Tatiane Batista Rocha Francisco

**Controle de Movimentos Coordenados de Robôs Móveis
quando os Robôs Assumem a Liderança de Maneira
Aleatória**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos
da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

Área de Concentração: Sistemas Dinâmicos
Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra
Co-orientador: Prof. Dr. Adriano A. G. Siqueira

São Carlos
2009

Sumário

Resumo	vii
Abstract	ix
Publicações	xi
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xvii
Lista de Abreviaturas e Siglas	xix
Lista de Símbolos	xxi
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Revisão Bibliográfica	2
1.2.1 Robôs Móveis com Rodas	2
1.2.2 Controle de Formação	3
1.2.3 Controle $\mathcal{H}_\infty$ Aplicado a Robôs	3
1.2.4 Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos	4
1.3 Objetivo	7
1.4 Disposição dos Capítulos	7
2 Teoria Algébrica dos Grafos	9
2.1 Conceitos Básicos	9
3 Controle de Formação	13
3.1 Introdução	13
3.2 Modelo	13
3.3 Formações com Líder	17

4	Modelagem dos RMRs	19
4.1	Modelo Cinemático	20
4.2	Controlador Baseado na Cinemática	21
4.3	Modelo Dinâmico	22
5	Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear	25
5.1	Introdução	25
5.2	Formulação do Problema	25
5.3	Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear via Representação Quase- LPV	29
5.3.1	Ganho $\mathcal{L}_2$ para sistemas não lineares variantes no tempo	29
5.4	Síntese do Controle $\mathcal{H}_\infty$ para Sistemas LPV por Realimentação de Estado . . .	30
5.4.1	Considerações Computacionais	31
5.5	Síntese do Controle $\mathcal{H}_\infty$ para Sistemas LPV por Realimentação de Saída	31
5.5.1	Redução do problema de dimensão infinita para finita	34
6	Modelo Markoviano dos RMRs	37
6.0.2	Controle $\mathcal{H}_\infty$ por Realimentação de Saída para SLSM	40
7	Resultados	43
7.1	Simulação Computacional do Controlador de Formação	45
7.1.1	Controlador de Formação	45
7.1.2	Controlador de Formação com Alternância de Líder	48
7.2	Simulação Computacional do Controlador $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear Via Representação Quase- LPV	55
7.2.1	Controle via Representação Quase- LPV com Realimentação de Estado .	56
7.2.2	Controle via Representação Quase- LPV com Realimentação de Saída . .	62
7.2.3	Simulação do Controlador Mudando o Tipo de Trajetória	65
7.3	Controlador Markoviano	66
8	Conclusão	69
	Referências Bibliográficas	71
A	Análise da Formação sujeita à Alternância de Líderes	77
A.1	Trajetória da Formação	77
B	Programa para Alternância de Líderes	81

Aos meus pais Luiz Francisco (in memorian) e Leonícia Batista Rocha, pelo incentivo e pelo apoio em todos os momentos difíceis da minha vida, pela confiança, carinho e amor que sempre depositaram em mim e por serem os melhores pais que eu poderia desejar.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, acima de tudo, por ter me dado força e vontade para superar todos os obstáculos encontrados no caminho até chegar a este momento.

Ao meu pai, Luiz (*in memoriam*), que não está comigo para presenciar esta importante conquista, mas sempre estará presente em minha vida através de seus exemplos e ensinamentos.

À minha mãe, Nice, por ser meu maior exemplo de profissionalismo, caráter, garra, fé e a quem eu devo a construção dos meus valores e a minha paixão pelos livros.

À minha avó, Nita, por ser minha inspiração com seu exemplo de vida, humildade e sabedoria, por sua paciência, dedicação sem limites, por seu amor incondicional e por ser responsável pelas melhores lembranças da minha infância.

À excelência profissional do Prof Dr. Marco Henrique Terra, além de sua paciência e confiança durante a orientação deste trabalho que será de suma importância em minha formação profissional.

Ao Prof. Dr. Adriano Almeida Gonçalves Siqueira, pelo exemplo de profissionalismo, competência e pelas contribuições fundamentais para a realização desta dissertação, além de sua infinita paciência e compreensão.

Aos meus amigos do Laboratório de Sistemas Inteligentes (LASI), Aline, Amanda, Tatiana, Roberto, Leonardo, Darby, João Paulo, Gildson, Samuel, Thiago e Wallisson pela amizade, companheirismo e valiosas colaborações durante a realização deste trabalho.

Aos amigos do trabalho, pelo incentivo, apoio e compreensão durante a fase de finalização desta pesquisa.

À minha amiga e irmã do coração, Ludimila Fabiana, pela paciência, apoio e companheirismo, sem a qual a conclusão deste trabalho teria sido muito mais difícil.

Aos professores, técnicos e demais funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia de São Carlos, que propiciaram a infra-estrutura necessária para a realização deste trabalho.

Finalmente, à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP, pelo auxílio financeiro dado a esta pesquisa.

Resumo

Neste mestrado propõe-se um estudo sobre o controle automático de sistemas dinâmicos para o problema de coordenação de robôs móveis. Os movimentos coordenados serão realizados em função de um líder e qualquer robô da formação pode assumir a liderança de maneira aleatória. Os robôs trocam informação através de um grafo direcionado (dígrafo) de comunicação, definido a-priori e, movimentos estáveis são gerados através de uma lei de controle descentralizada baseada nas coordenadas dos robôs. Além disso, as equações dinâmicas não lineares dos robôs são descritas na forma de espaço de estado sendo os parâmetros das matrizes dependentes da velocidade angular das rodas. Esta representação, conhecida como Quase Linear a Parâmetros Variantes (Quase-LPV), é utilizada no projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear para sistemas dinâmicos. Para garantir a estabilidade da formação quando há alternância de líder ou remoção de robôs, foi feito o controle robusto e controle tolerante a falhas para um grupo de robôs móveis com rodas (RMRs). O controle robusto é baseado em controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via realimentação do estado e controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via realimentação da saída. O controle tolerante a falhas é baseado em controle $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação da saída de sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos para garantir a estabilidade da formação quando um dos robôs é perdido durante o movimento coordenado. Resultados em simulação são apresentados para os controladores utilizados.

Palavras-chave: Robótica; Controle de Formação; Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear; Robôs Móveis; Controle Markoviano.

Abstract

This dissertation proposes a study on the automatic control of dynamic systems to the problem of coordination of mobile robots. The coordinated motions are performed with the robots following a leader, and any robot of the formation can assume the leadership randomly. The robots exchange informations according to a pre-specified communication directed graph (digraph). Stable motions are generated by a decentralized control law based on the robots coordinates. In addition, the nonlinear dynamic equations of the robots are described in state-space form where the parameters matrices depend on the angular velocities of the wheels. This representation, known as Quasi-Linear Parameter Varying (Quasi-LPV), is useful for control designs based on nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ approaches. To ensure the stability formation when there is alternation of leader or one of the robots is removed, we made a robust control and fault tolerant control for a group of wheeled mobile robots (WMRs). The robust approach is based on state feedback nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control and output feedback nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control. The fault tolerant approach is based on output feedback $\mathcal{H}_\infty$ control of Markovian jump linear systems to ensure stability of the formation when one of the robots is lost during the coordinated motion. Results in simulation are presented for the controllers used.

Keywords: *Robotic; Formation Control; Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ Control; Mobile Robots; Markovian Control.*

Publicações

1. T. B. R. Francisco, M. H. Terra e A. A. G. Siqueira (2008). Output Feedback Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ Control of Wheeled Mobile Robots Formation. *Proc. 16th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Congress Centre, Ajaccio, France
2. T. B. R. Francisco, M. H. Terra e A. A. G. Siqueira (2008). Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear de Robôs Móveis em Formação Sujeitos a Alternância de Líder. *XVII Congresso Brasileiro de Automática*, Juiz de Fora - MG, Brasil.
3. W.O. Figueiredo, A. A. G. Siqueira, M. H. Terra e T. B. R. Francisco (2007). Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear de Robôs Móveis em Formação. *VIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Florianópolis - SC, Brasil.

Lista de Figuras

FIGURA 1.1	Representação de um sistema Markoviano com quatro modos de operação.	6
FIGURA 3.1	Representação de uma Formação com Três RMRs.	15
FIGURA 4.1	Robô Móvel	19
FIGURA 7.1	Sistema de Controle de Acompanhamento de Trajetória para os RMRs.	43
FIGURA 7.2	Robôs Móveis com Rodas.	44
FIGURA 7.3	Trajetória da Formação.	46
FIGURA 7.4	Distância entre os robôs: (a) Distância entre os robôs 1 e 2 (gráfico à esquerda) (b) Distância entre os robôs 1 e 3 (gráfico à direita).	46
FIGURA 7.5	Distância entre os robôs: (a) Distância entre os robôs 1 e 4 (gráfico à esquerda) (b) Distância entre os robôs 1 e 5 (gráfico à direita).	47
FIGURA 7.6	Distância entre os robôs: (a) Distância entre os robôs 1 e 6 (gráfico à esquerda) (b) Distância entre os robôs 2 e 4 (gráfico à direita).	47
FIGURA 7.7	Distância entre os robôs: (a) Distância entre os robôs 2 e 6 (gráfico à esquerda) (b) Distância entre os robôs 3 e 2 (gráfico à direita).	47
FIGURA 7.8	Distância entre os robôs: (a) Distância entre os robôs 3 e 5 (gráfico à esquerda) (b) Distância entre os robôs 3 e 6 (gráfico à direita).	48
FIGURA 7.9	Dígrafos para Cada Líder da Formação.	48
FIGURA 7.10	Trajetória da Formação com Alternância de Líder para $k=0$	49
FIGURA 7.11	Trajetória da Formação com Alternância de Líder para $k=0.5$	50

FIGURA 7.12 Nova Representação da Formação para o Líder 6.	51
FIGURA 7.13 Trajetória da Formação com Alternância de Líder para $k=0$	52
FIGURA 7.14 Trajetória da Formação com Alternância de Líder para $k=0.5$	53
FIGURA 7.15 Trajetória da Formação com Alternância de Líder e na presença de um Obstáculo.	53
FIGURA 7.16 Acompanhamento de trajetória de referência da formação usando o controlador quase-LPV: (a) sem distúrbio (gráfico superior) (b) com distúrbio (gráfico inferior).	58
FIGURA 7.17 Erro de direção do robô 1 usando o controlador quase-LPV: (a) sem distúrbio (gráfico à esquerda) (b) com distúrbio (gráfico à direita).	58
FIGURA 7.18 Erro de direção do robô 2 usando o controlador quase-LPV: (a) sem distúrbio (gráfico à esquerda) (b) com distúrbio (gráfico à direita).	59
FIGURA 7.19 Erro de direção do robô 3 usando o controlador quase-LPV: (a) sem distúrbio (gráfico à esquerda) (b) com distúrbio (gráfico à direita).	59
FIGURA 7.20 Erro de direção do robô 4 usando o controlador quase-LPV: (a) sem distúrbio (gráfico à esquerda) (b) com distúrbio (gráfico à direita).	59
FIGURA 7.21 Erro de direção do robô 5 usando o controlador quase-LPV: (a) sem distúrbio (gráfico à esquerda) (b) com distúrbio (gráfico à direita).	60
FIGURA 7.22 Erro de direção do robô 6 usando o controlador quase-LPV: (a) sem distúrbio (gráfico à esquerda) (b) com distúrbio (gráfico à direita).	60
FIGURA 7.23 Controle Quase-LPV com Realimentação da Saída de RMRs em Formação.	63
FIGURA 7.24 Controle Quase-LPV com Realimentação da Saída de RMRs em Formação.	63
FIGURA 7.25 Erros de Direção dos Robôs.	64
FIGURA 7.26 Distúrbios Aplicados nas Rodas Direita e Esquerda dos Robôs.	64
FIGURA 7.27 Torques Aplicados nas Rodas Direita e Esquerda dos Robôs.	65
FIGURA 7.28 Controle Quase-LPV com Realimentação da Saída de RMRs em Formação.	65
FIGURA 7.29 Trajetória dos Robôs com Controlador Markoviano.	67
FIGURA 7.30 Erro de direção do Robô 1 com Controlador Markoviano.	67

FIGURA 7.31 Erro de direção do Robô 2 com Controlador Markoviano. 68

FIGURA 7.32 Erro de direção do Robô 3 com Controlador Markoviano. 68

Lista de Tabelas

TABELA 7.1 *Autovalores do Sistema Realimentado para os Líderes da Formação* . . . 49

TABELA 7.2 *Novos Autovalores do Sistema Realimentado para os Líderes da Formação* 51

Lista de Abreviaturas e Siglas

RMRs	Robôs Móveis com Rodas
LMIs	Desigualdades Matriciais Lineares
LPV	Linear com Parâmetros Variantes
Quase-LPV	Quase Linear a Parâmetros Variantes
Dígrafo	Grafo Direcionado
SLSM	Sistema Linear Sujeito a Saltos Markovianos

Lista de Símbolos

$\mathcal{V}$	Conjunto de vértices do grafo
$\mathcal{E}$	Conjunto de bordas do grafo
Γ	Grafo direcionado
Q	Matriz de adjacência
D	Matriz diagonal
L_Γ	Laplaciano direcionado
x_p	Vetor de posição dos robôs
x_v	Vetor de velocidade dos robôs
N	Número de robôs da formação
h	Vetor de formação
J_i	Conjunto de vizinhos do robô i
F_{veh}	Matriz de realimentação de todos os veículos
a	Comprimento do robô
b	Distância entre uma roda atuada e o eixo de simetria
r	Raio das rodas atuadas
θ_d, θ_e	Deslocamentos angulares das rodas direita e esquerda
P_c	Centro de massa da plataforma do robô
P_o	Ponto central entre as rodas atuadas, no eixo de simetria
P_r	Ponto de referência
d	Distância entre P_o e P_c
v_o	Velocidade linear do robô em P_o
v_c	Velocidade linear do robô em P_c

(X, Y)	Sistema de coordenadas inercial
(X_o, Y_o)	Sistema de coordenadas local
α	Ângulo (direção do robô) entre o eixo X e o eixo de simetria do robô no sentido anti-horário
α_r	Direção de referência
α_e	Erro direção
x_c, y_c	Posição de P_c em relação ao sistema (X, Y)
x_o, y_o	Posição de P_o em relação ao sistema (X, Y)
x_r, y_r	Posição de P_r em relação ao sistema (X, Y)
x_d, y_d	Posição do centro de massa da roda direita relacionada ao sistema (X, Y)
x_e, y_e	Erros de posição em relação ao sistema (X_o, Y_o)
$\dot{\alpha} = \omega$	Velocidade angular do robô
$q_1 = [x_c \ y_c \ \alpha \ \theta_d \ \theta_e]^T$	Vetor de coordenadas generalizadas
$q_2 = [\theta_d \ \theta_e]^T$	Vetor de coordenadas generalizadas
q_e	Vetor de erro de postura
q_a	Vetor de postura atual
q_r	Vetor de postura de referência
λ	Vetor de restrições da força
$M(q_1)$	Matriz de Inércia
m	Massa total do robô
m_P	Massa da plataforma do robô
m_r	Massa de cada roda atuada incluindo a massa do rotor do motor
I_c	Momento de inércia da plataforma em relação ao eixo vertical em P_c
I_r	Momento de inércia de cada roda com o rotor do motor em relação ao eixo da roda
I_m	Momento de inércia em relação ao eixo definido no plano da roda (perpendicular ao eixo das rodas)
$C(q_1, \dot{q}_1)$	Matriz de forças de coriolis e centrípetas

τ_d, τ_e	Torque da roda direita e esquerda
v^d, ω^d	Velocidades linear e angular desejadas para o robô
v_r, ω_r	Velocidades linear e angular de referência
K_x, K_y, K_α	Ganhos para o controlador cinemático
$\dot{\theta}_d^d, \dot{\theta}_e^d$	Velocidades angulares desejadas para as rodas
z	Vetor da saída
w, δ	Distúrbios
x	Estado
$\ T_{zw}\ _\infty$	Norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência entre o distúrbio w e a saída z
ρ	Parâmetros variantes
P	Conjunto de parâmetros ρ
F_P^ν	Conjunto de variação dos parâmetros
$F(\rho)$	Ganho de realimentação de estado dependente do parâmetro ρ
γ	Nível de atenuação
$\tilde{x}$	Vetor do erro de estado
u	Entrada de controle
$e = [q_e \dot{q}_e]^T$	Vetor dos erros de posição e velocidade
$\mathcal{L}$	Ganho
$\mathcal{P}$	Espaço convexo
y	Erros de posição
C^1	Funções continuamente diferenciáveis

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Nos últimos anos as pesquisas em controle e coordenação de múltiplos robôs móveis têm crescido significativamente. Tem sido considerado um tópico de pesquisa importante em função das possíveis aplicações tais como, exploração KRUPPA et al. (2000), procura e resgate WHELAN et al. (1997), mapeamento de locais desconhecidos DONALD et al. (1995), NILSSON et al. (1995), transporte de grandes objetos STILWELL & BAY (1993), SUGAR & KUMAR (2000), aglomerado de satélites e controle de formação.

Para obter êxito no movimento coordenado dos robôs na realização de uma tarefa pré-estabelecida, é necessário que o controle utilizado para os robôs móveis com rodas (RMRs) seja robusto o suficiente em relação aos distúrbios externos relacionados, por exemplo, a desníveis no ambiente, deslizamento das rodas, colisão com obstáculos e incertezas paramétricas.

Neste trabalho optou-se pela utilização de estratégias de controle baseadas em modelos dinâmicos, que melhor simulam o comportamento real do sistema. A dinâmica não linear dos robôs pode ser representada como um sistema linear a parâmetros variantes (LPV) onde o estado está em função dos parâmetros. Em virtude disso usaremos a terminologia quase-LPV. Para a atenuação dos distúrbios externos e incertezas paramétricas, o critério $\mathcal{H}_\infty$ é um dos mais populares procedimentos para atingir este objetivo, o qual tem sido utilizado para diversos tipos de robôs e será aplicado neste projeto para RMRs. Ainda, para manter a robustez do sistema quando há a remoção de um dos robôs da formação, será utilizado um controlador Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ que tem se mostrado um controlador muito eficiente quando o sistema sofre

mudanças abruptas em sua configuração.

1.2 Revisão Bibliográfica

1.2.1 Robôs Móveis com Rodas

Controladores para RMRs têm sido alvo de pesquisas em robótica a partir dos anos 80. A expressão Robôs Móveis com Rodas será utilizada para diferenciar a categoria de robôs considerada neste trabalho de outros tipos de robôs (aquáticos, aéreos, etc) e em boa parte do texto será utilizado apenas o termo Robôs Móveis.

Em CAMPION et al. (1996), os autores definiram dois tipos de rodas para RMRs: *rodas convencionais*, cuja velocidade no ponto de contato da roda com o solo é zero e são divididas em rodas fixas, centradas orientáveis e centradas não orientáveis (conhecidas também por castor); e *rodas suecas* nas quais somente a componente da velocidade ao longo do movimento no ponto de contato da roda com o solo é admitida ser nula.

Os RMRs mais comuns estudados na literatura são: unicycle AICARDI et al. (1995); MORIN & SAMSON (2000); LEE et al. (2001) (este nome é devido a equação cinemática do robô ser equivalente ao de uma roda que não gira em falso e nem desliza no sentido do eixo), carro convencional ALMEIDA et al. (1997), carro convencional com *trailers* VENDITTELLI & ORIOLO (2000); SAMSON (1995); JIANG & NIJMEIJER (1999) e unicycle com *trailers* M'CLOSKEY & MURRAY (1997).

O robô móvel utilizado neste trabalho é um unicycle com duas rodas convencionais fixas atuadas independentemente e uma roda convencional tipo castor. Considera-se também que o centro de massa (P_c) é diferente do ponto no centro do eixo das rodas atuadas (P_o).

Na literatura são apresentados três tipos básicos de objetivos a serem alcançados por um RMR: *estabilização de postura* (posição e direção do robô), alcançar uma postura de referência iniciando em uma dada postura; *acompanhamento de trajetória*, o robô deve seguir uma trajetória de referência em função do tempo; *seguindo um caminho*, o robô deve seguir uma trajetória de referência em função de parâmetros independentes do tempo, podendo ser geométrico COELHO & NUNES (2003) ou em função do trajeto e das velocidades ao longo do caminho SARKAR et al. (1994). Neste trabalho, o controle será realizado para acompanhamento de trajetória de referência, sendo a trajetória de referência o objetivo a ser alcançado pelo ponto

P_c do robô, diferentemente da trajetória desejada, que se refere às velocidades desejadas para as rodas do robô tais que o robô alcance a referência.

1.2.2 Controle de Formação

O controle de formação é uma importante estratégia para a coordenação de um grupo de veículos, através da qual é possível fazer com que os veículos estabilizem e mantenham uma formação pré-definida no movimento coordenado. Muitas abordagens de controle foram apresentadas para resolver os problemas de controle de formação, como por exemplo, a abordagem que utiliza a estratégia líder-seguidor apresentada em DESAI et al. (1998), TANNER et al. (2004) e COWAN et al. (2003); abordagem utilizando estrutura virtual REN & BEARD (2003), LEWIS & TAN (1997); e o método baseado em comportamento SCHARF et al. (2004).

A abordagem via teoria dos grafos foi proposta por FAX & MURRAY (2003) para o controle cooperativo de múltiplos sistemas lineares. E assim, diferentes leis de controle puderam ser projetadas com o auxílio da teoria dos grafos (vide LAFERRIERE et al. (2005) e OLFATISABER & MURRAY (2002)).

1.2.3 Controle $\mathcal{H}_\infty$ Aplicado a Robôs

Foram encontradas três importantes estratégias sobre controle de sistemas robóticos na literatura: na primeira, o modelo de um sistema robótico é considerado completamente conhecido e utilizável para o controlador LEWIS et al. (1993); na segunda, os parâmetros do modelo são desconhecidos e são estimados baseados na propriedade robótica de parametrização linear, resultados clássicos sobre controle adaptativo podem ser vistos em CRAIG (1985) e LEWIS et al. (1993); e na terceira, o modelo é desconhecido e uma abordagem inteligente (baseada em redes neurais ou lógica fuzzy) é usada para estimar o modelo (veja, por exemplo, CHANG (2000) e CHANG (2005)). Se, em adição às incertezas paramétricas, distúrbios externos estão presentes, a dificuldade para controlar um sistema robótico aumenta. Uma abordagem interessante para resolver este problema de controle é baseado no critério $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear, que visa atenuar os efeitos de todos distúrbios no desempenho do sistema. O Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear consiste em garantir que o ganho $\mathcal{L}_2$ entre o distúrbio e a saída, seja limitado por um nível de atenuação $\gamma > 0$.

Controladores $\mathcal{H}_\infty$ baseados nas estratégias descritas anteriormente são propostos em CHEN

et al. (1994); WU (1995); WU et al. (1996b); CHEN et al. (1997); CHANG & CHEN (1997); HUANG & JADBABAIE (1998); CHANG (2000); SIQUEIRA & TERRA (2004); CHANG (2005), para robôs manipuladores. Em CHEN et al. (1994), uma solução explícita para o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear, na qual o modelo do manipulador é considerado completamente conhecido, é desenvolvida baseada na Teoria dos Jogos (TJ) (em POSTLETHWAITE & BARTOSZEWICZ (1998) uma metodologia similar é usada para controlar um manipulador real). Controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares para sistemas LPVs, que têm sido aplicados em robôs manipuladores (veja por exemplo SIQUEIRA & TERRA (2004)), podem ser vistos em WU (1995); WU et al. (1996b); HUANG & JADBABAIE (1998).

Um algoritmo de controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear é proposto em CHEN et al. (1997), no qual um projeto de controle robusto de acompanhamento de trajetória considera que os parâmetros desconhecidos podem ser aprendidos por uma lei clássica de adaptação atualizável. Controles adaptativos $\mathcal{H}_\infty$ não lineares baseados em técnicas inteligentes podem ser vistos em CHANG & CHEN (1997), CHANG (2000) e CHANG (2005).

Em HWANG et al. (2004) foi proposto uma combinação de um controlador baseado na cinemática e um controlador $\mathcal{H}_\infty$ robusto baseado na dinâmica para acompanhamento de trajetória. A solução proposta em HWANG et al. (2004) resulta em matrizes constantes do controlador, não leva em consideração a natureza variante dos parâmetros do robô. Já em REIS (2005), equações dinâmicas de um RMR são descritas na forma quase-LPV. Um controlador baseado no modelo cinemático, proposto em KANAYAMA et al. (1990), é utilizado para gerar as velocidades desejadas para as rodas e controladores robustos baseados no modelo dinâmico são projetados levando em consideração as variações paramétricas do robô.

Na literatura existe uma vasta gama de resultados envolvendo o controle cinemático para o problema de alternância de líder e, o controle $\mathcal{H}_\infty$ é encontrado em diversas aplicações, porém, não foram encontrados procedimentos que envolvam controle robusto de robôs em formação e sujeitos a alternância de líder. Também, não foram encontrados sistemas tolerantes a falhas, baseados nos modelos dinâmicos dos robôs, para esse tipo de problema.

1.2.4 Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos

Nas últimas décadas, diversas técnicas têm sido desenvolvidas para tratar de sistemas dinâmicos sujeitos a mudanças em suas estruturas. Eles são frequentemente encontrados em problemas complexos em que as exigências de um bom desempenho devem ser atingidas. Problemas desta

natureza apresentam graus de sucesso variado, em geral dependendo do grau de adequação do modelo.

Uma possível qualificação desses sistemas surge quando eles sofrem alterações abruptas (saltos) em certos instantes. Uma abordagem comum neste caso é feita através de modelos múltiplos chaveados, na qual se assume que o sistema real pode ser representado por um modelo que pertence a um conjunto finito ou enumerável de possíveis modelos (também denominados modos de operação). Considere ainda que em cada instante há uma probabilidade de que o sistema chaveie do modo de operação em que se encontre para outro modo, dependendo apenas do modo atual. Ou seja, os saltos nos parâmetros ocorrem de acordo com as transições de uma cadeia de Markov subjacente, de forma que cada estado da cadeia representa um dos possíveis modelos. Neste contexto surgem os denominados sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos (SLSM).

Esta classe de sistemas generaliza a conhecida classe de sistemas lineares determinísticos e tem sido considerada em diversas aplicações como em sistemas robóticos SARIDIS (1983) e SIQUEIRA & TERRA (2004b), em receptores térmicos solares SWORDER & ROGERS (1983) e em sistemas aeronáuticos ATHANS et al. (1977).

Para entender como o problema da alternância de líderes pode ser considerada como um SLSM, considere como exemplo, quatro robôs móveis em formação (este número de robôs foi escolhido apenas para facilitar a representação gráfica, mas pode ser facilmente estendida para N robôs) tendo um líder que pode mudar em um determinado intervalo de tempo, ou seja, qualquer um dos robôs pode se tornar o líder da formação. Este sistema está sujeito a variações abruptas, que neste caso será a mudança de líder. Essas variações abruptas podem assumir quatro comportamentos distintos, que são denominados modos de operação:

Σ_1 , quando o robô 1 é o líder da formação;

Σ_2 , quando o robô 2 é o líder da formação;

Σ_3 , quando o robô 3 é o líder da formação;

Σ_4 , quando o robô 4 é o líder da formação.

Neste caso, o modo de operação que descreve o sistema a cada instante de tempo é conhecido e as transições entre modos de operação são dadas por uma cadeia de Markov, isto é, dado que um sistema se encontre em um modo de operação, são conhecidas as probabilidades de que no próximo instante de tempo o sistema continue no mesmo modo de operação ou passe para

qualquer dos outros modos de operação possíveis. Isso pode ser expresso na forma de uma matriz de probabilidade de transição dada por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

sendo que p_{ij} representa a probabilidade do sistema se transferir do modo de operação i para o modo de operação j . Por exemplo, p_{13} indica que o sistema deixará abruptamente de ser descrito precisamente pelo modelo $\sum_1$ quando o robô 1 é o líder da formação e passa a ser descrito pelo modelo $\sum_3$ quando o robô 3 assume a liderança da formação. Observa-se claramente que a soma dos elementos de cada linha da matriz P deve ser unitária e, p_{ij} deve ser positivo. A Figura 1.1 apresenta um sistema Markoviano descrito para estes quatro robôs móveis sujeitos à alternância de líderes. Sendo que nesta figura os círculos representam os modos de operação e as setas, as possíveis transições entre eles.

Figura 1.1: Representação de um sistema Markoviano com quatro modos de operação.

1.3 Objetivo

Esta pesquisa tem como finalidade um estudo sobre o controle automático de sistemas dinâmicos bem como, o projeto de controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares para o problema de coordenação de robôs móveis. Isto será feito através de métodos de controle para um conjunto de robôs de modo que estes sigam um líder, considerando que qualquer um dos robôs possa assumir a liderança da formação e que robôs possam ser removidos durante a trajetória.

1.4 Disposição dos Capítulos

No **Capítulo 2** são apresentados alguns conceitos básicos sobre a teoria algébrica dos grafos, necessários para o entendimento do projeto de pesquisa em questão.

No **Capítulo 3** é apresentado o controle de formação para um conjunto de robôs móveis.

No **Capítulo 4** é descrita a modelagem completa, cinemática e dinâmica, do robô móvel, sendo o controle cinemático utilizado para obter as velocidades angulares desejadas, dada a postura atual e a trajetória de referência.

No **Capítulo 5** é abordado o projeto de dois controladores robustos baseados no modelo dinâmico usando técnicas de controle $\mathcal{H}_\infty$ para RMRs.

No **Capítulo 6** é apresentado um Modelo Markoviano para os robôs móveis.

No **Capítulo 7** são apresentados os resultados obtidos através de simulação computacional para os controladores projetados.

No **Capítulo 8** são apresentadas as conclusões referentes à este trabalho e as previsões de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Teoria Algébrica dos Grafos

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos básicos sobre a teoria dos grafos, uma vez que no controle de formação utilizado neste trabalho, a comunicação entre os robôs móveis será realizada através de grafos.

2.1 Conceitos Básicos

Grafos: Estruturas utilizadas para modelar problemas complexos, do ponto de vista computacional, nos quais existe bastante conhecimento matemático sobre suas propriedades e comportamento. Consiste de um conjunto finito de vértices e arestas (ou bordas). Graficamente, aparece representado por uma figura com nós ou vértices, significando os objetos, unidos por um traço denominado aresta configurando uma relação desejada.

Nesta pesquisa utilizaremos o grafo direcionado, cuja definição e notação utilizada é dada a seguir.

Grafo direcionado: Quando as arestas são pares ordenados de vértices, tem-se um grafo orientado (ou dígrafo), neste caso denomina-se de arco a aresta direcionada. Isto é, um dígrafo consiste de um conjunto finito de vértices $\mathcal{V}$ e um conjunto $\mathcal{E} \subseteq V \times V$ (bordas direcionadas). Assume-se que um dígrafo não tem voltas, isto significa que para $(x, y) \in \mathcal{E} \Rightarrow x \neq y$.

Se o dígrafo tem a seguinte propriedade: $(x, y) \in \mathcal{E} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{E}$ (trata-se de um grafo não direcionado) isto corresponde a uma comunicação bidirecional entre os robôs móveis. Um caminho (direcionado) em um dígrafo é uma sequência finita de bordas (a_k, b_k) $k = 1, \dots, r$, tal que, $b_k = a_{k+1}$ para $k = 1, \dots, r - 1$. Um caminho com vértices distintos é chamado trajeto

(direcionado).

Os vértices de um dígrafo possuem:

Grau de entrada: número de arcos que chegam no vértice (*in-degree*).

Grau de saída: número de arcos que partem do vértice (*out-degree*).

Definição 2.1.1 *Seja Γ um dígrafo com conjunto de vértices $\mathcal{V}$ e conjunto de bordas $\mathcal{E}$. Seja $Mat_{\mathcal{N}}$ o conjunto de todas matrizes quadradas $N \times N$ com entradas reais. A matriz de adjacência de Γ é a matriz $Q \in Mat_{\mathcal{N}}$ com entradas*

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (j, i) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (i, j \in \mathcal{V}). \quad (2.1)$$

Quando Γ é não direcionado, a matriz Q é simétrica.

A matriz de grau interno de Γ é a matriz diagonal $D \in Mat_{\mathcal{V}}(\mathbb{R})$ com entradas diagonais

$$d_{ii} = |\{j \in \mathcal{V} : (j, i) \in \mathcal{E}\}|, \quad (i \in \mathcal{V}). \quad (2.2)$$

sendo, d_{ii} o grau de entrada do vértice i e $|\{j \in \mathcal{V} : (j, i) \in \mathcal{E}\}|$ corresponde ao número total de j .

Definição 2.1.2 *Dado um dígrafo Γ , a matriz Laplaciana associada à ele é dada por (BRUALDI & RYSER (1991)):*

$$L_{\Gamma} = D - Q. \quad (2.3)$$

sendo D uma matriz não invertível.

Se D é invertível, então, $L_{\Gamma} = I_N - D^{-1}Q$ (CHUNG (1997) e FAX (2001)).

A seguir será apresentado o conceito de árvore enraizada direcionada, que será utilizado para a caracterização do líder da formação.

Lema 2.1.1 : *Uma árvore enraizada direcionada é um dígrafo T com as seguintes propriedades:*

- (I) T não tem ciclos;*
- (II) Existe um vértice v (a raiz) tal que há um trajeto direcionado de v a todos os outros vértices em T .*

Capítulo 3

Controle de Formação

3.1 Introdução

Um dos principais objetivos do controle de formação, baseado apenas em posição e velocidade, que será apresentado neste capítulo, é fazer com que os robôs alcancem e mantenham posições e orientações pré-especificadas com relação a cada robô móvel da formação. Este tipo de controle, pode ser visto em WILLIAMS & VEERMAN (2005).

3.2 Modelo

Assume-se que as posições e velocidades para cada um dos N robôs móveis no plano são descritas pela seguinte equação de estado:

$$\dot{x}_i = A_{veh}x_i + B_{veh}u_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad x_i \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (3.1)$$

sendo que x_i representa as posições e as respectivas velocidades no plano x - y do robô móvel i , e é dado por:

$$x_i = [x_{r_i} \quad \dot{x}_{r_i} \quad y_{r_i} \quad \dot{y}_{r_i}]^T.$$

e, u_i representa as entradas de controle. As matrizes A_{veh} e B_{veh} tem a seguinte forma:

$$\mathbf{A}_{\text{veh}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_{\text{veh}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Os zeros nas colunas um e três de A_{veh} são necessários para que a convergência dos robôs móveis para formação seja garantida (veja LAFERRIERE et al. (2004) Proposição 3.1 e VEERMAN et al. (2004) Proposição 4.2).

O vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ descreve a combinação de todos os estados dos N robôs móveis. Utiliza-se a notação $x_p = ((x_p)_1, \dots, (x_p)_N)^T$, $x_v = ((x_v)_1, \dots, (x_v)_N)^T$ para denotar os vetores de posição e velocidade respectivamente, para os N robôs móveis, tal que $x = x_p \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_v \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (sendo $\otimes$ a representação do produto de Kronecker).

Definição 3.2.1 *Uma formação é um vetor $h = h_p \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2nN}$. Os N robôs móveis estão em formação h no tempo t se existirem vetores $q, w \in \mathbb{R}^n$, tais que, $(x_p)_i(t) - (h_p)_i = q$ e $(x_v)_i(t) = w$, para $i = 1, \dots, N$. Os robôs móveis convergem para formação h se existirem funções $q(\cdot)$, $w(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, tais que, $(x_p)_i(t) - (h_p)_i - q(t) \rightarrow 0$ e $(x_v)_i(t) - w(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, para $i = 1, \dots, N$.*

A Figura 3.1 ilustra este conceito de formação, sendo representada apenas a análise com relação à coordenada x do sistema de coordenadas inercial (X,Y).

Figura 3.1: Representação de uma Formação com Três RMRs.

Grafo de Comunicação: A topologia de comunicação entre os robôs móveis é representada por um dígrafo Γ (veja o Capítulo 2) que captura a conectividade entre os robôs móveis. Cada vértice representa um robô e há uma borda direcionada de um vértice ao outro se há comunicação entre os robôs móveis. O robô móvel que recebe a informação é considerado vizinho do robô que está enviando a informação. Para cada robô i , J_i denota o conjunto de seus vizinhos.

Controle u : A natureza descentralizada do sistema de controle que está sendo considerado nesta pesquisa é devido ao fato de que cada controle u_i está em função de $x_j - x_i$ e $h_j - h_i$ para cada $j \in J_i$, ou seja, o sistema de controle consiste de componentes u_i que dependem somente das informações de posicionamento relativas ao i -ésimo robô e do conjunto de seus vizinhos.

Pode-se combinar as informações relativas a cada robô móvel definindo funções de saída y_i calculadas pela média dos deslocamentos relativos (e velocidades relativas) da vizinhança dos respectivos robôs móveis como sendo:

$$y_i = (x_i - h_i) - \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i} (x_j - h_j) \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.3)$$

sendo que $|J_i|$ denota o número de vizinhos do robô i . Pode-se fazer uma pequena modificação na Equação (3.3) para permitir a possibilidade de que um robô não receba nenhuma informação e assim, o vértice correspondente no gráfico não teria nenhum vizinho. Esta situação ocorre

naturalmente quando um dos robôs é designado para ser o líder, em torno do qual os outros robôs móveis tem que ajustar seus movimentos (veja LAFERRIERE et al. (2005)). Neste caso, define-se a função de saída z_i como:

$$z_i = \begin{cases} \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i} ((x_i - h_i) - (x_j - h_j)), & \text{se } |J_i| \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.4)$$

para $i = 1, \dots, N$.

O vetor de saída z pode ser escrito como $z = L(x - h)$ sendo $L = L_\Gamma \otimes I_{2n}$ e L_Γ a matriz (direcionada) Laplaciana do grafo de comunicação Γ (veja Capítulo 2). Agrupando as equações para todos os RMRs em um único sistema no espaço de estado tem-se:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$z = L(x - h)$$

sendo $A = I_N \otimes A_{veh}$ e $B = I_N \otimes B_{veh}$. A existência de uma matriz de realimentação F tal que a solução de

$$\dot{x} = Ax + BFL(x - h) \quad (3.5)$$

convirja para formação h pode ser vista em WILLIAMS & VEERMAN (2005). Este é um problema de estabilização envolvendo realimentação da saída. Considerando as estruturas de A , B e L tem-se F da forma $F = I_N \otimes F_{veh}$ (que é uma lei de controle descentralizada aplicada a todos os robôs móveis), neste caso pode-se reescrever a Equação (3.5) como:

$$\dot{x} = I_N \otimes A_{veh}x + L_\Gamma \otimes B_{veh}F_{veh}(x - h) \quad (3.6)$$

O Teorema apresentado a seguir será utilizado para a análise dos resultados do controle da formação sujeito a alternância de líderes.

Teorema 3.2.1 (LAFERRIERE et al. (2005)): *Considere o sistema de controle dado em (3.6). Existe uma matriz F_{veh} de tal modo que para toda formação h a solução de (3.6) converge para a formação se e somente se zero tem multiplicidade um como autovalor do Laplaciano do grafo direcionado L_Γ .*

Utilizaremos a matriz de realimentação F_{veh} tendo a seguinte forma:

$$\mathbf{F}_{veh} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1 & f_2 \end{bmatrix}$$

Em WILLIAMS & VEERMAN (2005) mostra-se que condições necessárias e suficientes para o sistema dado em (3.6) convergir para a formação são obtidas com $f_1 < 0$ e $f_2 < 0$. Porém, na simulação do programa para alternância de líderes verificou-se que esta condição não foi suficiente para que os robôs convergissem para formação.

Para o próximo capítulo, os valores de posição e velocidade calculados pelo controlador de formação serão considerados como referência para o controlador cinemático, que por sua vez fornecerá os valores de referência de posição e velocidade para o controlador dinâmico.

No Anexo A é apresentada uma análise sobre o tipo de trajetória de formação.

3.3 Formações com Líder

Um líder da formação é caracterizado pelo fato de não receber nenhuma informação de outro robô móvel. Isto significa que os outros robôs são forçados a arranjar suas posições em resposta ao movimento desse robô. O movimento de toda a formação é ditado pelo líder (veja LAFERRIERE et al. (2005)). Para que haja este líder o dígrafo de comunicação tem que possuir uma *árvore enraizada direcionada* (Lema 2.1.1), ou a linha da matriz de adjacência Q (Equação (2.1)) do vértice que representa o líder tem que ser zero e a matriz D (Equação (2.2)) não invertível.

Capítulo 4

Modelagem dos RMRs

Nesta seção serão apresentados os modelos cinemático e dinâmico de um robô móvel com rodas. Considera-se que todos os robôs móveis da formação têm a mesma forma e dimensão. A geometria do robô móvel a ser considerado neste projeto de controle robusto é mostrada na Figura 4.1.

Figura 4.1: Robô Móvel

Na Figura 4.1, (X, Y) é o sistema de coordenadas inercial; (X_0, Y_0) o sistema de coordenadas local; a o comprimento do robô; d é a distância entre P_o (centro do eixo das rodas atuadas) e P_c (centro de massa); b é a distância entre uma roda atuada e o eixo de simetria do robô; r é o raio das rodas atuadas; α é o ângulo (direção do robô) entre o eixo X e o eixo de simetria do

robô no sentido anti-horário θ_d e θ_e são os deslocamentos angulares das rodas direita e esquerda, respectivamente.

4.1 Modelo Cinemático

Esta seção apresenta as equações de restrições cinemáticas para os robôs da formação. Considerando as velocidades angulares das rodas, tais que, $\dot{\theta}_{d_i} > \dot{\theta}_{e_i} > 0$ em um determinado instante. Sabendo que o robô não pode deslizar, ou seja, movimentar-se na direção do eixo das rodas atuadas, obtém-se a *primeira restrição*. A velocidade do ponto P_{o_i} , v_{o_i} , deve estar na direção do eixo de simetria do respectivo robô, tem-se a primeira restrição com relação a P_{c_i} , dada por:

$$\dot{y}_{c_i} \cos(\alpha_i) - \dot{x}_{c_i} \sin(\alpha_i) - d\dot{\alpha}_i = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (4.1)$$

sendo N o número de robôs móveis da formação, x_{c_i}, y_{c_i} as coordenadas do centro de massa P_{c_i} no sistema de coordenadas inercial e α_i o ângulo entre o eixo de simetria de cada robô da formação e o eixo X .

As outras duas restrições estão relacionadas com a rotação das rodas. Isto é, as rodas devem rolar sem girar em falso, ou seja, a velocidade do ponto da roda atuada de cada robô em contato com o solo deve ser zero:

$$-\dot{x}_{c_i} \cos \alpha_i - \dot{y}_{c_i} \sin \alpha_i - b\dot{\alpha}_i + r\dot{\theta}_{d_i} = 0,$$

$$-\dot{x}_{c_i} \cos \alpha_i - \dot{y}_{c_i} \sin \alpha_i + b\dot{\alpha}_i + r\dot{\theta}_{e_i} = 0.$$

Definindo a coordenada generalizada $q_i = [x_{c_i} \ y_{c_i} \ \alpha_i \ \theta_{d_i} \ \theta_{e_i}]^T = [x_{c_i} \ y_{c_i} \ \alpha_i \ q_{2_i}^T]^T$, então, as três restrições podem ser escritas na forma de espaço de estado como:

$$R(q_i)\dot{q}_i = \begin{bmatrix} -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i & -d & 0 & 0 \\ -\cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & -b & r & 0 \\ -\cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & b & 0 & r \end{bmatrix} \dot{q}_i = 0. \quad (4.2)$$

A matriz $R(q_i)$ tem posto completo e pode ser expressa como $R_o(q_i) = [R_1(q_i)_{3 \times 3} \ R_{2_{3 \times 2}}]$. Como $R_1(q_i)$ é não singular, então é possível encontrar uma matriz $S(q_i) = [R_1(q_i)R_2 \ I_4]^T$

cujas colunas são o espaço nulo de $R_1(q_i)$, ou seja, $R_1(q_i)S(q_i) = 0$. Assim, encontra-se:

$$S(q_i) = \begin{bmatrix} c(b \cos \alpha_i - d \sin \alpha_i) & c(b \cos \alpha_i + d \sin \alpha_i) \\ c(b \sin \alpha_i + d \cos \alpha_i) & c(b \sin \alpha_i - d \cos \alpha_i) \\ c & -c \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sendo $c = r/(2b)$.

A equação cinemática é dada por:

$$\dot{q}_i(t) = S(q_i)\dot{q}_{2_i}(t) \quad (4.3)$$

ou

$$\dot{x}_{c_i} = c(b \cos \alpha_i - d \sin \alpha_i)\theta_{d_i} + c(b \cos \alpha_i + d \sin \alpha_i)\theta_{e_i}, \quad (4.4)$$

$$\dot{y}_{c_i} = c(b \sin \alpha_i + d \cos \alpha_i)\theta_{d_i} + c(b \sin \alpha_i - d \cos \alpha_i)\theta_{e_i}, \quad (4.5)$$

$$\dot{\alpha}_i = c(\theta_{d_i} - \theta_{e_i}). \quad (4.6)$$

sendo $q_{2_i} = [\theta_{d_i} \ \theta_{e_i}]^T$ o vetor das posições das rodas direita e esquerda do i -ésimo robô e $\dot{q}_{2_i} = [\dot{\theta}_{d_i} \ \dot{\theta}_{e_i}]^T$ o vetor das velocidades angulares das rodas.

4.2 Controlador Baseado na Cinemática

O controlador baseado na cinemática proposto por KANAYAMA et al. (1990), fornece as velocidades desejadas das rodas esquerda e direita, tais que os RMRs acompanhem as trajetórias de referência geradas pelo controle de formação.

Considere o erro $q_{e_i} = [x_{e_i} \ y_{e_i} \ \alpha_{e_i}]^T$, entre a postura de referência $P_{r_i} = [x_{r_i} \ y_{r_i} \ \alpha_{r_i}]^T$ sendo esta postura de referência obtida pela equação do controle de formação, e a atual postura de cada robô móvel na formação $P_{c_i} = [x_{c_i} \ y_{c_i} \ \alpha_i]^T$ no sistema de coordenada inercial. As equações

dos erros (com relação as coordenadas locais) são dadas por:

$$\begin{aligned} x_{e_i} &= \cos\alpha_{c_i}(x_{r_i} - x_{c_i}) + \sin\alpha_{c_i}(y_{r_i} - y_{c_i}), \\ y_{e_i} &= -\sin\alpha_{c_i}(x_{r_i} - x_{c_i}) + \cos\alpha_{c_i}(y_{r_i} - y_{c_i}), \\ \alpha_{e_i} &= \alpha_{r_i} - \alpha_{c_i}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

sendo $[x_{r_i}, y_{r_i}]^T = q_{r_i}$ a trajetória de referência escolhida e $\alpha_{r_i} = \tan^{-1}(\dot{y}_{r_i}/\dot{x}_{r_i})$.

As velocidades lineares (v_i^d) e angulares (ω_i^d) desejadas dos RMRs são dadas por:

$$v_i^d = v_{r_i} \cos(\alpha_{e_i}) + K_x x_{e_i}, \quad (4.8)$$

$$\omega_i^d = \omega_{r_i} + v_{r_i}(K_y y_{e_i} + K_\alpha \sin\alpha_{e_i}), \quad (4.9)$$

sendo K_x, K_y, K_α constantes definidas pelo projetista e,

$$v_{r_i} = \sqrt{(\dot{x}_{r_i})^2 + (\dot{y}_{r_i})^2}, \quad \omega_{r_i} = \dot{\alpha}_{r_i}. \quad (4.10)$$

O controle baseado na dinâmica considera as velocidades angulares desejadas das rodas de cada RMR, $\dot{q}_{2_i}^d$. Então, é necessário definir as seguintes relações de velocidades:

$$\dot{q}_{2_i}^d = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{d_i}^d \\ \dot{\theta}_{e_i}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/r & b/r \\ 1/r & -b/r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i^d \\ \omega_i^d \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

sendo $\dot{\theta}_{d_i}^d$ and $\dot{\theta}_{e_i}^d$ as velocidades angulares das rodas direita e esquerda dos RMRs, respectivamente.

4.3 Modelo Dinâmico

No capítulo anterior estabelecemos a maneira como as trajetórias desejadas devem ser geradas para o controle de RMRs em formação, com base nas informações cinemáticas dos robôs. Nesta seção vamos considerar os aspectos dinâmicos dos RMRs. Inicialmente será obtida uma representação quase-LPV (quase-Linear com Parâmetros Variantes) dos RMRs. Sistemas LPV são sistemas cujas matrizes dinâmicas variam continuamente conforme a variação no tempo de determinados parâmetros. Quando um sistema não linear é representado como um sistema LPV cujos parâmetros variantes correspondem aos estados ou parte dos estados, dizemos que temos

uma representação quase-LPV dele. Neste trabalho, o projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ com realimentação da saída para sistemas LPV descrito em APKARIAN & ADAMS (1998) será utilizado para se obter um controlador baseado na dinâmica dos RMRs.

A equação dinâmica de cada robô móvel, baseada na teoria de Lagrange, é descrita a seguir (veja detalhes em COELHO & NUNES (2003b)):

$$M(q_{1_i})\ddot{q}_{1_i} + C(q_{1_i}, \dot{q}_{1_i})\dot{q}_{1_i} = E\tau_i - A^T(q_{1_i})^T \lambda_i, \quad (4.12)$$

sendo $\lambda_i = [\lambda_{1_i} \ \lambda_{2_i} \ \lambda_{3_i}]^T$ o vetor de restrições das forças, $E = [0_{2 \times 3} \ I_{2 \times 2}]^T$ a matriz de entrada, $\tau_i = [\tau_{d_i} \ \tau_{e_i}]^T$ o vetor de torque nas rodas,

$$C(q_{1_i}, \dot{q}_{1_i}) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & m d \dot{\alpha}_i \cos \alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m d \dot{\alpha}_i \sin \alpha_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0_{(3 \times 5)} \end{bmatrix}$$

a matriz de forças de coriolis e centrípeta, e

$$M(q_{1_i}) = \begin{bmatrix} m & 0 & m d \sin \alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & m & -m d \cos \alpha_i & 0 & 0 \\ m d \sin \alpha_i & -m d \cos \alpha_i & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_r \end{bmatrix}$$

a matriz de inércia. Os parâmetros m e I são dados por $m = m_p + 2m_r$ e $I = I_c + 2m_r(d^2 + b^2) + 2I_m + m_p d^2$, sendo m_r o conjunto da massa da roda e do rotor do motor; m_c é a massa da plataforma do robô; I_c é o momento de inércia da plataforma do robô em relação ao eixo vertical em P_c ; I_r é o momento de inércia da roda em relação ao eixo da roda; I_m é o momento de inércia da roda em relação ao eixo definido no plano da roda (perpendicular ao eixo da roda).

Capítulo 5

Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear

5.1 Introdução

Considerando agora, o conjunto de seis robôs móveis com rodas que se movem em formação como um sistema sujeito a um controle não linear, foram projetados dois controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares via representação Quase-LPV, que serão apresentados neste capítulo.

5.2 Formulação do Problema

O modelo dinâmico do RMR apresentado no capítulo anterior é representado como um sistema quase-LPV, ou seja, o parâmetro ρ agora é uma função do estado, $\rho = \rho(x)$. Será mostrado aqui um exemplo quase-LPV para seis robôs em formação.

Diferenciando a Equação (4.3) em relação ao tempo, substituindo o resultado em (4.12) e multiplicando o lado esquerdo por S^T , obtém-se:

$$M_2 \ddot{q}_{2i} + C_2(\dot{q}_{1_i}) \dot{q}_{2_i} = S^T E \tau_i = \tau_i. \quad (5.1)$$

Incertezas paramétricas são introduzidas em (5.1) dividindo as matrizes de parâmetros M_2 e $C_2(\dot{q}_2)$ em uma parte nominal e uma parte perturbada, tem-se:

$$\begin{aligned} M_2 &= M_0 + \Delta M_0 \\ C_2(\dot{q}_2) &= C_0(\dot{q}_2) + \Delta C_0(\dot{q}_2) \end{aligned}$$

sendo M_0 uma matriz simétrica constante, não singular, dada por $S(q)^T M(q) S(q)$ e $C_0(\dot{q}) = C_0(\dot{\alpha}) = C_0(\dot{q}_2) = S(q)^T C(q, \dot{q}) S(q) + S(q)^T M(q) \dot{S}(q)$. Note que nesta passagem desaparece a matriz de restrição que estava presente no termo $A^T \lambda$ da equação dinâmica, pois $S^T A^T = 0$ (A está no espaço nulo de S). Adicionando um distúrbio de torque $\omega_i = [\omega_{d_i} \ \omega_{e_i}]^T$ e substituindo (4.6) em (5.1), segue que:

$$\ddot{q}_{2_i} = \bar{A}(\dot{q}_{2_i}) \dot{q}_{2_i} + \bar{B} \tau_i + \bar{B} \omega_i, \quad (5.2)$$

sendo $\bar{A}(\dot{q}_{2_i}) = -M_2^{-1} C_2(\dot{q}_{2_i})$ e $\bar{B} = M_2^{-1}$. Somando e subtraindo $\ddot{q}_{2_i}^d$ e $\bar{A}(\dot{q}_{2_i}) \dot{q}_{2_i}^d$ em (5.2) (sendo o índice “ d ” referente ao valor desejado) e, definindo o estado de cada robô como:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \\ \tilde{x}_5 \\ \tilde{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_{21} \\ \tilde{q}_{21} \\ \dot{\tilde{q}}_{22} \\ \tilde{q}_{22} \\ \dot{\tilde{q}}_{23} \\ \tilde{q}_{23} \\ \dot{\tilde{q}}_{24} \\ \tilde{q}_{24} \\ \dot{\tilde{q}}_{25} \\ \tilde{q}_{25} \\ \dot{\tilde{q}}_{26} \\ \tilde{q}_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{d1} - \dot{\theta}_{d1}^d \\ \dot{\theta}_{e1} - \dot{\theta}_{e1}^d \\ \theta_{d1} - \theta_{d1}^d \\ \theta_{e1} - \theta_{e1}^d \\ \dot{\theta}_{d2} - \dot{\theta}_{d2}^d \\ \dot{\theta}_{e2} - \dot{\theta}_{e2}^d \\ \theta_{d2} - \theta_{d2}^d \\ \theta_{e2} - \theta_{e2}^d \\ \dot{\theta}_{d3} - \dot{\theta}_{d3}^d \\ \dot{\theta}_{e3} - \dot{\theta}_{e3}^d \\ \theta_{d3} - \theta_{d3}^d \\ \theta_{e3} - \theta_{e3}^d \\ \dot{\theta}_{d4} - \dot{\theta}_{d4}^d \\ \dot{\theta}_{e4} - \dot{\theta}_{e4}^d \\ \theta_{d4} - \theta_{d4}^d \\ \theta_{e4} - \theta_{e4}^d \\ \dot{\theta}_{d5} - \dot{\theta}_{d5}^d \\ \dot{\theta}_{e5} - \dot{\theta}_{e5}^d \\ \theta_{d5} - \theta_{d5}^d \\ \theta_{e5} - \theta_{e5}^d \\ \dot{\theta}_{d6} - \dot{\theta}_{d6}^d \\ \dot{\theta}_{e6} - \dot{\theta}_{e6}^d \\ \theta_{d6} - \theta_{d6}^d \\ \theta_{e6} - \theta_{e6}^d \end{bmatrix}$$

a representação Quase-LPV para o controle de acompanhamento de trajetória de robôs móveis

com rodas em formação é dado por:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_4 \\ \dot{\tilde{x}}_5 \\ \dot{\tilde{x}}_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} \\ 0_{4 \times 4} & \bar{A}_2 & 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} \\ 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} & \bar{A}_3 & 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} \\ 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} & \bar{A}_4 & 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} \\ 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} & \bar{A}_5 & 0_{4 \times 4} \\ 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} & \bar{A}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \\ \tilde{x}_5 \\ \tilde{x}_6 \end{bmatrix} + \\
 &\begin{bmatrix} I & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} \\ 0_{4 \times 2} & I & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} \\ 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & I & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} \\ 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & I & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} \\ 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & I & 0_{4 \times 2} \\ 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} + \\
 &\begin{bmatrix} \bar{B} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} \\ 0_{4 \times 2} & \bar{B} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} \\ 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & \bar{B} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} \\ 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & \bar{B} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} \\ 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & \bar{B} & 0_{4 \times 2} \\ 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & 0_{4 \times 2} & \bar{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

sendo

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_1 &= \begin{bmatrix} \bar{A}(\dot{q}_{21}) & 0_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} & \bar{A}_2 &= \begin{bmatrix} \bar{A}(\dot{q}_{22}) & 0_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} & \bar{A}_3 &= \begin{bmatrix} \bar{A}(\dot{q}_{23}) & 0_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \\
 \bar{A}_4 &= \begin{bmatrix} \bar{A}(\dot{q}_{24}) & 0_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} & \bar{A}_5 &= \begin{bmatrix} \bar{A}(\dot{q}_{25}) & 0_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} & \bar{A}_6 &= \begin{bmatrix} \bar{A}(\dot{q}_{26}) & 0_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \\
 I &= \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \\
 \bar{B} &= \begin{bmatrix} \bar{B}_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

sendo

$$u_i = -\ddot{q}_{2_i}^d + \bar{A}(\dot{q}_{2_i})\dot{q}_{2_i}^d + \bar{B}\tau_i,$$

ou

$$\tau_i = \bar{B}^{-1}(\ddot{q}_{2_i}^d - \bar{A}(\dot{q}_{2_i})\dot{q}_{2_i}^d + u_i). \quad (5.4)$$

5.3 Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear via Representação Quase-LPV

Com a equação em espaço de estado formulada na representação quase-LPV (o parâmetro ρ em função do estado, ou seja, $\rho = \rho(x_i)$ resultante do modelo dinâmico (4.12)), o controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas LPV pode ser aplicado a RMRs, gerando um controlador não linear baseado na dinâmica.

5.3.1 Ganho $\mathcal{L}_2$ para sistemas não lineares variantes no tempo

Considere um sistema não linear variante no tempo com entrada de distúrbio afim $w_i \in \mathbb{R}^p$ e saída controlada $z_i \in \mathbb{R}^q$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f(x_i, t) + g(x_i, t)w_i, \\ z_i &= h(x_i, t) + k(x_i, t)w_i, \end{aligned} \quad (5.5)$$

sendo $f(0, t) = 0$ e $h(0, t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$, e $x_i \in \mathbb{R}^n$ o estado. Assume-se que $f(x_i, t)$, $g(x_i, t)$, $h(x_i, t)$ e $k(x_i, t)$ são funções continuamente diferenciáveis em relação a x_i e contínuas em t . O sistema (5.5) possui ganho $\mathcal{L}_2 \leq \gamma$ no intervalo $[0, T]$ se

$$\int_0^T \|z_i(t)\|_2^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|\omega_i(t)\|_2^2 dt, \quad (5.6)$$

para todo $T \geq 0$ e todo $w \in \mathcal{L}_2(0, T)$ com o sistema iniciando em $x_i(0) = 0$. Para sistemas lineares invariantes no tempo, a condição de ganho $\mathcal{L}_2 \leq \gamma$ corresponde à condição da norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência entre a entrada de distúrbio e a saída controlada ser limitada por γ , ou seja, $\|T_{zw}(s)\|_\infty \leq \gamma$.

5.4 Síntese do Controle $\mathcal{H}_\infty$ para Sistemas LPV por Realimentação de Estado

A lei de controle não linear apresentada a seguir é baseada em Desigualdades Matriciais Lineares (DMLs). Trata-se de uma lei de controle por realimentação de estado $u_i = F(\rho)x_i$, aplicada a todos os robôs móveis da formação, que estabiliza o sistema em malha fechada garantindo que o ganho $\mathcal{L}_2$ entre o distúrbio e a saída, seja limitado por um nível de atenuação $\gamma > 0$. Este controlador será utilizado nas simulações para garantir a convergência dos robôs móveis para a formação, mesmo na presença de distúrbios e torques externos.

Considere o seguinte problema de síntese do controle por realimentação de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= A(\rho(t))x_i + B_1(\rho(t))\omega_i + B_2(\rho(t))u_i, \\ z_{1_i} &= C_1(\rho(t))x_i, \\ z_{2_i} &= C_2(\rho(t))x_i + u_i\end{aligned}\tag{5.7}$$

sendo $x_i \in \mathbb{R}^n$ o estado do robô móvel i , $u_i \in \mathbb{R}^{q_2}$ a entrada de controle, $\omega_i \in \mathbb{R}^p$ a entrada de distúrbio, $z_{1_i} \in \mathbb{R}^{q_1}$ e $z_{2_i} \in \mathbb{R}^{q_2}$ as saídas controladas. $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C_1(\cdot)$, $C_2(\cdot)$ são matrizes contínuas de dimensões apropriadas e $\rho(t) \in F_p^\nu$, são os parâmetros dependentes do tempo definidos por:

$$F_p^\nu = \{\rho \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m) : \rho(t) \in P\}$$

sendo $P \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto compacto, e $\underline{\nu}_k(\rho) \leq \dot{\rho}_k \leq \bar{\nu}_k(\rho)$ com $k = 1, \dots, m$.

Lema 5.4.1 : (WU et al. (1996)) *Se existir uma função continuamente diferenciável $X(\rho(t)) > 0$ para todo $\rho(t) \in P$ que satisfaça:*

$$\begin{bmatrix} G(\rho) & X(\rho)C_1^T(\rho) & B_1(\rho) \\ G_1(\rho)X(\rho) & -I & 0 \\ B_1^T(\rho) & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0,\tag{5.8}$$

sendo

$$G(\rho) = -\sum_{k=1}^m \bar{\nu}_k \frac{\partial X}{\partial \rho_k} + \hat{A}(\rho)X(\rho) + X(\rho)\hat{A}(\rho)^T$$

$-B_2(\rho)B_2^T(\rho)$ e $\hat{A}(\rho) = A(\rho) - B_2(\rho)C_2(\rho)$. O ganho $F(\rho)$ de realimentação de estado é calculado

da seguinte forma:

$$u_i = -(B_2(\rho)^T X^{-1}(\rho) + C_2(\rho))x_i, \quad (5.9)$$

e garante que o sistema em malha fechada tenha ganho $\mathcal{L}_2 \leq \gamma$ para toda variação paramétrica $\rho(t) \in F_p^\nu$. A notação $\sum_{k=1}^m \bar{\nu}_k$ representa que toda combinação de $\bar{\nu}_k$ e $\underline{\nu}_k$ deve ser incluída na desigualdade. Então, (5.8) representa 2^m desigualdades.

O resultado acima é uma generalização natural da teoria de controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas lineares. Uma função de Lyapunov dependente de parâmetros na forma $V(x, t) = x^T(t)X^{-1}(\rho(t))x(t)$ é assumida. Como resultado, deve-se resolver as DMLs paramétricas (5.8) que é um problema de otimização convexo com dimensão infinita.

5.4.1 Considerações Computacionais

Um esquema computacional prático (HUANG & JADBABAIE (1998) e SIQUEIRA & TERRA (2004b)) pode ser utilizado para resolver as desigualdades matriciais lineares presentes na análise e síntese dos problemas LPV. Para encontrar $X(\rho(t))$ na Equação (5.8) primeiro, deve-se escolher um conjunto de funções C^1 , $\{f_k(\rho(t))\}_{k=1}^M$, como base para $X(\rho)$, ou seja,

$$X(\rho(t)) = \sum_{k=1}^M f_k(\rho(t))X_k, \quad (5.10)$$

sendo $X_k \in S^{n \times n}$ a matriz coeficiente para $f_k(\rho(t))$. Se $X(\rho(t))$ em (5.8) é substituída por (5.10) o problema de realimentação do estado transforma-se em um problema de otimização.

5.5 Síntese do Controle $\mathcal{H}_\infty$ para Sistemas LPV por Realimentação de Saída

Nesta seção é estudado um controlador $\mathcal{H}_\infty$ para Sistemas LPV por Realimentação de Saída. A robustez do controlador é garantida pela minimização do ganho $\mathcal{L}_2$, entre o distúrbio e a saída do sistema. Para aplicar a técnica de controle apresentada em APKARIAN & ADAMS (1998),

os robôs móveis precisam ser representados de acordo com a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{q_i} &= A(\rho_i)x_{q_i} + B_1(\rho_i)w_i + B_2(\rho_i)u_i, \\ z_i &= C_1(\rho_i)x_{q_i} + D_{11}(\rho_i)w_i + D_{12}(\rho_i)u_i, \\ y_i &= C_2(\rho_i)x_{q_i} + D_{21}(\rho_i)w_i \end{aligned} \quad (5.11)$$

sendo $\rho_i = [\rho_{i_1}(t), \dots, \rho_{i_M}(t)]^T \in \mathcal{P}$ o vetor contendo os parâmetros variantes no tempo, $\rho_{i_k}(t)$, $k = 1, \dots, M$, que satisfazem $|\dot{\rho}_{i_k}(t)| \leq v_{i_k}$, sendo $v_{i_k} \geq 0$ os limites da taxa de variação dos parâmetros.

Considere o distúrbio atuando no sistema como uma composição da perturbação no torque, δ_i , e pela posições angulares desejadas das rodas, $q_{2_i}^d$, ou seja, $w_i = [\delta_i^T \ (q_{2_i}^d)^T]^T$. A saída medida z_i e a saída de controle y_i são definidas em termos dos erros de posição, $q_{2_i}^d - q_{2_i}$. Então, (5.7) pode ser caracterizada pelas seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} A(\rho_i) &= \begin{bmatrix} \bar{A}(\dot{q}_{2_i}) & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, & B_1(\rho_i) &= \begin{bmatrix} \bar{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ B_2(\rho_i) &= \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, & C_1(\rho_i) &= \begin{bmatrix} 0 & -I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_2(\rho_i) &= [0 \quad -I], & D_{11}(\rho_i) &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ D_{12}(\rho_i) &= \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, & D_{21}(\rho_i) &= [0 \quad I], \quad D_{22}(\rho_i) = 0, \end{aligned}$$

sendo $\bar{A}(\dot{q}_{2_i})$ e $\bar{B}$ obtidas de (5.3). Em APKARIAN & ADAMS (1998), duas técnicas de controle para sistemas LPV são apresentadas. Uma chamada Caracterização Projetada, que usa o lema da projeção GAHINET & APKARIAN (1994) para reduzir o número de variáveis desconhecidas, foi aplicada para os RMRs em sua representação Quase-LPV.

O problema de controle por realimentação de saída com ganho escalonado consiste em encontrar um controlador LPV dinâmico, $K(\theta)$, com equação de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{k_i} \\ u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k(\rho_i, \dot{\rho}_i) & B_k(\rho_i, \dot{\rho}_i) \\ C_k(\rho_i, \dot{\rho}_i) & D_k(\rho_i, \dot{\rho}_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k_i} \\ y_i \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

que assegure estabilidade interna e ganho $\mathcal{L}_2$ entre o sinal de distúrbio w_i e o sinal de saída z_i

limitado por γ para o operador em malha fechada (5.11)-(5.12), de acordo com a equação (5.6).

Note que as matrizes do controlador em espaço de estados dependem explicitamente da derivada do parâmetro variante no tempo. Com exceção ao fato da dependência de θ ser suave, os dados e variáveis do problema serão irrestritos quanto às derivações subseqüentes. O controlador com ganho escalonado com performance de ganho $\mathcal{L}_2$ garantida é apresentado no seguinte teorema, no qual a dependência dos dados e variáveis em θ e $\dot{\theta}$ foi omitida por conveniência e simplicidade.

Teorema 5.5.1 -APKARIAN & ADAMS (1998b): *Considere um sistema LPV dado por (5.11), com a trajetória do parâmetro em Θ e Θ_d . Existe um controlador por realimentação da saída com ganho escalonado (5.12) que assegure a estabilidade interna e um limite γ para o ganho $\mathcal{L}_2$ do sistema em malha fechada (5.11) e (5.12), toda vez que existir matrizes simétricas com parâmetros dependentes $X(\theta)$ e $Y(\theta)$ $\hat{A}_K$, tal que para todos os pares $(\theta, \dot{\theta})$ em $\Theta \times \Theta_d$ o seguinte problema de DMLs com dimensão infinita seja satisfeito:*

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_x & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cc|c} \dot{X} + XA + A^T X & XB_1 & C_1^T \\ B_1^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ \hline B_1 & D_{11} & -\gamma I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_x & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] < 0, \quad (5.14)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_y & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cc|c} -\dot{Y} + YA^T + AY & YC_1^T & B_1 \\ C_1 Y & -\gamma I & D_{11} \\ \hline B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_y & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] < 0, \quad (5.15)$$

$$\left[\begin{array}{cc} X & I \\ I & Y \end{array} \right] > 0, \quad (5.16)$$

sendo $\mathcal{N}_x$ e $\mathcal{N}_y$ projetadas para qualquer base do espaço nulo de $[C_2 \ D_{21}]$ e $[B_2^T \ D_{12}^T]$, respectivamente. Após encontrar X e Y o controlador LPV pode ser encontrado através do seguinte esquema seqüencial:

- Calcular a solução D_K para

$$\sigma_{\max}(D_{11} + D_{12}D_KD_{21}) < \gamma, \quad (5.17)$$

e o conjunto $D_{cl} := D_{11} + D_{12}D_KD_{21}$.

- Calcular as soluções $\hat{B}_K$ e $\hat{C}_K$, para as equações matriciais lineares

$$\begin{bmatrix} 0 & D_{21} & 0 \\ D_{21}^T & -\gamma I & D_{cl}^T \\ 0 & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_K^T \\ \star \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_2 \\ B_1^T X \\ C_1 + D_{12} D_K C_2 \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & D_{12}^T & 0 \\ D_{12} & -\gamma I & D_{cl} \\ 0 & D_{cl}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}_K \\ \star \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_2^T \\ C_1 Y \\ (B_1 + B_2 D_K D_{21})^T \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

- Calcular

$$\begin{aligned} \hat{A}_K = & -(A + B_2 D_K C_2)^T + [X B_1 + \hat{B}_K D_{21} (C_1 + D_{12} D_K C_2)^T] * \\ & \begin{bmatrix} -\gamma I & D_{cl}^T \\ D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (B_1 + B_2 D_K D_{21})^T \\ C_1 Y + D_{12} \hat{C}_K \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

- Solucione o problema de fatoração para N e M

$$I - XY = NM^T.$$

- Finalmente, encontre A_K , B_K , e C_K sendo

$$\begin{aligned} A_K = & N^{-1} (X \dot{Y} + \hat{A}_K - X(A - B_2 D_K C_2)Y - \hat{B}_K C_2 Y - X B_2 \hat{C}_K) M^{-T}, \\ B_K = & N^{-1} (\hat{B}_K - X B_2 D_K), \\ C_K = & (\hat{C}_K - D_K C_2 Y) M^{-T}. \end{aligned}$$

5.5.1 Redução do problema de dimensão infinita para finita

Algumas considerações devem ser feitas para se obter o controlador descrito acima. Primeiro, a solução do conjunto de DMLs é um problema de dimensão infinita, uma vez que o vetor de parâmetros ρ_i varia continuamente. Para resolver este problema, o espaço de parâmetros $\mathcal{P}$ é dividido em um conjunto de pontos para cada parâmetro, formando-se uma malha de pontos. As DMLs devem ser satisfeitas em todos os pontos desta malha.

Segundo, as matrizes $X(\rho_i)$ e $Y(\rho_i)$ devem variar continuamente com o vetor de parâmetros. A questão é: como expressar estas matrizes em função de ρ_i ? Uma maneira de se resolver este

problema é definir funções bases para $X(\rho_i)$ e $Y(\rho_i)$ da seguinte forma:

$$X(\rho_i) = \sum_{p=1}^P f_p(\rho_i) X_p$$

$$Y(\rho_i) = \sum_{l=1}^L g_l(\rho_i) Y_l$$

sendo $\{f_p(\rho_i)\}_{p=1}^P$ e $\{g_l(\rho_i)\}_{l=1}^L$ funções diferenciáveis em ρ_i . Uma regra prática para escolhermos essas funções é definí-las de maneira semelhante às funções que aparecem na matriz dinâmica do sistema a ser controlado.

A terceira consideração diz respeito às derivadas das variáveis $X(\rho_i)$ e $Y(\rho_i)$ que aparecem nas DMLs. Considera-se neste trabalho que a taxa de variação dos parâmetros é limitada ou, como descrito anteriormente, $|\dot{\rho}_{i_k}(t)| \leq v_{i_k}$. Sendo as matrizes $X(\rho_i)$ e $Y(\rho_i)$ descritas como combinações das funções base, as suas derivadas nas DMLs podem ser reescritas como:

$$\dot{X}(\rho_i) = \sum_{k=1}^M \pm \left(v_{i_k} \sum_{p=1}^P \frac{\partial f_p}{\partial \rho_{i_k}} X_p \right),$$

$$\dot{Y}(\rho_i) = \sum_{k=1}^M \pm \left(v_{i_k} \sum_{l=1}^L \frac{\partial g_l}{\partial \rho_{i_k}} Y_l \right).$$

O sinal $\pm$ significa que todas as combinações de sinais positivos e negativos devem ser consideradas para se obter o conjunto de DMLs. Veja APKARIAN & ADAMS (1998); WU et al. (1996) para mais informações sobre a síntese deste tipo de controlador. Observe que com o aumento do número de robôs, o custo computacional para resolver as DMLs aumenta exponencialmente. Entretanto, a implementação dos controladores pode ser realizada dentro de um intervalo de amostragem aceitável e de forma descentralizada.

Capítulo 6

Modelo Markoviano dos RMRs

Neste capítulo será apresentada a formulação do controle de formação tolerante a falhas baseado nas metodologias de projeto para sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos. A falha considerada aqui corresponde à perda de um dos robôs da formação, em especial, pode-se considerar a perda do líder. Após a ocorrência da falha, a dinâmica do robô perdido não é considerada no projeto do controlador baseado em SLSM. Além disso, considera-se que o robô perdido não se tornará, após a falha, um obstáculo para os demais robôs da formação.

Os modelos dinâmicos dos robôs móveis em formação são linearizados em torno de pontos definidos na faixa de operação dos robôs móveis, caracterizada a partir dos limites máximos e mínimos das variáveis de posição e velocidade. O modelo Markoviano para este sistema considera os pontos de operação utilizados e a configuração de formação (se há ou não perda de robôs). O estado Markoviano atual é definido pelo ponto de operação atual, pelo número de robôs na formação e pela informação de qual robô é o líder.

Cabe salientar que esta segunda abordagem de controle, tolerante a falhas, permite considerar outros aspectos que podem ser úteis para determinadas aplicações como a alternância de líder, falhas de comunicação e obstáculos estáticos e dinâmicos. Tais aspectos serão considerados em trabalhos futuros.

Para obter o sistema linear referente aos pontos de operação, o modelo dinâmico dos RMRs (5.1), com o acréscimo da perturbação no torque, é representado por:

$$M_2 \ddot{q}_{2_i} + b_i = \tau_i + \delta_i, \quad (6.1)$$

sendo $b_i = C_2(\dot{q}_{2_i})\dot{q}_{2_i}$. A linearização de (6.1) em torno de um ponto de operação ψ com posição $q_{2_i}^\psi$ e velocidade $\dot{q}_{2_i}^\psi$, para cada RMR em formação, é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_i &= A_i^\psi \bar{x}_i + E_i^\psi \bar{w}_i + B_i^\psi \bar{u}_i, \\ \bar{z}_i &= C_{1_i}^\psi \bar{x}_i + D_{1_i}^\psi \bar{u}_i, \\ \bar{y}_i &= C_{2_i}^\psi \bar{x}_i + D_{2_i}^\psi \bar{u}_i\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}A_i^\psi &= \begin{bmatrix} M_2^{-1}k_p & -M_2^{-1}\frac{\partial b}{\partial \dot{q}_{2_i}^\psi} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \\ E_i^\psi = B_i^j &= \begin{bmatrix} M_2^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{1_i}^\psi = \begin{bmatrix} \alpha_i I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{1_i}^\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_i I \end{bmatrix}, \\ C_{2_i}^\psi &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}, \quad D_{2_i}^\psi = 0, \quad \bar{x}_i = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{d_i}^d - \dot{\theta}_{d_i} \\ \dot{\theta}_{e_i}^d - \dot{\theta}_{e_i} \\ \theta_{d_i}^d - \theta_{d_i} \\ \theta_{e_i}^d - \theta_{e_i} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$\bar{u}_i$ a entrada de controle calculada de acordo com o controlador Markoviano apresentado a seguir e $\bar{w}_i = \delta_i$. α_i e β_i são ponderações definidas pelo projetista para os erros de acompanhamento de trajetória e para a entrada de controle, respectivamente. O torque aplicado no i -ésimo robô é definido por

$$\tau_i = [k_p \quad 0]\bar{x}_i + \bar{u}_i. \quad (6.2)$$

Considera-se neste trabalho que o número de pontos de operação, Ψ , é o mesmo para cada uma das formações. Considera-se também que as formações resultantes de falha possuem apenas um robô perdido. Ou seja, para uma formação inicial com N robôs, teremos $N+1$ possibilidades de formação. Uma formação com todos os robôs e N formações com um robô perdido. Formações com falhas que envolvam mais que um robô ao mesmo tempo serão consideradas em trabalhos futuros.

A matriz dinâmica de uma formação inicial com N robôs, para um determinado ponto de

operação, é dada por:

$${}_0A^\psi = \begin{bmatrix} A_1^\psi & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_i^\psi & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & A_N^\psi \end{bmatrix}.$$

A matriz dinâmica de uma formação com perda do i -ésimo robô é dada por:

$${}_iA^\psi = \begin{bmatrix} A_1^\psi & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & A_N^\psi \end{bmatrix}.$$

As demais matrizes do sistema, ${}_iE^\psi$, ${}_iB^\psi$, ${}_iC_1^\psi$, ${}_iC_2^\psi$, ${}_iD_1^\psi$ e ${}_iD_2^\psi$, podem ser construídas de forma similar às matrizes ${}_iA^\psi$, $\psi = 1, \dots, \Psi$.

Considere as coleções de matrizes reais dadas por:

$$\begin{aligned} A_\Theta &= ({}_0A^1, \dots, {}_0A^\Psi, {}_1A^1, \dots, {}_1A^\Psi, \dots, {}_NA^1, \dots, {}_NA^\Psi), \\ E_\Theta &= ({}_0E^1, \dots, {}_0E^\Psi, {}_1E^1, \dots, {}_1E^\Psi, \dots, {}_NE^1, \dots, {}_NE^\Psi), \\ B_\Theta &= ({}_0B^1, \dots, {}_0B^\Psi, {}_1B^1, \dots, {}_1B^\Psi, \dots, {}_NB^1, \dots, {}_NB^\Psi), \\ C_{1\Theta} &= ({}_0C_1^1, \dots, {}_0C_1^\Psi, {}_1C_1^1, \dots, {}_1C_1^\Psi, \dots, {}_NC_1^1, \dots, {}_NC_1^\Psi), \\ C_{2\Theta} &= ({}_0C_2^1, \dots, {}_0C_2^\Psi, {}_1C_2^1, \dots, {}_1C_2^\Psi, \dots, {}_NC_2^1, \dots, {}_NC_2^\Psi), \\ D_{1\Theta} &= ({}_0D_1^1, \dots, {}_0D_1^\Psi, {}_1D_1^1, \dots, {}_1D_1^\Psi, \dots, {}_ND_1^1, \dots, {}_ND_1^\Psi), \\ D_{2\Theta} &= ({}_0D_2^1, \dots, {}_0D_2^\Psi, {}_1D_2^1, \dots, {}_1D_2^\Psi, \dots, {}_ND_2^1, \dots, {}_ND_2^\Psi), \end{aligned}$$

sendo o conjunto Θ definido como $\Theta = \{1, \dots, \Psi(N+1)\}$. O número de elementos do conjunto Θ define o número de estados Markovianos do sistema.

6.0.2 Controle $\mathcal{H}_\infty$ por Realimentação de Saída para SLSM

O controle $\mathcal{H}_\infty$ com realimentação da saída para SLSM apresentado neste artigo pode ser visto em SIQUEIRA et al. (2007) e em de Farias et al. (2000). Considere uma cadeia de Markov homogênea de tempo contínuo, $\theta(t) = \{\theta \in \Theta : t > 0\}$, com probabilidade de transição P_r definida como:

$$P_r(\theta(t + \Delta t) = j | \theta(t) = i) = \begin{cases} \lambda_{ij}\Delta + o(\delta), & \text{se } i \neq j \\ 1 + \lambda_{ii}\Delta + o(\delta), & \text{se } i = j, \end{cases}$$

com $i, j \in \Theta$, $\Delta > 0$, e $\lambda_{ij} \geq 0$ a taxa de transição do estado Markoviano i para o estado j ($i \neq j$), sendo

$$\lambda_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{\Psi(N+1)} \lambda_{ij}.$$

A distribuição de probabilidade da cadeia de Markov no tempo inicial é dada por $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{\Psi(N+1)})$, sendo $P_r(\theta(0) = i) = \mu_i$. O sistema linear sujeito a salto Markoviano é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A_{\theta(t)}\bar{x} + E_{\theta(t)}\bar{w} + B_{\theta(t)}\bar{u}, \\ \bar{z} &= C_{1\theta(t)}\bar{x} + D_{1\theta(t)}\bar{u}, \\ \bar{y} &= C_{2\theta(t)}\bar{x} + D_{2\theta(t)}\bar{w}, \end{aligned}$$

sendo que $\bar{w}$ possui norma limitada e $E(|\bar{x}(0)|^2) < \infty$. O controlador dinâmico é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_c &= A_{c\theta(t)}\bar{x}_c + B_{c\theta(t)}\bar{y}, \\ \bar{u} &= C_{c\theta(t)}\bar{x}_c, \end{aligned} \tag{6.3}$$

sendo $A_{c\theta(t)} \in A_{c\Theta}$, $B_{c\theta(t)} \in B_{c\Theta}$ e $C_{c\theta(t)} \in C_{c\Theta}$. O problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ via realimentação de saída para SLSM consiste em encontrar controladores $(A_{c\theta}, B_{c\theta}, C_{c\theta})$, com $\theta \in \Theta$, tais que, a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada seja menor que γ .

Para encontrar estes controladores, o conjunto de DMLs descrito em (6.19-6.21) deve ser resolvido. Uma vez obtida a solução para o conjunto de DMLs, os controladores são projetados

$$\begin{bmatrix} A_\theta^T X_\theta + X_\theta A_\theta + L_\theta C_{2\theta} + C_{2\theta}^T L_\theta^T + C_{1\theta}^T C_{1\theta} + \sum_{j=1}^{\Psi(N+1)} \lambda_{\theta j} X_j & X_\theta E_\theta + L_\theta D_{2\theta} \\ E_\theta^T X_\theta + D_{2\theta}^T L_\theta^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (6.19)$$

$$\begin{bmatrix} A_\theta Y_\theta + Y_\theta A_\theta^T + B_\theta F_\theta + F_\theta^T B_\theta^T + \lambda_{\theta\theta} Y_\theta + \gamma^{-2} E_\theta E_\theta^T & Y_\theta C_{1\theta}^T + F_\theta^T D_{1\theta}^T & R_\theta Y \\ C_{1\theta} Y_\theta + D_{1\theta} F_\theta & -I & 0 \\ R_\theta^T(Y) & 0 & S_\theta(Y) \end{bmatrix} < 0, \quad (6.20)$$

$$\begin{bmatrix} Y_\theta & I \\ I & X_\theta \end{bmatrix} > 0. \quad (6.21)$$

sendo

$$R_\theta(Y) = \left[\sqrt{\lambda_{1\theta} Y_\theta}, \dots, \sqrt{\lambda_{(\theta-1)\theta} Y_\theta}, \sqrt{\lambda_{(\theta+1)\theta} Y_\theta}, \dots, \sqrt{\lambda_{(\Psi(N+1))\theta} Y_\theta} \right],$$

$$S_\theta(Y) = -\text{diag}(Y_1, \dots, Y_{\theta-1}, \dots, Y_{\theta+1}, \dots, Y_{\Psi(N+1)}).$$

por:

$$C_{c\theta} = F_\theta Y_\theta^{-1}$$

$$B_{c\theta} = (Y_\theta^{-1} - X_\theta)^{-1} L_\theta$$

$$A_{c\theta} = (Y_\theta^{-1} - X_\theta)^{-1} M_\theta Y_\theta^{-1}$$

sendo,

$$\begin{aligned} M_\theta = & -A_\theta^T - X_\theta A_\theta Y_\theta - X_\theta B_\theta F_\theta - L_\theta C_{2\theta} Y_\theta \\ & - C_{1\theta}^T \theta (C_{1\theta} Y_\theta + D_{1\theta} F_\theta) - \gamma^{-2} (X_\theta E_\theta + L_\theta D_{2\theta}) E_\theta^T \\ & - \sum_{j=1}^{\Psi(N+1)} \lambda_{\theta j} Y_j^{-1} Y_\theta. \end{aligned}$$

Capítulo 7

Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados de simulação para o controle robusto de robôs em formação com alternância de líder baseado nos controladores $\mathcal{H}_\infty$ não linear apresentados no Capítulo 5 e para o controle de formação tolerante a falhas baseado no controle Markoviano apresentado no Capítulo 6.

A Figura 7.1 mostra o diagrama de blocos das estratégias de controle propostas.

Figura 7.1: Sistema de Controle de Acompanhamento de Trajetória para os RMRs.

Os resultados obtidos para o problema de coordenação de um conjunto de seis robôs móveis com rodas são baseados em robôs individuais idênticos (vide Figura 7.2) cujos parâmetros nominais são:

$mp = 0.597;$	massa da plataforma
$mr = 0.075;$	massa do robô
$a = 0.17;$	comprimento do robô
$b = 0.06525;$	distância entre roda e o eixo de simetria
$d = 0.01;$	distância entre Po e Pc
$r = 0.028;$	raio das rodas atuadas
$Ic = 0.0022938;$	M.I da plataforma do robô em relação ao eixo vertical em Pc
$Ir = 0.000375;$	M.I da roda em relação ao eixo da roda
$Im = 3.6788^{-7};$	M.I da roda em relação ao eixo definido no plano da roda

Figura 7.2: Robôs Móveis com Rodas.

7.1 Simulação Computacional do Controlador de Formação

As trajetórias de referência (x_{r_i}, y_{r_i}) para os seis robôs considerados neste exemplo, são dadas pelo controlador de formação, com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned}(x_{c_1}(0), y_{c_1}(0), \alpha_{c_1}(0)) &= (0, 4, 0), \\(x_{c_2}(0), y_{c_2}(0), \alpha_{c_2}(0)) &= (0, 6, 0), \\(x_{c_3}(0), y_{c_3}(0), \alpha_{c_3}(0)) &= (0, 2, 0), \\(x_{c_4}(0), y_{c_4}(0), \alpha_{c_4}(0)) &= (0, 14, 0), \\(x_{c_5}(0), y_{c_5}(0), \alpha_{c_5}(0)) &= (0, 12, 0), \\(x_{c_6}(0), y_{c_6}(0), \alpha_{c_6}(0)) &= (0, 10, 0).\end{aligned}$$

Neste trabalho os RMRs foram simulados considerando que tivessem a seguinte formação:

$$\begin{aligned}h_1 &= [6, 0]; & h_2 &= [3, 2]; & h_3 &= [3, -2]; \\h_4 &= [0, 4]; & h_5 &= [0, 0]; & h_6 &= [0, -4].\end{aligned}$$

E, foi aplicada a mesma matriz de realimentação para todos os robôs, dada por:

$$\mathbf{F}_{\text{veh}} = \begin{bmatrix} -100 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & -100 \end{bmatrix}$$

Cabe salientar que o tempo de amostragem considerado foi $t_s = 0.004$, para todos os robôs.

7.1.1 Controlador de Formação

Os primeiros resultados desta pesquisa foram obtidos para o controlador projetado utilizando a teoria do controle de formação. Inicialmente, foi realizada uma simulação de maneira simples, mantendo um robô na liderança da formação, apenas para testar o controlador projetado.

A trajetória efetuada pela formação é mostrada na Figura 7.3.

Figura 7.3: Trajetória da Formação.

Foram plotadas também as distâncias entre os robôs para verificar se a formação foi mantida durante o percurso.

O resultado é apresentado nas figuras a seguir.

Figura 7.4: Distância entre os robôs: (a) Distância entre os robôs 1 e 2 (gráfico à esquerda) (b) Distância entre os robôs 1 e 3 (gráfico à direita).

Figura 7.5: Distância entre os robôs: (a) Distância entre os robôs 1 e 4 (gráfico à esquerda) (b) Distância entre os robôs 1 e 5 (gráfico à direita).

Figura 7.6: Distância entre os robôs: (a) Distância entre os robôs 1 e 6 (gráfico à esquerda) (b) Distância entre os robôs 2 e 4 (gráfico à direita).

Figura 7.7: Distância entre os robôs: (a) Distância entre os robôs 2 e 6 (gráfico à esquerda) (b) Distância entre os robôs 3 e 2 (gráfico à direita).

Figura 7.8: Distância entre os robôs: (a) Distância entre os robôs 3 e 5 (gráfico à esquerda) (b) Distância entre os robôs 3 e 6 (gráfico à direita).

7.1.2 Controlador de Formação com Alternância de Líder

Para realizar a simulação considerando que a formação de robôs estivesse sujeita à alternância de líder, seis dígrafos foram projetados, um para cada possibilidade de robô na liderança da formação, (vide Figura 7.9), deste modo para cada robô líder tem-se um L_T .

Figura 7.9: Dígrafos para Cada Líder da Formação.

Observe que na Figura 7.9, os círculos em vermelho correspondem aos robôs líder da formação.

A simulação foi obtida alternando os robôs na liderança da formação em intervalos de tempo pré-determinados, de modo que mesmo com a mudança de líder os robôs não perdessem a comunicação.

A Figura 7.10 ilustra a trajetória efetuada pelos RMRs se alternando na liderança durante o movimento coordenado.

Figura 7.10: Trajetória da Formação com Alternância de Líder para $k=0$.

Note que na Figura 7.10, os RMRs da formação são representados pelo círculo em azul, sendo o robô líder representado pelo círculo em vermelho, e, o círculo em verde é utilizado para denotar que o robô em questão já foi líder da formação.

Neste caso, encontrou-se os seguintes autovalores para os laplacianos direcionados:

Tabela 7.1: Autovalores do Sistema Realimentado para os Líderes da Formação

Líder	Autovalores					
Robô 1	2	2	2	2	1	0
Robô 2	1	2	2	2	1	0
Robô 3	2	2	2	2	1	0
Robô 4	2	2	2	1	1	0
Robô 5	2	2	2	2	1	0
Robô 6	2	2	$2,23+0,79i$	$2,23-0,79i$	0,5344	0

Através da execução do programa observou-se que cada um dos seis robôs da formação assumiam a liderança em determinados intervalos de tempo e, a convergência para formação foi

mantida, como era de se esperar uma vez que para todos os líderes encontrou-se autovalores estáveis para o sistema realimentado e os autovalores dos laplacianos direcionados possuem um autovalor nulo com multiplicidade um, o que está de acordo com o Teorema 3.2.1 enunciado no Capítulo 3.

Outra simulação foi realizada para analisar a convergência para a formação quando o tipo de trajetória é mudada, isso foi possível fazendo $k = 0.5$ na equação dinâmica dos robôs (vide Anexo A). Obteve-se assim a simulação mostrada na Figura 7.11.

Figura 7.11: Trajetória da Formação com Alternância de Líder para $k=0.5$.

Da Figura 7.11 nota-se que mesmo mudando o tipo de trajetória, obteve-se êxito na alternância de líder durante o movimento coordenado.

Para os exemplos citados anteriormente, através da execução do programa elaborado para análise do controle de formação com alternância de líderes, observou-se que cada um dos seis robôs assumiam a liderança em determinados intervalos de tempo e, a convergência para formação foi mantida, como era de se esperar, uma vez que, para todos os líderes encontrou-se autovalores estáveis para o sistema realimentado e os autovalores dos laplacianos direcionados possuem um autovalor nulo com multiplicidade um, o que está de acordo com o Teorema 3.2.1 enunciado no Capítulo 3.

Foi então realizada outra simulação mantendo a mesma matriz de realimentação e os mesmos dígrafos para os robôs 1, 2, 3, 4 e 5, porém, projetou-se outro dígrafo para o caso em que o robô

6 assume a liderança, como mostrado na Figura 7.12.

Figura 7.12: Nova Representação da Formação para o Líder 6.

Deste modo, a tabela para os autovalores do laplaciano direcionado ficou da seguinte maneira:

Tabela 7.2: *Novos Autovalores do Sistema Realimentado para os Líderes da Formação*

Líder	Autovalores					
Robô 1	2	2	2	2	1	0
Robô 2	1	2	2	2	1	0
Robô 3	2	2	2	2	1	0
Robô 4	2	2	2	1	1	0
Robô 5	2	2	2	2	1	0
Robô 6	2	3	1	2	1	0

Os autovalores encontrados para este Laplaciano foram: $\lambda = \{2; 3; 1; 2; 1; 0\}$

Verificou-se que para este novo dígrafo, que corresponde a comunicação entre os robôs quando o robô 6 assume a liderança, os robôs não conseguiram manter a formação e o sistema se tornou instável.

Visando solucionar este caso foi utilizada uma nova matriz de realimentação. A matriz utilizada, corresponde a matriz de realimentação ótima para o sistema, e foi encontrada utilizando

o conceito de regulador linear quadrático (LQR):

$$\mathbf{F}_{\text{veh}} = \begin{bmatrix} -3.1624 & -4.0404 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.1624 & -4.0404 \end{bmatrix}$$

Para esta nova configuração obteve-se a Figura 7.13, que foi obtida fazendo a alternância de três robôs na liderança da formação para $k = 0$.

Figura 7.13: Trajetória da Formação com Alternância de Líder para $k=0$.

Mudando o tipo de trajetória, isto é, fazendo $k = 0.5$ (vide Anexo A) obteve-se a Figura 7.14.

Figura 7.14: Trajetória da Formação com Alternância de Líder para $k=0.5$.

Através das Figuras 7.13 e 7.14 verificou-se que a alternância de líderes no controle da formação foi realizada com êxito e os robôs convergiram para a formação.

Outra simulação foi realizada com o intuito de analisar o controle de formação para a situação na qual os robôs estão sujeitos a alternância de líder e se deparam com um obstáculo. A simulação para este caso é mostrada na Figura 7.15.

Figura 7.15: Trajetória da Formação com Alternância de Líder e na presença de um Obstáculo.

Esta simulação foi obtida da seguinte forma: Os robôs iniciaram o movimento tendo como líder o robô indicado na figura como Líder Inicial, que permaneceu na liderança até a formação se deparar com um obstáculo (indicada na figura pelo símbolo $\mathbf{x}$). Ao se depararem com o obstáculo, para que pudessem desviar os RMRs se dividiram em dois grupos, sendo que cada grupo tinha um líder. Após passarem pelo obstáculo, os robôs se uniram novamente, porém, com um novo líder (Líder Final) e prosseguiram o movimento coordenado.

Outras simulações foram feitas com diferentes matrizes de realimentação, e, observou-se que somente escolher $f_1 < 0$ e $f_2 < 0$ na matriz de realimentação, não garante a convergência para a formação do sistema dado em (3.6) sendo necessário, além destas condições, que os valores de $f_1 < 0$ e $f_2 < 0$ sejam próximos, nos casos estudados.

7.2 Simulação Computacional do Controlador $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear Via Representação Quase-LPV

Para o controlador baseado na cinemática, as direções iniciais são nulas ($\alpha_i(0) = 0$ para $i = 1, \dots, 6$). Os ganhos foram selecionados como sendo $K_x = 60$, $K_y = 15$, $K_\alpha = 30$. E, para permitir uma análise de robustez dos controladores, distúrbios externos foram introduzidos nos torques das rodas de todos os robôs da formação, da seguinte maneira:

$$\omega_{d_i} = 800e^{-(t-6)^4} \text{sen}(1.3\pi t) \quad e \quad \omega_{e_i} = -800e^{-(t-6)^4} \text{sen}(1.3\pi t).$$

7.2.1 Controle via Representação Quase-LPV com Realimentação de Estado

A matriz do sistema $A(\dot{q}_{2_i})$ está em função apenas das velocidades das rodas $\dot{q}_{2_i}$. Portanto no projeto do controlador quase-LPV pode-se considerar como função dos erros de velocidades $\dot{q}_{2_i}$. Assim o parâmetro ρ é definido como $\rho(\tilde{x}_i) = \dot{q}_{2_i}$. O conjunto P é dado por:

$$-\pi \leq \dot{\theta}_{d_i} \leq \pi(\text{rad/s}) \quad e \quad -\pi \leq \dot{\theta}_{e_i} \leq \pi(\text{rad/s}),$$

sendo

$$\nu_i = [\ddot{\theta}_{d_{i_{max}}} \quad \ddot{\theta}_{e_{i_{max}}}] = [2.5\pi \quad 2.5\pi](\text{rad/s}^2).$$

Empiricamente, para a minimização de γ considerou-se $P = 3$ pontos do espaço de parâmetros $\dot{\theta}_{d_i}$ e $\dot{\theta}_{e_i}$. As funções base dependentes dos parâmetros selecionados são dadas por:

$$f_{1_i} = 10 + \cos \dot{\theta}_{d_i} + \sin \dot{\theta}_{d_i} + \cos \dot{\theta}_{e_i} + \sin \dot{\theta}_{e_i},$$

$$f_{2_i} = \cos \dot{\theta}_{d_i} + \cos \dot{\theta}_{e_i},$$

$$f_{3_i} = -\sin \dot{\theta}_{d_i} + \cos \dot{\theta}_{e_i}.$$

A desigualdade (5.8) é resolvida usando o software *MATLAB*, sendo que em (5.7)

$$x_i = \tilde{x}_i, \quad A(\rho(t))_i = \begin{bmatrix} A(\dot{q}_{2_i}) & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = I_{4 \times 4} \quad e \quad C_2 = 0.$$

As matrizes X_1 , X_2 e X_3 foram encontradas para o melhor nível de atenuação, $\gamma = 1555$ (testes realizados com as perturbações), e são dadas por:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.0062 & 0.0017 & -0.0115 & -0.0025 \\ 0.0017 & 0.0058 & -0.0012 & -0.0112 \\ -0.0115 & -0.0012 & 0.0262 & 0.0023 \\ -0.0025 & -0.0112 & 0.0023 & 0.0257 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} -0.0062 & -0.0017 & 0.0115 & 0.0025 \\ -0.0017 & -0.0058 & 0.0012 & 0.0112 \\ 0.0115 & 0.0012 & -0.0263 & -0.0023 \\ 0.0025 & 0.0112 & -0.0023 & -0.0257 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0.0062 & 0.0017 & -0.0113 & -0.0024 \\ 0.0017 & 0.0057 & -0.0011 & -0.0110 \\ -0.0113 & -0.0011 & 0.0259 & 0.0022 \\ -0.0024 & -0.0110 & 0.0022 & 0.0254 \end{bmatrix}.$$

Os resultados foram obtidos simulando o programa para um robô na liderança da formação durante toda a trajetória e, são mostrados a seguir para o robô 1 sendo o líder da formação. Neste caso, L_Γ foi definido como:

$$L_\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Figura 7.16: Acompanhamento de trajetória de referência da formação usando o controlador quase-LPV: (a) sem distúrbio (gráfico superior) (b) com distúrbio (gráfico inferior).

Figura 7.17: Erro de direção do robô 1 usando o controlador quase-LPV: (a) sem distúrbio (gráfico à esquerda) (b) com distúrbio (gráfico à direita).

Figura 7.18: Erro de direção do robô 2 usando o controlador quase-LPV: (a) sem distúrbio (gráfico à esquerda) (b) com distúrbio (gráfico à direita).

Figura 7.19: Erro de direção do robô 3 usando o controlador quase-LPV: (a) sem distúrbio (gráfico à esquerda) (b) com distúrbio (gráfico à direita).

Figura 7.20: Erro de direção do robô 4 usando o controlador quase-LPV: (a) sem distúrbio (gráfico à esquerda) (b) com distúrbio (gráfico à direita).

Figura 7.21: Erro de direção do robô 5 usando o controlador quase-LPV: (a) sem distúrbio (gráfico à esquerda) (b) com distúrbio (gráfico à direita).

Figura 7.22: Erro de direção do robô 6 usando o controlador quase-LPV: (a) sem distúrbio (gráfico à esquerda) (b) com distúrbio (gráfico à direita).

Outras simulações foram executadas para cada um dos robôs na liderança da formação, individualmente, e verificou-se que o controlador projetado mostrou-se robusto, uma vez que mesmo na presença de distúrbios os robôs conseguiram manter a formação e os erros de direção do robôs em relação a trajetória de referência manteve-se próximo de zero.

7.2.2 Controle via Representação Quase-LPV com Realimentação de Saída

Para o controlador baseado na cinemática, os ganhos foram definidos como sendo $K_x = 7$, $K_y = 52$, $K_\alpha = 27$. E, os distúrbios externos foram introduzidos nos torques das rodas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\omega_{d_i} &= 1e^{-(t-4)^4} \text{sen}(1.3\pi t), \\ \omega_{e_i} &= -1e^{-(t-4)^4} \text{sen}(1.3\pi t).\end{aligned}$$

As funções bases foram escolhidas como:

$$f_{1_i} = 10^6; \quad f_{2_i} = 10^{11} \cos \dot{\theta}_{r_i}; \quad f_{3_i} = 10^9 \text{sen} \dot{\theta}_{l_i},$$

É importante ressaltar que para selecionar funções bases de modo que o sistema convergisse para a formação, foi necessário realizar diversos testes e simulações de maneira que as mesmas satisfizessem o objetivo do projeto de controle.

$X(\theta)$ e $Y(\theta)$ são definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}X(\theta) &:= X_0 f_{1_i}(\theta) \\ Y(\theta) &:= Y_0 f_{1_i}(\theta) + Y_{1_i} f_{2_i}(\theta) + Y_{2_i} f_{3_i}(\theta).\end{aligned}$$

O melhor nível de atenuação encontrado foi $\gamma = 2.61$. E, para o controle com realimentação da saída utilizou-se a seguinte matriz de realimentação:

$$\mathbf{F}_{\text{veh}} = \begin{bmatrix} -310 & -400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -310 & -400 \end{bmatrix}.$$

Para analisar o controlador $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear projetado via realimentação de saída, foi feita a simulação considerando seis robôs móveis que estavam se movendo em formação, e que foram sujeitos a uma perturbação e a alternância de líderes durante a trajetória analisada. O resultado é mostrado na Figura 7.23. O *zoom* observado nesta figura mostra o momento no qual o distúrbio foi aplicado.

Figura 7.23: Controle Quase-LPV com Realimentação da Saída de RMRs em Formação.

Para melhor visualização dos resultados, a Figura 7.23 foi dividida em duas figuras cada uma com três robôs, que são apresentadas na Figura 7.24. Note que na figura da esquerda, o círculo em vermelho representa o robô líder inicialmente da formação e, na figura da direita o círculo em vermelho representa o último robô a ser líder da formação.

Figura 7.24: Controle Quase-LPV com Realimentação da Saída de RMRs em Formação.

Os erros de direção dos robôs durante a trajetória com alternância de líderes, são mostrados na Figura 7.25, na qual observa-se que os distúrbios foram rejeitados adequadamente.

Nas Figs. 7.26 e 7.27 são mostrados os distúrbios e torques, respectivamente, aplicados nas rodas atuadas.

Figura 7.25: Erros de Direção dos Robôs.

Figura 7.26: Distúrbios Aplicados nas Rodas Direita e Esquerda dos Robôs.

Figura 7.27: Torques Aplicados nas Rodas Direita e Esquerda dos Robôs.

7.2.3 Simulação do Controlador Mudando o Tipo de Trajetória

Os resultados mostrados anteriormente, foram obtidos de modo que os robôs seguissem um trajetória retilínea, ou seja, fazendo $k = 0$.

Uma nova simulação foi então efetuada fazendo $k = 0.2$. Para esta nova simulação obteve-se a trajetória mostrada na Figura 7.28.

Figura 7.28: Controle Quase-LPV com Realimentação da Saída de RMRs em Formação.

7.3 Controlador Markoviano

Para o controle tolerante a falhas, foi considerada como falha a remoção do líder de uma formação composta por três robôs ($N = 3$). Assim, o sistema inicia o movimento coordenado com um conjunto de três robôs e durante o movimento o robô líder inicial é removido. Imediatamente um segundo robô assume a liderança até que o movimento seja finalizado. Perceba que neste experimento não está sendo considerada a alternância aleatória de líder. Considera-se também que um ponto de linearização em 1 rad/s caracterize ambos os cenários pré e pós falha para calcular as respectivas matrizes dinâmicas do sistema linear, ou seja, $\Psi = 1$. Portanto, temos 2 estados Markovianos, um para cada formação. Seguindo a notação apresentada no Capítulo 6, o conjunto de matrizes dinâmicas do modelo Markoviano é dado por $A_\Theta = ({}_0A^1, {}_1A^1)$, sendo que 0 à esquerda de A significa que o movimento coordenado evolui inicialmente com todos os robôs e 1 significa que houve uma falha e o robô 1 foi excluído da formação. Para esse modelo Markoviano $\Theta = \{1, 2\}$.

As taxas de transição entre os estados Markovianos são agrupadas em uma matriz de taxa de transição Λ de dimensão 2×2 . A matriz Λ é particionada nas seguintes submatrizes:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{p1} & \Lambda_f \\ \Lambda_0 & \Lambda_{p2} \end{bmatrix}.$$

As submatrizes Λ_{p_i} mostram as relações entre os pontos de operação, e a submatriz diagonal Λ_f determina a probabilidade de ocorrência de falha. Depois da falha ter ocorrido o sistema muda para a segunda linha de Λ , e Λ_0 mostra que a formação inicial não pode ser recuperada. Para o problema em questão, a matriz de taxa de transição Λ foi selecionada como sendo:

$$\begin{aligned} \Lambda_{p1} &= -0.6, & \Lambda_{p2} &= 0, \\ \Lambda_f &= 0.6, & \Lambda_0 &= 0. \end{aligned}$$

Figura 7.29: Trajetória dos Robôs com Controlador Markoviano.

A Figura 7.29 mostra os resultados experimentais da trajetória efetuada pela formação utilizando o controlador Markoviano via realimentação de saída. Inicialmente o líder da formação era o robô representado pelo círculo em vermelho, e, em t_d este robô foi removido e a falha detectada. A partir deste instante, o robô 2 assumiu a liderança da formação (indicado na figura pelo círculo verde). Note que as linhas tracejadas na Figura 7.29 denotam as trajetórias desejadas dos RMRs e a linha contínua a trajetória real. Também são mostrados nas Figuras (7.30), (7.31) e (7.32) os erros de direção dos robôs durante a trajetória. Das simulações obtidas, observa-se que após a ocorrência da falha o sistema mantém a estabilidade com os robôs em movimento coordenado durante a reconfiguração do controle.

Figura 7.30: Erro de direção do Robô 1 com Controlador Markoviano.

Figura 7.31: Erro de direção do Robô 2 com Controlador Markoviano.

Figura 7.32: Erro de direção do Robô 3 com Controlador Markoviano.

Capítulo 8

Conclusão

Neste trabalho, foram desenvolvidas estratégias de controle para o movimento coordenado de robôs móveis através de três abordagens: controle de formação, controle cinemático e controle dinâmico.

Inicialmente utilizou-se o controle de formação para um conjunto de RMRs de modo que estes robôs se alternassem na liderança da formação e fossem capazes de desviar de obstáculos. Os resultados obtidos foram satisfatórios, porém, este tipo de controle não considera as restrições cinemáticas e dinâmicas dos robôs. Assim, foram projetados dois controladores robustos que consideram o modelo dinâmico dos robôs. Sendo que para estes controladores utilizou-se como trajetória de referência as trajetórias desejadas geradas pelo controle de formação.

O primeiro controlador projetado foi o controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via realimentação de estado que foi utilizado para atenuar os efeitos das incertezas paramétricas e distúrbios externos, de modo que os robôs conseguissem seguir a trajetória desejada e mantivessem a formação em relação ao líder. Simulando este controlador observou-se que os distúrbios externos foram atenuados e os robôs convergiram para a formação.

O segundo controlador foi projetado através de uma estratégia de controle baseada no controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear por realimentação da saída, que foi utilizado para o problema de controle de RMRs em formação com alternância de líderes e sujeitos a distúrbios externos. Foram realizadas diversas simulações nas quais obteve-se êxito na alternância de líderes durante o movimento coordenado e na atenuação dos distúrbios, contudo, verificou-se que este controlador é robusto apenas quando distúrbios pequenos são aplicados aos robôs.

Por último, foi proposta uma estratégia de controle tolerante a falhas para garantir a esta-

bilidade da formação quando há perda de um dos robôs, mesmo que este robô seja o líder. O controle tolerante a falhas é baseado em controle $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação da saída de sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos.

Foram mostrados exemplos de simulação nos quais a alternância de líder pode ocorrer com ou sem a ocorrência de uma falha.

Verificou-se que a garantia de estabilidade é assegurada tanto na estratégia de controle robusta quanto na estratégia tolerante a falhas. Sendo a troca de informações entre os robôs móveis, realizada de maneira sistematizada de acordo com um grafo de comunicação direcionado, definido a-priori.

Este trabalho tem uma significativa contribuição no que diz respeito ao projeto de controladores para sistemas dinâmicos, quando há robôs em formação e sujeitos à alternância de líder ou remoção de robôs, uma vez que não foram encontrados na literatura procedimentos de controle para resolver problemas desta natureza.

Como trabalho futuro pretende-se aprofundar o estudo sobre o controlador Markoviano inserindo a falha no modelo dinâmico dos robôs e, implementar estes controladores em protótipos robóticos que estão sendo adquiridos pelo *Laboratório de Sistemas Inteligentes*.

Referências Bibliográficas

- AICARDI, M., CASALINO, G., BICCHI, A., & BALESTRINO, A. (1995). Closed loop steering of unicycle like vehicles via Lyapunov techniques. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 2(1):27–35.
- ALMEIDA, J., PEREIRA, F. L., & SOUSA, J. B. (1997). A hybrid feedback control system for a nonholonomic car-like vehicle. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 3, pages 2614 – 2619.
- APKARIAN, P. & ADAMS, R. (1998). Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 6(1):21–32.
- APKARIAN, P. & ADAMS, R. (1998). Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 6(1):21–32.
- ATHANS, M., CASTANON, D., DUNN, K. P., GREENE, C. S., LEE, W. H., SANDELL, N. R., & WILLSKY, A. S. (1977). The stochastic control of the F-8C aircraft using a multiple model adaptive control (MMAC) method - Part I: Equilibrium flight. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(5):768–780.
- BRUALDI, R. & RYSER, H. (1991). *Combinatorial Matrix Theory*. Cambridge University Press, USA.
- CAMPION, G., BASTIN, G., & D'ANDRÉA-NOVEL, B. (1996). Strutural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Model of Wheeled Mobile Robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(1):47–62.
- CHANG, Y. C. (2000). Neural Network-based $\mathcal{H}_\infty$ Tracking Control for Robotic Systems. *IEE Proceedings of Control Theory Applications*, 147(3):303–311.

- CHANG, Y. C. (2005). Intelligent Robust Control for Uncertain Nonlinear Time-Varying Systems and Its Application to Robotic Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, 35(6):1108–1119.
- CHANG, Y. C. & CHEN, B. S. (1997). A Nonlinear Adaptive $\mathcal{H}_\infty$ Tracking Control Design in Robotic Systems via Neural Networks. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 5(1):13–29.
- CHEN, B. S., CHANG, Y. C., & LEE, T. C. (1997). Adaptive control in robotic systems with $\mathcal{H}_\infty$ tracking performance. *Automatica*, 33(2):227–234.
- CHEN, B. S., LEE, T. S., & FENG, J. H. (1994). A nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control design in robotic systems under parameter perturbation and external disturbance. *International Journal of Control*, 59(2):439–461.
- CHUNG, F. R. K. (1997). Spectral Graph Theory. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Providence, RI: American Mathematical Society.
- COELHO, P. & NUNES, U. (2003). Lie Algebra Application to Mobile Robot Control: A Tutorial. *Robotica*, 21(5):483 – 493.
- COELHO, P. & NUNES, U. (2003). Lie algebra application to mobile robot control: A tutorial. *Robotica*, 21(5):483–493.
- COWAN, N., SHAKERINA, O., VIDAL, R., & SATRY, S. (2003). Vision-based follow-the-leader. In *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intelligent Robots and Systems*, pages 1796–1801.
- CRAIG, J. (1985). *Adaptive Control of Mechanical Manipulators*. Addison-Wesley.
- de Farias, D. P., GEROMEL, J. C., do Val, J. B. R., & COSTA, O. L. V. (2000). Output Feedback Control Of Markov Jump Linear Systems In Continuous-Time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(5):944–949.
- DESAI, J., OSTROWSKI, J., & KUMAR, V. (1998). Controlling Formations of Multiple Robots. In *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pages 2864–2869.
- DONALD, B., RUS, D., & JENNINGS, J. (1995). Moving furniture with teams of autonomous robots. In *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intelligent Robots and Systems*, pages 235–242.

-
- DOS REIS, G. A. (2005). Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear de Robôs Móveis com Rodas. Tese de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2005.
- FAX, J. & MURRAY, R. (2003). Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9):1465–1476.
- FAX, J. A. (2001). Optimal and cooperative control of vehicle formations. *Ph.D. dissertation, California Institute of Thechnology*.
- GAHINET, P. & APKARIAN, P. (1994). A linear matrix inequality approach to $\mathcal{H}_\infty$ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4(4):421–448.
- HUANG, Y. & JADBABAIE, A. (1998). Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ Control: An Enhanced Quasi-LPV Approach. In *IEEE International Conference on Decision and Control*, 37, Tampa, Florida, USA. Workshop in $\mathcal{H}_\infty$ nonlinear control by J. C. Doyle, Caltech.
- HWANG, C. K., CHEN, B. S., & CHANG, Y. T. (2004). Combination of Kinematical and Robust Dynamical Controllers for Mobile Robotics Tracking Control: (I) Optimal $\mathcal{H}_\infty$ Control. In *Proceedings IEEE International Conference on Control Applications*, pages 1205–1210.
- JIANG, Z.-P. & NIJMEIJER, H. (1999). A recursive technique for tracking control of non-holonomic systems in chained form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(2):265 – 279.
- KANAYAMA, Y., KIMURA, Y., MIYAZAKI, F., & NOGUCHI, T. (1990). A Stable Tracking Control Method for an Autonomous Mobile Robot. In *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 384 – 389.
- KRUPPA, H., FOX, D., BURGARD, W., & THRUN, S. (2000). A probabilistic approach to collaborative multirobot localization. *Auton. Robots*, pages 325–344.
- LAFERRIERE, G., CAUGHMAN, J., & WILLIAMS, A. (2004). Graph Theoretic methods in the stability of vehicle formations. *ACC2004*, pages 3724–3729.
- LAFERRIERE, G., WILLIAMS, A., CAUGHMAN, J., & VEERMAN, J. J. P. (2005). Decentralized control of vehicle formations. *Systems and Control Letters*.

- LEE, T.-C., SONG, K.-T., LEE, C.-H., & TENG, C.-C. (2001). Tracking control of unicycle-modeled mobile robots using a saturation feedback controller. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 9(2):305 – 318.
- LEWIS, F. L., ABDALLAH, C. T., & DAWSON, D. M. (1993). *Control of robot manipulators*. Macmillan., New York.
- LEWIS, M. & TAN, K. (1997). High Precision Formation Control of Mobile Robots Using Virtual Structures. *Autonomous Robots*, 4(6):387–403.
- M'CLOSKEY, R. T. & MURRAY, R. M. (1997). Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 42(5):614 – 628.
- MORIN, P. & SAMSON, C. (2000). Practical stabilization of a class of nonlinear systems. Application to chain systems and mobile robots. In *IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2989 – 2994.
- NILSSON, M., MATARIC, M., & SIMSARIAN, K. (1995). Cooperative multi-robot box pushing. In *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intelligent Robots and Systems*, pages 556–561.
- OLFATI-SABER, R. & MURRAY, R. M. (2002). Distributed Structural Stabilization and Tracking for Formations of Dynamic Multiagents. *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, pages 209–215.
- POSTLETHWAITE, I. & BARTOSZEWICZ, A. (1998). Application of non-linear $\mathcal{H}_\infty$ control to the Tetrabot robot manipulator. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers - Part I - Journal of Systems and Control Engineering*, 212(16):459–465.
- REN, W. & BEARD, R. (2003). A Decentralized Scheme for Spacecraft Formation Flying Via the Virtual Structure Approach. In *Proceeding of American Control Conference*, pages 1746–1751.
- SAMSON, C. (1995). Control of Chained Systems Application to Path Following and Time-Varying Point-Stabilization of Mobile Robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(1):64–77.
- SARIDIS, G. N. (1983). Intelligent robotic control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28(5):547–557.

-
- SARKAR, N., YUN, X., & KUMAR, V. (1994). Control of Mechanical Systems with Rolling Constraints: Application to Dynamic Control of Mobile Robots. *Int. J. Rob. Res.*, 13(1):55–69.
- SCHARF, D. P., HADAEGH, F. Y., & PLOEN., S. R. (2004). A survey of space formation flying guidance and control (part 2). *in Proceedings of American Control Conference*.
- SIQUEIRA, A. A. G. & TERRA, M. H. (2004). Nonlinear and Markovian $\mathcal{H}_\infty$ Controls of Underactuated Manipulators. *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, 12(6):811–826.
- SIQUEIRA, A. A. G. & TERRA, M. H. (2004). Nonlinear and Markovian $\mathcal{H}_\infty$ Controls of Underactuated Manipulators. *IEEE Transactions on Control System Tecnology*, 12(6):811–826.
- SIQUEIRA, A. A. G., TERRA, M. H., & BUOSI, C. (2007). Fault-tolerant robot manipulators based on output-feedback $\mathcal{H}_\infty$ controllers. *Journal of Robotic and Autonomous Systems*, 55(10):785–794.
- STILWELL, D. & BAY, J. (1993). Toward the development of a material transport system using swarms of ant-like robots. In *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pages 766–771.
- SUGAR, T. & KUMAR, V. (2000). Control and coodination of multiple robots in manipulation and material handling tasks. *Experimental Robotics VI: Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 250(2000):15–24.
- SWORDER, D. D. & ROGERS, R. O. (1983). An LQ-solution to a control problem associated with a solar thermal central receiver. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28(10):971–978.
- TANNER, H., PAPPAS, G., & KUMAR, V. (2004). Leader-to-Formation Stability. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 20(1):443–455.
- VEERMAN, J. J. P., LAFFERRIERE, G., CAUGHMAN, J. S., & WILLIAMS, A. (2004). Flocks and formations. *Submitted to J. Stat. Phys.*
- VENDITTELLI, M. & ORIOLO, G. (2000). Stabilization of the general two-trailer system. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, pages 1817 – 1823.

- WHELAN, G., JENNINGS, J., & EVANS, W. (1997). Cooperative Search and Rescue with a Team of Mobile Robots. *IEEE Int. Conf. Advanced Robotics*, pages 193–200.
- WILLIAMS, A., L. G. & VEERMAN, J. (2005). Stable motions of vehicles formations. *Proceedings of the 44th. IEEE Conference on Decision and Control, Seville, Spain*, pages 72–77.
- WU, F. (1995). *Control of linear parameter-varying systems*. 150p. PhD Thesis - Department of Mechanical Engineering, University of California, Berkeley. 1995.
- WU, F., YANG, X. H., PACKARD, A., & BECKER, G. (1996). Induced L_2 norm control for lpv systems with bounded parameter variation rates. *International journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(9-10):983–998.
- WU, F., YANG, X. H., PACKARD, A., & BECKER, G. (1996). Induced $\mathcal{L}_2$ -Norm Control for LPV Systems With Bounded Parameter Variation Rates. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(9-10):983–998.

Apêndice A

Análise da Formação sujeita à Alternância de Líderes

Neste Capítulo, foi feita uma análise da formação de robôs móveis quando submetidos a alternância de líderes, utilizando a teoria apresentada no Capítulo 3.

A.1 Trajetória da Formação

Na Seção 3.2 do Capítulo 3 vimos que a dinâmica dos N robôs móveis da formação é dada pela Equação (3.1), reproduzida a seguir:

$$\dot{x}_i = A_{veh}x_i + B_{veh}u_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad x_i \in \mathbb{R}^{2n} \quad (\text{A.1})$$

Também vimos que as matrizes A_{veh} e B_{veh} são dadas por (veja a Seção 3.2):

$$\mathbf{A}_{veh} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_{veh} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Deste modo, substituindo a Equação (A.2) em (A.1) tem-se:

$$\dot{x}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{pmatrix} x_i + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_i \quad (\text{A.3})$$

Porém, sabe-se que:

$$x_i = (x; \dot{x}; y; \dot{y}) \quad (\text{A.4})$$

Assim, substituindo (A.4) em (A.3) vem:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Logo, de (A.5) segue que:

$$\begin{cases} \ddot{x} = a_{22}\dot{x} + a_{24}\dot{y} + u_1 \\ \ddot{y} = a_{42}\dot{x} + a_{44}\dot{y} + u_2 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Escolhendo: $a_{22} = 0$, $a_{24} = -k$, $a_{42} = k$, $a_{44} = 0$ e supondo $u = [0 \ 0]$ tem-se:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -k\dot{y} \\ \ddot{y} = k\dot{x} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Fazendo, $k = 0$:

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{y} = 0$$

Deste modo, integrando x e y em relação ao tempo:

$$\dot{x} = c_1 \quad \text{e} \quad \dot{y} = c_2$$

Integrando novamente obtém-se:

$$x = c_1 t \quad \text{e} \quad y = c_2 t$$

Assim, chega-se à seguinte equação:

$$y = \frac{c_2}{c_1} x \quad (\text{A.8})$$

A equação (A.8) corresponde à equação da reta, logo, para $k = 0$ a trajetória da formação será retilínea.

Ainda, da equação (A.7) é possível concluir que o tipo de trajetória efetuado pela formação de RMRs é determinado pelo valor de k .

Apêndice B

Programa para Alternância de Líderes

Este programa foi elaborado através do software MATLAB, utilizando a teoria dos grafos para analisar a formação dos robôs móveis sujeita a alternância de líderes.

```
% Controle de Formação dos Robôs Móveis(1)
```

```
clear all
```

```
close all
```

```
clc
```

```
% Dy=Ay+Bu (Modelo que irá definir o controle de Formação do Robô-  
           %tipo de trajetória do robô)
```

```
% O Estado y é definido como: y=[x;Dx;y;Dy]
```

```
vet_cor = [0 0 0 0 0 0];
```

```
k=0; % k=0 Define uma Trajetória em Linha Reta
```

```
A= [0,1,0,0;  
    0,0,0,-k;
```

```
    0,0,0,1;
    0,k,0,0];
B= [0,0;
    1,0;
    0,0;
    0,1];

N=6;
% Matriz de Adjacência - Linha: Recebe Informação, Coluna: Envia Informação

Adj=alter(1);
%vet_cor = corlider(1,vet_cor);

% Formação com seis Veículos
h1 = [6;0];           % Posição do veículo 1
h2 = [3;2];           % Posição do veículo 2
h3 = [3;-2];          % Posição do veículo 3
h4 = [0;4];           % Posição do veículo 4
h5 = [0;0];           % Posição do veículo 5
h6 = [0;-4];          % Posição do veículo 6
hp = [h1;h2;h3;h4;h5;h6]; % Vetor de Posição
h = kron(hp,[1;0]);    % Formação - Produto de Kronecker

% Matriz Diagonal (Vide Teoria dos Grafos)
diagonal=sum(Adj');
D=diag(diagonal);

% Laplaciano Direcionado (Vide Veerman 2004)
L=D-Adj;
eigL1=eig(L);

% Lei de Realimentação (Ganhos)
```

```
F=[-100,-100,0,0;0,0,-100,-100];
```

```
% Condições Iniciais dos Seis Robôs Móveis, sendo y=[x;Dx;y;Dy]
```

```
y11=[0;8;4;8];
```

```
y21=[0;8;6;8];
```

```
y31=[0;8;2;8];
```

```
y41=[0;8;14;8];
```

```
y51=[0;8;12;8];
```

```
y61=[0;8;10;8];
```

```
% Vetor de Condições Iniciais
```

```
y0=[y11;y21;y31;y41;y51;y61];
```

```
Ae=kron(eye(N),A);      % Representa as Trajetórias dos Veículos
                        %quando em Formação
```

```
Be=kron(eye(N),B);
```

```
Fe=kron(eye(N),F);      % Lei de Controle Descentralizada onde a mesma
Lei de Realimentação é aplicada a todos os veículos
```

```
Le=kron(L,eye(4));
```

```
form_1=Ae+Be*Fe*Le;
```

```
eig1=eig(form_1);
```

```
amostragem=0.007;
```

```
t_final=14;
```

```
num_iter=t_final/amostragem;
```

```
t=(1:num_iter)*amostragem;
```

```
y(:,1)=y0;
```

```
% Dy{: ,i}=0
```

```
for i=1:num_iter
```

```
    if i==400
```

```
Adj=alter(2);
vet_cor = corlider(2,vet_cor);

end
if i==650
Adj=alter(4);
vet_cor = corlider(4,vet_cor);

end
if i==950
Adj=alter(6);
vet_cor = corlider(6,vet_cor);
end
if i==1250
Adj=alter(5);
vet_cor = corlider(5,vet_cor);
end
if i==1550
Adj=alter(3);
vet_cor = corlider(3,vet_cor);

end
% Matriz Diagonal (Vide Teoria dos Grafos)
diagonal=sum(Adj');
D=diag(diagonal);
% Laplaciano Direcionado (Vide Veerman 2004)
L=D-Adj;
Le=kron(L,eye(4));

Dy(:,i+1)=Ae*y(:,i)+Be*Fe*Le*(y(:,i)-h);
y(:,i+1)=y(:,i)+Dy(:,i+1)*amostragem;

end
```

```
nomode=0;

% Gráficos da Trajetória da Formação

y=y';

% Animação da Trajetória Feita Pelos Robôs

xoutpx=y(:,1:4:4*N);
xoutpy=y(:,3:4:4*N);
last=length(y);

% Inicia a Plotagem
figure(1)
clf
plot(y11(1),y11(3),'xr')
hold on
plot(y21(1),y21(3),'x')
plot(y31(1),y31(3),'x')
plot(y41(1),y41(3),'x')
plot(y51(1),y51(3),'x')
plot(y61(1),y61(3),'x')

left=min(min(y(:,1:2:4*N)));
right=max(max(y(:,1:2:4*N)));
scale=(right-left)/30;
axis([left-scale,right+scale,left-scale,right+scale])
axis('square')

if nomode == 1
    % Não computamos a trajetória.
else
    % Imprimimos cada um assim frequentemente pode-se visualizar o
    % parâmetro do tempo
    % Mostra primeiro a janela do gráfico.
```

```
shg
timestep=1;

% Gráfico que Plota a Animação da Trajetória dos Robôs

vet_cor = [0 0 0 0 0 0];
[vet_cor veh] = corlider(1,vet_cor);
for index=1:timestep:last;
    if (index==400)
        [vet_cor veh] = corlider(2,vet_cor);
    elseif (index==650)
        [vet_cor veh] = corlider(4,vet_cor);
    elseif (index==950)
        [vet_cor veh] = corlider(6,vet_cor);
    elseif (index==1250)
        [vet_cor veh] = corlider(5,vet_cor);
    elseif (index==1550)
        [vet_cor veh] = corlider(3,vet_cor);
    end
    for vn=1:N
        set(veh(vn),'Xdata',xoutpx(index,vn),'Ydata',xoutpy(index,vn));
    end
    drawnow
end
hold off
end
```