+1}^T\mathcal{R}_l\alpha_l\left(\mathfrak{U}_{l-1}^T\mathfrak{R}_{l-1}\mathfrak{U}_{l-1} + \alpha_l^T\mathcal{R}_l\alpha_l\right)^{-1} \end{aligned} \tag{3.50}$$

e

$$M_{l+1|l} = \Big(\mathcal{E}_{l+1}^T \mathcal{R}_l \mathcal{E}_{l+1} - \mathcal{E}_l^T \mathcal{R}_l \alpha_l \big(\mathfrak{U}_{l-1}^T \mathfrak{R}_{l-1} \mathfrak{U}_{l-1} + \alpha_l^T \mathcal{R}_l \alpha_l\big)^{-1} \alpha_l^T \mathcal{R}_l \mathcal{E}_{l+1}\Big)^{-1}. \tag{3.51}$$

Então pode-se concluir que

$$\begin{aligned} P_{12,l} &= -M_{l+1|l} \mathcal{E}_{l+1}^T \mathcal{R}_l \alpha_l \big(\mathfrak{U}_{l-1}^T \mathfrak{R}_{l-1} \mathfrak{U}_{l-1} + \alpha_l^T \mathcal{R}_l \alpha_l\big)^{-1} \\ &= -M_{l+1|l} \mathcal{E}_{l+1}^T \mathcal{R}_l \alpha_{l-1} \big(\mathfrak{P}_{l|l-1}^{-1} + \alpha_l^T \mathcal{R}_l \alpha_l\big)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Aplicando o Lema (A.0.2) em (3.52) tem-se

$$P_{12,l} = -M_{l+1|l} \mathcal{E}_l^T \big(\mathcal{R}_l^{-1} + \alpha_l \mathfrak{P}_{l|l-1} \alpha_l^T\big)^{-1} \alpha_l \mathfrak{P}_{l|l-1}. \tag{3.53}$$

Sabendo que

$$\alpha_l \mathfrak{P}_{l|l-1} \alpha_l^T = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_l & 0 \end{bmatrix} M_{l|l-1} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_l^T \\ 0 \end{bmatrix} = \mathcal{A}_l M_{l|l-1} \mathcal{A}_l^T, \tag{3.54}$$

(3.53) pode ser reescrita como

$$P_{12,l} = -M_{l+1|l} \mathcal{E}_l^T \big(\mathcal{R}_l^{-1} + \mathcal{A}_l M_{l|l-1} \mathcal{A}_l^T\big)^{-1} \alpha_l \mathfrak{P}_{l|l-1}. \tag{3.55}$$

Com (3.55) e considerando $\alpha_l \mathfrak{X}_{l|j} = \mathcal{A}_l \widehat{z}_{l|j}$, $j \geq l-1$, tem-se que (3.49) pode reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{z}_{l+1|l} &= \Big(M_{l+1|l} \mathcal{E}_{l+1}^T - M_{l+1|l} \mathcal{E}_l^T \big(\mathcal{R}_l^{-1} + \mathcal{A}_l M_{l|l-1} \mathcal{A}_l^T\big)^{-1} \alpha_l \mathfrak{P}_{l|l-1} \alpha_l^T\Big) \mathcal{R}_l \mathcal{Z}_l \\ &- M_{l+1|l} \mathcal{E}_l^T \big(\mathcal{R}_l^{-1} + \mathcal{A}_l M_{l|l} \mathcal{A}_{l-1}^T\big)^{-1} \alpha_l \mathfrak{P}_{l|l-1} \mathfrak{P}_{l|l-1}^{-1} \hat{\mathfrak{X}}_{l|l-1}, \\ \hat{z}_{l+1|l} &= \Big(M_{l+1|l} \mathcal{E}_{l+1}^T - M_{l+1|l} \mathcal{E}_{l+1}^T \big(\mathcal{R}_l^{-1} + \mathcal{A}_l M_{l|l-1} \mathcal{A}_l^T\big)^{-1} \mathcal{A}_l M_{l|l-1} \mathcal{A}_l^T\Big) \mathcal{R}_l \mathcal{Z}_l \\ &- M_{l+1|l} \mathcal{E}_{l+1}^T \big(\mathcal{R}_l^{-1} + \mathcal{A}_l M_{l|l-1} \mathcal{A}_l^T\big)^{-1} \mathcal{A}_l \widehat{z}_{l|l-1}, \\ &= M_{l+1|l} \mathcal{E}_{l+1}^T \Big(\mathcal{R}_l - \mathcal{R}_l \mathcal{A}_l \big(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{A}_l^T \mathcal{R}_l \mathcal{A}_l\big)^{-1} \mathcal{A}_l^T \mathcal{R}_l\Big) \Big(\mathcal{Z}_l - \mathcal{A}_l \widehat{z}_{l|l-1}\Big). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Reescrevendo (3.56) em termos dos dados originais (3.28) tem-se

$$\begin{aligned}
\hat{z}_{l+1|l} &= M_{l+1|l}\Big(\Gamma_l^{-1} - \Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l\big(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l\big)^{-1}\mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1}\Big)\mathcal{F}_l\widehat{z}_{l|l-1} \\
&+ M_{l+1|l}\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l\big(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l\big)^{-1}\mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\big(y_l - \mathcal{H}_l\widehat{z}_{l|l-1}\big) \\
&- M_{l+1|l}\gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_{l+1}\hat{s}_{l+1|l}. \qquad (3.57)
\end{aligned}$$

Considerando $\hat{s}_{l+1|l} = \mathcal{L}_l\widehat{z}_{l+1|l}$,

$$\begin{aligned}
\hat{z}_{l+1|l} &= M_{l+1|l}\Big(\Gamma_l + \mathcal{F}_l\big(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l\big)^{-1}\mathcal{F}_l^T\Big)^{-1}\mathcal{F}_l\widehat{z}_{l|l-1} \\
&+ M_{l+1|l}\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l\big(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l\big)^{-1}\mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\big(y_l - \mathcal{H}_l\widehat{z}_{l|l-1}\big) \\
&- M_{l+1|l}\gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_{l+1}\mathcal{L}_l\hat{z}_{l+1|l}. \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema (A.0.2) em (3.58), tem-se que

$$\begin{aligned}
\hat{z}_{l+1|l} &= M_{l+1|l}\Big(\Gamma_l + \mathcal{F}_l\big(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l\big)^{-1}\mathcal{F}_l^T\Big)^{-1}\mathcal{F}_l\widehat{z}_{l|l-1} \\
&+ M_{l+1|l}\Big(\Gamma_l + \mathcal{F}_l\big(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l\big)^{-1}\mathcal{F}_l^T\Big)^{-1}\mathcal{F}_l\big(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l\big)^{-1} \\
&\times \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\big(y_l - \mathcal{H}_l\widehat{z}_{l|l-1}\big) - M_{l+1|l}\gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_{l+1}\mathcal{L}_l\hat{z}_{l+1|l}. \qquad (3.59)
\end{aligned}$$

Substituindo $\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} := \Big(\Gamma_l + \mathcal{F}_l\big(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l\big)^{-1}\mathcal{F}_l^T\Big)^{-1}$ em (3.59) obtém-se

$$\begin{aligned}
\hat{z}_{l+1|l} &= M_{l+1|l}\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1}\mathcal{F}_l\widehat{z}_{l|l-1} + M_{l+1|l}\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1}\mathcal{F}_l\big(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l\big)^{-1} \\
&\times \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\big(y_l - \mathcal{H}_l\widehat{z}_{l|l-1}\big) - M_{l+1|l}\gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_{l+1}\mathcal{L}_l\hat{z}_{l+1|l} \\
&= \mathcal{F}_l\widehat{z}_{l|l-1} - \mathcal{F}_l\big(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l\big)^{-1}\mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\big(y_l - \mathcal{H}_l\widehat{z}_{l|l-1}\big). \qquad (3.60)
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema (A.0.2) em (3.60) resulta em

$$\hat{z}_{l+1|l} = \mathcal{F}_l\widehat{z}_{l|l-1} + \mathcal{F}_l M_{l|l-1}\mathcal{H}_l^T\big(\Pi_l + \mathcal{H}_l M_{l|l-1}\mathcal{H}_l^T\big)^{-1}\big(y_l - \mathcal{H}_l\widehat{z}_{l|l-1}\big). \qquad (3.61)$$

O algoritmo da Tabela (3.1) apresenta os passos fundamentais para se calcular o preditor $\mathcal{H}_\infty$ para SLSM.

Tabela 3.1: Estimativa $\mathcal{H}_\infty$ Preditora para o SLSM (3.4)

O problema de predição $\mathcal{H}_\infty$ para SLSM (3.25) tem solução se e somente se $\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} - \gamma^{-2}\mathcal{L}_{l+1}^T\Lambda_{l+1}^{-1}\mathcal{L}_{l+1} > 0$, sendo a sequência $\left\{\tilde{Z}_{l+1|l}\right\}$ e o preditor calculados pelas seguintes equações recursivas:

Passo 0 : Considere as seguintes condições iniciais conhecidas:

$$\begin{aligned}
&\tilde{Z}_{0|-1} := \tilde{Z}_0,\\
&\hat{z}_{0|-1} := \overline{z}_0.
\end{aligned}$$

Passo 1: Atualize $\left\{\tilde{Z}_{i|i-1}, \hat{z}_{i|i-1}\right\}$ para $\left\{\tilde{Z}_{i+1|i}, \hat{z}_{i+1|i}\right\}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\tilde{Z}_{l+1|l} := \Gamma_l + \mathcal{F}_l\tilde{Z}_{l|l-1}\mathcal{F}_l^T - \mathcal{F}_l\tilde{Z}_{l|l-1}\begin{bmatrix}\mathcal{H}_l\\ \mathcal{L}_l\end{bmatrix}^T W_{e\infty,l}^{-1}\begin{bmatrix}\mathcal{H}_l\\ \mathcal{L}_l\end{bmatrix}\tilde{Z}_{l|l-1}\mathcal{F}_l,\\
&W_{e\infty,l} := \begin{bmatrix}\Pi_l & 0\\ 0 & -\gamma^2\Lambda_l\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathcal{H}_l\\ \mathcal{L}_l\end{bmatrix}\tilde{Z}_{l|l-1}\begin{bmatrix}\mathcal{H}_l^T & \mathcal{L}_l^T\end{bmatrix},\\
&\hat{z}_{l+1|l} := \mathcal{F}_l\widehat{z}_{l|l-1} + \mathcal{F}_l M_{l|l-1}\mathcal{H}_l^T\left(\Pi_l + \mathcal{H}_l M_{l|l-1}\mathcal{H}_l^T\right)^{-1}\left(y_l - \mathcal{H}_l\widehat{z}_{l|l-1}\right),\\
&M_{l|l-1}^{-1} := \tilde{Z}_{l|l-1}^{-1} - \gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_l^{-1}\mathcal{L}_l,\\
&\hat{s}_{l+1|l} := \mathcal{L}_{l+1}\hat{z}_{l+1|l}.
\end{aligned}$$

Observação 3.2.1. *Para estabelecer a estabilidade do filtro preditor $\mathcal{H}_\infty$ estacionário, é necessário assumir que todas as matrizes do sistema e as probabilidades de transição p_{jk} são invariantes no tempo, assumir também que o sistema é estável na média quadrática (MSS) e sua cadeia de Markov $\{\Theta_i\}$ é ergódica. Existe uma única solução definida positiva $\tilde{Z}$ (com $i \to \infty$) para a equação algébrica de Riccati*

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &:= \Gamma + \mathcal{F}\tilde{Z}\mathcal{F}^T - \mathcal{F}\tilde{Z}\begin{bmatrix}\mathcal{H}\\ \mathcal{L}\end{bmatrix}^T W_{e\infty}^{-1}\begin{bmatrix}\mathcal{H}\\ \mathcal{L}\end{bmatrix}\tilde{Z}\mathcal{F}, \\ W_{e\infty} &:= \begin{bmatrix}\Pi & 0\\ 0 & -\gamma^2\Lambda\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathcal{H}\\ \mathcal{L}\end{bmatrix}\tilde{Z}\begin{bmatrix}\mathcal{H}^T & \mathcal{L}^T\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.62}$$

considerando $\tilde{Z}^{-1} - \gamma^{-2}\mathcal{L}^T\Lambda^{-1}\mathcal{L} > 0$, para qualquer γ fixado, que garante a positividade de $W_{e\infty}$ ($W_{e\infty} > 0$) e, assim, a inversa de $\tilde{Z}$ fica bem definida. Seguindo a linha de [9], a estabilidade do filtro preditor é assegurada com

$$r_\sigma\left(\mathcal{F} - \mathcal{F}M\mathcal{H}^T\left(\Pi + \mathcal{H}M\mathcal{H}^T\right)^{-1}\mathcal{H}\right) < 1,$$

sendo que $r_\sigma(.)$ denota o raio espectral da matriz dinâmica do filtro com ganho estacionário.

Observação 3.2.2. *Considerando $\gamma \to \infty$, a estimativa $\mathcal{H}_\infty$ preditora proposta neste trabalho se reduz à estimativa nominal preditora proposta em [9]. Considerando o sistema sem saltos ($N = 1$), a estimativa $\mathcal{H}_\infty$ preditora se reduz à estimativa $\mathcal{H}_\infty$ preditora para sistemas no espaço de estado proposta em [18] (para quando o sistema singular desta referência é considerado na forma de espaço de estado).*

3.3 Estimativa $\mathcal{H}_\infty$ Filtrada

O problema de filtragem $\mathcal{H}_\infty$ para (3.16)-(3.17) pode ser relacionado a um problema de teoria dos jogos com dois jogadores dado por

$$\min_{\{z_{i|l}\}_{i=0}^{l}} \max_{\{s_{i|l}\}_{i=0}^{l}} J_l^f\left(\{y_i\}_{i=0}^{l}, \{s_{i|l}\}_{i=0}^{l}, \{z_{i|l}\}_{i=0}^{l}\right) > 0 \tag{3.63}$$

sendo

$$J_0^f := \left\|z_{0|0} - \mathcal{F}_{-1}\overline{z}_0\right\|^2_{\tilde{Z}_0^{-1}} + \left\|y_0 - \mathcal{H}_0 z_{0|0}\right\|^2_{\Pi_0^{-1}} - \gamma^{-2}\left\|s_{0|0} - \mathcal{L}_0 z_{0|0}\right\|^2_{\Lambda_0^{-1}} \tag{3.64}$$

para $l = 0$,

$$\begin{aligned} J_l^f &:= \left\|z_{0|l} - \mathcal{F}_{-1}\overline{z}_0\right\|^2_{\tilde{Z}_0^{-1}} + \sum_{i=0}^{l}\left\|y_i - \mathcal{H}_i z_{i|l}\right\|^2_{\Pi_i^{-1}} + \sum_{i=0}^{l-1}\left\|z_{i+1|l} - \mathcal{F}_i z_{i|l}\right\|^2_{\Gamma_i^{-1}} \\ &- \gamma^{-2}\sum_{i=0}^{l}\left\|s_{i|l} - \mathcal{L}_i z_{i|l}\right\|^2_{\Lambda_i^{-1}} \end{aligned} \tag{3.65}$$

para $l > 0$. O problema de filtragem $\mathcal{H}_\infty$ para SLSM (3.16)-(3.17) tem solução no instante l se e somente se existir um $\left\{\hat{s}_{i|l}\right\}_{i=0}^{l}$ tal que $J_l^f\left(\left\{y_i\right\}_{i=0}^{l}, \left\{\hat{s}_{i|l}\right\}_{i=0}^{l}, \left\{z_{i|l}\right\}_{i=0}^{l}\right)$ tenha um mínimo em $\left\{\hat{z}_{i|l}\right\}_{i=0}^{l}$ tal que $J_l^f\left(\left\{y_i\right\}_{i=0}^{l}, \left\{\hat{s}_{i|l}\right\}_{i=0}^{l}, \left\{\hat{z}_{i|l}\right\}_{i=0}^{l}\right) > 0$. Portanto, será considerado o problema de minimização em (3.63). Para cada $l \geq 0$, (3.65) pode ser reescrito como

$$J_l^f := \left(\mathfrak{U}_l\mathfrak{X}_{l|l} - \mathfrak{B}_l\right)^T\mathfrak{R}_l\left(\mathfrak{U}_l\mathfrak{X}_{l|l} - \mathfrak{B}_l\right) \tag{3.66}$$

sendo

$$\begin{aligned} &\mathfrak{X}_{l|l} := \begin{bmatrix} z_{l|l} \\ \vdots \\ z_{1|l} \\ z_{0|l} \end{bmatrix}, \mathfrak{B}_l := \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_l \\ \vdots \\ \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{Z}_0 \end{bmatrix}, \mathfrak{R}_l := \begin{bmatrix} \mathcal{R}_l & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_0 \end{bmatrix}, \mathfrak{U}_l := \begin{bmatrix} \mathcal{E}_l & \mathcal{A}_{l-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_{l-1} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \mathcal{A}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_1 & \mathcal{A}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_0 \end{bmatrix}, \\ &\mathcal{E}_i := \begin{bmatrix} I \\ \mathcal{H}_i \\ \mathcal{L}_i \end{bmatrix}, \mathcal{R}_i := \begin{bmatrix} \Gamma_{i-1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^{-2}\Lambda_i^{-1} \end{bmatrix}, \mathcal{A}_{i-1} := \begin{bmatrix} -\mathcal{F}_{i-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{Z}_i := \begin{bmatrix} 0 \\ y_i \\ s_{i|l} \end{bmatrix}, \\ &1 \leq i \leq l, \mathbb{Z}_0 := \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{-1}\overline{z}_0 \\ y_0 \\ s_{0|l} \end{bmatrix}, \Gamma_{-1} := P_0. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Considerando as variáveis acima, para todo $l \geq 0$, obtêm-se as seguintes relações recorrentes:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{R}_l := \begin{bmatrix} \mathcal{R}_l & 0 \\ 0 & \mathfrak{R}_{l-1} \end{bmatrix}, \mathfrak{B}_l := \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_l \\ \mathfrak{B}_{l-1} \end{bmatrix}, \mathfrak{X}_{l|l} := \begin{bmatrix} z_{l|l} \\ \mathfrak{X}_{l-1|l-1} \end{bmatrix}, \mathfrak{U}_l := \begin{bmatrix} \mathcal{E}_l & \alpha_{l-1} \\ 0 & \mathfrak{U}_{l-1} \end{bmatrix}, \\ &\alpha_{l-1} := \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{l-1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Similar ao caso preditor, pode-se encontrar uma condição necessária para a filtragem $\mathcal{H}_\infty$ de

SLSM. Segundo o Lema (3.2.1), existe uma única solução $\left\{\hat{z}_{i|l}\right\}_{i=0}^{l}$ para (3.63) se e somente se $\mathfrak{U}_l^T\mathfrak{R}_l\mathfrak{U}_l > 0$, sendo $\mathfrak{U}_l$ e $\mathfrak{R}_l$ definidos em (3.67). Uma condição necessária para existir um mínimo único é que

$$\Gamma_{l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l - \gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_l^{-1}\mathcal{L}_l > 0. \tag{3.69}$$

A dedução da estimativa $\mathcal{H}_\infty$ filtrada segue o mesmos passos da estimativa $\mathcal{H}_\infty$ preditora. A estimativa $\mathcal{H}_\infty$ filtrada para SLSM está descrita na Tabela (3.2).

Tabela 3.2: Estimativa $\mathcal{H}_\infty$ Filtrada para o SLSM (3.4)

Existe um filtro $\mathcal{H}_\infty$ recursivo que resolve (3.63)-(3.65) se e somente se para um determinado $\gamma > 0$ houver a garantia de que $\tilde{Z}_{l|l} > 0$, para $l = 0, 1, ...$ O filtro satisfaz os seguintes passos

Passo 0 : Considere as seguintes condições iniciais conhecidas:

$$\begin{aligned}
&\tilde{Z}_{0|0}^{-1} := \tilde{Z}_0^{-1} + \mathcal{H}_0^T\Pi_0^{-1}\mathcal{H}_0 - \gamma^{-2}\mathcal{L}_0^T\Lambda_0^{-1}\mathcal{L}_0,\\
&\hat{z}_{0|0} := \left(P_{0|0}^{-1} + \gamma^{-2}\mathcal{L}_0^T\Lambda_0^{-1}\mathcal{L}_0\right)^{-1}\left(\tilde{Z}_0^{-1}\mathcal{F}_{-1}^T\overline{z}_0 + \mathcal{H}_0^T\Pi_0^{-1}y_0\right).
\end{aligned}$$

Passo 1: Atualize $\left\{\tilde{Z}_{l|l}, \hat{z}_{l|l}\right\}$ para $\left\{\tilde{Z}_{l+1|l+1}, \hat{z}_{l+1|l+1}\right\}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\tilde{Z}_{l|l}^{-1} := \left(\Gamma_{l-1} + \mathcal{F}_{l-1}\tilde{Z}_{l-1|l-1}\mathcal{F}_{l-1}^T\right)^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l - \gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_l^{-1}\mathcal{L}_l,\\
&\hat{z}_{l|l} := \left(\tilde{Z}_{l|l}^{-1} + \gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_l^{-1}\mathcal{L}_l\right)^{-1}\left(X_{l-1}^{-1}\mathcal{F}_{l-1}\hat{z}_{l-1|l-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}y_l\right),\\
&X_{l-1} := \Gamma_{l-1} + \mathcal{F}_{l-1}\tilde{Z}_{l-1|l-1}\mathcal{F}_{l-1}^T,\\
&\hat{s}_{l|l} := \mathcal{L}_l\hat{z}_{l|l}.
\end{aligned}$$

Observação 3.3.1. *Para o caso sem saltos ($N = 1$) a estimativa $\mathcal{H}_\infty$ filtrada para SLSM é reduzida para a estimativa $\mathcal{H}_\infty$ filtrada para sistemas convencionais no espaço de estado dado em [18] (quando o sistema singular desta referência é considerado não singular, ou seja, na forma de espaço de estado).*

3.4 Exemplo Numérico

Nesta seção será realizada uma comparação entre o filtro preditor $\mathcal{H}_\infty$ para SLSM desenvolvido na última seção e o filtro $\mathcal{H}_\infty$ desenvolvido em [13], baseado em um exemplo numérico

com dois estados Markovianos. A matriz de probabilidade de transição e os parâmetros do sistema são definidos como segue:

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix},$$
$$G_1 = G_2 \begin{bmatrix} 0.8731 & 0 \\ 0 & 0.2089 \end{bmatrix}, H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$D_1 = D_2 \begin{bmatrix} 0.008 & 0 \end{bmatrix}, L_1 = L_2 \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \end{bmatrix},$$
$$R_1 = R_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

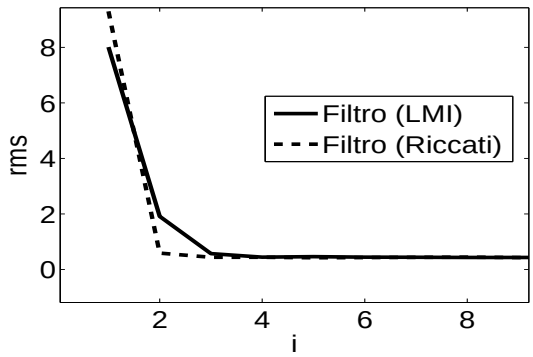


Figura 3.1: Raiz quadrada do erro médio quadrático dos filtros $\mathcal{H}_\infty$ baseados em equações de Riccati recursivas e desigualdades matriciais lineares.

A Figura 3.1 mostra a raiz quadrada do erro médio quadrático (rms) de ambos os filtros. Foram realizadas 1000 simulações de Monte Carlo com $i = 0, ..., 9$ e os valores de Θ_i gerados aleatoriamente. A condição inicial x_0 é considerada Gaussiana, $\Theta_i \in \{1, 2\}$, u_i, w_i e v_i são sequências de ruídos independentes e $\pi_1(0) = 0.05$ e $\pi_2(0) = 0.95$. Obtém-se $\gamma = 1.9523$ para o filtro proposto neste trabalho e $\gamma = 0.2886$ para o filtro proposto em [13]. Note que apesar do γ do filtro em [13] ser menor, o rms de ambos os filtros são equivalentes com uma pequena vantagem do filtro proposto neste trabalho.

CAPÍTULO 4

Filtragem Robusta para SLSM

Este capítulo apresenta estimativas robustas, preditora e filtrada, para SLSM baseadas no método dos mínimos quadrados regularizados. Um funcional custo é minimizado para o pior caso das incertezs admissíveis. A principal vantagem desta abordagem é a recursividade dos filtros, considerando que as variâncias do SLSM sejam calculadas a priori. Os filtros propostos assumem que os parâmetros de salto do SLSM não são acessíveis.

4.1 Preliminares

Os filtros robustos recursivos que serão deduzidos neste capítulo estão baseados no seguinte SLSM discreto no tempo:

$$x_{i+1} = \big(F_{i,\Theta_i} + \delta F_{i,\Theta_i}\big)x_i + G_{i,\Theta_i}u_i, \quad i = 0, 1... \tag{4.1}$$

$$y_i = \big(H_{i,\Theta_i} + \delta H_{i,\Theta_i}\big)x_i + D_{i,\Theta_i}w_i, \tag{4.2}$$

sendo $x_i \in \mathbb{R}^n$ sequência de estado, $y_i \in \mathbb{R}^m$ sequência de saída, $u_i \in \mathbb{R}^{q_1}$, $w_i \in \mathbb{R}^{q_2}$ distúrbios aleatórios independentes com média zero e covariâncias U_i e W_i respectivamente, Θ_i é uma cadeia de Markov discreta no tempo com espaço de estado finito $\big\{1, ..., N\big\}$ e matriz de probabilidade de transição $P = [p_{jk}]$, sendo $p_{jk} = \mathcal{P}\big(\Theta_{i+1} = k|\Theta_i = j\big)$. $\pi_{i,j} := \mathcal{P}\big(\Theta_i = j\big)$ é a distribuição de

probabilidade da cadeia de Markov. $F_{i,k} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G_{i,k} \in \mathbb{R}^{n\times q_1}$, $H_{i,k} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $D_{i,k} \in \mathbb{R}^{m\times q_2}$ são matrizes de parâmetros variantes no tempo sendo $k \in \{1, ..., N\}$, $\delta F_{i,k} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\delta H_{i,k} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ são matrizes de parâmetros incertas. $x_0 1_{\{\Theta_0=k\}}$, $k = 1, ..., N$, são vetores aleatórios com $\mathbb{E}\{x_0 1_{\{\Theta_0=k\}}\} = \mu_k$ (sendo que $1_{\{.\}}$ denota a medida de Dirac) e $\mathbb{E}\{x_0 x_0^T 1_{\{\Theta_0=k\}}\} = V_k$; x_0 e $\{\Theta_i\}$ são independentes de $\{u_i\}$, e $\{w_i\}$. Os parâmetros incertos são modelados como segue:

$$\begin{aligned} \delta F_{i,\Theta_i} &= M^f_{i,\Theta_i} \Delta^1_{i,\Theta_i} N^f_{i,\Theta_i}, \\ \delta H_{i,\Theta_i} &= M^h_{i,\Theta_i} \Delta^2_{i,\Theta_i} N^h_{i,\Theta_i}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

sendo Δ^1_{i,Θ_i} e Δ^2_{i,Θ_i} matrizes arbitrárias satisfazendo $\|\Delta^1_{i,\Theta_i}\| \leq 1$ e $\|\Delta^2_{i,\Theta_i}\| \leq 1$, sendo que a notação $\|.\|$ representa a norma Euclidiana. As matrizes M^f_{i,Θ_i}, M^h_{i,Θ_i}, N^f_{i,Θ_i} e N^h_{i,Θ_i} são assumidas conhecidas e de dimensões apropriadas. As estimativas serão desenvolvidas considerando o seguinte estado aumentado:

$$z_i = \begin{bmatrix} z_{i,1} \\ \vdots \\ z_{i,N} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Nn}, \qquad z_{i,k} = x_i 1_{\{\Theta_i=k\}} \in \mathbb{R}^n. \tag{4.4}$$

Conforme [9] pode-se reescrever a Equação (4.1) em função do estado aumentado z_i:

$$z_{i+1,k} = 1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} \begin{bmatrix} (F_{i,1} + \delta F_{i,1}) & \dots & (F_{i,N} + \delta F_{i,N}) \end{bmatrix} z_i + 1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} G_{i,\Theta_i} u_i. \tag{4.5}$$

Somando e subtraindo o termo $\begin{bmatrix} p_{1k}(F_{i,1} + \delta F_{i,1}) & \dots & p_{Nk}(F_{i,N} + \delta F_{i,N}) \end{bmatrix} z_i$ na Equação (4.5) tem-se:

$$\begin{aligned} z_{i+1,k} &= \begin{bmatrix} p_{1k}(F_{i,1} + \delta F_{i,1}) & \dots & p_{Nk}(F_{i,N} + \delta F_{i,N}) \end{bmatrix} z_i \\ &+ \Big(1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} \begin{bmatrix} (F_{i,1} + \delta F_{i,1}) & \dots & (F_{i,N} + \delta F_{i,N}) \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} p_{1k}(F_{i,1} + \delta F_{i,1}) & \dots & p_{Nk}(F_{i,N} + \delta F_{i,N}) \end{bmatrix} \Big) z_i + 1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} G_{i,\Theta_i} u_i. \end{aligned} \tag{4.6}$$

A equação (4.6) pode ainda ser reescrita como

$$\begin{aligned} z_{i+1,k} &= \begin{bmatrix} p_{1k}(F_{i,1} + \delta F_{i,1}) & \dots & p_{Nk}(F_{i,N} + \delta F_{i,N}) \end{bmatrix} z_i \\ &+ \begin{bmatrix} (1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} - p_{1k})(F_{i,1} + \delta F_{i,1}) & \dots & (1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} - p_{Nk})(F_{i,N} + \delta F_{i,N}) \end{bmatrix} z_i \\ &+ 1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} G_{i,\Theta_i} u_i. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Fazendo as seguintes definições

$$\mathcal{M}_{i+1} := \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{i+1,1} \\ \vdots \\ \mathcal{M}_{i+1,N} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{M}_{i+1,k} := \begin{bmatrix} \big(1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} - p_{1k}\big)\big(F_{i,1} + \delta F_{i,1}\big) & \dots & \big(1_{\{\Theta_{i+1}=k\}} - p_{Nk}\big)\big(F_{i,N} + \delta F_{i,N}\big) \end{bmatrix},$$

$$\vartheta_i := \begin{bmatrix} 1_{\{\Theta_{i+1}=1\}} G_{i,\Theta_i} u_i \\ \vdots \\ 1_{\{\Theta_{i+1}=N\}} G_{i,\Theta_i} u_i \end{bmatrix}, \mathcal{F}_i := \begin{bmatrix} p_{11} F_{i,1} & \dots & p_{N1} F_{i,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N} F_{i,1} & \dots & p_{NN} F_{i,N} \end{bmatrix},$$

$$\delta\mathcal{F}_i := \begin{bmatrix} p_{11}\delta F_{i,1} & \dots & p_{N1}\delta F_{i,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N}\delta F_{i,1} & \dots & p_{NN}\delta F_{i,N} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} M^f_{i,1} & \dots & p_{N1} M^f_{i,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N} M^f_{i,1} & \dots & p_{NN} M^f_{i,N} \end{bmatrix}}_{M^f_i}$$
$$\times \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta^1_{i,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Delta^1_{i,N} \end{bmatrix}}_{\Delta^1_i} \underbrace{\begin{bmatrix} N^f_{i,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & N^f_{i,N} \end{bmatrix}}_{N^f_i},$$

a Equação (4.7) pode ser reescrita como

$$z_{i+1} = \big(\mathcal{F}_i + \delta\mathcal{F}_i\big) z_i + \mathcal{M}_{i+1} z_i + \vartheta_i \tag{4.8}$$

e considerando $\psi_i = \mathcal{M}_{i+1} z_i + \vartheta_i$, a Equação (4.8) pode ser então reescrita como

$$z_{i+1} = \big(\mathcal{F}_i + \delta\mathcal{F}_i\big) z_i + \psi_i. \tag{4.9}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, a equação da medida (4.2) pode ser escrita como

$$y_i = \begin{bmatrix} \big(H_{i,1} + \delta H_{i,N}\big) & \dots & \big(H_{i,N} + \delta H_{i,N}\big) \end{bmatrix} z_i + D_{i,\Theta_i} w_i. \tag{4.10}$$

Fazendo as seguintes definições

$$\mathcal{H}_i := \begin{bmatrix} H_{i,1} & \dots & H_{i,N} \end{bmatrix}, \tag{4.11}$$

$$\delta\mathcal{H}_i := \begin{bmatrix} \delta H_{i,1} & \dots & \delta H_{i,N} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} M^h_{i,1} & \dots & M^h_{i,N} \end{bmatrix}}_{M^h_i}$$
$$\times \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta^2_{i,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Delta^2_{i,N} \end{bmatrix}}_{\Delta^2_i} \underbrace{\begin{bmatrix} N^h_{i,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & N^h_{i,N} \end{bmatrix}}_{N^h_i},$$

$$\varphi_i := D_{i,\Theta_i} w_i, \tag{4.12}$$

segue que a Equação (4.10) pode ser reescrita como

$$y_i = \big(\mathcal{H}_i + \delta\mathcal{H}_i\big) z_i + \varphi_i. \tag{4.13}$$

Assim temos que o sistema aumentado em termos de z_i é dado por

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= \big(\mathcal{F}_i + \delta\mathcal{F}_i\big) z_i + \psi_i, \quad i = 0, 1... \\ y_i &= \big(\mathcal{H}_i + \delta\mathcal{H}_i\big) z_i + \varphi_i. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Pelas hipóteses anteriormente feitas sobre os distúrbios u_i e v_i, segue que o sistema aumentado (4.14) assume as seguintes propriedades:

- $\mathbb{E}\{\psi_i\} = \mathbb{E}\{\varphi_i\} = 0$,
- $\mathbb{E}\{z_i \psi_i^T\} = \mathbb{E}\{z_i \varphi_i^T\} = \mathbb{E}\{\psi_i \varphi_i^T\} = 0$.

O estado do sistema original (4.1) e (4.2) pode ser recuperado por

$$x_i := \sum_{j=1}^{N} z_{i,j}. \tag{4.15}$$

O primeiro problema que vamos resolver é deduzir a estimativa robusta preditora baseada no

sistema aumentado (4.14). Para tanto, define-se $\hat{z}_{i|i-1}$ como a variável de predição de z_i, $\tilde{Z}_{i|i-1}$ como a matriz de ponderação para o erro de predição $z_i - \hat{z}_{i|i-1}$, e a observação da medida é dada por y_i. Para atualizar a estimativa $\hat{z}_{i|i-1}$ para $\hat{z}_{i+1|i}$, é necessário resolver o seguinte problema de otimização:

$$\min_{z_i, z_{i+1}} \max_{\delta\mathcal{F}_i, \delta\mathcal{H}_i} \left[\left\| z_i - \hat{z}_{i|i-1} \right\|^2_{\tilde{Z}^{-1}_{i|i-1}} + \left\| z_{i+1} - \left(\mathcal{F}_i + \delta\mathcal{F}_i\right) z_i \right\|^2_{\Pi_i^{-1}} + \left\| y_i - \left(\mathcal{H}_i + \delta\mathcal{H}_i\right) z_i \right\|^2_{R_i^{-1}} \right]. \quad (4.16)$$

O segundo problema que vamos resolver trata-se da estimativa robusta filtrada, também baseada no sistema aumentado (4.14). Neste caso, define-se $\hat{z}_{i|i}$ como a variável de filtragem de z_i, $\tilde{Z}_{i|i}$ como matriz de ponderação do erro de filtragem $z_i - \hat{z}_{i|i}$, e a medida de observação é dada por y_{i+1}. Para atualizar a estimativa $\hat{z}_{i|i}$ para $\hat{z}_{i+1|i+1}$, será necessário resolver o seguinte problema de otimização:

$$\min_{z_i, z_{i+1}} \max_{\delta\mathcal{F}_i, \delta\mathcal{H}_{i+1}} \left[\left\| z_i - \hat{z}_{i|i} \right\|^2_{\tilde{Z}^{-1}_{i|i}} + \left\| z_{i+1} - \left(\mathcal{F}_i + \delta\mathcal{F}_i\right) z_i \right\|^2_{\Pi_i^{-1}} + \left\| y_{i+1} - \left(\mathcal{H}_{i+1} + \delta\mathcal{H}_{i+1}\right) z_{i+1} \right\|^2_{R_{i+1}^{-1}} \right]. \quad (4.17)$$

As matrizes de ponderação Π_i e R_i serão definidas na sequência. Considere as seguintes definições para as variáveis de segundo momento para $i \geq 0$ e $k \in \{1, ..., N\}$:

$$\begin{aligned} Z_i &:= \mathbb{E}\left\{ z_i z_i^T \right\} = diag\left[Z_{i,k} \right] \in \mathbb{R}^{NnxNn}, \\ Z_{i,k} &:= \mathbb{E}\left\{ z_{i,k} z_{i,k}^T \right\} \in \mathbb{R}^{nxn}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

$Z_{i,k}$ pode ser calculado pela seguinte equação recursiva:

$$Z_{i+1,k} := \sum_{j=1}^{N} p_{jk} \left(F_{i,j} + \delta F_{i,j}\right) Z_{i,j} \left(F_{i,j} + \delta F_{i,j}\right)^T + \sum_{j=1}^{N} p_{jk} \pi_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T, \quad (4.19)$$

$$Z_{0,k} := V_k. \quad (4.20)$$

As variâncias dos ruídos ψ_i e φ_i serão definidas como segue:

$$\begin{aligned} P_i &:= \mathbb{E}\left\{ \psi_i \psi_i^T \right\} = diag\left[\sum_{j=1}^{N} p_{jk} (F_{i,j} + \delta F_{i,j}) Z_{i,j} (F_{i,j} + \delta F_{i,j})^T \right] \\ &- \underbrace{\left(\mathcal{F}_i + \delta\mathcal{F}_i\right) Z_i \left(\mathcal{F}_i + \delta\mathcal{F}_i\right)^T}_{\mathcal{L}_i} + diag\left[\sum_{j=1}^{N} p_{jk} \pi_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T \right], \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$R_i := \mathbb{E}\left\{ \varphi_i \varphi_i^T \right\} = \sum_{j=1}^{N} \pi_{i,j} D_{i,j} W_i D_{i,j}^T. \quad (4.22)$$

Pode-se notar que $Z_{i+1,k}$ em (4.19) possui um termo incerto e P_i em (4.21) é composta pela diferença de dois termos incertos. Para estabelecer um limitante superior para (4.21), que será utilizado nos filtros desenvolvidos neste capítulo como variância efetiva de ψ_i, serão introduzidos no lema a seguir dois resultados importantes: o primeiro calcula um limitante superior para o termo incerto positivo, o outro será usado para calcular um limitante inferior para o termo negativo de (4.21). É importante ressaltar que na literatura encontram-se lemas para calcular limitantes superiores de termos incertos quadráticos como $\mathcal{L}_i$, porém não se encontra lemas para calcular o limitante inferior de $\mathcal{L}_i$. O Lema (4.1.1), cobre esta lacuna.

Lema 4.1.1. *Sejam as matrizes $\mathcal{P} \geq 0$, $\mathcal{A}$ e o termo incerto $\delta\mathcal{A} = \mathcal{M}\Delta\mathcal{N}$ sendo $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ matrizes conhecidas e Δ uma matriz desconhecida, com $\Delta\Delta^T \leq I$. Para qualquer κ tal que $\kappa I + \mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{N}^T > 0$ e para qualquer ϵ tal que $\epsilon I - \mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{N}^T > 0$, as seguintes desigualdades são satisfeitas:*

$$\mathcal{P}^L \leq (\mathcal{A} + \delta\mathcal{A})\,\mathcal{P}\,(\mathcal{A} + \delta\mathcal{A})^T \leq \mathcal{P}^U, \tag{4.23}$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^L &:= \mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{A}^T - \mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{N}^T\left(\kappa I + \mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{N}^T\right)^{-1}\mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{A}^T - \kappa\mathcal{M}\mathcal{M}^T, \\ \mathcal{P}^U &:= \mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{A}^T + \mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{N}^T\left(\epsilon I - \mathcal{N}P\mathcal{N}^T\right)^{-1}\mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{A}^T + \epsilon\mathcal{M}\mathcal{M}^T. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Em particular, se $\mathcal{P} > 0$ e $\kappa \neq 0$, então os limitantes inferior e superior podem também ser reescritos como

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^L &= \mathcal{A}\left(\mathcal{P}^{-1} + \kappa^{-1}\mathcal{N}^T\mathcal{N}\right)^{-1}\mathcal{A}^T - \kappa\mathcal{M}\mathcal{M}^T, \\ \mathcal{P}^U &= \mathcal{A}\left(\mathcal{P}^{-1} - \epsilon^{-1}\mathcal{N}^T\mathcal{N}\right)^{-1}\mathcal{A}^T + \epsilon\mathcal{M}\mathcal{M}^T. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Prova: O limitante superior é apresentado no Lema (2) de [34]. Para o limitante inferior, sabendo que $\kappa I + \mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{N}^T > 0$ e a inversa da sua raiz quadrada $\left(\kappa I + \mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{N}^T\right)^{-\frac{1}{2}}$ está bem definida, define-se então

$$\Xi := \mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{N}^T\left(\kappa I + \mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{N}^T\right)^{-\frac{1}{2}} + \mathcal{M}\Delta\left(\kappa I + \mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{N}^T\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.26}$$

Tem-se que

$$\begin{aligned} 0 \leq \Xi\Xi^T &= \mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{N}^T\big(\kappa I + \mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{N}^T\big)^{-1}\mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{A}^T + \mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{N}^T\Delta^T\mathcal{M}^T + \mathcal{M}\Delta\mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{A}^T + \kappa\mathcal{M}\Delta\Delta^T\mathcal{M}^T \\ &+ \mathcal{M}\Delta\mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{N}^T\Delta^T\mathcal{M}^T, \end{aligned} \tag{4.27}$$

sendo $\delta\mathcal{A} := \mathcal{M}\Delta\mathcal{N}$, (4.27) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} 0 \leq \Xi\Xi^T &= \mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{N}^T\big(\kappa I + \mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{N}^T\big)^{-1}\mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{A}^T + \mathcal{A}\mathcal{P}\delta\mathcal{A}^T + \delta\mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{A}^T + \delta\mathcal{A}\mathcal{P}\delta\mathcal{A}^T \\ &+ \kappa\mathcal{M}\Delta\Delta^T\mathcal{M}^T, \end{aligned} \tag{4.28}$$

somando e subtraindo o termo $\mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{A}^T$ em (4.28) tem-se

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{N}^T\big(\kappa I + \mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{N}^T\big)^{-1}\mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{A}^T - \mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{A}^T + \big(\mathcal{A} + \delta\mathcal{A}\big)\mathcal{P}\big(\mathcal{A} + \delta\mathcal{A}\big)^T \\ &+ \kappa\mathcal{M}\Delta\Delta^T\mathcal{M}^T \end{aligned} \tag{4.29}$$

e com $\Delta\Delta^T \leq I$, esta desigualdade torna-se

$$0 \leq \mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{N}^T\big(\kappa I + \mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{N}^T\big)^{-1}\mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{A}^T - \mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{A}^T + \big(\mathcal{A} + \delta\mathcal{A}\big)\mathcal{P}\big(\mathcal{A} + \delta\mathcal{A}\big)^T + \kappa\mathcal{M}\mathcal{M}^T \tag{4.30}$$

que recai no resultado desejado

$$-\big(\mathcal{A} + \delta\mathcal{A}\big)\mathcal{P}\big(\mathcal{A} + \delta\mathcal{A}\big)^T \leq -\mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{A}^T + \mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{N}^T\big(\kappa I + \mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{N}^T\big)^{-1}\mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{A}^T + \kappa\mathcal{M}\mathcal{M}^T. \tag{4.31}$$

$\diamond$

Com o Lema (4.1.1) pode-se calcular um limitante superior para as variáveis $Z_{i+1,k}$ e P_i. Primeiro note que sem incertezas, para cada modo k, as variáveis de segunda ordem nominais $Z_i^N = diag\big[Z_{i,j}^N\big]$ e P_i^N são dadas pelas seguintes fórmulas:

$$Z_{i+1,k}^N = \sum_{j=1}^{N} p_{jk}F_{i,j}Z_{i,j}^N F_{i,j}^T + \sum_{j=1}^{N} p_{jk}\pi_{i,j}G_{i,j}U_iG_{i,j}^T, \quad Z_{0,k}^N = V_k \tag{4.32}$$

$$P_i^N = diag\left[\sum_{j=1}^{N} p_{jk}F_{i,j}Z_{i,j}^N F_{i,j}^T\right] - \mathcal{F}_iZ_i^N\mathcal{F}_i^T + diag\left[\sum_{j=1}^{N} p_{jk}\pi_{i,j}G_{i,j}U_iG_{i,j}^T\right]. \tag{4.33}$$

Para $Z_i = diag\,[Z_{i,k}]$ dado em (4.19), pode-se obter a sequência do limitante superior $Z_i^U = diag\left[Z_{i,j}^U\right]$, e a sequência do limitante inferior $Z_i^L = diag\left[Z_{i,j}^L\right]$ geradas pelas seguintes equações

recursivas:

$$
\begin{aligned}
Z^L_{i+1,k} &= \sum_{j=1}^{N} p_{jk}\left[F_{i,j}\left(\left(Z^L_{i,j}\right)^{-1}+\kappa^{-1}_{i,(j,k)}N^{f^T}_{i,j}N^f_{i,j}\right)^{-1}F^T_{i,j}-\kappa_{i,(j,k)}M_{i,j}M^T_{i,j}\right]+\mathcal{U}_{i,k},\\
Z^L_{0,k} &= \Xi_k, \qquad (4.34)\\
Z^U_{i+1,k} &= \sum_{j=1}^{N} p_{jk}\left[F_{i,j}\left(\left(Z^U_{i,j}\right)^{-1}-\epsilon^{-1}_{ij}N^{f^T}_{i,j}N^f_{i,j}\right)^{-1}F^T_{i,j}+\epsilon_{ij}M_{i,j}M^T_{i,j}\right]+\mathcal{U}_{i,k},\\
Z^U_{0,k} &= \Xi_k, \qquad (4.35)
\end{aligned}
$$

sendo $\mathcal{U}_{i,k}=\sum_{j=1}^{N}p_{jk}\pi_{i,j}G_{i,j}U_iG^T_{i,j}$, para todo $\kappa_{i,(j,k)}$, $\epsilon_{i,j}\in\mathbb{R}^+$ tal que

$$
\kappa_{i,(j,k)}=\beta_{i,(j,k)}\sigma_{min}\big(p_{jk}\pi_{i,j}G_{i,j}U_iG^T_{i,j}\big)\sigma_{max}\Big(p_{jk}M^f_{i,j}M^{fT}_{i,j}\Big)^{-1}, \qquad (4.36)
$$

com $0<\beta_{i,(j,k)}<1$ e $\epsilon_{i,j}=\alpha_{i,j}\left\|N^{fT}_{i,j}Z^U_{i,j}N^f_{i,j}\right\|$ com $\alpha_{i,j}>1$. $\sigma_{min}(X)$ e $\sigma_{max}(X)$ referem-se ao máximo e ao mínimo valores singulares de X, respectivamente.

As covariâncias Z^L_i, Z^N_i, Z_i, e Z^U_i são relacionadas como:

$$
Z^L_i\le Z_i\le Z^U_i \text{ e } Z^L_i\le Z^N_i\le Z^U_i, \qquad (4.37)
$$

para todo $\Delta_{i,j}$ tal que $\Delta_{i,j}\Delta^T_{i,j}\le I$; para todo $\kappa_{i,(j,k)}\in\mathbb{R}$ tal que $\kappa_{i,(j,k)}I+N^f_{i,j}Z^L_{i,j}N^{f^T}_{i,j}>0$ e para todo $\epsilon_{ij}>0$ tal $\epsilon_{ij}I-N^f_{i,j}Z^U_{i,j}N^{f^T}_{i,j}>0$. Em particular, se $M_{i,j}=0$ e $N^f_{i,j}=0$ então

$$
Z^L_i=Z_i=Z^N_i=Z^U_i. \qquad (4.38)
$$

Agora, segue diretamente de (4.21) e (4.37) que

$$
\begin{aligned}
P_i\le\Pi_i \;:=\;& diag\Bigg\{\sum_{j=1}^{N}p_{jk}\Bigg[F_{i,j}\left((Z^U_{i,j})^{-1}-\gamma^{-1}_{1_{i,j}}N^{f^T}_{i,j}N^f_{i,j}\right)^{-1}F^T_{i,j}\\
&+\;\gamma_{1_{i,j}}M^f_{i,j}M^{f^T}_{i,j}\Bigg]\Bigg\}-\mathcal{F}_iZ^L_i\mathcal{F}^T_i+\mathcal{F}_iZ^L_iN^{f^T}_i\left(\gamma_{2_i}I+N^f_iZ^L_iN^{f^T}_i\right)^{-1}N^f_iZ^L_i\mathcal{F}^T_i\\
&+\;\gamma_{2_i}M^f_iM^{f^T}_i+diag\left[\sum_{j=1}^{N}p_{jk}\pi_{i,j}G_{i,j}U_iG^T_{i,j}\right], \qquad (4.39)
\end{aligned}
$$

para qualquer $\gamma_{1_{i,j}}>||N^f_{i,j}Z^U_{i,j}N^{f^T}_{i,j}||$ e γ_{2_i} tal que $\gamma_{2_i}I+N^f_iZ^L_iN^{f^T}_i>0$. Note que sempre pode-se escolher $\gamma_{1_{i,j}}=\epsilon_{i,j}$ e $\gamma_{2_i}=max\left\{\kappa_{i,(j,k)}\right\}$.

A equação (4.39) foi obtida baseada em (4.34) e (4.35). Desde que

$$\kappa_{i,(j,k)} = \beta_{i,(j,k)}\sigma_{min}\big(p_{jk}\pi_{i,j}G_{i,j}U_iG_{i,j}^T\big)\sigma_{max}\Big(p_{jk}M_{i,j}^fM_{i,j}^{fT}\Big)^{-1}, \tag{4.40}$$

pode-se calcular recursivamente (4.34) e a convergência é garantida. É fácil checar que de fato converge em virtude da similaridade desta equação com as convencionais de Riccati. Todavia, a convergência de (4.35) não é garantida para qualquer $\epsilon_{i,j} = \alpha_{i,j}\left\|N_{i,j}^{fT}Z_{i,j}^UN_{i,j}^f\right\|$. Pode-se ilustrar esta situação com o seguinte exemplo numérico: considere o Sistema (4.1)-(4.2), para $N = 1$, com

$$F = \begin{bmatrix} 0.4664 & -0.4145 \\ -0.3069 & 0.2677 \end{bmatrix}, \quad M^f = \begin{bmatrix} 0.3789 & 0.1649 \\ 0.3319 & 0.3763 \end{bmatrix}, \quad N^f = \begin{bmatrix} 0.5893 & 0.2726 \\ 0.3436 & 0.2507 \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Z_0^U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.41}$$

Calculando Z_i^U em termos de α_i obtém-se o gráfico da Fig. 4.1 cujo $\varepsilon_{opt} = 3.42$ é dado por $\alpha_{opt} = 2.19$. Note que existe um mínimo para Z_i^U cujo valor não é fácil de encontrar recursivamente, a estabilidade numérica da Riccati não é garantida para qualquer $\alpha_i > 1$.

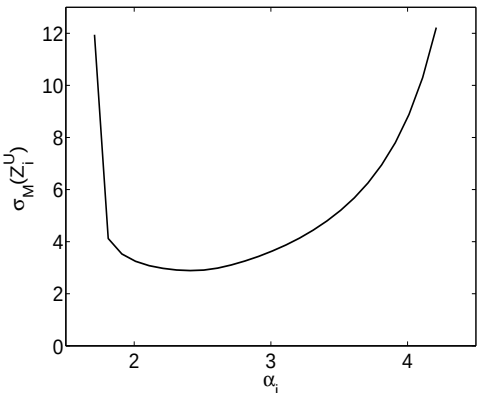


Figura 4.1: Máximo Valor Singular de Z_i^U versus α_i.

O cálculo do limite superior de sistemas incertos tem sido objeto de estudo de diversos autores, veja por exemplo [12], [15], [39] e [40]. As técnicas consideradas nessas referências são baseadas em desigualdades matriciais lineares (DML). A solução estacionária para as equações de Riccati acopladas (4.35) podem ser calculadas através de DML. O ϵ_k-ótimo pode ser encontrado com a solução do seguinte problema de minimização para $k = 1, ..., N$:

$$\min tr\left(Z_k^U\right) \text{ sujeito a}$$

$$\begin{bmatrix} Z_k^U - \sum_{j=1}^N p_{jk} F_j Z_j^U F_j^T - \sum_{j=1}^N p_{jk}\varepsilon_j M_j^f M_j^{fT} - \mathcal{U}_k & p_{1k}^{1/2} F_1 Z_1^U N_1^{fT} & \dots & p_{Nk}^{1/2} F_N Z_N^U N_N^{fT} \\ p_{1k}^{1/2} N_1^f Z_1^U F_1^T & \varepsilon_1 I - N_1^f Z_1^U N_1^{fT} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{Nk}^{1/2} N_N^f Z_N^U F_N^T & 0 & \cdots & \varepsilon_N I - N_N^f Z_N^U N_N^{fT} \end{bmatrix} > 0, \tag{4.42}$$

sendo $\mathcal{U}_k = \sum_{j=1}^N p_{jk}\pi_j G_j U G_j^T$. Com base na solução de (4.42) podemos calcular Π_i da seguinte forma:

$$\Pi_i = diag\{Z_k^U\} - Z_i^{L'} + diag\left[\sum_{j=1}^N p_{jk}\pi_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T\right], \tag{4.43}$$

$$Z_{i+1}^{L'} := \mathcal{F}_i\left(Z_i^{L'^{-1}} + \gamma_{2_i}^{-1} N_i^{f^T} N_i^f\right)^{-1} \mathcal{F}_i^T - \gamma_{2_i} M_i^f M_i^{f^T} + diag\left[\sum_{j=1}^N p_{jk}\pi_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T\right], \tag{4.44}$$

sendo que $Z_i^{L'}$ pode ser calculada recursivamente e γ_{2_i} é dado por

$$\gamma_{2_i} = \tau_i \sigma_{min}\left(diag\left[\sum_{j=1}^N p_{jk}\pi_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T\right]\right)\sigma_{max}\left(M_i^f M_i^{f^T}\right)^{-1}, \quad \text{com} \quad 0 < \tau_i < 1. \tag{4.45}$$

Para o desenvolvimento dos filtros robustos, através da solução dos problemas de otimização (4.16) e (4.17), utilizaremos o método dos mínimos quadrados regularizados com incertezas [26]. O próximo lema mostra de maneira resumida esse método.

Lema 4.1.2. *[26] Considere o seguinte problema:*

$$\min_x \max_{\{\delta A, \delta b\}} \left[\|x\|_V^2 + \|(A+\delta A)x - (b+\delta b)\|_W^2\right] \tag{4.46}$$

sendo A uma matriz conhecida, b um vetor de medida que é assumido conhecido, x é um vetor desconhecido, $V = V^T \geq 0$ e $W = W^T > 0$ são matrizes de ponderação conhecidas, $\{\delta A, \delta b\}$ são perturbações modeladas por

$$\begin{bmatrix} \delta A & \delta b \end{bmatrix} = H\Delta\begin{bmatrix} N_a & N_b \end{bmatrix}, \quad \|\Delta\| \leq 1. \tag{4.47}$$

A solução do problema de otimização (4.46) é dada por

$$\hat{x} = \left[\hat{V} + A^T\hat{W}A\right]^{-1}\left[A^T\hat{W}b + \hat{\lambda}N_a^T N_b\right], \tag{4.48}$$

sendo que as matrizes de ponderação modificadas $\{\hat{V}, \hat{W}\}$ *são definidas por*

$$\hat{V} := V + \hat{\lambda}N_a^T N_a; \tag{4.49}$$

$$\hat{W} := W + WH\big(\hat{\lambda}I - H^T W H\big)^{\dagger} H^T W \tag{4.50}$$

e $\hat{\lambda}$ *é um parâmetro escalar não negativo obtido pelo seguinte problema de otimização:*

$$\hat{\lambda} = arg \min_{\lambda \geq \|H^T W H\|} G(\lambda), \quad sendo \tag{4.51}$$

$$G(\lambda) := \|x(\lambda)\|_V^2 + \lambda\|N_a x(\lambda) - N_b\|^2 + \|Ax(\lambda) - b\|_{W(\lambda)}^2. \tag{4.52}$$

Nas próximas seções serão deduzidas as estimativas robustas, preditora e filtrada, para SLSM discretos no tempo.

4.2 Estimativa Robusta Preditora

O funcional (4.16) pode ser reescrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_{i|i-1} - z_i \\ z_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_{i|i-1} - z_i \\ z_{i+1} \end{bmatrix}$$
$$+ \left(\begin{bmatrix} \mathcal{F}_i + \delta\mathcal{F}_i & I \\ \mathcal{H}_i + \delta\mathcal{H}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_{i|i-1} - z_i \\ z_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \big(\mathcal{F}_i + \delta\mathcal{F}_i\big)\hat{z}_{i|i-1} \\ \big(\mathcal{H}_i + \delta\mathcal{H}_i\big)\hat{z}_{i|i-1} - y_i \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \Pi_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_i^{-1} \end{bmatrix} \Big(\cdot\Big). \tag{4.53}$$

Comparando os funcionais (4.53) e (4.46), obtém-se as seguintes equivalências

$$
\begin{aligned}
x \leftarrow \begin{bmatrix} \hat{z}_{i|i-1} - z_i \\ z_{i+1} \end{bmatrix}, A \leftarrow \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i & I \\ \mathcal{H}_i & 0 \end{bmatrix}, b \leftarrow \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} \\ \mathcal{H}_i \hat{z}_{i|i-1} - y_i \end{bmatrix}, V \leftarrow \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
W \leftarrow \begin{bmatrix} \Pi_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_i^{-1} \end{bmatrix}, N_a \leftarrow \begin{bmatrix} N_i^f & 0 \\ N_i^h & 0 \end{bmatrix}, N_b \leftarrow \begin{bmatrix} N_i^f \hat{z}_{i|i-1} \\ N_i^h \hat{z}_{i|i-1} \end{bmatrix}, H \leftarrow \begin{bmatrix} M_i^f & 0 \\ 0 & M_i^h \end{bmatrix}, \\
\delta A \leftarrow \begin{bmatrix} \delta\mathcal{F}_i & 0 \\ \delta\mathcal{H}_i & 0 \end{bmatrix}, \delta b \leftarrow \begin{bmatrix} \delta\mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} \\ \delta\mathcal{H}_i \hat{z}_{i|i-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.54}
$$

Portanto, o problema de otimização (4.16) pode ser resolvido aplicando o Lema (4.1.2). Pode-se reescrever a Equação (4.48) usando as identificações (4.54), tem-se então que

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{z}_{i|i-1} - \hat{z}_{i|i} \\ \hat{z}_{i+1|i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \hat{\lambda}_i N_i^{f^T} N_i^f + \hat{\lambda}_i N_i^{h^T} N_i^h + \mathcal{F}_i^T \hat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i + \mathcal{H}_i^T \hat{R}_i^{-1} \mathcal{H}_i & \mathcal{F}_i^T \hat{\Pi}_i^{-1} \\ \hat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i & \hat{\Pi}_i^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i^T \hat{\Pi}_i \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} + \mathcal{H}_i^T \hat{R}_i^{-1} \big(\mathcal{H}_i \hat{z}_{i|i-1} - y_i\big) + \hat{\lambda}_i N_i^{f^T} N_i^f \hat{z}_{i|i-1} + \hat{\lambda}_i N_i^{h^T} N_i^h \hat{z}_{i|i-1} \\ \hat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.55}
$$

Considere as seguintes definições

$$
\begin{aligned}
Y_i := \begin{bmatrix} \hat{R}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \hat{R}_i := R_i - \hat{\lambda}_i^{-1} M_i^h M_i^{h^T}, \\
\hat{H}_i := \begin{bmatrix} H_i \\ N_i^{1/2} \end{bmatrix}, \Sigma_i := \begin{bmatrix} y_i \\ 0 \end{bmatrix}, \\
N_i := \hat{\lambda}_i N_i^{f^T} N_i^f + \hat{\lambda}_i N_i^{h^T} N_i^{h^T}.
\end{aligned}
$$

Explicitando o termo $\hat{z}_{i+1|i}$ na Equação (4.55), obtém-se

$$
\begin{aligned}
\hat{z}_{i+1|i} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{F}_i^T \hat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T Y_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i & \mathcal{F}_i^T \hat{\Pi}_i^{-1} \\ \hat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i & \hat{\Pi}_i^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} \big(\mathcal{F}_i^T \hat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T Y_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i\big) \hat{z}_{i|i-1} - \hat{\mathcal{H}}_i^T Y_i^{-1} \Sigma_i \\ \hat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.56}
$$

e aplicando o Lema da inversão de blocos matriciais (A.0.3), a Equação (4.56) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\hat{z}_{i+1|i} = &\left[-\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} \quad \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}\right] \\ &\times \begin{bmatrix} \left(\mathcal{F}_i^T\hat{\Pi}_i^{-1}\mathcal{F}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T Y_i^{-1}\hat{\mathcal{H}}_i\right)\hat{z}_{i|i-1} - \hat{\mathcal{H}}_i^T Y_i^{-1}\Sigma_i \\ \hat{\Pi}_i^{-1}\mathcal{F}_i\hat{z}_{i|i-1} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4.57}$$

e segue que

$$\begin{aligned}\hat{z}_{i+1|i} &= \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}\Big(-CA^{-1}\left(\mathcal{F}_i^T\hat{\Pi}_i^{-1}\mathcal{F}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T Y_i^{-1}\hat{\mathcal{H}}_i\right) + \hat{\Pi}_i^{-1}\mathcal{F}_i\Big)\hat{z}_{i|i-1} \\ &+ \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1}\hat{\mathcal{H}}_i^T Y_i^{-1}\Sigma_i.\end{aligned} \tag{4.58}$$

Definindo $\tilde{Z}_{i+1|i} = \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}$ tem-se que

$$\tilde{Z}_{i+1|i} = \hat{\Pi}_i + \mathcal{F}_i\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}_i^T - \mathcal{F}_i\tilde{Z}_{i|i-1}\hat{\mathcal{H}}^T\left(Y_i + \hat{\mathcal{H}}_i\tilde{Z}_{i|i-1}\hat{\mathcal{H}}_i^T\right)^{-1}\hat{\mathcal{H}}_i\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}_i^T. \tag{4.59}$$

A equação do preditor (4.58) pode agora ser reescrita como

$$\hat{z}_{i+1|i} = \mathcal{F}_i\hat{z}_{i|i-1} + \mathcal{F}_i\tilde{Z}_{i|i-1}\hat{\mathcal{H}}_i^T\left(Y_i + \hat{\mathcal{H}}_i\tilde{Z}_{i|i-1}\hat{\mathcal{H}}_i^T\right)^{-1}\left(\Sigma_i - \hat{\mathcal{H}}_i\hat{z}_{i|i-1}\right). \tag{4.60}$$

O Algoritmo da Tabela (4.1) descreve a estimativa robusta preditora para SLSM.

Tabela 4.1: Estimativa Robusta Preditora para o SLSM (4.14)

A estimativa preditora $\hat{z}_{i+1|i}$, solução do problema de otimização (4.16), pode ser obtida a partir do seguinte algoritmo recursivo:

Passo 0 : Considere as seguintes condições iniciais conhecidas:

$$\tilde{Z}_{0|-1} := P_0,$$
$$\hat{z}_{0|-1} := 0.$$

Passo 1 : Se $M_i^f = 0$ e $M_i^h = 0$, então $\hat{\lambda}_i = 0$. Caso contrário, encontre o parâmetro escalar ótimo $\hat{\lambda}_i$ que minimiza a função $G(\lambda)$ de (4.52)

$$\hat{\lambda}_i := (1+\rho_{1i})\left\| \begin{bmatrix} M_i^{f^T} & 0 \\ 0 & M_i^{h^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i^f & 0 \\ 0 & M_i^h \end{bmatrix} \right\|, \text{ sendo } \rho_{1i} > 0.$$

Passo 2: Se $\hat{\lambda}_i \neq 0$, substitua os parâmetros $\{\Pi_i, R_i\}$ pelos parâmetros corrigidos:

$$\hat{\Pi}_i := \Pi_i - \hat{\lambda}_i^{-1} M_i^f M_i^{f^T},$$
$$\hat{R}_i := R_i - \hat{\lambda}_i^{-1} M_i^h M_i^{h^T}.$$

Passo 3: Atualize $\{\tilde{Z}_{i|i-1}, \hat{z}_{i|i-1}\}$ para $\{\tilde{Z}_{i+1|i}, \hat{z}_{i+1|i}\}$ através das seguintes equações recursivas

$$\tilde{Z}_{i+1|i} := \hat{\Pi}_i + \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T - \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}^T \big(Y_i + \hat{\mathcal{H}}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T\big)^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T,$$
$$\hat{z}_{i+1|i} := \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} + \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \big(Y_i + \hat{\mathcal{H}}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T\big)^{-1} \big(\Sigma_i - \hat{\mathcal{H}}_i \hat{z}_{i|i-1}\big),$$

sendo

$$Y_i := \begin{bmatrix} \hat{R}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \hat{H}_i := \begin{bmatrix} H_i \\ N_i^{1/2} \end{bmatrix}, \Sigma_i := \begin{bmatrix} y_i \\ 0 \end{bmatrix}, N_i := \hat{\lambda}_i \big(N_i^{f^T} N_i^f + N_i^{h^T} N_i^h\big).$$

Observação 4.2.1. *Para garantir a estabilidade do filtro preditor robusto estacionário proposto, assume-se que o sistema é estável na média quadrática (MSS), a cadeia de Markov é ergódica e* $R_{i+1} = R > 0$ *(e com a condição do Passo* 2 *da Tabela (4.1) satisfeita, a positividade de* $\hat{R}_i = \hat{R}$ *é também assegurada). Para* $\epsilon_{i,j} = \epsilon_j$, $\kappa_{i,(j,k)} = \kappa_{j,k}$, $\alpha_{i,j} = \alpha_j$, $\beta_{i,(j,k)} = \beta_{j,k}$ *e* $\hat{\lambda}$ *fixados e para todos os parâmetros do modelo constantes, pode-se considerar a seguinte equação algébrica de Riccati*

$$\tilde{Z} := \hat{\Pi} + \mathcal{F}\tilde{Z}\mathcal{F}^T - \mathcal{F}\tilde{Z}\begin{bmatrix}\mathcal{H}^T & N^{T/2}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\hat{R} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathcal{H}\\ N^{1/2}\end{bmatrix}\tilde{Z}\begin{bmatrix}\mathcal{H}^T & N^{T/2}\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\mathcal{H}\\ N^{1/2}\end{bmatrix}\tilde{Z}\mathcal{F}^T.$$

Existe uma única solução semi-definida positiva $\tilde{Z}$ *(com* $i \to \infty$*) para (4.61), seguindo as diretrizes estabelecidas em [9], e*

$$r_\sigma(\mathcal{F} - \mathcal{F}\tilde{Z}\begin{bmatrix}\mathcal{H}^T & N^{T/2}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\hat{R} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathcal{H}\\ N^{1/2}\end{bmatrix}\tilde{Z}\begin{bmatrix}\mathcal{H}^T & N^{T/2}\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\mathcal{H}\\ N^{1/2}\end{bmatrix}) < 1$$

sendo que $r_\sigma(.)$ *denota o raio espectral da matriz dinâmica do filtro com ganho estacionário.*

Observação 4.2.2. *Se as incertezas do filtro preditor são canceladas (*$M_i^f = M_i^h = N_i^f = N_i^h = 0$*), o filtro preditor robusto se reduz ao filtro preditor de [9]. Para o caso sem saltos* $(N = 1)$ *o filtro preditor robusto para SLSM é reduzido para o filtro preditor robusto em [16] (quando o sistema singular desta referência é considerado na forma espaço de estados). Consequentemente, para SLSM* $(N = 1)$ *e sem incertezas o filtro preditor robusto para SLSM é reduzido para o preditor do filtro de Kalman padrão.*

4.3 Estimativa Robusta Filtrada

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado na dedução da estimativa preditora, segue que o funcional (4.17) pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} z_i - \hat{z}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i - \hat{z}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}$$
$$+\left(\begin{bmatrix} -\left(\mathcal{F}_i + \delta\mathcal{F}_i\right) & I \\ 0 & \left(\mathcal{H}_i + \delta\mathcal{H}_i\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i - \hat{z}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \left(\mathcal{F}_i + \delta\mathcal{F}_i\right)\hat{z}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \Pi_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} \left(. \right). \tag{4.61}$$

Comparando o funcional (4.61) com o funcional (4.46), obtêm-se as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} &x \leftarrow \begin{bmatrix} z_i - \hat{z}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}, b \leftarrow \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i\hat{z}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}, A \leftarrow \begin{bmatrix} -\mathcal{F}_i & I \\ 0 & \mathcal{H}_i \end{bmatrix}, V \leftarrow \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ &W \leftarrow \begin{bmatrix} \Pi_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_i + 1^{-1} \end{bmatrix}, N_a \leftarrow \begin{bmatrix} -N_i^f & 0 \\ 0 & N_i^h \end{bmatrix}, N_b \leftarrow \begin{bmatrix} N_i^f\hat{z}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ &H \leftarrow \begin{bmatrix} M_i^f & 0 \\ 0 & M_i^h \end{bmatrix}, \delta A \leftarrow \begin{bmatrix} -\delta\mathcal{F}_i & 0 \\ 0 & \delta\mathcal{H}_i \end{bmatrix}, \delta b \leftarrow \begin{bmatrix} \delta\mathcal{F}_i\hat{z}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.62}$$

A dedução da estimativa robusta filtrada segue o mesmo raciocínio da estimativa robusta preditora e será resumida no algoritmo da Tabela (4.2).

Observação 4.3.1. *Para o caso sem incertezas ($M_i^f = M_i^h = N_i^f = N_i^h = 0$), o filtro robusto se reduz ao filtro nominal da Seção (2.3). Para o caso sem saltos ($N = 1$) o filtro robusto para SLSM é reduzido ao filtro robusto em [17] (quando o sistema singular desta referência é considerado na forma espaço de estado). Consequentemente, para SLSM ($N = 1$) e sem incertezas o filtro robusto para SLSM recai no filtro de Kalman padrão.*

Tabela 4.2: Estimativa Robusta Filtrada para o SLSM (4.14)

A estimativa filtrada ótima $\hat{z}_{i|i}$ pode ser obtida a partir do seguinte algoritmo recursivo:

Passo 0 : Considere as seguintes condições iniciais conhecidas

$$\begin{aligned}
&\hat{R}_0 := R_0 - \hat{\lambda}_{-1}^{-1} M_0^h M_0^{h^T}, \\
&\tilde{Z}_{0|0} := \left(P_0^{-1} + \mathcal{H}_0^T \hat{R}_0^{-1} \mathcal{H}_0 + \hat{\lambda}_{-1} N_0^{h^T} N_0^h\right)^{-1}, \\
&\hat{z}_{0|0} := \tilde{Z}_{0|0} \mathcal{H}_0^T \hat{R}_0^{-1} y_0.
\end{aligned}$$

Passo 1 : Se $M_i^f = 0$ e $M_i^h = 0$, então $\hat{\lambda}_i = 0$. Caso contrário, encontre o parâmetro escalar ótimo $\hat{\lambda}_i$ que minimiza a função $G(\lambda)$ de (4.52),

$$\hat{\lambda}_i = (1 + \rho_{2i}) \left\| \begin{bmatrix} M_i^{f^T} & 0 \\ 0 & M_i^{h^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i^f & 0 \\ 0 & M_i^h \end{bmatrix} \right\|, \text{ sendo } \rho_{2i} > 0.$$

Passo 2: Se $\hat{\lambda}_i \neq 0$, os parâmetros $\left\{\Pi_i, R_i\right\}$ são substituidos pelos parâmetros corrigidos:

$$\begin{aligned}
&\hat{\Pi}_i := \Pi_i - \hat{\lambda}_i^{-1} M_i^f M_i^{f^T}, \\
&\hat{R}_{i+1} := R_{i+1} - \hat{\lambda}_i^{-1} M_i^h M_i^{h^T}.
\end{aligned}$$

Passo 3: Atualize $\left\{\tilde{Z}_{i|i}, \hat{z}_{i|i}\right\}$ para $\left\{\tilde{Z}_{i+1|i+1}, \hat{z}_{i+1|i+1}\right\}$ através das seguintes equações recursivas

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_{i+1|i+1} &= \left(\hat{I}^T \left(X_i^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i \tilde{Z}_{i|i} \hat{\mathcal{F}}_i^T\right)^{-1} \hat{I} + \hat{\mathcal{H}}_{i+1}^T Y_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_{i+1}\right)^{-1}, \\
\hat{z}_{i+1|i+1} &= \tilde{Z}_{i+1|i+1} \hat{I}^T \left(X_i + \hat{\mathcal{F}_i}^T X_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i\right)^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \hat{z}_{i|i} + \tilde{Z}_{i+1|i+1} \hat{\mathcal{H}}_{i+1}^T Y_i^{-1} \Sigma_{i+1},
\end{aligned}$$

sendo

$$X_i := \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \; Y_{i+1} = \begin{bmatrix} \hat{R}_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \; \hat{I} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \; \hat{\mathcal{F}}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_i^f \end{bmatrix}, \; \hat{\mathcal{H}}_{i+1} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i+1} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{i+1}^h \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{i+1} = \begin{bmatrix} y_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4.4 Exemplos Numéricos

Nesta seção apresentaremos exemplos numéricos considerando o filtro preditor robusto para SLSM proposto neste capítulo. Será considerado para isto um sistema com dois estados Markovianos. A matriz de probabilidade de transição e os parâmetros do modelo Markoviano são definidos de acordo com as seguintes matrizes:

$$
\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \\
G_1 &= \begin{bmatrix} 0.8731 & 0 \\ 0 & 0.2089 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0.8731 & 0 \\ 0 & 0.2089 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \end{bmatrix}, \\
H_2 &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = 0.008, \quad D_2 = 0.008, \quad M_1^f = \begin{bmatrix} 0.13 & 0 \\ 0.13 & 0.13 \end{bmatrix}, \\
M_2^f &= \begin{bmatrix} 0.13 & 0 \\ 0 & 0.13 \end{bmatrix}, \quad N_1^f = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad N_2^f = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \qquad (4.63)
\end{aligned}
$$

$$
M_1^h = \begin{bmatrix} 0.39 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2^h = \begin{bmatrix} 0.39 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_1^h = \begin{bmatrix} 1.3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad N_2^h = \begin{bmatrix} 1.3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.
$$

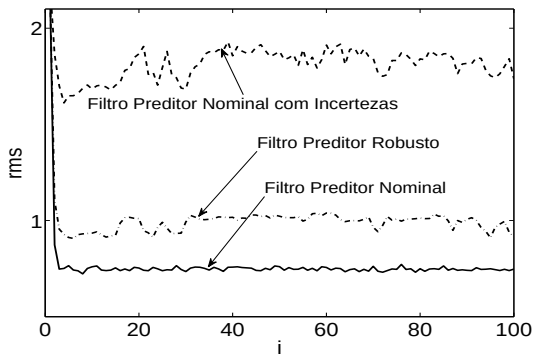


Figura 4.2: Filtro preditor nominal e filtro preditor robusto para SLSM.

Para o primeiro exemplo numérico, a Figura (4.2) mostra um estudo comparativo entre o filtro preditor nominal e o filtro preditor robusto para SLSM. A raiz quadrada do erro médio quadrático (rms, sigla em inglês) do filtro preditor nominal em (2.44) é calculada para o sis-

tema com incertezas e sem incertezas. Estes resultados são comparados com o rms do filtro preditor robusto desenvolvido neste capítulo que foi simulado para o sistema com incertezas. Considera-se na simulação $i = 0, ..., 100$ com os valores da cadeia de Markov Θ_i gerados aleatoriamente. A condição inicial x_0 é considerada Gaussiana com média $\begin{bmatrix} 0.196 & 0.295 \end{bmatrix}^T$ e variância $\begin{bmatrix} 0.0384 & 0.0578 \\ 0.0578 & 0.870 \end{bmatrix}$, $\Theta_i \in \{1, 2\}$, v_i e u_i são sequências de ruídos independentes com $\pi_1(0) = 0.05$ e $\pi_2(0) = 0.95$. Para esta simulação adotou-se $\rho_{1i} = 2$ e $\tau_i = 0.1$. Note que o parâmetro $\hat{\lambda}_i$ muda para cada passo recursivo das 4000 simulações de Monte Carlo. A Figura 4.2 mostra a vantagem do filtro preditor robusto quando o SLSM está sujeito a incertezas.

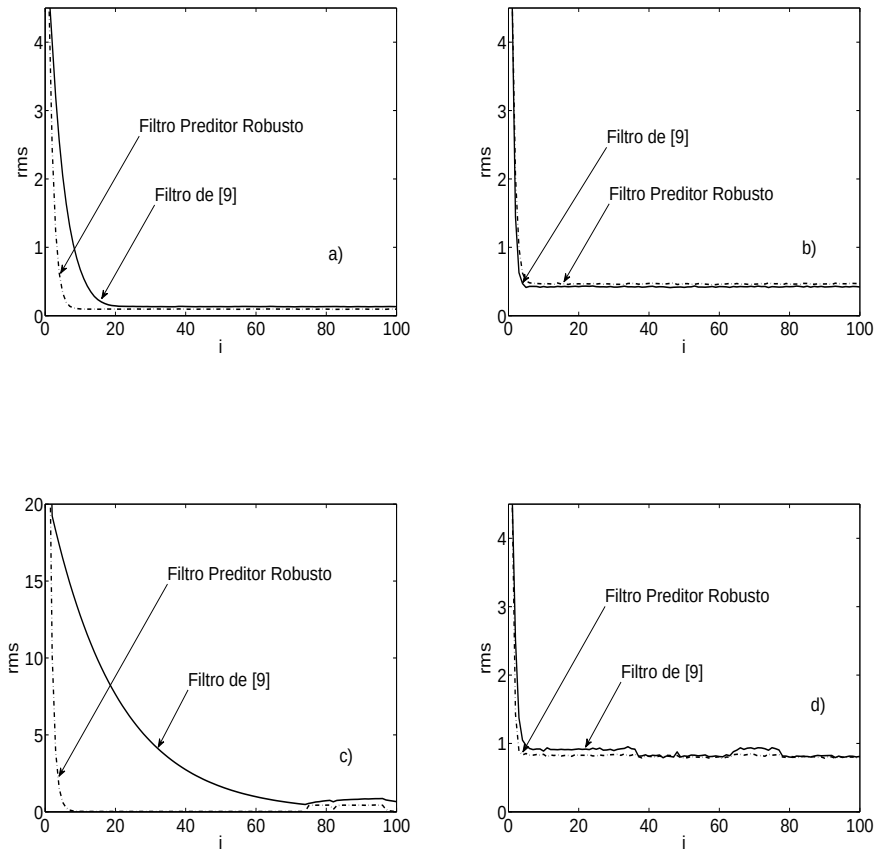


Figura 4.3: Comparação entre o Filtro de [8] e o Filtro Preditor Robusto Recursivo.

Para o segundo exemplo, a Figura 4.3 mostra um estudo comparativo entre o filtro robusto para SLSM proposto em [8] e o filtro preditor robusto que estamos propondo. O filtro de [8] foi deduzido usando incertezas politópicas e é calculado exclusivamente através de LMIs. De acordo com [5] (Observação 7.1, página 265), incertezas politópicas e incertezas de norma limitada podem ser equivalentes em alguns casos. Um desses casos é quando as incertezas de norma

limitada são diagonais. Nesta representação, ambas as incertezas resultam em um conjunto convexo poliedral. Em [8] foram considerados quatro modelos escalares que preenchem esses requisitos para compararmos ambos os filtros. O filtro preditor robusto proposto aqui teve um desempenho superior ao filtro robusto de [8] em três casos: a, c, e d. Por sua vez, o filtro de [8] teve um desempenho melhor no caso b.

CAPÍTULO 5

Filtragem na Forma de Informação para SLSM

Neste capítulo serão desenvolvidos filtros na forma de informação para SLSM. Esses filtros são convenientes quando, por exemplo, não se tem muita informação sobre as condições iniciais dos estados a serem estimados. A covariância do erro de estimativa $\tilde{Z}_{i+1|i}$ é muito grande neste caso. Trabalha-se então nessa estratégia de informação com o inverso da covariância. Essencialmente o algoritmo para filtragem na forma de informação executa os seguintes passos:

Passo 1**:** Calcula a matriz de informação $\tilde{Z}^{-1}_{i+1|i}$;

Passo 2**:** Calcular a estimativa da informação $\tilde{Z}^{-1}_{i|i-1}\hat{z}_{i|i-1}$.

Essa classe de filtros é muito difundida para estimar sistemas convencionais no espaço de estado. Um dos objetivos deste capítulo é mostrar que quando a cadeia de Markov não é conhecida, é possível utilizar, depois de alguma álgebra, as mesmas estratégias de filtragem de informação dos sistemas convencionais em SLSM.

5.1 Filtragem Nominal na Forma de Informação

Será apresentada a seguir a forma de informação do filtro preditor nominal para SLSM apresentado no Capítulo 2 que foi desenvolvido baseado no sistema (2.17). Considere a equação

algébrica de Riccati (2.46) e a equação do filtro preditor (2.44) dadas por:

$$\begin{aligned}
\hat{z}_{i+1|i} &= \mathcal{F}_i\hat{z}_{i|i-1} + \mathcal{F}_i\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}_i^T\left(\mathcal{H}_i\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}_i^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}\left(y_i - \mathcal{H}_i\hat{z}_{i|i-1}\right), && (5.1)\\
\tilde{Z}_{i+1|i} &= \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}^T + \mathcal{Q}_i - \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T\left(\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}^T, && (5.2)
\end{aligned}$$

sendo

$$\mathcal{Q}_i := \mathcal{B}\left(Q_i\right) + diag\left[\sum_{j=1}^{N}\pi_{i,j}p_{jk}G_jG_j^T\right] \tag{5.3}$$

e $\mathcal{B}\left(Q_i\right)$ dado por (2.47) e $Q_i = (Z_{i,1}, ..., Z_{i,N})$ é definida pela equação recursiva (2.48). Pode-se reescrever a equação (5.1) da seguinte forma:

$$\tilde{Z}_{i+1|i} = \mathcal{Q}_i + \mathcal{F}\left(\tilde{Z}_{i|i-1} - \tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T\left(\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\right)\mathcal{F}^T. \tag{5.4}$$

Usando o Lema (A.0.1) da inversão de matrizes tem-se

$$\tilde{Z}_{i+1|i} = \mathcal{Q}_i + \mathcal{F}\left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}^T\left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}\mathcal{H}\right)^{-1}\mathcal{F}^T \tag{5.5}$$

e aplicando novamente o Lema da inversão (A.0.1) obtém-se

$$\tilde{Z}_{i+1|i}^{-1} = \mathcal{Q}_i^{-1} - \mathcal{Q}_i^{-1}\mathcal{F}\left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}^T\left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}\mathcal{H} + \mathcal{F}^T\mathcal{Q}_i^{-1}\mathcal{F}\right)^{-1}\mathcal{F}^T\mathcal{Q}_i^{-1}. \tag{5.6}$$

Agora considere a equação da estimativa nominal preditora (5.1) reescrita como

$$\begin{aligned}
\hat{z}_{i+1|i} &= \mathcal{F}\left(I - \tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T\left(\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}\mathcal{H}\right)\hat{z}_{i|i-1} + \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T\\
&\times \left(\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}y_i. && (5.7)
\end{aligned}$$

Após algumas operações algébricas tem-se que o vetor de informação para a estimativa nominal preditora é dado por:

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_{i+1|i}^{-1}\hat{z}_{i+1|i} &= \mathcal{Q}_i^{-1}\mathcal{F}\left(\mathcal{F}^T\mathcal{Q}_i^{-1}\mathcal{F} + \tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}^T\left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}\mathcal{H}\right)^{-1}\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1}\hat{z}_{i|i-1} + \mathcal{Q}_i^{-1}\mathcal{F}\\
&\times \left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}^T\left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}\mathcal{H} + \mathcal{F}^T\mathcal{Q}_i^{-1}\mathcal{F}\right)^{-1}\mathcal{H}^T\left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}y_i. && (5.8)
\end{aligned}$$

O filtro preditor nominal na forma de informação para SLSM pode ser calculado seguindo os

passos do algoritmo descrito na Tabela (5.1).

Tabela 5.1: Estimativa Nominal Preditora na Forma de Informação

Passo 0 : Considere as seguintes condições iniciais conhecidas para o Sistema (2.17):

$$\tilde{Z}_{0|-1}^{-1} := P_0^{-1},$$
$$\tilde{Z}_{0|-1}^{-1}\hat{z}_{0|-1} := P_0^{-1}\overline{z}_0.$$

Passo 1 : Atualize $\left\{\tilde{Z}_{i|i-1}, \hat{z}_{i|i-1}\right\}$ para $\left\{\tilde{Z}_{i+1|i}, \hat{z}_{i+1|i}\right\}$ da seguinte forma:

$$\tilde{Z}_{i+1|i}^{-1} = \mathcal{Q}_i^{-1} - \mathcal{Q}_i^{-1}\mathcal{F}\left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}^T\left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}\mathcal{H} + \mathcal{F}^T\mathcal{Q}_i^{-1}\mathcal{F}\right)^{-1}\mathcal{F}^T\mathcal{Q}_i^{-1}.$$
$$\tilde{Z}_{i+1|i}^{-1}\hat{z}_{i+1|i} = \mathcal{Q}_i^{-1}\mathcal{F}\left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}^T\left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}\mathcal{H} + \mathcal{F}^T\mathcal{Q}_i^{-1}\mathcal{F}\right)^{-1}\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1}\hat{z}_{i|i-1}$$
$$+\mathcal{Q}_i^{-1}\mathcal{F}\left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}^T\left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}\mathcal{H} + \mathcal{F}^T\mathcal{Q}_i^{-1}\mathcal{F}\right)^{-1}\mathcal{H}^T\left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}y_i.$$

Observação 5.1.1. *Para assegurar a consistência das equações do filtro preditor de informação para SLSM em qualquer tempo i, a inversa de $\mathcal{Q}_i$ deve ser garantida. Sabe-se que $G_jG_j^T > 0$ (para todo $j = 1, ..., N$) e $\mathcal{B}(Q_i) \geq 0$, veja [9]. Estas condições serão suficientes para garantir a inversa de $\mathcal{Q}_i$.*

5.2 Filtragem $\mathcal{H}_\infty$ na Forma de Informação

Nesta seção serão apresentados algoritmos para as estimativas $\mathcal{H}_\infty$, preditora e filtrada, na forma de informação de SLSM. As estimativas estão baseadas no sistema (3.4) e nas estimativas desenvolvidas no Capítulo 3. Sejam a equação de Riccati da estimativa $\mathcal{H}_\infty$ preditora (3.41) e a equação da estimativa preditora (3.61), dadas por:

$$\tilde{Z}_{l+1|l} = \Gamma_l + \mathcal{F}_l\tilde{Z}_{l|l-1}\mathcal{F}_l^T - \mathcal{F}_l\tilde{Z}_{l|l-1}\begin{bmatrix}\mathcal{H}_l\\ \mathcal{L}_l\end{bmatrix}^T W_{e\infty,l}^{-1}\begin{bmatrix}\mathcal{H}_l\\ \mathcal{L}_l\end{bmatrix}\tilde{Z}_{l|l-1}\mathcal{F}_l^T, \tag{5.9}$$

$$\hat{z}_{l+1|l} = \mathcal{F}_l\widehat{z}_{l|l-1} + \mathcal{F}_lM_{l|l-1}\mathcal{H}_l^T\left(\Pi_l + \mathcal{H}_lM_{l|l-1}\mathcal{H}_l^T\right)^{-1}\left(y_l - \mathcal{H}_l\widehat{z}_{l|l-1}\right), \tag{5.10}$$

sendo

$$W_{e\infty,l} = \begin{bmatrix} \Gamma_l & 0 \\ 0 & -\gamma^2\Lambda_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{H}_l \\ \mathcal{L}_l \end{bmatrix} \tilde{Z}_{l|l-1} \begin{bmatrix} \mathcal{H}_l^T & \mathcal{L}_l^T \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

$$M_{l|l-1}^{-1} = \tilde{Z}_{l|l-1}^{-1} - \gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_l^{-1}\mathcal{L}_l \tag{5.12}$$

a equação (5.9) pode ser reescrita de duas formas apropriadas para o filtro de informação:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} &= \left(\Gamma_l + \mathcal{F}_l\Big(\tilde{Z}_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Gamma_l^{-1}\mathcal{H}_l - \gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_l^{-1}\mathcal{L}_l\Big)^{-1}\mathcal{F}_l^T\right)^{-1} \\ &= \Gamma_l^{-1} - \Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l\Big(\tilde{Z}_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Gamma_l^{-1}\mathcal{H}_l - \gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_l^{-1}\mathcal{L}_l + \mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l\Big)\mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1} \end{aligned} \tag{5.13}$$

A estimativa preditora (5.10), por sua vez, pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{l+1|l}^{-1}\widehat{z}_{l+1|l} &= \tilde{Z}_{l+1|l}^{-1}\mathcal{F}_l\left(I - \Big(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l\Big)^{-1}\mathcal{H}_l\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l\right)\widehat{z}_{l|l-1} \\ &+ \Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l\left(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l + \mathcal{F}_l\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l^T\right)^{-1}\mathcal{H}_l\Pi_l^{-1}y_l, \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{l+1|l}^{-1}\widehat{z}_{l+1|l} &= \left(\Gamma_l + \mathcal{F}_l\Big(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l\Big)^{-1}\mathcal{F}_l^T\right)^{-1}\mathcal{F}_l\Big(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l\Big)^{-1} \\ &\times M_{l|l-1}^{-1}\widehat{z}_{l|l-1} + \Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l\left(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l + \mathcal{F}_l\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l^T\right)^{-1}\mathcal{H}_l\Pi_l^{-1}y_l \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{l+1|l}^{-1}\widehat{z}_{l+1|l} &= \Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l\left(I + \Big(\mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l + \mathcal{F}_l\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l^T\Big)M_{l|l-1}\right)^{-1}\tilde{Z}_{l|l-1}\tilde{Z}_{l|l-1}^{-1}\,\widehat{z}_{l|l-1} \\ &+ \Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l\left(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l + \mathcal{F}_l\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l^T\right)^{-1}\mathcal{H}_l\Pi_l^{-1}y_l \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{l+1|l}^{-1}\widehat{z}_{l+1|l} &= \Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l\left(\tilde{Z}_{l|l-1}^{-1} + \Big(\mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l + \mathcal{F}_l\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l^T\Big)M_{l|l-1}\tilde{Z}_{l|l-1}^{-1}\right)^{-1}\tilde{Z}_{l|l-1}^{-1}\,\widehat{z}_{l|l-1} \\ &+ \Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l\left(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l + \mathcal{F}_l\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l^T\right)^{-1}\mathcal{H}_l\Pi_l^{-1}y_l. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Portanto a estimativa $\mathcal{H}_\infty$ preditora na forma de informação para SLSM pode ser calculada através do algoritmo da Tabela (5.2).

Tabela 5.2: Estimativa $\mathcal{H}_\infty$ Preditora na Forma de Informação

A estimativa $\mathcal{H}_\infty$ preditora na forma de informação para o SLSM (3.4) tem solução se e somente se $\tilde{Z}_{l+1|l} > 0$, $l = 0, 1, ...$, considerando os seguintes passos:

Passo 0 : Defina as seguintes condições iniciais conhecidas:

$$\begin{aligned}
&\tilde{Z}_{0|-1}^{-1} = \tilde{Z}_0^{-1}, \\
&\tilde{Z}_{0|-1}^{-1}\widehat{z}_{0|-1} = \tilde{Z}_0^{-1}\mathcal{F}_{-1}\overline{z}_0.
\end{aligned}$$

Passo 1: Atualize $\left\{\tilde{Z}_{l|l-1}, \hat{z}_{l|l-1}\right\}$ para $\left\{\tilde{Z}_{l+1|l}, \hat{z}_{l+1|l}\right\}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} = \Gamma_l^{-1} - \Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l\Big(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l\Big)^{-1}\mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1}, \\
&M_{l|l-1}^{-1} = \tilde{Z}_{l|l-1}^{-1} - \gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_l^{-1}\mathcal{L}_l, \\
&\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1}\widehat{z}_{l+1|l} = \Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l\Big(\tilde{Z}_{l|l-1}^{-1} + \Big(\mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l + \mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l\Big)M_{l|l-1}\tilde{Z}_{l|l-1}^{-1}\Big)^{-1}\tilde{Z}_{l|l-1}^{-1}\widehat{z}_{l|l-1} \\
&+\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l\Big(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l\Big)^{-1}\mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}y_l.
\end{aligned}$$

Considere agora a equação de Riccati e a equação da estimativa $\mathcal{H}_\infty$ filtrada apresentadas na Tabela (3.1) dadas por

$$\tilde{Z}_{l|l}^{-1} = \big(\Gamma_{l-1} + \mathcal{F}_{l-1}\tilde{Z}_{l-1|l-1}\mathcal{F}_{l-1}^T\big)^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l - \gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_l^{-1}\mathcal{L}_l, \tag{5.18}$$

$$\hat{z}_{l|l} = \big(\tilde{Z}_{l|l}^{-1} + \gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_l^{-1}\mathcal{L}_l\big)^{-1}\big(X_{l-1}^{-1}\mathcal{F}_{l-1}\hat{z}_{l-1|l-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}y_l\big), \tag{5.19}$$

$$X_{l-1} = \Gamma_{l-1} + \mathcal{F}_{l-1}\tilde{Z}_{l-1|l-1}\mathcal{F}_{l-1}^T. \tag{5.20}$$

Tendo em vista as equações (5.18)-(5.20), a estimativa $\mathcal{H}_\infty$ filtrada na forma de informação pode ser deduzida de forma análoga à estimativa $\mathcal{H}_\infty$ preditora na forma de informação, cujo algoritmo é definido na Tabela (5.3).

Tabela 5.3: Estimativa $\mathcal{H}_\infty$ Filtrada na Forma de Informação

A estimativa $\mathcal{H}_\infty$ filtrada na forma de informação para SLSM, considerando o filtro descrito nas equações (5.18)-(5.20), tem solução se e somente se $\tilde{Z}_{l|l} > 0$, $l = 0, 1, ...$ e pode ser calculada através dos seguintes passos:

Passo 0 : Considere as seguintes condições iniciais conhecidas:

$$\begin{aligned}
&\tilde{Z}_{0|0}^{-1} := \tilde{Z}_0^{-1} + \mathcal{H}_0^T \Pi_0^{-1} \mathcal{H}_0 - \gamma^{-2} \mathcal{L}_0^T \Lambda_0^{-1} \mathcal{L}_0, \\
&\tilde{Z}_{0|0}^{-1} \widehat{z}_{0|0} := \tilde{Z}_{0|0}^{-1} \Big(\tilde{Z}_{0|0}^{-1} + \gamma^{-2} \mathcal{L}_0^T \Lambda_0^{-1} \mathcal{L}_0 \Big)^{-1} \Big(\tilde{Z}_0^{-1} \mathcal{F}_{-1}^T \overline{z}_0 + \mathcal{H}_0^T \Pi_0^{-1} y_0 \Big).
\end{aligned}$$

Passo 1: Atualize $\left\{ \tilde{Z}_{l|l}, \hat{z}_{l|l} \right\}$ para $\left\{ \tilde{Z}_{l+1|l+1}, \hat{z}_{l+1|l+1} \right\}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\tilde{Z}_{l|l}^{-1} := \Gamma_{l-1}^{-1} - \Gamma_{l-1}^{-1} \mathcal{F}_{l-1} \Big(\tilde{Z}_{l-1|l-1}^{-1} + \mathcal{F}_{l-1}^T \Gamma_{l-1}^{-1} \mathcal{F}_{l-1} \Big)^{-1} \mathcal{F}_{l-1}^T \Gamma_{l-1}^{-1} \\
&+ \mathcal{H}_l^T \Pi_l^{-1} \mathcal{H}_l - \gamma^{-2} \mathcal{L}_l^T \Lambda_l^{-1} \mathcal{L}_l, \\
&\tilde{Z}_{l|l}^{-1} \widehat{z}_{l|l} := \tilde{Z}_{l|l}^{-1} \Big(\tilde{Z}_{l|l}^{-1} + \gamma^{-2} \mathcal{L}_l^T \Lambda_l^{-1} \mathcal{L}_l \Big)^{-1} \\
&\times \Bigg(\Gamma_{l-1}^{-1} \mathcal{F}_{l-1} \Big(\tilde{Z}_{l-1|l-1}^{-1} + \mathcal{F}_{l-1}^T \Gamma_{l-1}^{-1} \mathcal{F}_{l-1} \Big)^{-1} \tilde{Z}_{l-1|l-1}^{-1} \widehat{z}_{l-1|l-1} + \mathcal{H}_l^T \Pi_l^{-1} y_l \Bigg).
\end{aligned}$$

5.3 Filtragem Robusta na Forma de Informação

Esta seção trata das estimativas robustas, preditora e filtrada, na forma de informação para SLSM. As estimativas foram desenvolvidas baseadas no sistema (4.14) e nas estimativas apresentadas no Capítulo 4, considerando a equação algébrica de Riccati (4.59) e a equação da estimativa robusta preditora (4.60) dadas por

$$\tilde{Z}_{i+1|i} = \widehat{\Pi}_i + \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T - \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{X}_i^T \Big(\mathcal{Y}_i + \mathcal{X}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{X}_i^T \Big)^{-1} \mathcal{X}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \mathcal{F}_i^T \tag{5.21}$$

$$\hat{z}_{i+1|i} = \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i-1} + \mathcal{F}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \big(Y_i + \hat{\mathcal{H}}_i \tilde{Z}_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \big)^{-1} \big(\Sigma_i - \hat{\mathcal{H}}_i \hat{z}_{i|i-1} \big) \tag{5.22}$$

sendo

$$Y_i := \begin{bmatrix} \hat{R}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \hat{H}_i := \begin{bmatrix} H_i \\ N_i^{1/2} \end{bmatrix}, \Sigma_i := \begin{bmatrix} y_i \\ 0 \end{bmatrix}, N_i := \hat{\lambda}_i \big(N_i^{f^T} N_i^f + N_i^{h^T} N_i^h \big). \tag{5.23}$$

Os passos para calcular a estimativa robusta preditora na forma de informação para SLSM serão apresentados no seguinte algoritmo proposto na Tabela (5.4).

Tabela 5.4: Estimativa Robusta Preditora na Forma de Informação

A estimativa robusta preditora na forma de informação para o SLSM (4.14) pode ser calculada através dos seguintes passos:

Passo 0: *(Condições Iniciais):*

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{0|-1}^{-1} &:= P_0^{-1},\\ \tilde{Z}_{0|-1}^{-1}\hat{z}_{0|-1} &:= 0.\end{aligned}$$

Passo 1: Se $M_i^f = 0$ e $M_i^h = 0$, então $\hat{\lambda}_i = 0$. Caso contrário, pode ser escolhido o parâmetro ótimo $\hat{\lambda}_i$ que minimiza a função $G(\lambda)$ em [27]

$$\hat{\lambda}_i := (1+\alpha_1)\left\|\begin{bmatrix} M_i^{f^T} & 0 \\ 0 & M_i^{h^T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Pi_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_i^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_i^f & 0 \\ 0 & M_i^h\end{bmatrix}\right\|, \text{ sendo } \alpha_1 > 0.$$

Passo 2: Se $\hat{\lambda}_i \neq 0$, os parâmetros $\{\Pi_i, R_i\}$ serão substituídos por parâmetros corrigidos

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_i &:= \Pi_i - \hat{\lambda}_i^{-1} M_i^f M_i^{f^T},\\ \hat{R}_i &:= R_i - \hat{\lambda}_i^{-1} M_i^h M_i^{h^T}.\end{aligned}$$

Passo 3: Atualize $\{\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1}, \tilde{Z}_{i|i-1}^{-1}\hat{z}_{i|i-1}\}$ *com* $\{\tilde{Z}_{i+1|i}^{-1}, \tilde{Z}_{i+1|i}^{-1}\hat{z}_{i+1|i}\}$ através das seguintes equações recursivas

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{i+1|i}^{-1} &:= \widehat{\Pi}_i^{-1} - \widehat{\Pi}_i^{-1}\mathcal{F}_i\left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{X}_i^T\mathcal{Y}_i^{-1}\mathcal{X}_i + \mathcal{F}_i^T\widehat{\Pi}_i^{-1}\mathcal{F}_i\right)^{-1}\mathcal{F}_i^T\widehat{\Pi}_i^{-1},\\ \tilde{Z}_{i+1|i}^{-1}\widehat{z}_{i+1|i} &:= \widehat{\Pi}_i^{-1}\mathcal{F}_i\left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{X}_i^T\mathcal{Y}_i^{-1}\mathcal{X}_i + \mathcal{F}_i^T\widehat{\Pi}_i^{-1}\mathcal{F}_i\right)^{-1}\left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1}\widehat{z}_{i|i-1} + \mathcal{X}_i^T\mathcal{Y}_i J_i\right),\end{aligned}$$

sendo

$$\mathcal{X}_i = \begin{bmatrix}\mathcal{H}_i \\ N_i^{1/2}\end{bmatrix},\ \mathcal{Y}_i = \begin{bmatrix}\widehat{R}_i & 0 \\ 0 & I\end{bmatrix},\ J_i = \begin{bmatrix} y_i \\ 0\end{bmatrix},\quad N_i = \hat{\lambda}_i\left(N_i^{f^T}N_i^f + N_i^{h^T}N_i^h\right).$$

Considere agora a equação de Riccati e a equação da estimativa robusta filtrada apresentadas na Tabela (4.2) dadas por

$$\tilde{Z}_{i+1|i+1} = \left(\hat{I}^T\left(X_i^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i\tilde{Z}_{i|i}\hat{\mathcal{F}}_i^T\right)^{-1}\hat{I} + \hat{\mathcal{H}}_{i+1}^T Y_i^{-1}\hat{\mathcal{H}}_{i+1}\right)^{-1}, \tag{5.24}$$

$$\hat{z}_{i+1|i+1} = \tilde{Z}_{i+1|i+1}\hat{I}^T\left(X_i + \hat{\mathcal{F}_i}^T X_i^{-1}\hat{\mathcal{F}}_i\right)^{-1}\hat{\mathcal{F}}_i\hat{z}_{i|i} + \tilde{Z}_{i+1|i+1}\hat{\mathcal{H}}_{i+1}^T Y_i^{-1}\Sigma_{i+1}, \tag{5.25}$$

sendo

$$X_i = \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad Y_{i+1} = \begin{bmatrix} \hat{R}_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \hat{I} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathcal{F}}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i}N_i^f \end{bmatrix}, \tag{5.26}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{i+1} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i+1} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i}N_{i+1}^h \end{bmatrix}, \quad \Sigma_{i+1} = \begin{bmatrix} y_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.27}$$

Fazendo uso das equações (5.24)-(5.25) a estimativa robusta filtrada na forma de informação para SLSM pode ser deduzida seguindo os mesmos passos da dedução estimativa robusta preditora na forma de informação.

Tabela 5.5: Estimativa Robusta Filtrada na Forma de Informação

A estimativa robusta filtrada na forma de informação para o SLSM (4.14) pode ser calculada através dos seguintes passos:

Passo 0**:** *Condições Iniciais:*

$$\begin{aligned}
&\hat{R}_0 := R_0 - \hat{\lambda}_{-1}^{-1} M_0^h M_0^{h^T}, \\
&\tilde{Z}_{0|0}^{-1} := P_0^{-1} + \mathcal{H}_0^T \hat{R}_0^{-1} \mathcal{H}_0 + \hat{\lambda}_{-1} N_0^{h^T} N_0^h, \\
&\tilde{Z}_{0|0}^{-1} \hat{z}_{0|0} := \mathcal{H}_0^T \hat{R}_0^{-1} y_0.
\end{aligned}$$

Passo 1**:** Se $M_i^f = 0$ e $M_i^h = 0$, então $\hat{\lambda}_i = 0$. Caso contrário, pode ser escolhido o parâmetro ótimo $\hat{\lambda}_i$ que minimiza a função $G(\lambda)$ de (4.52)

$$\hat{\lambda}_i := (1+\alpha_2) \left\| \begin{bmatrix} M_i^{f^T} & 0 \\ 0 & M_i^{h^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i^f & 0 \\ 0 & M_i^h \end{bmatrix} \right\|, \text{ sendo } \alpha_2 > 0.$$

Passo 2**:** Se $\hat{\lambda}_i \neq 0$, os parâmetros $\{\Pi_i, R_i\}$ são substituídos por parâmetros corrigidos

$$\begin{aligned}
&\hat{\Pi}_i := \Pi_i - \hat{\lambda}_i^{-1} M_i^f M_i^{f^T}, \\
&\hat{R}_{i+1} := R_{i+1} - \hat{\lambda}_i^{-1} M_i^h M_i^{h^T}.
\end{aligned}$$

Passo 3**:** Atualize $\{\tilde{Z}_{i|i}^{-1}, \tilde{Z}_{i|i}^{-1} \hat{z}_{i|i}\}$ com $\{\tilde{Z}_{i+1|i+1}^{-1}, \tilde{Z}_{i+1|i+1}^{-1} \hat{z}_{i+1|i+1}\}$ através das seguintes equações recursivas:

$$\begin{aligned}
&\tilde{Z}_{i+1|i+1}^{-1} := \mathcal{I}^T \mathcal{K}_i^{-1} \mathcal{I} - \mathcal{I}^T \mathcal{K}_i^{-1} \mathcal{W}_i \left(\tilde{Z}_{i|i}^{-1} + \mathcal{W}_i^T \mathcal{K}_i^{-1} \mathcal{W}_i \right)^{-1} \mathcal{W}_i^T \mathcal{K}_i^{-1} \mathcal{I} + \mathcal{V}_{i+1}^T \mathcal{U}_{i+1} \mathcal{V}_{i+1}, \\
&\tilde{Z}_{i+1|i+1}^{-1} \widehat{z}_{i+1|i+1} := \mathcal{I}^T \mathcal{K}_i^{-1} \mathcal{W}_i \left(\tilde{Z}_{i|i}^{-1} + \mathcal{W}_i^T \mathcal{K}_i^{-1} \mathcal{W}_i \right)^{-1} \tilde{Z}_{i|i}^{-1} \widehat{z}_{i|i} + \mathcal{V}_{i+1}^T \mathcal{U}_{i+1} J_{i+1},
\end{aligned}$$

sendo

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathcal{K}_i = \begin{bmatrix} \widehat{\Pi}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \ \mathcal{W}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \\ N_i^f \end{bmatrix}, \ \mathcal{V}_{i+1} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i+1} \\ N_{i+1}^h \end{bmatrix}, \ \mathcal{U}_{i+1} = \begin{bmatrix} \widehat{R}_{i+1}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \ J_{i+1} = \begin{bmatrix} y_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.4 Exemplo Numérico

Esta seção mostra um exemplo numérico para filtragem de informação do SLSM (4.1) e (4.2) com dois estados Markovianos. A matriz de probabilidade e os parâmetros do modelo Markoviano serão definidos como segue

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0.42 & 0 \\ 0.06 & 0.12 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0.36 & 0 \\ 0.06 & 0.12 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = G_2 = \begin{bmatrix} 0.8731 & 0 \\ 0 & 0.2089 \end{bmatrix}, H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 0.06 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = D_2 = 0.008,$$

$$M_1^f = M_2^f = \begin{bmatrix} 0.13 & 0 \\ 0 & 0.13 \end{bmatrix}, N_1^f = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, N_2^f = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$M_1^h = M_2^h = \begin{bmatrix} 0.39 & 0 \end{bmatrix}, N_1^h = \begin{bmatrix} 1.3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, N_2^h = \begin{bmatrix} 1.3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

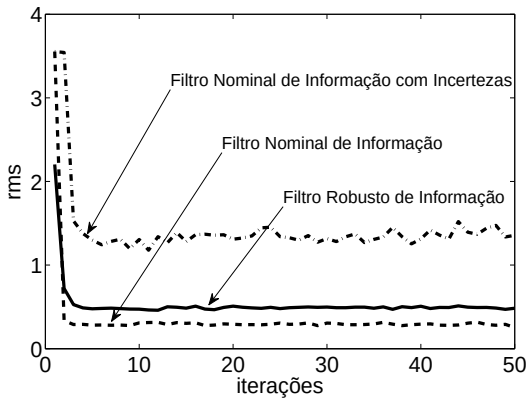


Figura 5.1: Raiz do erro médio quadrático (rms) dos filtros preditores, nominal e robusto, na forma de informação.

A Figura 5.1 mostra um estudo comparativo entre o filtro preditor nominal e o filtro preditor robusto, ambos na forma de informação, para SLSM. A raiz do erro médio quadrático (rms) do filtro preditor na forma de informação é calculada para o sistema com e sem incertezas e o rms do filtro preditor robusto na forma de informação é calculada para o sistema com incertezas. Foram realizadas 1000 simulações de Monte Carlo de $i = 0, ..., 100$ com os valores de Θ_i gerados aleatoriamente. A condição inicial x_0 é considerada Gaussiana com média $\begin{bmatrix} 0.196 & 0.295 \end{bmatrix}^T$ e

variância $\begin{bmatrix} 0.0384 & 0.0578 \\ 0.0578 & 0.870 \end{bmatrix}$, $\Theta_i \in \{1, 2\}$, v_i e u_i são sequências de ruído independentes. Note o quanto a informação do sistema se deteriora se forem utilizados algoritmos que não são robustos para estimar a informação do SLSM sujeito a incertezas.

CAPÍTULO 6

Algoritmos *Array* Raiz Quadrada para Filtragem de SLSM

Este capítulo trata de algoritmos *array* raiz quadrada para filtragem de SLSM. O desenvolvimento de algoritmos array se justifica em virtude dos erros de arredondamento que podem ocorrer no cálculo da variância $\tilde{Z}_{i+1|i}$ através da equação de Riccati. Esses erros podem ocasionar uma perda da positividade da variância. Com o algoritmo *array* raiz quadrada, ao invés de $\tilde{Z}_{i+1|i}$, é propagado o seu fator raiz quadrada $\tilde{Z}^{1/2}_{i+1|i}$. Apesar da possibilidade de haver erros de arredondamento em $\tilde{Z}^{1/2}_{i+1|i}$, o produto dos fatores multiplicados $\tilde{Z}^{1/2}_{i+1|i}\tilde{Z}^{T/2}_{i+1|i}$ é sempre uma matriz (semi)definida positiva. O algoritmo *array* raiz quadrada propaga a variância $\tilde{Z}^{1/2}_{i+1|i}$ conforme os seguintes passos:

Passo 1: Formar uma matriz denominada pré-*array* que contenha $\tilde{Z}^{1/2}_{i+1|i}$;

Passo 2: Reduzir o pré-*array* para uma forma triangular através de operações unitárias ou J-unitárias;

Passo 3: A matriz triangular resultante é denominada pós-*array*, nesta matriz obtém-se a quantidade $\tilde{Z}^{1/2}_{i+2|i+1}$.

6.1 Algoritmos Array Raiz Quadrada para Filtragem Nominal

Nesta seção serão apresentados os algoritmos *array* raiz quadrada para o filtro preditor apresentado no Capítulo 2 e para o filtro preditor na forma de informação apresentado no Capítulo 5, ambos os filtros foram desenvolvidos baseados no sistema nominal (2.17). É importante salientar que esses resultados foram desenvolvidos em [18]. Considere a equação algébrica de Riccati (2.46) dada por

$$\tilde{Z}_{i+1|i} = \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}^T + \mathcal{Q}_i - \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T\left(\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}^T \tag{6.1}$$

sendo

$$\mathcal{Q}_i := \mathcal{B}\left(Q_i\right) + diag\left[\sum_{j=1}^{N}\pi_{i,j}p_{jk}G_jG_j^T\right] \tag{6.2}$$

$\mathcal{B}\left(Q_i\right)$ é dado por (2.47) e $Q_i = (Z_{i,1}, ..., Z_{i,N})$ são dados pela equação recursiva

$$Z_{i+1,k} = \sum_{j=1}^{N}p_{jk}F_jZ_{i,j}F_j^T + \sum_{j=1}^{N}\pi_{i,j}p_{jk}G_jG_j^T. \tag{6.3}$$

Para calcular $\tilde{Z}_{i+1|i}$ é necessário calcular $Z_i = \mathcal{Z}_i\mathcal{Z}_i^T = diag[Z_{i,k}]$. Usando o Lema (B.4.1) a matriz $\mathcal{Z}_i$ pode ser calculada através de uma matriz unitária Λ_z tal que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{M}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_2 & \mathcal{M}_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathcal{L}_N & \mathcal{M}_N \end{bmatrix}\Lambda_z = \begin{bmatrix} Z_{i+1,1}^{1/2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & Z_{i+1,2}^{1/2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Z_{i+1,N}^{1/2} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

pois se cada matriz acima for multiplicada pela sua transposta, chega-se ao conjunto de equações dado em (6.3) que caracteriza Z_i, ou seja, uma relação do tipo $AA^T = BB^T$. O algoritmo *array* para o cálculo de $\tilde{Z}_{i+1|i}$ é definido da seguinte maneira. Considere a equação de Riccati do filtro preditor para SLSM

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{i+1|i} &= \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}^T + diag\left[\sum_{j=1}^{N}p_{jk}F_jZ_{i,j}F_j^T + \sum_{j=1}^{N}\pi_{i,j}p_{jk}G_jG_j^T\right] - \mathcal{F}\left(diag\left[Z_{i,k}\right]\right)\mathcal{F}^T \\ &- \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T\left(\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}^T \end{aligned} \tag{6.5}$$

ou,

$$\tilde{Z}_{i+1|i} = \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}^T + Z_{i+1} - \mathcal{F}Z_i\mathcal{F}^T - \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T\left(\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}^T. \quad (6.6)$$

O complemento de Schur de $\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T$ em (6.6) é dado por

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T & \mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}^T \\ \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T & \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}^T + Z_{i+1} - \mathcal{F}Z_i\mathcal{F}^T \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Pode-se fatorar (6.7) utilizando uma matriz assinatura J como

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}^{1/2} & \left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{1/2} & 0 & 0 \\ \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}^{1/2} & 0 & \mathcal{Z}_{i+1} & \mathcal{F}\mathcal{Z}_i \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i|i-1}^{1/2}\mathcal{H}^T & \tilde{Z}_{i|i-1}^{1/2}\mathcal{F}^T \\ \left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{T/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{Z}_{i+1}^T \\ 0 & \mathcal{Z}_i^T\mathcal{F}^T \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

sendo,

$$J = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Vamos usar a propriedade do complemento de Schur mostrada no Apêndice B para encontrar uma outra fatoração para (6.7)

$$\begin{bmatrix} \left(\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{1/2} & 0 \\ \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T\left(\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1/2} & \tilde{Z}_{i+1|i}^{1/2} \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} \left(\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{T/2} & 0 \\ \left(\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-T/2}\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}^T & \tilde{Z}_{i+1|i}^{T/2} \end{bmatrix}^T. \quad (6.10)$$

Pode-se reescrever a fatoração (6.10) utilizando a matriz assinatura (6.9) da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \left(\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{1/2} & 0 & 0 \\ \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T\left(\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1/2} & \tilde{Z}_{i+1|i}^{1/2} & 0 \end{bmatrix} J$$
$$\times \begin{bmatrix} \left(\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{T/2} & 0 & 0 \\ \left(\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-T/2}\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}^T & \tilde{Z}_{i+1|i}^{T/2} & 0 \end{bmatrix}^T . \tag{6.11}$$

Sendo assim pode-se dizer que existe uma transformação J-unitária Λ_{J_1} tal que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}^{1/2} & \left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{1/2} & 0 & 0 \\ \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}^{1/2} & 0 & \mathcal{Z}_{i+1} & \mathcal{F}\mathcal{Z}_i \end{bmatrix} \Lambda_{J_1}$$
$$= \begin{bmatrix} \left(\mathcal{H}^T\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H} + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T\left(\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1/2} & \tilde{Z}_{i+1|i}^{1/2} & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{6.12}$$

O algoritmo *array* raiz quadrada para o filtro preditor para o SLSM (2.17) está descrito na Tabela (6.1).

A triangularização do pré-*array* de (6.12), por uma transformação J-unitária Λ_{J_1}, é sempre possível se e somente se todas as submatrizes principais de

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}^{1/2} & (\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T)^{1/2} \\ \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}^{1/2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}^{1/2} & (\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T)^{1/2} \\ \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}^{1/2} & 0 \end{bmatrix}^T +$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{Z}_{i+1} & \mathcal{F}\mathcal{Z}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{Z}_{i+1} & \mathcal{F}\mathcal{Z}_i \end{bmatrix}^T \tag{6.13}$$

são positivas, seguindo o Lema B.4.3. Sabe-se que $\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T$ e $\tilde{Z}_{i+1|i}$ são definidas positivas. Ambos resultados garantem a positividade de (6.13). Note que para o *Array* (6.4), é garantido que $AA^T = BB^T$ se, e somente se, existe uma matriz unitária Λ_z ($\Lambda_z\Lambda_z^T = I = \Lambda_z^T\Lambda_z$) tal que $A\Lambda_z = B$. Sabe-se que a triangularização de A é sempre possível, pela virtude de AA^T ser Hermitiana, a matriz unitária Λ_z é única.

Agora será apresentado o algoritmo *array* raiz quadrada para calcular o filtro preditor na forma de informação. Este algoritmo foi deduzido de maneira semelhante ao algoritmo *array* raiz quadrada para o filtro preditor, considerando a equação de Riccati para o filtro preditor na

Tabela 6.1: Algoritmo Array Raiz Quadrada para a Estimativa Nominal Preditora

A equação de Riccati (6.5), utilizada para o cálculo do erro de estimativa do filtro para SLSM, pode ser calculada de maneira alternativa através do algoritmo *array* definido de acordo com o seguinte procedimento:

Passo 0**:** Calcular as condições iniciais $Z_{0,j}^{1/2} = V_j^{1/2}$ com $j = 1, .., N$; $Z_0^{1/2} = diag\,[Z_{0,j}]^{1/2}$ e $\tilde{Z}_{0,j}^{1/2} = \left(\xi(0)\xi(0)^T\right)^{1/2}$.

Passo 1**:** Calcular $\tilde{Z}_{i+1|i}^{1/2}$ utilizando uma matriz J-unitária Λ_{J_1} (matriz que satisfaz a seguinte condição: $\Lambda_{J_1} J \Lambda_{J_1}^T = J$ sendo J uma matriz diagonal cujos elementos são +1 e -1) de dimensões apropriadas

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}^{1/2} & \left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{1/2} & 0 & 0 \\ \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}^{1/2} & 0 & \mathcal{Z}_{i+1} & \mathcal{F}\mathcal{Z}_i \end{bmatrix} \Lambda_{J_1} =$$

$$\begin{bmatrix} \left(\mathcal{H}^T\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H} + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T\left(\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1/2} & \tilde{Z}_{i+1|i}^{1/2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sendo que $Z_i = \mathcal{Z}_i\mathcal{Z}_i^T = diag[Z_{i,j}]$, $Z_{i,j}^{1/2}$ pode ser calculada usando uma matriz unitária Λ_z tal que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{M}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_2 & \mathcal{M}_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathcal{L}_N & \mathcal{M}_N \end{bmatrix} \Lambda_z = \begin{bmatrix} Z_{i+1,1}^{1/2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & Z_{i+1,2}^{1/2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & Z_{i+1,N}^{1/2} & 0 \end{bmatrix}.$$

e

$\mathcal{L}_k = \begin{bmatrix} L_{1k} & L_{2k} & \cdots & L_{Nk} \end{bmatrix}$, $\mathcal{M}_k = \begin{bmatrix} M_{1k} & M_{2k} & \cdots & M_{Nk} \end{bmatrix}$,
$L_{jk} = p_{jk}^{1/2} F_j Z_{i,j}^{1/2}$, $M_{jk} = p_{jk}^{1/2} \pi_{i,j}^{1/2} G_j$.

forma de informação (5.6) dada por:

$$\tilde{Z}_{i+1|i}^{-1} = \mathcal{Q}_i^{-1} - \mathcal{Q}_i^{-1}\mathcal{F}\left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}^T\left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}\mathcal{H} + \mathcal{F}^T\mathcal{Q}_i^{-1}\mathcal{F}\right)^{-1}\mathcal{F}^T\mathcal{Q}_i^{-1}, \tag{6.14}$$

sendo

$$\mathcal{Q}_i := \mathcal{B}\left(Q_i\right) + diag\left[\sum_{j=1}^{N}\pi_{i,j}p_{jk}G_jG_j^T\right], \tag{6.15}$$

$\mathcal{B}\left(Q_i\right)$ é dado por (2.47) e $Q_i = (Z_{i,1}, ..., Z_{i,N})$ são dados pela equação recursiva (6.3)

O algoritmo *array* raiz quadrada para calcular o filtro preditor na forma de informação para o SLSM (2.17) é dado na Tabela (6.2).

Tabela 6.2: Algoritmo Array Raiz Quadrada para a Estimativa Nominal Preditora na Forma de Informação

O algoritmo *array* raiz quadrada para o filtro preditor na forma de informação para SLSM pode ser calculado pelo seguinte procedimento:

Passo 0**:** Calcular as condições iniciais $Z_{0,j}^{1/2} = V_j^{1/2}$ com $j = 1, ..., N$; $Z_0^{1/2} = diag\left[Z_{0,j}^{1/2}\right]$ e $\tilde{Z}_{0|-1}^{-1/2} = (Z_0 - \mathbb{E}(z_0)\mathbb{E}(z_0)^T)^{-1/2} \geq 0$.

Passo 1**:** Calcular $\tilde{Z}_{i+1|i}^{-1/2}$ usando uma matriz unitária Λ tal que

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i|i-1}^{-1/2} & \mathcal{H}^T\left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1/2} & \mathcal{F}^T\mathcal{Q}_i^{-1/2} \\ 0 & 0 & \mathcal{Q}_i^{-1/2} \end{bmatrix}\Lambda = \begin{bmatrix} X_i^{1/2} & 0 & 0 \\ \mathcal{Q}_i^{-1}\mathcal{F}X_i^{-1/2} & \tilde{Z}_{i+1|i}^{-1/2} & 0 \end{bmatrix},$$

sendo

$$X_i = \left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}^T\left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i^T\right)^{-1}\mathcal{H} + \mathcal{F}^T\mathcal{Q}_i^{-1}\mathcal{F}\right).$$

$\mathcal{Q}_i$ é definido em (5.3), $\mathcal{Z}_i$ pode ser calculado como (6.4).

6.2 Algoritmos Array Raiz Quadrada para Filtragem $\mathcal{H}_\infty$

Nesta seção serão desenvolvidos algoritmos *array* raiz quadrada para as estimativas $\mathcal{H}_\infty$, preditora e filtrada, na forma de informação para SLSM. Estes algoritmos foram desenvolvidos baseados no sistema (3.4) e nas estimativas $\mathcal{H}_\infty$ apresentadas na Serão 5.2 do Capítulo 5.

Considere a equação de Riccati para a estimativa $\mathcal{H}_\infty$ preditora na forma de informação dada por

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_{0|-1}^{-1} &= \tilde{Z}_0^{-1} && (6.16)\\
\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} &= \Gamma_l^{-1} - \Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l\Big(\tilde{Z}_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l - \gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_l^{-1}\mathcal{L}_l + \mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l\Big)^{-1}\mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1}. && (6.17)
\end{aligned}$$

Considerando a equação de Riccati (6.17), temos que $\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1}$ pode ser escrito como complemento de Schur de $\tilde{Z}_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l - \gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_l^{-1}\mathcal{L}_l + \mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l$ em

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1}\mathcal{H}_l - \gamma^{-2}\mathcal{L}_l^T\Lambda_l^{-1}\mathcal{L}_l + \mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l & \mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1} \\ \Gamma_l^{-1}\mathcal{F}_l & \Gamma_l^{-1} \end{bmatrix}. \tag{6.18}$$

A matriz (6.18) pode ser fatorada como

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{l|l-1}^{-1/2} & \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1/2} & \mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1/2} & \gamma^{-1}\mathcal{L}_l^T\Lambda_l^{-1/2} \\ 0 & 0 & \Gamma_l^{-1/2} & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}}_{J}$$

$$\times \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{l|l-1}^{-T/2} & 0 \\ \Pi_l^{-T/2}\mathcal{H}_l & 0 \\ \Gamma_l^{-T/2}\mathcal{F}_l & \Gamma_l^{-1/2} \\ \gamma^{-1}\Lambda_l^{-T/2}\mathcal{L}_l & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.19}$$

Portanto o pré-*array* é dado por

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{l|l-1}^{-1/2} & \mathcal{H}_l^T\Pi_l^{-1/2} & \mathcal{F}_l^T\Gamma_l^{-1/2} & \gamma^{-1}\mathcal{L}_l^T\Lambda_l^{-1/2} \\ 0 & 0 & \Gamma_l^{-1/2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.20}$$

Considere $J = S_1 \oplus S_2$, sendo $S_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ e $S_2 = -I$, segundo o Lema (B.4.3), existe uma matriz J-unitária Λ_{J_1} que triangulariza o pré-*array* (6.20) se e somente se S_1 e a matriz $C = AS_1A^T + BS_2B^T$ têm a mesma inércia, sendo

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{l|l-1}^{-1/2} & \mathcal{H}_l^T \Pi_l^{-1/2} & \mathcal{F}_l^T \Gamma_l^{-1/2} \\ 0 & 0 & \Gamma_l^{-1/2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \gamma^{-1} \mathcal{L}_l^T \Lambda_l^{-1/2} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.21}$$

Calculando $C = AS_1A^T + BS_2B^T$ tem-se

$$C = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T \Pi_l^{-1} \mathcal{H}_l + \mathcal{F}_l^T \Gamma_l^{-1} \mathcal{F}_l - \gamma^{-2} \mathcal{L}_l^T \Lambda_l^{-1} \mathcal{L}_l & \mathcal{F}_l^T \Gamma_l^{-1} \\ \Gamma_l^{-1} \mathcal{F}_l & \Gamma_l^{-1} \end{bmatrix}. \tag{6.22}$$

Portanto uma condição necessária e suficiente para a existência de Λ_{J_2} é que $M_{l|l-1}^{-1} = \tilde{Z}_{l|l-1}^{-1} - \gamma^{-2} \mathcal{L}_l^T \Lambda_l^{-1} \mathcal{L}_l > 0$. Esta condição é exatamente a condição necessária e suficiente para a existência da estimativa $\mathcal{H}_\infty$ preditora.

Usando a propriedade do complemento de Schur pode-se encontrar o pós-*array* fatorando (6.18) como

$$\begin{bmatrix} \left(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T \Pi_l^{-1} \mathcal{H}_l + \mathcal{F}_l^T \Gamma_l^{-1} \mathcal{F}_l\right)^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_l^{-1} \mathcal{F}_l \left(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T \Pi_l^{-1} \mathcal{H}_l + \mathcal{F}_l^T \Gamma_l^{-1} \mathcal{F}_l\right)^{-1/2} & \tilde{Z}_{l+1|l}^{-1/2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}}_{J}$$

$$\times \begin{bmatrix} \left(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T \Pi_l^{-1} \mathcal{H}_l + \mathcal{F}_l^T \Gamma_l^{-1} \mathcal{F}_l\right)^{-T/2} & \left(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T \Pi_l^{-1} \mathcal{H}_l + \mathcal{F}_l^T \Gamma_l^{-1} \mathcal{F}_l\right)^{-T/2} \mathcal{F}_l^T \Gamma_l^{-1} \\ 0 & \tilde{Z}_{l+1|l}^{-T/2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Segue que o pós-*array* é dado por

$$\begin{bmatrix} \left(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T \Pi_l^{-1} \mathcal{H}_l + \mathcal{F}_l^T \Gamma_l^{-1} \mathcal{F}_l\right)^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_l^{-1} \mathcal{F}_l \left(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T \Pi_l^{-1} \mathcal{H}_l + \mathcal{F}_l^T \Gamma_l^{-1} \mathcal{F}_l\right)^{-1/2} & \tilde{Z}_{l+1|l}^{-1/2} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.23}$$

Assim usando uma transformação J-unitária Λ_{J_2} pode-se calcular $\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1/2}$ como

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{l|l-1}^{-1/2} & \mathcal{H}_l^T \Pi_l^{-1/2} & \mathcal{F}_l^T \Gamma_l^{-1/2} & \gamma^{-1} \mathcal{L}_l^T \Lambda_l^{-1/2} \\ 0 & 0 & \Gamma_l^{-1/2} & 0 \end{bmatrix} \Lambda_{J_2}$$
$$= \begin{bmatrix} \left(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T \Pi_l^{-1} \mathcal{H}_l + \mathcal{F}_l^T \Gamma_l^{-1} \mathcal{F}_l \right)^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_l^{-1} \mathcal{F}_l \left(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T \Pi_l^{-1} \mathcal{H}_l + \mathcal{F}_l^T \Gamma_l^{-1} \mathcal{F}_l \right)^{-1/2} & \tilde{Z}_{l+1|l}^{-1/2} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.24}$$

O algoritmo *array* raiz quadrada para a estimativa $\mathcal{H}_\infty$ preditora na forma de informação pode ser calculado através do procedimento descrito na Tabela (6.3).

Tabela 6.3: Algoritmo Array Raiz Quadrada para a Estimativa $\mathcal{H}_\infty$ Preditora na Forma de Informação

O algoritmo *array* raiz quadrada para a estimativa $\mathcal{H}_\infty$ preditora na forma de informação para o SLSM (3.4) consiste dos seguintes passos:

Passo 0**:** Calcular as seguintes condições iniciais $Z_{0,j}^{1/2} = V_j^{1/2}$ com $j = 1, ..., N$; $Z_0^{1/2} = diag\left[Z_{0,j}^{1/2}\right]$ e $\tilde{Z}_{0|-1}^{1/2} = \tilde{Z}_0^{1/2}$.

Passo 1**:** Calcular $\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1/2}$ com $l = 0, 1, ...i$; usando uma transformação J-unitária Λ_{J_2} tal que

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{l|l-1}^{-1/2} & \mathcal{H}_l^T \Pi_l^{-1/2} & \mathcal{F}_l^T \Gamma_l^{-1/2} & \gamma^{-1} \mathcal{L}_l^T \Lambda_l^{-1/2} \\ 0 & 0 & \Gamma_l^{-1/2} & 0 \end{bmatrix} \Lambda_{J_2} =$$
$$\begin{bmatrix} \left(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T \Pi_l^{-1} \mathcal{H}_l + \mathcal{F}_l^T \Gamma_l^{-1} \mathcal{F}_l \right)^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_l^{-1} \mathcal{F}_l \left(M_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}_l^T \Pi_l^{-1} \mathcal{H}_l + \mathcal{F}_l^T \Gamma_l^{-1} \mathcal{F}_l \right)^{-1/2} & \tilde{Z}_{l+1|l}^{-1/2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A variável $Z_{l,j}$ usada em Γ_l pode ser calculada como (6.4).

Baseado na seguinte equação de Riccati da estimativa $\mathcal{H}_\infty$ filtrada na forma de informação dada na Tabela (5.3)

$$\tilde{Z}_{0|0}^{-1} = \tilde{Z}_0^{-1} + \mathcal{H}_0^T \Pi_0^{-1} \mathcal{H}_0 - \gamma^{-2} \mathcal{L}_0^T \Lambda_0^{-1} \mathcal{L}_0, \tag{6.25}$$
$$\tilde{Z}_{l|l}^{-1} = \Gamma_{l-1}^{-1} - \Gamma_{l-1}^{-1} \mathcal{F}_{l-1} \left(\tilde{Z}_{l-1|l-1}^{-1} + \mathcal{F}_{l-1}^T \Gamma_{l-1}^{-1} \mathcal{F}_{l-1} \right)^{-1} \mathcal{F}_{l-1}^T \Gamma_{l-1}^{-1}. \tag{6.26}$$

A dedução do algoritmo *array* raiz quadrada para a estimativa $\mathcal{H}_\infty$ filtrada na forma de informação segue o mesmo procedimento usado na dedução do algoritmo *array* raiz quadrada para o

caso preditor na forma de informação e está descrito na Tabela (6.4).

Tabela 6.4: Algoritmo Array Raiz Quadrada para a Estimativa $\mathcal{H}_\infty$ Filtrada na Forma de Informação

O algoritmo *array* raiz quadrada para a estimativa $\mathcal{H}_\infty$ filtrada na forma de informação para o SLSM (3.4) consiste em:

Passo 0**:** Calcular as seguintes condições iniciais $Z_{0,j}^{1/2} = V_j^{1/2}$ com $j = 1, ..., N$; $Z_0^{1/2} = diag\left[Z_{0,j}^{1/2}\right]$ e $\tilde{Z}_{0|0}^{-1/2}$ usando uma transformação J-unitária Λ_{J_3} tal que

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_0^{-1/2} & \mathcal{H}_0^T \Pi_0^{-1/2} & \gamma^{-1}\mathcal{L}_0^T \Lambda_0^{-1/2} \end{bmatrix} \Lambda_{J_3} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{0|0}^{-1/2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Passo 1**:** Calcular $\tilde{Z}_{l|l}^{-1/2}$ com $l = 0, 1, ...i$; usando uma transformação J-unitária Λ_{J_4} tal que

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{l-1|l-1}^{-1/2} & \mathcal{F}_{l-1}^T \Gamma_{l-1}^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{l-1}^{-1/2} & \mathcal{H}_l^T \Pi_l^{-1/2} & \gamma^{-1}\mathcal{L}_l^T \Lambda_l^{-1/2} \end{bmatrix} \Lambda_{J_4} =$$
$$\begin{bmatrix} \left(\tilde{Z}_{l-1|l-1}^{-1} + \mathcal{F}_{l-1}^T \Gamma_{l-1}^{-1} \mathcal{F}_{l-1}\right)^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{l-1}^{-1}\mathcal{F}_{l-1}\left(\tilde{Z}_{l-1|l-1}^{-1} + \mathcal{F}_{l-1}^T \Gamma_{l-1}^{-1} \mathcal{F}_{l-1}\right)^{-1/2} & \tilde{Z}_{l|l}^{-1/2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A variável $Z_{l,j}$ usada em Γ_l pode ser calculada como (6.4).

6.3 Algoritmos Array Raiz Quadrada para Filtragem Robusta

Nesta seção serão desenvolvidos os algoritmos *array* raiz quadrada para as estimativas robustas, preditora e filtrada, na forma de informação para SLSM. O desenvovilmento desses algoritmos foram baseados no sistema (4.14) e nas estimativas robustas apresentadas na Seção 5.3 do Capítulo 5.

Seja a equação de Riccati para a estimativa robusta preditora na forma de informação dada por

$$\tilde{Z}_{0|-1}^{-1} = \tilde{Z}_0^{-1} \tag{6.27}$$

$$\tilde{Z}_{i+1|i}^{-1} = \widehat{\Pi}_i^{-1} - \widehat{\Pi}_i^{-1}\mathcal{F}_i\left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{X}_i^T\mathcal{Y}_i^{-1}\mathcal{X}_i + \mathcal{F}_i^T\widehat{\Pi}_i^{-1}\mathcal{F}_i\right)^{-1}\mathcal{F}_i^T\widehat{\Pi}_i^{-1}. \tag{6.28}$$

pode ser visto de (6.27) que $\tilde{Z}_{0|-1}^{-1/2} := \tilde{Z}_0^{-1/2}$. Temos que $\tilde{Z}_{i+1|i}^{-1}$ em (6.28) pode ser escrito como complemento de Schur de $\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{X}_i^T\mathcal{Y}_i^{-1}\mathcal{X}_i + \mathcal{F}_i^T\widehat{\Pi}_i^{-1}\mathcal{F}_i$ em

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{X}_i^T\mathcal{Y}_i^{-1}\mathcal{X}_i + \mathcal{F}_i^T\widehat{\Pi}_i^{-1}\mathcal{F}_i & \mathcal{F}_i^T\widehat{\Pi}_i^{-1} \\ \widehat{\Pi}_i^{-1}\mathcal{F}_i & \widehat{\Pi}_i^{-1} \end{bmatrix}. \tag{6.29}$$

Usando o Lema (B.4.1) a matriz (6.29) pode ser fatorada como

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i|i-1}^{-1/2} & \mathcal{X}_i^T\mathcal{Y}_i^{-1/2} & \mathcal{F}_i^T\widehat{\Pi}_i^{-1/2} \\ 0 & 0 & \Pi_i^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i|i-1}^{-T/2} & 0 \\ \mathcal{Y}_i^{-1/2}\mathcal{X}_i & 0 \\ \widehat{\Pi}_i^{-1/2}\mathcal{F}_i & \Pi_i^{-T/2} \end{bmatrix}. \tag{6.30}$$

Portanto o pré-*array* é dado por

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i|i-1}^{-1/2} & \mathcal{X}_i^T\mathcal{Y}_i^{-1/2} & \mathcal{F}_i^T\widehat{\Pi}_i^{-1/2} \\ 0 & 0 & \Pi_i^{-1/2} \end{bmatrix}. \tag{6.31}$$

Por outro lado, pode-se encontrar o pós-*array* fatorando (6.29) usando a propriedade do com-

plemento de Schur da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{X}_i^T \mathcal{Y}_i^{-1} \mathcal{X}_i + \mathcal{F}_i^T \widehat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i\right)^{1/2} & 0 \\ \widehat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i \left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{X}_i^T \mathcal{Y}_i^{-1} \mathcal{X}_i + \mathcal{F}_i^T \widehat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i\right)^{-1/2} & \tilde{Z}_{i+1|i}^{-1/2} \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} \left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{X}_i^T \mathcal{Y}_i^{-1} \mathcal{X}_i + \mathcal{F}_i^T \widehat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i\right)^{T/2} & \left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{X}_i^T \mathcal{Y}_i^{-1} \mathcal{X}_i + \mathcal{F}_i^T \widehat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i\right)^{-T/2} \mathcal{F}_i^T \widehat{\Pi}_i^{-1} \\ 0 & \tilde{Z}_{i+1|i}^{-T/2} \end{bmatrix}. \tag{6.32}$$

Assim o pós-*array* é dado por

$$\begin{bmatrix} \left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{X}_i^T \mathcal{Y}_i^{-1} \mathcal{X}_i + \mathcal{F}_i^T \widehat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i\right)^{1/2} & 0 \\ \widehat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i \left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{X}_i^T \mathcal{Y}_i^{-1} \mathcal{X}_i + \mathcal{F}_i^T \widehat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i\right)^{-1/2} & \tilde{Z}_{i+1|i}^{-1/2} \end{bmatrix}. \tag{6.33}$$

Pelo Lema (B.4.1) existe uma matriz unitária Λ_1 tal que pode-se calcular $\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1/2}$ como

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i|i-1}^{-1/2} & \mathcal{X}_i^T \mathcal{Y}_i^{-1/2} & \mathcal{F}_i^T \widehat{\Pi}_i^{-1/2} \\ 0 & 0 & \Pi_i^{-1/2} \end{bmatrix} \Lambda_1$$
$$= \begin{bmatrix} \left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{X}_i^T \mathcal{Y}_i^{-1} \mathcal{X}_i + \mathcal{F}_i^T \widehat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i\right)^{1/2} & 0 \\ \widehat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i \left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{X}_i^T \mathcal{Y}_i^{-1} \mathcal{X}_i + \mathcal{F}_i^T \widehat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i\right)^{-1/2} & \tilde{Z}_{i+1|i}^{-1/2} \end{bmatrix}. \tag{6.34}$$

O algoritmo *array* raiz quadrada para a estimativa robusta preditora na forma de informação para SLSM é calculado através do algoritmo da Tabela (6.5).

Tabela 6.5: Algoritmo Array Raiz Quadrada para a Estimativa Robusta Preditora na Forma de Informação

O algoritmo *array* raiz quadrada para a estimativa robusta preditora na forma de informação para o SLSM (4.14) consiste em:

Passo 0**:** Calcular a seguinte condição inicial $\tilde{Z}_{0|-1}^{-1/2} = \tilde{Z}_0^{-1/2}$,

Passo 1**:** Calcular $\tilde{Z}_{i+1|i}^{1/2}$ usando uma transformação unitária Λ_1 tal que

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i|i-1}^{-1/2} & \mathcal{X}_i^T \mathcal{Y}_i^{-1/2} & \mathcal{F}_i^T \widehat{\Pi}_i^{-1/2} \\ 0 & 0 & \Pi_i^{-1/2} \end{bmatrix} \Lambda_1 = \begin{bmatrix} \left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{X}_i^T \mathcal{Y}_i^{-1} \mathcal{X}_i + \mathcal{F}_i^T \widehat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i\right)^{1/2} & 0 \\ \widehat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i \left(\tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{X}_i^T \mathcal{Y}_i^{-1} \mathcal{X}_i + \mathcal{F}_i^T \widehat{\Pi}_i^{-1} \mathcal{F}_i\right)^{-1/2} & \tilde{Z}_{i+1|i}^{-1/2} \end{bmatrix},$$

sendo

$$\mathcal{X}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_i \\ N_i^{1/2} \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{Y}_i = \begin{bmatrix} \widehat{R}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Considere agora a equação de Riccati para a estimativa robusta filtrada na forma de informação da Tabela (5.5) dada por

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{0|0}^{-1} &= P_0^{-1} + \mathcal{H}_0^T \hat{R}_0^{-1} \mathcal{H}_0 + \hat{\lambda}_{-1} N_0^{h^T} N_0^h, && (6.35) \\ \tilde{Z}_{i+1|i+1}^{-1} &= \mathcal{I}^T \mathcal{K}_i^{-1} \mathcal{I} - \mathcal{I}^T \mathcal{K}_i^{-1} \mathcal{W}_i \left(\tilde{Z}_{i|i}^{-1} + \mathcal{W}_i^T \mathcal{K}_i^{-1} \mathcal{W}_i\right)^{-1} \mathcal{W}_i^T \mathcal{K}_i^{-1} \mathcal{I} \\ &+ \mathcal{V}_{i+1}^T \mathcal{U}_{i+1} \mathcal{V}_{i+1}. && (6.36) \end{aligned}$$

Considerando a equação de Riccati (6.35)-(6.36) pode-se deduzir o algoritmo *array* raiz quadrada para a estimativa robusta filtrada na forma de informação para o SLSM (4.14) seguindo os passos feitos para a estimativa robusta preditora descrita neste capítulo. O resultado está apresentado na Tabela (6.6).

Tabela 6.6: Algoritmo Array Raiz Quadrada para a Estimativa Robusta Filtrada na Forma de Informação

O algoritmo *array* raiz quadrada para a estimativa robusta filtrada na forma de informação para o SLSM (4.14) consiste em:

Passo 0**:** Calcular as seguintes condições iniciais $Z_{0,j}^{1/2} = V_j^{1/2}$ com $j = 1, ..., N$ $Z_0^{1/2} = diag\left[Z_{0,j}^{1/2}\right]$ e $\tilde{Z}_{0|0}^{1/2}$ usando uma transformação unitária Λ_2 tal que

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_0^{1/2} & \mathcal{H}_0^T \widehat{R}_0^{-1/2} & \widehat{\lambda}_{-1}^{1/2} N_0^{h^T} \end{bmatrix} \Lambda_2 = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{0|0}^{-1/2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Passo 1**:** Calcular $\tilde{Z}_{i+1|i+1}^{1/2}$ usando uma transformação unitária Λ_3 tal que

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{i|i}^{-1/2} & \mathcal{W}_i^T \mathcal{K}_i^{-1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}^T \mathcal{K}_i^{-1/2} & \mathcal{V}_{i+1}^T \mathcal{U}_{i+1}^{1/2} \end{bmatrix} \Lambda_3 = \begin{bmatrix} \left(\tilde{Z}_{i|i}^{-1} + \mathcal{W}_i^T \mathcal{K}_i^{-1} \mathcal{W}_i\right)^{1/2} & 0 \\ \mathcal{I}^T \mathcal{K}_i^{-1} \mathcal{W}_i \left(\tilde{Z}_{i|i}^{-1} + \mathcal{W}_i^T \mathcal{K}_i^{-1} \mathcal{W}_i\right)^{-1/2} & \tilde{Z}_{i+1|i+1}^{-1/2} \end{bmatrix},$$

sendo

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{K}_i = \begin{bmatrix} \widehat{\Pi}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \mathcal{W}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \\ N_i^f \end{bmatrix}, \mathcal{V}_{i+1} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i+1} \\ N_{i+1}^h \end{bmatrix}, \mathcal{U}_{i+1} = \begin{bmatrix} \widehat{R}_{i+1}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

6.4 Exemplo Numérico

Nesta seção será apresentado um exemplo numérico baseado em um SLSM com dois modos Markovianos. A matriz de probabilidade e os parâmetros do modelo Markoviano são definidos a seguir

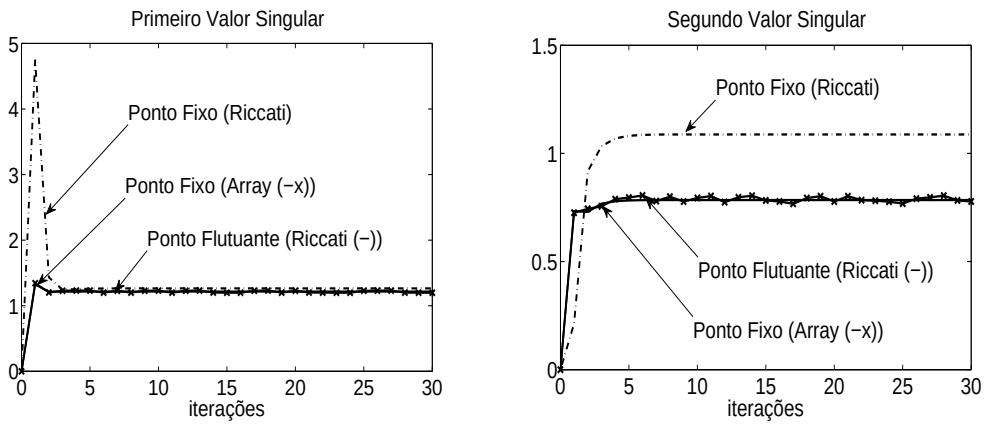
$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0.8731 & 0 \\ 0 & 1.2089 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0.8731 & 0 \\ 0 & 1.2089 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = 8 \times 10^{-4}, \quad D_2 = 8\text{x}10^{-4}.$$

Considere $\pi_{0,1} = 1$, $\pi_{0,2} = 0$. Foram calculados os valores singulares de $\tilde{Z}_{i|i-1}$ e $\tilde{Z}^{-1}_{i|i-1}$ para três diferentes implementações: ponto flutuante, ponto fixo para equações de Riccati explícitas e para algoritmos *array*. Foi usada uma arquitetura de ponto fixo em 16-bits que pode representar um número de -65.543 a 65.543. Estas implementações foram feitas via MatLab através do *fix-point Simulink toolbox*. Pode-se notar na Figura 6.1 a vantagem do algoritmo *array* perante a implementação por equações de Riccati explícitas. Na implementação em ponto fixo das equações de Riccati ocorreram erros numéricos. Com o algoritmo *array*, o resultado do cálculo em ponto fixo foi equivalente ao resultado obtido para ponto flutuante.



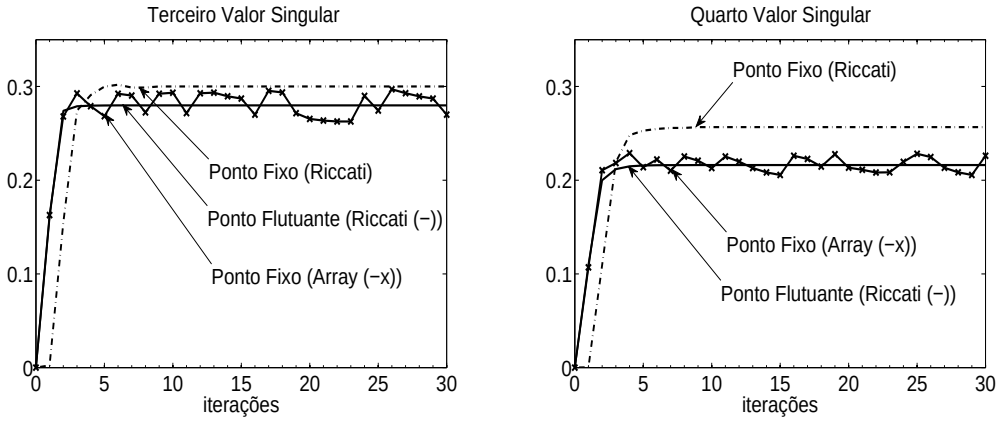


Figura 6.1: Valores singulares de $\tilde{Z}_{i|i-1}$ para implementações via equação de Riccati e algoritmos *array*, nas configurações de ponto fixo e ponto flutuante.

CAPÍTULO 7

Algoritmos *Array* Rápidos para Filtragem de SLSM

Este capítulo trata de algoritmos *array* rápidos para filtragem de SLSM. Esses algoritmos preservam as boas propriedades numéricas dos algoritmos *array* raiz quadrada descritas no Capítulo 6. Uma vantagem adicional dele, como sugere o nome, é que há um esforço computacional menor neste tipo de algoritmo se comparado com o algoritmo *array* raiz quadrada. Essa vantagem computacional só é possível se os parâmetros do filtro forem sempre constantes. Considere a seguinte equação fundamental

$$\delta\tilde{Z}_i = \tilde{Z}_{i+1|i} - \tilde{Z}_{i|i-1} = M_i S_i M_i^T \tag{7.1}$$

sendo S_i uma matriz assinatura. O algoritmo *array* rápido propaga o fator M_i conforme os seguintes passos:

Passo 1: Formar um determinado pré-*array* que contenha M_i;

Passo 2: O pré-*array* é reduzido a uma forma triangular através de operações J-unitárias;

Passo 3: A matriz triangular é denominada pós-*array* e contém M_{i+1};

Passo 4: $\tilde{Z}_{i+2|i+1}$ pode ser calculada através da seguinte equação $\tilde{Z}_{i+2|i+1} = M_{i+1}S_{i+1}M_{i+1}^T + \tilde{Z}_{i+1|i}$.

7.1 Algoritmos Array Rápidos para Filtragem Nominal

Nesta seção será deduzido o algoritmo *array* rápido para o filtro preditor do SLSM apresentado no Capítulo 2. Para deduzir o algoritmo *array* rápido é necessário que os parâmetros do SLSM sejam invariantes no tempo. Portanto, de [9] assume-se que o SLSM é estável na média quadrática e a cadeia de Markov é ergódica. Com isto, segue que $lim_{i\to\infty}\mathcal{P}(\Theta_i = j)$ existe e é independente de Θ_0. Define-se

$$\pi_j := \lim_{i\to\infty} \mathcal{P}(\Theta_i = j) = \lim_{i\to\infty} \pi_{i,j} \tag{7.2}$$

e

$$\mathcal{D} := \left[D_1\pi_1^{1/2} \dots D_N\pi_N^{1/2}\right]. \tag{7.3}$$

Considerando a Proposição 8 de [7], segue que $Q_i \to Q$ e $\mathcal{B}(Q_i) \to \mathcal{B}(Q)$ quando $i \to \infty$, sendo $Q = (Z_1, ..., Z_N)$, é a única solução que satisfaz

$$Z_k := \sum_{j=1}^{N} p_{jk}F_jZ_jF_j^T + \sum_{j=1}^{N} p_{jk}\pi_jG_jG_j^T \tag{7.4}$$

e, em consequência,

$$\mathcal{B}(Q) := diag\left[\sum_{j=1}^{N} p_{jk}F_jZ_jF_j^T\right] - \mathcal{F}diag\left[Z_k\right]\mathcal{F}^T. \tag{7.5}$$

Então, com o valor de Z_k (note que ele independe do tempo), pode-se aproximar a solução de (2.46) por $\tilde{Z}_{i+1|i}$ através da seguinte equação:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{i+1|i} := \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}^T + diag\left[\textstyle\sum_{j=1}^{N} p_{jk}F_jZ_jF_j^T\right] - \mathcal{F}diag\left[Z_k\right]\mathcal{F}^T + \\ diag\left[\textstyle\sum_{j=1}^{N} \pi_jp_{jk}G_jG_j^T\right] - \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T\left(\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}\mathcal{D}^T\right)^{-1}\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}^T.\end{aligned} \tag{7.6}$$

Dado que (7.4) e (7.6), têm coeficientes constantes, podemos deduzir o algoritmo *array* rápido para o filtro preditor para SLSM.

O cálculo do algoritmo *array* rápido para o filtro preditor para SLSM é composto de duas partes. A primeira resolve a equação de Lyapunov cujo resultado é usado para calcular a segunda resolve a equação de Riccati.

Considerando (7.4) na forma recursiva

$$\begin{aligned} Z_{i+1,k} &:= \sum_{j=1}^{N} p_{jk} F_j Z_{i,j} F_j^T + \sum_{j=1}^{N} p_{jk} \pi_{i,j} G_j G_j^T, \\ Z_{0,k} &:= V_k, \;\; k \in \{1, \ldots, N\}, \end{aligned} \tag{7.7}$$

pode-se calcular Z_k através do seguinte algoritmo *array* rápido:

a) seja $Z_{0,k} = 0, \; k = 1, .., N$;

b) encontrar $K_{0,k}, \; k = 1, .., N$ tal que

$$\sum_{j=1}^{N} p_{jk} \pi_j G_j G_j^T = K_{0,k} K_{0,k}^T; \tag{7.8}$$

c) encontrar uma matriz unitária $\Phi_k^{(i)}, \; k = 1, .., N$ tal que

$$\begin{bmatrix} p_{1k}^{1/2} F_1 K_{i,1} & p_{2k}^{1/2} F_2 K_{i,2} & \ldots & p_{Nk}^{1/2} F_N K_{i,N} \end{bmatrix} \Phi_k^{(i)} = \begin{bmatrix} K_{i+1,k} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.9}$$

As matrizes $Z_{i+1,k}$ podem ser calculadas através das seguintes equações:

$$Z_{i+1,k} = Z_{i,k} + K_{i,k} K_{i,k}^T. \tag{7.10}$$

De fato, definindo $\delta Z_{i,k} := Z_{i+1,k} - Z_{i,k}$, da equação de Lyapunov (7.7) tem-se que

$$\delta Z_{i+1,k} = \sum_{j=1}^{N} p_{jk} F_j \Big(\delta Z_{i,j} \Big) F_j^T, \tag{7.11}$$

$$\delta Z_{0,k} = \sum_{j=1}^{N} p_{jk} \pi_j G_j G_j^T \geq 0. \tag{7.12}$$

De (7.11) e (7.12), pode-se sempre fatorar $\delta Z_{i,k}$ da seguinte forma:

$$\delta Z_{i,k} = K_{i,k} K_{i,k}^T \tag{7.13}$$

para alguma (não única) matriz $K_{i,k}$. Neste caso, (7.11) pode ser reescrita como

$$K_{i+1,k} K_{i+1,k}^T = \sum_{j=1}^{N} p_{jk} F_j \Big(K_{i,j} K_{i,j}^T \Big) F_j^T \tag{7.14}$$

ou

$$\mathcal{K}_k^{(i)}(\mathcal{K}_k^{(i)})^T = \mathcal{L}_k^{(i)}(\mathcal{L}_k^{(i)})^T, \tag{7.15}$$

onde pode-se introduzir as variáveis auxiliares

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_k^{(i)} &= \begin{bmatrix} L_{1k}^{(i)} & L_{2k}^{(i)} & \dots & L_{Nk}^{(i)} \end{bmatrix} \\
L_{jk}^{(i)} &= p_{jk}^{1/2} F_j K_{i,j} \\
\mathcal{K}_k^{(i+1)} &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & K_{i+1,k} & \dots & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Baseado no Lema B.4.2, existe uma matriz unitária $\Phi_k^{(i)}$ tal que

$$\mathcal{L}_k^{(i)}\Phi_k^{(i)} = \mathcal{K}_k^{(i+1)}. \tag{7.17}$$

Aplicando uma coluna unitária obtém-se (7.9). Lembrando que $Z_i = diag\,[Z_{i,k}]$, $k = 1, ..., N$.

Agora será deduzido o algoritmo *array* rápido para calcular (7.6) baseado em (7.8)-(7.10). Note que $\mathcal{B}(Q) \geq 0$ e $\mathcal{D}$ são matrizes constantes. Defina $\delta\tilde{Z}_{i+1} := \tilde{Z}_{i+2|i+1} - \tilde{Z}_{i+1|i}$ e considere a seguinte fatoração que motiva o conceito de *array* rápido

$$\delta\tilde{Z}_{i+1} = M_{i+1}S_{i+1}M_{i+1}^T, \tag{7.18}$$

sendo S_{i+1} uma matriz assinatura. A matriz M_{i+1} não é única e se $S_{i+1} = I$, M_{i+1} é a raiz quadrada de $\delta\tilde{Z}_{i+1}$. Seguindo os mesmos argumentos de [14], segue que $S_{i+1} = S_i = S$. Em particular, se $\tilde{Z}_{0|-1} := \Pi_0 = 0$, as matrizes ditas assinaturas são tais que $S_{i+1} = S_i = I$. Baseado na equação algébrica de Riccati (7.6), $\delta\tilde{Z}_{i+1}$ pode ser reescrita como

$$\tilde{Z}_{i+2|i+1} - \tilde{Z}_{i+1|i} = -\tilde{Z}_{i+1|i} + \mathcal{F}\tilde{Z}_{i+1|i}\mathcal{F}^T - K_{p,i+1}K_{p,i+1}^T + W, \tag{7.19}$$

$$K_{p,i+1} = \mathcal{F}\tilde{Z}_{i+1|i}\mathcal{H}^T R_{e,i+1}^{-T/2}, \tag{7.20}$$

$$R_{e,i+1} = \mathcal{H}\tilde{Z}_{i+1|i}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}\mathcal{D}^T, \tag{7.21}$$

$$W = diag\left[\sum_{j=1}^N \pi_j p_{j,k} G_j G_j^T\right] + \mathcal{B}(Q). \tag{7.22}$$

Observe agora que o lado direito de (7.19) é o complemento de Schur da posição $(1,1)$ do seguinte

bloco matricial:

$$\begin{bmatrix} R_{e,i+1} & \mathcal{H}\tilde{Z}_{i+1|i}\mathcal{F}^T \\ \mathcal{F}\tilde{Z}_{i+1|i}\mathcal{H}^T & -\tilde{Z}_{i+1|i} + \mathcal{F}\tilde{Z}_{i+1|i}\mathcal{F}^T + W, \end{bmatrix} \tag{7.23}$$

(W será definida na Tabela 7.1) que, por sua vez pode ser fatorizada como segue:

$$\begin{bmatrix} R_{e,i}^{1/2} & \mathcal{H}M_i \\ K_{p,i} & \mathcal{F}M_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{e,i}^{T/2} & K_{p,i}^T \\ M_i^T\mathcal{H}^T & M_i^T\mathcal{F}^T \end{bmatrix} =: A_i J_i A_i^T. \tag{7.24}$$

O interesse agora é encontrar uma matriz $(I_{Nn} \oplus S_i)$-unitária Ξ_i que triangulariza A_i,

$$A_i\Xi_i = \begin{bmatrix} X_{i+1} & 0 \\ Y_{i+1} & Z_{i+1} \end{bmatrix}. \tag{7.25}$$

Da seguinte identidade

$$R_{e,i+1} = \mathcal{H}\tilde{Z}_{i+1|i}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}\mathcal{D}^T = R_{e,i} + \mathcal{H}M_iS_iM_i^T\mathcal{H}^T$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} R_{e,i}^{1/2} & \mathcal{H}M_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{e,i}^{T/2} \\ M_i^T\mathcal{H}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{e,i+1}^{1/2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{e,i+1}^{T/2} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7.26}$$

Pode-se concluir do Lema B.4.2 que existe uma rotação $(I_{Nn} \oplus S_i)$-unitária Ξ_i para o seguinte *array*:

$$\begin{bmatrix} R_{e,i}^{1/2} & \mathcal{H}M_i \end{bmatrix} \Xi_i = \begin{bmatrix} R_{e,i+1}^{1/2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.27}$$

Aplicando esta matriz Ξ_i obtém-se a triangularização (7.25). Para obter os elementos $X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1}$,

basta considerar as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
X_{i+1}X_{i+1}^T &= R_{e,i} + \mathcal{H}M_iS_iM_i^T\mathcal{H}^T \\
&= R_{e,i} + \mathcal{H}(\tilde{Z}_{i+1|i} - \tilde{Z}_{i|i-1})\mathcal{H}^T \\
&= \mathcal{D}\mathcal{D}^T + \mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{H}\tilde{Z}_{i+1|i}\mathcal{H}^T - \mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T \\
\Rightarrow X_{i+1} &= R_{e,i+1}^{1/2} \\
Y_{i+1}X_{i+1}^T &= \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{F}M_iS_iM_i^T\mathcal{H}^T \\
&= \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T + \mathcal{F}\tilde{Z}_{i+1|i}\mathcal{H}^T - \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^T \\
\Rightarrow Y_{i+1} &= K_{p,i+1}
\end{aligned} \tag{7.28}$$

$$\begin{aligned}
Y_{i+1}Y_{i+1}^T + Z_{i+1}S_iZ_{i+1}^T &= \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^TR_{e,i}^{-1}\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}^T + \mathcal{F}M_iS_iM_i^T\mathcal{F}^T \\
Z_{i+1}S_iZ_{i+1}^T &= \mathcal{F}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{H}^TR_{e,i}^{-1}\mathcal{H}\tilde{Z}_{i|i-1}\mathcal{F}^T + \mathcal{F}(\tilde{Z}_{i+1|i} - \tilde{Z}_{i|i-1})\mathcal{F}^T - Y_{i+1}Y_{i+1}^T \\
Z_{i+1}S_iZ_{i+1}^T &= \tilde{Z}_{i+2|i+1} - \tilde{Z}_{i+1|i} \\
\Rightarrow Z_{i+1} &= M_{i+1}.
\end{aligned} \tag{7.29}$$

O algoritmo *array* rápido para o filtro preditor para SLSM pode ser calculado através do algoritmo descrito na Tabela (7.1).

Observação 7.1.1. *Para quantificar o número de operações por iteração requerido para implementar o algoritmo array rápido proposto, considere que o posto de* $\delta\tilde{Z}_i = \tilde{Z}_{i+2|i+1} - \tilde{Z}_{i+1|i}$ *é dado por* α *para todo* $i \geq 0$ *e que* $\alpha \leq Nn$*. A dimensão do pré-array do algoritmo da Tabela (7.1) é definida por* $(m+Nn)\times(m+\alpha)$ *e utiliza de* $O((Nn)^2\alpha)$ *flops por iteração. Se comparado com o pré-array do algoritmo da Tabela (6.1), cuja dimensão é dada por* $(m+Nn)\times(m+3Nn)$*, a redução das operações requeridas é clara. É necessário* $O((Nn)^3)$ *flops por iteração para calcular o algoritmo array da Tabela (6.1). Será ilustrada através de exemplos numéricos mostrados no final deste capítulo a relação entre* α *e* Nn *que é chave para entender como o algoritmo array rápido trabalha.*

Tabela 7.1: Algoritmo Array Rápido para a Estimativa Nominal Preditora

O algoritmo *array* rápido para a estimativa nominal preditora deduzida no Capítulo 2 pode ser calculado através dos seguintes passos:

Passo 0**:** Calcular as condições iniciais

$$\begin{aligned}
&\tilde{Z}_{0|-1} = \Pi_0, \\
&\tilde{Z}_{1|0} = \mathcal{F}\Pi_0\mathcal{F}^T + W - \mathcal{F}\Pi_0\mathcal{H}^T(\mathcal{H}\Pi_0\mathcal{H}^T + \mathcal{D}\mathcal{D}^T)^{-1}\mathcal{H}\Pi_0\mathcal{F}^T.
\end{aligned}$$

Passo 1**:** Calcular utilizando uma transformação J-unitária (com $J = diag(I, S)$) Ξ_i,

$$\begin{bmatrix} R_{e,i}^{1/2} & \mathcal{H}M_i \\ K_{p,i} & \mathcal{F}M_i \end{bmatrix} \Xi_i = \begin{bmatrix} R_{e,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{p,i+1} & M_{i+1} \end{bmatrix},$$

sendo

$$\begin{aligned}
&W = diag\left[\sum_{j=1}^{N} \pi_j p_{j,k} G_j G_j^T\right] + \mathcal{B}(Q), \\
&K_{p,i} = \mathcal{F}\tilde{Z}_{i+1|i}\mathcal{H}^T R_{e,i}^{-T/2}, \\
&R_{e,i} = \mathcal{H}\tilde{Z}_{i+1|i}\mathcal{H}^T + \mathcal{D}\mathcal{D}^T, \\
&M_i S M_i^T = \tilde{Z}_{i+1|i} - \tilde{Z}_{i|i-1}.
\end{aligned}$$

Passo 2**:** Portanto, $\tilde{Z}_{i+1|i}^{-1}$ pode ser calculado como

$$\tilde{Z}_{i+1|i} = \tilde{Z}_{i|i-1} + M_i S M_i^T.$$

7.2 Algoritmos Array Rápidos para Filtragem $\mathcal{H}_\infty$

Esta seção trata da dedução de algoritmos *array* rápidos para as estimativas $\mathcal{H}_\infty$, preditora e filtrada, na forma de informação para SLSM apresentadas no Capítulo 5, Seção 5.2. Considere a equação de Riccati para a estimativa $\mathcal{H}_\infty$ preditora na forma de informação dada por:

$$\tilde{Z}_{l+2|l+1}^{-1} := \Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}\mathcal{F}\Big(\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} + \mathcal{H}^T\Gamma^{-1}\mathcal{H} - \gamma^{-2}\mathcal{L}^T\Lambda^{-1}\mathcal{L} + \mathcal{F}^T\Gamma^{-1}\mathcal{F}\Big)^{-1}\mathcal{F}^T\Gamma^{-1}. \tag{7.30}$$

Subtraindo $\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1}$ em ambos os lados da Equação (7.30) tem-se

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{l+2|l+1}^{-1} - \tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} &:= -\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} + \Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}\mathcal{F}\Big(\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} + \mathcal{H}^T\Gamma^{-1}\mathcal{H} - \gamma^{-2}\mathcal{L}^T\Lambda^{-1}\mathcal{L} \\ &+ \mathcal{F}^T\Gamma^{-1}\mathcal{F}\Big)^{-1}\mathcal{F}^T\Gamma^{-1}. \end{aligned} \tag{7.31}$$

Pode-se escrever (7.31) como o complemento de Shur de $\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} + \mathcal{H}^T\Gamma^{-1}\mathcal{H} - \gamma^{-2}\mathcal{L}^T\Lambda^{-1}\mathcal{L} + \mathcal{F}^T\Gamma^{-1}\mathcal{F}$ da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} + \mathcal{H}^T\Gamma^{-1}\mathcal{H} - \gamma^{-2}\mathcal{L}^T\Lambda^{-1}\mathcal{L} + \mathcal{F}^T\Gamma^{-1}\mathcal{F} & \mathcal{F}^T\Gamma^{-1} \\ \Gamma^{-1}\mathcal{F} & -\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} + \Gamma^{-1} \end{bmatrix}. \tag{7.32}$$

A matriz (7.32) pode ser fatorada como

$$\begin{bmatrix} R_{e,l}^{1/2} & E_l \\ K_{p,l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{e,l}^{T/2} & K_{p,l}^T \\ E_l^T & 0 \end{bmatrix}, \tag{7.33}$$

sendo

$$\begin{aligned} E_l Q_l E_l^T &:= \tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} - \tilde{Z}_{l|l-1}^{-1}, \\ R_{e,l} &:= \tilde{Z}_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}^T\Gamma^{-1}\mathcal{H} - \gamma^{-2}\mathcal{L}^T\Lambda^{-1}\mathcal{L} + \mathcal{F}^T\Gamma^{-1}\mathcal{F}, \\ K_{p,l} &:= \Gamma^{-1}\mathcal{F}R_{e,l}^{-T/2}. \end{aligned} \tag{7.34}$$

Considere então que o pré-*array* é definido como

$$A_l = \begin{bmatrix} R_{e,l}^{1/2} & E_l \\ K_{p,l} & 0 \end{bmatrix} \tag{7.35}$$

e seja

$$J = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_l \end{bmatrix}. \tag{7.36}$$

Pelo Lema (B.4.3) existe uma matriz $(I_{Nn} \oplus Q_l)$-unitária Ξ_{J_1} que traingulariza o pré-*array* (7.35) se e somente se as matrizes S_1 e $C_1 = A_1 S_1 A_1^T + B_1 S_2 B_1^T$ têm a mesma inércia, com

$$A_1 = \begin{bmatrix} R_{e,l}^{1/2} \\ K_{p,l} \end{bmatrix} \text{ e } B_1 = \begin{bmatrix} E_l \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7.37}$$

Calculando C_1, tem-se

$$C_1 = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} + \mathcal{H}^T \Gamma^{-1} \mathcal{H} - \gamma^{-2} \mathcal{L}^T \Lambda^{-1} \mathcal{L} + \mathcal{F}^T \Gamma^{-1} \mathcal{F} & \mathcal{F}^T \Gamma^{-1} \\ \Gamma^{-1} \mathcal{F} & -\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} + \Gamma^{-1} \end{bmatrix}. \tag{7.38}$$

A matriz (7.38) é o complemento de Shur de $\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} + \mathcal{H}^T \Gamma^{-1} \mathcal{H} - \gamma^{-2} \mathcal{L}^T \Lambda^{-1} \mathcal{L} + \mathcal{F}^T \Gamma^{-1} \mathcal{F} > 0$, que é dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{l+2|l+1}^{-1} - \tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} &:= -\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} + \Gamma^{-1} - \Gamma^{-1} \mathcal{F} \Big(\tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} + \mathcal{H}^T \Gamma^{-1} \mathcal{H} - \gamma^{-2} \mathcal{L}^T \Lambda^{-1} \mathcal{L} \\ &+ \mathcal{F}^T \Gamma^{-1} \mathcal{F} \Big)^{-1} \mathcal{F}^T \Gamma^{-1}. \end{aligned} \tag{7.39}$$

Portanto uma condição necessária e suficiente para a existência de Ξ_{J_1} é que $M_{l+1|l}^{-1}$ seja definida positiva, mas esta condição coincide com a condição de existência do preditor $\mathcal{H}_\infty$. Isto significa que o preditor $\mathcal{H}_\infty$ existe se e somente se o pré-*array* (7.35) pode ser triangularizado.

Agora seja Ξ_{J_1} uma matriz $(I_{Nn} \oplus Q_l)$-unitária que triangulariza (7.35). Então

$$\begin{bmatrix} R_{e,l}^{1/2} & E_l \\ K_{p,l} & 0 \end{bmatrix} \Xi_{J_1} = \begin{bmatrix} X_{l+1} & 0 \\ Y_{l+1} & Z_{l+1} \end{bmatrix}. \tag{7.40}$$

O cálculo completo do pós-*array* pode ser feito elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade de (7.40) e identificando as respectativas posições de ambas as matrizes resultantes

$$\begin{bmatrix} R_{e,l}^{1/2} R_{e,l}^{T/2} + E_l Q_l E_l^T & R_{e,l}^{1/2} K_{p,l}^T \\ K_{p,l} R_{e,l}^{T/2} & K_{p,l} K_{p,l}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{l+1} X_{l+1}^T & X_{l+1} Y_{l+1}^T \\ Y_{l+1} X_{l+1}^T & Y_{l+1} Y_{l+1}^T + Z_{l+1} J_l Z_{l+1}^T \end{bmatrix}. \tag{7.41}$$

Tem-se então que

$$\begin{bmatrix} R_{e,l}^{1/2} & E_l \\ K_{p,l} & 0 \end{bmatrix} \Xi_{J_1} = \begin{bmatrix} R_{e,l+1}^{1/2} & 0 \\ K_{p,l+1} & E_{l+1} \end{bmatrix}. \tag{7.42}$$

O algoritmo *array* rápido para a estimativa $\mathcal{H}_\infty$ preditora na forma de informação para SLSM é dado na Tabela (7.2).

Tabela 7.2: Algoritmo Array Rápido para a Estimativa $\mathcal{H}_\infty$ Preditora na Forma de Informação

O algoritmo *array* rápido para a estimativa $\mathcal{H}_\infty$ preditora na forma de informação para SLSM consiste dos seguintes passos:

Passo 0**:** Calcular as condições iniciais

$$\begin{aligned} &\tilde{Z}_{0|-1}^{-1} := \tilde{Z}_0^{-1}, \\ &\tilde{Z}_{1|0}^{-1} := \Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}\mathcal{F}\Big(\tilde{Z}_{0|-1}^{-1} + \mathcal{H}^T\Gamma^{-1}\mathcal{H} - \gamma^{-2}\mathcal{L}^T\Lambda^{-1}\mathcal{L} + \mathcal{F}^T\Gamma^{-1}\mathcal{F}\Big)^{-1}\mathcal{F}^T\Gamma^{-1}. \end{aligned}$$

Passo 1**:** Calcular E_{l+1} utilizando uma transformação $(I_{Nn} \oplus Q_l)$-unitária Ξ_{J_1} de dimensões apropriadas

$$\begin{bmatrix} R_{e,l}^{1/2} & E_l \\ K_{p,l} & 0 \end{bmatrix} \Xi_{J_1} = \begin{bmatrix} R_{e,l+1}^{1/2} & 0 \\ K_{p,l+1} & E_{l+1} \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} &E_l Q_l E_l^T := \tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} - \tilde{Z}_{l|l-1}^{-1}, \\ &R_{e,l} := \tilde{Z}_{l|l-1}^{-1} + \mathcal{H}^T\Gamma^{-1}\mathcal{H} - \gamma^{-2}\mathcal{L}^T\Lambda^{-1}\mathcal{L} + \mathcal{F}^T\Gamma^{-1}\mathcal{F}, \\ &K_{p,l} := \Gamma^{-1}\mathcal{F}R_{e,l}^{-T/2}, \end{aligned}$$

sendo Q_l uma matriz assinatura. A matriz Z_k usada em Γ pode ser calculada baseado em (7.8)-(7.10).

Passo 2**:** Portanto, $\tilde{Z}_{l+2|l+1}^{-1}$ pode ser calculado como

$$\tilde{Z}_{l+2|l+1}^{-1} := \tilde{Z}_{l+1|l}^{-1} + E_{l+1}Q_{l+1}E_{l+1}^T.$$

Seja agora a equação de Riccati da estimativa $\mathcal{H}_\infty$ filtrada na forma de informação dada na Tabela (5.3)

$$\tilde{Z}_{l|l}^{-1} = \Gamma_{l-1}^{-1} - \Gamma_{l-1}^{-1}\mathcal{F}_{l-1}\Big(\tilde{Z}_{l-1|l-1}^{-1} + \mathcal{F}_{l-1}^T\Gamma_{l-1}^{-1}\mathcal{F}_{l-1}\Big)^{-1}\mathcal{F}_{l-1}^T\Gamma_{l-1}^{-1}. \tag{7.43}$$

Considerando a Equação (7.43) a dedução do algoritmo *array* rápido para a estimativa filtrada na forma de informação segue o mesmo raciocínio do caso preditor. Os passos fundamentais do algoritmo *array* rápido para a estimativa $\mathcal{H}_\infty$ filtrada na forma de informação de SLSM estão descritos na Tabela (7.3).

Tabela 7.3: Algoritmo Array Rapido $\mathcal{H}_\infty$ para Filtros na Forma de Informação

O algoritmo *array* rápido para a estimativa $\mathcal{H}_\infty$ filtrada na forma de informação para o SLSM descrito no Capítulo 2 consiste em:

Passo 0**:** Calcular as condições iniciais

$$\begin{aligned}
&\tilde{Z}_{0|0}^{-1} := \Phi_0,\\
&\tilde{Z}_{1|1}^{-1} := \Gamma^{-1} - \Gamma^{-1}\mathcal{F}\Big(\Phi_0 + \mathcal{F}^T\Gamma^{-1}\mathcal{F}\Big)^{-1}\mathcal{F}^T\Gamma + \mathcal{H}^T\Pi^{-1}\mathcal{H} - \gamma^{-2}\mathcal{L}^T\Lambda^{-1}\mathcal{L}.
\end{aligned}$$

Passo 1**:** Calcular U_{l+1} utilizando uma transformação $(I_{Nn} \oplus O_l)$-unitária Ξ_{J_2} de dimensões apropriadas

$$\begin{bmatrix} R_{e,l}^{1/2} & U_l \\ K_{f,l} & 0 \end{bmatrix} \Xi_{J_2} = \begin{bmatrix} R_{e,l+1}^{1/2} & 0 \\ K_{f,l+1} & U_{l+1} \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{aligned}
&U_l O_l U_l^T := \tilde{Z}_{l+1|l+1}^{-1} - \tilde{Z}_{l|l}^{-1},\\
&R_{e,l} := \tilde{Z}_{l|l}^{-1} + \mathcal{F}^T\Gamma^{-1}\mathcal{F},\\
&K_{f,l} := \Gamma^{-1}\mathcal{F}R_{e,l}^{-T/2},
\end{aligned}$$

sendo J_l uma matriz assinatura. A matriz Z_k usada em Γ pode ser calculada com base em (7.8)-(7.10).

Passo 2**:** Por fim, $\tilde{Z}_{l+2|l+2}^{-1}$ pode ser calculado como

$$\tilde{Z}_{l+2|l+2}^{-1} := \tilde{Z}_{l+1|l+1}^{-1} + U_{l+1}O_{l+1}U_{l+1}^T.$$

Observação 7.2.1. *Pode-se verificar que as dimensões dos pré-arrays dos algoritmos array rápidos das Tabelas (7.2) e (7.3) são dadas por* $(2Nn) \times (Nn + \alpha)$. *Em contrapartida as dimensões do pré-array dos algoritmos array raiz quadrada das Tabelas (6.3) e (6.4) são dadas por* $(2Nn) \times (2Nn + m + p)$. *Comparando as dimensões dos algoritmos array raiz quadrada e dos algoritmos array rápidos considerando os casos onde o posto de* $\delta\tilde{Z}_i^{-1} = \tilde{Z}_{i+1}^{-1} - \tilde{Z}_i^{-1}$ *é dado por* α *para todo* $i \geq 0$ *e que* $\alpha \leq Nn$, *a redução do número de operações por iteração é clara.*

7.3 Algoritmos Array Rápido para Filtragem Robusta

Na Tabela (7.4) será mostrado o algoritmo *array* rápido para a estimativa robusta preditora na forma de informação para SLSM deduzida no Capítulo 5 considerando a Equação de Riccati:

$$\tilde{Z}_{i+2|i+1}^{-1} := \widehat{\Pi}^{-1} - \widehat{\Pi}^{-1}\mathcal{F}\left(\tilde{Z}_{i+1|i}^{-1} + \mathcal{X}^T\mathcal{Y}^{-1}\mathcal{X} + \mathcal{F}^T\widehat{\Pi}^{-1}\mathcal{F}\right)^{-1}\mathcal{F}^T\widehat{\Pi}^{-1}. \tag{7.44}$$

Na Tabela (7.5) será mostrado o algoritmo *array* rápido para a estimativa robusta filtrada na forma de informação para SLSM, também deduzida no Capítulo 5 considerando a Equação de Riccati:

$$\tilde{Z}_{i+1|i+1}^{-1} = \mathcal{I}^T\mathcal{K}_i^{-1}\mathcal{I} - \mathcal{I}^T\mathcal{K}_i^{-1}\mathcal{W}_i\left(\tilde{Z}_{i|i}^{-1} + \mathcal{W}_i^T\mathcal{K}_i^{-1}\mathcal{W}_i\right)^{-1}\mathcal{W}_i^T\mathcal{K}_i^{-1}\mathcal{I} + \mathcal{V}_{i+1}^T\mathcal{U}_{i+1}\mathcal{V}_{i+1} \tag{7.45}$$

Observação 7.3.1. *Para quantificar o número de operações por iteração necessárias para calcular os algoritmos array propostos neste trabalho, considere que o posto de* $\delta\tilde{Z}_i^{-1} = \tilde{Z}_{i+1}^{-1} - \tilde{Z}_i^{-1}$ *é dado por* α *para todo* $i \geq 0$ *e que* $\alpha \leq Nn$. *As dimensões dos pré-arrays dos algoritmos array rápidos das Tabelas (7.4) e (7.5) são definidos por* $(2Nn) \times (Nn + \alpha)$. *Observe que se comparado com os pré-arrays das Tabelas (6.5) e (6.6), cujas dimensões são dadas por* $(2Nn) \times (3Nn + m)$ *e* $(2Nn) \times (4Nn + m)$ *respectivamente, a redução das operações necessárias fica bem definida.*

Tabela 7.4: Algoritmo Array Rápido para a Estimativa Robusta Preditora na Forma de Informação

O algoritmo *array* rápido para a estimativa robusta preditora na forma de informação para SLSM, descrito no Capítulo 5 consiste nos seguintes passos:

Passo 0**:** Calcular as condições iniciais:

$$\begin{aligned}
&\tilde{Z}_{0|-1}^{-1} := \tilde{Z}_{0}^{-1}, \\
&\tilde{Z}_{1|0}^{-1} := \widehat{\Pi}^{-1} - \widehat{\Pi}^{-1}\mathcal{F}\left(\tilde{Z}_{0|-1}^{-1} + \mathcal{X}^T\mathcal{Y}^{-1}\mathcal{X} + \mathcal{F}^T\widehat{\Pi}^{-1}\mathcal{F}\right)^{-1}\mathcal{F}^T\widehat{\Pi}^{-1}.
\end{aligned}$$

Passo 1**:** Calcular B_{i+1} utilizando uma matriz $(I_{Nn} \oplus S_i)$-unitária Ξ_{J_3} de dimensões apropriadas:

$$\begin{bmatrix} R_{e,i}^{1/2} & B_i \\ K_{p,i} & 0 \end{bmatrix} \Xi_{J_3} = \begin{bmatrix} R_{e,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{p,i+1} & B_{i+1} \end{bmatrix},$$

sendo

$$\begin{aligned}
&B_i S_i B_i^T := \tilde{Z}_{i+1|i}^{-1} - \tilde{Z}_{i|i-1}^{-1}, \\
&R_{e,i} := \tilde{Z}_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{X}^T\mathcal{Y}^{-1}\mathcal{X} + \mathcal{F}^T\widehat{\Pi}^{-1}\mathcal{F}, \\
&K_{p,i} := \widehat{\Pi}^{-1}\mathcal{F}R_{e,i}^{-T/2},
\end{aligned}$$

sendo S_i uma matriz assinatura.

Passo 2**:** Portanto, $\tilde{Z}_{i+2|i+1}^{-1}$ pode ser calculado como

$$\tilde{Z}_{i+2|i+1}^{-1} := \tilde{Z}_{i+1|i}^{-1} + B_{i+1}S_{i+1}B_{i+1}^T.$$

Tabela 7.5: Algoritmo Array Rápido para a Estimativa Robusta Filtrada

O algoritmo *array* rápido para a estimativa robusta filtrada na forma de informação para SLSM consiste dos seguintes passos

Passo 1: Calcular as condições iniciais

$$\begin{aligned}
&\tilde{Z}_{0|0}^{-1} := \tilde{Z}_0 + \mathcal{H}^T \widehat{R}^{-1} \mathcal{H} + \widehat{\lambda}_{-1} N^{h^T} N^h, \\
&\widehat{R} := R - \widehat{\lambda}_{-1}^{-1} M^h M^{h^T}, \\
&\tilde{Z}_{1|1}^{-1} := \mathcal{I}^T \left(\mathcal{K} + \mathcal{W} \tilde{Z}_{0|0} \mathcal{W}^T \right)^{-1} \mathcal{I} + \mathcal{V}^T \mathcal{U} \mathcal{V}.
\end{aligned}$$

Passo 2: Calcular U_{i+1} utilizando uma transformação $(I_{Nn} \oplus J_i)$-unitária Ξ_{J_4} de dimensões apropriadas

$$\begin{bmatrix} R_{e,i}^{1/2} & U_i \\ K_{f,i} & 0 \end{bmatrix} \Xi_{J_4} = \begin{bmatrix} R_{e,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{f,i+1} & U_{i+1} \end{bmatrix},$$

sendo

$$\begin{aligned}
&U_i J_i U_i^T := \tilde{Z}_{i+1|i+1}^{-1} - \tilde{Z}_{i|i}^{-1}, \\
&R_{e,i} := \tilde{Z}_{i|i}^{-1} + \mathcal{W}^T \mathcal{K}^{-1} \mathcal{W}, \\
&K_{f,i} := \mathcal{I}^T \mathcal{K}^{-1} \mathcal{W} R_{e,i}^{-T/2}.
\end{aligned}$$

sendo J_i uma matriz assinatura.

Passo 3: Portanto, $\tilde{Z}_{i+2|i+2}^{-1}$ pode ser calculado como

$$\tilde{Z}_{i+2|i+2}^{-1} := \tilde{Z}_{i+1|i+1}^{-1} + U_{i+1} J_{i+1} U_{i+1}^T.$$

7.4 Exemplo Numérico

Para ilustrar as propriedades dos algoritmo *array* rápido para o filtro preditor na forma de informação para SLSM desenvolvidos nesta seção, considere o SLSM (2.1)-(2.2) com dois modos Markovianos

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0.8731 & 0 \\ 0 & 1.2089 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0.8731 & 0 \\ 0 & 1.2089 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = D_2 = 8 \times 10^{-4},$$

com a respectiva matriz de probabilidade dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

A matriz $\mathcal{D}$ em (7.3) é calculada considerando $\pi_1 = 0.5$ e $\pi_2 = 0.5$ (com $\pi_{i+1,j} = \sum_{j=1}^{N} \pi_{0,j} p_{jk}^{(i)}$ sendo $\pi_{0,1} = 0.05$ e $\pi_{0,2} = 0.95$). Para a condição inicial x_0 foi considerado $\mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ e $V_k = 0$. $\Theta_i \in \{1, 2\}$, v_i e u_i são sequências independentes de ruídos e $\Pi_0 = 0$ ($dim(\Pi_0) = 4 \times 4$). Serão apresentados dois exemplos para mostrar as características do algoritmo *array* rápido apresentado na Tabela (7.1). No primeiro exemplo, foram calculados os valores singulares de $\tilde{Z}_{i|i-1}$ de duas maneiras diferentes. Eles foram calculados através de arquiteturas em ponto flutuante e ponto fixo (16-bits) com base na equação de Riccati (7.6), no algoritmo *array* raiz quadrada da Tabela (6.1), e no algoritmo *array* rápido da Tabela (7.1). Os resultados obtidos para a equação de Riccati baseado em arquitetura de ponto flutuante foram considerados como referência para comparar os desempenhos destes três métodos em arquitetura baseado em ponto fixo. Note que o desempenho do algoritmo *array* rápido em implementação em ponto fixo está mais próximo ao desempenho da equação de Riccati em implementação em ponto flutuante, ver Figura 7.1. A avaliação da matriz M_i é mostrada em Figura 7.2. Note que α, posto de M_i, cresce rápido de 4 para 1 e os valores singulares máximos e mínimos de M_i caminham para zero em 10

iterações aproximadamente.

No segundo exemplo, foi calculado a raiz do erro médio quadrático (rms) da estimativa

$$e_{rms_i} = \mathbb{E}||x_i - \hat{x}_{i|i}|| \approx \frac{1}{4000}\sum_{j=1}^{N_f}||x_i - \hat{x}_i^{(j)}|| \tag{7.46}$$

via algoritmos *array* raiz quadrada e algoritmos *array* rápido. 4000 simulações Monte Carlo foram realizadas em um horizonte de $t_f = 2ms$. As simulações, para ambos os exemplos, foram realizadas através de um computador com processador Core 2 Duo de 2.9 GHz. Os valores de Θ_i foram gerados aleatoriamente. Os resultados são apresentados na Figura 7.3.

Como era esperado ambos os exemplos mostram quão rápido é o algoritmo da Tabela (7.1) se comparado com o algoritmo da Tabela (6.1). Note que para melhor apresentação da convergência dos respectivos algoritmos, o eixo horizontal das Figuras 7.1 e 7.3 são representados em ms. Neste caso, calculou-se para a i-ésima iteração o tempo gasto por cada algoritmo.

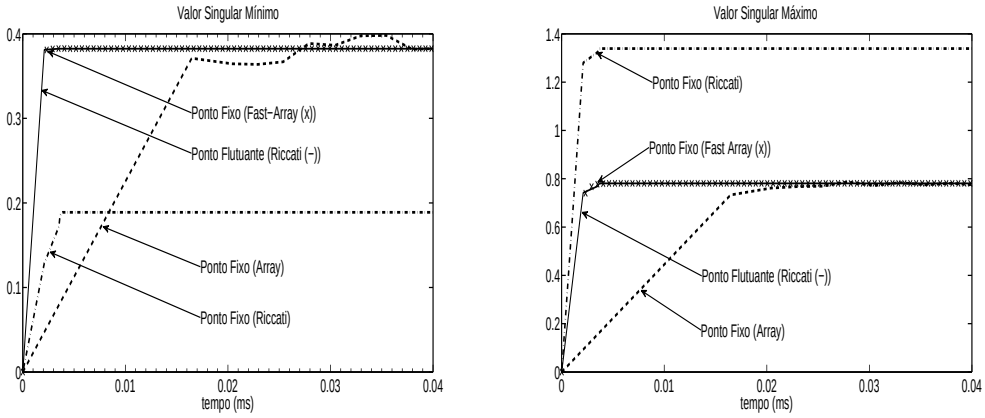


Figura 7.1: Valores singulares mínimo e máximo de $\tilde{Z}_{i|i-1}$ calculados através de arquiteturas de ponto fixo e ponto flutuante.

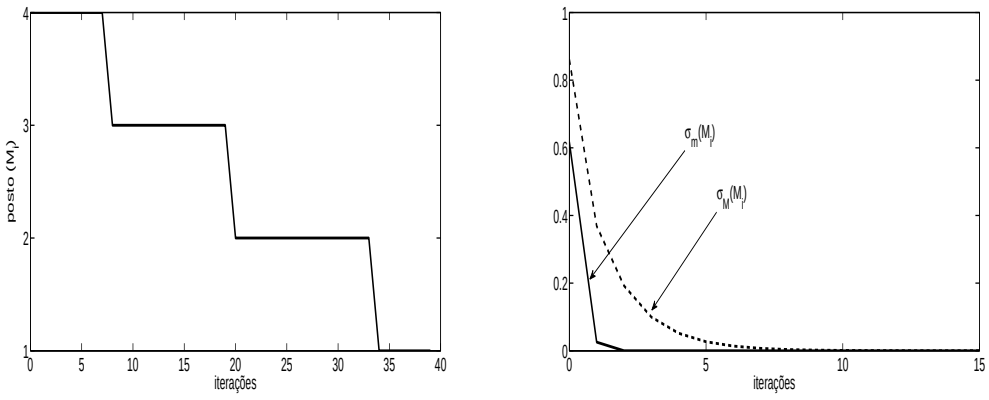


Figura 7.2: Posto e os valores singulares mínimo ($\sigma_m(.)$) e máximo ($\sigma_M(.)$) de M_i.

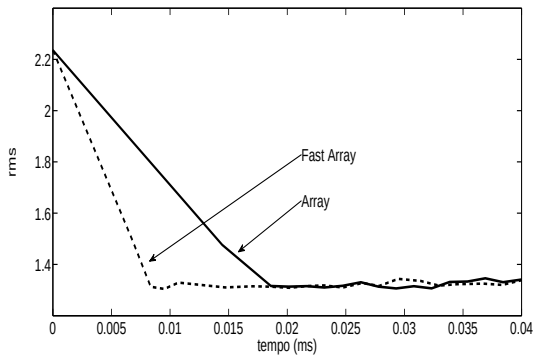


Figura 7.3: Raiz do erro médio quadrático (rms) do filtro LMSEE calculado através do algoritmo *array* raiz quadrada da Tabela (6.1) e do algoritmo *array* rápido da Tabela (7.1).

CAPÍTULO 8

Conclusão e Trabalhos Futuros

Neste trabalho foram desenvolvidas duas classes de filtros robustos para SLSM, filtros $\mathcal{H}_\infty$ e filtros robustos utilizando o método dos mínimos quadrados regularizados com incertezas. A principal característica destes filtros é a garantia de estabilidade em implementações online. Além disso, formulações alternativas, baseadas em filtros na forma de informação e algoritmos *array*, foram desenvolvidas para calcular as estimativas robustas deste trabalho. É importante ressaltar que os estados da cadeia de Markov foram considerados não disponíveis nos projetos dos filtros. Nos exemplos numéricos foram realizadas comparações com filtros existentes na literatura que demonstraram a eficiência dos resultados alcançados nesta tese.

Como trabalhos futuros pretende-se:

- Desenvolver o filtro robusto recursivo para SLSM com incertezas em todos os parâmetros do sistema.
- Desenvolver filtros recursivos para sistemas lineares singulares sujeitos a saltos Markovianos (SLSSM).

Referências Bibliográficas

[1] Ackerson, G. A. e K. S. Fu (1970). On the state estimation in switching environments. *IEEE Transactions on Automatic Control AC-15*(1), 10–17.

[2] Andrieu, C., M. Davy, e A. Doucet (2003). Efficient particle filtering for jump Markov systems application to time-varying autoregressions. *IEEE Transactions on Signal Processing 51*(7), 1762–1770.

[3] Chang, C. G. e M. Athans (1978). State estimation for discrete systems with switching parameters. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems AES-14*(3), 418–424.

[4] Clements, D. J. e B. D. O. Anderson (1978). *Singular Optimal Control: The Linear Quadratic Problem.* Berlin, Germany: Springer-Verlag.

[5] Colaneri, P., J. C. Geromel, e A. Locatelli (1993). *Control Theory and Design - An RH_2 and RH_∞ Viewpoint.* London, Academic Press.

[6] Costa, O. L. V. (1994). Linear minimum mean square error estimation for discrete-time Markovian jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control 39*(8), 1685–1689.

[7] Costa, O. L. V. e M. D. Fragoso (1993). Stability results for discrete-time linear systems with markovian jumping parameters. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 179*(1), 154–178.

[8] Costa, O. L. V. e S. Guerra (2002a). Robust linear filtering for discrete-time hybrid Markov linear systems. *International Journal of Control 75*(10), 712–727.

[9] Costa, O. L. V. e S. Guerra (2002b). Stationary filter for linear minimum mean square error estimation for discrete-time Markovian jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control 47*(8), 1351–1356.

[10] Doucet, A. e C. Andrieu (2001). Iterative algorithms for state estimation of jump markov linear systems. *IEEE Transactions on Signal Processing 49*(6), 1216–1227.

[11] Dyer, P. e S. McReynolds (1969). Extension of square-root filtering to include process noise. *J. of Optimization Theory and Appliccations 3*, 444–459.

[12] Fu, M., C. E. Souza, e Z. Lu (2001). Finite-horizon robust Kalman filter design. *IEEE Transactions on Signal Processing 49*(9), 2103–2112.

[13] Gonçalves, A. P. C., A. R. Fioravanti, e J. C. Geromel (2009). $\mathcal{H}_\infty$ filtering of discrete-time Markov jump linear systems through linear matrix inequalities. *IEEE Transactions on Automatic Control 54*(6), 1347–1351.

[14] Hassibi, B., A. H. Sayed, e T. Kailath (1999). *Indefinite-Quadratic Estimation and Control: A Unified Approach to $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ Theories.* SIAM - Studies in Applied and Numerical Mathematics, Philadelphia.

[15] Hung, Y. S. e F. Yang (2003). Robust $\mathtt{H}_\infty$ filtering with error variance constraints for discrete time-varying systems with uncertainty. *Automatica 39*(7), 1185–1194.

[16] Ishihara, J. Y. e M. H. Terra (2008). Robust state prediction for descriptor systems. *Automatica 44*(8), 2185–2190.

[17] Ishihara, J. Y., M. H. Terra, e J. C. T. Campos (2006). Robust Kalman filter for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control 51*(8), 1354–1358.

[18] Ishihara, J. Y., M. H. Terra, e B. M. Espinoza (2009). $\mathcal{H}_\infty$ filtering for rectangular discrete-time descriptor systems. *Automatica 45*(7), 1743–1748.

[19] Kailath, T., A. H. Sayed, e B. Hassibi (2000). *Linear Estimation.* Upper Sadlle River, New Jersey: Pretince Hall.

[20] Kaminski, P., A. Bryson, e S. Schmidt (1971). Discrete square-root filtering: A survey of current techniques. *IEEE Transactions on Automatic Control 16*(6), 727–735.

[21] Lee, C. e I. Fong (2003). Robust Kalman filter design for discrete-time systems with Markovian jumping parameters. SICE Annual Conference, Fukui, Japan.

[22] Mahmoud, M. S. e P. Shi (2003). Robust Kalman filtering for continuous time-lag systems with Markovian jump parameters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems 50*(1), 98–105.

[23] Mahmoud, M. S., P. Shi, e A. Ismail (2004). Robust Kalman filtering for discrete-time Markovian jump systems with parameter uncertainty. *Journal of Computational and Applied Mathematics 169*, 53–69.

[24] Morf, M. e T. Kailath (1975). Square-root algorithms for least-squares estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control 20*(4), 487–497.

[25] Morf, M., G. Sidhu, e T. Kailath (1974). Some new algorithms for recursive estimation in constant, linear, discrete-time systens. *IEEE Transactions on Automatic Control 19*(4), 315–323.

[26] Sayed, A. H. (1999). Design criteria for uncertain models with structured and unstructured uncertainties. *Lecture Notes in Control and Information Science, Springer Verlag 245*(7), 159–173.

[27] Sayed, A. H. (2001). A framework for state-space estimation with uncertain models. *IEEE Transactions on Automatic Control 46*(7), 998–1013.

[28] Sayed, A. H., V. H. Nascimento, e F. A. M. Ciparrone (2002). A regularized robust design criterion for uncertain data. *SIAM J. Matrix Analysis and Applications 23*(4), 1120–1142.

[29] Shao, H. (2008). Delay-range-dependent robust H_∞ filtering for uncertain stochastic systems with mode-dependent time delays and Markovian jump parameters. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 342*(2), 1084–1095.

[30] Shi, P., E. K. Boukas, e R. K. Agarwal (1999). Kalman filtering for continuous-time uncertain systems with Markovian jumping parameter. *IEEE Transactions on Automatic Control 44*(8), 1592–1597.

[31] Souza, C. E. e M. D. Fragoso (2002). Robust H_∞ filtering for uncertain Markovian jump linear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control 12*(5), 435–446.

[32] Tugnait, J. K. (1982). Adaptive estimation and identification for discrete systems with Markov jump parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control AC-27*(5), 1054–1062.

[33] Verhaegen, M. e P. Van Dooren (1986). numerical aspects of different kalman filter implemetations. *IEEE Transactions on Automatic Control 31*(10), 907–917.

[34] Wang, J., J. Zhu, e H. Unbehauen (1999). Robust filter design with time-varying parameter uncertainty and error variance constraints. *International Journal of Control 72*(1), 30–38.

[35] Wang, Z., J. Lam, e X. Liu (2004). Robust filtering for discrete-time Markovian jump delay systems. *IEEE Signal Processing Letters 11*(8), 659–662.

[36] Xiong, J. e J. Lam (2006). Fixed-order robust H_∞ filter design for Markovian jump systems with uncertain switching probabilities. *IEEE Transactions on Signal Processing 54*(4), 1421–1430.

[37] Xu, S., T. Chen, e J. Lam (2004). Robust H_∞ filtering for a class of nonlinear discrete-time Markovian jump systems. *Journal of Optimization Theory and Applications 122*(3), 651–668.

[38] Xu, S., J. Lam, e X. Mao (2007). Delay-dependent H_∞ control and filtering for uncertain Markovian jump systems with time-varying delays. *IEEE Transactions on Circuits and Systems 54*(9), 2070–2077.

[39] Yang, F., Z. Wang, G. Feng, e X. Liu (2009). Robust filtering with randomly varying sensor delay: the finite-horizon case. *IEEE Transactions on Circuits and Systems 56*(3), 664–672.

[40] Zhu, X., Y. C. Soh, e L. Xie (2002). Design and analysis of discrete-time robust Kalman filters. *Automatica 38*(6), 1069–1077.

APÊNDICE A

Resultados Auxiliares

A seguir serão apresentados alguns resultados auxiliares que serão úteis para o desenvolvimento dos filtros robustos recursivos para SLSM propostos nesta tese.

Lema A.0.1. *[19] Se* $\big(A+BCD\big)$ *e* $\big(I+CDA^{-1}B\big)$ *são invertíveis e se* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *é uma matriz também invertível e se as matrizes* B*,* C *e* D *são de dimensões compatíveis, então*

$$\big(A+BCD\big)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\big(I+CDA^{-1}B\big)^{-1}CDA^{-1}. \tag{A.1}$$

Se além disto, C *for invertível, então*

$$\big(A+BCD\big)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\big(C^{-1}+DA^{-1}B\big)^{-1}DA^{-1}. \tag{A.2}$$

Lema A.0.2. *[19] Sejam* A *e* C *matrizes invertíveis, então*

$$\big(A+BC^{-1}D\big)^{-1}BC^{-1} = A^{-1}B\big(C+DA^{-1}B\big)^{-1}. \tag{A.3}$$

Lema A.0.3. *[19] A seguinte identidade é válida para* A *invertível*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1}+A^{-1}B\big(D-CA^{-1}B\big)CA^{-1} & -A^{-1}B\big(D-CA^{-1}B\big)^{-1} \\ -\big(D-CA^{-1}B\big)^{-1}CA^{-1} & \big(D-CA^{-1}B\big)^{-1} \end{bmatrix}. \tag{A.4}$$

Como também a seguinte identidade é válida para D invertível

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} & -\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C\left(A - BD^{-1}C\right) & D^{-1} + D^{-1}C\left(A - BD^{-1}C\right)BD^{-1} \end{bmatrix}. \tag{A.5}$$

APÊNDICE B

Transformações Unitárias e J-Unitárias

Neste apêndice serão apresentados resultados, sobre transformações Unitárias e J-Unitárias, que foram fundamentais para a dedução dos algoritmos arrays dos Capítulos 6 e 7.

B.1 Transformações de Householder

As transformações de Householder zeram várias entradas de uma linha de uma só vez. Considera-se neste texto apenas matrizes com entradas de números reais. Para um vetor linha n-dimensional x, supõe-se que se queira zerar várias entradas utilizando uma matriz simétrica e ortogonal θ, ou seja, transformar x na forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \end{bmatrix} \theta = \alpha e_0 \tag{B.1}$$

sendo α um escalar real a ser determinado e e_0 o primeiro vetor base $e_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

O escalar α não pode ser arbitrário e de fato ele deve ser escolhido *a priori* e antes de determinar θ. Por causa da ortogonalidade e de (B.1) segue que $x\theta\theta^T x^T = xx^T = \|x\|^2$. Então deve-se ter $\alpha = \pm \|x\|$. Ambos os valores de α são possíveis. Uma maneira de calcular θ é através da reflexão de Householder.

B.2 Transformações de Givens

Se a matriz a ser triangularizada já possui muitos zeros, o método de Householder pode ser muito custoso. As rotações de Givens podem ser uma boa alternativa quando existem muitos zeros. Uma rotação elementar de Givens θ, ortogonal de tamanho 2×2 transforma um vetor linha 1×2, $x = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$, e rotaciona para levá-la ao vetor de base $e_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, ou seja, a rotação faz a seguinte transformação:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \theta = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

sendo que α é um número real a ser determinado. O valor de θ que transforma (B.2) é dado por

$$\theta = 1/\sqrt{1+\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

sendo $\rho = b/a, a \neq 0$. Pode-se verificar que θ faz realmente a seguinte transformação:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \theta = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{a^2+b^2} & 0 \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

sendo que os sinais de mais ou de menos dependem do sinal considerado em (B.3). As tringularizações de matrizes podem ser feitas através de um produto de transformações de Givens. Por exemplo, suponho que se queira zerar x_j usando x_i em $\begin{bmatrix} \times & \times & x_i & \times & \times & x_j & \times & \times \end{bmatrix}$. Seja então $\rho = x_j/x_i$ e definindo-se:

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{1+\rho^2} & 0 & -\rho/\sqrt{1+\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho/\sqrt{1+\rho^2} & 0 & 1/\sqrt{1+\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.5}$$

tem-se então que $x\theta = \begin{bmatrix} \times & \times & \alpha & \times & \times & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$. Para tringularizar uma matriz A qualquer, deve-se realizar uma série de transformações como em (B.5) para zerar os elementos de

interesse da matriz A linha a linha.

B.3 Rotações de Givens Hiperbólicas

Rotações de Givens Hiperbólicas são matrizes de rotação 2×2 que preservam a "norma-J", sendo portanto uma transformação J-ortogonal. Uma transformação J-ortogonal θ é uma matriz que satisfaz:

$$\theta J \theta^T = \theta^T J \theta = J \tag{B.6}$$

sendo J uma matriz assinatura, ou seja, uma matriz diagonal com entradas ± 1

$$J = (I_p \oplus -I_q)\,, p \geq 1, q \geq 1. \tag{B.7}$$

Transformações J-unitárias preservam a "norma quadrática J"de um vetor, ou seja, se $y = x\theta$, então

$$\|y\|_J^2 = yJy^T = x\theta J \theta^T x^T = xJx^T = \|x\|_J^2\,. \tag{B.8}$$

No caso de uma matriz de rotação hiperbólica $\theta_{2\times 2}$, J é dado por $J = (1 \oplus -1)$. Dado um vetor real 1×2 $x = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$, deseja-se encontrar tal rotação hiperbólica que faça a seguinte transformação

$$x = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \theta = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \end{bmatrix}, \tag{B.9}$$

sendo α um número real a ser determinado. Neste caso nem sempre é possível fazer tal transformação, pois pode ocorrer de $\|x\|_J^2 = a^2 - b^2$ ser negativo. Assim quando a norma-J for negativa será possível fazer a seguinte transformação

$$x\theta = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \theta = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \end{bmatrix}. \tag{B.10}$$

Assim, pode-se distinguir dois casos:

1. $|a| > |b|$: A expressão para calcular a matriz de rotação hiperbólica θ que satisfaz (B.9) é

dada por:

$$\theta = \sqrt{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix} \tag{B.11}$$

sendo $\rho = b/a, a \neq 0$ o que gera

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}\theta = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{a^2-b^2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{B.12}$$

2. $|b| > |a|$: a expressão para calcular a matriz de rotação hiperbólica θ que satisfaz (B.10) é dado por:

$$\theta = 1/\sqrt{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix} \tag{B.13}$$

sendo $\rho = a/b, b \neq 0$ o que gera

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}\theta = \begin{bmatrix} 0 & \pm\sqrt{b^2-a^2} \end{bmatrix}. \tag{B.14}$$

B.4 Lemas Auxiliares

Lema B.4.1. *[19] Sejam A e B matrizes $n \times m$, $n \leq m$. Então $AA^T = BB^T$ se, e somente se, existe uma matriz Θ ($\Theta\Theta^T = I = \Theta\Theta^T$) tal que $A = B\Theta$.*

Definição B.4.1. *[19] Para a seguinte matriz assinatura J (uma matriz com elementos diagonais que podem ser $+1$ ou -1 e com zero nas outras posições), uma matriz Ξ será chamado J-unitária se $\Xi J \Xi^T = J$.*

Lema B.4.2. *[19] Seja A e B matrizes $n \times m$ (com $n \leq m$), e seja $J = diag\,(I_p, -I_q)$ uma matriz assinatura com $p + q = m$. Se $AJA^T = BJB^T$ é diferente de zero, então existe uma matriz J-unitária Ξ tal que $A = B\Xi$.*

Lema B.4.3. *[14] Sejam A e B matrizes $n \times n$ e $n \times m$ arbitrárias, respectivamente, e suponha $J = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$, onde S_1 e S_2 são matrizes assinaturas $n \times n$ e $m \times m$. Então $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ pode ser triangularizado por uma transformação J-unitária Θ como*

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \end{bmatrix} \tag{B.15}$$

com L triangular inferior se e somente se todas as submatrizes principais de S_1 e de $AS_1A^T + BS_2B^T$ tem a mesma inércia.