**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

Rafael Fernando Quirino Magossi

**Projeto de controladores PID com índice de desempenho
 $\mathcal{H}_\infty$ e com mitigação seletiva de harmônicos**

São Carlos

2019

Trata-se da versão corrigida da dissertação. A versão original se encontra disponível na EESC/USP que aloja o Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica.

Rafael Fernando Quirino Magossi

**Projeto de controladores PID com índice de desempenho
 $\mathcal{H}_\infty$ e com mitigação seletiva de harmônicos**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos

Orientadora: Profa. Dra. Vilma Alves de Oliveira

**São Carlos
2019**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTA TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E
PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

S856m Magossi, Rafael Fernando Quirino
Projeto de controladores PID com índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ e com mitigação seletiva de harmônicos / Rafael Fernando Quirino Magossi ; orientadora Vilma Alves de Oliveira.
– São Carlos, 2019.
108 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas Dinâmicos – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2019.

1. LaTeX. 2. abnTeX. 3. Classe USPSC. 4. Editoração de texto. 5. Normalização da documentação. 6. Tese. 7. Dissertação. 8. Documentos (elaboração). 9. Documentos eletrônicos. I. Oliveira, Vilma Alves de, orient. II. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: **RAFAEL FERNANDO QUIRINO MAGOSS**

Título da dissertação: "Projeto de controladores PID com índice de desempenho H_{∞} com mitigação seletiva de harmônicos"

Data da defesa: 28/01/2019

Comissão Julgadora:

Resultado:

Profª. Titular **Vilma Alves de Oliveira**
(Orientadora)
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Profª. Drª. **Grace Silva Deaecto**
(Universidade Estadual de Campinas/Unicamp)

Aprovado.

Prof. Dr. **Flávio Andrade Faria**
(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/Unesp)

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica:
Prof. Titular **Luís Fernando Costa Alberto**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Titular **Luís Fernando Costa Alberto**

Este trabalho é dedicado aos meus pais, José Magossi e Maria Quirino.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, José Aparecido Magossi e Maria Conceição Quirino, por todo suporte material e emocional durante esses anos.

À minha orientadora, Prof. Dra. Vilma Alves de Oliveira, pela amizade e por ter me acolhido no início da minha graduação e ter me concedido conhecimento técnico e sabedoria para além de uma vida acadêmica.

Ao Prof. Dr. Ricardo Quadros Machado, pela amizade e por todo conhecimento transmitido na engenharia, pela colaboração direta e companheirismo durante a pesquisa.

Ao Prof. Dr. Shankar P. Bhattacharyya, por acreditar em mim e nas minhas ideias, pela colaboração na pesquisa e o acolhimento durante meu estágio de pesquisa na Texas A&M.

À minha companheira Micheli Mateus, pelo suporte emocional e afetivo, além de sugestões globais no corpo do trabalho.

À minha amiga Maria Isabel pelo ombro amigo, ouvido atencioso, e palavras de sabedoria proferidas nos momentos difíceis e durante as celebrações, pelas jantas e conversas sem nexos, por aturar crises existenciais e pelas sugestões precisas.

Aos amigos Murilo Silveira Rocha e Karoline Teixeira Pereira, pelos anos de amizade, apoio, conversas e madrugadas em claro.

Aos parceiros de laboratório Mateus Quinália, Marina Carvalho, Klebber Araújo, Guilherme Fuzato, Rayza Araújo, Plínio Ferreira, Ana Oliveira, Elian Agnoletto, Elmer Gamboa, Heitor Mercaldi, Mário Botega, Rodrigo Barriviera, Rodolpho Vilela, Daniel Castro, Wagner Leal e Thales Fagundes pelos diálogos e suporte.

À secretária do departamento de engenharia elétrica, Jussara Ramos, por sempre estar disposta a ajudar os alunos, sempre mantendo sua simpatia e solicitude.

À Universidade de São Paulo, por proporcionar recursos para uma formação ímpar.

À FAPESP pela bolsa no país concedida sob processo 2016/21120-2 e pela bolsa estágio de pesquisa no exterior (BEPE) 2017/21577-5, para realização deste trabalho.

À todos os funcionários da EESC e do departamento de engenharia elétrica e computação.

*“... Sou um técnico, mas tenho técnica só dentro da técnica.
Fora disso sou doido, com todo o direito a sê-lo.”*
Álvaro de Campos

RESUMO

MAGOSSI, R. F. Q. **Projeto de controladores PID com índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ e com mitigação seletiva de harmônicos**. 2019. 108p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

Os controladores Proporcional+Integral+Derivativo (PID) são largamente empregados na indústria devido à sua estrutura contendo ações integral e derivativa e por possuir ordem fixa. Na literatura, encontram-se vários métodos para a sua sintonia. Nesse trabalho é apresentada uma forma de obter a sintonia do PID utilizando o índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ de forma não-iterativa. Essa sintonia é feita utilizando-se a representação em espaço de estado na forma canônica controlável. No entanto, como trata-se de um controlador de ordem fixa, variações na planta podem interferir de forma significativa no desempenho desejado e precisam ser compensadas. Assim, propõe-se também uma adaptação dos parâmetros do PID de modo a manter a função de transferência de malha fechada o mais próximo possível da nominal utilizada na sintonia. Para isso, modela-se a estrutura de controle como um sistema linear sobre-determinado com restrições lineares, advindos de conjuntos estabilizantes baseados no conceito de assinatura Hurwitz, e utiliza-se um método de otimização quadrática para obter os parâmetros do controlador. Para circunvir o conservadorismo da norma $\mathcal{H}_\infty$, um método para mitigar apenas o efeito de algumas harmônicas na saída do sistema também é proposto, restringindo-se a sensibilidade do sistema que é representada por elipses no lugar geométrico dos ganhos estabilizantes do PID. Simulações no software Matlab, Simulink e PSIM foram utilizadas para validar os modelos e metodologias propostas. Resultados experimentais demonstraram a eficácia do método para mitigação de harmônicos em um conversor CC-CC do tipo boost.

Palavras-chave: Controle. Eletrônica de potência. Energia renovável. Conversor CC-CC. Conjunto estabilizante. LMIs.

ABSTRACT

MAGOSSI, R. F. Q. **Design of PID controllers with $\mathcal{H}_\infty$ performance index and for selective harmonic mitigation.** 2019. 108p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

Proportional + integral + derivative (PID) controllers are widely used in the industry due to their structure containing integral and derivative actions and for having a fixed order. In the literature, there are several methods for PID tuning. In this work it is presented a way to obtain PID tuning using a non-iterative $\mathcal{H}_\infty$ design. This tuning is done using the state-space representation in the controllable canonical form. However, because it is a fixed-order controller, plant variations can significantly interfere with the desired performance and need to be compensated. Thus, it is also proposed to adapt the PID parameters so as to keep the closed-loop transfer function as close as possible to the nominal used in the tuning. For this, the control structure is modeled as an over-determined linear system with linear constraints, derived from stabilizing sets based on the Hurwitz signature concept, and a quadratic optimization method is used to obtain the controller parameters. In order to circumvent the conservatism of the norm $\mathcal{H}_\infty$, a method to mitigate only the effect of selected harmonics on the output of the system is also proposed, constraining the sensitivity function of the system which is represented by ellipses in the stabilizing gains locus of the PID. Simulations in Matlab, Simulink and PSIM softwares were used to validate the proposed models and methodologies. Experimental results demonstrated the effectiveness of the harmonic mitigation method in a boost DC–DC converter.

Keywords: Control. Power electronics. Renewable energy. DC - DC converter. Stabilizing set. LMIs.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Circuito equivalente.	33
Figura 2.2 – Conversor CC–CC boost com painel fotovoltaico representado pelo equivalente de Thévenin.	35
Figura 2.3 – Variação de $R_{th}[\Omega]$ e $V_{th}[V]$ durante a busca do ponto de máxima potência.	36
Figura 2.4 – Diagrama de polos e zeros do conversor com o painel em relação ao ciclo de trabalho durante a busca do ponto de máxima potência. . . .	36
Figura 2.5 – Espaço possível de solução para k_p	44
Figura 2.6 – Conjunto estabilizante para $k_p = -18$	47
Figura 2.7 – Conjunto estabilizante completo após varredura de $k_p \in (-24,7513,1)$. .	47
Figura 2.8 – Os pontos onde ocorre a interseção entre a elipse e a reta dentro do conjunto estabilizante garantem a margem de fase para o controlador PI. .	49
Figura 2.9 – Os pontos onde ocorre a interseção entre a elipse e a reta dentro do conjunto estabilizante garantem a margem de fase para o controlador PID.	50
Figura 2.10–Conjunto estabilizante (em amarelo) com imposição de da restrição em margem de fase (elipse azul e reta vermelha) e norma $\mathcal{H}_\infty$ (exterior as elipses tracejadas em preto).	51
Figura 2.11–Margens de estabilidade para o controlador projetado.	52
Figura 2.12–Norma $\mathcal{H}_\infty$ para o controlador projetado.	52
Figura 3.1 – Malha de controle com realimentação unitária sob distúrbio.	54
Figura 3.2 – Detalhes de $P(s)$	54
Figura 3.3 – Resposta em frequência de S_{yw} mostrando que $\ S_{yw}\ _\infty < \rho$	60
Figura 3.4 – Resposta em frequência de S_{yw} mostrando que $\ S_{yw}\ _\infty < \rho$	62
Figura 3.5 – Resposta ao degrau do sistema comparando situação nominal proje- tada, planta alterada com controlador nominal e a planta alterada com controlador otimizado por mínimos quadrados sem restrições de estabilidade.	65
Figura 3.6 – Conversor boost ideal.	66
Figura 3.7 – Resposta ao degrau do sistema comparando situação nominal proje- tada, planta alterada com controlador nominal e a planta alterada com controlador otimizado com restrições lineares de estabilidade.	68
Figura 4.1 – Os ganhos do conjunto estabilizante que satisfaz a condição de mitigação harmônica está fora das elipses.	74
Figura 4.2 – Conjunto estabilizante com restrições para amplitude dos harmônicos. .	76
Figura 4.3 – Magnitude da resposta em frequência de $S_u(j\omega)$ para o controlador ■.	76

Figura 4.4 – Magnitude da resposta em frequência de $S_u(j\omega)$ para o controlador $\blacklozenge$. .	77
Figura 4.5 – Magnitude da resposta em frequência de $S_u(j\omega)$ para o controlador $\blacktriangle$. .	78
Figura 4.6 – Magnitude da resposta em frequência de $S_u(j\omega)$ para o controlador $\bullet$. .	78
Figura 4.7 – Resposta ao degrau para o sistema com o controlador $\bullet$	79
Figura 4.8 – Transformada de Fourier para o sinal de saída usando o controlador $\bullet$.	79
Figura 5.1 – Conversor boost.	81
Figura 5.2 – Esquemático de simulação no PSIM.	84
Figura 5.3 – Validação do modelo linearizado do conversor boost.	85
Figura 5.4 – Modelo linearizado do conversor boost sob grandes perturbações	86
Figura 5.5 – Validação do modelo linearizado do conversor boost para o conjunto de plantas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$	87
Figura 5.6 – Conteúdo harmônico da saída e entrada de $\mathcal{P}_1$ simulado.	88
Figura 5.7 – Conteúdo harmônico da saída e entrada de $\mathcal{P}_2$ simulado.	88
Figura 5.8 – Conjunto estabilizante que satisfazem requisitos de projeto para $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$. 89	
Figura 5.9 – Tensão de saída do conversor boost para as combinações de controladores e plantas, atendendo amplitude de 5V para o harmônico de 5 Hz. . . .	90
Figura 5.10–Comportamento da tensão de saída do conversor boost durante <i>gain scheduling</i>	92
Figura 5.11–Conjunto estabilizante considerando somente margem de fase de 60 graus como requisito de projeto.	93
Figura 5.12–Comparação do sistema com e sem a técnica <i>gain scheduling</i> considerando-se os controladores da Tabela 5.6.	93
Figura 5.13–Bancada experimental com conversor boost e dSpace para emular fonte de alimentação.	95
Figura 5.14–Sistema em malha aberta operando em $\mathcal{P}_1$. Em amarelo a tensão de saída do conversor e em azul a tensão de entrada com 40V/div e 500ms/div.	95
Figura 5.15–Conteúdo harmônico da saída e entrada de $\mathcal{P}_1$ experimental.	96
Figura 5.16–Sistema em malha aberta operando em $\mathcal{P}_2$. Em amarelo a tensão de saída do conversor e em azul a tensão de entrada com 40V/div e 500ms/div.	96
Figura 5.17–Conteúdo harmônico da saída e entrada de $\mathcal{P}_2$ experimental.	97
Figura 5.18–Fechamento da malha de controle considerando $\mathcal{C}_1$ com conversor operando próximo ao ponto de operação $\mathcal{P}_1$. Em amarelo a tensão de saída do conversor e em azul a tensão de entrada com 40V/div e 500ms/div.	97
Figura 5.19–Conteúdo harmônico da saída e entrada de $\mathcal{P}_1$ utilizando $\mathcal{C}_1$ experimental em malha fechada.	98
Figura 5.20–Fechamento da malha de controle considerando $\mathcal{C}_2$ com conversor operando próximo ao ponto de operação $\mathcal{P}_2$. Em amarelo a tensão de saída do conversor e em azul a tensão de entrada com 40V/div e 500ms/div.	99

Figura 5.21—Conteúdo harmônico da saída e entrada de $\mathcal{P}_2$ utilizando $\mathcal{C}_2$ experimental em malha fechada.	99
Figura 5.22—Sistema operando em malha fechada alternando-se os controladores $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ de acordo com a tensão de entrada média. Em amarelo a tensão de saída do conversor e em azul a tensão de entrada com 40V/div e 500ms/div.	100

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Controladores selecionados para verificar o atendimento das especificações.	75
Tabela 5.1 – Requisitos de projeto para os controladores	81
Tabela 5.2 – Parâmetros do conversor boost	84
Tabela 5.3 – Conjunto de plantas a serem utilizadas para o projeto	86
Tabela 5.4 – Controladores que satisfazem os requisitos de projeto da Tabela 5.1. . .	90
Tabela 5.5 – Margens de estabilidade para combinações plantas e controladores da Tabela 5.4	90
Tabela 5.6 – Controladores que satisfazem os requisitos de projeto considerando somente margem de fase.	91
Tabela 5.7 – Margens de estabilidade para combinações plantas e controladores da Tabela 5.4	91
Tabela 5.8 – Componentes utilizados e parâmetros nominais do conversor boost experimental	94
Tabela 5.9 – Instrumentos de medição e transdutores utilizados	94
Tabela 5.10 – Comparação da mitigação do harmônico de 5 Hz utilizando os controla- dores projetados e do sistema em malha aberta	98

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Revisão bibliográfica	24
1.1.1	Sintonia de PIDs com índice $\mathcal{H}_\infty$	24
1.1.2	Conjunto estabilizante	25
1.1.3	<i>Gain scheduling</i>	25
1.1.4	Análise de robustez	27
1.1.5	Rejeição de distúrbios	27
1.2	Motivação e objetivos	28
2	PRELIMINARES	31
2.1	O equivalente de Thévenin pontual	31
2.1.1	Um modelo entrada-saída parametrizado	32
2.2	O equivalente de Thévenin para um painel solar	33
2.3	Norma $\mathcal{H}_\infty$ e realimentação de estado via LMI	37
2.4	Assinatura de um polinômio e conjunto estabilizante	39
2.4.1	Garantia de margem de fase e norma $\mathcal{H}_\infty$ no conjunto estabilizante	47
3	SINTONIA DE PIDS COM ÍNDICE $\mathcal{H}_\infty$	53
3.1	Sintonia de PID com limitação da norma $\mathcal{H}_\infty$	54
3.2	Proposta de adaptação do controlador PID	61
3.2.1	Solução via mínimos quadrados	63
3.2.2	Solução via otimização quadrática com restrições	65
3.3	Estabilidade no chaveamento de controladores em <i>gain scheduling</i>	68
4	SINTONIA DE PIDS PARA MITIGAÇÃO DE HARMÔNICOS	71
4.1	Rastreamento de referência e rejeição de distúrbios	71
4.1.1	Restrição da norma $\mathcal{H}_\infty$ na função de transferência do erro	72
4.2	Resultado principal	72
4.2.1	Controlador PI	73
4.2.2	Controlador PID	74
5	MITIGAÇÃO DE HARMÔNICO PARA CONVERSOR BOOST	81
5.1	Descrição do problema	81
5.2	Modelagem do conversor boost	81
5.2.1	Modelo chaveado e de pequenos sinais	82
5.2.2	Validação do modelo	83
5.2.3	Conteúdo harmônico do sistema em malha aberta	85

5.3	Projeto do controlador para mitigar harmônico	89
5.3.1	<i>Gain scheduling</i>	90
5.4	Resultados experimentais	93
5.4.1	Cenário 1 - Malha aberta $\mathcal{P}_1$	94
5.4.2	Cenário 2 - Malha aberta $\mathcal{P}_2$	94
5.4.3	Cenário 3 - Fechamento da malha com $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{P}_1$	94
5.4.4	Cenário 4 - Fechamento da malha com $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{P}_2$	98
5.4.5	Cenário 5 - Troca de controladores	98
6	CONCLUSÕES	101
6.1	Trabalhos publicados e submetidos	101
	REFERÊNCIAS	105

1 INTRODUÇÃO

Os controladores Proporcional+Integral+Derivativo (PID) são largamente empregados na indústria, apresentando boa rejeição a distúrbios e na literatura encontram-se diversos métodos de sintonia e ajuste dos seus ganhos (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995; KEEL; BHATTACHARYYA, 2008a). Recentemente, novas técnicas de sintonia de ganhos de controladores PID têm aparecido para considerar o problema de desconhecimento parcial ou completo do modelo da planta (BHATTACHARYYA; KEEL, 2009; KHADRAOUI; NOUNOU; NOUNOU; DATTA; BHATTACHARYYA, 2013). Abordagens analíticas para especificar margens de estabilidade considerando o desempenho atingível com controlador PI têm sido também consideradas para diferentes plantas (LI, 2013; ALZATE; OLIVEIRA, 2016). Os resultados envolvem a computação via programação linear de conjuntos estabilizantes e margens de ganho e fase de forma gráfica, e são utilizados nessa dissertação para sintonia dos controladores PID, pois o projeto gráfico permite maior flexibilidade ao projetista (BHATTACHARYYA; KEEL, 2009).

A dinâmica de plantas industriais geralmente não são completamente conhecidas e estão sujeitas a alterações. Para tratar do problema de variações de parâmetros e incertezas na planta, a abordagem de controle robusto e de controle adaptativo podem ser utilizadas. Cada abordagem tem seus méritos e desvantagens inevitáveis (BHATTACHARYYA; KEEL, 2009). Em controle robusto, o controlador projetado pode fazer o sistema manter-se estável mesmo na presença de incerteza da planta. Devido a erros de modelagem, o desempenho nominal do sistema muitas vezes não é garantido e assegurar a robustez do sistema pode resultar em um projeto cada vez mais conservador (BHATTACHARYYA; KEEL, 2009; HUANG; ROAN; JENG, 2002). Logo, nessa dissertação apresentou-se uma metodologia para o projeto de controladores PID garantindo robustez ao projeto ao mesmo tempo que a ordem do controlador é mantida fixa.

Por sua vez, no âmbito de controle adaptativo, teoria e aplicações para auto-ajuste têm sido extensivamente relatadas em trabalhos de pesquisa e livros. Para os controladores adaptativos, as especificações de desempenho são mantidas pela realização de auto-ajuste dos controladores quando o sistema se desvia do nominal. No entanto, há conflito entre a implementação do auto-ajuste dos controladores com os objetivos de controle, devido à necessidade de inserção de sinais para identificação em tempo real do sistema, algo essencial para controladores adaptativos. A estabilidade de controladores com auto-ajuste ainda é um desafio para os pesquisadores, apesar dos avanços na área (HUANG; ROAN; JENG, 2002). Assim, nessa dissertação estabeleceu-se uma estratégia de adaptação para controladores PID de forma simples utilizando a técnica *gain scheduling*.

1.1 Revisão bibliográfica

Esta seção apresenta uma revisão bibliográfica acerca dos principais tópicos associados ao trabalho desenvolvido: sintonia do PID, *gain scheduling*, programação linear e o conjunto estabilizante para PID's, e rejeição de distúrbios.

1.1.1 Sintonia de PIDs com índice $\mathcal{H}_\infty$

A parte crítica do projeto de um controlador PID é a sintonia dos ganhos para manter a estabilidade enquanto cumpre os requisitos de desempenho desejados, como o sobressinal, o tempo de acomodação e a robustez. Os primeiros métodos de ajuste foram principalmente baseados em frequência. Entre esses está o método de [Ziegler, Nichols e Rochester \(1942\)](#) que se tornou muito popular e serviu de base para uma série de abordagens de sintonias desenvolvidas mais tarde. Um procedimento de ajuste automático foi proposto por [Åström e Hägglund \(1984\)](#) baseando-se em especificações de margem de fase e ganho.

Métodos analíticos também foram desenvolvidos. Em [Datta, Ho e Bhattacharyya \(2000\)](#), o conjunto completo de todos os controladores PID estabilizadores é dado para plantas de ordem arbitrárias. A abordagem utilizada é baseada nas fórmulas de assinatura de polinômios. Em [Kiam Heong Ang, Chong e Yun Li \(2005\)](#), o objetivo de controle é expresso por uma função de custo. Outros métodos de projeto baseados em critérios de controle ótimos também foram desenvolvidos ([PRUSTY; PADHEE; PATI; MAHAPATRA, 2015](#)), ([SÁNCHEZ; VISIOLI; VILANOVA, 2017](#)). Esses métodos fornecem uma maneira sistemática de obter os ganhos do controlador enquanto asseguram o desempenho especificado, mesmo em casos de múltiplos objetivos. Em [Musch e Steiner \(1997\)](#), os ganhos do PID são obtidos a partir da solução de um problema de otimização em que a função objetivo é a norma $\mathcal{H}_\infty$. Em específico, o problema não é convexo e é resolvido através de uma abordagem de programação quadrática seqüencial ([GILL; MURRAY; WRIGHT, 1981](#)). Em [Bevrani e Hiyama \(2007\)](#), um algoritmo iterativo de desigualdades matriciais lineares (ILMI) é proposto para resolver um problema de controle multi-objetivo. Nesse trabalho, o projeto do PID é formulado como uma realimentação estática da saída e os ganhos são obtidos resolvendo um problema de otimização formulado em termos de uma mistura dos desempenhos $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Por outro lado, [Shimizu \(2016\)](#) não usa métodos iterativos, mas um sistema aumentado com as derivadas da entrada é utilizado no projeto do PID. O uso das derivadas da entrada leva a derivadas da saída. Nesse contexto, o trabalho desenvolvido nessa dissertação não utiliza sistema aumentado e obtém os ganhos de um controlador PID para garantir o desempenho $\mathcal{H}_\infty$ via LMI não iterativo utilizando a forma canônica controlável podendo garantir convexidade.

1.1.2 Conjunto estabilizante

Encontrar maneiras de descrever todos os ganhos estabilizantes do PID em vez de encontrar um bom conjunto de ganhos para o PID tornou-se o centro de atenção de vários pesquisadores. Para um bom conjunto de parâmetros do controlador, geralmente um determinado conjunto de critérios de desempenho é otimizado. Entretanto, existem algumas condições de desempenho contraditórias, algumas das quais podem não ser óbvias na fase de concepção do controlador. Consequentemente, a otimização de alguns dos critérios de desempenho é geralmente conseguida ao custo da degradação de outros objetivos de desempenho que não foram considerados antes. Portanto, conhecer todos os controladores PID estabilizadores e usar essas informações no projeto do controlador pode ser extremamente útil (SÖYLEMEZ; MUNRO; BAKI, 2003).

Em Liang, Li e Hassan (2010), os autores utilizam um modelo de referência geral junto com o recurso de programação não-linear (inclusive programação quadrática) para otimizar um controlador baseado na função de sensibilidade e na função de transferência de malha fechada do sistema. Em (BHATTACHARYYA; KEEL, 2009) os autores utilizam a programação linear para obter os ganhos estabilizantes dos controladores de ordem fixa. Essa abordagem, além de ser computacionalmente eficiente, mostrou importantes propriedades estruturais dos controladores PI e PID. Por exemplo, foi mostrado que para um ganho proporcional fixo, o conjunto de ganhos estabilizadores integrais e derivativos situam-se num conjunto convexo. Esse método é útil para tratar de sistemas estáveis ou instáveis, fase mínima ou não mínima (TAN; KAYA; YEROGLU; ATHERTON, 2006).

Diversos métodos na literatura podem ser encontrados para a determinação dos ganhos estabilizantes do PID. Em Ho, Datta e Bhattacharyya (1997) os autores utilizam uma generalização do teorema de Hermite-Biehler para encontrar o conjunto estabilizante do PID com o sistema. Já em Söylemez, Munro e Baki (2003) baseia-se na observação de que para um valor fixo de k_p , o conjunto resultante de PIDs estabilizantes forma um conjunto poliédrico no espaço de parâmetros bidimensionais e é consideravelmente mais simples e mais rápido determinar tais regiões. Em Alzate e Oliveira (2016) os autores utilizam o critério de Routh-Hurwitz para calcular o conjunto dos ganhos estabilizantes e então os relacionam com as margens de fase e ganho para atingir os critérios de desempenho desejados. Assim, resultados de (BHATTACHARYYA; KEEL, 2009; ALZATE; OLIVEIRA, 2016) são utilizados nessa dissertação.

1.1.3 Gain scheduling

De acordo com Åström, Hägglund, Hang e Ho (1993), o uso de controladores adaptativos e com *gain scheduling* já possui mais de 30 anos. O primeiro esquema de controlador adaptativo foi introduzido na indústria em 1983. Entretanto, ainda há uma certa confusão com respeito as terminologias usadas para técnicas de adaptação de controladores.

As técnicas mais usadas são:

- **Sintonia automática** – Conhecido também por *auto-tuning*, e traduzido como ajuste automático, se trata de uma técnica em que os parâmetros do controlador são ajustados sob demanda do usuário ou mesmo por equipamentos externos ao processo.
- **Controle adaptativo** – Trata de uma técnica onde os parâmetros dos controladores são ajustados de forma contínua para responder a dinâmicas do processo e a distúrbios.
- **Gain scheduling** – Pode ser traduzido para ganhos escalonados, e se trata de uma técnica de adaptação em que ao invés de usar um controlador não-linear no processo, o mesmo é controlado por vários controladores lineares projetados de acordo com as variações nas condições de operação. Por razões históricas, chama-se de ganho escalonado até alterações dos ganhos de controladores PID. Para realizar essa alteração dos ganhos é possível usar parâmetros do sistema, sinais de controle, variáveis de saída medidas ou mesmo sinais externos.

A escolha da técnica usada depende da aplicação e dos requisitos de projeto. Caso os requisitos de projeto não sejam extremamente rígidos, ou trata-se de um processo com dinâmica constante, um controlador com estrutura fixa pode ser usado. Se as dinâmicas passam a ser imprevisíveis, como desgastes, incrustação, mudanças na matéria-prima, não há como utilizar controladores de ganhos escalonados, nesse caso utiliza-se a adaptação contínua. Caso as variações possam ser previstas a partir de sinais medidos, o controlador com ganho escalonado pode ser usado por ser mais simples que um controlador com adaptação contínua (ÅSTRÖM; HÄGGLUND; HANG; HO, 1993).

O controlador com ganho escalonado é uma das soluções mais comumente utilizadas na indústria para superar as características não-lineares do processo através da adaptação dos ganhos do controlador em relação às bandas operacionais locais. Entretanto, esse escalonamento do ganho exige conhecimento detalhado do processo para definir bandas operacionais e testes de malha aberta que devem ser realizados para calibrar localmente o ganho do controlador dentro de cada banda (BLANCHETT; KEMBER; DUBAY, 2000). Soluções para escalonamento de ganho utilizando a lógica Fuzzy foram apresentadas em Zhao, Tomizuka e Isaka (1993), Blanchett, Kember e Dubay (2000). Essa dissertação propõe uma forma de escalar os ganhos de um controlador PID a fim de manter o desempenho e garantindo a estabilidade, sendo portanto, robusto as variações paramétricas do sistema.

1.1.4 Análise de robustez

A robustez pode ser analisada a partir da caracterização das incertezas da planta. Para incertezas do tipo multiplicativa, um critério de estabilidade pode ser obtido a partir do diagrama de Nyquist (KHADRAOUI; NOUNOU; NOUNOU; DATTA; BHATTACHARYYA, 2013). Também, para incertezas paramétricas o teorema de Kharitonov (BHATTACHARYYA; KEEL, 2009) para o caso de polinômios reais pode ser usado para analisar os 4 polinômios formados pelos vértices das caixas dos parâmetros (se os coeficientes forem perturbados independentemente) e calcular o pior caso da margem de estabilidade. Para evitar o uso do teorema de Kharitonov, nessa dissertação utiliza-se de uma função de Lyapunov para garantir a estabilidade dos controladores escalonados.

1.1.5 Rejeição de distúrbios

Embora muitos métodos e teorias de sintonia sejam rigorosamente estabelecidos para entregar boas margens de estabilidade, ainda não foi completamente investigado como ajustar os parâmetros do controlador resultando em uma boa atenuação de perturbações (BHATTACHARYYA; KEEL, 2009; DÍAZ-RODRÍGUEZ; BHATTACHARYYA, 2016). Por exemplo, em Eletrônica de Potência, a amplitude dos harmônicos selecionados em um sistema deve ser atenuada ou rejeitada (TEODORESCU; BLAABJERG; BORUP; LISERRE, 2004; TEODORESCU; BLAABJERG; LISERRE; LOH, 2006; AGUIAR et al., 2015). A rejeição das perturbações provenientes dos harmônicos pode ser garantida requerendo um termo ressonante para cada frequência de harmônico no denominador do controlador. Entretanto, tal termo eleva a ordem do controlador e, controladores de alta ordem, na prática, não são sempre desejáveis devido à sua fragilidade (BHATTACHARYYA; KEEL, 2009).

Em Reza-Alikhani e Madady (2013) e Momenizadeh, Madady e Reza-Alikhani (2011), um método gráfico envolvendo cinco pontos no espaço paramétrico foi desenvolvido para projetar um controlador PD para uma planta com termo integral acrescida de um termo de tempo morto. Em Díaz-Rodríguez e Bhattacharyya (2016), um método para sintetizar graficamente controladores PI atingindo as margens de fase e ganho preestabelecidas foi desenvolvido. O método utilizou o conjunto estabilizante de controladores PI (BHATTACHARYYA; KEEL, 2009).

Para sistemas lineares invariantes no tempo (LTI, da sigla em inglês) com uma única entrada e uma única saída, a norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência do erro é o ganho máximo do sinal de erro no domínio da frequência. Em Yaniv e Nagurka (2003), controladores PI foram parametrizados em termos das margens de fase e ganho, dos limites $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência do erro e da resposta em frequência da função de transferência da planta.

Em Omer, Kumar e Surjan (2016), os autores geraram uma função objetivo que

consiste da função de transferência do erro e da função de transferência de malha fechada. A função objetivo foi minimizada para um controlador PID aplicado a um conversor buck. No entanto, foi uma solução conservadora na qual o método proposto considerou todas as frequências enquanto existem somente algumas frequências que precisam ser consideradas.

Em [Lascu, Asiminoaei, Boldea e Blaabjerg \(2009\)](#), quatro estruturas de controle de corrente foram comparadas para compensação seletiva de harmônicos em filtros ativos de potência, que foi um dispositivo eletrônico de potência usado para a compensação da corrente dos harmônicos de cargas não lineares. O controle seletivo da corrente dos harmônicos foi uma solução atraente já que cada harmônico selecionado era separadamente detectado e controlado via conceito de modelo interno. Em [Campos-Gaona et al. \(2017\)](#) uma estratégia de mitigação rápida de harmônicos da corrente foi apresentada para inversores. Os controladores usados em [Lascu, Asiminoaei, Boldea e Blaabjerg \(2009\)](#) ou [Campos-Gaona et al. \(2017\)](#) geralmente elevam a ordem do sistema de malha fechada dependendo do número de harmônicos a serem compensados. Nessa dissertação, apresenta-se uma técnica de sintonia (via projeto gráfico utilizando as técnicas de [Bhattacharyya e Keel \(2009\)](#)) de um controlador PID de ordem fixa que permite mitigar harmônicos.

1.2 Motivação e objetivos

Praticamente todas as fontes alternativas de energia apresentam comportamento não linear com relação a tensão e corrente fornecidas. A linearização em torno de um ponto de operação pode não ser realista, como no caso da busca do ponto de máxima potência para painéis solares ou para um aerogerador. Também, uma rede com geração distribuída tem seu ponto de operação alterado de acordo com as fontes conectadas ao sistema, assim como, uma fonte conectada pode alterar o ponto de operação de outra fonte devido às múltiplas conexões em um barramento comum.

Além disso, muitos sistemas possuem parâmetros variantes ao longo do tempo, como em pulverizadores agrícolas que, a cada agrotóxico com diferente viscosidade, precisam compensar o sistema para manter a qualidade da gota desejada. Recorrer a técnicas de controle adaptativo já consolidadas na literatura, muitas vezes requer um hardware eficiente para processamento.

Para sistemas de eletrônica de potência, como nos usados em geração distribuída, os distúrbios muitas vezes se apresentam com harmônicos, não sendo necessário garantir para todas as frequências possíveis um grau de atenuação. Portanto, essa dissertação possui os seguintes objetivos

- Fornecer uma técnica de sintonia de controladores PID de forma a limitar a norma $\mathcal{H}_\infty$ da sensibilidade do sistema para toda faixa de frequência. A técnica é descrita em termos da solução de um conjunto de LMIs (Capítulo 3);

- Apresentar estratégias de ganho escalonado para adaptação dos ganhos do controlador PID frente à variações paramétricas garantindo a estabilidade do sistema quando ocorrer o escalonamento dos ganhos (Capítulo 3);
- Estabelecer um método de sintonia que permita mitigar o efeito de apenas algumas frequências de interesse na saída do sistema utilizando controladores PID (Capítulo 4).

2 PRELIMINARES

Este capítulo contém um resumo das técnicas desenvolvidas na literatura acerca do equivalente de Thévenin pontual, uso de desigualdade matricial linear (LMI, da sigla em inglês para *Linear Matrix Inequality*) para o projeto de controlador com realimentação de estado e conjuntos estabilizantes para controladores PID, e são base para as contribuições feitas nos próximos capítulos desta dissertação.

2.1 O equivalente de Thévenin pontual

Esta seção é um resumo do trabalho feito em Magossi (2016) e maiores detalhes podem ser encontrados nessa referência. O equivalente de Thévenin permite que, para um dado ponto de um circuito linear, seja possível obter um circuito equivalente composto por uma impedância e por uma fonte de tensão, que no caso de circuito de corrente contínua, se transforma em uma resistência e uma fonte de tensão contínua. Esse equivalente é obtido através do Teorema de Thévenin (BRITTAIN, 1990; JOHNSON, 2003).

Teorema 2.1 (Teorema de Thévenin).

$$V_{th} = V_{oc} \quad (2.1)$$

$$R_{th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} \quad (2.2)$$

onde I_{sc} é a corrente de curto-circuito e V_{oc} a tensão de circuito aberto (THÉVENIN, 1883a; THÉVENIN, 1883b).

De acordo com o Teorema 2.1, é necessário abrir o circuito de interesse e depois aplicar um curto-circuito, que do ponto de vista prático, resulta em muitas inconveniências. De fato, não é trivial, tampouco economicamente viável, abrir um circuito em operação para obter V_{oc} . Além disso, muitos sistemas não suportam condições de curto-circuito que permitiriam obter o I_{sc} . Em Bhattacharyya, Keel e Mohsenizadeh (2013) os autores propõem uma forma de se extrair o equivalente de Thévenin para circuitos lineares apenas utilizando duas cargas diferentes no ponto de interesse. Em Magossi (2016) foi estendido o conceito para sistemas não lineares, denominando-o como equivalente de Thévenin pontual. Considere o modelo entrada-saída linear parametrizado

$$\begin{aligned} A(\mathbf{p})\mathbf{x} &= B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= C(\mathbf{p})\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.3)$$

em que $\mathbf{y}$ é o vetor de saída, $\mathbf{u}$ o vetor de entrada e $\mathbf{p}$ o vetor de parâmetros:

$$\mathbf{y} = (y_1 \ \cdots \ y_m)', \mathbf{u} = (u_1 \ \cdots \ u_r)', \mathbf{p} = (p_1 \ \cdots \ p_\ell)'.$$

em que $\mathbf{z} := (\mathbf{x} \ \mathbf{y})'$, (2.3) pode ser escrito como:

$$T(\mathbf{p}) \ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} B \\ -D \end{pmatrix} \mathbf{u} \text{ onde } T(\mathbf{p}) := \begin{pmatrix} A(\mathbf{p}) & 0 \\ C(\mathbf{p}) & -I \end{pmatrix}.$$

Seja

$$T_{ij}(\mathbf{p}) := \begin{pmatrix} A(\mathbf{p}) & b_j \\ c_i(\mathbf{p}) & -d_{ij} \end{pmatrix}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r \quad (2.4)$$

em que $c_i(\mathbf{p})$, $i = 1, \dots, m$ sendo o i -ésima linha de $C(\mathbf{p})$, b_j , $j = 1, \dots, r$ a coluna j -ésima de B , d_{ij} o elemento ij -ésima de D , e

$$\beta_{ij}(\mathbf{p}) := |T_{ij}(\mathbf{p})|, \alpha(\mathbf{p}) := |T(\mathbf{p})|. \quad (2.5)$$

2.1.1 Um modelo entrada-saída parametrizado

Para o modelo (2.3), as saídas podem ser determinadas em termos das entradas e parâmetros. Isto é estabelecido a seguir, utilizando os resultados apresentados em Oliveira, Felizardo e Bhattacharyya (2015) e Bhattacharyya, Keel e Mohsenizadeh (2013), e omitindo as provas.

Suposição 2.1. *O parâmetro $\mathbf{p}$ aparece afim em $A(\mathbf{p})$ e $C(\mathbf{p})$:*

$$\begin{aligned} A(\mathbf{p}) &= A_0 + p_1 A_1 + \dots + p_\ell A_\ell \\ C(\mathbf{p}) &= C_0 + p_1 C_1 + \dots + p_\ell C_\ell. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Suposição 2.2.

$$|T(\mathbf{p})| \neq 0. \quad (2.7)$$

Teorema 2.2. *Para o sistema (2.3), a saída é dada por:*

$$y_i = \sum_{j=1}^r \frac{\beta_{ij}(\mathbf{p})}{\alpha(\mathbf{p})} u_j, \ i = 1, 2, \dots, m \quad (2.8)$$

com $\beta_{ij}(\mathbf{p})$ e $\alpha(\mathbf{p})$ como já definido. Em termos de matriz:

$$\mathbf{y} = \frac{1}{\alpha(\mathbf{p})} \begin{pmatrix} \beta_{11}(\mathbf{p}) & \dots & \beta_{1r}(\mathbf{p}) \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1}(\mathbf{p}) & \dots & \beta_{mr}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \mathbf{u}. \quad (2.9)$$

Para descrever a solução $\mathbf{y}$ de (2.3), utiliza-se as funções $\alpha(\mathbf{p})$ e $\beta_{ij}(\mathbf{p})$.

Lema 2.1. *Seja $A(\mathbf{p}) = A_0 + p_1 A_1 + \dots + p_\ell A_\ell$ com $\text{rank}(A_i) = r_i, i = 1, 2, \dots, \ell$. Então $\alpha(\mathbf{p}) = |A(\mathbf{p})|$ é um polinômio multivariável em $\mathbf{p}$, de grau no máximo r_i em $p_i, i = 1, 2, \dots, \ell$.*

Agora considere (2.4) escrito na forma polinomial:

$$T_{ij}(\mathbf{p}) = T_{ij0} + p_1 T_{ij1} + \cdots + p_\ell T_{ij\ell}. \quad (2.10)$$

Aplicando o Lema 2.1, nota-se que

$$|T_{ij}| = \beta_{ij}(\mathbf{p}) \quad (2.11)$$

é um polinômio multivariável em $\mathbf{p}$ de grau no máximo r_{ijk} em p_k onde

$$r_{ijk} = \text{rank}(T_{ijk}), i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, r, k = 1, 2, \dots, \ell. \quad (2.12)$$

Como exemplo, suponha:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

e $r_1 = 1; r_{110} = 1, r_{210} = 1, r_2 = 2; r_{121} = 2; r_{221} = 2$. Então, os polinômios $\alpha(\mathbf{p}), \beta_{ij}(\mathbf{p})$ são como seguem.

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{p}) &= \alpha_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_1 p_2 + \alpha_4 p_1 p_2^2 + \alpha_5 p_2^2 \\ \beta_{ij}(\mathbf{p}) &= \beta_{ij0} + \beta_{ij1} p_1 + \beta_{ij2} p_2 + \beta_{ij3} p_1 p_2 + \beta_{ij4} p_1 p_2^2 \\ &\quad + \beta_{ij5} p_2^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

O número de coeficientes em $\alpha(\mathbf{p})$ é $\prod_{i=1}^{\ell} (r_i + 1)$ e um número correspondente de coeficientes está presente em $\beta_{ij}(\mathbf{p}), i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, r$.

2.2 O equivalente de Thévenin para um painel solar

Considere o circuito equivalente de um painel solar mostrado na Fig. 2.1, no qual a tensão e a corrente terminais são dadas por

$$I = \frac{V_{th}}{R_{th} + R}, \quad (2.15)$$

$$V = RI = -R_{th}I + V_{th}. \quad (2.16)$$

Figura 2.1: Circuito equivalente.

O método proposto é para construir o equivalente de Thévenin on-line de um painel solar através de medidas regulares. Isso é possível utilizando o Teorema 2.2 para um caso

especial, em que toma-se a saída $y_i =: I$ e o parâmetro $\mathbf{p} = \mathbf{R}$. Assim, o parâmetro $\mathbf{p} = \mathbf{R}$ desaparece de $\beta_{ij}(\mathbf{p})$ e aparece apenas em $\alpha(\mathbf{p})$. Também $\alpha_1 = 1$. Seja $y(1)$ e $y(2)$ medidas de corrente do terminal do painel solar, onde $R(1)$ e $R(2)$ correspondem a cargas resistivas alocadas no painel, obtidas em dois instantes distintos. Como o equivalente de Thévenin é um caso especial do Teorema 2.2 com $p = R$ e entradas u_j , $j = 1, 2$ constantes, para obter o equivalente de Thévenin pontual, resolve-se

$$\begin{pmatrix} y(1) & -1 \\ y(2) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(1)R(1) \\ -y(2)R(2) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

em que α_0 e β_0 são

$$\alpha_0 = R_{th}, \quad (2.18)$$

$$\beta_0 = V_{th}. \quad (2.19)$$

Para fontes não lineares, o equivalente de Thévenin não pode ser obtido de forma a representar toda a planta. Assim, adota-se pequenas variações de carga ao resolver (2.17), e, portanto, obtém-se um equivalente de Thévenin pontual. A seguir segue um exemplo de aplicação do equivalente de Thévenin pontual

Exemplo 2.1. O painel fotovoltaico é uma fonte de energia com característica não linear entre tensão e corrente, assim, um algoritmo para busca do ponto de máxima potência (algoritmo de MPPT, do inglês *Maximum Power Point Tracking*) é necessário para a utilização otimizada da fonte de energia solar. O objetivo do MPPT é determinar o ponto de operação de maior geração de energia elétrica a partir de uma fonte solar. Usualmente, utiliza-se um conversor CC–CC conectado à saída da fonte para alterar os valores de tensão e corrente, e fazer a mesma operar no ponto determinado por esse algoritmo. Há diversos algoritmos para encontrar o máximo em um único painel atualmente implementados (ESRAM; CHAPMAN, 2007; MOÇAMBIQUE, 2012; MOÇAMBIQUE; MACHADO; OLIVEIRA, 2011; ESRAM; KIMBALL; KREIN; CHAPMAN; MIDYA, 2006; BRITO; LUIGI; SAMPAIO; CANESIN, 2010; BASTOS, 2013; VILLALVA, 2010).

Em Magossi (2016) foi apresentado uma proposta de um algoritmo para busca do ponto de máxima potência local, e global, utilizando o equivalente de Thévenin pontual. Foi utilizado nas simulações um conversor do tipo boost conectado a um painel fotovoltaico conforme apresentado na Fig. 2.2.

Uma vez obtida uma representação fixa do equivalente de Thévenin do painel fotovoltaico, tradicionalmente projeta-se o controlador desejado utilizando-se a função de transferência da planta obtida por pequenos sinais para a entrada do conversor CC–CC, para um ciclo de trabalho médio (D), como o da Fig. 2.2 dado por

$$G(s) = \frac{V_i(s)}{d(s)} = \frac{k_1 s + k_2}{k_3 s^2 + k_4 s + k_5} \quad (2.20)$$

Figura 2.2: Conversor CC–CC boost com painel fotovoltaico representado pelo equivalente de Thévenin.

Fonte: Próprio autor

em que,

$$k_1 = C_i R_{th} V_{th} r_{C_i} r_{on} - C_i E R_{th} r_{C_i} r_L - C_i E R_{th} r_{C_i} r_{on} - C_i E R_{th}^2 r_{C_i}$$

$$k_2 = R_{th} V_{th} r_{on} - E R_{th} r_L - E R_{th} r_{on} - E R_{th}^2$$

$$k_3 = C_i L R_{th}^2 + C_i L R_{th} r_{C_i} + C_i L R_{th} r_L + C_i L r_{C_i} r_L + C_i D L r_{C_i} r_{on} + C_i D L R_{th} r_{on}$$

$$k_4 = c_1 + c_2$$

$$c_1 = h_1 + h_2$$

$$h_1 = C_i D^2 R_{th} r_{on}^2 + C_i r_{C_i} D^2 r_{on}^2 + C_i D R_{th}^2 r_{on} + 2 C_i D R_{th} r_L r_{on}$$

$$h_2 = 2 C_i r_{C_i} D R_{th} r_{on} + 2 C_i r_{C_i} D r_L r_{on}$$

$$c_2 = L D r_{on} + C_i R_{th}^2 r_L + C_i r_{C_i} R_{th}^2 + C_i R_{th} r_L^2 + 2 C_i r_{C_i} R_{th} r_L + L R_{th} + C_i r_{C_i} r_L^2 + L r_L$$

$$k_5 = D^2 r_{on}^2 + 2 D R_{th} r_{on} + 2 D r_L r_{on} + R_{th}^2 + 2 R_{th} r_L + r_L^2.$$

É fato que a planta depende dos valores de V_{th} e R_{th} . Na Fig. 2.3, mostra-se o que acontece com esses valores durante uma busca do ponto de máxima potência utilizando o algoritmo de MPPT proposto em (MAGOSS; OLIVEIRA; MACHADO; BHATTACHARYA, 2016). Na Fig. 2.4, é mostrado o comportamento dos polos e zeros da planta durante a busca. O zero da planta não apresenta variações significativas em sua posição durante a busca, no entanto as variações das posições dos polos são grandes e tendem a causar mudanças nas especificações de desempenho do sistema.

Controladores robustos podem lidar com essas variações paramétricas da planta, no entanto, no caso do painel solar, as variações são dependentes de aspectos climáticos e de construção dos próprios painéis, dificultando o uso desses controladores. Recorrer ao uso de controladores adaptativos, nesse caso, torna-se uma opção natural. Como o uso de controladores do tipo PID são largamente empregados no campo da eletrônica de potência, pode ser desejável obter um controlador PID adaptativo, como por exemplo o de ganho escalonado, que consiga responder rapidamente às variações na planta utilizando

o equivalente de Thévenin pontual obtido online para fornecer os valores paramétricos de resistência e tensão equivalente da fonte de alimentação.

Figura 2.3: Variação de $R_{th}[\Omega]$ e $V_{th}[V]$ durante a busca do ponto de máxima potência.

Fonte: Próprio autor

Figura 2.4: Diagrama de polos e zeros do conversor com o painel em relação ao ciclo de trabalho durante a busca do ponto de máxima potência.

Fonte: Próprio autor

2.3 Norma $\mathcal{H}_\infty$ e realimentação de estado via LMI

Esta seção é baseada em [Boyd, El Ghaoui, Feron e Balakrishnan \(1994\)](#), [Doyle, Glover, Khargonekar e Francis \(1989\)](#), [Zhou, Doyle e Glover \(1996\)](#), e nas suas referências contidas. Considere o sinal $x(t) \in \mathbb{C}$ e as definições dadas a seguir.

Definição 2.1. (Norma $\mathcal{L}_2$) Seja $x^*(t)$ o conjugado transposto de $x(t)$, então $\|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} x^*(t)x(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)X(j\omega)d\omega}$.

Definição 2.2. (Norma $\mathcal{L}_\infty$) No tempo, $\|x(t)\|_\infty = \sup_t |x(t)|$ e na frequência $\|X\|_\infty = \sup_\omega \|x(j\omega)\|$.

Definição 2.3. (Espaço $\mathcal{L}_\infty$) $\mathcal{L}_\infty$ é o espaço de funções limitadas contínuas por partes. É o espaço de Banach de funções matriciais ou escalares em $\mathbb{C}$ e consiste de todas as funções matriciais complexas limitadas $f(j\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}$, tal que,

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[f(j\omega)] < \infty.$$

Definição 2.4. (Espaço $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{RH}_\infty$) $\mathcal{H}_\infty$ é um subespaço de $\mathcal{L}_\infty$ em que $\text{Re}(s) \geq 0$. O subespaço $\mathcal{RH}_\infty$ é um subespaço racional real de $\mathcal{H}_\infty$ que consiste de todas as matrizes de transferência próprias, reais e estáveis.

Definição 2.5. (Norma $\mathcal{H}_\infty$) A norma $\mathcal{H}_\infty$ de um sistema linear e invariante no tempo $H(s)$ com realização (A, B, C, D) que relaciona a entrada $u(t)$ com a saída $y(t)$ e que pertence à $\mathcal{RH}_\infty$, é norma $\mathcal{L}_2$ induzida, definida como

$$\begin{aligned} \|H(j\omega)\|_\infty &= \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(H(j\omega)) \\ &= \max_{\omega(t) \in \mathcal{L}_2} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}. \end{aligned}$$

Definição 2.6. (Desigualdade matricial linear (LMI)) ([BOYD; El Ghaoui; FERON; BALAKRISHNAN, 1994](#)) Uma desigualdade matricial linear tem a forma

$$F(x) =: F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (2.21)$$

na qual $x \in \mathbb{R}^m$ é variável a ser determinada, $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $i = 1, \dots, m$.

Definição 2.7. (Complemento de Schur) ([BOYD; El Ghaoui; FERON; BALAKRISHNAN, 1994](#)) A desigualdade matricial linear

$$F(x) = \begin{bmatrix} S(x) & V(x) \\ V(x)^T & Q(x) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.22)$$

é equivalente as duas desigualdades não lineares

1. $S(x) < 0$ e $Q(x) - V(x)^T S(x)^{-1} V(x) < 0$;
2. $Q(x) < 0$ e $S(x) - V(x) Q(x)^{-1} V(x)^T < 0$.

O cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser feito resolvendo-se o problema de otimização

$$\|H(s)\|_\infty^2 = \inf_{\rho > 0, P > 0} \left\{ \rho : \begin{bmatrix} A^T P + P A + C^T C & P B + C D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \rho I \end{bmatrix} < 0 \right\} \quad (2.23)$$

na qual $P = P^T$ e $\rho \in \mathbb{R}$ (BOYD; El Ghaoui; FERON; BALAKRISHNAN, 1994).

Para o projeto de controladores com desempenho $\mathcal{H}_\infty$ é comum utilizar o célebre *Bounded Real Lemma* (BRL).

Lema 2.2. (BRL) (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996) Um sistema dinâmico $H(s) = (A, B, C, D)$ é internamente estável e com $\|H\|_\infty < \gamma$ se e somente se existe uma matriz simétrica positiva definida P ($P > 0, P = P^T$) tal que

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0.$$

A seguir é abordado o caso mais simples de projeto de controlador com índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$, o controlador por realimentação de estado.

Exemplo 2.2. Considere o sistema

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t), \quad (2.24)$$

$$z(t) = C x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t), \quad (2.25)$$

$$u(t) = -K x(t). \quad (2.26)$$

Deseja-se encontrar K de tal forma que a função de transferência $H(s) = (A - B_2 K, B_1, C - D_{12} K, D_{11})$ atenda $\|H\|_\infty < \gamma$.

Aplicando o BRL é possível escrever

$$\begin{bmatrix} (A - B_2 K)^T P + P(A - B_2 K) & P B_1 & (C - D_{12} K)^T \\ B_1^T P & -\gamma I & D_{11}^T \\ C - D_{12} K & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, P > 0, P = P^T \quad (2.27)$$

o qual é um sistema bilinear devido ao produto de P com K . Assim, multiplicando-se ambos os lados de (2.27) por $\text{diag}(P^{-1}, I, I)$ e fazendo $Q = P^{-1}$ e $Y = -K P^{-1}$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} A Q + Q A^T + B_2 Y + Y^T B_2^T & B_1 & Q C^T + Y^T D_{12}^T \\ B_1^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ (Q C^T + Y^T D_{12}^T)^T & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.28)$$

e o controlador é dado então por $K = -Y Q^{-1}$.

2.4 Assinatura de um polinômio e conjunto estabilizante

Esta seção é desprovida de qualquer originalidade do autor, sendo reflexo de tradução livre dos trabalhos realizados em [Bhattacharyya e Keel \(2009\)](#), [Keel e Bhattacharyya \(2008b\)](#), [Díaz-Rodríguez e Bhattacharyya \(2016\)](#), [Han, Keel e Bhattacharyya \(2018\)](#), portanto maiores detalhes podem ser encontrados nessas referências. Entretanto o conteúdo abordado aqui é base para o desenvolvimento do método de sintonia de PID para mitigação de harmônicos. Assim, seja $p(s)$ um polinômio de grau n com coeficientes reais e sem zeros no eixo $j\omega$. Escreva,

$$p(s) := \underbrace{p_0 + p_2 s^2 + \dots}_{p_{par}(s^2)} + s \underbrace{(p_1 + p_3 s^2 + \dots)}_{p_{impar}(s^2)} \quad (2.29)$$

assim,

$$p(j\omega) = p_r(\omega) + jp_i(\omega) \quad (2.30)$$

onde $p_r(\omega)$ e $p_i(\omega)$ são polinômios em ω com coeficientes reais tal que

$$p_r(\omega) = p_{par}(-\omega^2) \quad (2.31)$$

$$p_i(\omega) = \omega p_{impar}(-\omega^2). \quad (2.32)$$

Definição 2.8. Para $p(s)$ um polinômio de grau n com coeficientes reais e sem zeros no eixo $j\omega$, l denota o número de raízes no semi-plano esquerdo (SPE) e r o número de raízes no semi-plano direito (SPD). Além disso, $\angle p(j\omega)$ denota o ângulo de $p(j\omega)$ e $\Delta_{\omega_1}^{\omega_2} \angle p(j\omega)$ denota a mudança de fase em radianos em $\angle p(j\omega)$ para quando ω vai de ω_1 até ω_2 .

Definição 2.9. A função sinal $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ é definida por:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Lema 2.3.

$$\Delta_0^\infty \angle p(j\omega) = \frac{\pi}{2}(l - r). \quad (2.34)$$

Demonstração. Cada raiz no SPE contribui em π e cada raiz no SPD contribui em $-\pi$ para a mudança de fase quando ω varia entre $-\infty$ até ∞ . $\square$

Chama-se o termo $l - r$ de assinatura Hurwitz de $p(s)$ e é denotada por

$$\sigma(R) = l - r. \quad (2.35)$$

É possível generalizar esse conceito de assinatura através do Teorema de Hermite-Biehler com o seguinte teorema.

Teorema 2.3. (*BHATTACHARYYA; KEEL, 2009*) Seja $p(s)$ um polinômio de grau n com coeficientes reais, sem zeros no eixo imaginário. Escreva

$$p(j\omega) = p_r(\omega) + jp_i(\omega)$$

e seja $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{l-1}$ os zeros reais não negativos de $p_i(\omega)$ com multiplicidade ímpar e $\omega_0 = 0$. Então, se n é par,

$$\sigma(p) = \text{sign}[p_i(0^+)] \left(\text{sign}[p_r(0)] + 2 \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^j \text{sign}[p_r(\omega_j)] - (-1)^l \text{sign}[p_r(\infty)] \right).$$

Se n é ímpar,

$$\sigma(p) = \text{sign}[p_i(0^+)] \left(\text{sign}[p_r(0)] + 2 \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^j \text{sign}[p_r(\omega_j)] \right).$$

A assinatura de $p(s)$ foi obtida em termos dos sinais da parte real de $p(j\omega)$ para quando a parte imaginária é nula. É possível de forma semelhante obter a assinatura em função dos sinais da parte imaginária para quando a parte real é nula.

Teorema 2.4. (*BHATTACHARYYA; KEEL, 2009*) Seja $v(s)$ um polinômio de grau n com coeficientes reais, sem zeros no eixo imaginário. Escreva

$$v(j\omega) = v_r(\omega) + jv_i(\omega)$$

e seja $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{l-1}$ os zeros reais não negativos de $v_r(\omega)$ com multiplicidade ímpar e $\omega_0 = 0$. Então, se n é par,

$$\sigma(v) = \text{sign}[v_r(0)] \left(2 \text{sign}[v_i(\omega_1)] - 2 \text{sign}[v_i(\omega_2)] + \dots + (-1)^{l-2} 2 \text{sign}[v_i(\omega_{l-1})] \right).$$

Se n é ímpar,

$$\begin{aligned} \sigma(v) = \text{sign}[v_r(0)] & \left(2 \text{sign}[v_i(\omega_1)] - 2 \text{sign}[v_i(\omega_2)] + \dots \right. \\ & \left. \dots + (-1)^{l-2} 2 \text{sign}[v_i(\omega_{l-1})] + (-1)^{l-1} \text{sign}[v_i(\infty)] \right). \end{aligned}$$

O conjunto estabilizante para o PID utilizando a assinatura

Considere uma planta com função de transferência racional

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.36)$$

e com o controlador PID na forma

$$C(s) = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s(1 + sT)}, \quad T > 0. \quad (2.37)$$

O polinômio característico da planta com controlador é dado por

$$\delta(s) = sD(s)(1 + sT) + (k_d s^2 + k_p s + k_i)N(s). \quad (2.38)$$

Assim, forma-se um polinômio auxiliar na forma

$$\nu(s) := \delta(s)N(-s) \quad (2.39)$$

de ordem n_ν . Note então que a decomposição par-ímpar de $\nu(s)$ se dará na forma

$$\nu(s) = \nu_{par}(s^2, k_i, k_d) + s\nu_{impar}(s^2, k_p). \quad (2.40)$$

O polinômio $\nu(s)$ possui a chamada propriedade de separação paramétrica, na qual k_p aparece apenas na parte ímpar e k_i, k_d apenas na parte par. Isso facilita a determinação do conjunto estabilizante utilizando o conceito de assinatura.

Seja o grau de $D(s)$ igual a n e o grau de $N(s)$ igual a m , tal que $m \leq n$, e z^+ e z^- o número de zeros da planta (zeros de $N(s)$) no SPD e no SPE, respectivamente. Assume-se que a planta não possui zeros no eixo imaginário.

Teorema 2.5. *O sistema de malha fechada é estável se somente se*

$$\sigma(\nu) = n - m + 2 + 2z^+. \quad (2.41)$$

Demonstração. A estabilidade de malha fechada é obtida quando os $n + 2$ zeros de $\delta(s)$ estão no SPE. Isso é equivalente a

$$\sigma(\delta) = n + 2 \quad (2.42)$$

e então

$$\begin{aligned} \sigma(\nu) &= n + 2 + z^+ - z^- \\ &= n + 2 + z^+ - (m - z^+) \\ &= (n - m) + 2 + 2z^+ \end{aligned}$$

uma vez que $m = z^+ + z^-$. □

Para obter o conjunto estabilizante ($\mathcal{S}$) do sistema faz-se então:

1. Primeiramente fixe $k_p = k_p^*$ (valor escolhido do intervalo possível para k_p , vide no último passo do algoritmo) e $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{l-1}$ as frequências finitas reais e positivas que são zeros de:

$$\nu_{impar}(-\omega^2, k_p^*) = 0 \quad (2.43)$$

de multiplicidade ímpar. Defina $\omega_0 := 0$ e $\omega_l := \infty$.

2. Escreva

$$j = \text{sign}[\nu_{\text{impar}}(0^+, k_p^*)] \quad (2.44)$$

e determine o vetor de inteiros, $i_0, i_1, \dots$ tais que:

- Se n_ν é par,

$$j(i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{l-1}2i_{l-1} + (-1)^l i_l) = n - m + 2 + 2z^+ \quad (2.45)$$

- Se n_ν é ímpar,

$$j(i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{l-1}2i_{l-1}) = n - m + 2 + 2z^+ \quad (2.46)$$

3. Sejam $I_1, I_2, \dots$ os vetores distintos de $\{i_0, i_1, \dots\}$ satisfazendo (2.45) ou (2.46). Então, o conjunto estabilizante no espaço k_i, k_d para $k_p = k_p^*$ são dados pelo conjunto de inequações lineares:

$$\nu_{\text{par}}(-\omega_t^2, k_i, k_d) i_t > 0 \quad (2.47)$$

onde t cobre cada vetor $I_1, I_2, \dots$.

4. Para cada vetor I_j , (2.47) gera um conjunto convexo de estabilidade $\mathcal{S}_j(k_p^*)$ e o conjunto estabilizante completo para um dado k_p^* é a união desses conjuntos convexos:

$$\mathcal{S}(k_p^*) = \cup \mathcal{S}_j(k_p^*). \quad (2.48)$$

5. O conjunto estabilizante completo para (k_p, k_i, k_d) pode ser encontrado varrendo-se k_p sobre o eixo real e repetindo-se os passos anteriores. A partir de (2.45) e (2.46) é possível ver que o espaço de varredura estará restrito ao número de raízes $l - 1$ que satisfaça (2.45) ou (2.46). Assim, para n_ν par, é requerido que

$$2 + 2(l - 1) \geq \sigma(\nu) = n - m + 2 + 2z^+ \quad (2.49)$$

isso é

$$l - 1 \geq \frac{n - m + 2z^+}{2} \quad (2.50)$$

e para o caso n_ν ímpar,

$$1 + 2(l - 1) \geq \sigma(\nu) = n - m + 2 + 2z^+ \quad (2.51)$$

isso é

$$l - 1 \geq \frac{n - m + 1 + 2z^+}{2} \quad (2.52)$$

Então, k_p deve ser varrido no intervalo em que (2.43) é satisfeito com $l - 1$ dado por (2.50) ou (2.52).

Observação 2.1. Se o controlador PID possuir ação integral pura ($T = 0$) então facilmente verifica-se que a condição de estabilidade usando a assinatura se torna

$$\sigma(\nu) = n - m + 1 + 2z^+. \quad (2.53)$$

O seguinte exemplo ilustra o procedimento de determinação do conjunto estabilizante utilizando a assinatura.

Exemplo 2.3. Considere a seguinte planta:

$$G(s) = \frac{s^3 - 2s^2 - s - 1}{s^6 + 2s^5 + 32s^4 + 26s^3 + 65s^2 - 8s + 1} \quad (2.54)$$

e um PID com $T = 0$. Primeiramente,

$$N(s) = s^3 - 2s^2 - s - 1 \quad (2.55)$$

$$D(s) = s^6 + 2s^5 + 32s^4 + 26s^3 + 65s^2 - 8s + 1 \quad (2.56)$$

com $n = 6$ e $m = 3$, o que implica que o polinômio característico será dado por:

$$\delta(s, k_p, k_i, k_d) = sD(s) + (k_d s^2 + k_p s + k_i)N(s) \quad (2.57)$$

logo,

$$\nu(s) = \delta(s, k_p, k_i, k_d)N(-s) = \nu_{par}(s) + s\nu_{impar}(s) \quad (2.58)$$

onde,

$$\nu_{par}(s) = -s^{10} + (-k_d - 35) s^8 + (6k_d - k_i - 87) s^6 \quad (2.59)$$

$$+ (3k_d + 6k_i + 54) s^4 + (k_d + 3k_i + 9) s^2 + k_i \quad (2.60)$$

$$\nu_{impar}(s) = -4s^8 + (-k_p - 89) s^6 + (6k_p - 128) s^4 \quad (2.61)$$

$$+ (3k_p - 75) s^2 + k_p - 1 \quad (2.62)$$

Note que os zeros de $N(s)$ são 2,5468, -0,2734 $\pm j0,563$. Assim, de $N(s)$ verificamos que $z^+ = 1$ pois há um zero no SPD. Logo, para a estabilidade, devemos ter

$$\sigma(\nu) = n - m + 1 + 2z^+ = 6. \quad (2.63)$$

Como $n_\nu = 10$ é par, então devemos ter:

$$2 + 2(l - 1) \geq \sigma(\nu) = n - m + 1 + 2z^+ \quad (2.64)$$

isso é,

$$l - 1 \geq \frac{n - m - 1 + 2z^+}{2} = 2 \quad (2.65)$$

ou seja, o intervalo de k_p é tal que $\nu_{\text{impar}}(s)$ possua pelo menos 2 raízes reais positiva com multiplicidade ímpar. Para isso, basta determinar os valores de k_p que são solução de:

$$\nu_{\text{impar}}(j\omega, k_p) = 0, \quad 0 \leq \omega < \infty. \quad (2.66)$$

ou seja,

$$k_p = \frac{4\omega^8 - 89\omega^6 + 128\omega^4 - 75\omega^2 + 1}{\omega^6 + 6\omega^4 - 3\omega^2 + 1} \quad (2.67)$$

Uma forma simples de verificar o intervalo de k_p que satisfaz a condição de 2 raízes reais positivas é analisar o gráfico de (2.67) como mostrado na Fig. 2.5.

Figura 2.5: Espaço possível de solução para k_p .

Fonte: Próprio autor

Da Figura 2.5, é possível ver que $k_p \in (-25, 7513, 1)$. Assim, para um k_p fixo, $k_p^* = -18$, por exemplo, resolvemos ω de (2.66), encontrando-se as seguintes raízes reais, positivas, distintas e de multiplicidade ímpar:

$$\omega_1 = 0.5195, \quad \omega_2 = 0.6055, \quad \omega_3 = 1.8804, \quad \omega_4 = 3.6848, \quad (2.68)$$

definindo também $\omega_0 = 0$ e $\omega_5 = \infty$. Note que então $l = 5$.

Agora faça $j =: \text{sign}[\nu_{\text{impar}}(0, -18)] = -1$. Como n_ν é par, isso implica que:

$$j(i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \cdots + (-1)^{l-1}2i_{l-1} + (-1)^l i_l) = 6 \quad (2.69)$$

isso é

$$(-1)(i_0 - 2i_1 + 2i_2 - 2i_3 + 2i_4 - i_5) = 6. \quad (2.70)$$

Então, toda solução do vetor de inteiros,

$$\mathcal{I} = \{i_0, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\} \quad (2.71)$$

é um solução possível de (2.70), assim é possível encontrar as seguintes soluções:

$$\mathcal{I}_1 = \{-1, -1, -1, 1, -1, 1\}$$

$$\mathcal{I}_2 = \{-1, 1, -1, -1, -1, 1\}$$

$$\mathcal{I}_3 = \{-1, 1, -1, 1, 1, 1\}$$

$$\mathcal{I}_4 = \{-1, 1, 1, 1, -1, 1\}$$

$$\mathcal{I}_5 = \{1, 1, -1, 1, -1, -1\}.$$

Cada $\mathcal{I}_{n_i}$ será responsável por um conjunto estabilizante $\mathcal{S}_{n_i}(-18)$ para $n_i \in \{1, 2, \dots, 5\}$, o qual é obtido pelo conjunto de inequações formadas por:

$$\nu_{par}(-\omega_t^2, k_i, k_d) i_t > 0 \quad (2.72)$$

onde t cobre cada vetor $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots$. Para $\mathcal{I}_1$ temos:

$$\nu_{par}(-\omega_0^2, k_i, k_d) i_0 > 0$$

$$\nu_{par}(-\omega_1^2, k_i, k_d) i_1 > 0$$

$$\nu_{par}(-\omega_2^2, k_i, k_d) i_2 > 0$$

$$\nu_{par}(-\omega_3^2, k_i, k_d) i_3 > 0$$

$$\nu_{par}(-\omega_4^2, k_i, k_d) i_4 > 0$$

$$\nu_{par}(-\omega_5^2, k_i, k_d) i_5 > 0,$$

isso é:

$$0.0 < -1.0 k_i$$

$$0.0 < 0.175 k_d - 0.647 k_i - 3.03$$

$$0.0 < 0.277 k_d - 0.756 k_i - 7.62$$

$$0.0 < 110.0 k_i - 388.0 k_d - 429.0$$

$$0.0 < 4.85 \cdot 10^4 k_d - 3588.0 k_i + 5.0 \cdot 10^5.$$

A solução dessas inequações formam o conjunto estabilizante $\mathcal{S}_1(-18)$. Analogamente pode-se formar o conjunto $\mathcal{S}_2(-18)$:

$$0.0 < -1.0 k_i$$

$$\begin{aligned}
0.0 &< 0.647 k_i - 0.175 k_d + 3.03 \\
0.0 &< 0.277 k_d - 0.756 k_i - 7.62 \\
0.0 &< 388.0 k_d - 110.0 k_i + 429.0 \\
0.0 &< 4.85 \cdot 10^4 k_d - 3588.0 k_i + 5.0 \cdot 10^5.
\end{aligned}$$

O conjunto $\mathcal{S}_3(-18)$ é dado por:

$$\begin{aligned}
0.0 &< -1.0 k_i \\
0.0 &< 0.647 k_i - 0.175 k_d + 3.03 \\
0.0 &< 0.277 k_d - 0.756 k_i - 7.62 \\
0.0 &< 110.0 k_i - 388.0 k_d - 429.0 \\
0.0 &< 3588.0 k_i - 4.85 \cdot 10^4 k_d - 5.0 \cdot 10^5.
\end{aligned}$$

O conjunto $\mathcal{S}_4(-18)$ é dado por:

$$\begin{aligned}
0.0 &< -1.0 k_i \\
0.0 &< 0.647 k_i - 0.175 k_d + 3.03 \\
0.0 &< 0.756 k_i - 0.277 k_d + 7.62 \\
0.0 &< 110.0 k_i - 388.0 k_d - 429.0 \\
0.0 &< 4.85 \cdot 10^4 k_d - 3588.0 k_i + 5.0 \cdot 10^5.
\end{aligned}$$

E por fim o conjunto $\mathcal{S}_5(-18)$ é dado por:

$$\begin{aligned}
0.0 &< k_i \\
0.0 &< 0.647 k_i - 0.175 k_d + 3.03 \\
0.0 &< 0.277 k_d - 0.756 k_i - 7.62 \\
0.0 &< 110.0 k_i - 388.0 k_d - 429.0 \\
0.0 &< 4.85 \cdot 10^4 k_d - 3588.0 k_i + 5.0 \cdot 10^5.
\end{aligned}$$

O conjunto estabilizante para $k_p = -18$ será dado por $\mathcal{S}(-18) = \cup_{j=1}^5 \mathcal{S}_j(-18)$, cujo o resultado desse conjunto é mostrado na Fig. 2.6. O conjunto estabilizante completo será dado por $\mathcal{S} = \cup \mathcal{S}(k_p^*)$, $k_p^* \in (-24, 7513, 1)$ cujo o resultado é mostrado na Fig. 2.7.

Figura 2.6: Conjunto estabilizante para $k_p = -18$.

Fonte: Próprio autor

Figura 2.7: Conjunto estabilizante completo após varredura de $k_p \in (-24,7513,1)$.

Fonte: Próprio autor

2.4.1 Garantia de margem de fase e norma $\mathcal{H}_\infty$ no conjunto estabilizante

Esta seção é baseada nos trabalhos feitos por [Díaz-Rodríguez e Bhattacharyya \(2016\)](#) e [Han, Keel e Bhattacharyya \(2018\)](#), assim maiores detalhes e provas podem ser encontrados nessas referências. Primeiramente são feitas considerações básicas a respeito dos conceitos de margem de fase. Considere uma malha de controle simples com realimentação

unitária, assim deixe $P(s)$ ser uma planta escrita como

$$P(s) =: \frac{N(s)}{D(s)}. \quad (2.73)$$

Assumindo que a malha fechada é estável e que a resposta em frequência da planta e do controlador denotadas por $P(j\omega)$ e $C(j\omega)$, respectivamente, são conhecidas. As frequências ω_g e ω_ϕ são chamadas frequência de cruzamento de ganho e fase, definidas por

$$|P(j\omega_g)||C(j\omega_g)| = 1, \quad (2.74)$$

$$\angle P(j\omega_\phi) + \angle C(j\omega_\phi) = \pi, \quad (2.75)$$

com ω_g e ω_ϕ sendo as menores frequências satisfazendo (2.74) e (2.75), respectivamente. A margem de ganho denotada por g e margem de fase θ são definidos por

$$g = \frac{1}{|P(j\omega_\phi)||C(j\omega_\phi)|}, \quad (2.76)$$

$$\theta = \angle P(j\omega_g) + \angle C(j\omega_g) - \pi, \quad (2.77)$$

A partir de (2.74) e (2.77) acima

$$|C(j\omega_g)| = \frac{1}{|P(j\omega_g)|} =: m \quad (2.78)$$

e

$$\angle C(j\omega_g) = \pi + \theta - \angle P(j\omega_g) =: \phi \quad (2.79)$$

como os requisitos característicos de um controlador estabilizador, atingindo ganho prescrito e margens de fase simultaneamente. Sejam $m^*e\phi^*$ o módulo e a fase, respectivamente, dos os controladores que atendem a margem de ganho

$$\frac{1}{m^*|P(j\omega_\phi)|} \quad (2.80)$$

e margem de fase

$$\phi^* + \angle P(j\omega_g) - \pi \quad (2.81)$$

simultaneamente, desde que os ganhos do controlador associado estejam na região estabilizante. Para uma dada planta, caracteriza-se o ganho constante do controlador e o local da fase para os populares controladores PI e PID seguindo [Alzate e Oliveira \(2016\)](#) e [Díaz-Rodríguez e Bhattacharyya \(2016\)](#).

Controlador PI

Considere o controlador PI ideal

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}. \quad (2.82)$$

Então, obtém-se

$$C(j\omega_g) = \frac{k_i + j\omega_g k_p}{j\omega_g} \quad (2.83)$$

de tal forma que

$$|C(j\omega_g)|^2 = k_p^2 + \frac{k_i^2}{\omega_g^2}. \quad (2.84)$$

Portanto, de (2.78) obtém-se

$$\frac{k_p^2}{m^2} + \frac{k_i^2}{m^2\omega_g^2} = 1 \quad (2.85)$$

que representa uma elipse com eixos maiores e menores m e $m\omega_g$, respectivamente, ilustrado na Fig. 2.8. Por outro lado, (2.79) é escrito como

$$k_i = -\omega_g \tan(\phi) k_p \quad (2.86)$$

que é uma linha reta, como mostrado na Fig. 2.8. Portanto, intersecção do lugar m e ϕ fornecem os ganhos do controlador que atendem $\frac{1}{m|P(j\omega_\phi)|}$ e margem de fase $\phi + \angle P(j\omega_g) - \pi$.

Figura 2.8: Os pontos onde ocorre a intersecção entre a elipse e a reta dentro do conjunto estabilizante garantem a margem de fase para o controlador PI.

Fonte: Próprio autor

Controlador PID

Para um PID ideal como

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s, \quad (2.87)$$

tem-se

$$\frac{k_p^2}{m^2} + \frac{k_i - \omega_g^2 k_d^2}{m^2\omega_g^2} = 1 \quad (2.88)$$

o qual representa uma elipse com eixos m e $\omega_g m$ e centro em $\omega_g^2 k_d$ no eixo k_i como ilustrado na Fig. 2.9. O lugar geométrico constante para ϕ é uma linha reta equivalente a (2.79) como mostrado em Fig. 2.9.

$$k_i = (-\omega_g \tan(\phi)) k_p + \omega_g^2 k_d \quad (2.89)$$

A interseção do lócus constante m e constante ϕ produz controladores com ganho prescrito e margem de fase, desde que esses pontos estejam na região estabilizante.

Figura 2.9: Os pontos onde ocorre a interseção entre a elipse e a reta dentro do conjunto estabilizante garantem a margem de fase para o controlador PID.

Fonte: Próprio autor

Restrição da função sensibilidade

O disposto aqui encontra-se em detalhes no trabalho de [Han, Keel e Bhattacharyya \(2018\)](#). Definindo a função sensibilidade como

$$S =: \frac{1}{1 + C(s)P(s)}, \quad (2.90)$$

e aplicando a definição da norma $\mathcal{H}_\infty$

$$\frac{1}{|1 + C(j\omega)P(j\omega)|} < \gamma, \quad \forall \omega \in (0, \infty] \quad (2.91)$$

$$|1 + C(j\omega)P(j\omega)|^2 > \frac{1}{\gamma^2}. \quad (2.92)$$

Para o caso de controladores PI/PID, em [Han, Keel e Bhattacharyya \(2018\)](#), mostra-se que no conjunto estabilizante os ganhos desses controladores que satisfazem tal restrição encontram-se exteriores à elipses formadas para $\omega \in (0, \infty]$.

Exemplo 2.4. Deseja-se projetar um controlador PI, para a seguinte planta

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (2.93)$$

com os seguintes requerimentos

- Margem de fase = 45° ;
- Norma $\mathcal{H}_\infty$ da sensibilidade menor que 2.5;
- Frequência de cruzamento de ganho = 1.2712 rad/s.

O conjunto estabilizante com as restrições é mostrado na Fig. 2.10.

Figura 2.10: Conjunto estabilizante (em amarelo) com imposição de da restrição em margem de fase (elipse azul e reta vermelha) e norma $\mathcal{H}_\infty$ (exterior as elipses tracejadas em preto).

Fonte: Próprio autor

Na Fig. 2.10, a solução é a interseção da elipse azul com a reta vermelha (margem de fase, requisito de frequência de cruzamento de ganho) que estão fora das elipses pretas tracejadas (restrições da norma $\mathcal{H}_\infty$) e dentro do conjunto estabilizante. O ganho do controlador é dado então por

$$k_i = 0.589, \quad (2.94)$$

$$k_p = 1.3344. \quad (2.95)$$

Para esse controlador verifica-se o atendimento dos requisitos de projeto nas Fig. 2.11 e 2.12.

No próximo capítulo é proposto um método de sintonia para controladores PID considerando um índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ via LMI considerando a forma canônica controlável.

Figura 2.11: Margens de estabilidade para o controlador projetado.

Fonte: Próprio autor

Figura 2.12: Norma $\mathcal{H}_\infty$ para o controlador projetado.

Fonte: Próprio autor

3 SINTONIA DE PIDS COM ÍNDICE $\mathcal{H}_\infty$

Neste capítulo é abordada uma forma de sintonizar um PID com índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$, utilizando a representação em espaço de estado e resolvendo LMIs. O método proposto garante a estabilidade e calcula os coeficientes do controlador sem usar métodos iterativos. Resultados preliminares foram apresentados em [Magossi, Bezerra, Leme e Oliveira \(2017\)](#). O seguinte lema é a base da abordagem dada.

Lema 3.1. *Considere o produto entre dois polinômios em s como:*

$$\sum_{k=0}^{f_1} \alpha_k s^k \sum_{k=0}^{f_2} \beta_k s^k = \sum_{k=0}^{f_1+f_2} \gamma_k s^k \quad (3.1)$$

onde $f_1, f_2 \in \mathbb{N}$, α_k, β_k e $\gamma_k \in \mathbb{R}$. Então, $Vv = \nu$, onde:

$$V = \begin{bmatrix} \alpha_0 & & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_0 & & & & \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \alpha_0 & \\ \alpha_{f_1} & & \ddots & \ddots & \alpha_1 & \\ & \ddots & \ddots & & \alpha_2 & \\ & & \ddots & & \vdots & \\ & & & \ddots & \alpha_{f_1-1} & \\ & & & & \alpha_{f_1} & \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{f_2-1} \\ \beta_{f_2} \end{bmatrix} \quad e \quad \nu = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{f_1+f_2-1} \\ \gamma_{f_1+f_2} \end{bmatrix}$$

com $V \in \mathbb{R}^{(f_1+f_2+1) \times (f_2+1)}$, $v \in \mathbb{R}^{(f_2+1) \times 1}$ e $\nu \in \mathbb{R}^{(f_1+f_2+1) \times 1}$.

A prova do Lema 3.1 é direta usando indução finita e é omitida.

Observação 3.1. *A matriz V é uma matriz Toeplitz e possui notação simplificada por $V = \mathcal{T}([\alpha_0 \ \cdots \ \alpha_{f_1}])$.*

Segue um exemplo de uso do Lema 3.1.

Exemplo 3.1. *Suponha o produto*

$$(9s^2 + 2s + 1)(-2s + 7) = -18s^3 + 59s^2 + 12s + 7. \quad (3.2)$$

Aplicando o Lema 3.1 apresentado pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 9 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 59 \\ -18 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Na próxima seção é apresentado o método de sintonia de um controlador PID considerando limitação da norma $\mathcal{H}_\infty$ para distúrbios no sistema.

3.1 Sintonia de PID com limitação da norma $\mathcal{H}_\infty$

Considere uma malha de controle com realimentação unitária e entrada de distúrbio como mostrado na Fig. 3.1 em que $r(t)$ é a entrada de referência, $u(t)$ a entrada da planta, $w(t)$ o distúrbio, $y(t)$ a saída da planta e $e(t)$ o erro entre a entrada de referência e saída. Na Fig. 3.1 considere a planta generalizada como mostrada na Fig. 3.2.

Figura 3.1: Malha de controle com realimentação unitária sob distúrbio.

Fonte: Próprio autor

Figura 3.2: Detalhes de $P(s)$.

Fonte: Próprio autor

A função de transferência que relaciona a saída y com a entrada de distúrbio w é dada por

$$S_{yw} =: P_w \frac{1}{1 + CP_u}, \quad (3.4)$$

e defina

$$P_w(s) =: \frac{N_w(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{n_w} a_k s^k}{\sum_{k=0}^{d_p} b_k s^k}, \quad (3.5)$$

$$P_u(s) =: \frac{N_u(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{n_u} g_k s^k}{\sum_{k=0}^{d_p} b_k s^k}, \quad (3.6)$$

$$C(s) =: \frac{N_c(s)}{s} = \frac{\sum_{k=0}^{n_c} c_k s^k}{s}. \quad (3.7)$$

Suponha que $D(s)$ é um polinômio mônico, defina $h_u = d_p - n_c + 1$, $h_w = d_p - 1$ e reescreva

$$N_u(s) = \sum_{k=0}^{h_u} g_k s^k, \quad N_w(s) = \sum_{k=0}^{h_w} a_k s^k. \quad (3.8)$$

O seguinte teorema fornece uma solução para sintonizar os ganhos do controlador $c_k, \forall k \in \{0, \dots, n_c\}$ de forma a limitar a norma $\mathcal{H}_\infty$ de S_{yw} .

Teorema 3.1. *Se $n_w < d_p$, $n_c < d_p - n_u + 1$, então $\|S_{yw}(s)\|_\infty < \rho$, se existe uma matriz Y e $S = S^T$, tal que*

$$\|S_{yw}(s)\|_\infty = \inf_{\rho > 0, S > 0} \{\rho : R < 0\} \quad (3.9)$$

na qual

$$R = \begin{bmatrix} S\Gamma^T + \Gamma S + \Psi Y + Y^T \Psi^T & \Psi & SC_{cl}^T \\ \bullet & -\rho I & 0 \\ \bullet & \bullet & -\rho I \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -Q^T & \end{array} \right], \quad \Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} b_0 & \cdots & b_{d_p-1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$J = \mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} g_0 & \cdots & g_{h_u} \end{bmatrix} \right), \quad C_{cl}^T = \mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} a_0 & \cdots & a_{h_w} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n_c} \end{bmatrix}$$

de forma que $\bullet$ denota a transposição do elemento correspondente da matriz simétrica e, encontrado-se os valores de S e Y , calcula-se os ganhos ótimos do controlador usando

$$K = -J^{-1}S^{-1}Y^T, \quad (3.10)$$

no caso em que J é quadrada e não singular, caso contrário, os ganhos sub-ótimos podem ser calculados por

$$\min_{\delta \geq 0} \delta : \begin{bmatrix} -I & S^{-1}Y^T + JK \\ * & -\delta \end{bmatrix} < 0, \quad (\Gamma - \Psi(JK)^T)^T S^{-1} + S^{-1}(\Gamma - \Psi(JK)^T) < 0. \quad (3.11)$$

Demonstração. Deixando de usar a notação dos polinômios como função de s , a função de transferência que relaciona a saída y com a entrada de distúrbio w é escrita como

$$S_{yw} = P_w \frac{1}{1 + CP_u} = \frac{N_w \cdot s}{D \cdot s + N_u \cdot N_c}, \quad (3.12)$$

na qual $D \cdot s + N_u \cdot N_c$ é mônico.

Assim, denotando $h_u = d_p - n_c + 1$, $h_w = d_p - 1$, reescreva (3.8) como

$$N_u = \sum_{k=0}^{h_u} g_k s^k, \quad N_w = \sum_{k=0}^{h_w} a_k s^k \quad (3.13)$$

completando com zero os coeficientes necessários e, por hipótese, S_{yw} é estritamente própria. Logo, é possível obter a realização canônica controlável de S_{yw} a qual é denotada como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{cl}x + B_{cl}w, \\ y &= C_{cl}x. \end{aligned} \quad (3.14)$$

em que a matriz B_{cl} na forma canônica controlável tem forma trivial dada por um vetor de tamanho adequado como $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ e a matriz C_{cl} receberá os coeficientes de $N_w \cdot s$. Como o grau do polinômio característico nesse caso será $d_p + 1$ e N_w foi rescrito como um polinômio de ordem $d_p - 1$. Então, $N_w \cdot s$ é ordem d_p . Assim, todos os coeficientes de $N_w \cdot s$ se encontrarão na matriz C_{cl} da seguinte forma

$$C_{cl} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{h_w} \end{bmatrix}$$

e, usando o Lema 3.1 tem-se

$$C_{cl}^T = \mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} a_0 & \cdots & a_{h_w} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A_{cl} contém os coeficientes de $D \cdot s + N_u \cdot N_c$. Como a ordem de $D \cdot s$ é maior que $N_u \cdot N_c$, e o polinômio característico é mônico, então é possível escrever os coeficientes de $D \cdot s$ usando o Lema 3.1 como

$$Q = \mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} b_0 & \cdots & b_{d_p-1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e os coeficientes de $N_u \cdot N_c$ como o produto de duas matrizes J e K ,

$$J = \mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} g_0 & \cdots & g_{h_u} \end{bmatrix} \right), \quad K = \begin{bmatrix} c_0 & \cdots & c_{n_c} \end{bmatrix}^T.$$

Como N_u foi reescrita de forma que o produto $N_u \cdot N_c$ possuísse a mesma ordem de $D \cdot s$, então os coeficientes do polinômio característico serão dados simplesmente por $Q + JK$, que na matriz A_{cl} na forma canônica controlável aparecem como

$$A_{cl} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -Q^T & -(JK)^T \end{array} \right] = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -Q^T & \end{array} \right]}_{\Gamma} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\Psi} (JK)^T.$$

Note que $B_{cl} = \Psi$. Agora, para o sistema em espaço de estado descrito em (3.14), a norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser obtida resolvendo o problema de otimização na matriz de Lyapunov P (BOYD; El Ghaoui; FERON; BALAKRISHNAN, 1994):

$$\|S_w(s)\|_\infty^2 = \inf_{\rho>0, P>0} \{\rho : R_1 < 0\} \quad (3.15)$$

em que $P \in \mathbb{R}^{(d_p+1) \times (d_p+1)}$, $P = P^T$, $\rho \in \mathbb{R}$ tal que $\|S_w(s)\|_\infty < \rho$ e

$$R_1 =: \begin{bmatrix} (\Gamma - \Psi K^T J^T)^T P + P(\Gamma - \Psi K^T J^T) & \Psi & C_{cl}^T \\ \bullet & -\rho I & 0 \\ \bullet & \bullet & -\rho I \end{bmatrix}$$

Então, multiplicando ambos os lados de R_1 por $\text{diag}(P^{-1}, I, I)$, reescreve-se o problema como

$$\|S_{yw}(s)\|_\infty = \inf_{\rho>0, S>0} \{\rho : R < 0\} \quad (3.16)$$

onde

$$R = \begin{bmatrix} S\Gamma^T + \Gamma S + \Psi Y + Y^T \Psi^T & \Psi & SC_{cl}^T \\ \bullet & -\rho I & 0 \\ \bullet & \bullet & -\rho I \end{bmatrix}$$

com $S = P^{-1}$, $Y = -(JK)^T P^{-1}$ e $\bullet$ denota a transposição do elemento correspondente da matriz simétrica. Resolvendo-se essa LMI encontra-se S e Y e calcula-se os ganhos ótimos do controlador usando

$$K = -J^{-1}S^{-1}Y^T \quad (3.17)$$

no caso em que J é quadrada e não singular.

Em geral, a matriz J^{-1} não é quadrada. Para encontrar o controlador então é necessário resolver o sistema sobre-determinado $JK = -S^{-1}Y^T$ usando um método dos mínimos quadrados. Entretanto, não é possível garantir a estabilidade do sistema, pois não existe uma solução exata e a solução obtida apenas leva em consideração o erro quadrático médio dos coeficientes. Alternativamente, pode-se resolver $JK = -S^{-1}Y^T$ como

$$\min_{\delta \geq 0} \delta : \|S^{-1}Y^T + JK\|_2^2 < \delta,$$

mas note que

$$\begin{aligned} \|S^{-1}Y^T + JK\|_2^2 &< \delta \\ (S^{-1}Y^T + JK)^T(S^{-1}Y^T + JK) - \delta &< 0 \end{aligned}$$

então, aplicando o complemento de Schur,

$$\begin{bmatrix} -I & S^{-1}Y^T + JK \\ * & -\delta \end{bmatrix} < 0$$

e para garantir a estabilidade usa-se a inequação de Lyapunov

$$(\Gamma - \Psi(JK)^T)^T S^{-1} + S^{-1}(\Gamma - \Psi(JK)^T) < 0.$$

assim, o problema se torna

$$\min_{\delta \geq 0} \delta : \begin{bmatrix} -I & S^{-1}Y^T + JK \\ * & -\delta \end{bmatrix} < 0,$$

$$(\Gamma - \Psi(JK)^T)^T S^{-1} + S^{-1}(\Gamma - \Psi(JK)^T) < 0,$$

na qual as únicas variáveis a serem determinadas são K e δ , concluindo a demonstração do teorema. $\square$

Observação 3.2. O problema PID é considerado para quando $K = [k_i \ k_p \ k_d]^T$.

Observação 3.3. No caso em que $C(s)$ é um PID com filtro como $C(s) = \frac{k_p s + k_i + k_d s^2}{s(s+\tau)}$, para um valor fixo τ , reescreva

$$D^*(s) = (s + \tau)D(s),$$

$$N_w^*(s) = (s + \tau)N_w(s),$$

$$C^*(s) = \frac{k_p s + k_i + k_d s^2}{s},$$

e, como $D^*(s)$ é mônico, proceda como descrito anteriormente.

Observação 3.4. Como K será resolvido somente ao fim da otimização após as devidas trocas de variáveis, é possível que o sistema tenha autovalores muito grandes, o que torna infactível encontrar algum controlador. Além disso, nem sempre o mínimo valor possível para ρ é a melhor solução. Assim, é possível prescrever algum valor máximo para ρ de forma que

$$R = \begin{bmatrix} S\Gamma^T + \Gamma S + \Gamma_2 Y + Y^T \Psi^T & \Psi & SF^T \\ \bullet & -\rho I & 0 \\ \bullet & \bullet & -\rho I \end{bmatrix} < 0,$$

e

$$\min_{\delta \geq 0} \delta : \begin{bmatrix} -I & S^{-1}Y^T + JK \\ * & -\delta \end{bmatrix} < 0,$$

$$(\Gamma - \Psi(JK)^T)^T S^{-1} + S^{-1}(\Gamma - \Psi(JK)^T) < 0,$$

tenham solução.

A seguir encontram-se exemplos numéricos para validação da sintonia proposta.

Exemplo 3.1. Considere o seguinte sistema,

$$P_w(s) = \frac{1}{s+5}, P_u(s) = \frac{10}{s+5}, \quad (3.18)$$

$$C(s) = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s(s+2)}, \quad (3.19)$$

determine os ganhos k_d, k_p e k_i de forma que $\|S_{yw}(s)\|_\infty$ seja mínima. Como trata-se de um PID com filtro, primeiramente reescreve-se

$$D^*(s) = (s+2)(s+5) = s^2 + 7s + 10, \quad (3.20)$$

$$N_w^*(s) = s+5, \quad (3.21)$$

e então tem-se o problema equivalente ao seguinte sistema

$$P_w(s) = \frac{s+5}{s^2 + 7s + 10}, \quad (3.22)$$

$$P_u(s) = \frac{10}{s^2 + 7s + 10}, \quad (3.23)$$

$$C(s) = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s}. \quad (3.24)$$

Assim identifique que,

$$n_w = 1, n_u = 0, n_c = 2, d_p = 2,$$

então as condições $n_w < d_p$ e $n_c < d_p - n_u + 1$ são satisfeitas. Escreve-se então as matrizes Toeplitz do Lema 3.1 para esse sistema como,

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 7 & 10 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_{cl} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_i \\ k_p \\ k_d \end{bmatrix}$$

assim,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -7 \end{bmatrix} \text{ e } \Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Encontra-se primeiramente,

$$S = \begin{bmatrix} 24253.0 & -2558.9 & 5117.6 \\ -2558.9 & 5117.8 & -10235.0 \\ 5117.6 & -10235.0 & 20471.0 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 23140.0 & -46281.0 & -24785.0 \end{bmatrix}$$

e nesse caso como J é quadrada têm-se os ganhos ótimos por

$$K = -J^{-1}S^{-1}Y^T = \begin{bmatrix} 0.00000290888 \\ 31974.7 \\ 15987.3 \end{bmatrix}$$

Com esses ganhos, obtém-se a resposta frequencial de

$$S_{yw} = \frac{s^2 + 2s}{s^3 + 1.599 \cdot 10^5 s^2 + 3.198 \cdot 10^5 s + 2.909 \cdot 10^{-5}}$$

como mostrado na Fig. 3.3. Note que a limitação da norma é atendida.

Figura 3.3: Resposta em frequência de S_{yw} mostrando que $\|S_{yw}\|_\infty < \rho$.

Fonte: Próprio autor

Exemplo 3.2. Considere o seguinte sistema,

$$P_w(s) = \frac{2}{s^2 + 5s + 6}, \quad (3.26)$$

$$P_u(s) = \frac{s - 1}{s^2 + 5s + 6}, \quad (3.27)$$

$$C(s) = \frac{k_p s + k_i}{s}, \quad (3.28)$$

determine os ganhos k_p e k_i de forma que $\|S_{yw}(s)\|_\infty < 0.95$. Identifica-se primeiramente que,

$$n_w = 0, n_u = 1, n_c = 1, d_p = 2, \rho = 0.95,$$

então as condições $n_w < d_p$ e $n_c < d_p - n_u + 1$ são satisfeitas. Escreve-se então as matrizes Toeplitz do Lema 3.1 para esse sistema como,

$$Q = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_{cl} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_i \\ k_p \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

assim

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \end{bmatrix} \text{ e } \Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Utiliza-se $\rho = 0.95$ como um valor fixo e obtém-se

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7389 & 0.74269 & 0.1488 \\ 0.74269 & 6.3769 & 1.0979 \\ 0.1488 & 1.0979 & 0.74463 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} -1.2178 & -1.6492 & 5.8019 \end{bmatrix}$$

e como J não é quadrada, resolve-se a segunda parte da otimização do Teorema 3.1 obtendo $\delta = 7.3841$ com os ganhos subótimos dados por

$$K = \begin{bmatrix} -0.64931 \\ -3.2899 \end{bmatrix}.$$

Com esses ganhos, obtém-se a resposta frequencial de

$$S_{yw} = \frac{2s}{s^3 + 1.71s^2 + 8.641s + 0.6493}$$

como mostrado na Fig. 3.4. Note que a limitação da norma é satisfeita.

3.2 Proposta de adaptação do controlador PID

Nesta seção está descrita a proposta de adaptação de um controlador PID. De forma geral, deseja-se encontrar os ganhos k_p , k_i e k_d de forma que o desempenho do sistema realimentado para uma condição nominal seja perseguido com a planta sujeita a variações paramétricas. A função de transferência de malha fechada sem a presença do distúrbio que relaciona $r(t)$ com $y(t)$ do sistema mostrado na Fig. 3.1 é dada por

$$M_F(s) = \frac{C(s)P_u(s)}{1 + C(s)P_u(s)} = \frac{N_c N_u}{sD + N_c N_u}. \quad (3.31)$$

Figura 3.4: Resposta em frequência de S_{yw} mostrando que $\|S_{yw}\|_\infty < \rho$.

Fonte: Próprio autor

Suponha que para uma planta nominal denotada $P_{u_n}(s)$ seja projetado um controlador denotado $C_n(s)$ e, então

$$M_{F_n}(s) = \frac{N_{c_n} N_{u_n}}{s D_n + N_{c_n} N_{u_n}}. \quad (3.32)$$

O objetivo será manter a função de transferência de malha fechada igual a função de transferência obtida com o controlador nominal, isso implica que é suficiente,

$$N_c N_u = N_{c_n} N_{u_n}, \quad (3.33)$$

$$N_c N_u = N_{c_n} N_{u_n} + s(D_n - D). \quad (3.34)$$

Assim, escreva

$$N_{c_n} N_{u_n} = \sum_{k=0}^o q_k s^k, \quad (3.35)$$

$$N_{c_n} N_{u_n} + s(D_n - D) = \sum_{k=0}^l p_k s^k, \quad (3.36)$$

com $o = n_u + n_c$ e $l = \max(n_u + n_c, d_p + 1)$. O Lema 3.1 é a base da abordagem proposta, assim como a seguinte suposição

Suposição 3.1. $n_u + n_c = \max(n_u + n_c, d_p + 1)$.

O controlador de interesse é um PID, descrito por

$$C(s) = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s}. \quad (3.37)$$

Assim, em decorrência do Lema 3.1 e da Suposição 3.1 podemos escrever o seguinte sistema de equações algébricas lineares

$$\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

em que $\mathbf{p} = [p_0 \ p_1 \ \cdots \ p_{l-1} \ p_l]^T$ e $\mathbf{q} = [q_0 \ q_1 \ \cdots \ q_{o-1} \ q_o]^T$ são obtidos de acordo com (3.36) e (3.35), respectivamente e

$$A = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & 0 \\ g_1 & g_0 & 0 \\ g_2 & g_1 & g_0 \\ g_3 & g_2 & g_1 \\ g_4 & g_3 & g_2 \\ \vdots & & \\ g_{n_u} & g_{n_u-1} & g_{n_u-2} \\ 0 & g_{n_u} & g_{n_u-1} \\ 0 & 0 & g_{n_u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} k_i \\ k_p \\ k_d \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

3.2.1 Solução via mínimos quadrados

Sejam $\mathbf{c} = [\mathbf{q}^T \ \mathbf{p}^T]^T$ e $Q = [A^T \ A^T]^T$. Como sistema linear $Q\mathbf{x} = \mathbf{c}$ é sobredeterminado, pode-se então encontrar uma solução que melhor atenda o sistema minimizando-se algum critério. Primeiramente, será utilizado, como exemplo, o que produz a menor norma Euclidiana dos valores dos ganhos do controlador.

Usando o método dos mínimos quadrados, tem-se que a solução que minimiza a norma Euclidiana é dada por:

$$\mathbf{x} = (Q^T Q)^{-1} Q^T \mathbf{c} = Q^+ \mathbf{c} \quad (3.40)$$

em que $Q^+ = (Q^T Q)^{-1} Q^T$ é a pseudo-matriz inversa de Moore–Penrose. Podemos reescrever a solução ótima como sendo:

$$\hat{Q}\mathbf{x} = \hat{B} \quad (3.41)$$

em que $\hat{Q} =: Q^T Q$ e $\hat{B} =: Q^T \mathbf{c}$. Logo, basta resolver (3.41) via eliminação de Gauss-Jordan, por exemplo, ou qualquer outro método numérico para resolver o sistema de equações lineares. O seguinte exemplo ilustra o procedimento proposto.

Exemplo 3.3. Considere uma planta, cuja função de transferência nominal é dada por:

$$P_{u_n}(s) = \frac{10s^2 + 5s + 1}{100s^3 + 50s^2 + 10s + 1}, \quad (3.42)$$

o controlador PID projetado:

$$C_n(s) = \frac{s^2 + 15s + 6}{s}. \quad (3.43)$$

A função de transferência de malha fechada é

$$M_{F_n}(s) = \frac{10s^4 + 155s^3 + 136s^2 + 45s + 6}{110s^4 + 205s^3 + 146s^2 + 46s + 6}. \quad (3.44)$$

Agora, suponha que a planta real seja

$$P_u(s) = \frac{8s^2 + 7s + 1}{120s^3 + 30s^2 + 15s + 1}. \quad (3.45)$$

Primeiramente, identifica-se que $n_u = 2$, $d_p = 3$ e $n_c = 2$, logo satisfaz $n_u + n_c = \max(n_u + n_c, d_p + 1)$. Assim, é construído com o uso do Lema 3.1 as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 1 \\ 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 6 \\ 45 \\ 136 \\ 155 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 6 \\ 45 \\ 131 \\ 175 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [\mathbf{q}^T \quad \mathbf{p}^T]^T \quad (3.46)$$

Agora, basta resolver o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 1 \\ 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_i \\ k_p \\ k_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 45 \\ 136 \\ 155 \\ 10 \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Com a pseudo-inversa de Moore-Penrose, obtém-se a solução com a menor norma Euclidiana dos elementos do ganho do PID

$$k_i = 1,7720,$$

$$k_p = 18,7364,$$

$$k_d = 0,8239.$$

Na Fig. 3.5 encontra-se a comparação entre as respostas obtidas. Fica evidente uma melhora na resposta do sistema ao realizar uma ação para tentar voltar o sistema realimentado para a condição nominal de operação.

Figura 3.5: Resposta ao degrau do sistema comparando situação nominal projetada, planta alterada com controlador nominal e a planta alterada com controlador otimizado por mínimos quadrados sem restrições de estabilidade.

Fonte: Próprio autor

Observação 3.5. Observe que a forma real do controlador PID pode ser considerada

$$C(s) := \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s(s + \tau)} \quad (3.48)$$

com um valor de τ fixado previamente.

Pode acontecer que o controlador obtido pelo procedimento de otimização por mínimos quadrados não seja capaz de estabilizar o sistema realimentado. É fundamental, portanto, restringir os ganhos do controlador para que pertençam ao conjunto de controladores estabilizantes.

3.2.2 Solução via otimização quadrática com restrições

O problema de otimização quadrática sujeito à restrições lineares pode ser formulado como segue

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T H \mathbf{x} + \mathbf{f}^T \mathbf{x}, \quad (3.49)$$

em que H é uma matriz simétrica e $\mathbf{f}^T$ um vetor, ambos de dimensões apropriadas, sujeito às restrições lineares descritas por

$$R\mathbf{x} \leq \mathbf{w}, \quad (3.50)$$

em que R é uma matriz e $\mathbf{w}$ um vetor de dimensões apropriadas, obtidos a partir da generalização de Hermite-Biehler para estabilidade (DATTA; HO; BHATTACHARYYA, 2000). Entretanto, (3.49) pode ser escrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|Q\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2 &= \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} (Q\mathbf{x} - \mathbf{c})^T (Q\mathbf{x} - \mathbf{c}) \\ &= \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T Q^T Q \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T Q^T \mathbf{c} + \mathbf{c}^T \mathbf{c}). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Como $\mathbf{c}^T \mathbf{c}$ é fixo, de acordo com Coleman e Li (1996), então é suficiente resolver o seguinte problema de otimização quadrática como em (3.49) usando

$$H = Q^T Q, \quad \mathbf{f} = -Q^T \mathbf{c}. \quad (3.52)$$

Para ilustrar o método de adaptação proposto, segue um exemplo de aplicação, mas, usando a restrição sobre os ganhos para o caso nominal.

Exemplo 3.4. Considere o conversor boost mostrado na Fig. 3.6 com dupla malha de controle para regulação da tensão de saída.

Figura 3.6: Conversor boost ideal.

Fonte: Próprio autor

A tensão de saída V é regulada indiretamente pela corrente de entrada do conversor. Para a malha interna utiliza-se um controlador do tipo *sliding mode* e na malha externa um controlador PI. A função de transferência da malha interna, de acordo com Alzate e Oliveira (2016), é dada por

$$P_u(s) = \frac{-LV^2s + RE^2}{CREVs + 2EV}. \quad (3.53)$$

Considerando a condição nominal $L = 1mH$, $C = 1000\mu F$, $V = 100V$, $E = 10V$ e uma carga $R = 50\Omega$, a planta nominal é

$$P_{un}(s) = \frac{-10s + 5000}{50s + 2000}. \quad (3.54)$$

A partir da planta nominal, obteve-se o seguinte controlador PI

$$C(s) = 0,005 + \frac{73}{s}. \quad (3.55)$$

assim o sistema de malha fechada possui a seguinte função de transferência

$$M_{F_n} = \frac{-0,01s^2 - 495s + 250000}{49,99s^2 + 1505s + 250000}. \quad (3.56)$$

Suponha a uma mudança de carga no sistema para $R = 100\Omega$ e uma queda na tensão de alimentação de 5V. Nesse caso, a planta se tornou

$$P(s) = \frac{-10s + 2500}{50s + 1000}. \quad (3.57)$$

Deseja-se então ajustar o controlador novamente para que a condição nominal seja aproximada. Então, identificamos primeiramente que $n_u = d_p = n_c = 1$, logo satisfaz $n_u + n_c = \max(n_u + n_c, d_p + 1)$. A partir de (3.57) é construído com o Lema 3.1 as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2500 & 0 \\ -10 & 2500 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} 250000 \\ -495 \\ -0,01 \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} 250000 \\ 505 \\ -0,01 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

e obtém-se

$$\begin{bmatrix} 2500 & 0 \\ -10 & 2500 \\ 0 & -10 \\ 2500 & 0 \\ -10 & 2500 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_i \\ k_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250000 \\ -495 \\ -0,01 \\ 250000 \\ 505 \\ -0,01 \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Para garantir que o sistema seja estável, é necessário impor algumas restrições aos valores de k_i e k_p . A partir da determinação do conjunto estabilizante, essas restrições podem ser obtidas. No caso desse sistema, de acordo com Alzate e Oliveira (2016), essas restrições são dadas por

$$k_p < \frac{C E R V}{L V^2} = 5, \quad (3.60)$$

$$k_i < \left(\frac{E^2 R}{L V^2} \right) k_p + \left(\frac{2 E}{L V} \right) = 250k_p + 100, \quad (3.61)$$

$$k_i > 0. \quad (3.62)$$

Como essas restrições são lineares e a função de custo é quadrática, utilizou-se o algoritmo do ponto do interior no Matlab e obteve-se $k_i = 100$ e $k_p = 0,4020$. A resposta ao degrau comparativa entre todos os controladores é mostrada na Fig. 3.7, onde observa-se uma melhora significativa quando comparada à situação em que não se altera o controlador.

Figura 3.7: Resposta ao degrau do sistema comparando situação nominal projetada, planta alterada com controlador nominal e a planta alterada com controlador otimizado com restrições lineares de estabilidade.

Fonte: Próprio autor

No exemplo anterior, as condições de Routh-Hurwitz geram restrições lineares sob os ganhos do controlador PID. Entretanto, em geral, usando o critério de Routh-Hurwitz, as restrições sobre os ganhos do controlador para obter os conjuntos estabilizantes podem não ser lineares. Assim, os resultados sobre assinatura de polinômios apresentados na Seção 2.4 obtidos via o teorema de Hermite-Biehler e a sua generalização podem ser usados para obter restrições lineares. Ao detectar uma variação paramétrica, o controlador então adaptado pode passar a operar. Entretanto, é necessário garantir que a troca para esse controlador não instabilize o processo. Na subseção seguinte é feita a análise para garantia de estabilidade do controlador projetado.

3.3 Estabilidade no chaveamento de controladores em *gain scheduling*

Considere o seguinte sistema

$$\dot{x} = A_i x + B_i u, \quad (3.63)$$

onde $i \in \{1, \dots, N\}$ é o índice que seleciona os subsistemas de forma arbitrária. Para falar acerca da estabilidade global (3.63), utiliza-se a seguinte definição e teorema de Skafidas, Evans, Savkin e Petersen (1999).

Definição 3.1. *Sejam $Z_1 = Z_1^T, Z_2 = Z_2^T, \dots, Z_N = Z_N^T$ matrizes dadas. Então diz-se que o conjunto $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_N\}$ é estritamente completo se para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^j \setminus \{0\}$, $j \in \mathbb{N}^+$, tal que $x_0^T Z_i x_0 < 0$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$.*

Teorema 3.2. *O sistema (3.63) é globalmente assintoticamente estável se existe $P = P' > 0$ tal que*

$$Z_i \triangleq A_i^T P + P A_i, \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.64)$$

é estritamente completo.

Assim é suficiente que toda planta a ser considerada com seu devido controlador adaptado possua uma matriz P comum a todos os sistemas. O método proposto nesse capítulo permite que a sensibilidade seja limitada para toda e qualquer frequência presente no distúrbio. Essa limitação pode ser muito conservadora para os problemas práticos que possuem apenas algumas frequências indesejadas. Assim, no próximo capítulo é apresentada uma técnica de sintonia para PIDs para mitigar o efeito dessas frequências na saída do sistema e mantê-las dentro dos níveis adequados.

4 SINTONIA DE PIDS PARA MITIGAÇÃO DE HARMÔNICOS

Este capítulo apresenta um método de sintonia do controlador PID para mitigar harmônicos provenientes de distúrbios no sistema utilizando o conjunto estabilizante. Resultados preliminares foram apresentados no trabalho [Magossi, Han, Oliveira e Bhattacharyya \(2018\)](#). Na seção a seguir encontra-se um resumo sobre erro em regime permanente entre a referência e a saída e uma restrição de projeto na função de transferência de erro, ambas necessárias para o desenvolvimento dos principais resultados seguintes.

4.1 Rastreamento de referência e rejeição de distúrbios

Considere uma malha de controle de realimentação unitária com distúrbio na planta, como mostrado na Fig. 3.1, na qual $r(t)$ é a referência, $u(t)$ a entrada da planta, $w(t)$ o distúrbio, $y(t)$ a saída da planta e $e(t)$ o erro entre a referência e a saída. Assume-se que $r(t), u(t), y(t), e(t) \in \mathbb{R}$ enquanto define-se $d(t) =: w(t) = [d_1(t) \ d_2(t) \ \cdots \ d_q(t)]^T \in \mathbb{R}^q$ e $P_d(s) =: P_w(s)$. O objetivo de controle é fazer a saída $y(t)$ rastrear a referência $r(t)$. Entretanto, o sistema está sujeito ao distúrbio $d(t)$ e a saída se desvia da referência dependendo da classe dos sinais de perturbação. Usando o princípio do modelo interno, podemos encontrar uma condição suficiente para um controlador de estabilização rastrear a referência e rejeitar uma classe de sinais de perturbação. Defina os sinais de referência e de perturbação no domínio de Laplace como

$$R(s) := \frac{n_r(s)}{d_r(s)}, \quad (4.1)$$

$$D(s) := \begin{bmatrix} \frac{n_{d_1}(s)}{d_{d_1}(s)} & \cdots & \frac{n_{d_q}(s)}{d_{d_q}(s)} \end{bmatrix}^T, \quad (4.2)$$

em que $n_r(s), d_r(s), n_{d_i}(s), d_{d_i}(s)$ para $i = \{1, \dots, q\}$ são polinômios com coeficientes reais em s . Seja $U(s)$ a transformada de Laplace de $u(t)$. Assume-se que

$$Y(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} P_u(s) & P_d(s) \end{bmatrix}}_{=: P(s)} \begin{bmatrix} U(s) \\ D(s) \end{bmatrix},$$

na qual

$$P_u(s) = \frac{n_{P_u}(s)}{d_{P_u}(s)}, \quad (4.3)$$

$$P_d(s) = \begin{bmatrix} P_{d_1}(s) & \cdots & P_{d_q}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n_{P_{d_1}}(s)}{d_{P_{d_1}}(s)} & \cdots & \frac{n_{P_{d_q}}(s)}{d_{P_{d_q}}(s)} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Além disso,

$$d_{P_u}(s) = d_{P_{d_1}}(s) = \cdots = d_{P_{d_q}}(s). \quad (4.5)$$

Como

$$E(s) = R(s) - Y(s), U(s) = C(s)E(s), \quad (4.6)$$

com

$$C(s) = \frac{n_C(s)}{d_C(s)}, \quad (4.7)$$

tem-se a partir de (4.5) $E(s) = \frac{d_{P_u}(s)d_C(s)}{d_{cl}(s)} \frac{n_r(s)}{d_r(s)} - \sum_{i=1}^q \frac{d_C(s)n_{P_{d_i}}(s)}{d_{cl}(s)} \frac{n_{d_i}(s)}{d_{d_i}(s)}$, na qual o polinômio característico é

$$d_{cl}(s) = d_C(s)d_{P_u}(s) + n_C(s)n_{P_u}(s). \quad (4.8)$$

Assumindo que $d_{cl}(s)$ é Hurwitz, pelo teorema do valor final

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{d_{P_u}(s)d_C(s)n_r(s)}{d_{cl}(s)d_r(s)} - \sum_{i=1}^q \frac{d_C(s)n_{P_{d_i}}(s)n_{d_i}(s)}{d_{cl}(s)d_{d_i}(s)} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Então, o erro $e(t)$ vai para zero se e somente se o controlador $C(s)$ é projetado de forma que $d_r(s)$ divide $d_C(s)$ e $d_{d_i}(s)$ divide $d_C(s)$ for $i = 1, \dots, q$.

4.1.1 Restrição da norma $\mathcal{H}_\infty$ na função de transferência do erro

Encontra-se aqui resumidos os resultados de [Han, Keel e Bhattacharyya \(2018\)](#) para fácil referência. Seja

$$S_u(s) := \frac{1}{1 + P_u(s)C(s)}. \quad (4.10)$$

Considere que a norma $\mathcal{H}_\infty$ seja menor que $\gamma > 0$, tal que

$$\|S_u(s)\|_\infty < \gamma, \quad (4.11)$$

que é equivalente a

$$|1 + P_u(j\omega)C(j\omega)| > \frac{1}{\gamma}, \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (4.12)$$

A condição (4.12) implica que a magnitude da função de transferência de erro $r(t)$ para $e(t)$ tem que ser menor que γ para “cada” frequência no intervalo $[0, \infty)$.

4.2 Resultado principal

Nesta seção, o resultado de [Han, Keel e Bhattacharyya \(2018\)](#) foi estendido para limitar o efeito dos harmônicos presentes no distúrbio e aplica-se limites na função de transferência $d(t)$ para $e(t)$ para algumas frequências selecionadas, em vez de todo o intervalo $[0, \infty)$. Suponha que cada sinal de distúrbio $d_i(t)$ possa ser decomposto numa soma de sinais senoidais, doravante chamados harmônicos, como

$$d_i(t) = \sum_{h=1}^m A_{h_{d_i}} \sin(\omega_{h_{d_i}} t), \quad (4.13)$$

em que $A_h \in \mathbb{R}$ é a amplitude do harmônico e $\omega_{h_{d_i}} \in \mathbb{R}^+$ é a frequência do harmônico. Se a malha fechada é estável e $d_r(s)$ divide $d_C(s)$, então a saída pode ser reescrita como $y(t) = y_r(t) + \sum_i y_{d_i}(t)$, a saída $y_r(t)$ segue a referência $r(t)$ em regime permanente, e então a partir de (4.9), quando $t \rightarrow \infty$

$$e(t) \rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left\{ - \sum_{i=1}^q \frac{d_C(s) n_{P_{d_i}}(s) n_{d_i}(s)}{d_{cl}(s) d_{d_i}(s)} \right\},$$

que é a soma da resposta de perturbação na saída, assim

$$\sum_h y_{d_i}(t) \rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left\{ - \sum_{i=1}^q \frac{d_C(s) n_{P_{d_i}}(s) n_{d_i}(s)}{\underbrace{d_{cl}(s) d_{d_i}(s)}_{=: Y_{d_i}(s)}} \right\}.$$

Deixe $\tilde{\gamma}_{h_{d_i}}$ ser um limite superior prescrito abaixo do qual queremos mitigar a amplitude do harmônico correspondente na perturbação da saída $y(t)$ em regime permanente. Então, substituindo (4.2), (4.3), (4.4), (4.7) e (4.13), para cada harmônico têm-se

$$|Y_{d_i}(j\omega_{h_{d_i}})| < \tilde{\gamma}_{h_{d_i}} \Leftrightarrow |S_u(j\omega_{h_{d_i}})| < \frac{\tilde{\gamma}_{h_{d_i}}}{\underbrace{|P_{d_i}(j\omega_{h_{d_i}})| |A_{h_{d_i}}|}_{=: \gamma_{h_{d_i}}}}. \quad (4.14)$$

Assim, pode-se projetar um controlador para mitigar o impacto de cada harmônico presente no sinal de perturbação, prescrevendo a magnitude da resposta de frequência da função de transferência de erro de $r(t)$ para $e(t)$ em $\omega_{h_{d_i}}$ para ser menor que $\gamma_{h_{d_i}}$.

Nas próximas subseções, projeta-se graficamente controladores PI / PID que renderizam o sistema de malha fechada para que a resposta de frequência do sinal de erro seja menor que um valor prescrito $\gamma_{h_{d_i}}$ em cada frequência fixa $\omega_{h_{d_i}}$.

4.2.1 Controlador PI

O controlador PI clássico é dado por

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}. \quad (4.15)$$

Suposição 4.1. A planta não tem zeros $j\omega$ localizados em $\omega_{h_{d_i}}$, assim

$$|P_u(j\omega_{h_{d_i}})| \neq 0. \quad (4.16)$$

Escreva $P_u(j\omega_{h_{d_i}}) = P_{real}(j\omega_{h_{d_i}}) + j\omega_{h_{d_i}} P_{imag}(j\omega_{h_{d_i}})$ e seguindo os passos dados em Han, Keel e Bhattacharyya (2018) e usando (4.12) pode-se escrever (4.14) como

$$\frac{(k_i - c_1)^2}{a^2} + \frac{(k_p - c_2)^2}{b^2} > 1 \quad (4.17)$$

where

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{-\omega_{h_{d_i}}^2 P_{imag}(\omega_{h_{d_i}})}{|P_u(j\omega_{h_{d_i}})|^2}, \quad c_2 = \frac{-P_{real}(\omega_{h_{d_i}})}{|P_u(j\omega_{h_{d_i}})|^2}, \\ a &= \frac{\omega_{h_{d_i}}}{\gamma_{h_{d_i}} |P_u(j\omega_{h_{d_i}})|}, \quad b = \frac{1}{\gamma_{h_{d_i}} |P_u(j\omega_{h_{d_i}})|} \end{aligned} \quad (4.18)$$

que é equivalente a k_p, k_i localizados fora da elipse com centro em

$$\left(\frac{-\omega_{h_{d_i}}^2 P_{imag}(\omega_{h_{d_i}})}{|P_u(j\omega_{h_{d_i}})|^2}, \frac{-P_{real}(\omega_{h_{d_i}})}{|P_u(j\omega_{h_{d_i}})|^2} \right) \text{ e eixos principais em } \frac{2}{\gamma_{h_{d_i}} |P_u(j\omega_{h_{d_i}})|}, \frac{2\omega_{h_{d_i}}}{\gamma_{h_{d_i}} |P_u(j\omega_{h_{d_i}})|}.$$

Portanto, a função de transferência de erro pode ser usada para limitar a amplitude dos harmônicos presentes nas perturbações na saída do sistema. O método gráfico desenvolvido é ilustrado na Fig. 4.1, no qual os ganhos dos controladores que atendem as especificações encontram-se dentro do conjunto estabilizador mas fora de todas as elipses.

Figura 4.1: Os ganhos do conjunto estabilizante que satisfaz a condição de mitigação harmônica está fora das elipses.

4.2.2 Controlador PID

O controlador PID é descrito como

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (4.19)$$

e para $s = j\omega$,

$$C(j\omega) = k_p - j\frac{1}{\omega}(k_i - \omega^2 k_d) \quad (4.20)$$

então, novamente seguindo os passos dados em [Han, Keel e Bhattacharyya \(2018\)](#), suponha que exista o conjunto estabilizante $S(k_d = k_d^*)$ para um valor fixo de k_d^* , logo os parâmetros do controlador k_p, k_i, k_d deverão estar em

$$\frac{(k_i - \tilde{c}_1)^2}{a^2} + \frac{(k_p - c_2)^2}{b^2} > 1 \quad (4.21)$$

na qual

$$\tilde{c}_1 = \omega^2 k_d^* + c_1.$$

Observação 4.1. O caso em que $d_i(t)$ é uma constante não precisa ser abordada porque da Seção 4.1 sabe-se que esta perturbação será completamente rejeitada para os controladores PI e PID.

A seguir um exemplo numérico é feito para ilustrar a sintonia proposta.

Exemplo 4.1. Considere o sistema

$$\begin{aligned} P_u(s) &= \frac{s - 5}{10s^2 + 16s + 2}, \\ P_d(s) &= \frac{20s^2 + 8s + 1}{10s^2 + 16s + 2}, \\ C(s) &= k_p + \frac{k_i}{s}. \end{aligned}$$

A referência é um degrau unitário e o distúrbio presente no sistema é

$$d_1(t) = \sum_{h=1}^2 A_{h_{d_1}} \sin(\omega_{h_{d_1}} t), \quad (4.22)$$

com $A_{1_{d_1}} = 0.6$, $\omega_{1_{d_1}} = 2$ rad/s, $A_{2_{d_1}} = 0.4$, $\omega_{2_{d_1}} = 3$ rad/s. Suponha que seja requerido que

- Amplitude na saída do harmônico em 2 rad/s menor que 2,
- Amplitude na saída do harmônico em 3 rad/s menor que 2.

Como somente um distúrbio está presente no sistema, por simplicidade denota-se $\omega_1 =: \omega_{1_{d_1}}$ e $\omega_2 =: \omega_{2_{d_1}}$. Das especificações requeridas, têm-se que

$$\tilde{\gamma}_{1_{d_1}} = 2, \tilde{\gamma}_{2_{d_1}} = 2,$$

assim,

$$\gamma_1 =: \gamma_{1_{d_1}} \approx 2.0544, \gamma_2 =: \gamma_{2_{d_1}} \approx 2.7752.$$

Então usando (4.17)-(4.18) obtém-se todos os ganhos estabilizantes que se encontram fora da elipse e que atendem as especificações, como mostrado na Fig. 4.2. Foram selecionados quatro pontos, mostrados na Tabela 4.1, para mostrar o atendimento ou não das especificações.

Tabela 4.1: Controladores selecionados para verificar o atendimento das especificações.

	■	◆	▲	●
k_p	-14.0861	-12.2734	-7.9683	-2.7568
k_i	-1.1521	-2.4424	-3.0876	-1.5207

Figura 4.2: Conjunto estabilizante com restrições para amplitude dos harmônicos.

Fonte: Próprio autor

Figura 4.3: Magnitude da resposta em frequência de $S_u(j\omega)$ para o controlador ■.

Fonte: Próprio autor

Como o ponto ■ encontra-se fora da elipse para $|S_u(j\omega_1)|$ mas dentro da elipse para $|S_u(j\omega_2)|$, o controlador atende as especificações para ω_1 mas não para ω_2 como confirmado pela resposta em frequência de $S_u(j\omega)$ mostrado na Fig. 4.3.

Para o ponto ◆ note que o ponto está dentro da elipse para $|S_u(j\omega_1)|$ e $|S_u(j\omega_2)|$, significando que não haverá o atendimento das especificações tanto para ω_1 e ω_2 . O $|S_u(j\omega)|$ é mostrado na Fig. 4.4.

Figura 4.4: Magnitude da resposta em frequência de $S_u(j\omega)$ para o controlador ◆.

Fonte: Próprio autor

Para o ponto ▲ note que o ponto está dentro da elipse para $|S_u(j\omega_1)|$ mas fora da elipse para $|S_u(j\omega_2)|$. Nesse caso o controlador atende as especificações para ω_2 mas não para ω_1 como evidenciado na Fig. 4.5.

Para o ponto ● note que está fora das elipses para $|S_u(j\omega_1)|$ e $|S_u(j\omega_2)|$, logo esse controlador atende as especificações tanto para ω_1 e ω_2 como mostrado na Fig. 4.6. Portanto o controlador ● é um dos controladores possíveis que atendem as especificações de projeto. A resposta temporal desse sistema é mostrada na Fig. 4.7.

Na Fig. 4.8 encontra-se a transformada de Fourier para a saída mostrada na Fig. 4.7 e confirma que as especificações γ_1 e γ_2 foram atendidas para ambos os harmônicos em ω_1 e ω_2 , respectivamente.

Esse exemplo evidencia a flexibilidade do projetista na escolha do controlador e o atendimento das especificações da amplitude dos harmônicos na saída do sistema. ♣

O próximo capítulo trata da sintonia de um controlador PI multiobjetivo com mitigação de harmônico e requisitos de margem de fase para um conversor boost.

Figura 4.5: Magnitude da resposta em frequência de $S_u(j\omega)$ para o controlador $\blacktriangle$.

Fonte: Próprio autor

Figura 4.6: Magnitude da resposta em frequência de $S_u(j\omega)$ para o controlador $\bullet$.

Fonte: Próprio autor

Figura 4.7: Resposta ao degrau para o sistema com o controlador ●.

Fonte: Próprio autor

Figura 4.8: Transformada de Fourier para o sinal de saída usando o controlador ●.

Fonte: Próprio autor

5 MITIGAÇÃO DE HARMÔNICO PARA CONVERSOR BOOST

Neste capítulo encontra-se uma aplicação prática para o uso do método de mitigação de harmônico proposto, contemplando resultados de simulação e experimentais. A seguir é descrito o problema a ser tratado.

5.1 Descrição do problema

Um conversor boost como mostrado Fig. 5.1, é alimentado por uma fonte de tensão contínua de 60V, a qual também opera em algumas situações com 70V. Além disso, essa fonte de tensão de entrada está poluída com um harmônico de 5 Hz e amplitude de 10V de pico. Deseja-se manter a tensão de saída média do conversor em 120V e a amplitude do harmônico de 5 Hz na tensão de saída inferior a 5V de pico. Há uma restrição também para a margem fase que deve ser superior a 10 graus para uma frequência de cruzamento de ganho mínima de 50 Hz. Assim, os requisitos de projeto são sumarizados na Tabela 5.1.

Figura 5.1: Conversor boost.

Fonte: Próprio autor

Tabela 5.1: Requisitos de projeto para os controladores

Margem de Fase	Mínima de 10 graus
Frequência de cruzamento de ganho	Mínima de 50 Hz
Amplitude na tensão de saída do harmônico de 5 Hz	Menor que 5V

5.2 Modelagem do conversor boost

Neste trabalho foram seguidos os mesmos passos feitos em Magossi (2016) para a modelagem do conversor da Fig. 5.1 no qual a saída de interesse é a tensão de saída v_o . Denotando-se o sinal pulsado PWM do conversor como d e definindo

$$x = \begin{bmatrix} i_L & v_C \end{bmatrix}^T \text{ e } u = v_{th},$$

então a representação em espaço de estados para $d = 1$, situação com o mosfet conduzindo e o diodo bloqueado é dada por

$$\dot{x} = A_1x + B_1u, \quad (5.1)$$

$$y = \bar{C}_1x, \quad (5.2)$$

em que

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{r_L + r_{on} + r_{th}}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

e para $d = 0$, mosfet cortado e diodo conduzindo,

$$\dot{x} = A_2x + B_2u, \quad (5.4)$$

$$y = \bar{C}_2x, \quad (5.5)$$

na qual

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(r_L + r_D + r_{th}) & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

5.2.1 Modelo chaveado e de pequenos sinais

O modelo chaveado é obtido ponderando as matrizes do modelo estado em um intervalo de chaveamento, assim

$$\dot{x} = (A_1d + A_2(1 - d))x + (B_1d + B_2(1 - d))u \quad (5.7)$$

$$y = (\bar{C}_1d + \bar{C}_2(1 - d))x. \quad (5.8)$$

Como trata-se de um modelo bilinear, utiliza-se a técnica de pequenos sinais para obter um modelo linearizado. Para separar a parte CC e CA, introduz-se uma pequena perturbação em (5.7) e (5.8). Então escreve-se

$$x = X + \hat{x}, \quad (5.9)$$

$$d = D + \hat{d}, \quad (5.10)$$

$$u = U + \hat{u}. \quad (5.11)$$

Note que D é o valor médio do sinal PWM do conversor, isso é, o ciclo de trabalho. O primeiro termo de (5.9), (5.10) e (5.11), representa a parcela contínua (valor médio) e o segundo termo representa a componente alternada do sinal (perturbações). Substituindo (5.9) e (5.10) em (5.7), e ignorando-se os termos de segunda ordem, obtém-se

$$\dot{\hat{x}} = AX + BU + A\hat{x} + F\hat{d} + B\hat{u}, \quad (5.12)$$

em que

$$\begin{aligned} A &= A_1 D + A_2 (1 - D), \\ B &= B_1 D + B_2 (1 - D), \\ F &= (A_1 - A_2)X + (B_1 - B_2)U. \end{aligned}$$

Anulando as perturbações em (5.12), obtém-se o comportamento em regime permanente, ou seja

$$AX + BU = 0. \quad (5.13)$$

Logo, admitindo-se que A possua inversa, obtém-se

$$X = -A^{-1}BU, \quad (5.14)$$

e considerando somente as perturbações, isso é, o sistema oscilando em torno do seu ponto médio, a partir de (5.13), (5.12) se simplifica em

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + F\hat{d} + B\hat{u} \quad (5.15)$$

e adotando-se o mesmo procedimento para a saída, denotando $\bar{C} =: \bar{C}_1 = \bar{C}_2$,

$$\hat{y} = \bar{C}\hat{x} \quad (5.16)$$

e

$$Y = \bar{C}X \quad (5.17)$$

A matriz de transferência do sistema é obtida por

$$P(s) = \bar{C}(sI - A)^{-1}([B \ F]). \quad (5.18)$$

5.2.2 Validação do modelo

Denotando f_s como frequência de chaveamento, considerou-se para o conversor boost os seguintes parâmetros nominais mostrados na Tabela 5.2 e as funções de transferência obtidas a partir de (5.18) são

$$P_u(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{d}} = \frac{-2527s + 24.996 \cdot 10^6}{s^2 + 115.738s + 107.501 \cdot 10^3} \quad (5.19)$$

e

$$P_w(s) = \frac{\hat{y}}{\hat{v}_{th}} = \frac{212.765 \cdot 10^3}{s^2 + 115.738s + 107.501 \cdot 10^3}. \quad (5.20)$$

Tabela 5.2: Parâmetros do conversor boost

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
V_{th}	60 V	C	470 μ F
r_{th}	0.5 Ω	r_C	10 m Ω
L	5 mH	r_{on}	24 m Ω
r_L	10 m Ω	V_o	120 V
r_D	7 m Ω	D	0.5053
R	200 Ω	f_s	22.5 kHz

Para validar o modelo linearizado dado pelas funções de transferência (5.19) e (5.20), comparou-se a resposta do circuito simulado no PSIM (vide Fig. 5.2) com pequenas variações do modelo linearizado. As curvas obtidas são mostradas na Fig. 5.3.

Figura 5.2: Esquemático de simulação no PSIM.

Fonte: Próprio autor

A partir da Fig. 5.3 considerou-se o modelo de pequenos sinais validado para o ponto de operação escolhido, restando verificar como esse modelo se comporta frente a variações de maior amplitude na tensão de entrada e no ciclo de trabalho. Sabe-se a partir de (5.17) que para quando a entrada possuir 70V então o ciclo de trabalho necessário para que a saída seja mantida em 120V é $D = 0.4211$, assim aplica-se essas variações no modelo e o resultado é mostrado na Fig. 5.4. O resultado mostrado na Fig. 5.4 sugere que para diferentes pontos de operação há diferentes plantas e assim controladores diferentes para cada ponto podem ser empregados afim de manter as mesmas características de desempenho ou um controlador que leve em conta todas as possíveis plantas. Como deseja-se rastrear 120V na saída do conversor, então serão considerados nesse projeto dois conjuntos de plantas denotados $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ conforme a Tabela 5.3.

A partir do conjunto de plantas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ conforme a Tabela 5.3, foi verificado que para cada ponto de operação o sistema linearizado é válido quando o distúrbio na tensão

Figura 5.3: Validação do modelo linearizado do conversor boost.

- (a) Saída de tensão do conversor boost sob pequenas perturbações;
- (b) Pequena variação no ciclo de trabalho;
- (c) Pequena variação na tensão de entrada;

(a)

(b)

(c)

Fonte: Próprio autor

de entrada assume a forma $\hat{v}_{th} = 10 \sin(2\pi 5t)$. Os resultados são mostrados na Fig 5.5.

5.2.3 Conteúdo harmônico do sistema em malha aberta

Quando o sistema é regido por $\mathcal{P}_1$ a tensão de saída e entrada do conversor boost apresentam o conteúdo harmônico mostrado na Fig. 5.6 e quando o sistema é regido por $\mathcal{P}_2$ a tensão de saída e entrada do conversor boost apresentam o conteúdo harmônico mostrado na Fig. 5.7.

A partir das Figs. 5.6 e 5.7, note que a amplitude do harmônico para 5 Hz está muito acima do limite requerido. Na próxima seção é feito o projeto do controlador para ajustar os limites da amplitude desse harmônico na saída do conversor boost.

Figura 5.4: Modelo linearizado do conversor boost sob grandes perturbações

- (a) Saída de tensão do conversor boost sob grandes perturbações;
 (b) Grande variação no ciclo de trabalho;
 (c) Grande variação na tensão de entrada;

(a)

(b)

(c)

Fonte: Próprio autor

Tabela 5.3: Conjunto de plantas a serem utilizadas para o projeto

	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$
$P_u(s)$	$\frac{-2527s + 24.996 \cdot 10^6}{s^2 + 115.738s + 107.501 \cdot 10^3}$	$\frac{-2206s + 29.3205 \cdot 10^6}{s^2 + 115.4704s + 143.6751 \cdot 10^3}$
$P_w(s)$	$\frac{212.765 \cdot 10^3}{s^2 + 115.738s + 107.501 \cdot 10^3}$	$\frac{246.3002 \cdot 10^3}{s^2 + 115.4704s + 143.6751 \cdot 10^3}$
Parâmetros	$D = 0.5053$ e $V_{th} = 60$	$D = 0.4211$ e $V_{th} = 70$

Figura 5.5: Validação do modelo linearizado do conversor boost para o conjunto de plantas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$.

- (a) Saída de tensão do conversor boost para $\mathcal{P}_1$;
- (b) Saída de tensão do conversor boost para $\mathcal{P}_2$;
- (c) Tensão de entrada $v_{th} = 60 + 10 \sin(2\pi 5t)$;
- (d) Tensão de entrada $v_{th} = 70 + 10 \sin(2\pi 5t)$;

(a)

(c)

(b)

(d)

Fonte: Próprio autor

Figura 5.6: Conteúdo harmônico da saída e entrada de $\mathcal{P}_1$ simulado.

- (a) Conteúdo harmônico da tensão de saída;
 (b) Conteúdo harmônico da tensão de entrada;

Fonte: Próprio autor

Figura 5.7: Conteúdo harmônico da saída e entrada de $\mathcal{P}_2$ simulado.

- (a) Conteúdo harmônico da tensão de saída;
 (b) Conteúdo harmônico da tensão de entrada;

Fonte: Próprio autor

5.3 Projeto do controlador para mitigar harmônico

Como existem dois conjuntos de plantas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, serão projetados dois controladores PI, denominados $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, a fim de manter os requisitos de projeto mostrados na Tabela 5.1. O controlador PI possui a forma

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}. \quad (5.21)$$

Assim, seguindo-se o procedimento mostrado na Seção 4.2, o distúrbio presente no sistema é dado por

$$d_1(t) = \hat{v}_{th} = \sum_{h=1}^1 A_{h_{d_1}} \sin(\omega_{h_{d_1}} t), \quad (5.22)$$

com $A_{1_{d_1}} = 10$, $\omega_{1_{d_1}} = 2\pi 5$ rad/s. Como somente um distúrbio está presente no sistema, por simplicidade denota-se $\omega_1 =: \omega_{1_{d_1}}$. Das especificações requeridas, têm-se que

$$\gamma_1 =: \tilde{\gamma}_{1_{d_1}} = 5,$$

logo $\gamma_{1_{d_1}} \approx 0.28975$ e o conjunto estabilizante com as restrições atendendo aos requisitos de projeto é mostrado na Fig. 5.8.

Figura 5.8: Conjunto estabilizante que satisfazem requisitos de projeto para $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$.

Fonte: Próprio autor

Os controladores escolhidos estão mostrados na Tabela 5.4. O atendimento dos requisitos de margem de ganho e fase são mostrados na Tabela 5.5. A resposta do sistema de malha fechada simulado no PSIM utilizando os controladores projetados são mostradas nas Fig. 5.9 e os espectros de frequência mostrados

Tabela 5.4: Controladores que satisfazem os requisitos de projeto da Tabela 5.1.

	$\mathcal{C}_1$ ■	$\mathcal{C}_2$ ◆
k_p	0.006171	0.004048
k_i	0.4875	0.5785

Tabela 5.5: Margens de estabilidade para combinações plantas e controladores da Tabela 5.4

	$\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{P}_1$	$\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{P}_2$	$\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{P}_1$	$\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{P}_2$
Margem de Fase [graus]	10	8.86	10.3	10
Frequência de Cruzamento de Ganho [rad/s]	503	448	561	503
Margem de Ganho [dB]	10.2	6.19	11.3	7.34
Frequência de Cruzamento de Fase [rad/s]	776	558	898	646

Figura 5.9: Tensão de saída do conversor boost para as combinações de controladores e plantas, atendendo amplitude de 5V para o harmônico de 5 Hz.

Fonte: Próprio autor

5.3.1 Gain scheduling

Note pela Tabela 5.5 que as margens de estabilidade são próximas e da Fig. 5.9 que independente do ponto de operação as saídas atendem ao requisito de mitigação de harmônico especificado. Ainda assim é possível utilizar uma estratégia do tipo *gain scheduling* para trocar os ganhos do controlador afim de manter as margens de estabilidade dentro do requerido pelo projeto quando a planta mudar de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, ou vice-versa. Entretanto, é necessário garantir a estabilidade na troca desses controladores. A garantia de estabilidade é obtida utilizando-se o Teorema 3.2, que fornece a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 0.021501 & -6.8393 \cdot 10^{-16} & 3.0797 \cdot 10^{-16} \\ -6.8393 \cdot 10^{-16} & 0.021501 & -6.5732 \cdot 10^{-15} \\ 3.0797 \cdot 10^{-16} & -6.5732 \cdot 10^{-15} & 0.0087711 \end{bmatrix}$$

que é comum a todas as combinações de plantas (na forma canônica modal) e controladores em malha fechada.

O equivalente de Thévenin pontual pode ser usado para estimar os valores de V_{th} e R_{th} , e baseado no valor médio de V_{th} realizar a troca dos ganhos do controlador. O valor limiar para trocar de controladores foi para $V_{th} = 65V$. O resultado do sistema trocando de controladores é mostrado na Fig. 5.10. Note que não é observada uma melhora na resposta do sistema. Entretanto, a seguir considera-se o caso em que não é necessário projetar os controladores para mitigar os harmônicos e demonstra-se a eficácia da técnica de *gain scheduling* para esse sistema.

Caso especial - Sem Harmônico

Suponha que o distúrbio do sistema seja formado apenas por valores contínuos em regime permanente, então é possível realizar o projeto do controlador apenas considerando-se o requisito de margem de fase. Nesse caso, os requisitos de margem de fase são facilmente atingíveis considerando-se uma frequência de cruzamento de 60 Hz e margem de fase de 60 graus. Os controladores que atendem esses requisitos são mostrados na Fig. 5.11 e descritos na Tabela 5.6. Na Tabela 5.7 são apresentadas as margens de estabilidade para combinações de plantas e controladores.

Tabela 5.6: Controladores que satisfazem os requisitos de projeto considerando somente margem de fase.

	$\mathcal{C}_3$ ■	$\mathcal{C}_4$ ◆
k_p	-0.002189	0.001281
k_i	0.1546	0.2834

Tabela 5.7: Margens de estabilidade para combinações plantas e controladores da Tabela 5.4

	$\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{P}_1$	$\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{P}_2$	$\mathcal{C}_4$ e $\mathcal{P}_1$	$\mathcal{C}_4$ e $\mathcal{P}_2$
Margem de Fase [graus]	60	-18.9	50.4	60.4
Frequência de Cruzamento de Ganho [rad/s]	377	295	332	377
Margem de Ganho [dB]	1.88	3.01	9.62	10.8
Frequência de Cruzamento de Fase [rad/s]	198	229	450	521

Note que pela Tabela 5.7 não trocar o controlador irá acarretar em margens de fase mais distantes das requeridas pelo projeto. Nesse caso, garante-se a estabilidade da troca de controladores utilizando-se o Teorema 3.2, que fornece a matriz

Figura 5.10: Comportamento da tensão de saída do conversor boost durante *gain scheduling*.

- (a) Tensão de saída do conversor;
- (b) Tensão de entrada do conversor;
- (c) V_{th} médio estimado pelo equivalente de Thévenin pontual;
- (d) R_{th} médio estimado pelo equivalente de Thévenin pontual.

Fonte: Próprio autor

$$P = \begin{bmatrix} 0.017476 & 3.5774 \cdot 10^{-15} & -1.9352 \cdot 10^{-16} \\ 3.5774 \cdot 10^{-15} & 0.017476 & 5.8684 \cdot 10^{-16} \\ -1.9352 \cdot 10^{-16} & 5.8684 \cdot 10^{-16} & 0.0084093 \end{bmatrix}$$

a qual é comum a todas as combinações de plantas (na forma canônica modal) e controladores da Tabela 5.6 em malha fechada. Assim, simulou-se no PSIM uma comparação mantendo-se o controlador $\mathcal{C}_3$ durante a troca de plantas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, e trocando-se os controladores. O resultado é mostrado na Fig. 5.12.

Figura 5.11: Conjunto estabilizante considerando somente margem de fase de 60 graus como requisito de projeto.

Fonte: Próprio autor

Figura 5.12: Comparação do sistema com e sem a técnica *gain scheduling* considerando-se os controladores da Tabela 5.6.

- (a) Tensão de saída do conversor boost;
- (b) Tensão de entrada do conversor boost;

(a)

(b)

Fonte: Próprio autor

5.4 Resultados experimentais

Nesta seção estão descritos resultados experimentais com os controladores da Tabela 5.4 para atendimento de margem de fase e mitigação de harmônico no sistema. O conversor

boost da Fig. 2.2 foi implementado com os parâmetros mostrados nas Tabelas 5.8 e 5.9. Como as frequências de corte das plantas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são em torno de 50 Hz, optou-se por utilizar um método de discretização do tipo *zero-order-hold* com frequência de amostragem em 1 kHz com um filtro anti-aliasing sintonizado em 250 Hz na saída dos transdutores de tensão e corrente.

Foi utilizada uma bancada de prototipagem rápida dSpace para alimentar o conversor boost com uma fonte de corrente contínua acrescida de um distúrbio senoidal. Assim, utilizou-se um inversor de frequência na configuração VSI (*voltage source inverter* da sigla em inglês) com um controlador PI e um controlador ressonante ajustado na frequência de 5 Hz. A bancada dSpace utilizada e conversor boost implementado são mostrados na Fig. 5.13. Na seção a seguir são mostrados os resultados experimentais para diversos cenários.

Tabela 5.8: Componentes utilizados e parâmetros nominais do conversor boost experimental

Dispositivo	Código Comercial /Valor
Diodo	DSEI 2X31-06 C
MOSFET	IXFN140N30P
Carga	198.31 Ω
Indutor	5mH
Capacitor de saída	470 μ F

Tabela 5.9: Instrumentos de medição e transdutores utilizados

Dispositivo	Código Comercial /Valor
Transdutor de tensão	LEM LV 20-P
Transdutor de corrente	LEM LA 55-P/SP1
Osciloscópio	5054 Digital Phosphor Tektronix
Unidade de controle	STM32F429I-DISC1

5.4.1 Cenário 1 - Malha aberta $\mathcal{P}_1$

Nesse ensaio o sistema foi posto a operar em malha aberta no ponto de operação definido pelas condições de $\mathcal{P}_1$. O resultado das formas de onda obtidas são mostradas na Fig. 5.14 e o espectro de frequência é mostrado na Fig. 5.15.

5.4.2 Cenário 2 - Malha aberta $\mathcal{P}_2$

Nesse ensaio o sistema foi posto a operar em malha aberta no ponto de operação definido pelas condições de $\mathcal{P}_2$. O resultado das formas de onda obtidas são mostradas na Fig. 5.16 e o espectro de frequência é mostrado na Fig. 5.17.

5.4.3 Cenário 3 - Fechamento da malha com $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{P}_1$

O ensaio foi feito para demonstrar o efeito do controlador na saída do sistema para quando a malha é fechada. Nessa situação foi utilizado o controlador $\mathcal{C}_1$ e o conjunto de plantas de $\mathcal{P}_1$. O resultado das formas de onda obtidas é mostrado na Fig. 5.18 e o espectro de frequência é mostrado na Fig. 5.19.

Figura 5.13: Bancada experimental com conversor boost e dSpace para emular fonte de alimentação.

Fonte: Próprio autor

Figura 5.14: Sistema em malha aberta operando em $\mathcal{P}_1$. Em amarelo a tensão de saída do conversor e em azul a tensão de entrada com 40V/div e 500ms/div.

Fonte: Próprio autor

Figura 5.15: Conteúdo harmônico da saída e entrada de $\mathcal{P}_1$ experimental.

- (a) Conteúdo harmônico da tensão de saída;
 (b) Conteúdo harmônico da tensão de entrada;

Fonte: Próprio autor

Figura 5.16: Sistema em malha aberta operando em $\mathcal{P}_2$. Em amarelo a tensão de saída do conversor e em azul a tensão de entrada com 40V/div e 500ms/div.

Fonte: Próprio autor

Figura 5.17: Conteúdo harmônico da saída e entrada de $\mathcal{P}_2$ experimental.

(a) Conteúdo harmônico da tensão de saída;

(b) Conteúdo harmônico da tensão de entrada;

Fonte: Próprio autor

Figura 5.18: Fechamento da malha de controle considerando $\mathcal{C}_1$ com conversor operando próximo ao ponto de operação $\mathcal{P}_1$. Em amarelo a tensão de saída do conversor e em azul a tensão de entrada com 40V/div e 500ms/div.

Fonte: Próprio autor

Figura 5.19: Conteúdo harmônico da saída e entrada de $\mathcal{P}_1$ utilizando $\mathcal{C}_1$ experimental em malha fechada.

- (a) Conteúdo harmônico da tensão de saída;
 (b) Conteúdo harmônico da tensão de entrada;

Fonte: Próprio autor

5.4.4 Cenário 4 - Fechamento da malha com $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{P}_2$

O ensaio foi feito para demonstrar o efeito do controlador na saída do sistema para quando a malha é fechada. Nessa situação foi utilizado o controlador $\mathcal{C}_2$ e o conjunto de plantas de $\mathcal{P}_2$. O resultado das formas de onda obtidas é mostrado na Fig. 5.20 e o espectro de frequência é mostrado na Fig. 5.21.

5.4.5 Cenário 5 - Troca de controladores

Nesse ensaio realizou-se a troca dos controladores frente a mudanças na tensão de entrada, utilizando como meio de detecção o equivalente de Thévenin pontual. O resultado é mostrado na Fig. 5.22. Note que a troca de controladores não gera transitórios, nem mesmo a variação da tensão da entrada devido ao tempo de subida da tensão de entrada ser relativamente lento.

Na Tabela 5.10 encontram-se os dados quantitativos acerca do uso dos controladores projetados com relação à mitigação do harmônico de 5 Hz.

Tabela 5.10: Comparação da mitigação do harmônico de 5 Hz utilizando os controladores projetados e do sistema em malha aberta

	Amplitude harmônico 5 Hz na tensão de saída [V]	Redução percentual
Malha aberta $\mathcal{P}_1$	15,68	72,1
Malha fechada $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{P}_1$	4,378	
Malha aberta $\mathcal{P}_2$	18,25	77,7
Malha fechada $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{P}_2$	4,07	

Figura 5.20: Fechamento da malha de controle considerando $\mathcal{C}_2$ com conversor operando próximo ao ponto de operação $\mathcal{P}_2$. Em amarelo a tensão de saída do conversor e em azul a tensão de entrada com 40V/div e 500ms/div.

Fonte: Próprio autor

Figura 5.21: Conteúdo harmônico da saída e entrada de $\mathcal{P}_2$ utilizando $\mathcal{C}_2$ experimental em malha fechada.

- (a) Conteúdo harmônico da tensão de saída;
- (b) Conteúdo harmônico da tensão de entrada;

(a)

(b)

Fonte: Próprio autor

Figura 5.22: Sistema operando em malha fechada alternando-se os controladores $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ de acordo com a tensão de entrada média. Em amarelo a tensão de saída do conversor e em azul a tensão de entrada com 40V/div e 500ms/div.

Fonte: Próprio autor

6 CONCLUSÕES

Foram propostas metodologias de sintonia do controlador PID com restrições na função sensibilidade.

A sintonia do PID com índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ mostrou-se satisfatória. No entanto, como parte da metodologia apresentada, ao fim é necessário resolver um problema de otimização descrito pela LMI (3.11), o qual nem sempre retornará solução factível pois a estrutura da matriz J não é levada em consideração no projeto do controlador, somente após otimização. Além disso, essa sintonia pode ser muito conservadora em sistemas que o distúrbio não apresenta conteúdo frequencial diverso.

Para o caso em que somente algumas frequências devem ser atenuadas, foi proposto um método de sintonia que mitiga os harmônicos presentes nos distúrbios utilizando o conjunto estabilizante e desenhando-se elipses que demarcam o local geométrico dos ganhos que satisfazem as condições requeridas para mitigação. Esse método pode ser utilizado em conjunto com outros métodos na literatura que consideram também o conjunto estabilizante, como o caso do projeto que requer condições de margem de fase, tornando-se um projeto de sintonia multiobjetivo. Também foi apresentado um método para adaptação do controlador projetado frente a variações paramétricas utilizando-se igualdades de polinômio.

Para demonstrar a aplicabilidade do método de mitigação de harmônico, foi considerado um conversor boost alimentado por uma fonte de tensão com conteúdo harmônico. Os resultados experimentais apresentados demonstraram a eficácia do método proposto, mitigando o efeito do harmônico desejado na saída do sistema. Como trabalhos futuros espera-se encontrar condições menos conservadoras para o método de sintonia $\mathcal{H}_\infty$ a fim de permitir o cômputo sem métodos iterativos. Para a sintonia com mitigação de harmônicos, espera-se estender os resultados para outros controladores de ordem fixa, como os proporcionais-ressonantes.

6.1 Trabalhos publicados e submetidos

Os trabalhos publicados e submetidos pelo autor durante a pesquisa são relacionados a seguir.

Periódicos

1. MAGOSS, R. F. Q.; PENALOZA, E. A. G. ; BHATTACHARYYA, S. P. ; OLIVEIRA, V. A. ; CRUVINEL, P. E.. Emulating a sensor for the measurements of the hydraulic resistances of nozzles in agricultural sprayers based on the use of the point-wise thévenin's theorem. **International Journal on Advances in Systems and Measurements**, v. 10, p. 184-193, 2017.
2. AGUIAR, CASSIUS ROSSI ; FUZATO, GUILHERME; MAGOSS, RAFAEL QUIRINO; NEVES, RODOLPHO; MACHADO, RICARDO QUADROS. A New Method to Manage

the Fuel Cell Initialization. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 54, p. 1-1, 2018

3. BHATTACHARYYA, S. P.; OLIVEIRA, V. A.; MAGOSSİ, R. F. Q.. Thévenin's Theorem, Cramer's Rule and Parameterized Systems: Some Connections. **IEEE Control Systems Magazine**, 2018 (To appear)

Conferências

1. MAGOSSİ, R. F. Q.; HAN, S.; OLIVEIRA, V. A.; BHATTACHARYYA, S. P. Proportional-integral controller design for selective harmonic mitigation. **Latin American Conference on Automatic Control (CLCA)**. Quito: IFAC, 2018.
2. MAGOSSİ, R. F. Q.; PENALOZA, E. A. G.; BHATTACHARYYA, S. P.; OLIVEIRA, V. A.; CRUVINEL, P. E. Using the measurement-based approach to emulate the behavior of a sensor for internal hydraulic pressure drop measurements of sprayers in the agricultural industry. In: **ALLSENSORS 2017: The Second International Conference on Advances in Sensors, Actuators, Metering and Sensing**. Nice: IARIA, 2017. p. 10-15.
3. ALZATE, R.; MAGOSSİ, R. F. Q.; OLIVEIRA, V. A.; SHANKAR P. BHATTACHARYYA. Double loop control design for boost converters based on frequency response data. In: **20th IFAC World Congress**. Toulouse: IFAC, 2017, v. 50, no.1, p.10413 – 10418.
4. MAGOSSİ, R. F. Q.; BEZERRA, R. A.; LEME, P. V.; OLIVEIRA, V. A. . PID controller design based on $\mathcal{H}_\infty$ performance. In: **XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente**. Porto Alegre: SBA, 2017. p. 1814-1820.
5. MAGOSSİ, R. F. Q.; QUINALIA, M. S.; FERREIRA, P. G. B.; CARVALHO, M. C. ; MACHADO, R. Q. Project of a solar module emulator using a zener diode to analyze the behavior of MPPT algorithms. In: **XIV Brazilian Power Electronics Conference (COBEP)**. Juiz de Fora: IEEE, 2017. p. 1-6.
6. QUINALIA, M. S.; MAGOSSİ, R. F. Q. ; FERREIRA, P. G. B.; MACHADO, R. Q. ; OLIVEIRA, V. A. Proportional-resonant stabilizing set applied for three-phase voltage source inverter with a LCL filter. In: **XIV Brazilian Power Electronics Conference (COBEP)**. Juiz de Fora: IEEE, 2017. p. 1-6.
7. CARVALHO, M. C.; MAGOSSİ, R. F. Q.; QUINALIA, M. S.; OTTOBONI, K. A. ; MACHADO, R. Q. Active anti-islanding protection method based on active power flow applied to VSI-based distributed generation. In: **XIV Brazilian Power Electronics Conference (COBEP)**. Juiz de Fora: IEEE, 2017. p. 1-6.

Os trabalhos submetidos aguardando resposta até o presente momento estão relacionados a seguir.

Periódicos

1. MAGOSSİ, R. F. Q, FUZATO, G., MACHADO, R. Q., OLIVEIRA, V. A.. A measurement-based approach procedure to obtain DC–DC converter static gain. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, 2018.
2. MAGOSSİ, R. F. Q.; HAN, S.; OLIVEIRA, V. A.; BHATTACHARYYA, S. P. Geometric design of PID controllers for selective harmonic mitigation. **Automatica**, 2019.
3. QUINALIA, M. S, MAGOSSİ, R. F. Q., MACHADO, R. Q.. Alternative methodology for modelling and analysis of Z-source inverters. **IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics**, 2018.

Conferências

1. CASTRO, D. S.; MAGOSSİ, R. F. Q.; BASTOS, R.; OLIVEIRA, V. A; MACHADO R. Q. Low-cost hardware in the loop implementation of a boost converter. European Control Conference (ECC), 2019.
2. PADULA, A. S.; AGNOLETTTO, E.; NEVES, R. V.; MAGOSSİ, R. F. Q.; MACHADO, R.; OLIVEIRA, V. A. Microgrid's partial harmonic current distortion mitigation using proportional resonant controller. European Control Conference (ECC), 2019.

REFERÊNCIAS

- AGUIAR, C. R. et al. Frequency fuzzy anti-islanding for grid-connected and islanding operation in distributed generation systems. **IET Power Electronics**, v. 8, n. 7, p. 1255–1262, 2015.
- ALZATE, R.; OLIVEIRA, V. A. Multiobjective design of PI controllers with applications. In: IEEE. **2016 IEEE Conference on Control Applications (CCA)**. Buenos Aires, 2016. v. 8, n. 1, p. 203–214.
- ÅSTRÖM, K.; HÄGGLUND, T. **PID Controllers: Theory, Design, and Tuning**. 2nd. ed. Research Triangle Park: Instrument Society of America, 1995.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins. **Automatica**, Pergamon Press Ltd International Federation of Automatic Control, v. 20, n. 5, p. 645–651, 1984.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T.; HANG, C.-C.; HO, W. K. Automatic tuning and adaptation for PID controllers-a survey. **Control Engineering Practice**, Elsevier, v. 1, n. 4, p. 699–714, 1993.
- BASTOS, R. F. **Sistema de Gerenciamento para Carga e Descarga de Baterias (Chumbo-ácido) e para Busca do Ponto de Máxima Potência Gerada em Painéis Fotovoltaicos Empregados em Sistemas de Geração Distribuída**. 2013. Dissertação (Dissertação de mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 2013.
- BEVRANI, H.; HIYAMA, T. Multiobjective PI/PID Control Design Using an Iterative Linear Matrix Inequalities Algorithm. **International Journal of Control, Automation, and Systems**, v. 5, n. 2, p. 117–127, 2007.
- BHATTACHARYYA, A. D. S. P.; KEEL, L. H. **Linear Control Theory: Structure, Robustness, and Optimization**. 1. ed. Boca Raton: CRC Press, 2009. (Automation and Control Engineering).
- BHATTACHARYYA, S. P.; KEEL, L. H.; MOHSENIZADEH, D. **Linear Systems: A Measurement Based Approach**. New Deli: Springer, 2013. (Springer Briefs in Applied Sciences and Technology).
- BLANCHETT, T.; KEMBER, G.; DUBAY, R. PID gain scheduling using fuzzy logic. **ISA Transactions**, v. 39, n. 3, p. 317 – 325, 2000.
- BOYD, S.; El Ghaoui, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia, PA: SIAM, 1994. v. 15. (Studies in Applied Mathematics, v. 15).
- BRITO, M. A. G.; LUIGI, G.; SAMPAIO, L. P.; CANESIN, C. A. Avaliação das principais técnicas para obtenção de MPPT de painéis fotovoltaicos. In: **9th IEEE/IAS International Conference on Industry Applications (INDUSCON)**. São Paulo: IEEE, 2010. p. 1–6.
- BRITTAİN, J. Thévenin’s theorem. **Spectrum, IEEE**, v. 27, n. 3, p. 42, 1990.
- CAMPOS-GAONA, D. et al. Fast selective harmonic mitigation in multifunctional inverters using internal model controllers and synchronous reference frames. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 64, n. 8, p. 6338–6349, 2017.

- COLEMAN, T. F.; LI, Y. A reflective newton method for minimizing a quadratic function subject to bounds on some of the variables. **SIAM Journal on Optimization**, SIAM, v. 6, n. 4, p. 1040–1058, 1996.
- DATTA, A.; HO, M.; BHATTACHARYYA, S. **Structure and Synthesis of PID Controllers**. London: Springer-Verlag, 2000. (Advances in Industrial Control).
- DÍAZ-RODRÍGUEZ, I. D.; BHATTACHARYYA, S. P. PI controller design in the achievable gain-phase margin plane. In: IEEE. **IEEE 55th Conference on Decision and Control**. Las Vegas, 2016. p. 4919–4924.
- DOYLE, J. C.; GLOVER, K.; KHARGONEKAR, P. P.; FRANCIS, B. A. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 34, n. 8, p. 831–847, 1989.
- ESRAM, T.; CHAPMAN, P. Comparison of photovoltaic array maximum power point tracking techniques. **IEEE Transactions on Energy Conversion**, v. 22, n. 2, p. 439–449, 2007.
- ESRAM, T.; KIMBALL, J. W.; KREIN, P.; CHAPMAN, P. L.; MIDYA, P. Dynamic maximum power point tracking of photovoltaic arrays using ripple correlation control. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 21, n. 5, p. 1282–1291, 2006.
- GILL, P. E.; MURRAY, W.; WRIGHT, M. H. **Practical optimization**. London: Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 1981.
- HAN, S.; KEEL, L. H.; BHATTACHARYYA, S. P. PID controller design with an $\mathcal{H}_\infty$ criterion. In: IFAC. **3rd IFAC Conference on Advances in Proportional-Integral-Derivative Control PID**. Belgium, 2018. p. 400 – 405.
- HO, M.-T.; DATTA, A.; BHATTACHARYYA, S. P. A linear programming characterization of all stabilizing PID controllers. In: ACC. **American Control Conference**. Albuquerque, 1997. v. 6, p. 3922–3928.
- HUANG, H. P.; ROAN, M. L.; JENG, J. C. On-line adaptive tuning for PID controllers. **IEE Proceedings - Control Theory and Applications**, v. 149, n. 1, p. 60–67, 2002.
- JOHNSON, D. Origins of the equivalent circuit concept: the current-source equivalent. **Proceedings of the IEEE**, v. 91, n. 5, p. 817–821, 2003.
- KEEL, L.; BHATTACHARYYA, S. Controller synthesis free of analytical models: Three term controllers. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 53, n. 6, p. 1353–1369, 2008.
- KEEL, L. H.; BHATTACHARYYA, S. P. Controller synthesis free of analytical models: Three term controllers. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 53, n. 6, p. 1353–1369, 2008.
- KHADRAOUI, S.; NOUNOU, H.; NOUNOU, M.; DATTA, A.; BHATTACHARYYA, S. A measurement-based approach for designing reduced-order controllers with guaranteed bounded error. **International Journal of Control**, v. 86, n. 9, p. 1586–1596, 2013.
- Kiam Heong Ang; CHONG, G.; Yun Li. PID control system analysis, design, and technology. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 13, n. 4, p. 559–576, 2005.
- LASCU, C.; ASIMINOAEI, L.; BOLDEA, I.; BLAABJERG, F. Frequency response analysis of current controllers for selective harmonic compensation in active power filters. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 56, n. 2, p. 337–347, 2009.

LI, K. PID tuning for optimal closed-loop performance with specified gain and phase margins. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 21, n. 3, p. 1024–1030, 2013.

LIANG, X. M.; LI, S. C.; HASSAN, A. B. A novel pid controller tuning method based on optimization technique. **Journal of Central South University of Technology**, v. 17, n. 5, p. 1036–1042, 2010.

MAGOSSI, R. F. Q. Algoritmo MPPT de um painel fotovoltaico baseado no equivalente de Thévenin obtido por medições. **Trabalho de conclusão de curso, USP**, 2016.

MAGOSSI, R. F. Q.; BEZERRA, R. A.; LEME, P. V.; OLIVEIRA, V. A. PID controller design based on $\mathcal{H}_\infty$ performance. In: SBA. **Simposio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI**. Porto Alegre: SBA, 2017.

MAGOSSI, R. F. Q.; HAN, S.; OLIVEIRA, V. A.; BHATTACHARYYA, S. Proportional-integral controller design for selective harmonic mitigation. In: IFAC. **Latin American Conference on Automatic Control (in cooperation with IFAC) - XVIII CLCA**. Quito, 2018.

MAGOSSI, R. F. Q.; OLIVEIRA, V. A.; MACHADO, R. Q.; BHATTACHARYYA, S. P. Pointwise Thévenin equivalents of a solar module. In: ECC. **2016 European Control Conference**. Aalborg, Denmark, 2016. p. 13–18.

MOMENIZADEH, I.; MADADY, A.; REZA-ALIKHANI, H. R. A graphical approach to design PI controller for integrator plus dead-time processes. In: IEEE. **The 2nd International Conference on Control, Instrumentation and Automation**. Shiraz, Iran, 2011. p. 320–325.

MOÇAMBIQUE, N. E. M. **Aplicação de Algoritmos de Busca do Ponto de Máxima Potência e Controladores Lineares e/ou Fuzzy para a Regulação da Tensão Terminal de Painéis Fotovoltaicos**. 2012. Dissertação (Dissertação de mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 2012.

MOÇAMBIQUE, N. E. M.; MACHADO, R. Q.; OLIVEIRA, V. A. A fuzzy PD-I control strategy to track the voltage references of photovoltaic arrays. In: **9th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)**. Santiago: IEEE, 2011. p. 1162–1167.

MUSCH, H. E.; STEINER, M. Tuning advanced PID controllers via direct H_∞ norm minimization. In: ECC. **1997 European Control Conference (ECC)**. Brussels, Belgium, 1997. p. 646–651.

OLIVEIRA, V. A.; FELIZARDO, K. R.; BHATTACHARYYA, S. P. A model-free measurement based approach to circuit analysis and synthesis based on linear interval systems. In: IEEE. **International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)**. Buzios, Brazil, 2015. p. 1–6.

OMER, P.; KUMAR, J.; SURJAN, B. S. Design of robust PID controller for buck converter using bat algorithm. In: IEEE. **2016 IEEE 1st International Conference on Power Electronics, Intelligent Control and Energy Systems**. Delhi, India, 2016. p. 1–5.

PRUSTY, S. B.; PADHEE, S.; PATI, U. C.; MAHAPATRA, K. K. Comparative performance analysis of various tuning methods in the design of PID controller. In: IET. **Michael Faraday IET International Summit 2015**. Kolkata, India, 2015. p. 43–48.

REZA-ALIKHANI, H. R.; MADADY, A. A graphical method for designing PD controller for IPDT processes. In: IEEE. **2013 IEEE International Conference on Control Applications**. Shiraz, Iran, 2013. p. 477–482.

SÁNCHEZ, H. S.; VISIOLI, A.; VILANOVA, R. Optimal nash tuning rules for robust pid controllers. **Journal of the Franklin Institute**, Elsevier, v. 354, n. 10, p. 3945–3970, 2017.

SHIMIZU, K. Dynamic output feedback control and dynamic PID control for linear mimo systems via lmi. In: IEEE. **Control Applications (CCA), 2016 IEEE Conference on**. Buenos Aires, Argentina, 2016. p. 978–983.

SKAFIDAS, E.; EVANS, R. J.; SAVKIN, A. V.; PETERSEN, I. R. Stability results for switched controller systems. **Automatica**, v. 35, n. 4, p. 553 – 564, 1999.

SÖYLEMEZ, M.; MUNRO, N.; BAKI, H. Fast calculation of stabilizing PID controllers. **Automatica**, v. 39, n. 1, p. 121 – 126, 2003.

TAN, N.; KAYA, I.; YEROGLU, C.; ATHERTON, D. P. Computation of stabilizing PI and PID controllers using the stability boundary locus. **Energy Conversion and Management**, v. 47, n. 18–19, p. 3045 – 3058, 2006.

TEODORESCU, R.; BLAABJERG, F.; BORUP, U.; LISERRE, M. A new control structure for grid-connected LCL PV inverters with zero steady-state error and selective harmonic compensation. In: IEEE. **Applied Power Electronics Conference and Exposition**. Anaheim, USA, 2004. v. 1, p. 580–586.

TEODORESCU, R.; BLAABJERG, F.; LISERRE, M.; LOH, P. C. Proportional-resonant controllers and filters for grid-connected voltage-source converters. **IEE Proceedings - Electric Power Applications**, v. 153, n. 5, p. 750–762, 2006.

THÉVENIN, L. Extension de la loi d’ohm aux circuits électromoteurs complexes (Extension of Ohm’s law to complex electromotive circuits). **Annales Télégraphiques**, v. 10, n. 222–224, 1883.

_____. Sur un nouveau théorème d’électricité dynamique (On a new theorem of dynamic electricity). **C. R. des Séances de l’Academie des Sciences**, v. 97, n. 159–161, 1883.

VILLALVA, M. G. **Conversor Eletrônico de Potência Trifásico para Sistema Fotovoltaico Conectado à Rede Elétrica**. 2010. Tese (Tese de doutorado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP, 2010.

YANIV, O.; NAGURKA, M. Robust PI controller design satisfying sensitivity and uncertainty specifications. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 48, n. 11, p. 2069–2072, 2003.

ZHAO, Z.-Y.; TOMIZUKA, M.; ISAKA, S. Fuzzy gain scheduling of PID controllers. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, v. 23, n. 5, p. 1392–1398, 1993.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. **Robust and Optimal Control**. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1996.

ZIEGLER, J.; NICHOLS, N. B.; ROCHESTER, N. Y. Optimum settings for automatic controllers. **Transactions on the ASME**, p. 759–768, 1942.