RAFAEL HENRIQUE AVANÇO

**Análise da dinâmica não-linear de pêndulos com excitação
paramétrica por um mecanismo biela-manivela**

Tese apresentada à Escola de
Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo, como parte
dos requisitos para obtenção do título de
Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Dinâmica de
Máquinas e Sistemas

Orientador: Prof. Dr. Hélio Aparecido
Navarro

**ESTE EXEMPLAR TRATA-SE
DA VERSÃO CORRIGIDA. A
VERSÃO ORIGINAL
ENCONTRA-SE DISPONÍVEL
JUNTO AO DEPARTAMENTO
DE ENGENHARIA MECANICA
DA EESC-USP.**

São Carlos

2015

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Avanço, Rafael Henrique

A946a Análise da dinâmica não-linear de pêndulos com
excitação paramétrica por um mecanismo biela-manivela /
Rafael Henrique Avanço; orientador Helio Aparecido
Navarro. São Carlos, 2015.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica e Área de Concentração em Dinâmica
de Máquinas e Sistemas -- Escola de Engenharia de São
Carlos da Universidade de São Paulo, 2015.

1. Mecanismo biela-manivela. 2. pêndulo. 3.
excitação paramétrica. 4. potência limitada. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Licenciado **RAFAEL HENRIQUE AVANÇO**.

Título da tese: "Análise da dinâmica não-linear de pêndulos com excitação paramétrica por um mecanismo biela-manivela".

Data da defesa: 23/03/2015

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Dr. **Helio Aparecido Navarro**
(Orientador)
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Dr. **Luiz Augusto Martin Gonçalves**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Bento Rodrigues de Pontes Junior**
(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/UNESP – Bauru)

APROVADO

Prof. Tit. **Reyolando Manoel Lopes Rebello da Fonseca Brasil**
(Universidade Federal do ABC)

APROVADO

Prof. Dr. **Vinicius Piccirillo**
(Universidade Tecnológica Federal do Paraná/UTFPR)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica:
Prof. Associado **Marcelo Areias Trindade**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Paulo César Lima Segantine**

Dedico esta obra aos personagens históricos que ousaram pensar à frente de seu tempo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos amigos do Laboratório de Dinâmica da Universidade de São Paulo que sempre foram solícitos com relação ao desenvolvimento deste trabalho, alguns oferecendo inclusive hospedagem e mobilidade. Agradeço da mesma forma o companheirismo de alguns externos sempre presentes nos festejos organizados.

Agradeço ao Hélio Aparecido Navarro pela orientação e boa disposição de estar presente a todo o momento no desenvolvimento de trabalho. Igualmente agradeço aos professores José Manuel Balthazar e Reyolando Manoel Lopes Rebello da Fonseca Brasil pelas boas ideias que acrescentaram muito na qualidade do trabalho.

Por fim agradeço ao CNPq que permitiu este trabalho através da bolsa de Doutorado oferecida a mim juntamente com a taxa de bancada que pode prover os equipamentos necessários.

RESUMO

AVANÇO, R.H. **Análise da dinâmica não-linear de pêndulos com excitação paramétrica por um mecanismo biela-manivela.** 2015. 147 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

O presente trabalho trata da análise da dinâmica de um pêndulo simples excitado em seu suporte por um mecanismo biela-manivela de forma ideal e não-ideal. No caso ideal, verifica-se que o resultado da excitação por este tipo de mecanismo se aproxima do resultado da excitação harmônica de suporte do pêndulo quando o raio da manivela é suficientemente pequeno em comparação com o comprimento da biela. A equação diferencial do sistema é resolvida numericamente e resultados do comportamento pendular são obtidos através de mapas de fase, histórico no tempo e seções de Poincaré. Expoentes de Lyapunov são, também, obtidos para a análise de casos caóticos posteriormente comparados com diagramas de bifurcação. Bacias de atração são desenhadas para os resultados estáveis do pêndulo: oscilatórios ou rotativos. Os resultados obtidos para a excitação por biela-manivela são dos mesmos tipos de movimento observados no caso do pêndulo excitado harmonicamente no suporte, entre eles: ponto fixo, oscilação, rotação pura, oscilação-rotação e o caos. Para a frequência de ressonância principal observam-se resultados caóticos em faixas mais largas de amplitude quando o raio de manivela se aproxima do comprimento da biela. Em frequências ressonantes menores nenhuma relação desse tipo pôde ser estabelecida. Uma análise utilizando o mesmo mecanismo é também feita com excitação por potência limitada de um motor elétrico linear de corrente contínua onde se investigou o efeito de “feedback” dado pelo pêndulo sobre o motor. Esses resultados são comparados com o caso ideal com a manivela acionada com rotação constante. Observa-se uma “supressão do caos” no caso não-ideal em casos de menor potência no motor. Entretanto, quando a potência de motor é maior, o modelo ideal coincide com o não-ideal.

Palavras-chave: Mecanismo biela-manivela, pêndulo, excitação paramétrica, potência limitada.

ABSTRACT

AVANÇO, R.H. **Analysis of the nonlinear dynamics of a pendulum excited by a crank-shaft-slider mechanism**. 2015. 147p. Thesis (Ph.D.) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

In this analysis it was studied the dynamics of a simple pendulum excited by a crank-shaft-slider mechanism in the support ideally and non-ideally. In the ideal case, it was verified the result for an excitation by a crank-shaft-slider approaches to the result of the harmonically excited pendulum when the radius of the crank is sufficiently small in comparison with the length of the shaft. The resultant differential equation is solved numerically and the results of pendulum behavior are obtained by phase portraits, time histories and Poincaré sections. It is also calculated the Lyapunov exponents for the chaotic cases in analysis and a comparison is performed with bifurcation diagrams in the same regions. Basins of attractions are plotted for stable results like oscillatory and rotational solutions. In the results observed for the crank-shaft-slider excitation there are kinds of motion similar to those observed in the harmonic excitation: fixed points, oscillation, pure rotations, oscillation-rotations and chaos. However, in the principal resonance zone, chaotic results were more frequent when the radius of crank approaches the shaft length. A brief analysis is done concerning the same mechanism, but considering the excitation by limited power supply of a linear DC motor. In the sequence it is checked the feedback effect from the pendulum over the motor and comparison with the respective ideal excitation is accomplished where differences are commonly observed. With greater power the ideal model coincides with the nonideal model. In cases of lower power, the two models diverge in the results.

Keywords: Crank-shaft-slider mechanism, pendulum, parametric excitation, limited power supply.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1.1 – Representação do pêndulo excitado parametricamente
- Figura 2.1 – Navio APL China (LAARHOVEN, 2009)
- Figura 2.2 – Oscilação em um tanque; adaptado de Ávila (2012)
- Figura 2.3 – Sistema massa-mola-amortecedor com desbalanço sob excitação ideal (NAYFEH; MOOK, 1995)
- Figura 2.4 – Modelo de um sistema não-ideal com duas engrenagens (SOUZA et al., 2005)
- Figura 2.5 – Modelo de um sistema não-ideal com folga (ZUKOVIC; CVETICANIN, 2009)
- Figura 2.6 – Vibrador centrífugo (DANTAS; BALTHAZAR, 2003)
- Figura 2.7 – Modelo de uma estrutura com motor (ZUKOVIC; CVETICANIN, 2007)
- Figura 2.8 – Sistema não-ideal com absorvedor de choque (PUSENJAC; OBLAK; TICAR, 2009)
- Figura 2.9 – Sistema oscilador-motor de dois graus de liberdade (TSUCHIDA et al., 2003)
- Figura 2.10 – O rotor excitado através de uma fonte de potência limitada (PUSENJAC; OBLAK; TICAR, 2009)
- Figura 2.11 – Sistema não-ideal de excitação do pêndulo através de potência limitada, adaptado de Balthazar et al. (2003)
- Figura 2.12 – Excitação não-ideal através de uma esteira (PONTES; OLIVEIRA; BALTHAZAR, 2000)
- Figura 2.13 – Armação com motor de potência limitada (BALTHAZAR et al., 2003)
- Figura 2.14 – Modelo de um arco com motor de potência limitada (FELIX; BALTHAZAR; BRASIL, 2005)
- Figura 2.15 – Dois motores sobre uma estrutura (BALTHAZAR et al., 2004)
- Figura 2.16 – Quatro motores DC sobre uma estrutura flexível (BALTHAZAR; FELIX; BRASIL, 2005)
- Figura 2.17 – Pêndulo esférico (SHVETS, 2007)
- Figura 2.18 – Pêndulos com comprimento variável (BELYAKOV e SEYRANIAN, 2010)
- Figura 3.1 – Representação do pêndulo excitado verticalmente
- Figura 3.2 – Representação do mecanismo biela-manivela acoplado ao pêndulo
- Figura 3.3 – Representação do mecanismo de excitação vertical do pêndulo por um motor elétrico

Figura 4.1 – Diagramas de Bifurcação e expoentes de Lyapunov para $\omega = 1,8$. (a) $\epsilon = 0$
(b) $\epsilon = 0,4$ (c) $\epsilon = 0,9$

Figura 4.2 – Diagramas de Bifurcação e expoentes de Lyapunov para $\omega = 0,87$.

(a) $\epsilon = 0$ (b) $\epsilon = 0,4$ (c) $\epsilon = 0,9$

Figura 4.3 – Diagramas de Bifurcação e expoentes de Lyapunov para $\omega = 0,575$. (a) $\epsilon = 0$
(b) $\epsilon = 0,4$ (c) $\epsilon = 0,9$

Figura 4.4 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para $\omega = 1,8$ e $\epsilon = 0$.

(a) $p = 0,5$ (b) $p = 0,95$ (c) $p = 1,15$ (d) $p = 1,5$ (e) $p = 1,8$

Figura 4.5 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para $\omega = 1,8$ e $\epsilon = 0,4$.

(a) $p = 0,95$ (b) $p = 1,8$ (c) $p = 2,8$ (d) $p = 3,0$ (e) $p = 3,5$

Figura 4.6 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para $\omega = 1,8$ e $\epsilon = 0,9$.

(a) $p = 0,95$ (b) $p = 1,3$ (c) $p = 2,8$ (d) $p = 3,7$ (e) $p = 4,4$

Figura 4.7 – Zoom na seção de Poincaré para $\omega = 1,8$; $\epsilon = 0$ e $p = 1,5$

Figura 4.8 – Zoom na seção de Poincaré para $\omega = 1,8$; $\epsilon = 0,4$ e $p = 1,8$

Figura 4.9 – Zoom na seção de Poincaré para $\omega = 1,8$; $\epsilon = 0,9$ e $p = 4,4$

Figura 4.10 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para $\omega = 0,87$ e $\epsilon = 0$

(a) $p = 0,88$ (b) $p = 1,03$ (c) $p = 1,15$ (d) $p = 1,7$ (e) $p = 1,95$

Figura 4.11 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para $\omega = 0,87$ e

$\epsilon = 0,4$ (a) $p = 1,15$ (b) $p = 1,7$ (c) $p = 2,2$ (d) $p = 3,0$ (e) $p = 4,0$

Figura 4.12 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para $\omega = 0,87$ e

$\epsilon = 0,9$ (a) $p = 1,0$ (b) $p = 1,03$ (c) $p = 1,06$ (d) $p = 2,0$ (e) $p = 3,4$

Figura 4.13 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para $\omega = 0,575$ e

$\epsilon = 0$ (a) $p = 1,0$ (b) $p = 1,03$ (c) $p = 1,06$ (d) $p = 1,7$ (e) $p = 4,3$

Figura 4.14 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para $\omega = 0,575$ e

$\epsilon = 0,4$ (a) $p = 1,7$ (b) $p = 1,9$ (c) $p = 2,5$ (d) $p = 3,5$ (e) $p = 4,4$

Figura 4.15 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para $\omega = 0,575$ e

$\epsilon = 0,9$ (a) $p = 0,7$ (b) $p = 1,0$ (c) $p = 1,7$ (d) $p = 3,1$ (e) $p = 3,35$

Figura 4.16 – Expoentes de Lyapunov de α com $\epsilon = 0$ para p versus ω

Figura 4.17 – Expoentes de Lyapunov de α com $\epsilon = 0,4$ para p versus ω

Figura 4.18 – Expoentes de Lyapunov de α com $\epsilon = 0,9$ para p versus ω

Figura 4.19 – “Espaço de parâmetros” para $\epsilon = 0$

Figura 4.20 – “Espaço de parâmetros” para $\epsilon = 0,4$

Figura 4.21 – “Espaço de parâmetros” para $\epsilon = 0,9$

Figura. 4.22 – Bacia de atração para os parâmetros $\gamma = 0,1$; $\omega = 1,8$ e $p = 0,5$; (a) $\epsilon = 0$ (b) $\epsilon = 0,4$ (c) $\epsilon = 0,7$ (d) $\epsilon = 0,9$

Figura 4.23 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator oscilatório de período-2 com $\epsilon = 0$

Figura 4.24 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator rotativo positivo de período-1 com $\epsilon = 0$

Figura 4.25 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator rotativo negativo de período-1 com $\epsilon = 0$

Figura 4.26 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator oscilatório de período-2 com $\epsilon = 0,4$

Figura 4.27 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator rotativo positivo de período-1 com $\epsilon = 0,4$

Figura 4.28 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator rotativo negativo de período-1 com $\epsilon = 0,4$

Figura 4.29 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator oscilatório de período-2 para ϵ igual a 0,7

Figura 4.30 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator rotativo positivo de período-1 para ϵ igual a 0,7

Figura 4.31 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator rotativo negativo de período-1 para ϵ igual a 0,7

Figura 4.32 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator oscilatório de período-2 com $\epsilon = 0,9$

Figura 4.33 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator rotativo positivo de período-1 com $\epsilon = 0,9$

Figura 4.34 – Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator rotativo negativo de período-1 com $\epsilon = 0,9$

Figura 4.35 – Dinâmica em potência limitada para $V=1,44V$ (a) Histórico da posição angular do pêndulo (b) Histórico da velocidade do pêndulo (c) Histórico da velocidade angular adimensional do rotor “ ω ”

Figura 4.36 – Dinâmica do pêndulo sob excitação ideal para: $\gamma = 0,102$; $\epsilon = 0,4$; $p = 1,58$; $\omega = 1,82$ (a) Histórico da posição angular (b) Histórico da velocidade angular adimensional (c) Seção de Poincaré.

Figura 4.37 – Dinâmica em potência limitada para $V = 4,5V$ (a) Histórico da posição angular do pêndulo (b) Histórico da velocidade do pêndulo (c) Histórico da velocidade angular adimensional do rotor “ ω ”.

Figura 4.38 – Dinâmica do pêndulo sob excitação ideal para: $\gamma = 0,102$; $\epsilon = 0,4$; $p = 11,6$; $\omega = 4,9$ (a) Histórico da posição angular (b) Histórico da velocidade angular adimensional (c) Seção de Poincaré.

Figura 4.39 – Dinâmica em potência limitada para $V = 10,5V$ (a) Histórico da posição angular do pêndulo (b) Histórico da velocidade do pêndulo (c) Histórico da velocidade angular adimensional do rotor “ ω ”.

Figura 4.40 – Dinâmica do pêndulo sob excitação ideal para: $\gamma = 0,102$; $\epsilon = 0,4$; $p = 37,6$; $\omega = 8,85$ (a) Histórico da posição angular (b) Histórico da velocidade angular adimensional (c) Seção de Poincaré.

LISTA DE SIGLAS

CC	Corrente Contínua
DC	“Direct current”
ODE	“Ordinary Differential Equation”
PCVP	Pêndulo com Comprimento Variável Periódico

LISTA DE SÍMBOLOS

α	posição angular do pêndulo	[rad]
ϵ	relação entre o comprimento da manivela e da biela	[-]
γ	parâmetro adimensional relacionado ao amortecimento	[-]
φ	ângulo entre a biela e o eixo vertical	[rad]
θ	posição angular do rotor	[rad]
τ	tempo adimensional	[-]
$\bar{\tau}$	tempo adimensional utilizado no reescalonamento	[-]
ω	parâmetro adimensional relacionado a frequência de excitação	[-]
$\bar{\omega}$	parâmetro adimensional utilizado no reescalonamento	[-]
μ	parâmetro adimensional utilizado no reescalonamento	[-]
ω_0	frequência natural do pêndulo	[rad/s]
a	comprimento da manivela ou amplitude da excitação harmônica	[m]
b	comprimento da biela	[m]
c	constante de amortecimento	[kg/s]
c_m	constante de amortecimento no mancal do motor	[N.m.s]
F	função adimensional que relaciona os ângulos θ e φ	[-]
g	aceleração da gravidade	[m/s ²]
G_{α}^{NC}	forças generalizadas não conservativas da coordenada α	[N.m]
G_{θ}^{NC}	forças generalizadas não conservativas da coordenada θ	[N.m]
J	Momento de inércia de massa do rotor e do disco	[kg.m ²]
K_E	constante de velocidade do motor	[(N.m)/A]
K_T	constante de torque do motor	[(N.m)/A]
l	comprimento do pêndulo	[m]
L	Lagrangeana	[J]
m	massa na extremidade do pêndulo	[kg]
M_{motor}	torque fornecido pelo motor	[N.m]

p	parâmetro adimensional relacionado com a amplitude de excitação	[-]
t	tempo	[s]
T	energia cinética	[J]
V	energia potencial	[J]
x_p	posição da extremidade do pêndulo na direção x	[m]
y_p	posição da extremidade do pêndulo na direção y	[m]

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	23
1.1 Objetivos.....	26
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	28
3 MODELAGEM DOS SISTEMAS DINÂMICOS.....	44
3.1 Sistema pendular excitado por deslocamento harmônico no suporte devido a fonte de potência infinita.....	44
3.2 Sistema pendular excitado verticalmente pelo mecanismo biela-manivela por fonte de potência infinita.....	46
3.3 Sistema pendular biela-manivela excitado por fonte de potência limitada.....	51
4 RESULTADOS.....	56
4.1 Excitação vertical ideal por mecanismo biela-manivela.....	56
4.1.1 Bifurcações e expoentes de Lyapunov.....	57
4.1.2 Mapas de fase, seções de Poincaré e históricos no tempo.....	61
4.1.2.1 Frequência $\omega = 1,8$	62
4.1.2.1.1 Frequência $\omega = 1,8$ com $\epsilon = 0$	62
4.1.2.1.2 Frequência $\omega = 1,8$ com $\epsilon = 0,4$	62
4.1.2.1.3 Frequência $\omega = 1,8$ com $\epsilon = 0,9$	63
4.1.2.2 Frequência $\omega = 0,87$	68
4.1.2.2.1 Frequência $\omega = 0,87$ com $\epsilon = 0$	68
4.1.2.2.2 Frequência $\omega = 0,87$ com $\epsilon = 0,4$	69
4.1.2.2.3 Frequência $\omega = 0,87$ com $\epsilon = 0,9$	69
4.1.2.3 Frequência $\omega = 0,575$	73
4.1.2.3.1 Frequência $\omega = 0,575$ com $\epsilon = 0$	73
4.1.2.3.2 Frequência $\omega = 0,575$ com $\epsilon = 0,4$	73
4.1.2.3.3 Frequência $\omega = 0,575$ com $\epsilon = 0,9$	74
4.1.3 Expoentes de Lyapunov no plano p versus ω	78
4.1.4 “Espaço de parâmetros”.....	80
4.1.5 Bacias de atração para o caso de excitação vertical ideal.....	83
4.2 Resultados para a excitação vertical por biela-manivela com potência limitada..	92
4.2.1 Primeira comparação de potência limitada com a excitação ideal.....	93
4.2.2 Segunda comparação de potência limitada com a excitação ideal.....	95

4.2.3 Terceira comparação de potência limitada com a excitação ideal.....	97
5 CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	100
5.1 Trabalhos futuros.....	100
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	102
Apêndice A.....	109
A.1 As Coordenadas generalizadas.....	109
A.2 As Equações de Lagrange.....	115
Apêndice B.....	119
B.1 Análise de um pêndulo simples amortecido com excitação vertical ideal no suporte	119
B.2 Análise de um pêndulo simples amortecido com excitação horizontal ideal no suporte.....	121
B.3 Análise de um pêndulo simples amortecido com excitação ideal em ambas direções no suporte.....	122
Apêndice C.....	125
Apêndice D.....	128
Apêndice E.....	132
Apêndice F.....	135
Apêndice G.....	139
G.1 Diagramas de bifurcação com $\epsilon = 0$	139
G.2 Diagramas de bifurcação com $\epsilon = 0,4$	141
G.3 Diagramas de bifurcação com $\epsilon = 0,9$	144
Anexo A.....	147

1 INTRODUÇÃO

Galileu Galilei foi o primeiro a estudar sistematicamente o movimento pendular. Foi ele quem primeiro percebeu que o período do movimento do pêndulo era constante, tomando como base as oscilações de um candelabro pendurado no teto da catedral de Pisa comparadas com as batidas de seu coração (ASIMOV, 1964). O pêndulo, dentre outros mecanismos, é comumente analisado sob circunstâncias de oscilações paramétricas. As oscilações paramétricas são caracterizadas por sistemas oscilantes cujas equações diferenciais que os representam possuem parâmetros que variam no tempo. Em problemas mecânicos, elas ocorrem em sistemas oscilantes devido a uma força externa aplicada ou devido à variação periódica dos parâmetros. O caso clássico do pêndulo sob excitação paramétrica ocorre devido a forças externas, onde é necessário que a força seja aplicada verticalmente. Conforme está descrito em Nayfeh e Mook (1995), as excitações paramétricas se diferem das excitações externas pelas características da equação diferencial que representam o sistema. A excitação paramétrica resulta necessariamente em uma equação diferencial homogênea, com os coeficientes de cada termo variando no tempo. Em Landau e Lifchitz (2004), afirma-se que as oscilações paramétricas são caracterizadas quando a ação de uma força externa sobre o oscilador harmônico reflete em uma variação temporal dos parâmetros do sistema. Portanto, a equação diferencial de sistemas paramétricos é composta por equações diferenciais com os coeficientes variando no tempo. Em geral essas equações são não-lineares, porém através da linearização tornam-se equações mais simples de serem investigadas. Em sua forma linearizada podem adquirir o formato da clássica equação de Mathieu (ÁVILA, 2012), o que facilita os estudos pelos inúmeros trabalhos com essa equação (COISSON et al. 2009; KUMAR, 2011; XU et al., 2005; XU, 2005).

O pêndulo excitado parametricamente significa, na prática, que o pêndulo está sendo excitado na vertical enquanto oscila na horizontal. A força externa na vertical pode ser associada a um deslocamento vertical imposto ao suporte (Figura 1.1). Esse mecanismo, apesar de estar submetido a um deslocamento harmônico simples, pode resultar em uma resposta caótica do pêndulo, verificado graficamente, inclusive, por características fractais nas seções de Poincaré (LEVEN e KOCK, 1981). Além do caos, o pêndulo pode exibir como resposta um ponto fixo após algum tempo, uma oscilação simples, órbitas puramente

rotativas e inclusive uma mistura em que o movimento é chamado de oscilação-rotação, onde o pêndulo exibe rotações, mas inverte sua direção de rotação periodicamente.

Figura 1.1. Representação do pêndulo excitado parametricamente

O fenômeno do caos é consequência da não-linearidade, embora nem toda não-linearidade resulte em caos. Pode-se considerar que o caos, especificamente, é um campo de estudo da Matemática com aplicações em Física, Engenharia e Biologia. Dentro de seu campo, estuda sistemas dinâmicos altamente sensíveis às condições iniciais. Como consequência, pequenas diferenças nas condições iniciais dos problemas, incluindo possivelmente erros computacionais de truncamento, levam, após certo número de iterações, a um resultado completamente diferente. Nos anos 1960, Edward Lorenz analisou a possibilidade de prever, através de um modelo matemático, o tempo meteorológico. Sua conclusão foi que a aplicação de modelos estatísticos lineares em meteorologia seria inviável, devido ao fato de que a maioria dos fenômenos atmosféricos envolvidos na previsão do tempo serem não-lineares (PALMER, 2009).

Em dinâmica não-linear, analisa-se o comportamento de sistemas dinâmicos como o pêndulo, determinando-se rotas e duplicações de período (NAYFEH e MOOK, 1995; ARGYRIS, FAUST e HAASE, 1994). Ressalta-se que sistemas dinâmicos não se restringem apenas a sistemas essencialmente mecânicos. Nessa área podem-se incluir temas como: modelagem de estudos populacionais (BALTHAZAR e VONBREMEN, 2008), economia, meteorologia, microbiologia, ciência da computação, circuitos elétricos, lasers, oscilações em reações químicas, entre outros.

A dinâmica não-linear dos sistemas pode apresentar características diversas podendo ser classificadas em: periódicas, multi-periódicas, quasi-periódicas e caóticas. Atualmente, as principais dificuldades em se estudar os fenômenos caóticos em sistemas mecânicos são devido ao fato de que os modelos matemáticos que os descrevem serem modelos simplificados de fenômenos físicos (BALTHAZAR; GONÇALVES; BRASIL, 2008).

Matematicamente, um sistema não-linear é um sistema que não satisfaz o princípio da superposição. Embora algumas aplicações considerem aproximações lineares com bons resultados, a maioria dos fenômenos físicos são essencialmente não-lineares. Uma função linear deve obedecer a três condições que são aditividade, homogeneidade e o princípio da superposição. Equações diferenciais são lineares se estiverem na forma presente na Eq. (1.1), em que os coeficientes são funções lineares dependentes de t .

$$a_n(t) \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dy(t)}{dt} + a_0(t) y(t) = g(t) \quad (1.1)$$

Na Eq.(1.1), se $g(t) = 0$ a equação diferencial é dita homogênea e quando $a_i(t)$, com $i = 0; \dots; n$, forem funções constantes a equação é chamada equação diferencial linear com coeficientes constantes (BOYCE; DIPRIMA, 1994).

No desenvolvimento de modelagens, muito comumente, faz-se uso das equações de Lagrange para a obtenção das equações de movimento em um dado sistema. Observando-se devidamente os vínculos envolvidos no sistema, determinando-se a energia cinética e potencial para os referenciais adequados obtêm-se as equações de Lagrange do sistema, as quais fornecem as equações diferenciais de movimento.

Um sistema não-ideal é aquele em que a excitação é influenciada pela própria resposta do sistema excitado. Portanto em sistemas não-ideais deve-se adicionar uma equação que descreve a fonte não-ideal (KONONENKO, 1969). Devido à fonte de potência limitada faz-se necessário que o modelo represente o sistema considerando as interações dinâmicas entre os corpos acoplados. O que se observa em um sistema pendular não-ideal é o movimento oscilatório do pêndulo interferindo na dinâmica do motor. Esse “feedback” classifica o sistema como não-ideal de excitação por fonte de potência limitada. Para efeito de comparação, caracteriza-se como ideal o sistema em que o movimento do sistema oscilatório, no caso o pêndulo, não interfere na dinâmica da fonte de energia, no caso o motor. A ideia de potência limitada está descrita no livro de Kononenko (1969).

No presente trabalho, analisa-se um modelo ideal e um não-ideal do sistema proposto. No modelo ideal, um pêndulo é excitado por um mecanismo biela-manivela. No caso não-ideal, a oscilação do pêndulo é provocada por um motor elétrico também através de um mecanismo biela-manivela. A análise dinâmica do sistema não-ideal permite verificar o comportamento da vibração estrutural em acoplamento com a fonte de energia. Por outro lado esse modelo dinâmico também pode ser observado do ponto de vista de reaproveitamento de parte da energia de rotação do motor. A energia cinética do motor pode ser transferida ao pêndulo que pode eventualmente resultar em movimentos rotativos adequados a geração de energia elétrica através de indução eletromagnética.

1.1 Objetivos

O objetivo desse trabalho é estudar a dinâmica de um pêndulo excitado parametricamente por um mecanismo biela-manivela correlacionando o modelo ideal com o não-ideal.

Os objetivos específicos do trabalho são os que se seguem:

- através de modelos matemáticos envolvendo Trabalho e Energia e a partir das equações de Lagrange, obter as equações de movimento para os sistemas dinâmicos analisados que, no caso, são a excitação vertical ideal do pêndulo por mecanismo biela-manivela e em seguida a excitação devido à potência limitada. Pretende-se utilizar simulações numéricas para análise da dinâmica do sistema obtendo diagramas de bifurcações, mapas de fase, seções de Poincaré, expoentes de Lyapunov para a verificação do caos e gráficos de bacias de atração. Outras configurações pendulares são modeladas e detalhadas nos Apêndices.
- mostrar que o pêndulo simples excitado por um mecanismo biela-manivela corresponde a uma extensão do caso de excitação por movimento harmônico, e também comparar os resultados provenientes de diferentes parâmetros adimensionais escolhidos da literatura e associados à excitação harmônica com os resultados do pêndulo excitado pelo mecanismo biela-manivela.
- analisar a influência do mecanismo biela-manivela como excitador vertical do pêndulo simples no aparecimento do caos em comparação com a resposta obtida de uma excitação harmônica. Analisar, também, soluções estáveis, e em especial as soluções

rotativas que são de interesse prático para a geração de energia, tal como foi observado em Xu (2005).

- investigar o sistema pendular proposto sob a influência de excitação por uma fonte de potência limitada.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Estão presentes na literatura diferentes trabalhos sobre sistemas pendulares. Os princípios envolvendo a excitação paramétrica podem ser encontrados em Nayfeh e Mook (1995) e Butikov (2005). Quando a frequência do parâmetro oscilante for duas vezes a frequência natural do sistema, ocorre a ressonância paramétrica principal caracterizada pelo aumento progressivo da amplitude. Entretanto, o fenômeno de ressonância paramétrica ocorre para outras frequências, e elas são determinadas pelo valor da frequência de ressonância principal dividido por um número inteiro positivo (NEIMARK, 2003; BUTIKOV, 1999).

Com relação ao pêndulo simples, oscilações paramétricas podem ser observadas quando o comprimento do pêndulo varia no tempo ou através da movimentação ponto de suspensão (RULLI; RINO, 2006).

O fenômeno de ressonância paramétrica ocorre na prática, por exemplo, quando um navio entra em uma zona em que seu balanço devido às ondas leva a uma ressonância. O evento deve ocorrer quando a frequência de encontro das ondas com o navio for duas vezes à frequência natural de balanço da embarcação. Entretanto, atualmente já existem formas de detectar o balanço por ressonância paramétrica sobre o navio e evitar o acidente (LAARHOVEN, 2009; AVILA, 2012). Laarhoven (2009) afirma que a estabilização do navio por barbatanas é uma forma eficaz de aumentar o amortecimento do navio e diminuir a amplitude do balanço. Na Figura 2.1 está presente um acidente com um porta-contêiner, ocorrido na China em 1998, em que parte da carga foi danificada e perdida devido a uma ressonância paramétrica.

Figura 2.1 Navio APL China. (LAARHOVEN, 2009)

O início do estudo das oscilações paramétricas surgiu em 1831 com Faraday que investigou o comportamento das ondas na superfície de um cilindro cheio de fluido que quando submetido à excitação vertical oscilava com metade da frequência dessa excitação. Em seu experimento, a aceleração gravitacional efetiva correspondia ao parâmetro variante. Entende-se aceleração gravitacional efetiva como a soma da aceleração da gravidade com a aceleração devido à uma excitação externa imposta ao sistema. A representação do modelo correspondente ao de Faraday é mostrado na Figura 2.2 Melde e Lord Rayleigh também investigaram oscilações paramétricas através de uma corda amarrada na extremidade de um pino do diapasão que vibrava na direção da corda. Eles verificaram que o pino do diapasão vibrava com o dobro da frequência da corda que oscilava lateralmente. As oscilações do diapasão provocavam variações periódicas de tensão na corda (MISES; KÁRMAN, 1948).

Figura 2.2 Oscilação em um tanque; adaptado de Ávila (2012)

Oscilações paramétricas ocorrem também em circuitos elétricos. Mandelstam e Papalexi (1934) realizaram um estudo teórico e experimental tratando de oscilações em circuitos RLC (resistor-indutor-capacitor) variando de forma senoidal a capacitância e indutância. Em sua pesquisa analisaram soluções periódicas das equações de governo e investigaram condições de estabilidade.

Em Nayfeh e Mook (1995) está presente um exemplo de um circuito com indutor e um capacitor em série sem resistor. No capacitor as placas podem deslocar-se, variando deste modo a capacitância. A carga elétrica armazenada no capacitor é a variável da equação diferencial de segunda ordem. Pode-se dizer que trata-se de uma oscilação paramétrica devido ao fato de o parâmetro correspondente a distância entre as placas ser uma variável no tempo.

O fenômeno de oscilações paramétricas está presente na física moderna. Como exemplo são as oscilações na trajetória de partículas em aceleradores de partículas como betatrons, na dinâmica de um pêndulo com comprimento variável e do pêndulo com ponto de suspensão sendo excitado (RULLI; RINO, 2007). Um caso envolvendo a física moderna é o pêndulo quântico descrito em Cook e Zaidins (1986). Trata-se basicamente de um modelo pendular considerando níveis discretos de energia e o comportamento ondulatório da uma partícula. O modelo é utilizado nos casos de rotações e espalhamentos de átomos. Tal como o pêndulo clássico, o pêndulo quântico pode ser linearizado em casos de oscilações relativamente pequenas.

Diversos autores estudaram problemas de excitação paramétrica vertical no suporte, tais como: David e Sinha (2000); Bishop e Xu (1996) e Bishop e Clifford (1996). Um pêndulo com excitação horizontal no suporte está presente em Ge e Lin (2000). O caso com excitação em ambos sentidos (horizontal e vertical) foi descrito em Flashner e Golat (2001). Em Leung e Kuang (2006) foi analisada a dinâmica de um pêndulo esférico fracamente amortecido na suspensão onde estão presentes tanto a excitação vertical quanto a horizontal. Resultados caóticos foram obtidos através de diversos métodos matemáticos de aproximação e depois verificados através do método Runge-Kutta de 4ª ordem.

Uma análise da resposta estocástica de rotação do pêndulo excitado parametricamente foi realizada em Alevras e Yurchenko (2013). Considerando a excitação do pêndulo por ondas do mar, utilizou-se da relação empírica de espectro de distribuição de energia na frequência (PSD) Pierson-Moskowitz. Concluiu-se que o resultado rotacional tende a se tornar presente quando a massa do pêndulo diminui e que um amortecimento maior aumenta a região de comportamento rotacional. Concluiu-se também que o amortecimento funciona como um protetor contra aleatoriedade da frequência de excitação.

Em 1889, Laval construiu uma turbina e verificou que em caso de uma rápida passagem através da ressonância com potência suficiente, o máximo de amplitude de vibração é menor que a observada em um caso em regime permanente sobre a faixa de frequência ressonante. Foi a primeira vez que alguém estudou o problema da interação entre

a fonte de energia e a máquina em funcionamento na passagem sobre a ressonância (Balthazar et al., 2003)

Sommerfeld descreveu a interação entre um sistema oscilante e a fonte de energia. Em seu experimento, utilizando uma mesa com motor elétrico observou que a velocidade do motor não dependia apenas da energia inserida no sistema. Foi constatado que a amplitude de oscilação atinge o valor máximo na região de ressonância, ponto em que o consumo de energia cresce. Após a ressonância, a amplitude decresce bruscamente, enquanto que a velocidade do motor cresce rapidamente. Observou-se que ou o sistema não ultrapassaria a faixa de ressonância ou seria necessária uma potência a mais para conseguir aumentar a velocidade. Uma forte interação resultaria em uma flutuação da velocidade do motor e amplitudes de vibração um tanto altas. Para superar esta condição o torque do motor elétrico tem que ser grande o suficiente para não ser afetado pelas variações de carga durante as vibrações.

Em Kononenko (1969), apresentou-se o primeiro estudo detalhado do problema de potência limitada na passagem pela região de ressonância. Se considerarmos a região antes da ressonância na forma de uma curva de resposta na frequência vamos verificar que a potência fornecida aumenta a velocidade de rotação do motor. No entanto quanto mais a velocidade do motor se aproxima da ressonância, maior a quantidade de potência necessária para continuar aumentando a velocidade, considerando-se que aumenta a energia consumida pela estrutura. Durante a passagem pela ressonância, mesmo um considerável aumento na energia fornecida resulta em um pequeno aumento na velocidade enquanto há um grande aumento na amplitude de oscilação. O “salto” na frequência e o aumento da energia necessária para a aceleração caracteriza o “efeito Sommerfeld”.

Dimentberg et al. (1997), conforme a Figura 2.3, estudou um sistema de um grau de liberdade com um desbalanço interagindo com uma fonte de potência limitada. Uma análise da ressonância foi feita em Nayfeh e Mook (1995). O sistema é descrito com duas equações diferenciais acopladas que incluem o torque e velocidade do motor elétrico acelerando e desacelerando. Nos últimos anos, modelos ideais foram aprimorados no sentido de começar a considerar a não-idealidade, descrevendo problemas mais próximos da realidade (CVETICANIN, 2010).

Figura 2.3 Sistema massa-mola-amortecedor com desbalanceamento sob excitação ideal (NAYFEH; MOOK, 1995)

Souza et al. (2005), apresentou um sistema com duas engrenagens de diferentes diâmetros e distâncias entre os dentes e supôs que o movimento de uma engrenagem é pré-determinada enquanto a outra é consequência da dinâmica de todo sistema (Figura 2.4). No caso de excitação ideal, a roda que fornece o movimento tem um comportamento senoidal com amplitude e frequência constantes. No sistema não-ideal ela passa a ser resultado também da resposta do sistema e do limite da fonte de energia adotado. Os resultados obtidos dessa análise apresentam respostas estáveis e caóticas.

Figura 2.4 Modelo de um sistema não-ideal com duas engrenagens (SOUZA et al., 2005)

Zukovic e Cvetican (2009) introduziram uma folga em um sistema não-ideal, tal como o representado na Figura 2.5. O sistema contém um oscilador ligado com um motor desbalanceado. A conexão do oscilador ao elemento fixado está com uma folga. Devido à existência desta folga a força na conexão entre o motor e a parte fixa do sistema é

descontínua mas linear. Os regimes transiente e permanente, bem como a estabilidade do sistema foram estudados.

O mecanismo estudado em Dimentberg et al. (1997), considerou um grau de liberdade no sistema dinâmico composto de uma base rígida ligada ao chão de maneira flexível e excitada por um motor desbalanceado (Figura 2.6). A rigidez do suporte foi variada de um valor alto até um valor baixo conforme a velocidade rotacional do motor aumentava. Dantas e Balthazar (2003), estenderam a investigação considerando o sistema mecânico excitado por um motor DC com potência limitada em que a base é ligada ao chão através de uma mola com propriedades não-lineares sendo que, além do motor, uma pequena massa excêntrica gira. Esse dispositivo eletro-mecânico tem as principais propriedades de uma máquina conhecida como vibrador centrífugo. Considera-se que a resistência deste sistema oscilatório é uma força viscosa linear e a diferença entre o torque do motor e a resistência ao torque aplicado ao rotor foi obtida experimentalmente. O oscilador possui uma não-linearidade cúbica. Dantas e Balthazar (2004), realizaram uma análise local de osciladores não-ideais e não-lineares de modelos mecânicos e obtiveram-se condições para a ocorrência de bifurcações do tipo Hopf.

Figura 2.5 Modelo de um sistema não-ideal com folga (ZUKOVIC; CVETICANIN, 2009)

Figura 2.6 Vibrador centrífugo (DANTAS; BALTHAZAR, 2003)

Figura 2.7. Modelo de uma estrutura com motor (ZUKOVIC; CVETICANIN, 2007)

Figura 2.8 Sistema não-ideal com absorvedor de choque (PUSENJAC; OBLAK; TICAR, 2009)

Figura 2.9 Sistema oscilador-motor de dois graus de liberdade (TSUCHIDA et al, 2003)

Figura 2.10 O rotor excitado através de uma fonte de potência limitada (PUSENJAC; OBLAK; TICAR, 2009)

Zukovic e Cveticanin (2007), estudaram a dinâmica de um sistema não-linear com excitação não-ideal conforme Figura 2.7. Um motor desbalanceado com uma estrutura altamente não-linear do tipo cúbico foi considerada. Os movimentos em regime permanente e sua estabilidade são analisados e o efeito Sommerfeld foi verificado. Para certos parâmetros o movimento caótico foi obtido devido a cascatas de duplicações de período. O controle do caos foi encontrado através de determinados parâmetros que levavam a movimentos periódicos.

No trabalho de Pusenjak; Oblak e Ticar (2009), o mecanismo é constituído de um sistema com uma massa excêntrica acoplada a um absorvedor não-linear de choque onde a

massa é acionada por um motor DC que corresponde à fonte de potência limitada (Figura 2.8). A carcaça do motor é isolada da base através de um absorvedor de choque de características não-lineares. O sistema eletromecânico é não ideal e não-linear e o modelo de vibração não-linear foi usado para analisar a resposta durante a passagem na ressonância fundamental.

Tsuchida et al. (2003) analisou as possibilidades de movimentos regulares e irregulares na vibração de um sistema não-ideal tal como mostrado na Figura 2.9. O sistema analisado é constituído por um bloco pesado, uma mola linear e um amortecedor linear com amortecimento viscoso. Sobre o bloco é colocado um motor não-ideal com um rotor mais uma massa excêntrica. Adicionando-se sobre o bloco outra mola linear e um amortecedor seguido de outro bloco acima desses. O sistema vibrante é analisado levando em consideração a não-linearidade do torque. A passagem através da ressonância é obtida através da variação da velocidade angular do motor DC com potência limitada. O máximo de amplitude é observado antes, durante e após a ressonância. Foram feitos estudos considerando o torque linear e não-linear. As condições para o movimento irregular e bifurcação também são analisadas.

Um sistema eletromecânico foi analisado em Pusenjak; Oblak e Ticar (2009), o mecanismo era constituído de um rotor com um disco girando, montado sobre uma biela elástica que é forçada por uma fonte de potência limitada. O sistema consiste de um eletromotor acoplado a uma biela elástica sendo que o disco girante é montado sobre o ponto médio dessa biela sem massa (ver Figura 2.10). Considera-se o modelo como linear e analisa-se a passagem do motor pela região crítica de ressonância em situação de regime transiente.

Em Krasnopolskaya e Shvets (1990), Belato et al. (2001) e Krasnopolskaya e Shvets (1993) um mecanismo biela-manivela ligado ao ponto de suporte de um pêndulo é analisado, sendo que o pendulo é excitado em seu suporte na direção horizontal. A manivela é ligada ao motor DC tido como a fonte de potência limitada. Em Krasnopolskaya e Shvets (1990) o comportamento do pêndulo em regime permanente é analisado. O motor é alimentado por um sistema elétrico de corrente contínua sendo que a dinâmica do sistema foi investigada tendo como parâmetro de controle a tensão elétrica a que era submetida o conjunto. Perto da região de ressonância fundamental foi onde o sistema apresentou o comportamento de órbitas mais variadas incluindo características multi-periódicas, quasi-periódicas e caóticas. Foi observado que para este mecanismo com a excitação na direção horizontal o fenômeno caos estaria presente apenas devido à consideração da potência

limitada, não podendo ocorrer em um caso de excitação ideal (KRASNOPOLSKAYA; SHVETS, 1993). Verificou-se também a presença do caos para vibradores piezelétricos excitados por um gerador com potência limitada em Krasnopolskaya e Shvets (1993). A análise desse mesmo mecanismo foi feito em Belato (2002), onde considerou-se um motor de corrente contínua associado a um sistema biela-manivela-pêndulo utilizando-se do método de Lagrange. De forma similar foi feito também a modelagem do sistema biela-manivela-pêndulo através das equações de Hamilton. Foi desenvolvida uma nova técnica numérica capaz de descrever o comportamento dinâmico das principais soluções do sistema. A técnica baseia-se no cálculo de funções polinomiais capaz de descrever a estabilidade do conjunto de soluções em determinada região do diagrama de fase e fornece também um diagrama de bifurcação das soluções.

Wauer e Burle (1997) apresenta o estudo da dinâmica de um mecanismo biela-manivela excitado por uma fonte não-ideal de potência limitada, onde investiga-se a dinâmica em regime permanente e transiente na partida do motor e também na velocidade final.

O trabalho de Belato et al. (2001) encontrou uma solução na ressonância principal onde o crescimento da frequência, perda da estabilidade e uma bifurcação sela-nó ocorreram. Juntamente foram demonstrado os “saltos” e o escape do poço de potencial. Com a frequência diminuindo ocorre a perda da estabilidade em uma bifurcação “flip” seguido de crise. O fim do atrator periódico e o aparecimento do atrator caótico seguido do aparecimento de um único poço de potencial se mostram presentes.

Em Alifov e Frolov (1977), considera-se uma fonte de potência limitada no sistema com amortecedor de atrito seco e encontra-se uma substancial influência da natureza da ressonância. Os resultados são produzidos para um mecanismo que envolve deslizamento (PONTES; OLIVEIRA; BALTHAZAR, 2000). O mecanismo representado na Figura 2.12, constitui-se de um bloco ligado a uma mola e amortecedor, sobre uma esteira empurrada por um motor de potência limitada onde o escorregamento ocorre entre o bloco e a esteira. O que se verifica é que quando a velocidade da esteira ultrapassa uma determinada velocidade, o deslizamento ocorre e um ciclo limite é encontrado. A influência da dinâmica do motor do sistema vibrante é apresentada através da resposta da velocidade angular e verifica-se em seguida a influência da potência limitada sobre os resultados caóticos.

O mesmo modelo é estudado em Dantas e Balthazar (2004), onde analisa-se a estabilidade e instabilidade do ponto de equilíbrio do sistema. Ocorrem bifurcações do tipo Hopf para determinados parâmetros do sistema oscilante.

Figura 2.11 Sistema não-ideal de excitação do pêndulo através de potência limitada, adaptado de Balthazar et al. (2003)

Figura 2.12 Excitação não-ideal através de uma esteira (PONTES; OLIVEIRA; BALHAZAR, 2000)

O modelo analisado em Balthazar et al. (2003) consiste em uma armação elástica com um motor DC tal como na Figura 2.13. Em Felix; Balthazar e Brasil (2005) a estrutura possui um arco com elásticos também com um motor DC (Figura 2.14). Os modelos se diferenciam apenas pelo fato de que um deles possui a parte de cima flexível enquanto o outro posiciona o motor sobre uma barra rígida. O fenômeno de saturação é investigado, assim como o controle da saturação do sistema não-ideal também é empregado. Realiza-se um controle quadrático da saturação sobre a estrutura quando atravessa-se as zonas de ressonância. Uma análise detalhada é feita sobre a faixa em que a frequência do controle é igual a da ressonância e sobre a qual a frequência do sistema é duas vezes a frequência do controlador.

Figura 2.13 Pórtico com motor de potência limitada (BALTHAZAR et al., 2003)

Figura 2.14 Modelo de um pórtico com motor de potência limitada (FELIX; BALTHAZAR; BRASIL, 2005)

Um modelo com dois motores DC com massas excêntricas é analisado em Balthazar et al. (2004), o fenômeno associado à passagem pela ressonância envolvendo potência limitada, bem como a sincronização no sistema são observados em certos casos de excitação. O sistema é caracterizado por uma viga sustentando dois motores DC onde esta viga é sustentada por outras duas conforme está representado na Figura 2.15.

Figura 2.15 Dois motores sobre um pórtico (BALTHAZAR et al., 2004)

Figura 2.16 Quatro motores DC sobre uma estrutura do bipórtico (BALTHAZAR; FELIX; BRASIL, 2005)

No modelo de Balthazar; Felix e Brasil (2005) da Figura 2.16 estão presentes quatro motores DC com massa excêntrica sobre uma barra apoiada sobre duas colunas flexíveis. Considerou-se que as colunas são flexíveis, lineares e não possuem massa. Uma excentricidade está presente em cada um dos motores. Massas de valores bem pequenos são

colocadas excêntricamente nos rotores. Quando os motores giram apenas na direção anti-horária a barra é capaz de se movimentar apenas na direção horizontal. São analisadas as influências das respostas da estrutura sobre o motor DC, assim como o fenômeno do salto e o efeito Sommerfeld. Caracterizou-se o efeito Sommerfeld quando as velocidades angulares no motores eram capturadas pela região de ressonância da estrutura.

Uma revisão de vibrações não-ideais está presente em Balthazar et al. (2003) onde os modelos considerando potência limitada representam melhor o que ocorre na prática. Retoma-se a ideia apresentada por Sommerfeld de que a vibração representa um absorvedor de energia.

Considerando o estudo da dinâmica do pêndulo esférico presente em Miles (1984), um estudo da dinâmica do pêndulo esférico sob excitação por potência limitada foi feita em Shvets (2007) e representado na Figura 2.17. Neste caso, o motor elétrico excita verticalmente o ponto de suspensão de um pêndulo simples que se movimenta de forma a desenhar um ângulo sólido. O caos foi verificado nesse sistema após uma sequência de bifurcações de duplicação de período.

Figura 2.17 Pêndulo esférico (SHVETS, 2007)

O movimento de um pêndulo com comprimento variável periódico (PCVP) é um problema clássico de mecânica analisado em Belyakov e Seyranian (2010) e Belyakov et al (2009). Comumente, o PCVP pode ser associado ao balanço com uma criança. Por exemplo,

para se aumentar a amplitude de um balanço basta se agachar enquanto se passa pela posição vertical e levanta-se quando se chega aos extremos, isto é, provoca-se oscilações que são duas vezes a frequência natural do balanço.

Figura 2.18 Pêndulos com comprimento variável (BELYAKOV; SEYRANIAN, 2010)

Apesar da popularidade do pêndulo na literatura (KAUDERER, 1958, BOGOLYUBOV; MITROPOLSKY, 1961, PANOVKO; GUBANOVA, 1987; BOLOTIN, 1999), não há muitas soluções analíticas e numéricas para o comportamento do PCVP. Em Kauderer (1958) uma relação de aproximação da amplitude da órbita periódica e da frequência de excitação foi encontrada. Em Bogolyubov e Mitropolsky (1961) e Panovko e Gubanova (1987) o PCVP foi citado como exemplo de um sistema periódico descrito por uma equação diferente da equação de Mathieu, mas sem uma análise posterior.

A análise de estabilidade da posição vertical do pêndulo com amortecimento e excitação periódica arbitrária foi feita em Seyranian (2004). Nesse artigo as regiões de instabilidade foram encontradas na forma de semi-cones em um espaço paramétrico tridimensional.

Nos artigos de Pinsky e Zevin (1999) e Zevin e Filonenko (2007), a análise qualitativa das soluções periódicas e sua instabilidade para o PCVP, sem amortecimento ou excitação paramétrica foi conduzida. Nessas duas publicações a adequação do PCVP como um modelo de balanço foi também discutida. Bozduganova e Vitliemov (2009) trabalharam com uma variação do PCVP considerando o atrito no eixo do suporte.

O PCVP é muito menos analisado que o caso do pêndulo com a excitação paramétrica no suporte, sendo este último simplesmente referido como “parametrically driven pendulum” ou “parametric pendulum”, tal como foi feito em Szemplinska-Stupnicka et al. (2000), Xu; Wiercigroch e Cartmell (2005), Lenci et al. (2008) e suas referências.

Esses dois pêndulos, o PCVP e o pêndulo com excitação paramétrica, são descritos por diferentes formas analíticas, e conseqüentemente possuem diferentes propriedades dinâmicas. Por exemplo, o PCVP não pode ficar estável na posição vertical invertida. No entanto, os métodos usados para a análise dinâmica de um pêndulo são aplicáveis para o outro.

3 MODELAGEM DOS SISTEMAS DINÂMICOS

3.1 Sistema pendular excitado por deslocamento harmônico no suporte devido a fonte de potência infinita

Figura 3.1 Representação do pêndulo excitado verticalmente

Nesta seção modela-se o problema de um pêndulo com excitação harmônica vertical no suporte da Figura 3.1. Pelo método de Lagrange encontram-se as equações de movimento através das coordenadas α e u . A coordenada u corresponde a um deslocamento harmônico de amplitude a no suporte com frequência angular Ω :

$$u = a \cos(\Omega t) \quad (3.1.1)$$

$$\dot{u} = -a \Omega \sin(\Omega t)$$

$$\ddot{u} = -a \Omega^2 \cos(\Omega t)$$

O pêndulo simples tem massa m ligada ao ponto de apoio por uma haste rígida, sem massa e de comprimento l . Para efeito de comparação, um pêndulo físico em movimento plano pode ser comparado a um pêndulo simples equivalente.

Para obtenção da Lagrangeana determina-se antes a posição do pêndulo nas coordenadas α e u :

$$x = l \sin \alpha \quad (3.1.2)$$

$$y = -l \cos \alpha - u$$

Derivando-se no tempo, obtêm-se as velocidades em cada referencial:

$$\dot{x} = l \dot{\alpha} \cos \alpha \quad (3.1.3)$$

$$\dot{y} = l \dot{\alpha} \sin \alpha - \dot{u}$$

A energia cinética e potencial do sistema serão, portanto, as Eq. (3.1.4) e Eq. (3.1.5):

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m \dot{u}^2 - m l \dot{\alpha} \dot{u} \sin \alpha \quad (3.1.4)$$

$$V = m g y = -m g l \cos \alpha - m g u \quad (3.1.5)$$

A Lagrangeana obtida através da energia cinética e potencial:

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m \dot{u}^2 - m l \dot{\alpha} \dot{u} \sin \alpha + m g l \cos \alpha + m g u \quad (3.1.6)$$

Considerando que o pêndulo é amortecido deve-se levar em conta uma força dissipativa na junta do suporte, haverá uma força generalizada escrita em termos da velocidade angular $\dot{\alpha}$, comprimento l e coeficiente de amortecimento c :

$$Q_{\alpha}^{NC} = -c l^2 \dot{\alpha} \quad (3.1.7)$$

Sabendo que Q_{α}^{NC} representa as forças não conservativas, termo fica do lado direito da equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = Q_{\alpha}^{NC} \quad (3.1.8)$$

Realizando-se as derivadas e substituindo na equação de Lagrange referente à coordenada α , encontrou-se a equação diferencial de movimento pendular:

$$m l^2 \ddot{\alpha} + c l^2 \dot{\alpha} + m g l \sin \alpha + m a l \Omega^2 \cos(\Omega t) \sin \alpha = 0 \quad (3.1.9)$$

A equação diferencial é adimensionalizada no tempo e portanto as derivadas são modificadas. O tempo dimensional é representada por t e o tempo adimensional representado por τ . A frequência natural do pêndulo ω_0 é usada na adimensionalização. As derivadas no tempo dimensional são representadas por ponto sobre a variável e as derivadas no tempo adimensional são representadas por um apóstrofo.

$$\tau = \omega_0 t \quad (3.1.10)$$

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{1}{\omega_0} \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\alpha'' = \frac{d^2\alpha}{d\tau^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$\omega = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

$$p = \frac{a \Omega^2}{l \omega_0}$$

$$\gamma = \frac{c}{m \omega_0}$$

Após a substituição dos termos adimensionais na Eq. (3.1.9) e dividindo-a por $m l^2 \omega_0$ encontra-se a equação no formato encontrado comumente na literatura.

$$\alpha'' + \gamma \alpha' + \text{sen } \alpha (1 + p \cos(\omega \tau)) = 0 \quad (3.1.11)$$

3.2 Sistema pendular excitado verticalmente pelo mecanismo biela-manivela por fonte de potência infinita

A Figura 3.2 representa o sistema ideal investigado na presente seção. Trata-se de um mecanismo biela-manivela acionando um pêndulo simples. O ângulo θ avança com velocidade angular constante, enquanto o pêndulo é excitado em seu ponto de apoio pela biela. Nesta seção e posteriormente, o símbolo a corresponde ao raio da manivela e o b ao comprimento da biela. O ângulo θ possui uma relação geométrica com o ângulo φ .

O mecanismo possui 1 grau de liberdade pois o valor de θ é conhecido e a posição do pêndulo é obtida numericamente através da integração de uma única equação diferencial.

Com intuito de obter a Lagrangeana do sistema primeiramente determina-se a posição da massa m na extremidade do pêndulo através das coordenadas cartesianas em termos das variáveis α , θ e φ .

$$\begin{aligned} x_p &= l \sin \alpha \\ y_p &= -a \cos \theta - b \cos \varphi - l \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Através da relação geométrica do mecanismo biela-manivela pode-se determinar a posição da extremidade do pêndulo em função das variáveis α e θ escrevendo o ângulo φ como:

$$\cos \varphi = \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \theta \right)^{1/2} \quad (3.2.2)$$

As derivadas das coordenadas cartesianas da posição da massa m são expressas por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= l \dot{\alpha} \cos \alpha \\ \dot{y}_p &= a \dot{\theta} \sin \theta + \frac{a^2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta}{b \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \theta \right)^{1/2}} + l \dot{\alpha} \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Figura 3.2 Representação do mecanismo biela-manivela acoplado ao pêndulo

Define-se uma função F que depende unicamente do ângulo θ , tal como foi feito na análise de outro mecanismo envolvendo biela-manivela em Belato (1998):

$$F = \sin \theta + \frac{a \sin \theta \cos \theta}{b \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \theta\right)^{1/2}} \quad (3.2.4)$$

A derivada da função F com relação ao tempo é descrita por:

$$\dot{F} = \dot{\theta} \cos \theta + \frac{a \dot{\theta} \cos(2\theta)}{b \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \theta\right)^{1/2}} + \frac{a^3 \dot{\theta} \sin^2(2\theta)}{4 b^3 \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}} \quad (3.2.5)$$

A velocidade $\dot{y}_p$ poderá ser reescrita de forma reduzida, com o uso da função F :

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= l \dot{\alpha} \cos \alpha \\ \dot{y}_p &= a \dot{\theta} F + l \dot{\alpha} \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Considerando que o pêndulo se movimenta sobre um plano, a energia cinética é representada por:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) \quad (3.2.7)$$

Substituindo as Eq.(3.2.6) na equação da energia cinética (3.2.7) obtém-se:

$$T = \frac{1}{2} m \left[l^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha + (a \dot{\theta} F + l \dot{\alpha} \sin \alpha)^2 \right] \quad (3.2.8)$$

A energia potencial é obtida a partir da posição da massa m considerando como nível de referência o centro do rotor:

$$V = -m g l \cos \alpha - m g b \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \theta\right)^{1/2} - m g a \cos \theta \quad (3.2.9)$$

Portanto a Lagrangeana será:

$$L = T - V \quad (3.2.10)$$

$$L = \frac{1}{2}m \left[l^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha + (a \dot{\theta} F + l \dot{\alpha} \sin \alpha)^2 \right] + m g l \cos \alpha \quad (3.2.11)$$

$$+ m g b \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \theta \right)^{1/2} + m g a \cos \theta$$

A partir da Lagrangeana utilizada na equação de Lagrange encontra-se a equação diferencial que rege o movimento pendular. Na Eq.(3.2.12) o lado direito da igualdade corresponde à função dissipação de Rayleigh (LEMOS, 2004), onde estão presentes as forças dissipativas envolvidas na dinâmica do mecanismo.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = G_{\alpha}^{NC} \quad (3.2.12)$$

Realizando as derivadas da Lagrangeana da Eq.(3.2.11) e substituindo na Eq.(3.2.12) obtém-se a equação diferencial para o movimento do mecanismo.

$$m l^2 \ddot{\alpha} + m a l \dot{\theta} \dot{F} \sin \alpha + m g l \sin(\alpha) = -c l^2 \dot{\alpha} \quad (3.2.13)$$

Inserindo as relações adimensionais da Eq.(3.2.14) na Eq.(3.2.13) obtém-se a equação diferencial para o movimento do pêndulo em sua forma generalizada.

$$\tau = \omega_0 t \quad (3.2.14)$$

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{1}{\omega_0} \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\alpha'' = \frac{d^2\alpha}{d\tau^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{\omega_0} \frac{d\theta}{dt}$$

$$F' = \frac{dF}{d\tau} = \frac{1}{\omega_0} \frac{dF}{dt}$$

O termo τ corresponde ao tempo adimensional e ω_0 é a frequência natural do pêndulo, calculada a partir do seu comprimento e da aceleração gravitacional.

Ao realizar as substituições dos termos dimensionais da Eq.(3.2.14) pelos adimensionais na Eq.(3.2.13) e dividindo todos os termos por $ml^2\omega_0^2$ obtém-se a equação de movimento adimensionalizada:

$$\alpha'' + \frac{c}{m\omega_0}\alpha' + \text{sen } \alpha = -\frac{a}{l}\omega F'\text{sen } \alpha \quad (3.2.15)$$

Com o intuito de compararmos o modelo ideal de excitação por biela-manivela com o caso de excitação paramétrica clássica analisado por Xu; Wiercigroch e Cartmell (2005) e Clifford e Bishop (1995), introduzimos os mesmos parâmetros adimensionais, representados na Eq.(3.2.16):

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \\ p &= \frac{a}{l}\omega^2 \\ \epsilon &= \frac{a}{b} \\ \gamma &= \frac{c}{m\omega_0} \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

A Eq.(3.2.17) exhibe uma perturbação em comparação com a equação clássica do pêndulo excitado parametricamente.

$$\alpha'' + \gamma\alpha' + \text{sen } \alpha \left(1 + p \cos(\omega\tau) + \epsilon \frac{p \cos(2\omega\tau)}{(1 - \epsilon^2 \text{sen}^2(\omega\tau))^{1/2}} + \epsilon^3 \frac{p \text{sen}^2(2\omega\tau)}{4(1 - \epsilon^2 \text{sen}^2(\omega\tau))^{3/2}} \right) = 0 \quad (3.2.17)$$

Supondo que a relação entre os comprimentos da manivela e biela ϵ tenda a zero, ou seja, $a \ll b$, obtemos a equação clássica para o pêndulo de excitação paramétrica representada na Eq. (3.1.11), trata-se da equação utilizada em Xu; Wiercigroch e Cartmell (2005), Clifford e Bishop (1995) e Leven e Koch (1981).

A partir da Eq.(3.1.11) pode-se demonstrar teoricamente que a ressonância ocorre quando o parâmetro ω possui valor igual a um dos termos da série $2, 1, 2/3, 1/2, \dots$; ou seja, quando ω for igual a $2/n$ quando n for $1, 2, 3, \dots$ e assim por diante.

Primeiramente lineariza-se a Eq. (3.1.11) substituindo $\text{sen } \alpha$ por α e zera-se o termo relativo ao amortecimento. Em seguida, utilizando um reescalonamento insere-se o termo $\bar{\tau}$:

$$\bar{\tau} = \frac{\omega \tau}{2} \quad (3.2.18)$$

A equação diferencial obtida terá a forma clássica da Equação de Mathieu:

$$\frac{d^2 \alpha}{d\bar{\tau}^2} + [\bar{\omega} + 2\bar{\epsilon} \cos(2\bar{\tau})] \alpha = 0 \quad (3.2.19)$$

$$\text{onde } \bar{\omega} = \frac{4}{\omega^2} \quad \text{e} \quad \bar{\epsilon} = \frac{2p}{\omega^2}.$$

Em seguida conforme Nayfeh (1981), através de séries de potência e introduzindo o parâmetro $\mu = \sqrt{\bar{\omega}}$; pode-se escrever a Eq.(3.2.20), onde A e β são constantes:

$$\begin{aligned} \alpha = A \cos(\mu\bar{\tau} + \beta) + \frac{1}{4}\bar{\epsilon}A \left\{ \frac{\cos[(\mu + 2)\bar{\tau} + \beta]}{1 + \mu} + \frac{\cos[(\mu - 2)\bar{\tau} + \beta]}{1 - \mu} \right\} \\ + \frac{1}{32}\bar{\epsilon}^2 A \left\{ \frac{-8\bar{\tau} \sin(\mu\bar{\tau} + \beta)}{\mu(1 - \mu^2)} + \frac{\cos[(\mu + 4)\bar{\tau} + \beta]}{(1 + \mu)(2 + \mu)} \right. \\ \left. + \frac{\cos[(\mu - 4)\bar{\tau} + \beta]}{(1 - \mu)(2 - \mu)} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

O valor de α diverge quando μ for igual a 0; 1 e 2 devido a presença de divisores pequenos. Se tivéssemos realizado a expansão para ordens maiores teríamos encontrado a ressonância para a sequência de μ igual a 0, 1, 2, 3...

Através das relações: $\bar{\omega} = \mu^2$; $\bar{\omega} = 4/\omega^2$, pode-se obter que a ressonância ocorre com:

$$\omega = \frac{2}{n}; \quad n=1,2,3,\dots \quad (3.2.21)$$

3.3 Sistema pendular biela-manivela excitado por fonte de potência limitada

Em Krasnopol'skaya e Shvets (1993) e Belato et al (2002) foi analisado o caso do pêndulo excitado horizontalmente em seu suporte por uma fonte de potência limitada. Essa

fonte de energia corresponde a um motor elétrico linear, o que significa dizer que o torque fornecido pelo motor corresponde a uma função linear envolvendo a tensão elétrica. A diferença do modelo proposto no presente trabalho é o fato de a excitação do pêndulo ser na direção vertical ao invés de horizontal.

Na presente modelagem considera-se um motor elétrico com o seu rotor ligado coaxialmente a um disco, somando-os tem-se o momento de inércia de massa J do disco mais o motor. O disco e o motor giram juntos com a mesma velocidade angular dimensional $\dot{\theta}$. O pêndulo simples de comprimento l possui uma massa m em sua extremidade que gira com velocidade angular $\dot{\alpha}$.

Em comparação com o modelo de excitação ideal, a energia cinética diferencia-se por conter a inércia devido ao disco e o rotor do motor elétrico:

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) \quad (3.3.1)$$

A função potencial é a mesma do caso com excitação ideal. Portanto, a Lagrangeana para potência limitada é escrita de acordo com a Eq.(3.3.2).

$$L = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \left[l^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha + (a \dot{\theta} F + l \dot{\alpha} \sin \alpha)^2 \right] + m g l \cos \alpha \quad (3.3.2)$$

$$+ m g b \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \theta \right)^{1/2} + m g a \cos \theta$$

O modelo possui 2 graus de liberdade. Portanto o movimento do mecanismo é expresso por duas equações de Lagrange encontradas através das derivadas em termos das coordenadas generalizadas α e θ .

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = G_{\alpha}^{NC} \quad (3.3.3)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = G_{\theta}^{NC}$$

As forças generalizadas G_{α}^{NC} e G_{θ}^{NC} são não conservativas. Embora sejam chamadas “forças” correspondem ao torque que se opõe ao movimento nas direções α e θ devido ao

atrito. O torque do motor elétrico também deve entrar na segunda equação das Eq.(3.3.3) no termo de G_{θ}^{NC} .

Figura 3.2. Representação do mecanismo de excitação vertical do pêndulo por um motor elétrico

No presente modelo físico as forças generalizadas são dadas por:

$$\begin{aligned} G_{\alpha}^{NC} &= -c \ell^2 \dot{\alpha} \\ G_{\theta}^{NC} &= M_{Motor} - c_m \dot{\theta} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Tal como está descrito no Apêndice A, as forças generalizadas são obtidas através do trabalho virtual, mantendo uma coordenada fixa enquanto se varia a outra. O termo c representa o atrito na junta que suspende o pêndulo. Essa força de atrito possui sentido oposto ao seu movimento na direção de α e magnitude proporcional a sua velocidade.

O termo c_m representa o atrito no mancal que segura o disco e o motor elétrico, por ser considerado relativamente pequeno em relação ao torque fornecido pelo motor será desprezado na presente modelagem.

O torque M_{Motor} fornecido pelo motor elétrico possui uma relação linear com a tensão ajustada. Essa hipótese representa uma aproximação. Uma breve análise teórica do motor elétrico de corrente contínua é descrita no Apêndice C.

As equações diferenciais de movimento são obtidas através da aplicação da Eq.(3.3.3). A equação de movimento para a coordenada θ é:

$$J \ddot{\theta} + m a^2 F^2 \ddot{\theta} + m a^2 F \dot{F} \dot{\theta} + m a F l \cos(\alpha) \dot{\alpha}^2 + m a F l \sin(\alpha) \ddot{\alpha} + m g a F = M_{Motor} - c_m \dot{\theta} \quad (3.3.5)$$

Da segunda da equação de Lagrange deriva-se a equação de movimento para a coordenada α :

$$m l^2 \ddot{\alpha} + m a l \sin(\alpha) F \ddot{\theta} + m a l \sin \alpha \dot{F} \dot{\theta} + m g l \sin(\alpha) = -c l^2 \dot{\alpha} \quad (3.3.6)$$

A equação do torque do motor Eq.(3.3.7) é a terceira equação diferencial a compor o sistema de equações. O torque fornecido é resultado de uma função linear com $\dot{\theta}$. Considerações para utilização dessa equação são apresentados no Apêndice C.

$$M_{Motor} = \frac{K_T}{R} V - \frac{K_E K_T}{R} \dot{\theta} \quad (3.3.7)$$

Adimensionalizando-se os termos dependentes do tempo nas Eqs.(3.3.5), (3.3.6) e (3.3.7) através da frequência natural do pêndulo e das Equações (3.2.14) e o amortecimento usando o parâmetro adimensional γ , terá como resultado as três equações finais que compõem o sistema a ser resolvido numericamente. A Eq.(3.3.6) após ter o tempo adimensionalizado será dividida por $m l^2 \omega_0$ e o termo adimensional γ inserido.

As Eq.(3.3.8), (3.3.9) e (3.3.10) são as equações finais resolvidas numericamente através do MatLab 2012® usando o código presente no Apêndice E.

$$J\omega_0\theta'' + ma^2F^2\omega_0^2\theta'' + ma^2FF'\theta'\omega_0^2 + maFl\cos(\alpha)\omega_0^2\alpha'^2 + maFl\sin(\alpha)\omega_0^2\alpha'' + mgaF = M_{motor} - c_m\theta'\omega_0 \quad (3.3.8)$$

$$\alpha'' + \gamma\alpha' + \frac{a\sin(\alpha)F\theta''}{l} + \frac{a\sin(\alpha)F'\theta'}{l} + \sin(\alpha) = 0 \quad (3.3.9)$$

$$M_{motor} = \frac{K_TV}{R} - \frac{K_EK_T}{R}\omega_0\theta' \quad (3.3.10)$$

Nessa formulação é importante observar que a função F' não é uma função puramente trigonométrica, ao contrário da função F . A função F' possui dependência com a velocidade do motor θ' . Essa relação pode ser obtida através da adimensionalização temporal da Eq.(3.2.5) utilizando a frequência natural ω_0 e o parâmetro ϵ :

$$F' = \theta' \cos \theta + \epsilon \frac{\theta' \cos(2\theta)}{(1 - \epsilon^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} + \epsilon^3 \frac{\theta' \sin^2(2\theta)}{4(1 - \epsilon^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.3.11)$$

4 RESULTADOS

4.1 Excitação vertical ideal por mecanismo biela-manivela

Primeiramente verificou-se conceitualmente que o modelo de excitação pendular paramétrica analisado na literatura corresponde a um caso particular do caso de excitação por biela-manivela apresentado na seção 3.1. Para isso, procurou-se reproduzir os resultados de mapas de fase e seções de Poincaré exibidos em Xu; Wiercigroch e Cartmell (2005) que trazem resultados de excitação harmônica vertical utilizando desta vez o modelo com biela-manivela desenvolvido no presente trabalho. Isso é possível de ser alcançado quando se considera o parâmetro ϵ igual a zero.

Os parâmetros escolhidos para a realização das simulações numéricas e comparação dos resultados foram os mesmos parâmetros usados por Xu; Wiercigroch e Cartmell (2005). Nesta última referência os parâmetros utilizados para o amortecimento foi o adimensional γ igual a 0,1; a posição angular inicial do pêndulo igual a $0,01\pi$ e a velocidade inicial do pêndulo igual a zero. O parâmetro p foi variado dentro da faixa 0 a 4,5 e o ω entre 0 e 3,5.

Em Xu; Wiercigroch e Cartmell (2005) a integração da equação diferencial foi feita com passo fixo igual ao período de excitação dividido por 300, o que é suficiente para obter razoável precisão. O método escolhido no presente trabalho foi o Runge-Kutta de 4ª e 5ª ordem de passo variável ajustado através da tolerância relativa e da tolerância absoluta para a integração numérica da equação diferencial. O programa foi implementado no MatLab® 2012 e usou a função interna “ode45” que utiliza o método numérico de Dormand e Prince (1980) e com algoritmo apresentado em Hairer et al. (1993).

Na obtenção dos mapas de fase e seções de Poincaré foram ajustadas a tolerância relativa para 10^{-7} e a tolerância absoluta para 10^{-8} na variável temporal adimensional. A tolerância pôde ser restringida dessa forma devido ao rápido tempo de convergência para este tipo de solução.

Para os cálculos dos expoentes de Lyapunov foi utilizado o algoritmo presente em Wolf et al. (1985) implementado em MatLab. As tolerâncias de integração numérica neste caso foram os valores “default” de 10^{-3} para tolerância relativa e 10^{-6} para tolerância absoluta.

Os parâmetros utilizados nos mapas de fase, seções de Poincaré e diagrama de bifurcações foram: $\gamma = 0,1$; $\alpha(0) = 0,01\pi$; $\alpha'(0) = 0$. Os valores de p e ω foram variados no decorrer das simulações.

Após constatar que os mapas de fase e seções de Poincaré que estavam sendo obtidos correspondiam aos obtidos na literatura, foram reproduzidos os mesmos diagramas de bifurcações obtidas em Xu; Wiercigroch e Cartmell (2005) para as três regiões de ressonância que ficam próximas dos valores de ω : 1,8; 0,87 e 0,575. Esses três valores foram escolhidos pelos autores devido a questões computacionais e numéricas quando da utilização do software AUTO 97.

Os resultados ressonantes são obtidos teoricamente pela série que indica as frequências ressonantes ω igual a 2, 1, 2/3, 1/2 e assim sucessivamente conforme a Eq.(3.2.22). Para as mesmas frequências analisadas em Xu; Wiercigroch e Cartmell (2005) foram feitos gráficos considerando a excitação pelo mecanismo biela-manivela onde o parâmetro ϵ é variado obtendo-se diferentes resultados.

4.1.1 Bifurcações e expoentes de Lyapunov

Para a construção dos diagramas de bifurcação foram utilizadas as 15 últimas superfícies de Poincaré para cada valor de p . O intervalo de p variou entre 0 e 4,5 onde o incremento usado foi de 0,001. O tempo de simulação escolhido para bifurcação foi de 300 vezes o período de excitação, tal como foi feito em Xu; Wiercigroch e Cartmell (2005). Neste caso foi utilizada a tolerância relativa igual a 10^{-3} para integração numérica, fixando-se, entretanto, o passo máximo em 10^{-2} .

Verifica-se o fenômeno chamado “crise”, nos diagramas de bifurcação presente nas Figuras 4.1, 4.2 e 4.3. O fenômeno “crise” é provocado pela colisão entre um atrator caótico e um ponto fixo instável ou uma órbita instável, tal como foi definido em Grebogi et al. (1983). O comportamento caótico pode aparecer e desaparecer a partir de uma pequena mudança nos parâmetros, no presente caso, o parâmetro p . Para verificar qual região demonstra o aparecimento da “crise” e consequentemente o caos basta ver nos diagramas de bifurcação quais os trechos que preenchem completamente o intervalo de α entre $-\pi$ e π .

Utilizando valores de ω iguais a 1,8; 0,87 e 0,575 foram desenvolvidos diagramas de bifurcações com ϵ igual a 0,0; 0,4 e 0,9. Observa-se na Figura 4.1 que na ressonância principal $\omega = 1,8$ ocorre um alargamento da faixa onde se observa o caos conforme se

aumenta o valor de ϵ . Para os parâmetros $\omega = 0,87$ e $\omega = 0,575$, nas Figuras 4.2 e 4.3, respectivamente, verifica-se um deslocamento da região onde ocorre a crise. Vê-se um alargamento ou estreitamento dessas regiões sem que possa a priori estabelecer um padrão de o que vai acontecer quando varia-se o parâmetro ϵ .

Figura 4.1 – Diagramas de Bifurcação e expoentes de Lyapunov para $\omega = 1,8$.

(a) $\epsilon = 0$ (b) $\epsilon = 0,4$ (c) $\epsilon = 0,9$

Figura 4.2 – Diagramas de Bifurcação e expoentes de Lyapunov para $\omega = 0,87$.

(a) $\epsilon = 0$ (b) $\epsilon = 0,4$ (c) $\epsilon = 0,9$

Figura 4.3 – Digramas de Bifurcação e expoentes de Lyapunov para $\omega = 0,575$.

(a) $\epsilon = 0$ (b) $\epsilon = 0,4$ (c) $\epsilon = 0,9$

Valores de expoentes de Lyapunov foram calculados numericamente com o intuito de se obter os mesmos intervalos caóticos encontrados nos diagramas de bifurcação. Usando o mesmo parâmetro para a frequência de excitação ω igual a 1,8; 0,87 e 0,575, e variando-se

p entre 0 e 4,5 para os três valores diferentes de ϵ iguais a 0; 0,4 e 0,9, da mesma forma que foi feito para os diagramas de bifurcação. Foram feitos os gráficos para representar o expoente de Lyapunov associado a posição angular α e foram colocados lado a lado com o respectivo diagrama de bifurcação. Desta forma, comparam-se mais facilmente os resultados ao considerar que os diagramas de bifurcação e expoentes de Lyapunov devem apontar o caos nos mesmos trechos.

Variando-se o valor de p com passo de 0,001 obteve-se para cada p os valores dos expoentes de Lyapunov até o tempo adimensional τ igual a 1000 multiplicado pelo período de excitação. Dentre os 10% últimos valores no tempo escolhe-se o maior valor do expoente e associa-se ao valor de p formando o gráfico.

Considerando que expoentes positivos indicam a presença do caos, pode-se dizer que nos resultados das Figuras 4.1, 4.2 e 4.3 demonstram que as regiões dos diagramas de bifurcação que exibem um resultado caótico coincidem com as regiões caóticas nos gráficos de expoentes de Lyapunov. Os pontos onde ocorrem as bifurcações aparecem nos gráficos de expoente de Lyapunov com valor zero, o que pode ser checado na comparação entre as figuras.

4.1.2 Mapas de fase, Seções de Poincaré e históricos no tempo

Apenas os diagramas de bifurcação e expoentes de Lyapunov não são suficientes para descrever a dinâmica do sistema. Em geral nos diagramas de bifurcação, uma linha na altura zero significa um ponto fixo em regime permanente. Valores espalhados significam um resultado caótico. A principal dificuldade é distinguir um movimento oscilatório de um movimento rotativo apenas pelo diagrama de bifurcação. A distinção pode ser feita apenas através da observação dos mapas de fase, seções de Poincaré e histórico no tempo.

A seguir, mapas de fase, seções de Poincaré e o histórico no tempo da posição angular do pêndulo são desenhadas com o intuito de entender a dinâmica de diferentes regiões ao longo dos diagramas de bifurcação. A observação e análise de resultados nesta seção deve ser feita retomando os diagramas de bifurcação apresentados anteriormente.

4.1.2.1 Frequência $\omega = 1,8$

4.1.2.1.1 Frequência $\omega = 1,8$ com $\epsilon = 0$

Analisando o diagrama de bifurcação da Figura 4.1(a), ocorre uma bifurcação de duplicação de período próximo ao valor p igual 0,4 o que resulta em um movimento período-2 na Figura 4.4(a). Em p próximo a 0,95 se obtêm como resposta um movimento rotativo de período-1. Pode-se observar que se trata de um movimento rotativo de período-1 através da seção de Poincaré presente na Figura 4.4(b) por apresentar um único ponto e o fenômeno da rotação é constatado usando o histórico no tempo. Para p igual a 1,15 encontram-se resultados rotativos de período-2 exibidos em 4.4(c). Olhando no diagrama de bifurcação, prevê-se que em p igual a 1,5 ocorrerá a resposta caótica comprovada com uma seção de Poincaré com estrutura fractal na Figura 4.4(d). Sobre essa imagem foi aplicada uma ampliação formando a Figura 4.7. Desta forma pode-se mostrar a repetição do formato “em zoom”, o que constitui mais uma evidência do comportamento caótico.

Um estreito intervalo próximo a p igual a 1,8 possui soluções de período-8. Essas soluções são chamadas de oscilação-rotação, o pêndulo gira primeiro para um lado e depois para outro e apesar disso é capaz de completar ciclos periódicos. Estão representados na Figura 4.4(e) onde o período-8 pode ser visto pelo mapa de fase e seção de Poincaré.

Finalmente para valores de p maior que 2,8, até o limite analisado de 4,5; o pêndulo demonstrou respostas rotativas de período-1.

4.1.2.1.2 Frequência $\omega = 1,8$ com $\epsilon = 0,4$

Na Figura 4.5 são apresentados os resultados através de mapas de fase, seções de Poincaré e históricos no tempo para a mesma frequência de excitação ω igual a 1,8. Porém utilizando o parâmetro ϵ igual a 0,4. A Figura 4.1(b) ilustra o diagrama de bifurcação para estes parâmetros que estão associados aos resultados da Figura 4.5 mostrando o comportamento do sistema em cada trecho de p .

Para p entre 0,0 e 0,4 o resultado do comportamento pendular em regime permanente é um ponto fixo. Entre p igual a 0,5 até 0,7 ocorre um comportamento oscilatório de período-2 sem rotação. Com o p entre 0,7 e 1,0 a resposta se demonstra incerta, podendo ser uma oscilação de período-2, ou um resultado rotativo de período-1 ou período-2, embora o comportamento oscilatório se mostre mais presente.

Entre 1,1 e 2,5 o resultado se mostra caótico. Isto pode ser concluído observando-se o diagrama de bifurcação em 4.1(b) e a seção de Poincaré presente na Figura 4.5(b). A ampliação da Figura 4.5(b) está representada na Figura 4.8.

Para p igual a 2,8 ocorre um período de caos transiente, sendo que após um tempo de 2000 vezes o período o resultado obtido é a rotação do pêndulo com período-4 demonstrado na Figura 4.5(c). Entre 2,9 e 3,4 ocorre novamente o caos. Um exemplo está na Figura 4.5(d), onde p é igual a 3,0.

Após p igual a 3,5 ocorre um comportamento pendular rotativo de período-1 comprovado pela Figura 4.5(e).

4.1.2.1.3 Frequência $\omega = 1,8$ com $\epsilon = 0,9$

O diagrama de bifurcação correspondente à frequência de excitação ω igual a 1,8 e ϵ igual a 0,9 está presente na Figura 4.1(c) demonstrando uma larga região onde o caos está presente. Acompanhando pelo diagrama de bifurcação pode-se observar que o resultado em ponto fixo ocorre para o parâmetro p entre 0 e 0,4. Uma bifurcação de duplicação de período faz com que para p entre 0,5 e 1,2 ocorram oscilações de período-2, tal como na Figura 4.6(a), sendo que perto de p igual 1,0 ocorrem trechos de caos transiente.

Em p localizado entre 1,2 e 1,4 estão presentes orbitas rotativas de período-2, como exemplo está o caso representado na Figura 4.6(b). Para p maior do que 1,5 estão presentes os resultados caóticos, entretanto nas regiões mais claras do diagrama de bifurcação demonstra-se possíveis regiões de caos transiente. É o que ocorre para p igual 3,7 representado na Figura 4.6(d) onde, após um tempo de 600 vezes o período de excitação, o comportamento caótico desaparece dando lugar a um resultado rotativo de período-2. No trecho final entre 4,3 e 4,5, o caos volta a ocorrer o que é demonstrado pela Figura 4.6(e), assim como no “zoom” de sua seção de Poincaré na Figura 4.9.

Figura 4.4 Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para $\omega = 1,8$ e $\epsilon = 0$ (a) $p=0,5$
 (b) $p=0,95$ (c) $p=1,15$ (d) $p=1,5$ (e) $p=1,8$

Figura 4.5 Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para $\omega = 1,8$ e $\epsilon = 0,4$.

(a) $p = 0,95$ (b) $p = 1,8$ (c) $p = 2,8$ (d) $p = 3,0$ (e) $p = 3,5$

Figura 4.6 Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para $\omega = 1,8$ e $\epsilon = 0,9$
 (a) $p=0,95$ (b) $p=1,3$ (c) $p=2,8$ (d) $p=3,7$ (e) $p=4,4$

Figura 4.7 Zoom na seção de Poincaré para $\omega = 1,8$; $\epsilon = 0$ e $p = 1,5$

Figura 4.8 Zoom na seção de Poincaré para $\omega = 1,8$; $\epsilon = 0,4$ e $p = 1,8$

Figura 4.9 Zoom na seção de Poincaré para $\omega = 1,8$; $\epsilon = 0,9$ e $p = 4,4$

4.1.2.2 Frequência $\omega = 0,87$

4.1.2.2.1 Frequência $\omega = 0,87$ com $\epsilon = 0$

Acompanhando pelo diagrama de bifurcação na Figura 4.2(a), pode-se dizer que para o valor de p entre 0 e 0,8 obtêm-se como resultado um ponto fixo. Entre 0,8 e 1,0 está presente uma região estreita onde ocorre uma oscilação de período-1, por exemplo, em p igual a 0,88, isso pode ser checado na Figura 4.10 (a). O caos está presente em uma faixa estreita para p entre 1,0 e 1,2, aproximadamente. Portanto, observa-se para p igual a 1,03 na Figura 4.10.(b) um resultado caótico.

Um caso de oscilação-rotação de período-2 acontece para p igual a 1,15 na Figura 4.10(c). Convém observar que o comprimento dos eixos horizontais do mapa de fase são um pouco estendidos, estando no intervalo entre -4π e 2π para que se possa mostrar o mapa de fase.

Mais adiante uma nova região com resultado caótico para p entre 1,5 e 1,9. Na Figura 4.10(d), o resultado caótico pode ser verificado através de p igual a 1,7.

Considerando o intervalo de p entre 1,9 e 3,0, verifica-se pelo diagrama de bifurcação da Figura 4.2(a) que a órbita se mantém com período-2, porém mudando-se um pouco de formato.

Na Figura 4.10(e) um comportamento de oscilação-rotação de período-2 aparece com um mapa de fase em formato que se assemelha a uma borboleta. No diagrama de

bifurcação, entre 3,0 e 3,8 para os valores de p , os resultados se alternam em estáveis e caóticos, sendo que após 3,9 e até 4,5 apenas o resultado caótico se faz presente.

4.1.2.2.2 Frequência $\omega = 0,87$ com $\epsilon = 0,4$

Seguindo pelo diagrama de bifurcação presente na Figura 4.2(b), pode-se ver um resultado estável em ponto fixo até p igual a 1,0. Em p igual a 1,15 ocorre um resultado estável em uma órbita oscilatória de período-1 como se pode ver na Figura 4.11(a). Em p igual a 1,7, numa faixa bem estreita pode-se ver no diagrama de bifurcação um resultado estável que corresponde a uma oscilação-rotação de período-2, verificada através do mapa de fase e seção de Poincaré presente na Figura 4.11(b). Podem-se ser vistas faixas estreitas de caos no diagrama de bifurcação para p entre 1,5 e 1,7, assim como entre 1,8 e 2,1.

Um resultado rotativo de período-1 para p igual a 2,2 é representado na Figura 4.11(c). Em p igual a 3,0 a resposta obtida é um caso de oscilação-rotação de período-2 graficado na Figura 4.14(d). Para p igual a 4,0 o resultado caótico se faz presente e é demonstrado na Figura 4.11 (e).

4.1.2.2.3 Frequência $\omega = 0,87$ com $\epsilon = 0,9$

Conforme o diagrama de bifurcação da Figura 4.2(c), quando o parâmetro ϵ é igual a 0,9 a faixa em que o caos se mostra presente é maior que para os outros valores 0 e 0,4. Em algumas faixas torna-se difícil determinar como seria o comportamento pendular, por exemplo, no intervalo para p entre 0,6 e 1,2. Demonstra-se isso comparando os resultados das Figuras 4.12(a), 4.12(b) e 4.12(c). Na Figura 4.12(a), onde p é igual a 1,00, a seção de Poincaré e o mapa de fase indicam um movimento oscilatório de período-6. Na Figura 4.12(b), com p igual a 1,03, o movimento é oscilatório de período-3. E na Figura 4.12(c), para p igual a 1,06, ocorre uma oscilação de período-1.

No intervalo de p entre 0 e 0,5 o resultado em regime permanente é um ponto fixo, assim como acontece em p entre 1,2 e 1,7.

Para o parâmetro p entre 1,8 e 3,8 o resultado é caótico com um estreito intervalo de comportamento estável próximo a p igual a 3,5. A Figura 4.12(d) mostra a representação do atrator estranho para o p em 2,0. Entre 3,8 e 4,1 a dinâmica é de oscilação-rotação de período-2, tal como aparece na Figura 4.12 (e) para o parâmetro p igual a 3,4.

Figura 4.10 Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para $\omega = 0,87$ e $\epsilon = 0$

(a) $p=0,88$ (b) $p = 1,03$ (c) $p=1,15$ (d) $p=1,7$ (e) $p=1,95$

Figura 4.11 Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para $\omega = 0,87$ e $\epsilon = 0,4$

(a) $p=1,15$ (b) $p=1,7$ (c) $p=2,2$ (d) $p=3,0$ (e) $p=4,0$

Figura 4.12 Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para $\omega = 0,87$ e $\epsilon = 0,9$

(a) $p=1,0$ (b) $p=1,03$ (c) $p=1,06$ (d) $p=2,0$ (e) $p=3,4$

4.1.2.3 Frequência $\omega = 0,575$

4.1.2.3.1 Frequência $\omega = 0,575$ com $\epsilon = 0$

Conforme a Figura 4.3(a) vários intervalos estreitos de “crise” estão presentes no diagrama de bifurcação. Nesse diagrama ocorre o aparecimento e desaparecimento do caos em meio a cascatas de duplicação de período. Comparando a Figura 4.13(a) com a Figura 4.13(b) observa-se ambas possuem o mesmo formato, entretanto a segunda apresenta maior densidade de órbitas, o que também é um indício de duplicações de período. Na Figura 4.13(a) temos um comportamento periódico para p igual a 1,0; na Figura 4.13(b) para p igual a 1,03 ocorre um movimento quasi-periódico com formato semelhante ao mapa de fase anterior e na Figura 4.13(c) o resultado caótico se faz presente, onde p é igual a 1,06.

Observa-se na Figura 4.13(d) a dinâmica de oscilação-rotação de período-1 com predomínio de rotação em p igual a 1,7, um dos resultados possíveis para as varias faixas estreitas com diferentes tipos de movimento.

Na Figura 4.13(e) ocorre um caso de oscilação-rotação período-1, movimento encontrado para p igual a 4,3.

4.1.2.3.2 Frequência $\omega = 0,575$ com $\epsilon = 0,4$

Analisando através do diagrama de bifurcação da Figura 4.3(b) percebe-se que a maior parte dos resultados são estáveis e que as faixas em que se obtém o caos são estreitas. Até aproximadamente p igual a 1,5 encontra-se o resultado de ponto fixo em regime permanente. Na Figura 4.14(a), em p igual a 1,7, vê-se uma forma de oscilação pura de período-2, ainda que um tanto irregular em seu formato.

Para p igual a 1,9 na Figura 4.14(b) observa-se uma caso de oscilação-rotação período-2 com um mapa de fase de formato semelhante à de uma borboleta.

Seguindo pelo diagrama de bifurcação da Figura 4.3(b) verifica-se a possibilidade de um comportamento de período-2 ou senão dois resultados rotativos de período-1 no intervalo entre 2,1 e 3,0. Dessa faixa graficou-se a Figura 4.14(c), onde o resultado para p igual a 2,5 demonstrou um comportamento de rotação período-1. Isso revela que o diagrama

de bifurcação demonstrava dois resultados rotativos, um na direção horária e outra na anti-horária.

Nas Figuras 4.14(d) e 4.14(e) são ilustrados dois resultados semelhantes de oscilação-rotação com período-2 para de valores de p iguais a 3,5 e 4,4, respectivamente, sendo que o primeiro deles provém de uma faixa no diagrama de bifurcação entre 3,3 e 4,0, enquanto o segundo deles, no caso, de p igual a 4,4, se mostra em um faixa bem estreita em meio ao caos no diagrama de bifurcação da Figura 4.3(b).

4.1.2.3.3 Frequência $\omega = 0,575$ com $\epsilon = 0,9$

Com estes parâmetros de ω e ϵ observou-se no diagrama de bifurcação na Figura 4.3(c) que as faixas com resultados caóticos são mais largas que as de resultado estável. Até p de valor 0,6 obtém-se um resultado de ponto fixo e, após um intervalo estreito de crise no diagrama de bifurcação, observa-se para p igual 0,7 um comportamento de oscilação-rotação de período-2 com o mapa de fase demonstrando traços um tanto irregulares na Figura 4.15(a).

Em p igual a 1,0 verifica-se um resultado caótico pela observação do atrator estranho demonstrado através da seção de Poincaré. Essa dinâmica caótica deve estar presente entre 0,8 e 1,5.

No intervalo entre 1,6 e 1,9 verifica-se uma região de comportamento estável ao analisar-se o diagrama de bifurcação e expoentes de Lyapunov da Figura 4.3(c). Para p igual a 1,7 um comportamento oscilatório-rotativo de período-2 aparece na Figura 4.15(c).

Entre 3,0 e 3,4 o resultado se mostra estável, observando-se em p igual a 3,1, na Figura 4.15(d), um resultado oscilação-rotação de período-1 com predomínio de rotação, sendo que o mapa de fase se mostra um tanto irregular também neste caso.

Na Figura 4.15(e), com p igual a 3,35 ocorre um formato semelhante ao mapa de fase anterior, porém dessa vez um resultado de período-2 é indicado pela seção de Poincaré.

Figura 4.13 Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para $\omega = 0,575$ e $\epsilon = 0$

(a) $p=1,0$ (b) $p=1,03$ (c) $p=1,06$ (d) $p=1,7$ (e) $p=4,3$

Figura 4.14 Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para $\omega = 0,575$ e

$\epsilon = 0,4$ (a) $p=1,7$ (b) $p=1,9$ (c) $p=2,5$ (d) $p=3,5$ (e) $p=4,4$

Figura 4.15 Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para $\omega = 0,575$ e $\epsilon = 0,9$

(a) $p=0,7$ (b) $p=1,0$ (c) $p=1,7$ (d) $p=3,1$ (e) $p=3,35$

4.1.3 Expoentes de Lyapunov no plano p versus ω

Para fins de observar melhor a ampliação das regiões caóticas para diferentes valores de ϵ foram calculados os expoentes de Lyapunov através do algoritmo de Wolf et al. (1985) variando os parâmetros p e ω . O parâmetro p foi variado entre 0 e 4,5 e o parâmetro ω entre 0 e 3,5, com um passo de 0,05, o que resultou em um malha de 90 por 70 pontos.

O parâmetro γ foi mantido em 0,1, a condição inicial de posição foi de $\alpha(0)$ igual a $0,01\pi$ e a velocidade inicial de $\alpha'(0)$ igual a zero. Os valores utilizados na construção dos gráficos dos expoentes de Lyapunov são obtidos apenas nos 10% finais obtidos após um tempo decorrido de 1000 vezes o período de excitação. O maior valor de expoente obtido neste intervalo foi utilizado para a construção das Figuras 4.16 , 4.17 e 4.18. Apenas o expoente correspondente ao ângulo α do pêndulo foi graficado. A cor associada a um valor do expoente de Lyapunov e a divisão por regiões foram feitas automaticamente através do comando “contourf” do MatLab e a legenda das cores através do comando “colorbar”. Na Figura 4.16 está a representação dos expoentes de Lyapunov de α para o parâmetro ϵ igual a zero, ou seja, o pêndulo de excitação paramétrica clássica. Na Figura 4.17 usou-se ϵ igual 0,4 e na Figura 4.18 ϵ igual a 0,9.

Figura 4.16. Expoentes de Lyapunov de α com $\epsilon = 0$ para p versus ω

Figura 4.17. Expoentes de Lyapunov de α com $\epsilon = 0,4$ para p versus ω

Figura 4.18. Expoentes de Lyapunov de α com $\epsilon = 0,9$ para p versus ω

Conforme a Eq.(3.2.22) as frequências de ressonância da excitação paramétrica são para ω igual a 2,0; 1,0 e 2/3. Em comparação entre as três Figuras 4.16, 4.17 e 4.18 constata-se um espalhamento da região caótica e um aumento do valor dos expoentes de Lyapunov conforme se aumenta o valor de ϵ . A região de ressonância principal, assim como as de ressonância sub-harmônicas se expandem conforme se aumenta o valor de ϵ , entretanto também se demonstram mais “recortadas”.

4.1.4 Espaço de parâmetros

A partir dos diagramas de bifurcação, mapas de fase e seções de Poincaré foram construídos gráficos no plano p versus ω associando diferentes regiões a tipos de movimento do pêndulo. O tempo utilizado para a integração temporal foi de 400 vezes o período de excitação, tempo suficiente para o movimento do pêndulo entrar em regime na maioria dos casos. Tratando-se de um gráfico dependente de dois parâmetros, chama-se essa forma de ilustração do “espaço de parâmetros” (XU; WIERCIGROCH; CARTMELL, 2005).

Na construção do “espaço de parâmetros” utilizou-se os diagramas de bifurcações das Figuras 4.1, 4.2 e 4.3, além de mais diagramas de bifurcação para valores de ω entre 0 e 3,5 variando de 0,125. Com esse conjunto foi possível determinar o tipo de movimento das regiões. Os mapas de fase e as seções de Poincaré são necessários para se ter uma conclusão definitiva do tipo de movimento. Parte dos diagramas de bifurcação obtidos para construção do “espaço de parâmetros” estão presentes no Apêndice G.

Na construção dos gráficos na forma de “espaço de parâmetros” posiciona-se cada diagrama de bifurcação como se fosse uma linha onde ao longo da qual muda-se qualitativamente o tipo de movimento. Colocando as linhas, na posição vertical, lado a lado para cada ω , observa-se a formação de regiões no plano p por ω e associadas aos tipos de movimentos do pêndulo.

No “espaço de parâmetros” das Figuras 4.19, 4.20 e 4.21 as siglas para os tipos de movimento são: F (ponto fixo), C (caos), R (rotação), O (oscilação), Or (oscilação-rotação) e U (incerto). Os números indicam o tipo de período. O número 1 indica movimento de período-1 e o número 2 um movimento de período-2. Durante a montagem do gráfico, quando diferentes tipos de movimento ocorriam em uma área pequena considerou-se que se tratava de uma região de tipo de movimento incerto (U “uncertain”). Dentro dessa região “U” pode-se verificar se um determinado ponto (p, ω) específico é caótico através do valor

máximo do expoente de Lyapunov. Um conjunto de pontos desse tipo formam pequenas regiões não demarcadas no gráfico de “espaço de parâmetros”.

A observação dos três gráficos em “espaço de parâmetros” das Figuras 4.19, 4.20 e 4.21 indica que a área de comportamento incerto aumenta conforme o valor do parâmetro ϵ aumenta. A presença do mecanismo biela-manivela torna a previsão do tipo de movimento mais difícil em comparação com o caso clássico do pêndulo excitado parametricamente. Regiões de comportamento rotativo podem ainda ser encontradas, afinal uma região relativamente grande de movimento rotativo período-1 está presente, na Figura 4.20, para ϵ igual a 0,4. Entretanto, regiões de movimento rotativo parecem estreitar-se com o aumento de ϵ , enquanto que o movimento oscilatório de período-2 manteve-se praticamente na mesma faixa.

Figura 4.19 “Espaço de parâmetros” para $\epsilon = 0$

Figura 4.20 “Espaço de parâmetros” para $\epsilon = 0,4$

Figura 4.21 “Espaço de parâmetros” para $\epsilon = 0,9$

4.1.5 Bacias de atração para o caso de excitação vertical ideal

Bacias de atração são úteis para mostrar que diferentes condições iniciais de velocidade e posição angular podem levar a um comportamento dinâmico diferente. No caso do sistema de excitação pendular vertical por biela-manivela, as bacias de atração foram obtidas partindo-se dos gráficos obtidos das seções de Poincaré. Variando-se as condições iniciais de velocidade e posição do pêndulo em intervalos suficientemente pequenos, obtém-se para cada caso sua seção de Poincaré. Sobrepondo essas seções se mostrarão os atratores presentes no sistema. É conveniente que, para os parâmetros usados em p e ω , os resultados obtidos sejam estáveis, podendo ser rotativos, oscilatórios ou de ponto fixo. Desta forma, será menos provável a ocorrência de regiões se sobrepondo.

Figura. 4.22 Bacia de atração para os parâmetros $\gamma = 0,1$; $\omega = 1,8$ e $p = 0,5$; (a) $\epsilon = 0$

(b) $\epsilon = 0,4$ (c) $\epsilon = 0,7$ (d) $\epsilon = 0,9$

Para construção das bacias, após ter os atratores identificados e mantendo os mesmos valores de parâmetros adimensionais, variou-se através de um comando de repetição a posição angular inicial de $-\pi$ a π e a velocidade angular adimensional de -4 a 4 com intervalo de 0,01. As condições iniciais de posição e velocidade que levam para um mesmo atrator devem ser marcadas com a mesma cor na forma de um ponto. A marcação dos atratores no plano através de símbolos imersos em suas respectivas regiões de atração com diferentes cores constituem o que se chama de bacia de atração. Quanto menor o intervalo de variação das condições iniciais melhor será a resolução da figura.

A determinação do tipo de atrator deve ser feita utilizando, além das seções de Poincaré, gráficos de histórico no tempo e mapa de fase para cada atrator encontrado. Na Figura 4.22 estão presentes as bacias obtidas para valores de: ϵ igual a zero na Figura 4.22(a), ϵ igual a 0,4 na Figura 4.22(b), ϵ igual a 0,7 na Figura 4.22(c) e ϵ igual a 0,9 na Figura 4.22(d). Para todos os casos os demais parâmetros usados foram: ω igual a 1,8, p igual a 0,5 e γ igual a 0,1.

Os resultados das bacias de atração foram obtidos através da integração numérica da equação diferencial usando o Fortran 77 pelo método Runge-Kutta de 4ª ordem com passo de integração constante e igual ao período adimensional de excitação dividido por 400. O tempo decorrido para que a dinâmica alcance a estabilidade foi de 600 vezes o período de excitação. Esse código de passo constante, escrito em Fortran 77, está no Apêndice D.

Na Figura 4.22, o círculo branco marcado na região em preto da bacia refere-se a um atrator rotativo positivo de período-1. A região em preto representa a área em que as condições iniciais de posição e velocidade levam ao atrator posicionado nesse círculo branco.

O círculo preto marcado na região em vermelho representa um atrator rotativo negativo de período-1. A região em vermelho delimita a área em que as condições iniciais de posição e velocidade que levam ao atrator marcado na posição do círculo preto. Os dois quadrados representam um atrator oscilatório de período-2 onde a respectiva região de atração é marcada em verde. As posições desses atratores rotativos e oscilatórios para diferentes valores de ϵ estão na Tabela 1.

Conclui-se a partir da observação das bacias da Figura 4.22 que a posição dos atratores varia pouco ao variarmos o parâmetro ϵ utilizando os parâmetros fixos p igual a 0,5; γ igual a 0,1 e ω igual a 1,8. Entretanto observou-se que o formato das bacias alterou-se

consideravelmente. Portanto, ajustar as condições iniciais de posição e velocidade do pêndulo com o intuito de se obter um movimento rotativo torna-se mais difícil conforme se aumenta o valor do parâmetro ϵ .

Tabela 1 – Posição dos atratores (α, α') para diferentes valores de ϵ			
<div>Tipo de movimento</div> <div>Valor de ϵ</div>	Oscilatório Período-2	Rotativo positivo	Rotativo negativo
$\epsilon = 0$	$(-1,66;0,34)$ e $(1,66;-0,34)$	$(-1,15;2,19)$	$(1,15;-2,19)$
$\epsilon = 0,4$	$(-1,65;0,37)$ e $(1,65;-0,37)$	$(-0,96;2,26)$	$(0,96;-2,26)$
$\epsilon = 0,7$	$(-1,64;0,41)$ e $(1,64;-0,41)$	$(-0,81;2,29)$	$(0,81;-2,29)$
$\epsilon = 0,9$	$(-1,63;0,44)$ e $(1,63;-0,44)$	$(-0,70;2,30)$	$(0,70;-2,30)$

A partir da construção das bacias de atração, foram obtidos os históricos no tempo, mapas de fase e seções de Poincaré para os casos associados a cada atrator. Nesse caso também utilizou-se a integração numérica com o método Runge-Kutta de 4ª ordem no Fortran 77.

Na Figura 4.22(a), com ϵ igual a zero, estão marcados com quadrados o lugar do atrator oscilatório de período-2. Os respectivos gráficos do histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré que estão na Figura 4.23 são visualmente iguais ao da Figura 4.4(a), pois se tratam dos mesmos parâmetros com a única diferença que anteriormente o método usado para integração ser de passo variável com 4ª e 5ª ordem de Dormand-Prince.

Na Figura 4.24 está o histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré do pêndulo após atingir seu regime permanente sobre o atrator rotativo positivo de período-1 com parâmetro ϵ igual a zero.

Os resultados do atrator rotativo negativo de período-1 para ϵ igual a zero estão graficados na Figura 4.25. Pela comparação dos históricos no tempo, mapas de fase e seções de Poincaré entre a Figura 4.24 e a Figura 4.25 percebe-se que são simétricos.

Da Figura 4.23 a Figura 4.34, a posição e velocidade inicial do pêndulo estão marcadas na legenda de cada figura. Esses valores foram escolhidos de forma a estarem dentro dos limites de cada região de atração.

Figura 4.23 Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator oscilatório de período-2 com $\epsilon = 0$. $(\alpha_0; \alpha'_0) = (0,01\pi; 0)$

Figura 4.24 Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator rotativo positivo de período-1 com $\epsilon = 0$. $(\alpha_0; \alpha'_0) = (-1,15; 2,19)$

Figura 4.25 Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator rotativo negativo de período-1 com $\epsilon = 0$. $(\alpha_0; \alpha'_0) = (1,15; -2,19)$

Para o parâmetro ϵ igual a 0,4, os gráficos de histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré do atrator oscilatório de período-2 presente na Figura 4.26 não mostram diferenças visíveis em comparação com os gráficos associados ao ϵ igual a zero da Figura 4.23. O mesmo pode-se dizer a respeito do resultado do atrator rotativo positivo de período-1 com ϵ igual a zero da Figura 4.24 quando comparado com o resultado para ϵ igual a 0,4 da Figura 4.27.

Usando o parâmetro ϵ igual a 0,7 o atrator de período-2 aparece na Figura 4.29, o atrator rotativo positivo de período-1 na Figura 4.30 e o atrator rotativo negativo na Figura 4.31. Uma leve excentricidade pode ser vista no mapa de fase do atrator de período-2 da Figura 4.29 em comparação com o mapa de fase da Figura 4.23. Com relação ao atrator rotativo, uma leve mudança pode ser vista no mapa de fase da Figura 4.30 quando comparado com o mapa de fase da Figura 4.24. Nessa Figura 4.30, ao observar o mapa de fase, se percebe um leve encurvamento no vale da “onda”.

Figura 4.26 Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator oscilatório de período-2 com $\epsilon = 0,4$. $(\alpha_0; \alpha'_0) = (0,01\pi; 0)$

Figura 4.27 Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator rotativo positivo de período-1 com $\epsilon = 0,4$. $(\alpha_0; \alpha'_0) = (-0,96; 2,26)$

Figura 4.28 Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator rotativo negativo de período-1 com $\epsilon = 0,4$. $(\alpha_0; \alpha'_0) = (0,96; -2,26)$

Figura 4.29 - Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator oscilatório de período-2 para ϵ igual a 0,7. $(\alpha_0; \alpha'_0) = (0,01\pi; 0)$

Figura 4.30 - Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator rotativo positivo de período-1 para ϵ igual a 0,7. $(\alpha_0; \alpha'_0) = (-0,81; 2,29)$

Figura 4.31 Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator rotativo negativo de período-1 para ϵ igual a 0,7. $(\alpha_0; \alpha'_0) = (0,81; -2,29)$

Figura 4.32 Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator oscilatório de período-2 com $\epsilon = 0,9$. $(\alpha_0; \alpha'_0) = (0,01\pi; 0)$

Figura 4.33 Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator rotativo positivo de período-1 com $\epsilon = 0,9$. $(\alpha_0; \alpha'_0) = (-0,70; 2,30)$

Figura 4.34 Histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré para o atrator rotativo negativo de período-1 com $\epsilon = 0,9$. $(\alpha_0; \alpha'_0) = (0,70; -2,30)$

Para ϵ igual a 0,9, Figura 4.32, no mapa de fase do movimento de período-2 encontram-se regiões de saliências mais evidentes do que em ϵ igual a 0,7 na Figura 4.29. No mapa de fase do resultado rotativo na Figura 4.33 está presente uma rápida alteração da aceleração nos “vales” do gráfico. O mesmo pode ser observado nas “cristas” do mapa de fase do atrator rotativo negativo da Figura 4.34, devido ao fato de serem simétricos.

4.2 Resultados para a excitação vertical por biela-manivela com potência limitada

O objetivo nesta seção é realizar uma comparação entre os resultados obtidos no modelo de excitação ideal com o modelo de excitação por potência limitada. A partir dos resultados obtidos no modelo de potência limitada, buscou-se reproduzir uma situação “equivalente” no modelo de excitação ideal.

A abordagem utilizada baseia-se em fazer a simulação do mecanismo de potência limitada usando uma tensão elétrica escolhida arbitrariamente e em seguida usando a velocidade média encontrada na manivela simula-se o mecanismo de excitação ideal.

A aplicação inversa também é possível. A partir de uma velocidade arbitrária na manivela da excitação ideal, procura-se essa mesma velocidade média de rotação no mecanismo de potência limitada usando o ajuste da tensão elétrica do motor.

Os resultados dos modelos de potência limitada e excitação ideal nas seções 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3 são obtidos por integração numérica no MatLab® utilizando a função ode45 com tolerância relativa de 10^{-7} e tolerância absoluta de 10^{-8} . As condições iniciais de posição e velocidade angular do pêndulo utilizadas foram $\alpha(0)$ igual a $\pi/4$ e $\alpha'(0)$ igual a zero. No entanto, a rotação do pêndulo pode ocorrer em qualquer uma das duas direções após passar por uma dinâmica caótica transiente. Por isso adota-se como procedimento eventualmente inverter o sinal da posição angular inicial de forma a permitir a visualização da rotação sempre na mesma direção. Desta forma pode-se facilitar a comparação dos gráficos obtidos. Convém ressaltar que essa inversão do ângulo não altera o tipo de movimento, apenas a direção de rotação.

4.2.1 Primeira comparação de potencia limitada com a excitação ideal

Primeiramente, utilizou-se no modelo de potência limitada os mesmos parâmetros que levam a resultados caóticos no modelo de excitação ideal. Esse requisito pode ser feito com um valor de ω próximo de 1,8 e o parâmetro p em torno de 1,5.

Os parâmetros dimensionais adotados neste primeiro teste foram: $a = 0,12$ m ; $b = 0,3$ m ; $c = 0,32$ Ns/m ; $l = 0,25$ m ; $g = 9,81$ m/s² ; $m = 0,5$ kg ; $K_T = 127 \cdot 10^{-3}$ Nm/A ; $K_E = K_T$; $J = 500 \cdot 10^{-3}$ kg m² ; $L = 0,161 \cdot 10^{-3}$ H ; $R = 0,365$ Ω e $V = 1,44$ V. O catálogo no Anexo A apresenta as especificações de um motor específico de corrente contínua de 250 W de potência do fabricante Maxon®, modelo 353297. Dados desse motor foram utilizados nas simulações envolvendo potência limitada. Desses parâmetros resultam outros parâmetros calculados: $\omega_0 = 6,2642 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\tau_{mec} = 11,31$ s ; $\tau_{Elet} = 4,41 \cdot 10^{-4}$ s ; $\gamma = 0,102$; $\epsilon = 0,4$; $p_{medio} = 1,58$; $\omega_{medio} = 1,82$; onde a constante de tempo mecânico τ_{mec} é dada por $(R/J)/(K_E K_T)$ e a constante elétrica τ_{elet} é dada por L/R (ver Apêndice C).

No caso de potência limitada, a velocidade inicial do motor é zero acelerando até entrar em regime. Observa-se que no caso de excitação por potência limitada a frequência de excitação $\dot{\theta}$ é variável enquanto que na excitação ideal esse valor é constante.

O valor obtido em ω_{medio} é encontrado através da média entre o máximo e o mínimo de ω após o motor ter atingido um resultado em regime permanente para a sua

velocidade, o que significa na prática já ter passado pela faixa de aceleração. Da mesma forma, o $p_{médio}$ também corresponde a uma média de dois valores.

Com o parâmetro de controle V igual a 1,44 V obtiveram-se: histórico no tempo da posição angular do pêndulo representado na Figura 4.35(a), a velocidade angular adimensionalizada do pêndulo α' na Figura 4.35(b) e a velocidade angular adimensional do motor ω na Figura 4.35(c).

Figura 4.35 Dinâmica em potência limitada para $V=1,44V$ (a)Histórico da posição angular do pêndulo (b)Histórico da velocidade do pêndulo (c)Histórico da velocidade angular adimensional do motor “ ω ”

Considerando $\omega_{médio} = 1,82$ obteve-se o que seria o resultado correspondente ao caso do pêndulo excitado idealmente. Portanto, aplica-se o $\omega_{médio}$ obtido nos parâmetros do modelo de excitação ideal como se a velocidade de rotação fosse constante. Os parâmetros usados para a excitação ideal foram: $\gamma = 0,102$; $\epsilon = 0,4$; $p = 1,58$; $\omega = 1,82$. O resultado está graficado na Figura 4.36 com histórico no tempo e seção de Poincaré, sendo que a seção de Poincaré indicou um resultado caótico enquanto que o caso correspondente

usando potência limitada terminou em repouso do pêndulo, conforme observado na Figura 4.35(a).

Figura 4.36. Dinâmica do pêndulo sob excitação ideal para: $\gamma = 0,102$; $\epsilon = 0,4$; $p = 1,58$; $\omega = 1,82$
(a) Histórico da posição angular (b) Histórico da velocidade angular adimensional (c) Seção de Poincaré.

4.2.2 Segunda comparação de potencia limitada com a excitação ideal

Em seguida buscou-se analisar um caso que apresente resultado oscilatório do pêndulo sob potência limitada, portanto a tensão no motor elétrico foi ajustada até se encontrar esse tipo de movimento. O valor encontrado foi de 4,5V, o $\omega_{médio}$ do motor foi de 4,9 e o $p_{médio}$ igual a 11,6. Os demais parâmetros utilizados são iguais aos do primeiro caso testado. Os resultados em potência limitada estão representados na Figura 4.37, onde o histórico no tempo da posição angular do pêndulo está na Figura 4.37(a), o histórico no tempo da velocidade angular do pêndulo está na Figura 4.37(b) e o histórico no tempo da velocidade angular do motor na Figura 4.37(c). Nos resultados da Figura 4.37, comparando

o gráfico da velocidade angular do pêndulo α' com o da velocidade angular do motor ω em função de τ , observa-se que quando decorreram dois ciclos da velocidade do pêndulo, se passaram quatro ciclos da velocidade do motor, o que indica uma sincronização entre o rotor e o movimento do pêndulo.

(a)

(b)

(c)

Figura 4.37 Dinâmica em potência limitada para $V=4,5V$ (a) Histórico da posição angular do pêndulo (b) Histórico da velocidade do pêndulo (c) Histórico da velocidade angular adimensional do rotor “ ω ”

Na tentativa de obter também um movimento oscilatório simulou-se o caso ideal com $\omega = 4,9$ e $p = 11,6$ aplicando as mesmas condições iniciais de posição e velocidade do pêndulo. No entanto, foi obtido um resultado rotativo de período-2 para a excitação ideal, conforme está presente na Figura 4.38.

Figura 4.38 Dinâmica do pêndulo sob excitação ideal para: $\gamma = 0,102$; $\epsilon = 0,4$; $p = 11,6$; $\omega = 4,9$
 (a) Histórico da posição angular (b) Histórico da velocidade angular adimensional (c) Seção de Poincaré.

4.2.3 Terceira comparação de potencia limitada com a excitação ideal

Por último, procura-se no mecanismo excitado por potência limitada um comportamento rotativo do pêndulo. A tensão obtida através de tentativas foi de 10,5V. O resultado está representado na Figura 4.39 onde estão presentes o histórico no tempo do ângulo do pêndulo, o histórico da velocidade angular do pêndulo e o histórico da velocidade do motor adimensionalizada ω . Verifica-se que a velocidade angular do pêndulo α' e a velocidade angular do motor ω possuem a mesma frequência, pois visualiza-se nos gráficos que decorridos três ciclos da velocidade do pêndulo, ocorrem também três ciclos da velocidade do motor. Os resultados obtidos para a tensão de 10,5 V foram p_{medio} igual a 37,6 e ω_{medio} igual a 8,85. Esses valores foram usados para p e ω na simulação para excitação ideal correspondente.

Figura 4.39. Dinâmica em potência limitada para $V = 10,5V$ (a) Histórico da posição angular do pêndulo (b) Histórico da velocidade do pêndulo (c) Histórico da velocidade angular adimensional do motor " ω "

Na Figura 4.40 retrata-se o comportamento do pêndulo sob excitação ideal para p igual a 37,6 e ω igual a 8,85. Comparando os gráficos das velocidades do pêndulo da Figura 4.39(b) com a Figura 4.40(b), observa-se que ambos demonstram três ciclos de velocidades e com formato bem semelhante. Distinguem-se apenas por aparentarem uma defasagem. Portanto, pode-se concluir que nesta terceira comparação, o resultado do pêndulo excitado idealmente se assemelha bem ao resultado obtido por potência limitada.

Figura 4.40 Dinâmica do pêndulo sob excitação ideal para: $\gamma = 0,102$; $\epsilon = 0,4$; $p = 37,6$; $\omega = 8,85$ (a) Histórico da posição angular (b) Histórico da velocidade angular adimensional (c) Seção de Poincaré

5 CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na análise da excitação ideal do pêndulo por biela-manivela verifica-se que temos uma maior região de crise e caos conforme se aumenta o valor do parâmetro ϵ apenas se estivermos tratando da região de ressonância principal. Para as outras frequências de ressonância a mesma conclusão não pode ser obtida. Nas frequências com ω igual a 0,87 e 0,575 a região caótica poderia ser ampliada, reduzida ou simplesmente deslocada sem que se pudesse associar qualquer padrão à variação do parâmetro ϵ . É o que demonstra os diagramas de bifurcação e expoentes de Lyapunov.

Os gráficos chamados de “espaço de parâmetros” que demonstram diferentes tipos de movimento ilustram que conforme se aumenta o valor de ϵ mais difícil ficará de determinar regiões associadas a diferentes tipos de movimento no plano dos parâmetros p por ω . As representações dos expoentes de Lyapunov nas malhas com parâmetros p e ω permitiram a determinação da região caótica. Entretanto para valores maiores de ϵ as regiões de diferentes tipos de movimento tornam-se mais recortadas. Devido a isso se referiu a elas, ocasionalmente, como “incertas”.

Com relação à comparação feita entre os resultados envolvendo potência limitada e os mesmos parâmetros para o caso de excitação ideal chega-se à conclusão de que nem sempre a dinâmica do pêndulo será a mesma nos dois casos. Entretanto pôde se constatar que nos casos rotativos do pêndulo em que a potência motor é alta o resultado obtido pelo modelo de excitação ideal é uma ótima aproximação do resultado obtido por potência limitada. Por outro lado, quando a potência fornecida for pequena, os modelos de excitação ideal e o de potência limitada tendem a divergir. Inclusive diferentes tipos de movimento podem ser encontrados ao comparar os resultados de um modelo com o outro, tal como foi exemplificado na segunda comparação em que a potência limitada provocava uma oscilação no pêndulo enquanto que a excitação ideal levava a um movimento pendular rotativo.

5.1 Trabalhos Futuros

Entende-se que a análise feita sobre o assunto potência limitada trouxe resultados coerentes e esperados, mas não totalmente conclusivos. Em trabalhos futuros, poderiam ser determinados para quais faixas os modelos de excitação ideal e potência limitada

convergem ou divergem. O aparecimento ou destruição de bacias de atração considerando termos envolvidos na potência limitada pode ser útil para se prever quando se conseguirá o movimento rotativo. Bifurcações também podem ser obtidas variando-se parâmetros de um motor elétrico. Dessa forma pode-se comparar a viabilidade de se usar como parâmetro de controle algo como a tensão elétrica do motor que corresponde à energia ou outros parâmetros físicos como a amplitude em conjunto com a frequência de excitação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALYFOV, A.; FROLOV, K.V. (1977) Investigation of self-excited oscillations with friction under conditions of parametric excitation and limited power of energy source. **Mekhanika**, 15:25-33.
- ARGYRIS, J.; FAUST, G.; HAASE, M. (1994) **An Exploration of Chaos**. An Introduction for Natural Scientists and Engineers. Amsterdam etc., North-Holland.
- ASIMOV, I. (1964) **Asimov's Biographical Encyclopedia of Science and Technology**. Ed. Doubleday.
- AVILA, K.M.V. (2012) **Pêndulos Paramétricos: Ponto de Suspensão Oscilante e Comprimento Variável**. Monografia, Universidade Estadual do Ceará.
- BALTHAZAR, J.M.; FELIX, J.L.P.; BRASIL, R.M.L.R.F.; FENILI, A. (2004) Short comments on self-sincronization of two non-ideal sources supported by a flexible portal frame structure. **Journal of vibration and control**, , 10:1739-1748.
- BALTHAZAR, J.M.; FELIX, J.L.P.; BRASIL, R.M.L.R.F. (2005) Some comments in numerical simulation of self-sincronization of four non-ideal exciters. **Applied Mathematics and Computation**, 164:615-625.
- BALTHAZAR, J.M.; GONÇALVES, P.B.; BRASIL, R.M.R.L.F. (2008). Uncertains in Nonlinear Structural Dynamics, **Mathematical Problems in Engineering**, pp. 1-5.
- BALTHAZAR, J.M.; MOOK, D.T.; WEBER, H.I.; BRASIL, R.M.L.R.F.; FENILI, A.; BELATO, D.; FELIX, J.L.P. (2003) An Overview on Non-Ideal Vibrations", **Meccanica**, Vol. 38, pp.613-621.
- BALTHAZAR, J.M.; VONBREMEN, H. (2008) Mathematical Modeling and Control of Population systems: Applications in Biological Pest Control, **Applied Mathematics and Computation**, Vol.200, pp. 557-573.

- BELATO, D.; WEBER, H.I.; BALTHAZAR, J.M.; MOOK, D.T. (2001) Chaotic Vibrations of a nonideal eletro-mechanical system, **International Journal of Solids and Structures** , Vol.38, pp. 1699-1706.
- BELATO, D. (2002) **Análise Não-linear de Sistemas Dinâmicos Holônomos Não Ideais**, Tese de Doutorado, Universidade de Campinas.
- BELYAKOV, A.O.; SEYRANIAN, A.P. (2010) On Nonlinear Dynamics of the Pendulum with Periodically Varying Length, **Mechanics of Machines**, Vol. 18 (87), No 3, pp. 21-28.
- BELYAKOV, A.O.; SEYRANIAN, A.P.; LUONGO, A. (2009) Dynamics of the pendulum with periodically varying length. **Physica D**, 238, 1589-1597.
- BISHOP, S.R.; CLIFFORD, M.J. (1996) Zones of Chaotic Behavior in the Parametrically Excited Pendulum, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 189, p. 142-147.
- BISHOP, S.R.; XU, D. (1996) Stabilizing the Parametric Excited Pendulum onto High Order Periodic Orbits, **Journal of Sound and Vibration**, p. 287-293.
- BOGOLYUBOV, N.N.; MITROPOLSKY, YU. A. (1961) **Asymptotic Methods in the Theory of the Nonlinear Oscillations**. Gordon and Breach, New York.
- BOLOTIN, V.V. (1999) **Vibrations in Engineering**. A Handbook. In: Oscillations of Linear Systems. Vol. 1., Mashnostroenie, Moscow.
- BOSDUGANOVA, V.S.; VITLIEMOV, V.G. (2009) Dynamics of Pendulum with variable length and dry friction as a simulator of a swing, **Mechanics of Machines**, 17 (82), no. 3, 45-48.
- BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. (1994) Equações **diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**, 5ª ed., Ed. Guanabara Koogan,.
- BUTIKOV, E.I. (2005) **Parametric Resonance in a Linear Oscillator at Square wave modulation**. Institute of Physic Publishing, Eur. J. Phys. 26, pp. 157-174

- BUTIKOV, E.I. (1999) Parametric Resonance. **Computing In Science e Engineering** (CiSE), Russia, p.76-83.
- CLIFFORD, M.J.; BISHOP, S.R. (1995) Rotating periodic orbits of the parametrically excited pendulum, **Physics Letters A**, Vol. 201, pp. 191-196.
- COISSON, R.; VERNIZZI, G.; YANG, X. (2009), Mathieu functions and numerical solutions of the Mathieu equation. In **Open-source Software for Scientific Computation** (OSSC), IEEE International Workshop on.
- COOK, G.P.; ZAIDINS, C.S. (1986) The quantum point-mass pendulum, **American Journal of Physics**, Vol.54, pp. 259-267.
- COSTA, S. N. J.; HASSMANN, C. H. G.; BALTHAZAR, J. M.; DANTAS, M. (2008) On energy transfer between vibrating systems under linear and nonlinear interactions. **Nonlinear Dynamics** p. 1-10.
- CVETICANIN, L. (2010) Dynamics of the non-ideal mechanical systems. A review. **Journal of the Servian Society for Computational Mechanics**, Vol.4., n.2, , pp. 75-86.
- DANTAS, M.J.H.; BALTHAZAR, J.M. (2003) On the appearance of a Hopf bifurcation in a non-ideal mechanical problem. **Mechanics Research communication**, 30:493-503.
- DANTAS, M.J.H.; BALTHAZAR, J.M. (2004) On local analysis of oscillations of a non-ideal and non-linear mechanical model. **Meccanica**, 39: 313-330.
- DANTAS, M.J.H.; BALTHAZAR, J.M. (2008) On energy transfer between linear and nonlinear oscillators, **Journal of Sound and Vibration**, Vol.315, pp. 1047-1070.
- DÁVID, A.; SINHA, S.C. (2000) Control of Chaos in Non-linear Systems with Time-Periodic Coefficients, **Proceedings of the American Control Conference Chicago**, Illinois, Junho, p. 764-768.

- DIMENTBERG, M.F.; MCGOVERN, L.; NORTON, R.L.; CHAPDELAINE, J.; HARRISON, R. (1997) Dynamics of an unbalanced shaft interacting with a limited power supply. **Nonlinear Dynamics**, Vol. 13, pp. 171-187.
- DORMAND J.; PRINCE, P. (1980) A family of embedded Runge–Kutta formulae. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Vol. 6, pp. 19–26
- FELIX, J.L.P.; BALTHAZAR, J.M.; BRASIL, R.M.L.R.E. (2005) On saturation control of a non-ideal vibrating portal frame founded type shear-building. **Journal of Vibration and Control**, 11:121-136.
- FLASHNER, H.; GOLAT, M. (2001) An Extended Mapping Approach to the Analysis of Linear Periodics Systems, **Proceedings of the IX DINAME**, Florianópolis, pp. 545-557.
- GE, Z.M.; LIN, T.N. (2000) Regular and Chaotic Dynamic Analysis and Control of Chaos of an Elliptical Pendulum on a Vibrating Basement, **Journal of Sound and Vibration**, pp. 1045-1068.
- GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J.A. (1983). Crises, Sudden Changes in Chaotic Attractors, and Transient Chaos. **Physica 13D**, p.261-268.
- HAIRER, E.; NORSETT, S. P.; WANNER, G. (1993) **Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems**, Berlin, New York: Springer-Verlag.
- KAUDERER, H. (1958) **Nichtlineare Mechanic**. Springer, Berlin.
- KRASNOPOLSKAYA, T.S.; SHVETS, A.Y. (1993) Chaos in vibrating systems with a limited power-supply, **Chaos**, Vol.3, n.3, American Institute of Physics.
- KRASNOPOLSKAYA, T.S.; SHVETS, A.Y. (1990) Chaotic interactions in a pendulum energy source system. **Prikladnaya mekhanika**, 26:90-96.
- KONONENKO, V.O. (1969) **Vibrating Systems with a Limited Power-Supply**, Ed. Ilife, London.

- KUMAR, M. (2011) **Study of Mathieu equation near stability boundary**, Master dissertation, Supercomputer Education and Research Centre, Indian Institute of Science, Bangalore – 560012, July.
- LAARHOVEN, B. J. H. (2009) **Stability Analysis of Parametric Roll Resonance**. Eindhoven University of Technology, Department Mechanical Engineering, Dynamics and Control Group, Traineeship report, Eindhoven, Holanda.
- LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. (1970) **Mecânica**. São Paulo: Hemus, 235 p.
- LEE, Y. (2007) **A Study of Parametric Excitation Applied to a Mems Tuning Fork Gyroscope**, PhD Thesis, University of Missouri-Columbia.
- LEMOES, N. (2004) **Mecânica Analítica**, Ed. Livraria da Física, 1ª ed., São Paulo.
- LENCI, S.; PAVLOVSKAIA, E.; REGA, G.; WIERCIGROCH, M. (2008) Rotating solutions and stability of parametric pendulum by perturbation method, **J. Sound Vibration**, 310, 243-259.
- LEUNG, A.Y.T.; KUANG, J.L. (2006) On the chaotic dynamics of a Spherical Pendulum with a Harmonically Vibrating Suspension, **Nonlinear Dynamics**, Vol 43, 213-238.
- LEVEN, R.W.; KOCH, B.P. (1981) Chaotic Behavior of a Parametrically-Excited Pendulum, **Physics Letters A**, vol.86, n.2, 2 de novembro.
- LORENTE, A. (2010) **Dynamic Characteristics of a Pendulum System**, Dissertação de Mestrado, Blekinge Institute of Technology, Karlskrona, Suécia.
- MANDELSTAM, L.; PAPALEXI, N. Parametric excitation of electric oscillations. **Technical Physics Journal**, v.4, n.1, 1934.
- MILES, J. (1984) Resonant motion of a spherical pendulum, **Physica 11D**, p. 309-323, North-Holland, Amsterdam.
- MISES, R.; KÁRMÁN, T. (1948) **Advances in applied mechanics**. New York, Academic Press, Vol. 1.

- NAYFEH, A.H (1981) **Introduction to Perturbation Techniques**, Ed. Wiley & Sons
- NAYFEH, A.H.; MOOK, D.T. (1995) **Nonlinear Oscillations**, Ed. Wiley.
- NEIMARK, J.I. (2003) **Mathematical Models in Natural Science and Engineering**. Springer.
- PALMER, T. (2009) "Edward Norton Lorenz". **Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society**, Vol. 55, pp. 139–155.
- PANOVKO, YA. G.; GUBANOVA, I.I. (1987) **Stability and Oscillations of Elastic Systems. Modern Concepts, Paradoxes and Mistakes**. Nauka, Moscow.
- PINSKY, M.F.; ZEVIN, A.A. (1999) Oscillations of a pendulum with a periodically varying length and a model of swing. **Int. J. Non-linear Mech.**, 34, pp. 105-109.
- PONTES, B.R.; OLIVEIRA, V.A.; BALTHAZAR, J.M. (2000) On friction-driven vibrations in a mass block-belt-motor with limited power supply. **Journal of Sound and Vibration**, 234:713-723.
- PUSENJAK, R.R.; OBLAK, M.M.; TICAR, I. (2009) Nonstationary vibrations and transition through fundamental resonance of electromechanical systems forced by a nonideal energy source. **Journal of Nonlinear Sciences & Numerical Simulation**, 10: 635-657.
- RULLI, C.C.; RINO, J.P. (2007), Oscilações Paramétricas: uma simulação numérica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Brasil, Vol. 29, n.1, pp. 71-78.
- SEYRANIAN, A.P. (2004) The swing: Parametric resonance. **J. Applied Math. Mech.** 68 (5), 757-764.
- SHVETS, A.Y. (2007) Deterministic Chaos of a Spherical Pendulum under Limited Excitation, **Ukrainian Mathematical Journal**, Vol. 59, No. 4.

- SOUZA, S.L.T.; CALDAS, I.L.; VIANA, R.L.; BALTHAZAR, J.M.; BRASIL, R.M.L.R.F. (2005) Impact dampers for controlling chaos in systems with limited power supply. **Journal of Sound and Vibration**, 279, pp. 955-965.
- SZEMPLINSKA-STUPNICKA, W.; TYRKIEL, A. E ZUBRZICKY, A. (2000) The global bifurcations that lead to transient tumbling chaos in a parametrically driven pendulum, **Int. J. Bifur. Chaos**, Vol.10(9), pp. 2161-2175.
- TSUCHIDA, M.; GUILHERME, K.D.L.; BALTHAZAR, J.M.; SILVA, G.N.; CHESHANKOV, B.I. (2003) On regular and irregular vibrations of a non-ideal system with two degrees of freedom. 1:1 resonance. **Journal of Sound and Vibration**, 260: 949-960.
- WAUER, J.; BURLE, P. (1997) Dynamics of a flexible slider-crank mechanism driven by a non-ideal source of energy. **Nonlinear Dynamics**, 13: 221-242.
- WOLF, A.; SWIFT, J.B.; SWINNEY, H.L.; VASTANO, J.A. (1985) "Determining Lyapunov exponents from a time series", **Physica D**, Vol. 16, pp. 285-317.
- XU, X.; WIERCOGROCH, M.; CARTMELL, M.P. (2005), Rotating Orbits of a Parametrically-excited pendulum, **Chaos Solitons and Fractals**, v.23, pp.1537-1548.
- XU, X. (2005), **Nonlinear dynamics of a Parametric Pendulum for wave energy Extraction**, University of Aberdeen, PhD thesis.
- ZEVIN, A.A.; FILONENKO, L.A. (2007) Qualitative study of oscillations of a pendulum with periodically varying length and a Mathematical model of swing, **J. Appl. Math. Mech.**, Vol.71, No.6 , pp. 989-1003.
- ZUKOVIC, M.; CVETICANIN, L. (2007) Chaotic responses in a stable Duffing system of non-ideal type. **Journal of Vibration and Control**, 13:751-767.
- ZUKOVIC, M.; CVETICANIN, L. (2009) Chaos in non-ideal mechanical system with clearance. **Journal of Vibration and Control**, 15: 1229-1246.

Apêndice A

A.1 As coordenadas generalizadas

Para a análise da dinâmica do pêndulo excitada por uma fonte de energia não ideal são introduzidas ferramentas matemáticas tais como o uso de coordenadas generalizadas, a função Lagrangeana e Hamiltoniana e como princípio físico básico a lei de ação mínima, também conhecida como princípio de Hamilton.

A aplicação cotidiana das leis de Newton muitas vezes nos levam a um conjunto de equações em coordenadas cartesianas. Entretanto para alguns problemas torna-se importante fazer uso de outras coordenadas. Por exemplo, o caso de um corpo em movimento circular atraído por uma força central. Portanto, como as coordenadas em uso variam conforme a situação, convencionou-se o uso de coordenadas generalizadas, as quais englobariam quaisquer tipos de coordenadas. As diversas grandezas utilizadas em mecânica podem ser representadas desta forma.

Devido ao fato de as coordenadas a serem utilizadas dependerem da situação seria interessante definir grandezas físicas através de coordenadas generalizadas, as quais podem em seguida serem adaptadas ao sistema de coordenadas mais adequado ao problema que pretende-se resolver.

O método a ser utilizado para isso foi formulado por Joseph-Louis Lagrange, o qual será analisado com o propósito de possibilitar a modelagem de sistemas pendulares.

Normalmente representa-se coordenadas generalizadas através da letra q seguida de um índice numérico. Um conjunto de n coordenadas generalizadas seria então escrito da seguinte forma: $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$.

No caso de uma partícula que move-se no plano teria seu equacionamento representado por q_1 e q_2 . As quais poderiam ser tanto coordenadas cartesianas x e y , ou polares r e θ . Supõe-se, a princípio um sistema de N partículas, teremos então $3N$ coordenadas cartesianas $x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N$ e em coordenadas generalizadas serão $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3N}$.

A relação entre as coordenadas cartesianas e as generalizadas seria:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = q_1(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N; t) \\ q_2 = q_2(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N; t) \\ \vdots \\ q_{3N} = q_{3N}(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N; t) \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

Semelhantemente as coordenadas cartesianas também serão função das coordenadas generalizadas e possivelmente do tempo, tal como:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) \\ y_1 = y_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) \\ \vdots \\ z_N = z_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

Ao descrever-se um sistema de partículas usando coordenadas generalizadas do tipo $q_1, \dots, q_{3N}$, a derivada primeira em relação ao tempo, $\dot{q}_k$, de uma coordenada q_k é denominada velocidade generalizada. Pode-se obter as velocidades generalizadas em relação a todas as coordenadas derivando-se, no caso, por exemplo, as posições em coordenadas cartesianas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_1}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \dot{z}_N = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_N}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial z_N}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

A energia cinética de N partículas em coordenadas cartesianas, é:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (\text{A.4})$$

As velocidades referentes a cada coordenada generalizada são obtidas por:

$$\begin{aligned}
 (\dot{x}_i)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 = \\
 &= \left(\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k \right)^2 + 2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 = \\
 &= \sum_{k=1}^{3N} \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \cdot \dot{q}_k \cdot \dot{q}_l + 2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k \right) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Utilizando o mesmo método para $(\dot{y}_i)^2$ e $(\dot{z}_i)^2$ obtém-se a energia cinética em termos de coordenadas generalizadas:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \cdot m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \sum_{k=l}^{3N} \frac{1}{2} \cdot A_{kl} \cdot \dot{q}_k \cdot \dot{q}_l + \sum_{k=1}^{3N} B_k \dot{q}_k + T_0 \tag{A.6}$$

Onde:

$$A_{kl} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_l} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_l} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_l} \right) \tag{A.7}$$

$$B_k = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial t} \right) \tag{A.8}$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 \right] \tag{A.9}$$

Os coeficientes A_{kl} , B_k , T_0 são funções das coordenadas $q_1, \dots, q_{3N}$, assim como t , no caso de as coordenadas estarem em movimento. Se A_{kl} for igual a zero, exceto quando , as coordenadas serão ortogonais. Os coeficientes B_k e T_0 são iguais a zero quando t não aparece explicitamente nas equações (A.2), ou seja, quando as coordenadas não variarem com o tempo. Consequentemente a energia cinética pode ser escrita como:

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \tag{A.10}$$

Onde que T_2 contém os termos quadráticos das velocidades generalizadas, T_1 contém os termos lineares e T_0 é independente das velocidades.

Por exemplo, a energia cinética de uma única massa representada em coordenadas polares bidimensionais seria:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m(r^2 + r^2 \dot{\theta}) \quad (\text{A.11})$$

A partir da equação da energia cinética representada anteriormente, pode-se encontrar o momento linear (ou quantidade de movimento linear) de uma partícula i :

$$\begin{aligned} p_{ix} &= m_i \dot{x}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \\ p_{iy} &= m_i \dot{y}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \\ p_{iz} &= m_i \dot{z}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Para o caso em que seja conveniente trabalhar com coordenadas polares, as derivadas de T em relação a $\dot{r}$ e $\dot{\theta}$ resultarão em:

$$\begin{aligned} p_r &= m \dot{r} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \\ p_\theta &= m r^2 \dot{\theta} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Onde p_r é a componente do momento linear na direção r , e p_θ é a componente do momento angular na direção de θ .

As relações descritas na Eq.(A.13) para momento linear e momento angular dão a entender a seguinte relação para momento em coordenadas generalizadas:

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \quad (\text{A.14})$$

Se q_k for uma distância, p_k será seu momento linear correspondente. Se q_k for um ângulo, p_k será seu momento angular. Em outras situações, p_k terá outro significado. De acordo com a equação para energia cinética, o momento será:

$$p_k = \sum_{l=1}^{3N} A_{kl} \dot{q}_l + B_k \quad (\text{A.15})$$

Para definir força generalizada, será necessário antes definir forças em termos de trabalho por elas realizadas durante o movimento das partículas. Supomos um sistema de partículas com posições especificadas pelas coordenadas $x_1, y_1, z_1, \dots, z_N$ e sob ação das forças $F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, \dots, F_{Nz}$. Se cada partícula do sistema for deslocada para uma posição, as novas posições seriam determinadas pelas coordenadas $x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1, \dots, z_N + \delta z_N$, e o trabalho realizado seria:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) \quad (\text{A.16})$$

O conjunto de acréscimos $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ representa quaisquer deslocamentos pequenos chamados **deslocamentos virtuais** do sistema, pelo fato de não representarem necessariamente um deslocamento real do sistema. Esses acréscimos podem ser representados através de coordenadas generalizadas:

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k \\ \delta y_i &= \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k \\ \delta z_i &= \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

onde $\delta q_1, \dots, \delta q_{3N}$ são as diferenças entre as coordenadas generalizadas, associadas a cada um dos dois conjuntos de posições (posições iniciais de cada partícula e posição final). No

caso de as coordenadas estarem em movimento, considera o tempo como fixo e expressa-se as variações da posição em termos do sistema de coordenadas em um determinado tempo t . Substituindo as equações (A.17) na equação (A.16), chega-se a:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3N} Q_k \delta q_k \quad (\text{A.18})$$

Sendo que:

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \quad (\text{A.19})$$

O coeficiente Q_k depende das forças exercidas sobre as partículas, das coordenadas $\delta q_1, \dots, \delta q_{3N}$ e possivelmente do tempo t . Chama-se então de força generalizada associada à coordenada. Cabe ressaltar que o trabalho calculado refere-se aos valores de força para as posições $q_1, \dots, q_{3N}$; e que não deve estar presente nenhuma variação de força durante o trabalho virtual. Se as forças $F_{1x}, \dots, F_{nz}$ forem conservativas, ou seja, derivarem de uma função potencial $V(x_1, \dots, z_n)$, sabemos que:

$$F_{kx} = \frac{\partial V}{\partial x_k} \quad F_{ky} = \frac{\partial V}{\partial y_k} \quad F_{kz} = \frac{\partial V}{\partial z_k} \quad k = 1, \dots, N \quad (\text{A.20})$$

Portanto o trabalho virtual será:

$$\delta W = -\delta V = - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \cdot \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \cdot \delta z_i \right) \quad (\text{A.21})$$

A função potencial em termos de coordenadas generalizadas será:

$$\delta W = -\delta V = - \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial q_k} \cdot \delta q_k \quad (\text{A.22})$$

A força generalizada em termos de potencial é:

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (\text{A.23})$$

Um exemplo interessante seria calcular as forças generalizadas associadas com as coordenadas r e θ para uma partícula submetida à ação da força:

$$F = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} = F_\theta \hat{\theta} \quad (\text{A.24})$$

Através da definição de forças generalizadas, sabe-se:

$$Q_r = F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r} = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta = F_r \quad (\text{A.25})$$

$$Q_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r F_x \sin \theta + r F_y \cos \theta = r F_\theta \quad (\text{A.26})$$

A força na direção r correspondente a Q_r ; e o torque no sentido positivo de θ é representado por Q_θ .

Esclarecendo um pouco mais, no caso de θ ser constante e r variar de r a $r + \delta r$, o trabalho realizado será dado por:

$$\delta W = F_r \delta r \quad (\text{A.27})$$

No entanto, se o contrário acontecer, r for constante e θ variar de θ a $\theta + \delta \theta$, o trabalho é descrito:

$$\delta W = (F_\theta r) \cdot \delta \theta \quad (\text{A.28})$$

A.2 As Equações de Lagrange

Após análise de generalizações dos sistemas de coordenadas, momentos e forças, pretende-se encontrar uma generalização para equações de movimento do sistema. O que significa que, dado um sistema, se encontrará equações de movimento para qualquer tipo de coordenada utilizando um método supostamente genérico.

Uma comparação de força generalizada e momento generalizado poderia conduzir ao seguinte equívoco:

$$\frac{dp_k}{dt} = Q_k \quad (\text{A.29})$$

Para confirmar o fato da relação na Eq. (A.29) não ser verdadeira, calcularemos a taxa de variação no tempo de p_k :

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad (\text{A.30})$$

Derivando-se a energia cinética T em termos de $\dot{q}_k$, temos:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad (\text{A.31})$$

Em que $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dots, \dot{z}_N$ são dados em função de $q_1, \dots, q_{3N}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}$ e t de acordo com as equações estabelecidas para as velocidades generalizadas e considerando suas derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \\ \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial y_i}{\partial q_i} \\ \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \\ i &= 1, \dots, N; k = 1, \dots, 3N \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Como $\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ e $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ são funções apenas de $q_1, \dots, q_{3N}$ e t , substituindo-se as Eqs. (A.32) na Eq. (A.31) e derivando-se em relação a t :

$$\begin{aligned} \frac{dp_k}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \\ + \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Conforme a Segunda Lei de Newton o primeiro termo de Eq.(A.33) torna-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \\ = \sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = Q_k \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

As derivadas que aparecem no segundo termo da Eq.(33) são calculadas da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} \quad (\text{A.35})$$

Usando as expressões para velocidades generalizadas representadas na Eqs.(A.3), chega-se na seguinte relação para o segundo termo da Eq.(A.33):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \\ = \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_k} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \frac{\partial T}{\partial q_k} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Então obtemos a relação correta:

$$\frac{dp_k}{dt} = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad (\text{A.37})$$

A Equação (A.37) é chamada Equação de Lagrange e usualmente escrita na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (\text{A.38})$$

As equações de Lagrange são equações de movimento conforme as Leis de Newton, porém de uma forma mais genérica.

No caso de existir uma função potencial, de modo que as forças Q_k são derivadas da função dessa função potencial, pode-se utilizar a chamada função Lagrangeana.

$$L(q_1, \dots, q_{3N}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}; t) = T - V \quad (\text{A.39})$$

onde T depende de $q_1, \dots, q_{3N}$ e $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}$, mas V depende apenas de $q_1, \dots, q_{3N}$ (possivelmente de t), portanto temos o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \\ \frac{\partial L}{\partial q_k} &= \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} + Q_k \end{aligned}$$

Desta forma as equações de Lagrange considerando apenas forças conservativas podem ser representadas na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, \dots, 3N \quad (\text{A.40})$$

Portanto as equações de Lagrange são uma nova forma generalista de representação das leis de Newton.

Apêndice B

B.1 Análise de um pêndulo simples amortecido com excitação vertical ideal no suporte

Figura B.1. Representação do pêndulo excitado verticalmente

Nessa seção analisa-se o problema de um pêndulo simples com excitação paramétrica no suporte na direção vertical. Através do método de Lagrange encontram-se as equações de movimento para este caso. Olhando o problema, entende-se que para saber a configuração do sistema necessita-se conhecerem u e θ em qualquer instante. Inicialmente através de coordenadas cartesianas, encontramos a posição da partícula localizada na extremidade, para em seguida determinar a energia cinética do sistema em termos de u e θ . Em seguida, obtemos a força generalizada em relação a cada uma das coordenadas, para finalmente aplicarmos na equação de Lagrange.

As posições cartesianas em função das polares são:

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta \\ y &= l \cos \theta + u \end{aligned} \tag{B.1}$$

Derivando-se, obtêm-se as velocidades em cada referencial:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y} &= -l \dot{\theta} \sin \theta + \dot{u} \end{aligned} \tag{B.2}$$

E a energia cinética do sistema:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 + \dot{u}^2 - 2 l \dot{u} \dot{\theta} \sin \theta) \quad (\text{B.3})$$

Considerando que o pêndulo é amortecido deve-se levar em conta uma força viscosa que se opõe ao vetor velocidade na massa na extremidade:

$$F_v = -c v = -c l \dot{\theta} = -\beta \dot{\theta} \quad (\text{B.4})$$

Cabe ressaltar que a relação para força viscosa descrita acima se encaixa bem em situações em que é baixa a velocidade do sistema em relação ao fluido em que está presente. Para situações em que a velocidade do sistema é maior, a força viscosa é proporcional a velocidade ao quadrado.

Calcula-se agora a força generalizada relacionada a cada uma das coordenadas para, em seguida, lançar sobre a equação de Lagrange.

Através do conceito de trabalho virtual calculamos Q_θ . Mantendo u constante e variando θ obtemos:

$$\delta W_\theta = -P \sin \theta (l \delta \theta) + F_r (l \delta \theta) = -m g \sin \theta (l \delta \theta) - \beta \dot{\theta} (l \delta \theta) \quad (\text{B.5})$$

E a força generalizada na direção θ toma a seguinte forma:

$$Q_\theta = -mgl \sin \theta - c l^2 \dot{\theta} \quad (\text{B.6})$$

Sabendo que Q_θ representam forças conservativas e não-conservativas, aplicamo-la na equação de Lagrange para a coordenada $q_k = \theta$ e obtemos a equação diferencial de movimento na direção θ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\sin \theta}{l} (\ddot{u} - g) - \frac{c}{m} \dot{\theta} \quad (\text{B.7})$$

No cálculo do trabalho virtual realizado pela partícula na direção u não haverá influência da força viscosa devido ao fato de ela ser sempre perpendicular a essa direção.

Para obter-se a equação de movimento na direção de u , encontraremos primeiramente a força generalizada Q_u através do trabalho virtual como foi feito anteriormente. Considerando θ constante e variando-se u temos:

$$\delta W_u = F \delta u + P \delta u = (F + mg) \delta u \rightarrow Q_u = mg + F \quad (\text{B.8})$$

Portanto a equação nesta direção será obtida para o caso de $q_k = u$ através da equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial T}{\partial u} = Q_u \rightarrow \ddot{u} = g + \frac{F}{m} + l(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) \quad (\text{B.9})$$

Temos, então, as equações de movimento para as coordenadas θ e u :

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin \theta}{l} (\ddot{u} - g) - \frac{c}{m} \dot{\theta} \quad (\text{B.10})$$

$$\ddot{u} = g - \frac{F}{m} + l (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta)$$

B.2 Análise de um pêndulo simples amortecido com excitação horizontal ideal no suporte

Figura B.2. Representação do pêndulo excitado horizontalmente

Semelhantemente ao que foi feito para o caso de excitação vertical obtêm-se, primeiramente, as posições cartesianas em função das polares:

$$x = l \sin \theta + u \quad (\text{B.11})$$

$$y = l \cos \theta$$

Derivando-se obtêm-se as velocidades para cada coordenada:

$$\dot{x} = l \dot{\theta} \cos \theta + \dot{u} \quad (\text{B.12})$$

$$\dot{y} = -l \dot{\theta} \sin \theta$$

Portanto a energia cinética será:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 + \dot{u}^2 + 2 l \dot{u} \dot{\theta} \cos \theta) \quad (\text{B.13})$$

Sabendo-se que a força generalizada é a mesma que a representada neste caso também por:

$$Q_{\theta} = -mgl \sin \theta - c l^2 \dot{\theta} \quad (\text{B.14})$$

Usando as equações de Lagrange encontra-se a equação diferencial para a variável para o caso de excitação externa horizontal:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{-\ddot{u}}{l} \cos \theta - \frac{g}{l} \sin \theta - \frac{c}{m} \dot{\theta} \quad (\text{B.15})$$

B.3 Análise de um pêndulo simples amortecido com excitação ideal em ambas direções no suporte

Figura B.3. Representação do pêndulo excitado em ambas direções

Nessa seção analisa-se um pendulo simples com excitação na direção vertical e horizontal no suporte. Para o caso de excitação em ambas as direções a posição usando coordenadas cartesianas em função das polares assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}x &= l \operatorname{sen} \theta + u_x \\y &= l \cos \theta + u_y\end{aligned}\tag{B.16}$$

As velocidades serão dadas por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= l \dot{\theta} \cos \theta + \dot{u}_x \\ \dot{y} &= -l \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta + \dot{u}_y\end{aligned}\tag{B.17}$$

A energia cinética será dada por:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 + \dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 \\ &\quad + 2 l \dot{\theta} [\dot{u}_x \cos \theta - \dot{u}_y \operatorname{sen} \theta])\end{aligned}\tag{B.18}$$

Sendo as excitações nas direções horizontal e vertical e suas derivadas em relação ao tempo feitas de forma similar a Fidlín (2006), a distinção da presente modelagem para o autor mencionado anteriormente corresponde apenas a diferenças de fase, mantendo-se portanto os mesmos princípios físicos e métodos matemáticos. Segue abaixo as posições e velocidades consideradas:

$$\begin{aligned}u_x &= -A_x \operatorname{sen} (\omega t + \gamma) \\ u_y &= -A_y \operatorname{sen} (\omega t) \\ \dot{u}_x &= -A_x \omega \cos(\omega t + \gamma) \\ \dot{u}_y &= -A_y \omega \cos(\omega t) \\ \ddot{u}_x &= A_x \omega^2 \operatorname{sen} (\omega t + \gamma) \\ \ddot{u}_y &= A_y \omega^2 \operatorname{sen} (\omega t)\end{aligned}\tag{B.19}$$

Substituindo u_x , u_y e suas derivadas na equação de Lagrange obteremos:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{A_x}{l} \omega^2 \text{sen}(\omega t + \gamma) \cos \theta - \frac{A_y}{l} \omega^2 \text{sen}(\omega t) \text{sen} \theta \\ = -\frac{g}{l} \text{sen} \theta - \frac{c}{m} \dot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Apêndice C

Funcionamento do Motor de Corrente Contínua

O motor de corrente contínua é um dispositivo capaz de converter energia elétrica em energia mecânica. O circuito equivalente para o motor C.C. é representado na Figura C.1.

Figura C.1 Circuito elétrico equivalente ao motor de corrente contínua

Na ilustração do motor, R representa a resistência da armadura, L a sua indutância, E_g uma tensão elétrica gerada internamente que representa a força eletromotriz e R_L é devido a perda no circuito magnético. Em geral R_L será desprezado nos cálculos pelo fato de ser de magnitude muito pequena em relação a R .

Os motores de corrente contínua possuem características adequadas para uma boa análise do sistema dinâmico. Entre essas características estão: o baixo momento de inércia e devido a isso uma rápida aceleração e inversão de rotação; um controle mais preciso da velocidade, sendo eficiente e silencioso em baixas rotações.

Os parâmetros envolvidos do sistema elétrico são corrente elétrica e voltagem, enquanto que para o sistema mecânico estão presentes torque e velocidade angular. São características frequentemente estáticas do sistema e são definidas por: J_M igual o momento de inércia do rotor do motor, R a resistência elétrica da armadura e L a indutância da armadura.

Equação Elétrica do Motor

A equação que descreve a voltagem do motor V relacionada a corrente I corresponde a:

$$V = L \frac{dI}{dt} + RI + E_g \quad \text{C.1}$$

onde E_g corresponde a voltagem gerada internamente e é proporcional à velocidade de rotação do motor:

$$E_g = K_E \dot{\theta} \quad \text{C.2}$$

onde K_E é a constante de voltagem do motor e $\dot{\theta}$ é a velocidade angular do motor.

A equação diferencial elétrica do motor é, portanto:

$$V = L \frac{dI}{dt} + RI + K_E \dot{\theta} \quad \text{C.3}$$

Equação Dinâmica do Motor

Pelo campo magnético no motor ser constante, a corrente I provoca um torque diretamente proporcional a sua magnitude:

$$M_{Motor} = K_T I \quad \text{C.4}$$

Onde K_T é a constante de torque do motor. Portanto a equação dinâmica do motor será:

$$M_{Motor} - T_f - c_m \dot{\theta} = (J_M + J_D) \ddot{\theta} \quad \text{C.5}$$

Onde J_M é o momento de inércia do rotor do motor, J_D é o momento de inércia do disco acoplado coaxialmente ao eixo do motor, $\dot{\theta}$ a velocidade rotacional do motor, T_f torque de perda por amortecimento no rotor do motor e c_m o coeficiente de amortecimento viscoso.

Curvas dos motores elétricos

Substituindo a Eq. C.2 em C.1 tem-se a equação da corrente elétrica em termos de da velocidade angular no motor e da tensão elétrica aplicada:

$$V - K_E \dot{\theta} = L \frac{dI}{dt} + RI \quad C.6$$

A partir da consideração de que a *constante elétrica do motor* L/R é menor que a *constante de tempo mecânica* $(RJ)/(K_E K_T)$ o termo da indução elétrica que carrega a derivada temporal da corrente será desprezível, tal como Belato et al (2001). Portanto substituindo a Eq. C.4 em C.6 será obtida uma equação que relaciona o torque M_{Motor} com uma função linear dependente da tensão elétrica da velocidade angular $\dot{\theta}$ e da tensão elétrica V .

$$M_{Motor} = \frac{VK_T}{R} - \frac{K_E K_T}{R} \dot{\theta} \quad C.7$$

Apêndice D

O método runge-kutta de 4ª ordem foi usado foi construído em Fortran 77 para obtenção das bacias de atração. E posteriormente usado na mesma seção para construção de histórico no tempo, mapa de fase e seção de Poincaré correspondentes aos atratores de cada bacia. O código foi adequadamente compilado através dos softwares Microsoft Developer Studio® e do GFortran.

```

C  PROGRAMA PRINCIPAL
C  RUNGE KUTTA 4A ORDEM PARA
C  SOLUCAO DO PENDULO DE EXCITACAO IDEAL POR BIELA-MANIVELA
C  PROF REYOLANDO BRASIL E RAFAEL AVANCO
C  FEV 2014
C
C  PROGRAM RKLO
C
C  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

C  DIMENSION X(2000000,7),X0(7)
C
C  NE = NUMERO DE EQUACOES DE PRIMEIRA ORDEM
C  CAPACIDADE ATUAL DO PROGRAMA: 6 EQUACOOES DE PRIMEIRA ORDEM
C  MAIS O TEMPO
C  NP = NUMERO DE PASSOS DE INTEGRAÇÃO
C  DT = PASSO DE INTEGRACAO DO TEMPO
C  X = VETOR DE VARIABEIS DE ESTADO, NO TEMPO
C  X0 = CONDICOOES INICIAIS
C
C  DESIGNACAO DO ARQUIVO DE SAIDA
C
C  OPEN(4,FILE='hist.txt') !ARQUIVO PARA HISTORICO NO TEMPO
C  OPEN(5,FILE='x.txt') !ARQUIVO PARA MAPA DE FASE
C  OPEN(6,FILE='P.txt') !ARQUIVO para o Poincare

C  OMEGA=1.8D0 ! Para construaao do poicare usa frequencia adimensionalizada
C  ANUPER=400.D0 ! Numero de periodos a serem executados
C  PI=3.14159265359D0
C  PER=2.D0*PI/OMEGA !Periodo de excitacao
C  TFINAL=ANUPER*PER
C  DT=PER/400.D0 !Passo igual o periodo de excitacao dividido por 400
C  CNP=TFINAL/DT ! Numero de passos
C  NP=INT(CNP) ! Numero de passos precisa ser inteiro. Nao deve ultrapassar 2milhoes

C  IDIST=INT(PER/DT) ! Distancia em numero de pontos entre um poicare e outro

```



```
C  EXEMPLO PENDULO, 2 EQUACOES DE PRIMEIRA ORDEM MAIS O TEMPO, PORTANTO 3.
NE=3
```

```
C
```

```
C
```

```
C  LEITURA DAS CONDICAOES INICIAIS
```

```
C
```

```
  X0(1)=0.01D0*PI !Posicao angular inicial
```

```
  X0(2)=0.D0      ! Velocidade angular inicial
```

```
  X0(3)=0.D0      ! Tempo inicial, em geral zero
```

```
C
```

```
C  CHAMADA DA ROTINA DO RUNGE KUTA DE QUARTA ORDEM
```

```
C
```

```
  CALL RK4(NE,NP,DT,X,X0)
```

```
      DO 50 I=1,NP
```

```
          WRITE(4,*) X(I,3),X(I,1)
```

```
50    CONTINUE
```

```
  CLOSE(4)
```

```
C
```

```
  INIMAP=0.75D0*NP
```

```
    IMAP=INT(INIMAP)
```

```
  DO 100 I=IMAP,NP
```

```
    WRITE(5,*) X(I,1),X(I,2) !IMPRIME Mapa de fase (posicao, velocidade)
```

```
100  CONTINUE
```

```
  CLOSE(5)
```

```
      PART=0.75D0*ANUPER
```

```
      IPART=INT(PART)
```

```
      J=IPART*IDIST    ! PONTO DE PARTIDA em 75% do tempo para eliminar o transiente
```

```
      DO 200 I=J,NP,IDIST
```

```
          WRITE(6,*) X(I,1),X(I,2) !IMPRIME POINCARÉ
```

```
200  CONTINUE
```

```
  CLOSE(6)
```

```
      END PROGRAM
```

```
C
```

```
C  SUBROTINA RUNGE KUTTA QUARTA ORDEM
```

```
C
```

```
  SUBROUTINE RK4(NE,NP,DT,X,X0)
```

```
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
```

```
  DIMENSION DEQ(7),DER(7),X(2000000,7),X0(*),XA(7)
```

```
C  ROTINA RUNGE KUTTA 4A ORDEM
```

```
C  PROF REYOLANDO BRASIL
```

```
C  FEV 2014
```

```
C  NE = NUMERO DE EQUACOES DE PRIMEIRA ORDEM
```

```
C  CAPACIDADE ATUAL DA ROTINA 6 EQUACOES DE PRIMEIRA ORDEM + TEMPO
```

```
C  NP = NUMERO DE PASSOS DE INTEGRACAO
```

```
C  DT = PASSO DE INTEGRACAO DO TEMPO
```

```

C   DER = VETOR DE DERIVADAS
C   X = VETOR DE VARIÁVEIS DE ESTADO
C   X0 = CONDIÇÕES INICIAIS
C   XA = ARGUMENTO PARA CÁLCULO DAS DERIVADAS
C
  DO 10 I=1,NE
    X(I,I)=X0(I)
10  CONTINUE
C
C   LOOP PRINCIPAL
C
  DO 20 I=2,NP
    DO 30 J=1,NE
      XA(J)=X(I-1,J)
30  CONTINUE
C   CÁLCULO DE K1
    CALL DERIV(DER,XA)
    DO 40 J=1,NE
      DEQ(J)=DT*DER(J)/6.0D0
      XA(J)=X(I-1,J)+0.5D0*DT*DER(J)
40  CONTINUE
C   CÁLCULO DE K2
    CALL DERIV(DER,XA)
    DO 50 J=1,NE
      DEQ(J)=DEQ(J)+DT*DER(J)/3.0D0
      XA(J)=X(I-1,J)+0.5D0*DT*DER(J)
50  CONTINUE
C   CÁLCULO DE K3
    CALL DERIV(DER,XA)
    DO 60 J=1,NE
      DEQ(J)=DEQ(J)+DT*DER(J)/3.0D0
      XA(J)=X(I-1,J)+DT*DER(J)
60  CONTINUE
C   CÁLCULO DE K4
    CALL DERIV(DER,XA)
    DO 70 J=1,NE
      X(I,I)=X(I-1,J)+DEQ(J)+DT*DER(J)/6.0D0
70  CONTINUE
20  CONTINUE
    RETURN
  END
C
C   SUBROTINA DE DERIVADAS
C
  SUBROUTINE DERIV(DER,XA)
    IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
    DIMENSION DER(*),XA(*)
C   ROTINA DERIVADAS PARA RUNGE KUTTA 4A ORDEM
C   ROTINA A SER MODIFICADA PARA CADA SISTEMA DINÂMICO
C   NESTE EXEMPLO PENDULO COM EXCITAÇÃO IDEAL

```

```

C
C  DER = VETOR DE DERIVADAS
C  XA = ARGUMENTO PARA CALCULO DAS DERIVADAS
C
C  PARAMETROS
C
  EPSILON=0.9D0
      OMEGA=1.8D0
      GAMMA=0.1D0
      P=0.5D0

  DER(1)=XA(2)
  DER(2)=-gamma*XA(2)-sin(XA(1))-P*cos(omega*XA(3))*sin(XA(1))
1  -epsilon*P*cos(2.D0*omega*XA(3))*sin(XA(1))/
2  (1.D0-epsilon**2.D0*(sin(omega*XA(3)))**2)**0.5D0
3  -(epsilon**3.D0/4.D0)*sin(XA(1))*P*(sin(2.D0*OMEGA*XA(3)))**2.D0/
4  (1.D0-epsilon**2.D0*(sin(omega*XA(3)))**2.D0)**1.5D0
      !tempo terceira coluna
  DER(3)=1.0D0
  RETURN
END

```

Apêndice E

Código construído para análise em MatLab e/ou Octave para o caso de excitação do pêndulo sob potência limitada.

```
%-----
-----

% [t,x]=ode45('limit',[tempoini,tempofinal],[a b c d]);
% plot(x(:,3),x(:,4)) vai plotar alpha linha versus alpha

%tempoini=tempo de partida
%tempofinal=tempo de parada
%a=posicao inicial do rotor
%b=velocidade inicial do pendulo
%c=posicao inicial do pendulo
%d=velocidade inicial do pendulo

clear all
clc

global a b epsilon g c l omegazero m KT KE R J L V gamma

b=0.3;
a=0.4*b;
epsilon=a/b;
g=9.81;
c=0.32;
l=0.25;
omegazero=(g/l)^0.5;
m=0.50; %500 gramas
KT=127e-3;
KE=127e-3;
R=0.365;
J=500e-3;
L=0.161e-3;

V=1.44;

Mec=R*J/(KT*KE);
Elet=L/R;
gamma=c/(m*omegazero)
omegazero;

[tau,x]=ode45('limit',[0,600*2*pi/omegazero],[0 0 0.01*pi
0]);
```

```

dim=size(x);
dim1=dim(1,1);
n=ceil(0.75*dim1);
regimethetalinha=x(n:dim1,2);
maximothetalinha=max(regimethetalinha);
minimothetalinha=min(regimethetalinha);
thetalinhamedio=(maximothetalinha+minimothetalinha)/2;

p=a*thetalinhamedio^2/l
omega=thetalinhamedio
epsilon

figure(1)
plot(tau,x(:,3))
figure(2)
plot(tau,x(:,2))
%-----

```

Em seguida a respectiva função que deve ficar em outro arquivo:

```

%-----
-

function dtau=limit(tau,x) %Motor real 250 Watts
global a b epsilon g c l omegazero m KT KE R J L V gamma
%x1 = theta
%x1 linha = x2 = theta linha = omega
%x3 = alpha
%x3 linha = x4 = alpha linha
%x4 linha = alpha duas linhas

dtau=zeros(size(x));

kappa=(1-epsilon^2*sin(x(1))^2);

%funcao F
F=sin(x(1)) + epsilon*sin(2*x(1))/(2*(kappa)^0.5);
%funcao F linha
Fn=x(2)*cos(x(1)) + x(2)*epsilon*cos(2*x(1))/kappa^0.5
+x(2)*epsilon^3*sin(2*x(1))^2/(4*kappa^1.5);

zeta=J+m*a^2*F^2;

sigma=1-m*a^2*F^2*sin(x(3))^2/zeta;

Mmotor=KT*V/R -KE*KT*omegazero*x(2)/R;

```

```

dtau(1)=x(2);
dtau(2)=-m*a^2*F*Fn*x(2)/(zeta*sigma) -
m*a*F*l*cos(x(3))*x(4)^2/(zeta*sigma)+
gamma*m*a*F*l*sin(x(3))*x(4)/(zeta*sigma)...
+m*a*F*l*sin(x(3))^2/(zeta*sigma)+m*a^2*F*Fn*x(2)*sin(x(3))^2
/(zeta*sigma) -m*g*a*F/(zeta*omegazero^2*sigma)
+Mmotor/(zeta*omegazero^2*sigma);
dtau(3)=x(4);
dtau(4)=-gamma*x(4)/sigma -
sin(x(4))+m*a^3*F^2*Fn*x(2)*sin(x(3))/(zeta*l*sigma)+m*a^2*F^
2*sin(2*x(3))*x(4)^2/(2*zeta*sigma)...
+m*a^2*F^2*sin(x(3))/(zeta*sigma)-
Mmotor*a*sin(x(3))*F/(zeta*omegazero^2*sigma*l) -
a*sin(x(3))*Fn*x(2)/(sigma*l);

end
%-----
-

```

Apêndice F

Modelagem envolvendo potência limitada na excitação pendular

Figura F.1 Mecanismo de excitação por potência limitada

O presente mecanismo descrito nesse apêndice foi proposto para análise pelo Professor Reyolando Manuel Lopes Rebello da Fonseca Brasil com intuito de análise em trabalhos futuros.

Nesse mecanismo um disco é acoplado ao eixo de um motor elétrico de corrente contínua de forma que o símbolo J representa a soma do momento de inércia do rotor do motor elétrico e do momento de inércia do disco. O disco possui um pino que passa por um rasgo de chaveta provocando uma excitação harmônica no suporte de um pêndulo simples em que a massa na extremidade do pêndulo é ligada ao ponto de apoio através de uma haste rígida sem massa.

Para fins de modelagem a massa do pino é desprezada, ou seja, a massa do pino não vai provocar nenhum desbalanço no giro do motor. A massa do suporte que sustenta o pêndulo também será desprezada. Apenas a massa m do pêndulo irá interferir na dinâmica do motor, exceto pelo próprio momento de inércia do disco e do rotor do motor, os quais já foram mencionados.

Para desenvolver a modelagem pelo método de Lagrange encontramos primeiramente a energia cinética do sistema obtida através da soma da energia cinética dos componentes. O primeiro termo da Eq. (F.1) traz a energia cinética de rotação do disco

somada a energia cinética de rotação do rotor do motor. O segundo termo traz a energia cinética de translação da massa m na extremidade do pêndulo.

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) \quad (\text{F.1})$$

E a função potencial obtida a partir da posição da massa m tendo como nível de referência o centro do rotor:

$$V = -m g l \cos \alpha - m g a \cos \theta \quad (\text{F.2})$$

Para determinação da Lagrangeana a posição do pêndulo e suas respectivas velocidades são colocadas em termos de θ e α :

$$x_p = l \sin \alpha \quad (\text{F.3})$$

$$y_p = -l \cos \alpha - a \cos \theta$$

$$\dot{x}_p = l \dot{\alpha} \cos \alpha \quad (\text{F.4})$$

$$\dot{y}_p = l \dot{\alpha} \sin \alpha + a \dot{\theta} \sin \theta$$

A Lagrangeana obtida a partir da energia cinética e potencial:

$$L = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) + m g l \cos \alpha + m g a \cos \theta \quad (\text{F.5})$$

A partir da Lagrangeana e das coordenadas α e θ encontra-se as equações de Lagrange que no presente caso serão duas:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = G_{\alpha}^{NC} \quad (\text{F.6})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = G_{\theta}^{NC} \quad (\text{F.7})$$

As forças generalizadas G_{α}^{NC} e G_{θ}^{NC} são estritamente dissipativas e provêm da conhecida função dissipação de Rayleigh. No presente modelo físico elas são dadas por:

$$G_{\alpha}^{NC} = -c l^2 \dot{\alpha} \quad (F.8)$$

$$G_{\theta}^{NC} = M_{Motor} - c_m \dot{\theta} \quad (F.9)$$

Onde o termo c na Eq.(F.8) representa uma constante de amortecimento devido à junta presente no ponto de suspensão do pêndulo. As forças generalizadas neste caso apresentam dimensão de torque enquanto o termo c apresenta dimensão [força*tempo/distância], no Sistema Internacional [Ns/m].

O atrito viscoso do pêndulo com o meio em que está inserido (o ar, por exemplo) é desconsiderado devido ao fato de ser pequeno em comparação com a magnitude do atrito da junta que suspende o pêndulo. Verificou-se em Lorente (2010), a fato de a viscosidade com o ar ser irrisório frente ao atrito presente na junta em situações práticas.

Na força generalizada para coordenada θ , entra o torque líquido fornecido pelo motor e o atrito devido ao mancal de apoio, entretanto, esse valor é considerando desprezível.

Realizando os cálculos implícitos na Eq.(F.6) e (F.7), e utilizando as forças generalizadas referentes à dissipação ou torque externo presente nas Eqs.(F.8) e (F.9), encontra-se as equação diferenciais que regem o comportamento do sistema.

A primeira equação de Lagrange referente à coordenada θ corresponde a equação abaixo onde o lado direito da equação corresponde as forças não-conservativas e ao torque líquido fornecido pelo motor:

$$J\ddot{\theta} + m a^2 \ddot{\theta} \sin^2 \theta + m a^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta + m a l \ddot{\alpha} \sin \alpha \sin \theta + m a l \dot{\alpha}^2 \cos \alpha \sin \theta + m g a \sin \theta = M_{motor} - c_m \dot{\theta} \quad (F.10)$$

A segunda equação de Lagrange obtida com a derivação sobre a coordenada α leva a equação abaixo onde o lado direito da equação correspondem às forças dissipativas:

$$m l^2 \ddot{\alpha} + m a l \ddot{\theta} \sin \alpha \sin \theta + m a l \dot{\theta}^2 \sin \alpha \cos \theta + m g l \sin \alpha = -c l^2 \dot{\alpha} \quad (F.11)$$

A terceira equação representa o torque líquido do motor elétrico escrito em termos da voltagem aplicada sobre o motor elétrico, a velocidade angular do disco e os parâmetros característicos do motor conforme constam no Apêndice C.

$$M_{Motor} = \frac{K_T}{R} V - \frac{K_E K_T}{R} \dot{\theta} \quad (F.12)$$

Através também das Eqs.(3.2.14) realiza-se a adimensionalização do tempo presente nas equações que regem o comportamento do pêndulo para potência limitada.

$$\begin{aligned} \theta'' + \frac{m a^2 \theta'' \sin^2 \theta}{J} + \frac{m a^2 \theta'^2 \sin \theta \cos \theta}{J} + \frac{m a l \alpha'' \sin \alpha}{J} \\ + \frac{m a l \alpha'^2 \cos \alpha \sin \theta}{J} + \frac{m g a \sin \theta}{J \omega_0^2} = \frac{M_{motor}}{J \omega_0^2} - \frac{c_m \theta'}{J \omega_0} \end{aligned} \quad (F.13)$$

$$\alpha'' + \frac{a}{l} \theta'' \sin \alpha \sin \theta + \frac{a}{l} \theta'^2 \sin \alpha \cos \theta + \sin \alpha = -\frac{c}{m \omega_0} \alpha' \quad (F.14)$$

$$M_{motor} = \frac{K_T V}{R} - \frac{K_E K_T}{R} \omega_0 \theta' \quad (F.15)$$

Inserindo os termos adimensionais p e γ da mesma forma que foi feito no modelo pendular com biela-manivela da seção 3.1, e substituindo θ' por ω temos as equações em sua forma:

$$\begin{aligned} \theta'' + \frac{m a^2 \theta'' \sin^2 \theta}{J} + \frac{m a^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta}{J} + \frac{m a l \alpha'' \sin \alpha}{J} \\ + \frac{m a l \alpha'^2 \cos \alpha \sin \theta}{J} + \frac{m g a \sin \theta}{J \omega_0^2} = \frac{M_{motor}}{J \omega_0^2} - \frac{c_m \omega}{J \omega_0} \end{aligned} \quad (F.16)$$

$$\alpha'' + \frac{a}{l} \theta'' \sin \alpha \sin \theta + p \sin \alpha \cos \theta + \sin \alpha = -\gamma \alpha' \quad (F.17)$$

Apêndice G

Os diagramas de bifurcação utilizados para obter os “Espaços de parâmetros” com diferentes tipos de movimento do pêndulo seguem representados neste apêndice. O tempo adimensional transcorrido foi de 400 vezes o período de excitação. Ainda que em alguns gráficos esteja ainda presente o comportamento transiente, já se pode em geral prever os tipos de movimento possíveis. Posteriormente o tipo de movimento de cada região foi confirmado através dos mapas de fase, seções de Poincaré e histórico do ângulo no tempo.

Nos diagramas representados abcissa corresponde à grandeza p e a coordenada ao ângulo α . As 15 últimas seções de Poincaré foram utilizadas na construção desses diagramas.

G.1 Diagramas de bifurcações com $\epsilon = 0$.

$\omega = 0,5$

$\omega = 0,62$

$\omega = 0,75$

$\omega = 0,87$

$\omega = 1,0$

$\omega = 1,12$

$$\omega = 1,25$$

$$\omega = 1,37$$

$$\omega = 1,50$$

$$\omega = 1,62$$

$$\omega = 1,75$$

$$\omega = 1,87$$

$$\omega = 2,0$$

$$\omega = 2,12$$

$$\omega = 2,25$$

$$\omega = 2,37$$

$$\omega = 2,5$$

$$\omega = 2,62$$

$\omega = 2,75$ $\omega = 2,87$ $\omega = 3,0$ $\omega = 3,12$ $\omega = 3,25$ $\omega = 3,37$ $\omega = 3,5$

G.2 Diagramas de bifurcações com $\epsilon = 0,4$.

$\omega = 0,5$ $\omega = 0,62$ $\omega = 0,75$

$\omega = 0,87$ $\omega = 1,0$ $\omega = 1,12$ $\omega = 1,25$ $\omega = 1,37$ $\omega = 1,50$ $\omega = 1,62$ $\omega = 1,75$ $\omega = 1,87$ $\omega = 2,0$ $\omega = 2,12$ $\omega = 2,25$

$$\omega = 2,37$$

$$\omega = 2,5$$

$$\omega = 2,62$$

$$\omega = 2,75$$

$$\omega = 2,87$$

$$\omega = 3,0$$

$$\omega = 3,12$$

$$\omega = 3,25$$

$$\omega = 3,37$$

$$\omega = 3,5$$

G.3 Diagramas de bifurcações com $\epsilon = 0,9$.

$\omega = 0,5$

$\omega = 0,62$

$\omega = 0,75$

$\omega = 0,87$

$\omega = 1,0$

$\omega = 1,12$

$\omega = 1,25$

$\omega = 1,37$

$\omega = 1,50$

$\omega = 1,62$

$\omega = 1,75$

$\omega = 1,87$

$$\omega = 2,0$$

$$\omega = 2,12$$

$$\omega = 2,25$$

$$\omega = 2,37$$

$$\omega = 2,5$$

$$\omega = 2,62$$

$$\omega = 2,75$$

$$\omega = 2,87$$

$$\omega = 3,0$$

$$\omega = 3,12$$

$$\omega = 3,25$$

$$\omega = 3,37$$

$$\omega = 3,5$$

Anexo A

Tabela de especificações de um motor elétrico CC de potência nominal de 250 W retirado do catálogo do fabricante Maxon®, onde foi utilizado o “part number” número 353297.

RE 65 Ø65 mm, Graphite Brushes, 250 Watt

M 1:4

maxon DC motor

[illegible]