Augusto Hirao Shigueoka

Otimização de filtros modais espaciais usando
redes de sensores aplicados ao controle de
vibrações de estruturas do tipo viga e placa

São Carlos

2015

Augusto Hirao Shigueoka

Otimização de filtros modais espaciais usando redes de
sensores aplicados ao controle de vibrações de
estruturas do tipo viga e placa

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências. Área de concentração: Dinâmica das Máquinas e Sistemas.

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Mecânica

Orientador: Marcelo Areias Trindade

São Carlos

2015

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

S555o Shigueoka, Augusto Hirao
Otimização de filtros modais espaciais usando redes de sensores aplicados ao controle de vibrações de estruturas do tipo viga e placa / Augusto Hirao Shigueoka ; orientador Marcelo Areias Trindade. -- São Carlos, 2015.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica e Área de concentração Dinâmica das Máquinas e Sistemas). -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2015.

1. Filtro modal. 2. Otimização. 3. Controle de vibrações. 4. Dinâmica estrutural. 5. Parâmetro distribuído. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **AUGUSTO HIRAO SHIGUEOKA.**

Título da dissertação: "Otimização de filtros modais espaciais usando redes de sensores aplicados ao controle de vibrações de estruturas do tipo viga e placa".

Data da defesa: 08/07/2015

Comissão Julgadora:

Prof. Associado **Marcelo Areias Trindade**
(Orientador)
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Alberto Luiz Serpa**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Prof. Dr. **Domingos Alves Rade**
(Instituto Tecnológico de Aeronáutica/ITA)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica:
Prof. Associado **Gherhardt Ribatski**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Paulo César Lima Segantine**

Resultado:

APROVADO

Aprovado

Aprovado

Este trabalho é dedicado a você, que o está lendo.

Agradecimentos

Os agradecimentos são direcionados a todos os que, direta ou indiretamente, contribuíram com o desenvolvimento deste trabalho.

O início deste mestrado foi consideravelmente desafiador. Já não me lembrava tão bem de boa parte do conhecimento que tinha adquirido durante a graduação. O conhecimento que ainda tinha guardado na época consistia basicamente de noções e conceitos. Agradeço ao Prof. Marcelo A. Trindade pela paciência em explicar como as ferramentas teóricas se unem para formar algo que tenha propósito. Uma pessoa pode pensar em um filtro modal como simplesmente um conjunto de somas e multiplicações por escalar ou, vendo mais longe, como uma oportunidade de aplicar técnicas de Cálculo e Álgebra Linear para tentar extrair o máximo possível de informação dos sensores espalhados em uma estrutura. Também lhe agradeço por tolerar a minha insistência em sempre tentar entender os fundamentos antes de partir para os conceitos mais avançados, muitas vezes até atrasando o andamento do trabalho.

Apesar de ter sido difícil desenvolver este trabalho, avaliá-lo também não é tarefa simples. Agradeço à comissão julgadora pelo tempo e esforço dedicados.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) por conceder a bolsa de pesquisa de meu mestrado e por ser um dos grandes suportes da pesquisa no Brasil.

Agradeço ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia – Estruturas Inteligentes em Engenharia (INCT-EIE) por investir na formação dos pesquisadores na área de estruturas inteligentes financiando a participação em conferências e promovendo a 1ª Escola de Engenharia de Estruturas Inteligentes.

Por mais que o mundo viva na era da Internet, os serviços da biblioteca são indispensáveis. Agradeço aos funcionários da biblioteca por cuidarem do nosso acesso ao conhecimento.

Fazer pesquisa seria muito mais difícil sem um ambiente favorável. Agradeço à nossa secretária Cristina, por sempre zelar pelo laboratório, e ao técnico Leandro por resolver os problemas com os equipamentos. Este mestrado foi essencialmente teórico, mas também agradeço aos técnicos Diego, Sérgio e Xina pela ajuda em alguns problemas corriqueiros.

Agradeço às secretárias da pós-graduação, Ana Paula e Iara (as meninas da pós), pelo suporte e pela paciência ao longo do mestrado.

O Prof. Trindade por vezes diz que sempre é bom estar presente no laboratório e

interagir com os outros pesquisadores. Sempre concordei, mas com o tempo passei a dar mais importância ao que me disse. Pela ajuda e pela companhia, agradeço aos amigos do Laboratório de Dinâmica da USP.

Agradeço aos meus pais, Olivio e Rosa, e à minha irmã Karina por todo o apoio que recebi. A família é, como diz minha mãe, o nosso *pit-stop*. Talvez eu nunca seja capaz de retribuir de forma adequada todo o amor e carinho que recebo. Mas vou me esforçar.

Novamente, agradeço a todos os que me ajudaram nos últimos anos. Nenhum ser humano é capaz de fazer tudo e com todos os detalhes, todos precisam de ajuda em algo. Além disso, uma vida plena não só depende do trabalho mas também de diversos fatores que interagem de forma complexa, como o descanso, a família, os amigos, a diversão, a frustração e as lições aprendidas com os erros, para nomear só alguns. Não é uma função cujo ótimo pode ser determinado por cálculos, mas apenas por conselhos e pela experiência de vida.

*“If you can’t do great things, do small things in a great way.
(Napoleon Hill)*

Resumo

SHIGUEOKA, A. H. *Otimização de filtros modais espaciais usando redes de sensores aplicados ao controle de vibrações de estruturas do tipo viga e placa*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

Ao empregar a teoria de controle para a dinâmica de uma estrutura, é possível projetar um observador potencialmente complexo que a partir da leitura de apenas um sensor estime o estado do sistema e determine os modos de vibração presentes. Este trabalho, no entanto, estuda o uso de filtros modais em controle de vibrações, com a motivação de que essa estratégia dependa de menos componentes eletrônicos. O objetivo é encontrar um filtro modal que possua alto desempenho em malha fechada mesmo com um número reduzido de sensores. Primeiramente foi desenvolvido o modelo dinâmico do sistema em malha aberta, com posterior otimização do filtro modal por meio do método do ponto interior. Depois, foi desenvolvido o modelo dinâmico do sistema em malha fechada. A seguir, um algoritmo genético otimizou o sistema de controle de vibrações seguindo duas metodologias. A primeira considera apenas as posições dos sensores como variáveis de otimização, enquanto a segunda leva em consideração não só as posições dos sensores como também os ganhos do filtro modal e o ganho de retroalimentação de velocidade. Os resultados do estudo do sistema em malha aberta mostram que se trata de um problema de otimização não-convexo, mas todas as tentativas levaram a crer que o mínimo global tenha sido encontrado para a função objetivo proposta, baseada no desvio quadrático da função de resposta em frequência do filtro modal com relação a uma referência pré-estabelecida. Os resultados do estudo do sistema em malha fechada mostram que considerar as posições e os ganhos como variáveis de otimização levam a um filtro modal mais conveniente do que o que é obtido levando-se em consideração apenas as posições. Finalmente, a partir da interpretação dos resultados, conclui-se que mesmo com um filtro modal composto por 5 sensores é possível ainda desenvolver um sistema de controle de vibrações que seja de fase mínima. Apesar de existir *spillover* de observação do ponto de vista de um filtro modal, nota-se que todos os modos estão em fase, o que acaba por ser até benéfico para o sistema de controle de vibrações.

Palavras-chaves: filtro modal. otimização. controle de vibrações. dinâmica estrutural. parâmetro distribuído.

Abstract

SHIGUEOKA, A. H. *Optimization of spatial modal filters composed of sensor networks applied to the structural vibration control of a cantilever beam and a clamped plate*. Master's thesis – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

The control systems theory may be applied to structural dynamics in order to design a potentially complex observer which is able to estimate the system's state from the readings of a sole sensor. This work, though, focused on the application of modal filters in vibration control based on the premise that this strategy will require a simpler hardware. The main target consists of finding a modal filter which can deliver high performance in vibration control despite being composed of a reduced number of sensors. In the first step, a dynamic model of a modal filter on a cantilever beam was developed, followed by an optimization carried on with the interior-point method. Then, the dynamic model of the closed-loop cantilever beam was developed afterwards. However, this time a genetic algorithm was used as the optimization method instead, with two methodologies being employed. While the first one considered only the placement of the sensors, the second one also takes into consideration the modal filter gains and the negative velocity feedback gain. The results yielded by the open-loop cantilever beam analysis showed that it is a non-convex optimization problem. However, all of the attempts support the belief that the global minimum has been found in the sense of the proposed objective function, which was based on the quadratic error between the frequency response function (FRF) of the modal filter and an idealized FRF used as reference. The results yielded by the closed-loop system optimization showed that it is more convenient to consider as optimization variables not only the placement of the sensors, but also their gains and the negative velocity feedback gain. Finally, after pondering over the obtained results, it has been concluded that the observation spillover resulting from a modal filter composed of a reduced number of sensors may be turned to the vibration control system's favour by means of optimization. The minimal-phase modal filter composed of 5 sensors found in this work stands out as the most notable example in this work, being able to guarantee stability for the first 12 modes since all of them are in-phase.

Key-words: modal filter. optimization. vibration control. structural dynamics. distributed parameter.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Visão geral da metodologia empregada para investigar a otimização de filtros modais espaciais.	34
Figura 2 – Ilustração do método do gradiente	42
Figura 3 – Superfície de otimização com vários mínimos locais	42
Figura 4 – Descrição de um problema de otimização por algoritmo genético	43
Figura 5 – Nomenclatura	43
Figura 6 – Esquema da viga Euler-Bernoulli	55
Figura 7 – Formas modais normalizadas por massa para os 12 primeiros modos. .	61
Figura 8 – Parte numericamente estável de $\Phi_{12}(\xi)$	63
Figura 9 – Parte numericamente instável de $\Phi_{12}(\xi)$	63
Figura 10 – Parcelas usadas para aproximar a parte instável de Φ	64
Figura 11 – Comparação entre a parte numericamente instável de $\Phi_{12}(\xi)$ e a sua aproximação	64
Figura 12 – Relação entre os coeficientes β_j e a curva β	66
Figura 13 – Diferença entre a aproximação proposta e a solução exata para o 6º modo	70
Figura 14 – Diferença entre a aproximação proposta e a solução exata para o 7º modo	70
Figura 15 – Esquema do filtro modal espacial discreto	72
Figura 16 – Viga biapoiada no 2º modo de vibração	78
Figura 17 – Leituras igualmente espaçadas da viga biapoiada	78
Figura 18 – Exemplo ilustrando a diferença, em hachurado, entre a FRF de referência e a obtida.	83
Figura 19 – Ilustração de como as dez posições são tomadas quatro a quatro, resultando em 210 combinações.	95
Figura 20 – FRF do filtro modal com sensores igualmente espaçados e com ganhos otimizados pelo método LSQ.	97
Figura 21 – FRF do filtro modal otimizado pela aplicação única do método do ponto interior.	97
Figura 22 – FRF do filtro modal otimizado pela aplicação do método do ponto interior para várias condições iniciais.	97
Figura 23 – Valores da função objetivo para cada conjunto de parâmetros iniciais. .	98
Figura 24 – Valores da função objetivo para cada posicionamento otimizado. . . .	99
Figura 25 – Valores da função objetivo para cada conjunto otimizado de ganhos α . .	100
Figura 26 – Sistema em espaço de estados com retroalimentação de velocidade . . .	103
Figura 27 – Considerando $B_u = B_p$, $D_u = D_p$ e $r(t) = 0$	103
Figura 28 – Considerando apenas a retroalimentação de velocidade	103
Figura 29 – Somando perturbação e esforço de controle, $f(t) = u(t) + p(t)$	103

Figura 30 – Formulação da função transferência	104
Figura 31 – Comparação entre a resposta do filtro modal sem correção de ganho definido pela otimização (opt), o filtro LSQ (lsq), a FRF do par co-localizado (col) e a FRF de referência (ref).	106
Figura 32 – Comparação entre a resposta do filtro modal com correção de ganho definido pela otimização (opt), o filtro LSQ (lsq), a FRF do par co-localizado (col) e a FRF de referência (ref).	106
Figura 33 – Esquema do sistema de controle de vibrações usando filtro modal com as variáveis de otimização destacadas.	107
Figura 34 – Exemplo de lugar das raízes com o diagrama de Bode do filtro modal para o caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4	108
Figura 35 – Caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4 com $G = 0.4239$	109
Figura 36 – Caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4 com $G = 0.8500$	109
Figura 37 – Caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4 com $G = 1.0000$	109
Figura 38 – Par co-localizado na ponta da viga com $G = 0.4239$	109
Figura 39 – Detalhe do lugar das raízes com os 3 primeiros modos.	111
Figura 40 – 2º modo criticamente amortecido.	111
Figura 41 – 5º modo marginalmente estável.	111
Figura 42 – 5º modo com amortecimento $\zeta = 0.25\%$	111
Figura 43 – Fluxograma do algoritmo utilizado para calcular o ganho máximo permitido.	112
Figura 44 – Comparação entre os picos de ressonância da FRF em malha aberta e em malha fechada para o caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4 com a calculado por LSQ.	113
Figura 45 – Sinal de saída do filtro modal em malha fechada com o amortecimento de cada modo afetado pela lei de controle.	114
Figura 46 – Roteiro de estudo dos resultados para o caso P00	120
Figura 47 – Roteiro de estudo dos resultados para o caso PAG	122
Figura 48 – Sensores muito próximos um ao outro	123
Figura 49 – Um sensor muito próximo à base	123
Figura 50 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-FUU-002, com e sem remoção de sensor	124
Figura 51 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-C90-FFF, com e sem remoção de sensor	125
Figura 52 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4	128
Figura 53 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4	129
Figura 54 – Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4	131

Figura 55 – Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4	131
Figura 56 – Curvas de ganho, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4	131
Figura 57 – Valores da função objetivo, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4	131
Figura 58 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, $\max u(t) \leq 0.5$, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4	133
Figura 59 – Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4	134
Figura 60 – Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4	134
Figura 61 – Curvas de esforço máximo, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4	134
Figura 62 – Valores da função objetivo, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4	134
Figura 63 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4	136
Figura 64 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, $\max u(t) \leq 0.5$, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4	137
Figura 65 – Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4	138
Figura 66 – Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4	138
Figura 67 – Curvas de ganho, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4	138
Figura 68 – Curvas de esforço máximo, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4	138
Figura 69 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-3	140
Figura 70 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, $\max u(t) \leq 0.5$, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-3	141
Figura 71 – Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-3	142
Figura 72 – Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-3	142
Figura 73 – Curvas de ganho, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-3	142
Figura 74 – Curvas de esforço máximo, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-3	142
Figura 75 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-FUU-FFF-003-4	144
Figura 76 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, $\max u(t) \leq 0.5$, caso GAS-PAG-FUU-FFF-003-4	145
Figura 77 – Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-003-4	146
Figura 78 – Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-003-4	146
Figura 79 – Curvas de ganho, caso GAS-PAG-FUU-FFF-003-4	146
Figura 80 – Curvas de esforço máximo, caso GAS-PAG-FUU-FFF-003-4	146

Figura 81 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-FUU-FFF-004-4	148
Figura 82 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, $\max u(t) \leq 0.5$, caso GAS-PAG-FUU-FFF-004-4	149
Figura 83 – Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-004-4	150
Figura 84 – Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-004-4	150
Figura 85 – Curvas de ganho, caso GAS-PAG-FUU-FFF-004-4	150
Figura 86 – Curvas de esforço máximo, caso GAS-PAG-FUU-FFF-004-4	150
Figura 87 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-FUU-FFF-007-4	152
Figura 88 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, $\max u(t) \leq 0.5$, caso GAS-PAG-FUU-FFF-007-4	153
Figura 89 – Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-007-4	154
Figura 90 – Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-007-4	154
Figura 91 – Curvas de ganho, caso GAS-PAG-FUU-FFF-007-4	154
Figura 92 – Curvas de esforço máximo, caso GAS-PAG-FUU-FFF-007-4	154
Figura 93 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3	159
Figura 94 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, $\max u(t) \leq 0.5$, caso GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3	160
Figura 95 – Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3	161
Figura 96 – Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3	161
Figura 97 – Curvas de ganho, caso GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3	161
Figura 98 – Curvas de esforço máximo, caso GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3	161
Figura 99 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-C90-FFF-FFF-5	164
Figura 100 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, $\max u(t) \leq 0.5$, caso GAS-PAG-C90-FFF-FFF-5	165
Figura 101 – Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-PAG-C90-FFF-FFF-5	166
Figura 102 – Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-PAG-C90-FFF-FFF-5	166
Figura 103 – Curvas de ganho, caso GAS-PAG-C90-FFF-FFF-5	166
Figura 104 – Curvas de esforço máximo, caso GAS-PAG-C90-FFF-FFF-5	166
Figura 105 – FRF do filtro modal, caso GAS-P00-C90-FFF-FFF-5	168
Figura 106 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, $\max u(t) \leq 0.5$, caso GAS-P00-C90-FFF-FFF-5	169

Figura 107–Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-P00-C90-FFF-FFF-5	170
Figura 108–Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-P00-C90-FFF-FFF-5	170
Figura 109–Curvas de ganho, caso GAS-P00-C90-FFF-FFF-5	170
Figura 110–Curvas de esforço máximo, caso GAS-P00-C90-FFF-FFF-5	170
Figura 111–Dimensões utilizadas para a placa neste estudo.	171
Figura 112–Detalhe de um dos sensores que compõem o filtro modal.	177
Figura 113–Procedimento usado para comparar o filtro modal otimizado com o filtro modal em que os ganhos são recalculados com o LSQ.	182
Figura 114–Posicionamento final dos sensores após otimização usando a grade regularmente espaçada como estimativa inicial.	182
Figura 115–Posicionamento final dos sensores após otimização usando pontos aleatórios como estimativa inicial.	182
Figura 116–FRF do filtro modal após otimização usando a grade regularmente espaçada como estimativa inicial e comparação com os ganhos recalculados por LSQ.	183
Figura 117–FRF do filtro modal após otimização usando pontos aleatórios como estimativa inicial e comparação com o ganhos recalculados por LSQ. . .	183

Lista de tabelas

Tabela 1 – Redundância de sensores	123
Tabela 2 – Redundância removida	123
Tabela 3 – Sensor próximo à base	123
Tabela 4 – Sensor próximo à base removido	123
Tabela 5 – Resumo do caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4	126
Tabela 6 – Resumo do caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4	135
Tabela 7 – Resumo do caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-3	139
Tabela 8 – Resumo do caso GAS-PAG-FUU-FFF-003-4	143
Tabela 9 – Resumo do caso GAS-PAG-FUU-FFF-004-4	147
Tabela 10 – Resumo do caso GAS-PAG-FUU-FFF-007-4	151
Tabela 11 – Resumo do caso GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3	157
Tabela 12 – Resumo do caso GAS-PAG-C90-FFF-FFF-5	162
Tabela 13 – Resumo do caso GAS-P00-C90-FFF-FFF-5	167
Tabela 14 – Exemplo de conversão entre os índices s , j e k para $m=3$ e $n=4$	174
Tabela 15 – Comparação entre as frequências naturais do modelo programado e as dos trabalhos originais para uma placa quadrada.	180
Tabela 16 – Comparação entre as frequências naturais do modelo programado e as do trabalho original de Ödman para placas retangulares com razão largura/altura igual a 0.5	180
Tabela 17 – Comparação entre as frequências naturais do modelo programado e as do trabalho original de Ödman para placas retangulares com razão largura/altura igual a 0.667	181

Lista de abreviaturas e siglas

AG	Algoritmo Genético
EESC	Escola de Engenharia de São Carlos
FRF	Função de Resposta em Frequência
IMSC	Independent Modal Space Control
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
LQR	Linear-Quadratic Regulator
MAC	Modal Assurance Criterion
MISC	Modified Independent Modal Space Control
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados
PPF	Positive Position Feedback
SHM	Structural Health Monitoring
SQP	Sequential Quadratic Programming
SISO	Single Input Single Output
USP	Universidade de São Paulo

Lista de símbolos

Γ	Matriz de ponderação do atuador modal
ΔY	Diferença, em dB, entre $ Y(r) $, a magnitude da FRF de mobilidade de um filtro modal, e $ Y_{col}(r) $, a magnitude da FRF de mobilidade de um par co-localizado na extremidade da viga, em $r = r_1$, a primeira frequência adimensional de ressonância [dB]
Λ	Matriz com os fatores de amortecimento da estrutura no espaço modal
Ω^2	Matriz diagonal com o quadrado das frequências naturais não amortecidas.
$\Phi_{a,j}(\xi)$	Aproximação proposta para a autofunção do j -ésimo modo de vibração
$\Phi_j(\xi)$	Autofunção do j -ésimo modo de vibração
Ξ	Vetor de posições dos sensores que compõem um filtro modal
α_j	Ganho do j -ésimo sensor do filtro modal [N s/m]
α'_j	Ganho do j -ésimo sensor do filtro modal com o ganho de retroalimentação negativa de velocidade incluído [N s/m]
α_{kj}	Ganho do k -ésimo sensor do j -ésimo filtro modal [N s/m]
β_j	Autovalor associado à autofunção do j -ésimo modo
$\eta(\xi, \tau)$	Deflexão da viga em ξ no instante τ .
γ_{kj}	Ganho do k -ésimo atuador do j -ésimo atuador modal
$\kappa(A)$	Número de condicionamento da matriz A
ω	Frequência angular [rad/s]
ω_j	Frequência natural amortecida do j -ésimo modo [rad/s]
$\nu(\xi, \tau)$	Velocidade adimensional no instante τ de um ponto em ξ ao longo da viga
ρ	Densidade
τ	Tempo adimensional, $\tau = t\omega_1$
ξ	Posição adimensional ao longo da viga, $\xi = x/L$

ζ_j	Fator de amortecimento do j -ésimo modo
A	Área da seção transversal [m ²]
$\mathbf{A}$	Matriz de estado
$\mathbf{A}_{LSQ}$	Matriz de produtos internos usada em mínimos quadrados (LSQ)
$\mathbf{B}$	Matriz de entradas
$\mathbf{B}_p$	Matriz de entradas da perturbação
$\mathbf{B}_u$	Matriz de entradas de controle
$\mathbf{C}$	Matriz de saídas
$\mathbf{C}_{mf}$	Matriz de saídas do filtro modal [m]
$\mathbf{C}_\Phi$	Matriz de saídas dos sensores, expresso no espaço modal
$\mathbf{D}$	Matriz de transmissão
E	Módulo de elasticidade [N/m ²]
$E(\mathbf{\Xi}, \mathbf{a}, r)$	Desvio entre a FRF do filtro modal definido por $\mathbf{\Xi}$, $\mathbf{a}$ e a FRF de referência $G(r)$
F_0	Força aplicada à base da viga engastada [N]
F_L	Força aplicada à extremidade da viga engastada [N]
G	Ganho da retroalimentação negativa de velocidade
G_b	Ganho máximo permitido da retroalimentação negativa de velocidade
G_{lb}	Limite inferior para o ganho máximo permitido da retroalimentação negativa de velocidade
G_{ub}	Limite superior para o ganho máximo permitido da retroalimentação negativa de velocidade
$G(r)$	FRF de referência do filtro modal
$G_k(r)$	Parcela correspondente ao k -ésimo modo usada para formar a FRF de referência do filtro modal
I	Segundo momento de área [m ⁴]
K	Ponderação do número de condicionamento da matriz

L	Comprimento da viga [m]
M_0	Momento aplicado à base da viga engastada [N m]
M_L	Momento aplicado à extremidade livre da viga engastada [N m]
$P_j(r)$	Denominador com os polos correspondentes ao j -ésimo modo
$\mathbf{Q}$	Vetor com os pesos Q_j como elementos
Q_j	Ponderação, na função objetivo, da amplitude de vibração do j -ésimo modo
$Q(\mathbf{\Xi}, \mathbf{a})$	Desvio quadrático entre a FRF do filtro modal definido por $\mathbf{\Xi}$ e $\mathbf{a}$ e a FRF de referência
$\mathbf{R}$	Vetor com os pesos R_j como elementos
R_j	Ponderação, na função objetivo, da amplitude do esforço de controle com sistema durante o j -ésimo modo
$\mathbf{S}$	Matriz com as funções de forma senoidais da viga biapoada
$V_j(r)$	Denominador com os polos correspondentes ao j -ésimo modo e numerador com velocidade
$\mathbf{W}$	Vetor com os pesos W_j como elementos
W_j	Coefficiente para o j -ésimo modo da FRF de referência
$W_t/P(r)$	FRF de receptância da viga engastada perturbada e lida na ponta
$Y_c(r)$	Resposta em frequência do filtro modal aplicado a uma viga excitada na ponta com retroalimentação negativa de velocidade
$Y_j(r)$	FRF com o sensor em ξ_j e o atuador em $\xi = 1$
$\mathbf{Y}(\mathbf{\Xi}, \mathbf{a}, \mathbf{r})$	Função de resposta em frequência de um filtro modal com os sensores posicionados em $\mathbf{\Xi}$ e respectivos ganhos $\mathbf{a}$
$\mathbf{q}(\tau)$	Componentes do campo de deformações da estrutura no espaço modal
$\mathbf{a}$	Vetor de ganhos dos sensores que compõem um filtro modal [N s/m]
$\mathbf{b}_{LSQ}$	Projeção no espaço coluna do vetor a ser aproximado por mínimos quadrados (LSQ)
r	Frequência adimensional, $r = \omega/\omega_1$

r_j	Frequência natural amortecida adimensional do j -ésimo modo, $r_j = \omega_j/\omega_1$
t	Tempo [s]
$u(t)$	Resposta no tempo do esforço de controle [N]
$w(x, t)$	Deflexão da viga em x no instante t
x	Posição ao longo da viga [m]
$y_c(t)$	Resposta no tempo do filtro modal aplicado a uma viga excitada na ponta com retroalimentação negativa de velocidade
$y_j(r)$	Resposta no tempo do sensor em ξ_j e o atuador em $\xi = 1$
$y(\Xi, \mathbf{a}, t)$	Resposta no tempo de um filtro modal no instante t com os sensores posicionados em Ξ e respectivos ganhos $\mathbf{a}$
$\mathbf{z}$	Vetor de estados

Sumário

1	INTRODUÇÃO	33
1.1	Dinâmica estrutural	35
1.1.1	Vigas	35
1.1.2	Placas	36
1.1.3	Filtros modais espaciais	37
1.2	Sistemas de controle	38
1.2.1	Técnicas de controle	39
1.3	Otimização	39
1.3.1	Métodos baseados em gradiente	40
1.3.2	Algoritmo Genético	41
1.4	Justificativa	43
1.5	Objetivos	44
1.6	Contribuições esperadas	44
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	45
2.1	Controle modal e filtros modais espaciais	45
2.2	Otimização de filtros modais	49
3	MODELO DINÂMICO DA VIGA	55
3.1	Equações diferenciais do sistema	55
3.2	Propagação dos erros de discretização numérica nos modos de alta ordem	61
3.2.1	Primeiro limite	65
3.2.2	Segundo limite	67
3.2.3	Aproximação para modos de alta ordem	68
4	FILTROS MODAIS ESPACIAIS	71
4.1	Resposta no tempo do filtro modal espacial discreto	71
4.1.1	Formulação para sensores de posição	71
4.1.2	Formulação baseada em velocidade	74
4.1.3	Formulação baseada em aceleração	74
4.1.4	FRF do filtro modal espacial discreto	75
4.2	Projeto do filtro modal	77
4.2.1	Cálculo baseado na forma modal	78
4.2.2	Cálculo baseado no ajuste de FRFs	80
4.3	Caso particular com posicionamento constante	85

4.4	Condicionamento da matriz de mínimos quadrados	87
4.4.1	Casos em que A_{MMQ} não é inversível	88
4.4.2	Propagação de erros no projeto do filtro modal	89
5	ANÁLISE DA VIGA EM MALHA ABERTA	91
5.1	Função objetivo	91
5.2	Método do ponto interior	91
5.3	Estimativa da Hessiana por BFGS	93
5.4	Otimização	94
5.5	Resultados	95
6	ANÁLISE DA VIGA EM MALHA FECHADA	101
6.1	Sistema em malha fechada	101
6.2	Planejamento da otimização	106
6.3	Função objetivo	112
6.3.1	FUU: foco nos primeiros modos	116
6.3.2	CXX: sinal de fase mínima sem co-localização	117
6.4	Organização dos estudos de caso	117
6.5	Resultados	120
6.5.1	Caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4	126
6.5.2	Caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4	135
6.5.3	Caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-3	139
6.5.4	Caso GAS-PAG-FUU-FFF-003-4	143
6.5.5	Caso GAS-PAG-FUU-FFF-004-4	147
6.5.6	Caso GAS-PAG-FUU-FFF-007-4	151
6.5.7	Comentário com relação ao desempenho dos filtros modais	155
6.5.8	GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3	157
6.5.9	GAS-PAG-C90-FFF-FFF-5	162
6.5.10	GAS-P00-C90-FFF-FFF-5	167
7	ANÁLISE DA PLACA EM MALHA ABERTA	171
7.1	Modelo dinâmico da placa	171
7.2	FRF do filtro modal	177
7.3	Comparação do modelo com os valores tabelados	179
7.4	Otimização	180
7.5	Resultados	181
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	185
8.1	Conclusões	185
8.2	Trabalhos futuros	187

REFERÊNCIAS	189
-----------------------	-----

1 Introdução

Estruturas flexíveis submetidas a cargas variantes no tempo podem apresentar problemas relacionados a vibrações. Estruturas espaciais, *flutter* em aeronaves, vibrações nas lâminas do rotor de um helicóptero, redução de ruído causado por vibrações estruturais são alguns dos problemas mais comuns. Os engenheiros sempre procuram resolver esses problemas durante a etapa de projeto, na maioria das vezes aumentando a rigidez do sistema ou o amortecimento do sistema. Existe a possibilidade, no entanto, de que os problemas permaneçam, seja por descuido do projetista ou seja por restrições de projeto, com o custo do material ou o peso máximo permitido para estrutura sendo as restrições mais comuns. Uma alternativa para corrigi-los é lançar mão de técnicas de controle para melhorar a resposta dinâmica da estrutura. Quatro técnicas de controle foram classificadas de acordo com o grau de interferência no sistema: ativo, passivo, semiativo e híbrido. Este trabalho irá se basear principalmente na técnica de controle ativo, que compreende o uso de sensores, atuadores e um sistema de controle devidamente projetado. Os sensores fornecem um sinal que descreve o estado do sistema a ser controlado para o controlador, que processa o sinal e comanda os atuadores para que o sistema assuma a configuração desejada.

Este estudo focou na análise de filtros modais espaciais empregados em sistemas de controle de vibrações. Um filtro modal espacial é um dispositivo que possui a capacidade de separar os modos de vibração presentes em uma estrutura com base em características espaciais, como o formato do sensor ou a combinação de sensores posicionados em locais distintos. Os filtros modais investigados pertencem à segunda categoria, em que os sinais de diversos sensores são combinados a fim de se obter um resultado final melhor do que seria obtido com apenas um sensor.

A [Figura 1](#) esquematiza, de forma bem resumida, as etapas realizadas para este trabalho. A fim de se investigar o comportamento do sistema em estudo, seja uma viga ou uma placa, deve-se ter em mãos o modelo discretizado por elementos finitos ou então, como realizado neste estudo, a solução analítica das equações diferenciais que definem o comportamento da estrutura. Depois, de posse do modelo dinâmico, procede-se ao projeto do sistema de controle com o objetivo final de atenuar as vibrações do sistema a níveis toleráveis.

Ainda que o resultado obtido satisfaça aos requisitos do projeto, existe uma questão a ser respondida: é possível melhorar? Existe a possibilidade de que o mesmo desempenho seja atingido lançando mão de menos recursos, que por consequência torna o projeto mais econômico. Através de ferramentas do Cálculo ou mesmo com a ajuda da intuição

Figura 1 – Visão geral da metodologia empregada para investigar a otimização de filtros modais espaciais.

é possível encontrar o melhor projeto possível para um sistema simples. No entanto, à medida que mais variáveis de otimização são incluídas e à medida que o sistema se torna mais complexo, técnicas mais sofisticadas devem ser utilizadas. Para esses casos, a área de Otimização possui vários métodos para se buscar o melhor projeto possível. Nem todos os métodos, no entanto, garantem que o mínimo global será encontrado. Como exemplo, podem-se citar os métodos não lineares de programação matemática, que podem convergir para diferentes mínimos locais se diferentes estimativas iniciais forem fornecidas. Alguns representantes desse grupo são os métodos de Powell, penalidade interior, Marquardt e *Sequential Quadratic Programming*. Os métodos chamados *métodos modernos* são usados para encontrar o mínimo global do problema através de aleatoriedade e heurísticas. Não é possível garantir teoricamente que o mínimo global seja atingido, mas costumam retornar resultados satisfatórios. Como exemplos, tem-se o Algoritmo Genético, o Recozimento Simulado e o Enxame de Partículas (RAO, 2009).

No caso em que os sensores forem pequenos o suficiente de forma a não alterarem a dinâmica da estrutura, é possível realizar uma otimização de forma analítica, como se fez neste estudo para uma viga e uma placa. Por outro lado, devido à facilidade de se integrar pastilhas piezoelétricas a estruturas delgadas, que costumam sofrer mais com a ressonância, os materiais piezoelétricos possuem uma aplicação muito interessante. Infelizmente, no caso de pastilhas piezoelétricas, o tratamento dado a sensores e atuadores pontuais não pode ser o mesmo. As pastilhas piezoelétricas cobrem uma área ao longo do qual atuam. Além disso, a sua incorporação à estrutura altera a dinâmica do sistema e insere pontos de descontinuidade na rigidez da estrutura, impossibilitando uma resolução analítica exata. Para o caso especial da otimização do controle modal utilizando pastilhas piezoelétricas o uso da discretização por elementos finitos é a solução mais prática. Por problemas com o escopo e o tempo da dissertação, não será abordado aqui o caso de uma estrutura geral modelada por elementos finitos com redes de pastilhas piezoelétricas funcionando como atuadores ou sensores.

A breve descrição deste trabalho expôs três principais áreas de conhecimento a serem exploradas: dinâmica estrutural, sistemas de controle, otimização. As seguintes seções descrevem brevemente os três tópicos para uma melhor compreensão de onde se situam no projeto.

1.1 Dinâmica estrutural

1.1.1 Vigas

As vigas são estruturas unidimensionais submetidas a esforços transversais. O comprimento é muito maior do que a largura e a altura da seção transversal, tipicamente dez vezes maior ou mais. O seu campo de deslocamentos é expresso em termos da

coordenada X fixada ao longo de seu comprimento e a coordenada Y ou Z na direção da deflexão. No caso de um problema de vibrações, a dinâmica da viga Euler-Bernoulli de seção homogênea e constante, utilizada neste estudo, pode ser representada por uma equação diferencial parcial hiperbólica de 4ª ordem da forma

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = f(x),$$

com as condições de contorno dependentes do problema em estudo. No caso de uma análise no domínio do tempo, também se deve incluir as condições iniciais. Neste trabalho, a análise da resposta ocorrerá no domínio da frequência, sendo desnecessário definir condições iniciais, uma vez que apenas há interesse na solução particular das equações diferenciais lineares. Diversos métodos (FARLOW, 1993) podem ser aplicados para se resolver esse problema, como:

- a) separação de variáveis;
- b) mudança de variáveis;
- c) transformações integrais (transformadas de seno, cosseno, Fourier ou Laplace);
- d) métodos variacionais;
- e) expansão por autofunções.

Devido à associação entre o campo de deformações da viga e a expansão em termos dos seus infinitos modos de vibrar, a última técnica pode ser aplicada de forma muito natural para problemas de dinâmica estrutural. Assim, essa será a técnica escolhida durante o desenvolvimento analítico da resposta em frequência de uma viga engastada-livre na metodologia. O Capítulo 3 define a equação governante, as condições de contorno adotadas e o processo de resolução.

1.1.2 Placas

Placas são estruturas em que as dimensões em duas direções, X e Y , são muito maiores, ao menos dez vezes maiores, do que a terceira dimensão, na direção Z . Podem ser submetidas a momentos nas direções em X e Y e esforços transversais na direção Z .

As equações constitutivas aplicadas problemas de controle vibrações em placas normalmente são classificadas de acordo com o perfil de distribuição da tensão de cisalhamento vertical ao longo de sua espessura. As principais são:

- Classical Plate Theory (CPT). Também chamada de Teoria de Kirchhoff-Love, desconsidera a tensão de cisalhamento vertical, considerando apenas a flexão. Equivale a modelar a placa como a união de vigas de Euler-Bernoulli em duas dimensões, acrescido do cisalhamento no plano XY .

- First-order Shear Deformation Theory (FSDT). Também conhecida como Teoria de Reissner-Mindlin, modela a deformação de cisalhamento como uma linha reta, de forma análoga à Teoria de Timoshenko para vigas. Infelizmente esse modelo implica tensão de cisalhamento constante ao longo de toda a espessura. Isso não é verdade, uma vez que nas superfícies das placas o cisalhamento deve ser nulo. Correções posteriores devem ser aplicadas para eliminar esse problema.
- High-order Shear Deformation Theory (HSDT). Teoria que modela a distribuição da deformação por cisalhamento ao longo da espessura por meio de um polinômio de ordem maior ou igual a 2. Para polinômios de ordem maior ou igual a 3 é possível representar a distribuição de tensão de cisalhamento de forma mais adequada, com valores nulos nas superfícies livres.

A otimização de filtros modais aplicados à placa retangular realizada neste estudo emprega uma função objetivo formulada com base na solução analítica do problema de vibrações em placas. Nesse caso, será adotado o modelo CPT para se determinar as FRFs que constituirão a função objetivo.

Assim como no caso da viga, um método de otimização buscará o filtro modal de melhor desempenho possível com base em uma função objetivo formulada a partir da resposta em frequência do modelo dinâmico formado pela equação governante e as condições de contorno. No entanto, a placa retangular com os quatro lados engastados não possui solução exata. Consequentemente, apenas uma solução aproximada pode ser encontrada, sendo que dentre os métodos disponíveis foi usado o de Young, como descrito em (LEISSA, 1969). O [Capítulo 7](#) contém o desenvolvimento do estudo sobre o filtro modal para placas em malha aberta.

1.1.3 Filtros modais espaciais

Um filtro modal é um conjunto de sensores posicionados sobre uma estrutura de forma que sua construção esteja espacialmente correlacionado com os modos de vibrar da estrutura. No caso de um sensor continuamente distribuído, como pastilhas piezoelétricas, seu formato irá interferir na observabilidade dos modos (LEO, 2007). Já no caso de sensores discretos, uma soma ponderada da saída de vários sensores fornecerá a saída do filtro modal. Neste trabalho será investigado o filtro modal espacial discreto, que é um dispositivo capaz de correlacionar a distribuição das deflexões da estrutura lidas em diversos pontos com os modos de vibração que estão nela presentes.

Em processamento de sinais, um filtro normalmente é construído através da alocação de polos e zeros de modo que se tenha ao final uma função transferência cuja resposta em frequência (FRF) tenha, ao menos idealmente, magnitude unitária com fase linear na banda passante e uma magnitude muito reduzida na região de corte. São bem flexíveis

no sentido de que com um suficiente número de polos e zeros é possível definir a banda passante com um pequeno sobressinal, e elevado *roll-off*. Filtros modais, por outro lado, são construídos com base na combinação linear da saída de vários sensores. A saída do filtro modal pode, então, ser manipulada através da escolha dos ganhos de cada sensor que compõe o filtro modal. Como vantagem, os filtros modais teoricamente não introduzem defasagem no sinal. Como desvantagem, não são tão flexíveis quanto os filtros tradicionais, mas podem levar a construções mais simples, sem a necessidade de se instalar um sistema de aquisição de sinais. O [Capítulo 4](#) tratará de filtros modais com mais detalhes.

1.2 Sistemas de controle

Sistemas de controle consistem de subsistemas adicionados a um processo (ou planta) com o intuito de modificar o seu comportamento natural para um comportamento desejado. Aplicações de sistemas de controle envolvem situações em que não se deseja manipular diretamente as grandezas controladas, como o peso das peças, o amortecimento de uma estrutura ou a precisão de um mecanismo. Algumas aplicações enumeradas em ([NISE, 2000](#)) são:

- a) amplificação de potência;
- b) controle remoto;
- c) variáveis de entrada e de saída de natureza diferentes;
- d) compensação de perturbações.

Amplificação de potência está presente na manipulação de sistemas grandes, como telescópios, que são controlados a partir dos sinais de baixa potência fornecidos pelo painel de controle. Controle remoto faz-se necessário quando o usuário não pode ter contato direto com o sistema, como o controle de *drones*. A terceira aplicação é muito comum quando se deseja simplificar a interface entre o sistema e o usuário. Por exemplo, em um servomotor o usuário pode definir a velocidade ou a posição desejada. Caberá ao sistema de controle alimentar o motor com uma tensão adequada e o usuário não precisará calcular a tensão necessária em cada instante de tempo para atingir a posição e a velocidade desejadas do servomotor. Por último, a compensação de perturbações procura manter o sistema dentro do estado desejado e responde a estímulos externos que tentem movê-lo desse estado. Este estudo envolverá a redução de vibrações estruturais, com o objetivo de manter a estrutura o mais próximo possível do repouso. Logo, trata-se de uma aplicação da quarta categoria listada acima.

A estratégia empregada neste trabalho para o controle de vibrações será do tipo *Negative Velocity Feedback* (NVF) ou retroalimentação negativa de velocidade. A formulação do sistema de controle em malha fechada pode ser encontrada no [Capítulo 6](#).

1.2.1 Técnicas de controle

Dentro da área de vibrações estruturais, as técnicas de controle são classificadas segundo a natureza de sua interferência no sistema. Preumont estabelece três classificações (PREUMONT, 1999) e, mais tarde, uma quarta (PREUMONT; SETO, 2008):

- Passivo. Não se fornece energia ao sistema. Procura-se adicionar ao sistema algum dispositivo cujos parâmetros foram projetados para maximizar a extração de uma parcela da energia associada à vibração da estrutura.
- Semiativo. A energia fornecida ao sistema é muito pequena, pois é usada apenas para alterar algumas de suas propriedades físicas, como a elasticidade de uma mola ou a viscosidade de um fluido magneto-reológico.
- Ativo. O sistema de controle de vibrações consiste de sensores, controladores e atuadores que interferem diretamente na estrutura.
- Híbrido. Empregam-se técnicas de controle passivo e ativo na mesma estrutura, com cada técnica sendo ativada separadamente de acordo com a necessidade.

Na engenharia civil costuma-se evitar técnicas de controle ativo. As estruturas são naturalmente estáveis, pois o amortecimento do material leva as oscilações a decaírem com o tempo. O uso de sistemas de controle de vibrações pode ser necessário em estruturas esbeltas, mas ainda assim o controle ativo fica como um recurso final devido ao seu consumo mais elevado de energia e ao risco de o sistema em malha fechada poder desestabilizar algum modo de vibração que não foi incluído durante o projeto de controle. Por conta disso, os engenheiros, em particular os que trabalham com estruturas, preferem técnicas passivas ou semiativas (HOUSNER et al., 1997). Por outro lado, existem aplicações de controle ativo para projetos que se situam em extremos de flexibilidade e baixo amortecimento, como painéis de satélites e manipuladores flexíveis.

1.3 Otimização

Se for definida uma função que $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$, que depende de n diversas variáveis $x_j, j = 1, 2, \dots, n$, então o problema de otimização consiste de buscar os valores de $\mathbf{x} = \{x_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ que minimizarão o valor de $f(\mathbf{x})$. Neste problema, vários aspectos devem ser considerados, como limitação para variáveis inteiras, faixas de valores e condições impostas às variáveis de otimização na forma de equações e inequações. Ademais, hipóteses adicionais sobre a função objetivo podem ser empregadas para desenvolver técnicas mais simples ou eficientes, como por exemplo a hipótese de função linear que pode ser rapidamente otimizada através de programação linear. Assim, diversos métodos estão disponíveis, classificados em (RAO, 2009):

- programação matemática;
- processos estocásticos;
- métodos estatísticos;
- métodos modernos.

Nos casos em que não é possível encontrar uma solução analítica simples, que é o caso de pastilhas piezoelétricas, o modelo da estrutura usualmente é construído através de elementos finitos. Pela literatura constata-se que, apesar de a técnica de elementos finitos facilitar a modelagem de pastilhas piezoelétricas, ainda é complicado posicioná-las de forma arbitrária sobre, por exemplo, uma placa. O que se tem feito usualmente é pré-estabelecer uma grade de posições permissíveis para as pastilhas, resultando em um problema de otimização discreta. Por conta dessa característica discretizada, esses modelos por elementos finitos costumam estar associados à otimização do posicionamento de pastilhas piezoelétricas por meio de algum método heurístico. Alguns exemplos são o enxame de partículas (ZORIC et al., 2012) e o recozimento simulado (MOITA et al., 2006), mas o procedimento mais adotado foi o de usar um algoritmo genético (HAN; LEE, 1999), (PAGANI JR, 2009), (GODOY, 2012) e (AMBROSIO; RESTA; RIPAMONTI, 2012). Muitas vezes se opta por um algoritmo genético, um grupo de métodos que podem ser facilmente aplicados a problemas de otimização discreta.

Para explorar algumas abordagens alternativas, neste trabalho a otimização será realizada por meio de um método de programação matemática quando o problema de vibrações em vigas ou placas possuir uma solução analítica que possa ser empregada na formulação da função objetivo. Empregou-se o método do ponto interior, um método de programação não-linear situado dentro da classe de programação matemática. No caso do sistema em malha fechada com retroalimentação negativa de velocidade, logo se torna complicado estabelecer alguma relação entre o resultado que se deseja atingir e a formulação da função objetivo. Também é difícil imaginar se o problema pode ser adequadamente tratado com algum método de otimização baseado em gradiente, pois a resposta em frequência do sistema em malha fechada se torna muito mais complicada, como se pode notar na seção 6.1. Assim, foi escolhido o algoritmo genético como método de otimização no caso do sistema em malha fechada, sendo que ao final da otimização o resultado passou por uma otimização *Sequential Quadratic Programming* (SQP) ou Programação Quadrática Sequencial.

1.3.1 Métodos baseados em gradiente

Dentre os métodos de programação não-linear disponíveis, será adotado o método do ponto interior, que é um método baseado em gradiente. Os métodos baseados em

gradiente buscam descer ao longo da superfície de otimização usando o sentido contrário ao que aponta o vetor gradiente. Suponha que a função objetivo seja dada por $f(x_1, x_2)$, sendo x_1 e x_2 as variáveis de otimização. Cada corte da superfície de otimização $x_3 = f(x_1, x_2)$ com o plano horizontal dá origem a uma curva de nível, como na [Figura 2](#). O vetor gradiente de $f(a_1, b_1)$, $\nabla f(a_1, b_1)$, é perpendicular à curva de nível que passa pelo ponto (a_1, b_1) e aponta para a direção de crescimento de $f(x_1, x_2)$ em (a_1, b_1) . Dessa forma, seguir o vetor gradiente sempre apontará para a direção das curvas de nível de maior valor. Supondo que $f(x_1, x_2)$ seja derivável em (a_1, b_2) , então o oposto do gradiente $-\nabla f(a_1, b_1)$ pode ser usado para caminhar em direção às curvas de nível de menor valor. Repetindo-se o mesmo procedimento para (a_2, b_2) , (a_3, b_3) , ... eventualmente será atingido um ponto em que o gradiente é nulo, o que significa que um mínimo local foi atingido. Esse é método de Cauchy ([RAO, 2009](#)), um método de programação não linear irrestrita. O método do ponto interior é mais complexo, por ter que lidar com restrições. O método presente no *Optimization Toolbox* do MATLAB 2013a será descrito de forma geral na [seção 5.2](#). Os detalhes podem ser encontrados em ([MATHWORKS, 2013a](#)), ([MATHWORKS, 2013b](#)), ([BYRD; HRIBAR; NOCEDAL, 1999](#)), ([BYRD; GILBERT; NOCEDAL, 2000](#)) e ([WALTZ et al., 2006](#)).

Dependendo do método, pode ser necessário calcular o vetor gradiente de forma analítica. Em outros casos, uma estimativa do vetor gradiente é empregada, o que pode acrescentar custo computacional ou uma convergência mais lenta. Para este estudo, o método do ponto interior empregou a formulação analítica do vetor gradiente.

Como desvantagem, os métodos que se baseiam no vetor gradiente aplicados a uma superfície de otimização como a da [Figura 3](#) convergem para diferentes mínimos locais não globais, dependendo da estimativa inicial. Uma das formas de contornar esse problema é aplicar a otimização a partir de diversos pontos iniciais diferentes. Outra alternativa é optar por um método menos sensível a mínimos locais, como o enxame de partículas ou o algoritmo genético.

Já no caso da viga em malha fechada é complicado definir uma formulação analítica para a função objetivo e calcular o seu gradiente. A fim de superar essa dificuldade, lançou-se de uma otimização híbrida em que múltiplos mínimos locais são evitados com o algoritmo genético e posteriormente o método SQP (Sequential Quadratic Programming) refina o resultado. O SQP se trata de um método que estima o gradiente por meio de aproximações quadráticas locais para a função objetivo. Consequentemente, não é obrigatório fornecer a formulação analítica do gradiente.

1.3.2 Algoritmo Genético

Um algoritmo genético (AG) busca minimizar a configuração dos parâmetros de um sistema de acordo com um critério que determina quantitativamente o seu desempenho

Figura 2 – Ilustração do método do gradiente

Figura 3 – Superfície de otimização com vários mínimos locais

(REEVES; ROWE, 2003). Uma função $f : \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}$, denominada função objetivo, mapeia cada configuração $v \in \mathcal{V}$ a um número real $f(v)$, estabelecendo uma métrica a partir da qual o método classificará as melhores configurações. O objetivo final é encontrar $v \in \mathcal{V} | v = \arg \min f$, os valores de v que minimizam $f(v)$. O problema para encontrar máximos é análogo. Devido a essa característica de buscar extremos de uma função, AGs têm sido extensivamente usados em problemas de otimização, embora não estejam limitados a essa classe de problemas.

Durante a etapa de planejamento do algoritmo, identificam-se os parâmetros relevantes do sistema. Cada parâmetro equivale a um gene. A sequência de todos os genes constitui o cromossomo que define o sistema. Considere, por exemplo, o problema de otimização do posicionamento de uma pastilha piezoelétrica em uma placa, ilustrado na Figura 4. Dois parâmetros definem o posicionamento da pastilha: as distâncias x e y em relação, respectivamente, às bordas esquerda e inferior. Os valores dessas variáveis são definidos em passos de um valor Δ . Como mostra a Figura 5, o cromossomo contém todas as informações necessárias para posicionar a pastilha. Dentro do cromossomo existem espaços destinados à armazenagem dos valores que definem cada parâmetro do sistema, neste caso x e y . Esses espaços são os genes. Cada gene pode assumir diversos valores permissíveis, identificados como os alelos. A combinação dos diferentes valores para cada gene X e Y é responsável pela variabilidade dos diversos indivíduos que compõem a população.

Definida a representação da população, o AG pode buscar a melhor solução através de repetidas operações de seleção, mutação e recombinação similares aos processos que ocorrem na natureza. Esse processo de otimização não encontra uma solução fechada, o que leva os AGs a serem classificados como métodos heurísticos. Por conta dessa característica,

Figura 4 – Descrição de um problema de otimização por algoritmo genético

Figura 5 – Nomenclatura

não há garantia de que o resultado obtido será o máximo global dentro da região pesquisada. Além disso, a execução do AG envolve várias simulações do sistema com diversos parâmetros diferentes, tendo um custo computacional elevado se comparado a técnicas de otimização analíticas. Ainda assim, os AGs se popularizaram por serem aplicáveis em sistemas sobre a qual não se tem um conhecimento detalhado ou muito complexos, como aqueles em que a função objetivo não é convexa.

1.4 Justificativa

Apesar de haver alguns pesquisadores atuando em controle ativo, nota-se que essa técnica não tem recebido muita atenção em função da prática industrial, que prefere utilizar técnicas de controle puramente passiva ou semiativa. Por outro lado, existem aplicações em que o controle ativo de vibrações estruturais se faz necessário, como no projeto de estruturas leves e flexíveis, típicas em projetos aeroespaciais. Por conta dessa lacuna, pode ser conveniente pesquisar por metodologias de projeto de filtros modais em controle modal que permitam obter o máximo de desempenho para um conjunto de restrições de projeto, como peso, custo, energia, segurança etc.

Pagani Jr. procurou a configuração ótima de um filtro modal discreto constituído por diversas pastilhas piezoelétricas sobre uma placa, conseguindo resultados satisfatórios com um reduzido número de pastilhas (PAGANI JR, 2009). Esse trabalho levou em conta a otimização do filtro modal apenas, sem considerar o sistema de controle. Posteriormente, foi levantada a seguinte questão: o sistema a malha fechada possui a configuração ótima do filtro modal igual ao do caso em malha aberta ou existe alguma interação em malha fechada que altera o ótimo do sistema? Espera-se que os resultados desta pesquisa sejam

capazes de fornecer uma resposta.

1.5 Objetivos

- a) Investigar a otimização de filtros modais em estruturas flexíveis dos tipos viga e placa, usando-se uma formulação para a função objetivo baseada em um modelo analítico. O principal objetivo está em atenuar os modos de interesse sem piorar os demais enquanto se reduz o número de sensores presentes no filtro modal.
- b) Determinar a configuração ótima em malha fechada de um sistema de controle de vibrações baseado em filtro modal espacial aplicado a estruturas flexíveis.

1.6 Contribuições esperadas

Espera-se que a principal contribuição deste trabalho seja estabelecer os procedimentos que podem ser adotados para se projetar um filtro modal e um sistema de controle modal que apresentem a melhor relação custo-benefício possível. Um exemplo seria reduzir o número de sensores para um número inferior ao de modos a serem analisados sem permitir que o erro esteja acima de -40dB (1%).

Uma possível contribuição extra seria determinar se as FRFs utilizadas até o momento para a otimização de filtros modais em malha aberta correspondem às que entregam resultados ótimos para o sistema de controle modal em malha fechada. Como foi descrito na justificativa, foi questionado se ao se fechar a malha de controle a otimização continuará a fornecer o mesmo resultado. Sabe-se que se um modelo de uma estrutura possui m modos de vibração, então uma forma de garantir a estabilidade de um controle ativo aplicado a essa estrutura é usar sensores e atuadores em pares co-localizados. Outra alternativa está no *Independent Modal Space Control* (IMSC), um método desenvolvido para permitir que cada modo de uma estrutura possa ser controlado individualmente. Essa técnica requer m sensores e m atuadores, uma regra derivada de princípios de Álgebra Linear aplicados a filtros e atuadores modais. No entanto, em malha fechada não se deseja exatamente a capacidade de isolar qualquer um dos m modos do sistema, mas sim atenuar os modos de mais baixa ordem sem comprometer a estabilidade dos demais. Se esse requisito for menos exigente, então talvez seja possível encontrar filtros modais que garantam estabilidade mesmo que sejam compostos por menos do que m sensores e que não apresentem co-localização entre par sensor-atuador.

2 Revisão Bibliográfica

Este capítulo descreve o histórico das pesquisas nas áreas mais relevantes para este trabalho: o desenvolvimento de filtros modais e com suas aplicações em controle modal, otimização de filtros modais, temas de pesquisa correlacionados e algumas aplicações que surgiram mais recentemente.

2.1 Controle modal e filtros modais espaciais

Provavelmente o primeiro trabalho a mencionar o uso de controle modal com o objetivo de monitorar diversas variáveis de estado de um sistema a partir do controle de um subconjunto reduzido delas data de 1962 ([ROSENBROCK, 1962](#)). Nesse trabalho, Rosenbrock sugeriu a redução do modelo de uma torre de destilação, que pode possuir por volta de 1000 variáveis de estado, para os modos mais significativos, uma técnica que em dinâmica estrutural é similar ao que se conhece por redução modal. Dessa forma, se o sistema de controle atuar isoladamente nos modos de interesse e os demais apresentarem variações desprezíveis, então um modelo reduzido com apenas alguns graus de liberdade pode ser utilizado. Apesar de ser um trabalho voltado para colunas de destilação, com um número elevado mas finito de equações diferenciais de 1ª ordem, a utilização de um subconjunto dos autovetores do sistema para simplificar o controle pode ser extrapolada para outras áreas da engenharia com pequenas alterações, uma vez que todas apresentam em comum a modelagem de sistemas através de equações diferenciais. O conceito de controle no espaço modal foi estendido para sistemas de parâmetros distribuídos em ([GOULD; MURRAY-LASSO, 1966](#)) sem se especializar em um tipo específico, apesar de os autores usarem a condução de calor em um barra como exemplo. Posteriormente, em ([SIMON; MITTER, 1968](#)) o controle modal foi desenvolvido formalmente, com base na teoria de sistemas lineares.

A técnica de controle modal mostrou-se muito conveniente para o controle de vibrações em estruturas flexíveis. Conforme abordado em ([BALAS, 1978](#)), modelos de estruturas flexíveis apresentam vários graus de liberdade, especialmente quando se utiliza a discretização por elementos finitos. Seu artigo expõe o uso da combinação linear dos sinais de vários sensores presentes na estrutura para isolar os modos de interesse. Tanto os sensores quanto os atuadores considerados em seu trabalho eram discretos. Com o objetivo de reduzir a complexidade do sistema de controle, diversos pesquisadores por volta dos anos 1980 passaram a aplicar as técnicas de controle modal a estruturas flexíveis. Balas provavelmente foi o primeiro a propor o uso do espaço modal no projeto do controle de vibrações estruturais. Meirovitch em seguida popularizou o método, que recebeu bastante

atenção da comunidade até por volta dos anos 2000 . A técnica Independent Modal Space Control (IMSC), desenvolvida em (MEIROVITCH; BARUH, 1982) e (MEIROVITCH, 1990) foi um avanço fundamental na teoria de controle de vibrações por permitir a atuação em cada modo de forma desacoplada. Teoricamente, é possível controlar cada modo da forma como se desejar. Por outro lado, essa técnica se limita aos modos de vibração pré-determinados no projeto do sistema de controle. Baz e Poh desenvolveram uma extensão do IMSC, o Modified Independent Modal Space Control (MIMSC) (BAZ; POH, 1990). Essa técnica permite que o sistema de controle altere em tempo real os modos a serem controlados, dando preferência sempre àqueles que possuem maior energia. O modelo desenvolvido nesse trabalho mostra que os esforços exercidos pelo controle ativo podem excitar modos de vibração ignorados pelo controle IMSC. Ao implementar um algoritmo que altera a resposta de controle priorizando os modos de vibração com maior energia associada, os autores conseguiram estender o controle para duas frequências em que ocorre a ressonância da estrutura, além de melhorar a resposta no tempo.

Atuadores e sensores discretos possuem a desvantagem de o *aliasing* espacial interferir no desempenho do sistema de controle como um modo. Mais tarde, os filtros e atuadores modais surgiram como uma forma promissora de evitar esse problema. Por outro lado, os filtros e atuadores modais discretos são de mais fácil construção e manutenção. Consequentemente, a comunidade científica retomou o interesse nessa construção. Apesar de não tratar o problema de *aliasing*, Gawronski investigou algumas técnicas para se desenvolver atuadores e sensores modais em sistemas que passaram por redução modal a partir do modelo de elementos finitos (GAWRONSKI, 2000). Mais tarde, em (FRISWELL, 2001a), alguns problemas que podem surgir da simples aplicação da pseudoinversa de Moore-Penrose como sugerida por Gawronski foram investigados. Três condições extras foram propostas por Friswell:

- Considerar apenas um subconjunto da rede de transdutores (sensores e atuadores), principalmente se alguns deles fornecem leituras de variáveis de natureza diferente, como posição e rotação;
- Projetar para que os transdutores sejam ortogonais a modos de vibração de ordens mais altas, incluindo os autovetores correspondentes e eliminando-se a necessidade de pseudoinversa;
- Posicionar os transdutores onde a curvatura da deformação da estrutura é mais acentuada.

No mesmo estudo, Friswell abordou o projeto de transdutores piezoelétricos continuamente distribuídos sobre uma viga. O cálculo do perfil baseia-se nas funções de forma do elemento finito utilizado para modelar a estrutura. No entanto, uma vez que a

camada tenha sido fabricada com o perfil calculado, alterações posteriores nas propriedades físicas da estrutura comprometerão o desempenho dos transdutores, uma vez que não se pode recalibrá-los. Por essa razão, aplicações que requerem maior robustez favorecem a utilização de redes de sensores e atuadores piezoelétricos discretos, que podem ter os ganhos recalibrados.

A partir dos anos 2000, nota-se que as pesquisas em controle de vibrações focaram em técnicas de controle passivo e semi-ativo. As tensões na ordem de centenas de volts requeridas para se utilizar atuadores piezoelétricos dificultam o seu emprego em sistemas de controle ativo portáteis. Devido a esse problema, a indústria passou a preferir técnicas de controle passivo ou semiativo, opção que influenciou a tendência das linhas de pesquisa em controle de vibrações. Ademais, um dos problemas de se simplificar um modelo truncando-se os modos de mais alta está na possibilidade de projetar um sistema de controle ativo que inadvertidamente excitará modos de vibração de mais alta ordem, com a possibilidade de levar à ressonância. Esse fenômeno é conhecido como *spillover*.

Em um artigo de revisão de 2003, Moheimani fez uma análise dos avanços realizados em controle de vibrações usando técnicas passivas de controle de vibração (MOHEIMANI, 2003). O pesquisador descreveu as principais topologias de circuitos *shunt* desenvolvidas para otimizar a dissipação de energia e aumentar a largura de banda dos circuitos. Devido à necessidade de indutores maiores imposta por valores baixos de frequência de ressonância, Moheimani apontou a utilização de impedâncias digitais para implementação desses circuitos. Depois, realçou a importância da possibilidade de se representar um circuito de controle passivo como uma malha de controle ativo para um par de pastilhas piezoelétricas co-localizadas, cuja representação permite aplicar a teoria desenvolvida para sistemas de controle ativo para os parâmetros dos componentes do circuito – resistores, capacitores e indutores. Essa observação foi utilizada em uma outra pesquisa (MOHEIMANI; FLEMING; BEHRENS, 2003) para desenvolver um sistema de controle robusto. Devido aos elevados valores de indutância envolvidos, foi necessário lançar mão de impedâncias digitais.

Uma extensão das técnicas de chaveamento utilizadas em controle semiativo foi desenvolvida para permitir que o sistema de controle pudesse se adaptar às possíveis mudanças da estrutura decorrentes de desgaste e alterações na rigidez (COLLINGER; WICKERT; CORR, 2009).

Wang e Inman declaram em um artigo de revisão que técnicas de controle ativo estavam recebendo a atenção de pesquisadores (WANG; INMAN, 2012). No entanto, o tópico não foi muito bem desenvolvido, ao contrário do que ocorreu ao revisar os trabalhos recentes em controle passivo e semiativo. Percebe-se que a comunidade de pesquisadores esteve participando intensamente no aprimoramento das técnicas de coleta de energia, com melhorias incrementais.

Ainda que a popularidade das técnicas de controle modal ativo tenha caído, nota-se

que a área continuou ativa até hoje. Melhorias em sensores e atuadores redirecionaram parte do foco da pesquisa novamente para o controle modal ativo com o fim de resolver o problema de *spillover* (INMAN, 2001).

Mais tarde foi sugerida uma nova construção de sensores piezoelétricos em que os ganhos dos sensores são incorporados à área de um eletrodo poroso (PREUMONT et al., 2003). O eletrodo não chega a ser continuamente variado, como proposto em (LEE; MOON, 1990), mas o reduzido tamanho das descontinuidades elevou o limite da frequência de *aliasing* a um valor tão elevado que na prática o resultado foi próximo ao do eletrodo continuamente variado, ao se testar para uma viga engastada. Isso foi possível pela delimitação do eletrodo em diversos hexágonos minúsculos. Parte da área de cada hexágono é então removida de forma que o percentual restante de cada hexágono forma uma distribuição que aproxima a de um filtro modal continuamente distribuído. Como o eletrodo é um só, não existe a possibilidade de se reconfigurar o filtro modal apenas alterando os ganhos de cada sensor, como se pode fazer no caso de filtros modais discretos. Por outro lado, esse procedimento foi justificado no artigo ao discutir a dificuldade de se evitar o *spillover* de observação com sensores discretos.

Gardonio e Elliott realizaram um estudo comparativo de diversas topologias de sensores e atuadores piezoelétricos, bem como técnicas de controle SISO e MIMO (GARDONIO; ELLIOTT, 2004). Os sistemas que utilizam atuadores distribuídos, com um formato parabólico, mostraram melhor desempenho se comparados com os resultados obtidos com pastilhas piezoelétricas quadradas. No entanto, ao passar para uma arquitetura MIMO de controle local, com cada par de sensor e atuador possuindo uma malha de controle individual, o desempenho na supressão de vibrações foi igual ao atingido com o uso dos transdutores piezoelétricos distribuídos usando-se como critério a mudança de energia cinética.

Em 2007, Tanaka e Sanada aplicaram múltiplos sensores e atuadores distribuídos sobre uma estrutura com o objetivo de evitar *spillover* (TANAKA; SANADA, 2007). O trabalho deles pode ser encarado como uma forma de unir pastilhas piezoelétricas de forma que individualmente cada uma se comporte como um filtro modal continuamente distribuído, enquanto que coletivamente possam ser usados como um filtro modal discreto.

Em um trabalho recente (KIM; OH, 2013), mostrou-se que apesar dos riscos de *spillover*, o controle de vibrações utilizando pares de sensores e atuadores não co-localizados pode apresentar resultados tão bons quanto o controle realizado por pares co-localizados, que não apresentam risco de *spillover*. Os pesquisadores mostraram que ambas as arquiteturas de controle podem ser representadas como um absorvedor dinâmico usando-se a analogia entre as equações dinâmicas elétricas e mecânicas. O controle por sensores e atuadores não co-localizados apresenta a vantagem de apresentar um decaimento da resposta em alta frequência mais acentuado, permitindo um projeto que evite o *spillover*

para modos de vibração de alta ordem, conforme o procedimento mostrado no artigo.

Na última década surgiu uma tendência em tentar unir o uso de filtros modais aos problemas atualmente em foco na área de dinâmica estrutural, como a identificação de força e o monitoramento de integridade estrutural, *Structural Health Monitoring* (SHM). Em (DERAEMAERKER; PREUMONT, 2003), foi proposto o uso de filtros modais para a detecção de falhas estruturais localizadas, que resultam em falsos picos de ressonância em filtro modais originalmente projetados para exibirem apenas um pico. O método acabou por se mostrar bem tolerante a alterações globais de rigidez, o que é interessante caso se deseje um sistema SHM que seja robusto a gradientes de temperatura.

Em (MENDROK; KUROWSKI, 2013), sugere-se o projeto de filtros modais com base apenas nas medições de saída. A falta de informação sobre a perturbação do sistema é compensada por meio de identificação de força. Já o trabalho descrito em (TONDREAU; DERAEMAERKER, 2013) segue naturalmente das contribuições de (DERAEMAERKER; PREUMONT, 2003), com a diferença de que a técnica anterior baseada em apenas um filtro modal composto por todos os sensores foi adaptada para um método que emprega vários filtros modais menores formados por sensores adjacentes a fim de detectar a posição dos defeitos. Aparentemente, a aplicação desse método requer um elevado número de sensores, com o número de sensores sendo inversamente proporcional à precisão com que se quer identificar o defeito. Em outras palavras, o método não fornecerá a posição exata do defeito, mas a região onde se encontra. A fim de restringir essa região, é necessário incluir mais sensores. Tondreau e Deraemaker também comparam o método empregado, baseado na medição da curvatura, com o método previamente sugerido em (MENDROK; UHL, 2010), baseado na medida de acelerômetros, chegando à conclusão de que o sistema de monitoramento de integridade estrutural baseado em curvatura é mais sensível. Mais tarde, (MENDROK, 2014) irá discutir o uso de vários filtros modais locais na detecção de vários defeitos presentes ao mesmo tempo. O autor não deixa muito claro, mas supõe-se que o método descrito empregue novamente medidas de aceleração.

Em (W6JCICKI; MENDROK; UHL, 2013) e (MENDROK, 2015) propõe-se o uso das formas de deflexão operacional a fim de calcular os coeficientes do filtro modal sem que seja necessário ter em mãos as autofunções da estrutura em estudo. É uma observação interessante, uma vez que dessa forma não é necessário construir um modelo numérico para projetar o filtro modal. Infelizmente, não parece ser muito simples adaptar essa metodologia ao projeto em malha fechada de um sistema de controle de vibrações.

2.2 Otimização de filtros modais

Han e Lee realizaram um estudo de otimização no posicionamento de pastilhas piezoelétricas em duas dimensões, comprimento e largura, ao longo de uma placa engastada

(HAN; LEE, 1999). Um algoritmo genético determinou a configuração ótima segundo um critério que priorizava controlabilidade. Posteriormente, a implementação com uma malha de controle PPF (Positive Position Feedback) mostrou bons resultados, com redução de aproximadamente 10 dB para o primeiro modo, 15 dB para o segundo e 20 dB para o terceiro. Deve-se levar em conta que a malha de controle não foi incluída nas simulações realizadas durante a etapa de otimização. A malha de controle altera o sistema, de forma que não é possível garantir que todos os parâmetros utilizados ainda representam um filtro ótimo.

Em um estudo de otimização no posicionamento de atuadores e sensores piezo-elétricos, confirmou-se que a orientação dos atuadores e sensores pode influenciar na controlabilidade das vibrações mecânicas (QIU et al., 2007). Pastilhas piezoelétricas alinhadas às bordas retangulares das placas mostraram-se mais efetivas para controlar vibrações em modo de flexão, enquanto pastilhas inclinadas a 45° mostraram-se mais adequadas para controlar vibrações em modo de torção. Os autores utilizaram pastilhas PZT dispostas em fileiras e otimizaram a posição de cada uma delas ao longo do comprimento de uma placa de fibra de vidro e colofônia (breu branco), constituindo um problema de otimização em uma dimensão.

Apesar de (BALAS, 1978) ser provavelmente o primeiro a aplicar filtros modais ao controle de vibrações, não se encontram registros anteriores a (PAGANI JR; TRINDADE, 2009) que tenham considerado o efeito do posicionamento dos sensores no desempenho de filtros modais espaciais. Até o momento era um consenso geral que para detectar ou atenuar m modos um filtro modal espacial discreto requer m sensores. Isso é verdade quando a distribuição dos sensores é aleatória, sem sensores repetidos na mesma posição. No entanto, Pagani Jr. e Trindade descobriram que um posicionamento de sensores peculiar pode:

- a) reduzir o número mínimo necessário de sensores;
- b) aumentar o número de modos a serem detectados;
- c) aumentar a banda de frequência do filtro modal;
- d) reduzir o erro residual do filtro modal.

Há um compromisso entre essas quatro características, de forma que melhorar uma delas normalmente resulta em piorar as outras, mas os resultados mostrados em (PAGANI JR; TRINDADE, 2009) mostraram que levar em conta o posicionamento permite obter um filtro modal melhor do que se conseguiria se o mesmo filtro modal fosse projetado sem levar em consideração o posicionamento. Esse trabalho investigou uma placa retangular com todos os lados livres e um filtro modal em malha aberta composto por 12 pastilhas piezoelétricas que poderiam assumir 12 de 36 posições pré-determinadas. Os ganhos do filtro modal eram calculados por meio de mínimos quadrados, seguindo a abordagem de

(PREUMONT et al., 2003). No entanto, as posições foram consideradas como variáveis de otimização. O método de otimização adotado pelos autores foi um algoritmo genético configurado para realizar otimização discreta, com modificações descritas em (PAGANI JR, 2009).

Mais tarde, foi realizada uma análise do efeito que desvios no posicionamento das pastilhas piezoelétricas e nos valores do ganho de cada sensor teriam na FRF do filtro modal (TRINDADE et al., 2013). Conforme comentado no trabalho, quando a otimização escolhe o posicionamento dos sensores para aumentar a banda de frequência do filtro modal, há uma tendência de que a sensibilidade a desvios no posicionamento também aumente. A fim de estudar esse efeito de forma quantitativa, os autores selecionaram a configuração que foi encontrada em (PAGANI JR; TRINDADE, 2009) para detectar os modos 1 e 2 da placa. Depois, dois tipos de análise foram realizados:

- a) *Amostragem por hipercubo latino*. Foram criados 100 modelos, sendo que cada um deles foi construído a partir da placa com o filtro modal calculado. No entanto, cada pastilha poderia aleatoriamente permanecer onde estava ou ser deslocada de 2,5 mm na vertical (para cima ou para baixo) ou na horizontal (para a direita ou para a esquerda) ou em ambas as direções.
- b) *Metodologia de superfície de resposta*. Cada pastilha piezoelétrica foi deslocada de 2,5 mm para cima, para baixo, para a direita ou para a esquerda, mas apenas uma vez em cada sentido. Depois, os resultados para cada pastilha foram interpolados para estimar o efeito de uma perturbação menor do que 2,5 mm. Em seguida, foi considerado que o efeito do deslocamento de uma pastilha não interfere nas outras, permitindo a soma direta das perturbações ao sinal do filtro modal não perturbado.

Posteriormente, os autores também estudaram o efeito dos desvios nos ganhos dos filtros modais. Foi aplicado o método de Monte Carlo com 4000 casos, sendo que cada um deles consistia da configuração otimizada para detectar os modos 1 e 2 da placa, mas com os ganhos dos sensores acrescidos de um desvio gaussiano. Os autores concluíram a partir dos resultados que desvios nos ganhos dos sensores afetam o desempenho do filtro modal de forma mais crítica do que desvios no posicionamento dos sensores.

Finalmente, em (TRINDADE; PAGANI JR; OLIVEIRA, 2015) o filtro modal otimizado para os modos 1 e 2 encontrado em (PAGANI JR; TRINDADE, 2009) foi usado para controle de vibrações. Duas técnicas foram aplicadas: *Direct Velocity Feedback* (DVF) o retroalimentação direta de velocidade, também denominado *Negative Velocity Feedback* (NVF) ou retroalimentação negativa de velocidade, e o *Positive Position Feedback* (PPF), ou retroalimentação positiva de posição. Como a otimização do filtro modal tinha sido realizada sem levar em consideração o sistema em malha fechada, os autores incluem uma ressalva de que o desempenho pode não ser satisfatório. Ainda assim, o filtro modal em

conjunto com o DVF proporcionou atenuações de até 20dB para o 1º modo e 16dB para o 2º modo. Com o PPF, atenuações de até 25dB para o 1º modo e 31dB para 2º modo foram obtidas. Ademais, o sistema de controle mostrou boa seletividade, atenuando bem o modo escolhido (1º ou 2º) e influenciando pouco os demais.

Ainda durante a elaboração deste trabalho não foram encontrados trabalhos que realizaram a otimização de filtros modais levando em consideração simultaneamente o posicionamento, os ganhos dos sensores e o sistema de controle de vibrações. Uma das dificuldades reside em escolher a estratégia de controle. Mesmo superada essa dificuldade, através de uma estratégia simples como a retroalimentação negativa de velocidade, ainda é preciso estabelecer uma função objetivo a ser minimizada para otimizar o controle. Um dos grandes problemas ao se utilizar um método de controle ótimo, como o LQR, é definir os coeficientes de ponderação. Esses valores costumam ser definidos por tentativa e erro até se atingir o desempenho desejado do sistema. Muitas vezes acaba-se com um problema de otimização multiobjetivo, dificultando ainda mais o processo de ponderação. Zoric et al aplicaram lógica fuzzy e otimização por enxame de pontos ao método LQR, simplificando o problema de otimização multiobjetivo para um problema com apenas um objetivo (ZORIC et al., 2012). Dessa forma, tratou-se a escolha dos coeficientes de ponderação, muitas vezes realizada por tentativa e erro, como um problema de otimização. O trabalho utilizou um método heurístico, sem encontrar uma formulação para a escolha dos coeficientes de ponderação. Por outro lado, além de levar em consideração os coeficientes de ponderação, o posicionamento e o tamanho dos atuadores piezoelétricos na viga também entraram como parâmetros na otimização.

A fim de evitar o problema de *spillover*, em um trabalho relativamente recente foi investigado o uso do IMSC aliado a filtros *notch*, criando o que o autor denomina um filtro *notch* direcional, ou *directional notch filter* (HOOGENDJIK et al., 2014). As matrizes usadas para transformar os valores reais de deflexão para o espaço modal, que são na maioria das vezes obtidas por um modelo numérico, nesse caso foram encontradas com base nas FRF do sistema, que podem ser encontradas empiricamente. As matrizes de transformação para o espaço modal são então encontradas por meio de uma otimização por algoritmo genético.

Apesar desses trabalhos recentes em filtros modais, nenhum trabalho consultado realizou uma otimização de filtros modais que considerasse o sistema em malha fechada, que é o tema de interesse deste trabalho.

Por final, será feito um comentário com relação ao um tema de pesquisa popular em Matemática e que possui algumas semelhanças com a otimização de filtros modais espaciais. *Compressed Sensing*, também encontrado na literatura como *Compressive Sensing*, *Compressed Sampling* ou *Compressive Sampling*, é um tópico atualmente em alta voga em Matemática Aplicada. Sua aplicação mais conhecida é a de reduzir a resolução

de sensores sem piorar a qualidade da informação adquirida. Em vez de usar um sensor de alta resolução em uma câmera para depois comprimir um grande volume de dados, a própria distribuição dos sensores filtra os dados, que serão mais tarde reconstruídos com base em um algoritmo de otimização (CANDÈS; WAKIN, 2013).

Mais recentemente, *Compressed Sensing* tem sido aplicado em alguns trabalhos em SHM (ZOU et al., 2015) e mecânica dos fluidos (BRUNTON; PROCTOR; KUTZ, 2013). Embora seja importante evitar uma forçada e artificial aplicação de *Compressed Sensing* por ser um tópico de pesquisa popular, pode ser interessante investigar uma possível relação com o uso de filtros modais, que tenta reconstruir os modos a partir de vários sensores instalados em uma estrutura. Brunton, Proctor e Kutz aplicaram *Compressed Sampling* para o monitoramento da atmosfera e de oceanos (BRUNTON; PROCTOR; KUTZ, 2013), mas comentam que possível tentar aplicar os métodos ali descritos em outros sistemas dinâmicos.

3 Modelo dinâmico da viga

3.1 Equações diferenciais do sistema

Este capítulo definirá a estrutura a ser estudada, o tipo do material a ser empregado e as condições de contorno. A partir desses dados, tem-se definida a equação diferencial e a solução poderá ser encontrada. Neste estudo, foi usado o método dos modos supostos. Ao final, o capítulo inclui uma pequena adaptação que evita alguns problemas numéricos encontrados nas formas modais de alta ordem da solução analítica.

Figura 6 – Esquema da viga Euler-Bernoulli

Considere uma viga esbelta, uniforme e homogênea de comprimento L , feita de um material linear, isotrópico com módulo de elasticidade E , coeficiente de Poisson ν e densidade ρ . A seção transversal é constante com área A e segundo momento de área I . A extremidade esquerda está engastada enquanto a direita está livre e excitada por uma força harmônica $F_L(t)$. O momento $M_L(t)$ aplicado à extremidade livre é nulo. A resolução da equação diferencial considerará o carregamento distribuído $f(x, t)$, mas o modelo a ser simulado e otimizado considerará apenas $F_L(t)$. Seguindo a formulação de Euler-Bernoulli, a equação governante correspondente é

$$A\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = f(x, t) \quad (3.1)$$

com as condições de contorno gerais da forma

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{M_0}{EI} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{M_L}{EI} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.3)$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{F_0}{EI} \right) \delta w \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.4)$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{F_L}{EI} \right) \delta w \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.5)$$

Os termos F_0 e M_0 , que não foram mostradas na [Figura 6](#), correspondem às forças aplicadas à extremidade esquerda. Não são essenciais à resolução do problema, pois na condição de engaste na extremidade esquerda $\delta w = 0$ e $\delta(\partial w / \partial x) = 0$.

A equação governante (3.1), bem como as condições de contorno (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5) podem ser escritas de forma adimensional, levando a

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\beta_1^4} \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} = \gamma(\xi, \tau) \quad (3.6)$$

com as condições de contorno

$$\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \frac{LM_0}{EI} \right) \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=0} = 0 \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} - \frac{LM_L}{EI} \right) \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=1} = 0 \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} - \frac{L^2 F_0}{EI} \right) \delta \eta \Big|_{\xi=0} = 0 \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} + \frac{L^2 F_L}{EI} \right) \delta \eta \Big|_{\xi=1} = 0, \quad (3.10)$$

sendo que

$$\xi = \frac{x}{L} \quad \tau = \omega_1 t \quad \eta(\xi, \tau) = \frac{w(x, t)}{L} \quad \gamma(\xi, \tau) = \frac{f(\xi L, \tau / \omega_1)}{\beta_1^4} \quad \omega_1 = \frac{1}{L^2} \sqrt{\beta_1 \frac{EI}{\rho A}}$$

são as variáveis adimensionais. O operador $\delta(\cdot)$ denota a variação da função em torno de uma expressão exata. As grandezas utilizadas nas equações acima foram descritas e podem ser vistas na [Figura 6](#), com exceção de β_1 e ω_1 . O parâmetro β_1 é o autovalor associado à primeira autofunção ao se resolver o problema de valores de contorno representado pela equação diferencial (3.6) e suas condições de contorno de (3.7) a (3.10). Já ω_1 é a 1ª frequência de ressonância da viga, encontrada pela expressão

$$\omega_j = \frac{1}{L^2} \sqrt{\beta_j \frac{EI}{\rho A}},$$

válida para qualquer par β_j, ω_j . Esses valores estão tabelados em diversos textos de dinâmica estrutural, como em (GÉRADIN; RIXEN, 1997). Além de ser um pouco trabalhoso, converter uma equação para uma forma adimensional pode também comprometer a compreensão física dos resultados não processados, mas a escolha das tolerâncias dos métodos de integração numérica é mais simples quando os valores envolvidos não se distanciam muito de 1. Em particular, valores próximos ao limite da representação de ponto flutuante podem causar problemas numéricos. Um problema que nem mesmo o uso de adimensionais pode evitar será abordado na [seção 3.2](#).

No caso particular da viga engastada, estão definidos *a priori* os valores de posição e inclinação na extremidade $\xi = 0$ e os valores dos esforços externos em $\xi = 1$, que são os motivos de se ter $\delta w = 0$ e $\delta(\partial w / \partial x) = 0$. Dessa forma, as condições de contorno reduzem-se a

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (3.11)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} - \frac{LM_L}{EI} \right) \bigg|_{\xi=1} = 0 \quad (3.12)$$

$$\eta|_{\xi=0} = 0 \quad (3.13)$$

$$\left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} + \frac{L^2 F_L}{EI} \right) \bigg|_{\xi=1} = 0. \quad (3.14)$$

O problema de valores de contorno em (3.6) pode ser resolvido através de expansão da solução uma série de autofunções. Assim, tem-se que a solução é da forma:

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(\tau) \Phi_j(\xi), \quad (3.15)$$

sendo que $C_j(\tau)$ corresponde à contribuição do modo $\Phi_j(\xi)$ para a posição ξ no instante τ . Cada autofunção normalizada pode ser descrita em termos de funções trigonométricas (GÉRADIN; RIXEN, 1997) da seguinte forma

$$\Phi_j(\xi) = k_j \left[s_2(\beta_j \xi) - \frac{s_1(\beta_j)}{c_1(\beta_j)} c_2(\beta_j \xi) \right], \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.16)$$

, sendo que

$$s_1(\xi) = \sin(\xi) + \sinh(\xi), \quad (3.17)$$

$$c_1(\xi) = \cos(\xi) + \cosh(\xi), \quad (3.18)$$

$$s_2(\xi) = -\sin(\xi) + \sinh(\xi), \quad (3.19)$$

$$c_2(\xi) = -\cos(\xi) + \cosh(\xi), \quad (3.20)$$

$$k_j = \left\{ \int_0^1 \left[s_2(\beta_j \xi) - \frac{s_1(\beta_j)}{c_1(\beta_j)} c_2(\beta_j \xi) \right]^2 d\xi \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.21)$$

Cada um dos β_j deve ser uma solução da equação

$$c_1(\beta_j)^2 - s_1(\beta_j)s_2(\beta_j) = 0.$$

Caso contrário, o procedimento de solução da equação diferencial parcial governante apenas forneceria soluções triviais.

As autofunções $\Phi_j(\xi)$ definidas na eq. (3.16) serão usadas como uma base ortonormal no método de Galerkin que irá reduzir a ordem do sistema a fim de reduzir o custo computacional do projeto do filtro modal. A literatura normalmente identifica esse procedimento como sendo o Método dos modos supostos.

O método de Galerkin utiliza funções ortogonais como base para representar os campos de deslocamentos. Neste caso a função $\eta(\xi, \tau)$ será aproximada pela combinação linear de m autofunções

$$\eta(\xi, \tau) \approx \bar{\eta}(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^m q_j(\tau) \Phi_j(\xi). \quad (3.22)$$

A aproximação melhora conforme mais modos de vibração são considerados. Para m tende a infinito, a aproximação tende à solução exata. Um caso particular seria aquele em que a viga apenas possui os m primeiros modos excitados, isto é, a viga teria uma banda limitada de frequências. Como consequência, o truncamento não acarretaria em nenhum erro. Limitar a excitação do sistema a apenas esse conjunto de m modos não é teoricamente possível, mas geralmente após uma certa faixa os modos de mais alta frequência são desprezíveis, o que justifica o truncamento para um valor de m suficientemente alto, como, por exemplo, até três vezes o número de modos a serem investigados. A fim de facilitar a representação das matrizes de inércia e rigidez a serem obtidas através dos modos supostos, pode ser conveniente definir a função $\Phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ como um vetor coluna contendo como seus elementos as autofunções da viga e $q(\tau): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ como um vetor coluna contendo os coeficientes das autofunções:

$$\Phi(\xi) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\xi) \\ \Phi_2(\xi) \\ \vdots \\ \Phi_m(\xi) \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}(\tau) = \begin{bmatrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \\ \vdots \\ q_m(\tau) \end{bmatrix}$$

Dessa forma, o campo de deslocamentos aproximado assume uma notação mais compacta:

$$\bar{\eta}(\xi, \tau) = \Phi(\xi)^T \mathbf{q}(\tau). \quad (3.23)$$

Substituindo o campo de deslocamentos na equação governante do sistema não-homogêneo (3.6) pela expressão correspondente na Equação 3.23, tem-se:

$$\Phi^T \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\beta_1^4} \frac{\partial^4 \Phi^T}{\partial \xi^4} \mathbf{q} = \gamma(\xi, \tau).$$

A seguir, aplica-se o passo fundamental do método de Galerkin: pré-multiplicar cada termo da equação por $\Phi(\xi)$ e integrar ao longo do domínio espacial da viga:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi \Phi^T \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\beta_1^4} \Phi \frac{\partial^4 \Phi^T}{\partial \xi^4} \mathbf{q} d\xi &= \int_0^1 \Phi \gamma(\xi, \tau) d\xi \\ \int_0^1 \Phi \Phi^T d\xi \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\beta_1^4} \int_0^1 \Phi \frac{\partial^4 \Phi^T}{\partial \xi^4} d\xi \mathbf{q} &= \int_0^1 \Phi \gamma(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned} \quad (3.24)$$

O termo que possui uma derivada parcial de quarta ordem com relação a ξ pode ser integrado por partes duas vezes, resultando em uma integral mais termos que se associam a $\mathbf{q}(\tau)$ para produzir as condições de contorno naturais, isto é, as cargas pontuais nas fronteiras do domínio de Ritz:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi \frac{\partial^4 \Phi^T}{\partial \xi^4} d\xi &= \left[\Phi \frac{\partial^3 \Phi^T}{\partial \xi^3} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \Phi^T}{\partial \xi^3} d\xi \\ &= \left[\Phi \frac{\partial^3 \Phi^T}{\partial \xi^3} \right]_0^1 - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi^2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi^2} d\xi. \end{aligned}$$

Se incluirmos o vetor $\mathbf{q}(\tau)$ na expressão acima, reconstroem-se as condições de contorno do problema com o campo de deslocamentos aproximado por Galerkin:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi \frac{\partial^4 \Phi^T}{\partial \xi^4} d\xi \mathbf{q} &= \left[\Phi \frac{\partial^3 \Phi^T}{\partial \xi^3} \right]_0^1 \mathbf{q} - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi^2} \right]_0^1 \mathbf{q} + \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi^2} d\xi \mathbf{q} \\ &= \left[\Phi \frac{\partial^3 \Phi^T}{\partial \xi^3} \mathbf{q} \right]_0^1 - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi^2} \mathbf{q} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi^2} d\xi \mathbf{q} \\ &= \left[\Phi \frac{\partial^3 \bar{\eta}}{\partial \xi^3} \right]_0^1 - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \xi^2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi^2} d\xi \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Relembrando que as derivadas de ordem 2 e 3 estão relacionadas aos esforços nas condições de contorno em (3.11) e (3.11), pode-se substituir as derivadas de ordem 2 e 3 pelas cargas pontuais normalizadas. Até este ponto a formulação pode ser aplicada de forma geral, mas mais adiante é preciso levar em conta os valores das condições de contorno para cada tipo de vinculação ou carregamento. Para a viga engastada as expressões nas equações (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) fornecem os valores a serem substituídos, resultando em

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi \frac{\partial^4 \Phi^T}{\partial \xi^4} d\xi \mathbf{q} &= - \Phi|_{\xi=1} \frac{L^2 F_L}{EI} + \Phi|_{\xi=0} \frac{\partial^3 \bar{\eta}}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=0} \\ &\quad - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} \frac{LM_L}{EI} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=0} + \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi^2} d\xi \mathbf{q} \\ &= - \Phi|_{\xi=1} \frac{L^2 F_L}{EI} + 0 \frac{\partial^3 \bar{\eta}}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=0} \\ &\quad - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} \frac{LM_L}{EI} + 0 \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=0} + \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi^2} d\xi \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Substituindo essa equação na formulação de Galerkin em desenvolvimento (3.24), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi \Phi^T d\xi \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial \tau^2} + \frac{1}{B^4} \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi^2} d\xi \mathbf{q} = \int_0^1 \Phi \gamma(\xi, \tau) d\xi \\ + \Phi|_{\xi=1} \frac{L^2 F_L}{EI \beta_1^4} + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} \frac{L M_L}{EI \beta_1^4}. \end{aligned}$$

Dessa forma, pode-se utilizar a notação convencional utilizada para representar as matrizes de inércia e rigidez, bem como o vetor de forças externas. Define-se que

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \Phi \Phi^T d\xi, \quad (3.25)$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{B^4} \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi^2} d\xi, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{F} = \int_0^1 \Phi \gamma d\xi + \Phi|_{\xi=1} \frac{L^2}{EI \beta_1^4} F_L + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} \frac{L}{EI \beta_1^4} M_L. \quad (3.27)$$

Nota-se que a Equação 3.25 ocorre devido à ortogonalidade entre as autofunções, posteriormente normalizadas de acordo com a Equação 3.21. A matriz Ω^2 , depois de dividida por β_1^4 , a quarta potência do autovalor associado à autofunção do primeiro modo, torna-se uma matriz diagonal em que cada elemento Ω_{jj} é igual a ω_j/ω_1 , que é a j -ésima frequência natural normalizada pela frequência do 1º harmônico. Já o vetor $\mathbf{F}$ representa a carga externa distribuída sobre a viga e as forças pontuais nas extremidades da viga na base de Ritz. A grande vantagem de se utilizar o método dos modos supostos está em se conseguir uma representação do sistema através de equações diferenciais desacopladas, simples de se resolver. Também é possível acrescentar termos de amortecimento viscoso sem comprometer a resolução do sistema, desde que uma matriz $\mathbf{\Lambda}$ diagonal possa representar o amortecimento do sistema no espaço modal. Logo, depois de se adicionar o amortecimento modal,

$$\mathbf{I} \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial \tau^2} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau} + \Omega^2 \mathbf{q} = \mathbf{F}. \quad (3.28)$$

Caso seja desejável utilizar uma representação por espaço de estados para lançar mão de recursos disponíveis no MATLAB, como a integração por Runge-Kutta ou o uso da *toolbox* de sistemas de controle, pode-se reescrever o sistema de EDOs como

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial \tau^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega^2 & -\mathbf{\Lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

ou então, na notação mais convencional,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \tau} &= \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{B} f(\tau) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{z} + \mathbf{D} f(\tau), \end{aligned}$$

sendo que

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega^2 & -\Lambda \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi|_{\xi=1} \frac{L^2}{EI\beta_1^4} \end{bmatrix} \quad f(\tau) = f(t\omega_1) = F_L(t). \quad (3.30)$$

Foram aplicadas as condições $\gamma(\xi, \tau) = 0$ e $M_L(\tau) = 0$ à Equação 3.27 para se chegar à matriz $\mathbf{B}$ Equação 3.30. Os elementos das matrizes $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ dependem das variáveis que podem ser lidas. A construção dessas matrizes é abordada no capítulo Capítulo 4, que trata da formulação dos filtros modais

3.2 Propagação dos erros de discretização numérica nos modos de alta ordem

O modelo empregado envolve os doze primeiros modos da viga. Apesar de se empregar a formulação analítica exata, uma pequena ondulação irregular compromete o campo de deslocamentos no final da viga para o 12º modo, como se pode notar pela curva em azul mais escuro na Figura 7.

Figura 7 – Formas modais normalizadas por massa para os 12 primeiros modos.

Isso ocorre por se estar atingindo o limite de algarismos significativos na representação de ponto flutuante de dupla precisão, que vai de 15 a 17. Existe uma parte numericamente instável na forma modal mostrada na Equação 3.31, representada por uma diferença entre números muito próximos e grandes. Como será discutido mais à frente, esse problema pode se tornar significativo para modos de mais alta ordem, com um erro de quase 20% para o 12º modo.

Relembrando o caso da viga engastada, a j -ésima forma modal pode ser descrita por

$$\Phi_j(\xi) = k_j \{ \sin(\beta_j \xi) - \sinh(\beta_j \xi) - c_j [\cos(\beta_j \xi) - \cosh(\beta_j \xi)] \}, \quad (3.31)$$

sendo que

$$c_j = \frac{\sin \beta_j + \sinh \beta_j}{\cos \beta_j + \cosh \beta_j}. \quad (3.32)$$

Para uma melhor compreensão do problema, separa-se a expressão em duas partes:

- a) uma em que os termos possuem valores limitados, já que as funções $\sin$ e $\cos$ apenas podem variar de -1 a 1;
- b) uma em que cada um dos termos isoladamente não são limitados, embora a expressão como um todo possa ser limitada. Essa é a parte composta pelas funções hiperbólicas $\sinh$ e $\cosh$.

Assim, tem-se que

$$\Phi_j(\xi) = k_j \{ [\sin(\beta_j \xi) - c_j \cos(\beta_j \xi)] + [-\sinh(\beta_j \xi) + c_j \cosh(\beta_j \xi)] \}. \quad (3.33)$$

No caso da viga engastada, para o 12º modo tem-se $\beta_{12} \approx 36,1283$. Como $\sinh(\beta_{12}) \approx \cosh(\beta_{12}) = 2,4507 \times 10^{15}$ e $c_j \approx 1$, no final da viga surge um erro causado pela precisão da representação numérico-computacional, já que a expressão [Equação 3.33](#) envolve a diferença entre números muito grandes e próximos entre si. Para se ter uma idéia dos erros presentes no 12º modo, na [Figura 8](#) foi plotada a parte numericamente estável $\sin(\beta_j \xi) - c_j \cos(\beta_j \xi)$, enquanto na [Figura 9](#), a parte numericamente instável $-\sinh(\beta_j \xi) + c_j \cosh(\beta_j \xi)$. O erro de discretização numérica é evidente a partir de $\xi = 0,85$. Estimativas posteriores mostram que o desvio máximo na forma modal pode ser de até 0,2212, que equivale a aproximadamente 17,4 % de erro com relação à amplitude máxima da forma modal, que é de 1,5.

Conclui-se que, a segunda expressão é a responsável pelos problemas numéricos em modos de alta ordem. Torna-se necessário, então, encontrar uma forma de eliminar os saltos causados pelos erros de discretização da representação de ponto flutuante. Uma forma trivial de se realizar essa correção é notar a simetria da função. A metade da esquerda de $-\sinh(\beta_j \xi) + c_j \cosh(\beta_j \xi)$ para j par aproxima-se de $e^{-\beta_j \xi}$. Para que se tenha a metade da direita, basta inverter o sinal da expressão $e^{\beta_j \xi}$ e deslocar de uma unidade à direita, [Figura 10](#).

Ambas as funções somadas dão origem a $e^{-\beta_j \xi} - e^{\beta_j(\xi-1)}$, que aproxima bem a expressão original para as formas modais quando $\beta_j > 20$, [Figura 11](#). Para β_j próximo a 1, a aproximação é ruim, então a estratégia adotada no modelo foi a de empregar a formulação exata até o ponto em que o desvio causado pela discretização numérica seja maior do que o erro introduzido pela substituição da nova expressão.

No entanto, esse procedimento não funciona para os modos ímpares. Nesse caso, deve-se começar por $e^{-\beta_j \xi}$ para aproximar a metade esquerda da expressão. Adiciona-se,

Figura 8 – Parte numericamente estável de $\Phi_{12}(\xi)$ Figura 9 – Parte numericamente instável de $\Phi_{12}(\xi)$

Figura 10 – Parcelas usadas para aproximar a parte instável de Φ

Figura 11 – Comparação entre a parte numericamente instável de $\Phi_{12}(\xi)$ e a sua aproximação

então, $e^{\beta_j \xi}$, que depois será deslocado de uma unidade para a direita. Tem-se, para a expressão final, $e^{-\beta_j \xi} + e^{\beta_j(\xi-1)}$. Nota-se que a única diferença entre o modo par e o modo ímpar está no sinal da exponencial positiva. Uma expressão que generalizará ambos os casos será

$$e^{-\beta_j \xi} + (-1)^{n-1} e^{\beta_j(\xi-1)},$$

onde n é o número do modo. Caso não seja desejável ou mesmo possível fornecer o modo n ao se programar a expressão, uma outra equivalente pode ser utilizada, que é

$$e^{-\beta_j \xi} + (\sin \beta_j - c_j \cos \beta_j) e^{\beta_j(\xi-1)}.$$

Considerando a parte numericamente instável da [Equação 3.33](#), tem-se que

$$\begin{aligned} -\sinh(\beta_j \xi) + c_j \cosh(\beta_j \xi) &= -\frac{e^{\beta_j \xi} - e^{-\beta_j \xi}}{2} + c_j \frac{e^{\beta_j \xi} + e^{-\beta_j \xi}}{2} \\ &= -\frac{e^{\beta_j \xi}}{2} + \frac{e^{-\beta_j \xi}}{2} + c_j \frac{e^{\beta_j \xi}}{2} + c_j \frac{e^{-\beta_j \xi}}{2} \\ &= \frac{c_j - 1}{2} e^{\beta_j \xi} + \frac{c_j + 1}{2} e^{-\beta_j \xi}. \end{aligned}$$

Logo, a [Equação 3.33](#) agora pode ser escrita como

$$\Phi_j(\xi) = k_j \left[\sin(\beta_j \xi) - c_j \cos(\beta_j \xi) + \frac{c_j - 1}{2} e^{\beta_j \xi} + \frac{c_j + 1}{2} e^{-\beta_j \xi} \right]. \quad (3.34)$$

A fim de mostrar que a nova formulação converge para a solução exata conforme β_j cresce, será mostrado que o limite do erro entre a formulação proposta e a solução analítica tende a zero conforme β_j cresce. A partir de agora, apenas β será usado para indicar uma curva formada por segmentos de reta que passam pelos pontos formados por (j, β_j) , para cada j -ésimo modo, conforme se vê na [Figura 12](#), que mostra a curva β em preto e os pontos β_j em cinza. Apesar da aparência, essa curva não é linear e nem é suave, mas é contínua e monotonicamente crescente conforme a ordem dos modos sobe. Esse artifício foi empregado para contornar o fato de β_j formar um conjunto de valores discretos. Então, para o propósito de calcular o limite do erro, β_j será substituído por β .

Será útil aplicar separadamente o limite para $\beta \rightarrow \infty$ a cada parcela $(c_j - 1)e^{\beta \xi}/2$ e $(c_j + 1)e^{-\beta \xi}/2$. Primeiro, será mostrado que $e^{-\beta \xi}$ tende a $(c_j + 1)e^{-\beta \xi}/2$ à medida que $\beta \rightarrow \infty$. Depois, será mostrado que $(\sin \beta - c_j \cos \beta)e^{\beta(\xi-1)}$ tende a $(c_j - 1)e^{\beta \xi}/2$ à medida que $\beta \rightarrow \infty$. Finalmente, ambos os valores serão somados para estabelecer um limite superior igual a zero. Como o módulo não pode ser menor que zero, então o valor calculado só poderá ser igual a zero.

3.2.1 Primeiro limite

Para que $e^{-\beta \xi}$ possa ser uma boa aproximação de $(c_j + 1)e^{-\beta \xi}/2$ em modos de alta ordem, a diferença entre ambos deve tender a zero conforme β cresce. Assim, deve-se

Figura 12 – Relação entre os coeficientes β_j e a curva β

calcular o valor de

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j + 1}{2} e^{-\beta\xi} - e^{-\beta\xi} \right| = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j - 1}{2} e^{-\beta\xi} \right|. \quad (3.35)$$

Uma vez que $0 \leq \xi \leq 1$, então $-\beta \leq -\beta\xi \leq 0$. Como a função exponencial é monotonicamente crescente e positiva, tem-se que $0 \leq e^{-\beta} \leq e^{-\beta\xi} \leq 1$. Segue que a expressão na [Equação 3.35](#) pode ser reescrita como

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j + 1}{2} e^{-\beta\xi} - e^{-\beta\xi} \right| = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j + 1}{2} - 1 \right| e^{-\beta\xi} \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j - 1}{2} \right| \cdot 1 = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j - 1}{2} \right|.$$

substituindo c_j pela expressão na [Equação 3.32](#) tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j + 1}{2} e^{-\beta\xi} - e^{-\beta\xi} \right| &\leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \beta + \sinh \beta}{\cos \beta + \cosh \beta} - 1 \right) \right| \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2} \frac{\sin \beta + \sinh \beta - \cos \beta - \cosh \beta}{\cos \beta + \cosh \beta} \right| \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2} \frac{\sin \beta + \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} - \cos \beta - \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}}{\cos \beta + \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}} \right| \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin \beta - \cos \beta - e^{-\beta}}{2 \cos \beta + e^\beta + e^{-\beta}} \right| \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{-\beta} \sin \beta - e^{-\beta} \cos \beta - e^{-2\beta}}{2e^{-\beta} \cos \beta + 1 + e^{-2\beta}} \right| \\ &= \left| \frac{0 - 0 - 0}{2 \cdot 0 + 1 + 0} \right| = 0 \end{aligned}$$

O limite calculado é um módulo, então não pode ser negativo. Pelo teorema do confronto, segue que deve ser igual a 0. Assim,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j + 1}{2} e^{-\beta\xi} - e^{-\beta\xi} \right| = 0. \quad (3.36)$$

3.2.2 Segundo limite

O segundo limite envolve a parte numericamente instável. A fim de se verificar o erro para modos de alta ordem, deve-se mostrar que a expressão original $(c_j - 1)e^{\beta\xi}/2$ aproxima-se de $(\sin \beta - c_j \cos \beta)e^{\beta(\xi-1)}$. Como realizado anteriormente, deve-se determinar o valor de

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j - 1}{2} e^{\beta\xi} - (\sin \beta - c_j \cos \beta) e^{\beta(\xi-1)} \right|. \quad (3.37)$$

De forma análoga, utiliza-se a informação de que $0 \leq \xi \leq 1$. Segue que $-1 \leq \xi - 1 \leq 0$. Multiplicando por β , tem-se que $-\beta \leq \beta(\xi - 1) \leq 0$. Como a função exponencial é positiva e monotonicamente crescente, $0 \leq e^{-\beta} \leq e^{\beta(\xi-1)} \leq 1$. De posse dessa informação, pode-se simplificar a expressão 3.37 para eliminar a dependência em ξ :

$$\begin{aligned} & \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j - 1}{2} e^{\beta\xi} - (\sin \beta - c_j \cos \beta) e^{\beta(\xi-1)} \right| \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j - 1}{2} e^{\beta} e^{-\beta} e^{\beta\xi} - (\sin \beta - c_j \cos \beta) e^{\beta(\xi-1)} \right| \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j - 1}{2} e^{\beta} e^{\beta(\xi-1)} - (\sin \beta - c_j \cos \beta) e^{\beta(\xi-1)} \right| \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j - 1}{2} e^{\beta} - (\sin \beta - c_j \cos \beta) \right| e^{\beta(\xi-1)} \\ &\leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j - 1}{2} e^{\beta} - (\sin \beta - c_j \cos \beta) \right| \cdot 1 \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j - 1}{2} e^{\beta} - (\sin \beta - c_j \cos \beta) \right|. \end{aligned}$$

A substituição do valor de c_j pela expressão na Equação 3.32 resulta em

$$\begin{aligned} & \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j - 1}{2} e^{\beta\xi} - (\sin \beta - c_j \cos \beta) e^{\beta(\xi-1)} \right| \\ &\leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \beta + \sinh \beta}{\cos \beta + \cosh \beta} - 1 \right) e^{\beta} - \left(\sin \beta - \frac{\sin \beta + \sinh \beta}{\cos \beta + \cosh \beta} \cos \beta \right) \right| \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2} \frac{\sin \beta + \sinh \beta - \cos \beta - \cosh \beta}{\cos \beta + \cosh \beta} e^{\beta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \beta \cos \beta + \sin \beta \cosh \beta - \sin \beta \cos \beta - \sinh \beta \cos \beta}{\cos \beta + \cosh \beta} \right| \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2} \frac{\sin \beta + \sinh \beta - \cos \beta - \cosh \beta}{\cos \beta + \cosh \beta} e^{\beta} - \frac{\sin \beta \cosh \beta - \sinh \beta \cos \beta}{\cos \beta + \cosh \beta} \right| \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{[\sin \beta + \sinh \beta - \cos \beta - \cosh \beta] e^{\beta} - 2 \sin \beta \cosh \beta + 2 \sinh \beta \cos \beta}{2[\cos \beta + \cosh \beta]} \right|. \end{aligned}$$

Sabendo que $\sinh(\xi) = (e^\xi - e^{-\xi})/2$ e $\cosh(\xi) = (e^\xi + e^{-\xi})/2$, pode-se tentar simplificar a inequação, chegando a

$$\begin{aligned}
& \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j - 1}{2} e^{\beta\xi} - (\sin \beta - c_j \cos \beta) e^{\beta(\xi-1)} \right| \\
& \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{[\sin \beta + \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} - \cos \beta - \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}] e^\beta - 2 \sin \beta \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} + 2 \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \cos \beta}{2[\cos \beta + \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}]} \right| \\
& = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{[\sin \beta - \cos \beta - e^{-\beta}] e^\beta - \sin \beta e^\beta - \sin \beta e^{-\beta} + \cos \beta e^\beta + \cos \beta e^{-\beta}}{2 \cos \beta + e^\beta + e^{-\beta}} \right| \\
& = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin \beta - \cos \beta - e^{-\beta} - \sin \beta - \sin \beta e^{-2\beta} + \cos \beta + \cos \beta e^{-2\beta}}{2 \cos \beta e^{-\beta} + 1 + e^{-2\beta}} \right| \\
& = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{-e^{-\beta} - \sin \beta e^{-2\beta} + \cos \beta e^{-2\beta}}{2 \cos \beta e^{-\beta} + 1 + e^{-2\beta}} \right| \\
& = \left| \frac{-0 - 0 + 0}{2 \cdot 0 + 1 + 0} \right| = 0.
\end{aligned}$$

Novamente, o limite é não negativo e, pelo teorema do confronto, só pode ser igual a zero. Logo,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j - 1}{2} e^{\beta\xi} - (\sin \beta - c_j \cos \beta) e^{\beta(\xi-1)} \right| = 0. \quad (3.38)$$

3.2.3 Aproximação para modos de alta ordem

Com base nos resultados da [subseção 3.2.1](#) e da [subseção 3.2.2](#), pode-se mostrar que a aproximação

$$\Phi_{a,j}(\xi) = k_j [\sin(\beta_j \xi) - c_j \cos(\beta_j \xi) + e^{-\beta_j \xi} + (\sin \beta_j - c_j \cos \beta_j) e^{\beta_j(\xi-1)}]. \quad (3.39)$$

tende à forma modal exata para os modos de alta ordem. Para tanto, deve-se mostrar que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} |\Phi_{a,j} - \Phi_j| \quad (3.40)$$

é zero, sendo que $\Phi_{a,j}$ denota a aproximação proposta e Φ_j a solução exata para o j -ésimo modo. Substituindo as equações [3.34](#) e [3.39](#) no limite [3.40](#), tem-se

$$\begin{aligned}
& \lim_{\beta \rightarrow \infty} |\Phi_{a,j} - \Phi_j| \\
& = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| k_j [\sin(\beta\xi) - c_j \cos(\beta\xi) + e^{-\beta\xi} + (\sin \beta - c_j \cos \beta) e^{\beta(\xi-1)}] \right. \\
& \quad \left. - k_j \left[\sin(\beta\xi) - c_j \cos(\beta\xi) + \frac{c_j - 1}{2} e^{\beta\xi} + \frac{c_j + 1}{2} e^{-\beta\xi} \right] \right| \\
& = k_j \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \sin(\beta\xi) - c_j \cos(\beta\xi) + e^{-\beta\xi} + (\sin \beta - c_j \cos \beta) e^{\beta(\xi-1)} \right. \\
& \quad \left. - [\sin(\beta\xi) - c_j \cos(\beta\xi)] - \frac{c_j - 1}{2} e^{\beta\xi} - \frac{c_j + 1}{2} e^{-\beta\xi} \right| \\
& = k_j \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| \left[e^{-\beta\xi} - \frac{c_j + 1}{2} e^{-\beta\xi} \right] + \left[(\sin \beta - c_j \cos \beta) e^{\beta(\xi-1)} - \frac{c_j - 1}{2} e^{\beta\xi} \right] \right|.
\end{aligned}$$

Pode-se aplicar neste momento a desigualdade triangular, que é da forma $|x + y| \leq |x| + |y|$, $x, y \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned} & \lim_{\beta \rightarrow \infty} |\Phi_{a,j} - \Phi_j| \\ &= k_j \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[\left| e^{-\beta\xi} - \frac{c_j + 1}{2} e^{-\beta\xi} \right| + \left| (\sin \beta - c_j \cos \beta) e^{\beta(\xi-1)} - \frac{c_j - 1}{2} e^{\beta\xi} \right| \right] \\ &\leq k_j \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| e^{-\beta\xi} - \frac{c_j + 1}{2} e^{-\beta\xi} \right| + k_j \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left| (\sin \beta - c_j \cos \beta) e^{\beta(\xi-1)} - \frac{c_j - 1}{2} e^{\beta\xi} \right|. \end{aligned}$$

Utilizando as equações 3.36 e 3.38, tem-se que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} |\Phi_{a,j} - \Phi_j| \leq k_j \cdot 0 + k_j \cdot 0 = 0.$$

Como se está calculando o limite de um módulo, o resultado não pode ser negativo. Outra vez, pelo teorema do confronto, conclui-se que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} |\Phi_{a,j} - \Phi_j| = 0,$$

o que comprova que para β suficientemente alto a aproximação proposta representa muito bem a solução exata. Qual valor de β é suficientemente alto? Não se realizou uma análise de erro formal, mas uma avaliação numérica mostra que o erro causado por discretização numérica supera o erro de aproximação a partir do 7º modo.

A fim de ilustrar essa observação, foi plotada ao longo de $0 \leq \xi \leq 1$ a diferença entre a aproximação proposta e a forma modal exata para o 6º e o 7º modos. A Figura 13 mostra o valor para o 6º modo. À esquerda, para valores de ξ mais próximos a zero, tem-se um erro suave, causado pelo fato de a aproximação não ser exatamente igual à forma modal exata. À direita, para valores de ξ mais próximos a 1, a curva é bem serrilhada pois a discretização numérica já se torna mais visível. No entanto, ainda é possível identificar visualmente uma tendência a uma curva de erro simétrica à que existe à esquerda, pois o erro de aproximação ainda é dominante. De fato, o maior erro em valor absoluto nesse gráfico é $3,133 \times 10^{-8}$.

Já na Figura 14, o erro de discretização numérica, mais evidente à direita, toma um formato serrilhado e cresce exponencialmente em magnitude, superando largamente o erro causado pela aproximação da forma modal. Enquanto o maior erro em valor absoluto para essa curva é $8,700 \times 10^{-8}$, o erro na extremidade da esquerda é de $1,354 \times 10^{-9}$.

Assim, conclui-se que a aproximação proposta para a forma modal da viga engastada é mais vantajosa já a partir do 7º modo.

Figura 13 – Diferença entre a aproximação proposta e a solução exata para o 6º modo

Figura 14 – Diferença entre a aproximação proposta e a solução exata para o 7º modo

4 Filtros modais espaciais

Os primeiros filtros modais espaciais a serem criados foram compostos a partir da combinação linear do sinal de sensores discretos instalados sobre o sistema dinâmico. Conforme explicado no [Capítulo 2](#), as primeiras aplicações sugeridas foram torres de destilação e a condução de calor em barras, com a aplicação à dinâmica estrutural surgindo mais tarde, por volta da década de 1980. Por meio de filtros modais esperava-se reconstruir o estado do sistema levando em consideração os modos mais significativos. Posteriormente, o IMSC foi desenvolvido com base em filtros modais.

À medida que os materiais piezoelétricos se tornaram mais populares, surgiram os filtros e atuadores modais continuamente distribuídos ([LEE; MOON, 1990](#)), cujos formatos são especialmente calculados de forma a detectar alguns modos de interesse e atenuar os demais.

A dificuldade de se construir filtros modais espacialmente distribuídos trouxe os filtros discretos novamente à linha de pesquisa, com abordagens por vezes mistas, como a de usar vários filtros modais com um formato especialmente projetado ([TANAKA; SANADA, 2007](#)), o que seria, a grosso modo, um filtro discreto construído a partir de sensores continuamente distribuídos, ou então usar vários sensores discretos a fim de aproximar o comportamento de um filtro modal continuamente distribuído ([PREUMONT et al., 2003](#)).

Este estudo focará na otimização de filtros modais espaciais discretos, que serão abordados a seguir.

4.1 Resposta no tempo do filtro modal espacial discreto

4.1.1 Formulação para sensores de posição

Um filtro modal espacial discreto consiste da leitura de diversos pontos ao longo da estrutura, como mostra a [Figura 15](#) para um exemplo em que $p = 3$. Cada leitura é multiplicada por um ganho e todos os produtos resultantes são somados. Se $w(\xi, t)$ for a resposta no tempo da estrutura em ξ a uma perturbação $f(t)$ e α_j o ganho do j -ésimo sensor para $j = 1, \dots, p$, a resposta $y(t)$ do filtro modal espacial composto por p sensores é dada por

$$y(\Xi, \mathbf{a}, t) = \sum_{j=1}^p \alpha_j y_j(t), \quad (4.1)$$

Figura 15 – Esquema do filtro modal espacial discreto

sendo que, para o caso de filtros modais construídos a partir de sensores de posição,

$$\Xi = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_p]^T \quad (4.2)$$

$$\mathbf{a} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_p]^T \quad (4.3)$$

$$y_j = w_j(t) = w(\xi_j, t). \quad (4.4)$$

A resposta no tempo pode ser encontrada calculando-se a solução do sistema de equações diferenciais descrito pela [Equação 3.28](#).

Alternativamente, também é possível usar a notação matricial

$$y(\Xi, \mathbf{a}, t) = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_p] \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Os valores $w(\xi_j, t)$ representam neste exemplo as deflexões nos pontos ξ_j . Se adotarmos a expansão do campo de deslocamentos por uma série de funções de forma, como mostrado na [Equação 3.22](#), então tem-se

$$w(\xi_j, t) = w(\xi_j, \tau\omega_1) = L\eta(\xi_j, \tau) \approx L\bar{\eta}(\xi_j, \tau) = L \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) q_k(\tau). \quad (4.6)$$

Sabendo que para o filtro modal com sensores de posição $y_j = w(\xi_j, t)$, a substituição de y_j na [Equação 4.1](#) pela expressão equivalente na [Equação 4.6](#) dá a resposta no tempo do filtro modal em função das componentes modais $q_j(t)$

$$y(\Xi, \mathbf{a}, t) = L \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k \xi_j q_k(\tau). \quad (4.7)$$

A representação em notação matricial toma a forma

$$y(\Xi, \mathbf{a}, t) = L \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1(\xi_1) & \Phi_2(\xi_1) & \cdots & \Phi_m(\xi_1) \\ \Phi_1(\xi_2) & \Phi_2(\xi_2) & \cdots & \Phi_m(\xi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1(\xi_p) & \Phi_2(\xi_p) & \cdots & \Phi_m(\xi_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \\ \vdots \\ q_m(\tau) \end{bmatrix}.$$

Se as duas matrizes mais à esquerda no 2º membro da equação forem multiplicadas, tem-se

$$y(\Xi, \mathbf{a}, t) = L \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^p \alpha_j \Phi_1(\xi_j) & \sum_{j=1}^p \alpha_j \Phi_2(\xi_j) & \cdots & \sum_{j=1}^p \alpha_j \Phi_m(\xi_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \\ \vdots \\ q_m(\tau) \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

A fim de se ter uma representação mais compacta, sejam

$$\mathbf{C}_{fm} = L \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^p \alpha_j \Phi_1(\xi_j) & \sum_{j=1}^p \alpha_j \Phi_2(\xi_j) & \cdots & \sum_{j=1}^p \alpha_j \Phi_m(\xi_j) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1(\tau) & q_2(\tau) & \cdots & q_m(\tau) \end{bmatrix}^T, \quad (4.10)$$

com o subscrito fm sendo usado para lembrar que essa matriz é característica do filtro modal espacial. Tendo-se em vista a representação por espaço de estado, reescreve-se a [Equação 4.8](#) como

$$y(\Xi, \mathbf{a}, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{fm} & \underbrace{0 \cdots 0}_{m \text{ zeros}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \frac{d\mathbf{q}}{dt} \end{bmatrix} + 0 \cdot F_L(t\omega_1).$$

Como o vetor $\mathbf{q}$ e sua derivada no tempo $d\mathbf{q}/dt$ possuem ambos dimensão m , então m zeros são concatenados ao lado da matriz $\mathbf{C}_{fm}$ para que os termos dq_j/dt não participem da soma. Relembrando a definição do vetor de estado na [Equação 3.30](#), segue que

$$y(\Xi, \mathbf{a}, t) = \mathbf{C}\mathbf{z} + Df(t), \quad (4.11)$$

sendo que

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{fm} & \underbrace{0 \cdots 0}_{m \text{ zeros}} \end{bmatrix} \quad D = 0 \quad (4.12)$$

Com base nas equações [3.30](#) e [4.11](#), é possível agora determinar completamente o sistema em espaço de estados como

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}}{d\tau} &= \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}f(t) \\ y(\Xi, \mathbf{a}, t) &= \mathbf{C}\mathbf{z} + Df(t). \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.1.2 Formulação baseada em velocidade

A seção anterior apresentou a formulação para o caso do filtro modal construído a partir de sensores de posição. Dependendo do modelo, no entanto, pode ser necessário empregar sensores de velocidade ou mesmo de aceleração. Nessa situação, $y_j(t)$ na [Equação 4.1](#) deve ser substituído por $dw_j(t)/dt$, resultando em

$$y(\Xi, \mathbf{a}, t) = \sum_{j=1}^p \alpha_j \frac{dw_j}{dt}(t),$$

com Ξ e $\mathbf{a}$ definidos ainda como anteriormente nas equações [4.2](#) e [4.3](#). Se a expansão por série de funções de forma na [Equação 4.6](#) for derivada com relação ao tempo, então pode-se ter uma aproximação para o campo de velocidades ao longo da viga

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt}(\xi_j, t) &= \frac{dw(\xi_j, \tau\omega_1)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = L \frac{d\eta(\xi_j, \tau)}{d\tau} \frac{d}{dt}(t\omega_1) = L\omega_1 \frac{d\eta(\xi_j, \tau)}{d\tau} \\ &\approx L\omega_1 \frac{d\bar{\eta}(\xi_j, \tau)}{d\tau} = L\omega_1 \frac{d}{d\tau} \left(\sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) q_k(\tau) \right) = L\omega_1 \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \frac{dq_k(\tau)}{d\tau}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Através de procedimentos análogos aos utilizados para se chegar ao modelo em espaço de estados baseados em sensores de deslocamento, chega-se a um sistema com a mesma forma dada pela [Equação 4.13](#) e com $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e D exatamente iguais, com a diferença de que agora

$$\mathbf{C}_v = [\underbrace{0 \cdots 0}_{m \text{ zeros}} \quad \omega_1 \mathbf{C}_{fm}], \quad (4.15)$$

sendo que o subscrito v é usado para denotar que neste caso a saída tem a natureza de velocidade e não de posição.

4.1.3 Formulação baseada em aceleração

Caso a leitura seja dada na forma de aceleração, então a formulação dada na [Equação 4.1](#) é alterada e assume a forma

$$y(\Xi, \mathbf{a}, t) = \sum_{j=1}^p \alpha_j \frac{d^2 w_j}{dt^2}. \quad (4.16)$$

Usando uma abordagem similar à da [Equação 4.14](#), é possível mostrar que

$$\frac{d^2 w}{dt^2}(\xi_j, t) = L\omega_1^2 \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \frac{d^2 q_k}{d\tau^2}(\tau). \quad (4.17)$$

A substituição da [Equação 4.17](#) na [Equação 4.16](#) com posterior rearranjo para a notação matricial fornece

$$y(\Xi, \mathbf{a}, t) = \omega_1^2 \mathbf{C}_{mf} \frac{d^2 \mathbf{q}}{d\tau^2} \quad (4.18)$$

Relembrando a formulação por espaço de estados, [Equação 3.29](#), tem-se que

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{d\tau^2} = -\mathbf{\Omega}^2 \mathbf{q} - \mathbf{\Lambda} \frac{d\mathbf{q}}{d\tau} + \mathbf{F}.$$

Logo, a Equação 4.16 toma a forma

$$\begin{aligned} y(\Xi, \mathbf{a}, t) &= \omega_1^2 \mathbf{C}_{mf} \left(-\Omega^2 \mathbf{q} - \Lambda \frac{d\mathbf{q}}{d\tau} + \mathbf{F} \right) \\ &= -\omega_1^2 \mathbf{C}_{mf} \begin{bmatrix} \Omega^2 & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \end{bmatrix} + \omega_1^2 \mathbf{C}_{mf} \mathbf{F} \\ &= -\omega_1^2 \mathbf{C}_{mf} \begin{bmatrix} \Omega^2 & \Lambda \end{bmatrix} \mathbf{z} + \frac{L^2}{EI\beta_1^4} \mathbf{C}_{mf} \Phi|_{\xi=1} f(t). \end{aligned}$$

Então concluímos que no caso dos sensores de velocidade, a formulação em espaço de estados deve ser alterada para

$$y(\Xi, \mathbf{a}, t) = \mathbf{C}_a \mathbf{z} + D_a f(t),$$

sendo que

$$\mathbf{C}_a = -\omega_1^2 \mathbf{C}_{mf} \begin{bmatrix} \Omega^2 & \Lambda \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$D_a = \frac{L^2}{EI\beta_1^4} \mathbf{C}_{mf} \Phi|_{\xi=1}. \quad (4.20)$$

Em particular, nota-se que neste caso a matriz de transmissibilidade D_a não é mais nula.

4.1.4 FRF do filtro modal espacial discreto

A seguir será realizada a análise do filtro modal no domínio da frequência. Admite-se que uma excitação harmônica da forma

$$\mathbf{F}(\tau) = \tilde{\mathbf{F}} e^{ir\tau} \quad (4.21)$$

seja aplicada ao sistema, sendo que o vetor $\tilde{\mathbf{F}}$ não depende do tempo e é real, calculada de acordo com a Equação 3.27. A resposta do sistema submetido a essa perturbação consistirá de uma parcela transiente e outra permanente. Para o estudo no domínio da frequência considera-se apenas a resposta em regime permanente, que será dada por

$$\mathbf{q}(\tau) = \tilde{\mathbf{q}}(r) e^{ir\tau}, \quad (4.22)$$

sendo que $\tilde{\mathbf{q}}(r)$ é um vetor que relaciona o ganho e a defasagem da resposta com relação à perturbação através de números complexos. A substituição de (4.21) e de (4.22) em (3.28) resulta em

$$\begin{aligned} (-r^2 \mathbf{I} + ir\Lambda + \Omega^2) \tilde{\mathbf{q}} e^{ir\tau} &= \tilde{\mathbf{F}} e^{ir\tau} \\ \tilde{\mathbf{q}}(r) &= (-r^2 \mathbf{I} + ir\Lambda + \Omega^2)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

A equação (4.23) pode ser utilizada para reconstruir a resposta do campo de deslocamentos, ao se utilizar a aproximação por modos supostos

$$\bar{\eta}(\xi, \tau) = \Phi(\xi)^T \mathbf{q}(\tau) = \Phi(\xi)^T \tilde{\mathbf{q}}(r) e^{ir\tau} = \tilde{\eta}(\xi, r) e^{ir\tau}, \quad (4.24)$$

sendo

$$\tilde{\eta}(\xi, r) = \mathbf{\Phi}(\xi)^T \tilde{\mathbf{q}}(r).$$

A função $\tilde{\eta}(\xi, r)$ representa a resposta do sistema medida em um ponto ξ da viga ao se aplicar uma força equivalente ao vetor $\mathbf{F}(\tau)$. Através da equação (4.23), pode-se encontrar uma expressão para $\tilde{\eta}(\xi, r)$

$$\tilde{\eta}(\xi, r) = \mathbf{\Phi}(\xi)^T \left(-r^2 \mathbf{I} + ir\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Omega}^2 \right)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}, \quad (4.25)$$

que também pode ser representado como

$$\tilde{\eta}(\xi, r) = \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi) P_k(r) \tilde{F}_k, \quad (4.26)$$

sendo

$$P_k(r) = \frac{1}{r_k^2 - r^2 + i2\zeta_k r_k r}.$$

Como os sensores utilizados medem deslocamento, então o sinal do j -ésimo sensor será

$$\tilde{Y}_j(r) = \tilde{\eta}(\xi_j, r) = \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) P_k(r). \quad (4.27)$$

O equivalente da Equação 4.1 no domínio da frequência é

$$\tilde{Y}(\mathbf{\Xi}, \mathbf{a}, r) = \sum_{j=1}^p \alpha_j \tilde{\eta}(\xi_j, r) = \sum_{j=1}^p \alpha_j \tilde{Y}_j(r). \quad (4.28)$$

Utilizando a Equação 4.27 na Equação 4.28, chega-se à expressão para a FRF do filtro modal

$$\tilde{Y}(\mathbf{\Xi}, \mathbf{a}, r) = \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) P_k(r) \tilde{F}_k, \quad (4.29)$$

sendo p o número de sensores ao longo da viga. A substituição da equação (4.25) na expressão para o sinal do sensor modal fornece sua resposta em frequência

$$Y(\mathbf{\Xi}, \mathbf{a}, r) = \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}^T(\xi_1) \\ \mathbf{\Phi}^T(\xi_2) \\ \vdots \\ \mathbf{\Phi}^T(\xi_p) \end{bmatrix} \left(-r^2 \mathbf{I} + ir\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Omega}^2 \right)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}$$

Por meio da transformada de Fourier da resposta no tempo da Equação 4.1, pode-se realizar a análise do sistema em regime permanente com uma excitação harmônica $p(t) = e^{i\omega t}$, o que dá

$$\begin{aligned} Y(\xi, \alpha, r) &= \mathcal{F}\{y(\xi, \alpha, t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{j=1}^p \alpha_j y_j(t)\right\} = \sum_{j=1}^p \mathcal{F}\{\alpha_j y_j(t)\} \\ &= \sum_{j=1}^p \alpha_j \mathcal{F}\{y_j(t)\} = \sum_{j=1}^p \alpha_j \tilde{Y}_j(r) = \sum_{j=1}^p \alpha_j \tilde{Y}(\xi_j, r). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Em notação matricial, tem-se

$$Y(\mathbf{\Xi}, \mathbf{a}, r) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{Y}(\xi_1, r) \\ \tilde{Y}(\xi_2, r) \\ \vdots \\ \tilde{Y}(\xi_p, r) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

para o filtro modal composto por sensores de posição. Caso sejam utilizados sensores de velocidade, então será necessário aplicar algumas pequenas modificações. Novamente, assume-se que o sistema esteja em regime permanente submetido a uma excitação harmônica. Assim, tem-se novamente $\mathbf{F}(\tau) = \tilde{\mathbf{F}}e^{ir\tau}$, $\mathbf{q}(\tau) = \tilde{\mathbf{q}}(r)e^{ir\tau}$ e o campo de deslocamentos dado pela [Equação 4.24](#). A velocidade pode ser encontrada pela derivada de $\eta(\xi, \eta)$ no tempo:

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(\xi, \eta) &= \frac{d\tilde{\eta}(\xi, \tau)}{d\tau} = \mathbf{\Phi}(\xi)^T \frac{d\tilde{\mathbf{q}}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{\Phi}(\xi)^T \frac{d}{d\tau}(\tilde{\mathbf{q}}(r)e^{ir\tau}) = \mathbf{\Phi}(\xi)^T \tilde{\mathbf{q}}(r) \frac{de^{ir\tau}}{d\tau} \\ &= ir\mathbf{\Phi}(\xi)^T \tilde{\mathbf{q}}(r)e^{ir\tau} = ir\tilde{\eta}(\xi, r)e^{ir\tau} = \tilde{\nu}(\xi, r)e^{ir\tau}, \end{aligned}$$

sendo que

$$\tilde{\nu}(\xi, r) = ir\tilde{\eta}(\xi, r) \quad (4.32)$$

é a resposta em frequência da velocidade de todos os pontos da viga com relação à excitação $\tilde{\mathbf{F}}(r)$. Outra alteração está na representação em série de $\tilde{\nu}(\xi, r)$. A substituição da [4.26](#) em [4.32](#) resulta em

$$\tilde{\nu}(\xi, r) = ir \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi) P_k(r) = \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi) V_k(r) \tilde{F}_k, \quad (4.33)$$

sendo que

$$V_k(r) = \frac{ir}{r_k^2 - r^2 + i2\zeta_k r_k r}. \quad (4.34)$$

Os métodos para calcular os ganhos α_j normalmente se baseiam em uma métrica do quanto o filtro modal se desvia do sinal de referência. Os métodos descritos na literatura podem ser classificados em basicamente duas naturezas: medir o desvio ao longo do espaço, que se baseia nas relações de ortogonalidade das formas modais, ou medir o desvio ao longo da frequência, que se baseia no ajuste de FRFs. Ambas as ideias serão descritas a seguir, embora neste estudo seja utilizado apenas o ajuste de FRFs. Existe a possibilidade de que ambas as técnicas estejam correlacionadas, mas não se tentou encontrar uma transformação entre o domínio espacial e o domínio da frequência.

4.2 Projeto do filtro modal

O projeto do filtro modal trata do processo de encontrar as posições dos sensores e seus respectivos ganhos que resultam em um filtro modal que atenda aos requisitos. Dentre os requisitos, normalmente estão incluídos isolar os modos de interesse, como o 1º e o 2º

Figura 16 – Viga biapoiada no 2º modo de vibração

Figura 17 – Leituras igualmente espaçadas da viga biapoiada

modos de vibração, dentro de uma faixa de frequência dentro da qual o filtro irá operar. Outros requisitos, menos diretos, seriam manter a fase mínima da resposta do filtro ou reduzir o número de sensores ao mínimo necessário.

Para encontrar o melhor filtro de forma automatizada, geralmente se convencionou um índice que, levando em conta os requisitos do filtro, atribuirá uma nota ao seu desempenho. Esse índice será então usado como a função objetivo em um método de otimização apropriado.

Duas métricas são as mais comuns: a que mede o desvio do filtro modal com relação às formas modais e a que mede o desvio do filtro modal com relação a uma FRF de referência pré-estabelecida.

4.2.1 Cálculo baseado na forma modal

No caso de uma viga simplesmente apoiada, em que ambas as extremidades estão pinadas, sabe-se que os modos de vibrar são da forma $\sin(k\pi\xi)$, $k = 1, 2, \dots$. Nesse caso, pode-se imaginar um campo de deslocamentos como sendo uma composição de várias funções $\sin(k\pi\xi)$, sendo que k é teoricamente ilimitado. Na prática, o modelo é limitado a uma frequência natural máxima, devido a limitações computacionais e ao reduzido efeito que os modos de mais alta ordem possuem. Assim, qualquer campo de deformações da viga pode ser satisfatoriamente decomposto pela soma da contribuição de $\sin(k\pi\xi)$, $k = 1, 2, \dots, m$, sendo que m representa o índice do modo de mais alta ordem incluído no modelo. Dessa forma, pode-se imaginar que qualquer campo de deformações da viga seria um sinal de banda limitada, com largura de banda $Q = m/2$ Hz. Imagina-se agora que diversos sensores pontuais são regularmente distribuídos ao longo da estrutura, isto é, o espaçamento entre eles é o mesmo, [Figura 16](#). Então a leitura de cada sensor pode ser considerada uma amostra ao longo da dimensão ξ , em vez do tempo, que é a aplicação mais comum, [Figura 17](#). Segundo o teorema da amostragem de Nyquist, seria necessária uma taxa de amostragem $F_s \leq 2Q$ para se reconstruir o campo de deformações de forma exata. Assim, $F_s = 2m/2 = m$. Logo, se a viga simplesmente apoiada possui m modos, então serão necessários ao menos m sensores regularmente distribuídos ao longo de seu

comprimento.

No entanto, uma abordagem alternativa pode ser usada se não for imposto o espaçamento uniforme entre os sensores, que é uma das hipóteses necessárias para aplicar critério de Nyquist.

Segue da definição de filtros modais para medidas de deslocamento, equações (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4), que o campo de deslocamentos em termos das funções modais da viga biapoiada toma a forma

$$w(\xi, t) = \sum_{k=1}^m c_k(t) \sin(k\pi\xi), \quad (4.35)$$

o que resulta em

$$y(\xi, \alpha, t) = \sum_{j=1}^p \alpha_j w(\xi_j, t) \quad (4.36)$$

$$= \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m q_k(t) \sin(k\pi\xi_j) \quad (4.37)$$

$$= \sum_{k=1}^m q_k(t) \sum_{j=1}^p \alpha_j \sin(k\pi\xi_j), \quad (4.38)$$

sendo que no último passo tudo o que se fez foi rearranjar as somas. A última expressão pode ser reescrita em forma matricial, ficando

$$y(\xi, \alpha, t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_m(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sin(1\pi\xi_1) & \sin(1\pi\xi_2) & \cdots & \sin(1\pi\xi_p) \\ \sin(2\pi\xi_1) & \sin(2\pi\xi_2) & \cdots & \sin(2\pi\xi_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(m\pi\xi_1) & \sin(m\pi\xi_2) & \cdots & \sin(m\pi\xi_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

ou, em notação mais compacta,

$$y(\xi, \alpha, t) = \mathbf{q}^T \Phi \mathbf{a}, \quad (4.40)$$

sendo

$$\mathbf{c} = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad \cdots \quad q_m(t)]^T, \\ \Phi = \begin{bmatrix} \sin(1\pi\xi_1) & \sin(1\pi\xi_2) & \cdots & \sin(1\pi\xi_p) \\ \sin(2\pi\xi_1) & \sin(2\pi\xi_2) & \cdots & \sin(2\pi\xi_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(m\pi\xi_1) & \sin(m\pi\xi_2) & \cdots & \sin(m\pi\xi_p) \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{a}$ como definida anteriormente. Para que apenas o 1º modo esteja sempre presente, basta encontrar os ganhos α_j tal que

$$\begin{bmatrix} \sin(1\pi\xi_1) & \sin(1\pi\xi_2) & \cdots & \sin(1\pi\xi_p) \\ \sin(2\pi\xi_1) & \sin(2\pi\xi_2) & \cdots & \sin(2\pi\xi_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(m\pi\xi_1) & \sin(m\pi\xi_2) & \cdots & \sin(m\pi\xi_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

caso a solução exista. A condição de existência não é mais que o número de sensores seja igual a m , mas que o espaço coluna da [Equação 4.41](#) seja igual a $[1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$. Assim, a [Equação 4.40](#) poderá ser simplificada para

$$y(\xi, \alpha, t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_m(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = c_1(t).$$

Logo, tem-se na saída somente o sinal equivalente ao 1º modo. De forma equivalente, caso exista a solução para o sistema $\mathbf{S}\mathbf{a} = [1 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$, sendo $\mathbf{S}$ a matriz de senos, então essa solução dará origem a um filtro modal que detectará apenas os dois primeiros modos. Em geral, se definirmos um vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}$ de forma que $b_k = 0$ quando o k -ésimo deve ser filtrado e $b_k = 1$ quando o k -ésimo modo deve ser detectado, então a solução do sistema

$$\mathbf{S}\mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad (4.42)$$

caso exista, fornece os ganhos α_j para o projeto do filtro.

Toma-se agora uma viga em geral. As autofunções não necessariamente são funções senoidais, mas método utilizado para calcular os ganhos α_j ainda é válido com as devidas alterações das formas modais,

$$\begin{bmatrix} \Phi_1(\xi_1) & \Phi_1(\xi_2) & \dots & \Phi_1(\xi_p) \\ \Phi_2(\xi_1) & \Phi_2(\xi_2) & \dots & \Phi_2(\xi_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_m(\xi_1) & \Phi_m(\xi_2) & \dots & \Phi_m(\xi_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

sendo Φ_j a forma modal do j -ésimo modo da viga submetida a qualquer condição de contorno, em vez do exemplo dado para a viga biapoada. Como um sistema linear ainda deve ser resolvido, para que a solução exista a condição necessária e suficiente é que o vetor $\mathbf{b}$ esteja no espaço coluna de Φ , o que deixa a possibilidade de o número de sensores p ser menor do que o número de modos do sistema m . Para o caso em que $p \geq m$, normalmente se tem um problema sobredeterminado que não possui solução, mas uma aproximação pode ser encontrada por mínimos quadrados ([GAWRONSKI, 2000](#)).

4.2.2 Cálculo baseado no ajuste de FRFs

Outra abordagem está em definir uma FRF de referência para o filtro modal e depois calcular os ganhos α_j de forma que a FRF do filtro modal resultante seja o mais próximo possível do sinal de referência. A métrica mais utilizada na literatura emprega uma função composta pela soma de vários graus de liberdade identificados por um processo

de análise modal. A formulação é equivalente à descrita em (PREUMONT et al., 2003). Assim, o j -ésimo modo da estrutura é descrito por

$$G_j(r) = \frac{2\zeta_j r_j}{r_j^2 - r^2 + i2\zeta_j r_j r}$$

quando se está analisando as FRFs de deslocamento. Caso seja utilizado um filtro modal composto por sensores de velocidade, então $G_j(r)$ deve ser

$$G_j(r) = \frac{i2\zeta_j r_j r}{r_j^2 - r^2 + i2\zeta_j r_j r}.$$

Para o caso de aceleração,

$$G_j(r) = -\frac{2\zeta_j r_j r^2}{r_j^2 - r^2 + i2\zeta_j r_j r}.$$

Ao menos duas desvantagens são conhecidas ao se usar o ajuste de FRF:

- a fim de determinar G_j , é preciso identificar a frequência natural ω_j e o amortecimento modal ξ_j da estrutura. Em outras palavras, essas propriedades devem ser obtidas, seja através de um modelo ou através de técnicas de identificação modal experimental;
- conforme explorado em (SHIGUEOKA; TRINDADE, 2014), a exatidão do amortecimento ξ_j é fundamental para que a resposta do filtro consiga aproximar-se à resposta desejada.

Este trabalho assumirá que os parâmetros modais do sistema foram adequadamente identificados e não levará em consideração a robustez do método com relação a incertezas.

Ocorre que nem todos os modos do modelo precisam ser incluídos na FRF de referência. Mesmo dentre os modos que de fato entram na formulação, existem aqueles que se deseja atenuar mais intensamente, o que significa que o sinal de retroalimentação deve ser mais intenso para esse modo em particular. A fim de levar em consideração se um modo deve ou não ser detectado e com qual intensidade, define-se o vetor com coeficientes de ponderação $\mathbf{W} = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T$. Assim, o sinal de referência pode ser construído a partir da soma dos modos desejados em

$$G(r) = \sum_{j=1}^m w_j G_j(r) = \frac{2\zeta_j r_j w_j}{r_j^2 - r^2 + i2\zeta_j r_j r}. \quad (4.44)$$

Para o caso de sensores de velocidade,

$$G(r) = \sum_{j=1}^m w_j G_j(r) = \frac{i2\zeta_j r_j w_j r}{r_j^2 - r^2 + i2\zeta_j r_j r}. \quad (4.45)$$

Para aceleração,

$$G(r) = \sum_{j=1}^m w_j G_j(r) = -\frac{2\zeta_j r_j w_j r^2}{r_j^2 - r^2 + i2\zeta_j r_j r}. \quad (4.46)$$

Pretende-se encontrar os valores de posição Ξ e ganhos $\mathbf{a}$ que tornem a FRF do filtro modal $Y(\Xi, \mathbf{a}, r)$ o mais próximo possível da FRF de referência $G(r)$ dentro da faixa de frequências $[r_{min}, r_{max}]$. Fora desse intervalo, o comportamento do filtro será desconsiderado. Define-se então a função erro como a diferença entre o sinal obtido e o sinal de referência

$$E(\Xi, \mathbf{a}, r) = Y(\Xi, \mathbf{a}, r) - G(r). \quad (4.47)$$

Uma vez que a integral da função $E(\Xi, \mathbf{a}, r)$ ao longo do intervalo de frequências pode ser nula mesmo para uma função erro não nula, então será usada a integral do quadrado da norma da função erro para medir o desvio do sinal obtido. Dessa forma, o desvio que se deseja minimizar pode ser calculado como

$$Q(\Xi, \mathbf{a}) = \int_{r_{min}}^{r_{max}} E(\Xi, \mathbf{a}, r) \bar{E}(\Xi, \mathbf{a}, r) dr. \quad (4.48)$$

Como tanto $Y(r)$ quanto $G(r)$ são funções complexas, essa medida do desvio entre a FRF obtida e a desejada não só leva em consideração a diferença de magnitude, mas também a diferença de fase. A fim de compreender melhor como isso ocorre, na [Figura 18](#) foram plotadas FRFs $Y(r)$ e $G(r)$ usando diagramas polares. O eixo r representa a faixa de frequências normalizadas em que as FRFs foram computadas, enquanto os eixos Re e Im indicam as partes real e imaginária de $Y(r)$ e $G(r)$. Cada círculo representa um modo de vibração, conforme a teoria de análise modal. A linha em vermelho indica $G(r)$, que é a função que se deseja obter, a linha azul indica $Y(r)$, que é a função que se pôde obter. A área hachurada em preto indica o desvio entre ambas. Mesmo que possuam os mesmos valores de magnitude, o erro não será nulo, pois uma estará rotacionada em relação a outra, resultando em uma área não nula que será contabilizada no cálculo do erro.

Tomando-se a definição de produto interno entre duas funções para o intervalo de interesse $[r_{min}, r_{max}]$, pode-se adotar a notação

$$\langle f(r), g(r) \rangle = \int_{r_{min}}^{r_{max}} f(r) \bar{g}(r) dr \quad (4.49)$$

para representar o erro quadrático de forma mais compacta

$$Q(\Xi, \mathbf{a}) = \langle E(\Xi, \mathbf{a}, r), E(\Xi, \mathbf{a}, r) \rangle.$$

Para calcular o gradiente da função, no entanto, é necessário expandir a formulação da função objetivo substituindo-se a expressão para $Y(\Xi, \mathbf{a}, r)$ na [Equação 4.1.4](#) e a expressão para $G(r)$ na [Equação 4.44](#) na formulação da função objetivo da [Equação 4.48](#), resultando em

$$Q = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k P_k(r) - G(r) \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^p \bar{\alpha}_j \sum_{k=1}^m \bar{\Phi}_k(\xi_j) \tilde{F}_k \bar{P}_k(r) - \bar{G}(r) \right] dr. \quad (4.50)$$

Figura 18 – Exemplo ilustrando a diferença, em hachurado, entre a FRF de referência e a obtida.

A função $E(\Xi, \mathbf{a})$ é complexa com parte imaginária, mas as derivadas parciais com relação a ξ_j e α_j para cada j -ésimo sensor podem ser calculadas sem a necessidade de recorrer ao Cálculo com variáveis complexas, pois as autofunções $\Phi_j(\xi)$ são reais e será feita a hipótese de que os ganhos α_j apenas podem ser reais. Os demais termos de [Equação 4.50](#) são independentes de ξ_j e α_j e são considerados como constantes ao se calcular as derivadas parciais. Apesar de ser teoricamente possível imaginar α_j complexos com termos imaginários para introduzir defasagem no sinal, essa construção não é realizada na prática. Dessa forma, $\alpha_j = \bar{\alpha}_j$ e a [Equação 4.50](#) se torna

$$Q = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k P_k(r) - G(r) \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k \bar{P}_k(r) - \bar{G}(r) \right] dr. \quad (4.51)$$

O gradiente de uma função é um vetor que contém as derivadas de uma função como suas componentes. Assim, deve-se calcular o vetor

$$\nabla Q = \left[\frac{\partial Q}{\partial \xi_1} \quad \frac{\partial Q}{\partial \xi_2} \quad \dots \quad \frac{\partial Q}{\partial \xi_p} \quad \frac{\partial Q}{\partial \alpha_1} \quad \frac{\partial Q}{\partial \alpha_2} \quad \dots \quad \frac{\partial Q}{\partial \alpha_p} \right]^T. \quad (4.52)$$

A derivada parcial de Q com relação a ξ_t , $t = 1, 2, \dots, p$ será calculada a seguir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial \xi_t} &= \frac{\partial}{\partial \xi_t} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k P_k(r) - G(r) \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k \bar{P}_k(r) - \bar{G}(r) \right] dr \\
&= \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\partial}{\partial \xi_t} \left\{ \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k P_k(r) - G(r) \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k \bar{P}_k(r) - \bar{G}(r) \right] \right\} dr \\
&= \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\partial}{\partial \xi_t} \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k P_k(r) - G(r) \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k \bar{P}_k(r) - \bar{G}(r) \right] \\
&\quad + \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k P_k(r) - G(r) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_t} \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k \bar{P}_k(r) - \bar{G}(r) \right] dr \\
&= \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left[\alpha_t \sum_{k=1}^m \frac{\partial \Phi_k(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_t} \tilde{F}_k P_k(r) \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k \bar{P}_k(r) - \bar{G}(r) \right] \\
&\quad + \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k P_k(r) - G(r) \right] \cdot \left[\alpha_t \sum_{k=1}^m \frac{\partial \Phi_k(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_t} \tilde{F}_k \bar{P}_k(r) \right] dr \\
&= \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \alpha_t \frac{\partial Y_t}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_t} \cdot [\bar{Y}(\Xi, \mathbf{a}, r) - \bar{G}(r)] dr \\
&\quad + \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \alpha_t \frac{\partial \bar{Y}_t}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_t} \cdot [Y(\Xi, \mathbf{a}, r) - G(r)] dr \\
&= \alpha_t \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\partial Y_t}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_t} \cdot \bar{E}(\Xi, \mathbf{a}, r) dr + \alpha_t \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\partial \bar{Y}_t}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_t} \cdot E(\Xi, \mathbf{a}, r) dr. \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Relembrando a formulação para o produto interno em (4.49), a expressão em (4.53) assume uma notação mais compacta

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial \xi_t} &= \alpha_t \left\langle \frac{\partial Y_t}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_t}, E(\Xi, \mathbf{a}, r) \right\rangle + \alpha_t \overline{\left\langle \frac{\partial Y_t}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_t}, E(\Xi, \mathbf{a}, r) \right\rangle} \\
&= 2\alpha_t \Re \left(\left\langle \frac{\partial Y_t}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_t}, E(\Xi, \mathbf{a}, r) \right\rangle \right). \tag{4.54}
\end{aligned}$$

O próximo passo consiste de calcular a derivada parcial de Q com relação aos ganhos α_t ,

$t = 1, 2, \dots, p$, resultando em

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial \alpha_t} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_t} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k P_k(r) - G(r) \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k \bar{P}_k(r) - \bar{G}(r) \right] dr \\
&= \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\partial}{\partial \alpha_t} \left\{ \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k P_k(r) - G(r) \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k \bar{P}_k(r) - \bar{G}(r) \right] \right\} dr \\
&= \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\partial}{\partial \alpha_t} \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k P_k(r) - G(r) \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k \bar{P}_k(r) - \bar{G}(r) \right] \\
&\quad + \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k P_k(r) - G(r) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_t} \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k \bar{P}_k(r) - \bar{G}(r) \right] dr \\
&= \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left[\sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_t) \tilde{F}_k P_k(r) \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k \bar{P}_k(r) - \bar{G}(r) \right] \\
&\quad + \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_j) \tilde{F}_k P_k(r) - G(r) \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^m \Phi_k(\xi_t) \tilde{F}_k \bar{P}_k(r) \right] dr \\
&= \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} Y_t(r) \bar{E}(\Xi, \mathbf{a}, r) dr + \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \bar{Y}_t(r) E(\Xi, \mathbf{a}, r) dr \\
&= \langle Y_t(r), E(\Xi, \mathbf{a}, r) \rangle + \overline{\langle Y_t(r), E(\Xi, \mathbf{a}, r) \rangle} \\
&= 2\Re(\langle Y_t(r), E(\Xi, \mathbf{a}, r) \rangle). \tag{4.55}
\end{aligned}$$

Dessa forma, todos as componentes do vetor gradiente em (4.52) podem ser determinadas com a ajuda das eq. (4.54) e (4.55).

$$\nabla Q(\Xi, \mathbf{a}, r) = 2\Re \left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \left\langle \frac{\partial Y_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_1}, E(\Xi, \mathbf{a}, r) \right\rangle \\ \vdots \\ \alpha_p \left\langle \frac{\partial Y_p}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_p}, E(\Xi, \mathbf{a}, r) \right\rangle \\ \langle Y_1(r), E(\Xi, \mathbf{a}, r) \rangle \\ \vdots \\ \langle Y_p(r), E(\Xi, \mathbf{a}, r) \rangle \end{bmatrix} \right). \tag{4.56}$$

4.3 Caso particular com posicionamento constante

Em particular, se a função objetivo depende apenas de α_j , $j = 1, 2, \dots, p$, então o seu gradiente se torna

$$\nabla Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial Q}{\partial \alpha_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial \alpha_p} \end{bmatrix} = 2\Re \left(\begin{bmatrix} \langle Y_1(r), E(\Xi, \mathbf{a}, r) \rangle \\ \vdots \\ \langle Y_p(r), E(\Xi, \mathbf{a}, r) \rangle \end{bmatrix} \right). \tag{4.57}$$

No ponto em que o gradiente se torna o vetor nulo, segue que cada j -ésimo termo de Equação 4.57 se torna

$$\Re(\langle Y_j(r), E(\Xi, \mathbf{a}, r) \rangle) = 0.$$

Relembrando que o erro é igual à diferença entre o sinal obtido e o de referência,

$$\Re(\langle Y_j(r), Y(\Xi, \mathbf{a}, r) - G(r) \rangle) = 0.$$

Uma vez que tanto a integral usada no produto interno quanto o operador parte real $\Re(z)$ são operadores lineares para os números complexos se for usada (i) a soma convencional entre números complexos e (ii) multiplicação por um escalar real, resulta que

$$\Re(\langle Y_j(r), Y(\Xi, \mathbf{a}, r) \rangle) = \Re(\langle Y_j(r), G(r) \rangle).$$

Agora o sinal do filtro modal $Y(\Xi, \mathbf{a}, r)$ pode ser expandido em termos do sinal de cada k -ésimo sensor individual $Y(\Xi_k, r)$ e seu ganho α_k , o que dá a soma

$$\Re\left(\left\langle Y_j(r), \sum_{k=1}^p \alpha_k Y_k(r) \right\rangle\right) = \Re(\langle Y_j(r), G(r) \rangle).$$

Pode-se mover a soma e para fora do produto interno graças à sua linearidade, resultando em

$$\Re\left(\sum_{k=1}^p \langle Y_j(r), \alpha_k Y_k(r) \rangle\right) = \Re(\langle Y_j(r), G(r) \rangle).$$

Novamente graças à linearidade, os ganhos reais α_k podem ser fatorados do produto interno e do operador $\Re(z)$.

$$\Re\left(\sum_{k=1}^p \langle Y_j(r), Y_k(r) \rangle\right) \alpha_k = \Re(\langle Y_j(r), G(r) \rangle). \quad (4.58)$$

Essa é a expressão para o método dos mínimos quadrados usado quando se deseja utilizar ganhos reais. Expressar a equação (4.58) em termos de multiplicação de matrizes mostra a uma notação mais familiar

$$\Re\left(\left[\langle Y_j(r), Y_1(r) \rangle \langle Y_j(r), Y_2(r) \rangle \cdots \langle Y_j(r), Y_p(r) \rangle\right]\right) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = \Re\left(\left[\langle Y_j(r), G(r) \rangle\right]\right).$$

Se as equações de todos os sensores forem empilhadas em um sistema linear de equações, o resultado é

$$\Re\left(\begin{bmatrix} \langle Y_1(r), Y_1(r) \rangle & \langle Y_1(r), Y_2(r) \rangle & \cdots & \langle Y_1(r), Y_p(r) \rangle \\ \langle Y_2(r), Y_1(r) \rangle & \langle Y_2(r), Y_2(r) \rangle & \cdots & \langle Y_2(r), Y_p(r) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Y_p(r), Y_1(r) \rangle & \langle Y_p(r), Y_2(r) \rangle & \cdots & \langle Y_p(r), Y_p(r) \rangle \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = \Re\left(\begin{bmatrix} \langle Y_1(r), G(r) \rangle \\ \langle Y_2(r), G(r) \rangle \\ \vdots \\ \langle Y_p(r), G(r) \rangle \end{bmatrix}\right), \quad (4.59)$$

que é a versão real do método dos mínimos quadrados como tem sido aplicado na literatura. É uma extensão do método da pseudoinversa da matriz de FRFs. A única diferença reside no produto interno, que neste caso foi definido como a integral do produto da primeira função, $f(r)$, e o conjugado da segunda, $\bar{g}(r)$ dentro da faixa de frequências $[r_{min}, r_{max}]$ considerada. No caso dos trabalhos anteriores, o produto interno é tomado como o produto escalar entre vetores do $\mathbb{R}^n$, sendo n o número de pontos tomados ao longo do intervalo $[r_{min}, r_{max}]$. Pode-se imaginar que o caso do produto interno definido como uma integral equivale a um produto escalar com um número infinito de pontos, apesar de não ser uma analogia exatamente correta. Em ambos os casos, no entanto, os ganhos α_j são obtidos através da aplicação do método MMQ.

A fim de se ter uma notação mais compacta, definem-se

$$\mathbf{A}_{MMQ} = \begin{bmatrix} \langle Y_1(r), Y_1(r) \rangle & \langle Y_1(r), Y_2(r) \rangle & \cdots & \langle Y_1(r), Y_p(r) \rangle \\ \langle Y_2(r), Y_1(r) \rangle & \langle Y_2(r), Y_2(r) \rangle & \cdots & \langle Y_2(r), Y_p(r) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Y_p(r), Y_1(r) \rangle & \langle Y_p(r), Y_2(r) \rangle & \cdots & \langle Y_p(r), Y_p(r) \rangle \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{MMQ} = \begin{bmatrix} \langle Y_1(r), G(r) \rangle \\ \langle Y_2(r), G(r) \rangle \\ \vdots \\ \langle Y_p(r), G(r) \rangle \end{bmatrix}$$

para reescrever a [Equação 4.59](#) como

$$\Re(\mathbf{A}_{MMQ})\mathbf{a} = \Re(\mathbf{b}_{MMQ}). \quad (4.60)$$

Alguns trabalhos publicados na literatura acadêmica levam a crer que se um filtro modal pretende detectar ou remover n modos, então é necessário incluir ao menos n sensores. Essa regra baseada em Álgebra Linear elementar pode ser verificada ao se realizar a otimização de filtros modais com um posicionamento qualquer de n sensores, desde nenhum deles esteja nas condições de contorno ou que dois deles não estejam na mesma posição. No entanto, é possível ajustar a saída do filtro modal à sua referência mesmo com um número reduzido de sensores se a ponderação não for uniforme e se houver informação prévia sobre o posicionamento dos sensores. Como será abordado no [Capítulo 6](#), a FRF de um par sensor e atuador co-localizados que detecta todos os modos e mantém fase mínima pode ser satisfatoriamente simulada usando-se apenas três sensores adequadamente posicionados.

4.4 Condicionamento da matriz de mínimos quadrados

Antes de se aplicar o método dos mínimos quadrados sempre se deve verificar o condicionamento da matriz. Existem basicamente dois motivos para se conferir o condicionamento da matriz: evitar o posicionamento de sensores muito próximos e atribuir ao filtro modal maior tolerância a erros de identificação.

4.4.1 Casos em que $\mathbf{A}_{MMQ}$ não é inversível

Não se fez um estudo apurado das ocasiões em que o método dos mínimos quadrados representado pela Equação 4.59 deixa de ser aplicável. No entanto, dois casos foram observados:

- a) um dos sensores está em local que é o nó de todos os modos, por exemplo, a base da viga engastada (esses pontos normalmente se situam nas condições de contorno);
- b) dois sensores estão na mesma posição.

Ambos os casos podem ser facilmente explicados. Suponha que o k -ésimo sensor esteja posicionado em um ponto onde o deslocamento é sempre nulo. Então a matriz $\mathbf{A}_{MMQ}$ em Equação 4.59 assumirá a forma

$$\Re \left(\begin{bmatrix} \langle Y_1(r), Y_1(r) \rangle & \langle Y_1(r), Y_2(r) \rangle & \cdots & \langle Y_1(r), 0 \rangle & \cdots & \langle Y_1(r), Y_p(r) \rangle \\ \langle Y_2(r), Y_1(r) \rangle & \langle Y_2(r), Y_2(r) \rangle & \cdots & \langle Y_2(r), 0 \rangle & \cdots & \langle Y_2(r), Y_p(r) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Y_p(r), Y_1(r) \rangle & \langle Y_p(r), Y_2(r) \rangle & \cdots & \langle Y_p(r), 0 \rangle & \cdots & \langle Y_p(r), Y_p(r) \rangle \end{bmatrix} \right),$$

o que significa que a k -ésima coluna será nula,

$$\Re \left(\begin{bmatrix} \langle Y_1(r), Y_1(r) \rangle & \langle Y_1(r), Y_2(r) \rangle & \cdots & 0 & \cdots & \langle Y_1(r), Y_p(r) \rangle \\ \langle Y_2(r), Y_1(r) \rangle & \langle Y_2(r), Y_2(r) \rangle & \cdots & 0 & \cdots & \langle Y_2(r), Y_p(r) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Y_p(r), Y_1(r) \rangle & \langle Y_p(r), Y_2(r) \rangle & \cdots & 0 & \cdots & \langle Y_p(r), Y_p(r) \rangle \end{bmatrix} \right),$$

e a matriz $\mathbf{A}_{MMQ}$ deixará de ser inversível.

O outro caso observado envolve dois sensores j e k na mesma posição. Se isso ocorrer, então $Y_j(r) = Y_k(r)$, o que significa que

$$\Re \left(\begin{bmatrix} \langle Y_1(r), Y_1(r) \rangle & \cdots & \langle Y_1(r), Y_j(r) \rangle & \cdots & \langle Y_1(r), Y_k(r) \rangle & \cdots & \langle Y_1(r), Y_p(r) \rangle \\ \langle Y_2(r), Y_1(r) \rangle & \cdots & \langle Y_2(r), Y_j(r) \rangle & \cdots & \langle Y_2(r), Y_k(r) \rangle & \cdots & \langle Y_2(r), Y_p(r) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Y_p(r), Y_1(r) \rangle & \cdots & \langle Y_p(r), Y_j(r) \rangle & \cdots & \langle Y_p(r), Y_k(r) \rangle & \cdots & \langle Y_p(r), Y_p(r) \rangle \end{bmatrix} \right)$$

passará agora a possuir duas colunas exatamente iguais:

$$\Re \left(\begin{bmatrix} \langle Y_1(r), Y_1(r) \rangle & \cdots & \langle Y_1(r), Y_k(r) \rangle & \cdots & \langle Y_1(r), Y_k(r) \rangle & \cdots & \langle Y_1(r), Y_p(r) \rangle \\ \langle Y_2(r), Y_1(r) \rangle & \cdots & \langle Y_2(r), Y_k(r) \rangle & \cdots & \langle Y_2(r), Y_k(r) \rangle & \cdots & \langle Y_2(r), Y_p(r) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Y_p(r), Y_1(r) \rangle & \cdots & \langle Y_p(r), Y_k(r) \rangle & \cdots & \langle Y_p(r), Y_k(r) \rangle & \cdots & \langle Y_p(r), Y_p(r) \rangle \end{bmatrix} \right).$$

Como as colunas não formam mais um conjunto de vetores linearmente independentes, resulta que a matriz novamente deixa de ser inversível.

Uma forma manual de remediar o 1º problema é remover o sensor que está na condição de contorno. Para remediar o 2º problema, se d sensores estão em um mesmo ponto, então $d - 1$ deles deve ser removido, sobrando apenas um deles.

4.4.2 Propagação de erros no projeto do filtro modal

Para a discussão a seguir será importante definir $\kappa(\mathbf{A})$, o número de condicionamento de uma matriz $\mathbf{A}$. Em um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, o número de condicionamento da matriz $\mathbf{A}$ é definido como

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad (4.61)$$

como descrito em (STRANG, 2010) e (CHENEY; KINCAID, 2008). Na Equação 4.61, $\delta\mathbf{x}$ representa o desvio com relação à solução exata $\mathbf{x}$ causado por um desvio $\delta\mathbf{b}$ acrescido a $\mathbf{b}$.

Durante as otimizações, não se notou problema algum com matrizes não inversíveis. No entanto, em alguns casos surgiam matrizes $\mathfrak{R}(\mathbf{A}_{MMQ})$ mal condicionadas. Quando isso ocorre, a matriz está próxima de se tornar não inversível e as rotinas numéricas podem não conseguir resolver o problema de mínimos quadrados da Equação 4.60. Esse problema ocorre durante a otimização quando um sensor está muito próximo a uma vinculação, $\xi_j < 0.01$, ou quando dois sensores estão muito próximos, quando $|\xi_j - \xi_k| < 0.01$. Esses dois casos acabam por ter uma indesejável consequência. Erros presentes no vetor $\mathbf{b}$ são consideravelmente ampliados no cálculo dos ganhos α_j do filtro modal quando a matriz é mal condicionada, o que seria desejável evitar, pois uma análise do efeito de incertezas em filtros modais aplicados uma placa mostrou que desvios nos ganhos α_j dos sensores afetam mais o desempenho do filtro modal do que desvios no posicionamento ξ_j dos sensores (TRINDADE et al., 2013).

A definição do número fornece uma estimativa do quanto o erro pode ser propagado para o cálculo dos α_j . Se na Equação 4.61 $\mathbf{A}$ for substituída por $\mathfrak{R}(\mathbf{A}_{MMQ})$, $\mathbf{x}$ por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ por $\mathfrak{R}(\mathbf{b}_{MMQ})$, então

$$\frac{\|\delta\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|} = \kappa(\mathfrak{R}(\mathbf{A}_{MMQ})) \frac{\|\delta\mathfrak{R}(\mathbf{b}_{MMQ})\|}{\|\mathfrak{R}(\mathbf{b}_{MMQ})\|} \quad (4.62)$$

Via de regra, se $\kappa(\mathfrak{R}(\mathbf{A}_{MMQ}))$ é da ordem de 10^k , então ao menos k algarismos significativos serão perdidos ao se resolver o sistema linear (4.60). Quando se perdem muitos dígitos significativos ao longo dos cálculos, ao fim o resultado não representa muito bem o que se espera ter. Dessa forma, evitar-se-á que $\kappa(\mathfrak{R}(\mathbf{A}_{MMQ}))$ esteja em uma ordem de grandeza acima de 10^3 . Caso esteja muito grande, então os sensores que estiverem muito próximos devem ser distanciados ou algum sensor próximo a uma vinculação deve ser removido. Mais adiante, $\kappa(\mathfrak{R}(\mathbf{A}_{MMQ}))$ será incluído na formulação da função objetivo do filtro modal a fim de evitar que o posicionamento durante a otimização resulte em uma matriz $\mathfrak{R}(\mathbf{A}_{MMQ})$ mal condicionada.

5 Análise da viga em malha aberta

O primeiro estudo de caso consiste da otimização de um filtro modal constituído de quatro sensores posicionados ao longo de uma viga engastada-livre e possui como objetivo isolar os quatro primeiros modos de vibração. A fim de levar em conta os efeitos de *spillover*, os doze primeiros modos de vibração da viga foram incluídos no modelo.

A FRF da viga baseou-se na solução analítica da equação diferencial parcial que modela o seu comportamento dinâmico. Posteriormente, a função objetivo foi construída com base no desvio quadrático entre a FRF do sensor e a sua FRF de referência. Uma vez que a expressão da função objetivo assim determinada pode ser derivada em função dos parâmetros de otimização, a saber, a posição e o ganho de cada sensor discreto, então é possível aplicar métodos de otimização baseados no gradiente da função objetivo.

As otimizações aplicadas mostraram que a função objetivo apresenta mais de um mínimo local, o que se pode esperar de um problema de otimização não convexo. A fim de se reduzir o efeito de múltiplos mínimos locais, o método do gradiente foi aplicado para diversos vetores de parâmetros iniciais e o melhor resultado obtido foi selecionado. Ao final, os resultados de todas as otimizações foram investigadas, levando a fortes indícios de que um ótimo global foi obtido, apesar de não ser possível afirmar com certeza.

5.1 Função objetivo

Para o estudo do problema de otimização da viga em malha aberta, empregou-se como função objetivo o desvio quadrático $Q(\Xi, \mathbf{a})$, [Equação 4.48](#), desenvolvido na [subseção 4.2.2](#). A preferência por essa formulação baseada em mínimos quadrados está em seu histórico de ampla adoção no projeto de filtros modais, embora existam critérios alternativos, como considerar a soma da magnitude dos picos de ressonância. Para exemplos de trabalhos anteriores em filtros modais que se basearam em desvio quadrático, ver ([GAWRONSKI, 2000](#)), ([FRISWELL, 2001b](#)), ([PREUMONT et al., 2003](#)) e ([PAGANI JR; TRINDADE, 2009](#)).

5.2 Método do ponto interior

O método do ponto interior consiste de programação não linear aplicada a uma função objetivo acrescida de penalizações a fim de garantir que as restrições do problema serão respeitadas. Segundo a documentação do MATLAB 2013a ([MATHWORKS, 2013a](#)),

se o problema de otimização for definido como

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \\ & \text{sujeito a} \\ & h(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

com $f(\mathbf{x})$ sendo a função objetivo, $\mathbf{x}$ o vetor contendo as variáveis de otimização, $h(\mathbf{x})$ as m restrições de igualdade e $g(\mathbf{x})$ as p restrições de desigualdade. então o problema aproximado é definido como

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}, \mathbf{s}} f_{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{s}} \left[f(\mathbf{x}) - \mu \sum_j \ln(s_j) \right], \\ & \text{sujeito a} \\ & h(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & g(\mathbf{x}) + \mathbf{s} = \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

sendo que os elementos de $\mathbf{s}$ são as variáveis de folga, que são usadas para garantir as desigualdades $g(\mathbf{x})$. Elas garantem que todas as restrições em $g(\mathbf{x})$ sejam obedecidas se todas forem forçadas a serem positivas. O coeficiente μ controla o quanto a penalidade introduzida por $g(\mathbf{s})$ afeta a função objetivo original. Normalmente possui um valor inicial entre 0.1 e 1, sendo que o padrão da função `fmincon` é 0.1. A fim de incluir as restrições, as condições de Kushar-Kuhn-Tucker (KKT) são aplicadas, resultando na função Lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}_h, \boldsymbol{\lambda}_g)$ (BYRD; GILBERT; NOCEDAL, 2000)

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}_h, \boldsymbol{\lambda}_g} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}_h, \boldsymbol{\lambda}_g) = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}_h, \boldsymbol{\lambda}_g} \left\{ f(\mathbf{x}) - \mu \sum_j \ln(s_j) + \boldsymbol{\lambda}_h^T h(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}_g^T [g(\mathbf{x}) + \mathbf{s}] \right\}. \tag{5.3}$$

As condições KKT para esse problema são

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_r} + \sum_{j=1}^m \lambda_{h,j} \frac{\partial h_j}{\partial x_r} + \sum_{k=1}^p \lambda_{g,k} \frac{\partial g_k}{\partial x_r} = 0 \\ -\frac{\mu}{s_t} + \lambda_{g,t} = 0 \\ h(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ g(\mathbf{x}) + \mathbf{s} = \mathbf{0} \end{cases}$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{cases} \nabla_x f + \mathbf{J}_h \boldsymbol{\lambda}_h + \mathbf{J}_g \boldsymbol{\lambda}_g = \mathbf{0} \\ -\mu \mathbf{S} + \boldsymbol{\lambda}_g = \mathbf{0} \\ h(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ g(\mathbf{x}) + \mathbf{s} = \mathbf{0} \end{cases},$$

sendo que $\mathbf{J}_h$ é a matriz jacobiana de $h(\mathbf{x})$, $\mathbf{J}_g$ é a matriz jacobiana de $g(\mathbf{x})$ e $\mathbf{S}$ é uma matriz diagonal com $S_{jj} = s_j$. A seguir, o gradiente da função Lagrangiana é localmente aproximado por uma linearização por expansão de Taylor multivariável, resultando em um sistema linear. Dessa forma, $[\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{s}]^T$ pode ser encontrado com a resolução do sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_h^T & \mathbf{J}_g^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}\mathbf{\Lambda} & \mathbf{0} & -\mathbf{S} \\ \mathbf{J}_h & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_g & -\mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{s} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_h \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f - \mathbf{J}_h^T - \mathbf{J}_g^T \\ \mathbf{S}\boldsymbol{\lambda}_g - \mu \mathbf{e} \\ h(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) + \mathbf{s} \end{bmatrix},$$

com $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]$ sendo um vetor de comprimento p e $\mathbf{\Lambda}$ sendo uma matriz diagonal tal que $\Lambda_{kk} = \lambda_g, k$ (diferentemente da notação indicial usada em teoria da elasticidade, a vírgula aqui não representa derivação, mas apenas que é o j -ésimo elemento do vetor $\boldsymbol{\lambda}_g$).

Caso não seja possível encontrar o passo por meio da resolução desse sistema, então o método dos gradientes conjugados é utilizado. Uma esfera de raio R é estabelecida em torno do ponto $\mathbf{x}$, dentro da qual se assume que uma aproximação da função Lagrangiana por uma função quadrática é adequada. O método dos gradientes conjugados procura em cada iteração subdividir o passo em dois subpassos, um na direção do gradiente e outro em uma direção $\mathbf{G}$ -conjugada, sendo que

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}\boldsymbol{\lambda}_g\mathbf{S} \end{bmatrix}.$$

O primeiro subpasso é calculado de forma a minimizar a aproximação quadrática para a função objetivo, enquanto o segundo subpasso é dado a fim de minimizar o quanto as restrições foram violadas com base em uma aproximação linear para as restrições. O algoritmo então calcula a função de mérito

$$f_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + \nu \left\| \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) + \mathbf{s} \end{bmatrix} \right\|_2, \quad (5.4)$$

sendo que ν inicialmente possui o valor ajustado ao longo da otimização para que as restrições sejam mantidas. Caso durante o processo não seja possível encontrar o passo adequado, a região de confiança diminui através de uma redução em R .

5.3 Estimativa da Hessiana por BFGS

O método Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) em sua formulação original é um método quase-Newton, em que a Hessiana da função objetivo é estimada numericamente. Também pode estimar numericamente o vetor gradiente caso a formulação analítica não esteja disponível, embora esse recurso não tenha sido utilizado nesta otimização. Novamente,

cada iteração do método emprega uma aproximação quadrática local para a função objetivo da forma

$$f(x) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + b,$$

sendo que $\mathbf{H}$ é a hessiana de $f(x)$, $\mathbf{c}$ é um vetor de constantes e b é uma constante escalar, conforme descrito na documentação do MATLAB para programação não linear irrestrita ([MATHWORKS, 2013b](#)). Apesar de o problema de posicionamento de sensores em uma estrutura possuir restrições nos valores permissíveis, o método de otimização irrestrita BFGS será usado para estimar a hessiana empregada no método do ponto interior. Após k iterações, a estimativa da hessiana para a iteração $k + 1$ é definida como

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{\mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k} - \frac{\mathbf{H}_k \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{s}_k},$$

sendo que $\mathbf{s} = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$, $\mathbf{q}_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$. A documentação define a estimativa inicial $\mathbf{H}_0$ padrão como sendo uma matriz identidade multiplicada por um real, que deve ser positivo devido à exigência de que seja positiva definida. Não foi possível encontrar na documentação como o valor é encontrado, embora ([RAO, 2009](#)) sugira a matriz identidade na falta de informações mais detalhadas.

5.4 Otimização

Tendo-se definida a função objetivo, pode-se agora formular o problema de otimização a seguir.

Minimizar $f_o(\mathbf{v})$ sujeito a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \xi_1 \leq 1 & -1000 &\leq \alpha_1 \leq 1000 \\ 0 &\leq \xi_2 \leq 1 & -1000 &\leq \alpha_2 \leq 1000 \\ &\vdots & &\vdots \\ 0 &\leq \xi_p \leq 1 & -1000 &\leq \alpha_p \leq 1000, \end{aligned}$$

sendo que $\mathbf{v} = [\xi_1, \dots, \xi_p, \alpha_1, \dots, \alpha_p]^T$.

Este problema de otimização foi resolvido com a função `fmincon` disponível no pacote *MATLAB Optimization Toolbox*. A função `fmincon` foi configurada para empregar o método do ponto interior com a Hessiana estimada através do método BFGS, enquanto a formulação analítica do gradiente da função objetivo foi fornecida à rotina de otimização. O cálculo da expressão do gradiente da função objetivo se encontra na [subseção 4.2.2](#).

Cada execução do método de otimização parte de um ponto pertencente ao domínio da função objetivo escolhido arbitrariamente. Para um primeiro teste, as posições dos sensores foram escolhidas como sendo igualmente espaçadas ao longo da viga. Para um posicionamento pré-definido, que é o caso em que se fornecem os valores iniciais de posição,

os melhores valores para os ganhos iniciais α_j de forma a minimizar a função objetivo podem ser encontrados através de mínimos quadrados. Dessa forma, os ganhos iniciais α_k podem ser rapidamente calculados resolvendo-se o sistema linear $p \times p$ mostrado em (4.59).

A otimização aplicada a diversas condições iniciais levou o método a convergir para resultados diferentes. Isso ocorre quando o posicionamento entra no processo de otimização, resultando em um problema não linear de otimização, uma vez que a função objetivo passa a depender de funções trigonométricas e hiperbólicas em sua formulação. Muitas vezes, problemas de otimização não-linear costumam ser também não-convexos. Consequentemente, a superfície de otimização pode acabar apresentando diversos mínimos locais. Infelizmente o método de otimização baseados em gradiente não diferenciam um mínimo global de outros mínimos locais. Uma forma de amenizar esse problema é executar a otimização para uma grade de vários parâmetros iniciais e selecionar o melhor resultado. Esse foi o procedimento adotado a seguir.

Na segunda etapa de otimização, dez pontos igualmente espaçados foram determinados ao longo da viga. Em seguida, como o filtro modal em estudo consiste de quatro sensores discretos, todas as possíveis combinações de quatro pontos dos dez foram selecionados, conforme ilustrado na Figura 19. Supõe-se que todos os sensores são iguais, de modo que a ordem de escolha dos pontos não influi no resultado final. Assim, existem $C_4^{10} = 210$ posições iniciais possíveis. Para cada um deles os ganhos α_j , $j = 1, 2, \dots, p$ foram determinados através do MMQ a fim de completar os parâmetros iniciais do método de otimização.

Figura 19 – Ilustração de como as dez posições são tomadas quatro a quatro, resultando em 210 combinações.

5.5 Resultados

Inicialmente, aplicou-se o método de otimização com os sensores igualmente espaçados entre si e ganhos iniciais determinados de acordo com o método LSQ. No entanto, algumas tentativas com parâmetros iniciais diferentes levaram a outros mínimos. Com

o objetivo de reduzir o efeito de mínimos locais, vários conjuntos de parâmetros iniciais foram selecionados conforme descrito na seção anterior.

A otimização a partir dos sensores igualmente espaçados resultou em um filtro modal com uma performance consideravelmente melhor do que o projeto obtido a partir da simples aplicação do MMQ. Nota-se que o erro máximo dentro da faixa de frequências consideradas caiu de -12.83dB (22.8%) no quinto modo – Figura 20 – para -20.42dB (9.53%) no décimo primeiro modo – Figura 21. Por outro lado, a aplicação das múltiplas otimizações sob diferentes condições iniciais não retornou resultados muito diferentes. O melhor resultado mostra que o erro máximo é de -20.68dB (9.25%), um valor um pouco menor do que o obtido no caso em que as posições iniciais dos sensores são igualmente espaçadas, mas com uma diferença irrelevante. O posicionamento inicial correspondente ao melhor desempenho foi o dos pontos 3, 6, 7 e 9, que correspondem a $\xi_1 = 0.3$, $\xi_2 = 0.6$, $\xi_3 = 0.7$ e $\xi_4 = 0.9$. Tanto esse posicionamento quanto os sensores igualmente espaçados levam ao mesmo mínimo local. Provavelmente também se trata de um mínimo global, levando em conta todas as tentativas realizadas.

Os demais resultados poderiam também ser investigados a fim de se obter mais alguma informação com relação à existência de múltiplos mínimos locais e à convergência do método. Porém, uma vez que existem quatro variáveis independentes neste caso, não é possível representar as bacias de atração do método de forma simples. Uma alternativa é traçar os gráficos de dispersão dos valores finais obtidos para cada otimização em função dos parâmetros iniciais. Na Figura 23, tem-se o resultado da função objetivo para cada condição inicial diferente. A distribuição dos valores de parada do método de otimização em dois níveis principais sugerem a existência de dois mínimos locais, com um deles sendo global. Naturalmente, não há argumentos o suficiente para justificar tal afirmação com certeza. Ainda assim, é interessante notar a forma que o posicionamento e os ganhos assumem, como se pode notar nas Figuras 24 e 25. Assim como no gráfico anterior, existem basicamente dois níveis para os quais a otimização converge. O nível inferior sugere que todos estão convergindo para o mesmo ponto, devido ao seu formato afunilado. Já o nível superior está mais disperso, sendo mais difícil afirmar se a região em questão se trata de um mínimo pontual ou uma região em que a função objetivo assume um valor constante, como ocorre por exemplo em uma função positiva semidefinida, em que o mínimo toma o formato de uma reta horizontal.

Um comentário deve ser incluído neste ponto: a correção para modos e alta ordem proposta na seção 3.2 não foi incluída para neste estudo em malha aberta. Durante a escrita desta dissertação, ainda não tinha sido possível executar novamente a otimização e atualizar o texto. Não se espera que o erro tenha sido grande, já que apenas a partir do 11º ele se torna visível, mas seria necessário repetir a otimização para se ter certeza.

Figura 20 – FRF do filtro modal com sensores igualmente espaçados e com ganhos otimizados pelo método LSQ.

Figura 21 – FRF do filtro modal otimizado pela aplicação única do método do ponto interior.

Figura 22 – FRF do filtro modal otimizado pela aplicação do método do ponto interior para várias condições iniciais.

Figura 23 – Valores da função objetivo para cada conjunto de parâmetros iniciais.

Figura 24 – Valores da função objetivo para cada posicionamento otimizado.

Figura 25 – Valores da função objetivo para cada conjunto otimizado de ganhos α .

6 Análise da viga em malha fechada

A otimização de filtros modais já é um tópico razoavelmente explorado, como se pode perceber pelas publicações na área de vibrações. Por outro lado, a carência de estudos sobre a otimização de filtros modais empregados em um sistema de controle em malha fechada motivou esta investigação.

Este estudo de caso empregou o mesmo modelo usado no capítulo anterior para descrever a dinâmica de uma viga engastada. A diferença entre a formulação aqui empregada e a encontrada na literatura reside na presença de um sistema de controle de vibrações, baseado em retroalimentação de velocidade, e na formulação da função objetivo, que busca minimizar picos em vez de integrar o erro ao longo de uma faixa de frequências.

6.1 Sistema em malha fechada

O sistema desenvolvido no [Capítulo 5](#) descreve a dinâmica de uma viga engastada com uma perturbação na extremidade livre e leituras de deflexão ao longo de seu comprimento. Além da leitura de posição, também é possível encontrar a velocidade, no caso de um sensor que realize a leitura de velocidade. Este último caso é particularmente útil para a construção do sistema de controle de vibrações por retroalimentação negativa de velocidade, que é a lei de controle utilizada neste estudo de caso.

Caso seja utilizada a formulação por espaço de estados, então a [Figura 26](#) esquematiza como o sinal do filtro modal é utilizado para o sistema de controle. Existe uma entrada $p(t)$ de perturbação do sistema aplicada à extremidade da viga, uma força de controle $u(t)$ também aplicada à extremidade da viga e uma saída $y(t)$ que representa o sinal do filtro modal. A saída $w(x, t)$, que descreve o campo de deslocamentos da viga, apenas existe para fins de análise do sistema. Não pode ser medida diretamente por ser uma função contínua ao longo da estrutura, mas pode ser estimada com base em várias leituras finitas ao longo da viga. Tomando-se a representação por espaço de estados conforme desenvolvido na [seção 4.1](#) tem-se um modelo composto por m modos com A sendo uma matriz $2m$ por $2m$, B_u e B_c matrizes $2m$ por 1, C uma matriz 1 por $2m$ e D uma matriz 1 por 1.

A [Figura 26](#) mostra um sinal de referência $r(t)$, que normalmente é considerado em problemas de controle em engenharia. Para fins de controle de vibrações a referência é sempre nula, pois o objetivo é reduzir a energia associada à deformação da estrutura. Sendo assim, $r(t) = 0$ e, conseqüentemente, o sinal de referência pode ser removido do diagrama de blocos. Além disso, como o modelo em espaço de estados possui uma parte proporcional ao deslocamento modal e uma parte proporcional à velocidade, pode-se dividir a matriz

$\mathbf{C}$, que possui dimensões 1 por $2m$, em duas partes: $\mathbf{C}_p$ e $\mathbf{C}_{mf}$. A matriz $\mathbf{C}_p$ contém os deslocamentos modais e a matriz $\mathbf{C}_{mf}$ é responsável por receber a derivada no tempo dos deslocamentos modais e retornar o sinal do filtro modal. O sistema resultante pode ser visto na [Figura 27](#).

Para a retroalimentação de velocidade, considera-se a saída do filtro modal composto por p sensores, com a matriz $\mathbf{C}$ seguindo a formulação expressa pela [Equação 4.15](#), sendo dada como

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{j=1}^p \alpha_j \frac{dw}{dt}(x_j, t) \\ &= \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{k=1}^m \frac{dq_k}{dt}(t) \Phi_k(x_j) \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^p \alpha_j \Phi_k(x_j) \frac{dq_k}{dt}(t) \\ &= \mathbf{C}_{mf} \frac{d\mathbf{q}}{dt}(t), \end{aligned}$$

sendo que $\mathbf{C}_{fm}$ é a matriz com os coeficientes do filtro modal. Como as leituras de posição não são utilizadas, a matriz $\mathbf{C}_p$ é anulada no controle por retroalimentação negativa de velocidade, resultando no sistema da [Figura 28](#). A formulação equivalente por espaço de estados fica

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}_u(u(t) + p(t)) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \mathbf{C}_{mf} \end{bmatrix} \mathbf{z} + D_u(u(t) + p(t)). \end{aligned}$$

Neste estudo tanto a perturbação quanto a força de controle foram aplicados à extremidade da viga, $B_u = B_p$, o que permite somar $u(t)$ e $p(t)$ como se fossem uma só força $f(t) = u(t) + p(t)$, [Figura 29](#). Tem-se então que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}_u f(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \mathbf{C}_{mf} \end{bmatrix} \mathbf{z} + D_u f(t) \end{aligned}$$

A transformada de Laplace pode ser empregada para se encontrar a função transferência em malha aberta

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} B_u F(s) + D F(s),$$

Sendo que $C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \mathbf{C}_{mf} \end{bmatrix}$. Caso seja definida uma estratégia de controle $U(s) = -GY(s)$, então $F(s) = U(s) + P(s)$ e, conseqüentemente, a resposta do sistema em malha fechada na [Figura 30](#) é dada por

$$Y_c(s) = \frac{Y(s)}{1 + GY(s)}. \quad (6.1)$$

Figura 26 – Sistema em espaço de estados com retroalimentação de velocidade

Figura 27 – Considerando $B_u = B_p$, $D_u = D_p$ e $r(t) = 0$

Figura 28 – Considerando apenas a retroalimentação de velocidade

Figura 29 – Somando perturbação e esforço de controle, $f(t) = u(t) + p(t)$

Figura 30 – Formulação da função transferência

A variável de Laplace s pode ser substituída por $i\omega = i\omega_1 r$ para se chegar à FRF do filtro modal em malha fechada

$$Y_c(r) = \frac{Y(r)}{1 + GY(r)}, \quad (6.2)$$

com a expressão para a FRF do filtro modal em malha aberta já determinada na [Equação 4.1.4](#).

Deve-se lembrar que, apesar de o sistema possuir fisicamente uma entrada e diversos sensores, graças ao filtro modal todas as leituras dos p sensores são somadas ponderadamente, resultando em um escalar. Assim, o sistema que seria SIMO torna-se SISO. Dessa forma, técnicas de controle clássico podem ser aplicadas. Se as posições dos sensores ξ_j e seus respectivos ganhos α_j forem fixados, para $j = 1, \dots, p$, então o efeito do ganho G pode ser manualmente analisado através do lugar das raízes, como na [Figura 34](#). O lugar das raízes possui a vantagem de mostrar graficamente o quão próximo da região de instabilidade está o sistema e quais são as suas tendências, com base no caminho que cada polo irá percorrer conforme a modificação do ganho. No entanto, a forma do lugar das raízes muda de acordo com o posicionamento dos sensores ξ_j e os ganhos do filtro modal α_j . Dependendo de como o filtro modal for construído, alguns modos podem ser atenuados enquanto outros podem ser desestabilizados. Além disso, mesmo se for considerado apenas o mesmo filtro modal, faz-se necessário encontrar alguma forma de selecionar o ganho de retroalimentação G mais adequado.

Um último comentário deve ser feito devido à inclusão do ganho de retroalimentação. O esforço de controle, dado por $u(t) = Gy(t)$, possui um grau de liberdade redundante devido à forma como os ganhos α_j de cada j -ésimo sensor é empregado. Isso pode ser percebido com mais clareza ao expandir o esforço de controle em termos da resposta de cada filtro

$$u(t) = G \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G\alpha_1 \\ G\alpha_2 \\ \vdots \\ G\alpha_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Como exemplo, nota-se que tanto o conjunto de ganhos $G = 2$ e $\mathbf{a} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$

quanto o $G = 1$ e $\mathbf{a} = [2 \ 2 \ \dots \ 2]^T$ resultarão no mesmo esforço de controle

$$u(t) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}.$$

O mesmo aconteceria se $G = 1/2$ e $\mathbf{a} = [4 \ 4 \ \dots \ 4]^T$ ou então se $G = 1/\pi$ e $\mathbf{a} = [2\pi \ 2\pi \ \dots \ 2\pi]^T$. Na realidade, há incontáveis formas de se expressar o mesmo sistema de controle utilizando o filtro modal com retroalimentação de velocidade, devido à inclusão do ganho G . A fim de eliminar esse grau de liberdade extra, que pode comprometer a convergência do método de otimização, foi empregado o artifício de multiplicar o ganho de retroalimentação G e os ganhos do filtro modal α_j , $j = 1, \dots, p$.

$$u(t) = G \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G\alpha_1 \\ G\alpha_2 \\ \vdots \\ G\alpha_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \mathbf{a}'^T \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Sendo que

$$\mathbf{a}' = [\alpha'_1 \ \alpha'_2 \ \dots \ \alpha'_p]^T.$$

Assim, os ganhos α'_j durante a otimização em malha fechada na realidade já incluem o ganho de retroalimentação G .

Depois de a otimização definir os valores ótimos de $\mathbf{\Xi}$ e $\mathbf{a}'$, pode ser interessante fatorar os ganhos dos sensores α'_j em termos do ganho de retroalimentação G e dos coeficientes do filtro modal $\mathbf{a}$. Conforme foi abordado acima, há incontáveis formas de se escolher essa fatoração. A que se mostrou mais vantajosa para visualização dos resultados foi considerar $G = 14.73\text{dB} = 1/0.1834$ e $\mathbf{a} = \mathbf{a}'/G = 0.1834 \cdot \mathbf{a}'$. Esse valor foi encontrado ao se medir a diferença entre $Y_{opt}(r_1)$, a magnitude da FRF do filtro modal em malha aberta definido a partir de $\mathbf{a}'$ na 1ª frequência natural amortecida normalizada r_1 , e $Y_{col}(r_1)$, a magnitude da FRF do par co-localizado na 1ª frequência natural amortecida normalizada r_1 . O valor calculado $\Delta Y = Y_{opt}(r_1) - Y_{col}(r_1)$ é convertido de dB para unidade decimal e então atribuído a $G = 10^{\Delta Y/20}$. Depois, utiliza-se $\mathbf{a} = \mathbf{a}'/G$ para calcular a FRF do filtro modal, que estará deslocada de $-\Delta Y$ dB – um *offset*, por assim dizer – possibilitando comparar melhor a FRF do filtro modal com as outras FRFs. Apesar de parecer um procedimento arbitrário, repete-se aqui que a forma como G e $\mathbf{a}$ foram escolhidos não interferem no sistema em malha fechada, pois $G\mathbf{a} = G(\mathbf{a}'/G) = \mathbf{a}'$. Por outro lado, essa separação melhora a visualização do resultado e a comparação com outros casos, como se nota pelas figuras 31 e 32. A Item 6.2 examinará os mecanismos envolvidos no aumento ou redução da estabilidade de cada modo a fim de determinar os procedimentos utilizados para encontrar os parâmetros ótimos.

Figura 31 – Comparação entre a resposta do filtro modal sem correção de ganho definido pela otimização (opt), o filtro LSQ (lsq), a FRF do par co-localizado (col) e a FRF de referência (ref).

Figura 32 – Comparação entre a resposta do filtro modal com correção de ganho definido pela otimização (opt), o filtro LSQ (lsq), a FRF do par co-localizado (col) e a FRF de referência (ref).

6.2 Planejamento da otimização

Esta seção desenvolverá o problema de otimização e tratará de alguns problemas que podem surgir durante a execução do método no computador. Para tanto, será necessário identificar as variáveis de otimização e propor uma função objetivo. O exemplo mostrado na [Figura 33](#) esquematiza um sistema de controle de vibrações por retroalimentação negativa de velocidade usando um filtro modal composto por $p = 3$ sensores baseado no modelo desenvolvido na [seção 4.1](#). Foram destacadas as potenciais variáveis de otimização, que são:

- as posições ξ_j dos sensores pontuais, para $j = 1, \dots, p$;
- os ganhos α_j de cada sensor que compõe o filtro modal, para $j = 1, \dots, p$;
- o ganho de retroalimentação G .

Dois procedimentos podem ser adotados com base em quais parâmetros serão usados como variáveis de otimização. O primeiro inclui todas as variáveis enumeradas acima, ξ_j , α_j e G como variáveis de otimização. Basta apenas definir a função objetivo e aplicar o método de otimização. Já o segundo procedimento apenas considera as posições dos sensores como variáveis de otimização. Para uma dada posição, determinam-se os coeficientes α_j com base no método LSQ. Tendo-se o posicionamento e os ganhos, pode-se

Figura 33 – Esquema do sistema de controle de vibrações usando filtro modal com as variáveis de otimização destacadas.

então proceder à determinação do ganho de retroalimentação G . Resta ainda determinar o método a ser utilizado para se encontrar o melhor valor de G e de que forma alterações no valor de G influenciam as propriedades do sistema em malha fechada.

Foi arbitrado um coeficiente de amortecimento igual a 0.5% para todos os modos. Por consequência, a estrutura é naturalmente estável. Ao se elevar G , o coeficiente de amortecimento de cada modo pode aumentar ou diminuir, de acordo com a construção do filtro modal e da posição do atuador. Por exemplo, o lugar das raízes na [Figura 34](#) mostra que à medida que o ganho cresce, os polos correspondentes aos modos 5, 6, 7, 11 e 12 seguem caminhos que os levam para o semiplano direito, o que reduz o amortecimento da estrutura e, finalmente, resultam em instabilidade do sistema. Logo, à medida que o ganho aumenta, os modos 5, 6, 7, 11 e 12 passam por uma faixa de amortecimento reduzido até que gradualmente cada um deles se torna instável. A escala do lugar das raízes dificulta a visualização do lugar das raízes para o 5º modo, mas já é possível notar que ele tende à instabilidade com o aumento do ganho, uma vez que a FRF de malha aberta do sistema mostra que o 5º modo está em oposição de fase com relação aos modos 1, 2, 3 e 4, além de estar em concordância de fase com os modos 6, 7, 11 e 12. Para os modos 8, 9 e 10, o filtro modal atrasa mais 180° e recupera a concordância de fase com relação aos modos 1, 2, 3 e 4. Para os modos 11 e 12, o filtro modal atrasa ainda mais 180° e novamente entra em oposição de fase com relação aos modos 1, 2, 3 e 4.

Ainda assim, é um pouco complicado realizar essa análise com base nos modos que estão em concordância e oposição de fase. Para visualizar melhor o motivo de o sistema perder a estabilidade devido ao aumento excessivo de ganho, pode-se recorrer ao diagrama de Nyquist. Um dos resultados obtidos mais à frente, o caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4, foi analisado com os ganhos do filtro modal recalculados pelo método LSQ. Para maiores detalhes sobre a nomenclatura utilizada, ver [seção 6.4](#). A partir da [Figura 35](#), percebe-se

Figura 34 – Exemplo de lugar das raízes com o diagrama de Bode do filtro modal para o caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4

que o sistema em malha fechada pode se tornar instável se um ganho muito elevado for aplicado, pois a curva traçada aumenta de escala à medida que o ganho é ampliado, até finalmente englobar o ponto $(-1, 0)$, destacado com uma cruz “+”. Isso nunca ocorre ao se utilizar o par co-localizado, cujo diagrama de Nyquist pode ser visto na [Figura 38](#). Teoricamente, não importa quão alto seja o ganho, o sistema sempre será estável, pois como todas as curvas se situam no semiplano direito, elas nunca englobarão o ponto $(-1, 0)$. Na [Figura 35](#), o ganho está no limite em que o 5º modo possui 50% do amortecimento inicial. Depois, na [Figura 36](#), o ganho é igual a 0.85, que é o ponto em que o sistema está marginalmente instável. Já na [Figura 37](#), o ganho é igual a 1 e as curvas englobam o ponto $(-1, 0)$ do diagrama de Nyquist, indicando instabilidade.

Figura 35 – Caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4 com $G = 0.4239$

Figura 36 – Caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4 com $G = 0.8500$

Figura 37 – Caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4 com $G = 1.0000$

Figura 38 – Par co-localizado na ponta da viga com $G = 0.4239$

Deve-se ressaltar que o polo do 10º modo, apesar de ser sempre estável, possui um zero em sua vizinhança. Como resultado, ambos estão próximos de cancelarem um ao outro, o que compromete a atuação nesse modo. Isso pode ser verificado pelo lugar das raízes para o 10º modo, que se torna um arco tão pequeno a ponto de o ganho de retroalimentação possuir pouco efeito sobre esse pólo a malha fechada.

A Figura 39 mostra também um lugar das raízes ao longo do semiplano real negativo. Com um ganho suficientemente alto, os polos do 2º modo encontram-se no eixo real, tornando-se criticamente amortecidos, como mostrado na Figura 40. A partir desse ponto, o 2º modo deixa de existir, o que traz complicações operacionais para a otimização, pois em um caso geral seria necessário identificar via código qual modo deixou de ser subamortecido devido ao ganho de retroalimentação excessivo. Além disso, em controle de

vibrações não há interesse em tornar um modo criticamente amortecido ou sobreamortecido devido à alta exigência de esforço de controle. Assim, um dos procedimentos adotados na otimização foi evitar que o amortecimento de qualquer um dos modos se tornasse maior do que 1.

Como abordado anteriormente, um dos modos também pode se tornar instável à medida que o ganho de retroalimentação é elevado. Isso ocorre quando algum dos polos passa para o semiplano direito do plano complexo. A [Figura 41](#), uma ampliação do lugar das raízes mostrado na [Figura 34](#), mostra a configuração em que o sistema está marginalmente estável, quando o polo correspondente ao 5º modo está com a parte real nula. No entanto, em projeto algum é desejável trabalhar com um sistema marginalmente estável. Tendo isso em vista, estabeleceu-se um valor mínimo aceitável de amortecimento ζ_{min} igual a 50% do valor original. Como neste estudo todos os valores de amortecimento foram arbitrariamente estabelecidos como sendo $\zeta_j = 0.5\%$, $j = 1, \dots, 12$,

$$\zeta_{j,min} = 0.50\zeta_j = 0.50 \cdot 0.5\% = 2.5\%, j = 1, \dots, 12.$$

As regiões com amortecimento abaixo do permitido foram destacadas nas figuras [41](#) e [42](#). Dessa forma, o ganho não será mais aumentado se qualquer um dos polos atingir o limite dessa região, como ocorre com o 5º modo na [Figura 42](#).

Assim, três cenários indesejados são possíveis:

- a) um modo se torna instável;
- b) um modo permanece estável, mas o seu amortecimento está inaceitavelmente reduzido.
- c) um modo se torna superamortecido e os polos correspondentes a esse modo deixam de existir;

O cenário b) na realidade engloba a), o que significa que ao se evitar um amortecimento muito pequeno a estabilidade também estará garantida. O interesse em se evitar o cenário c) é mais operacional. Caso um dos modos deixe de existir, será necessário descobrir mais tarde qual deles se tornou superamortecido para aplicar corretamente os coeficientes de ponderação.

A fim de evitar essas situações, definiu-se que o limite máximo G_b para o ganho da retroalimentação de velocidade é atingido quando qualquer um dos modos do sistema se tornar superamortecido ou qualquer um dos modos estiver com o amortecimento reduzido pela metade. O limite inferior para o ganho da retroalimentação de velocidade é igual a zero, que é o caso do sistema em malha aberta. Assim, o grau de intervenção do sistema de controle aumenta gradativamente desde $G = 0$ até $G = G_b$.

Uma vez que a estrutura em malha aberta sempre é estável e, dependendo do filtro modal, pode se tornar instável à medida que o ganho é ampliado, a busca binária pode ser

Figura 39 – Detalhe do lugar das raízes com os 3 primeiros modos.

Figura 40 – 2º modo criticamente amortecido.

Figura 41 – 5º modo marginalmente estável.

Figura 42 – 5º modo com amortecimento $\zeta = 0.25\%$.

empregada para se encontrar o valor máximo permissível G_b . Inicialmente é estabelecida uma faixa inicial de ganho extensiva, como por exemplo $[0, 20]$, o que significa $G_{lb} = 0$ e $G_{ub} = 20$. Depois, o valor intermediário, no caso $G_k = 10$, é testado para verificar se o sistema resultante está aceitável. Em caso afirmativo, o teste será repetido para a faixa de valores $[10, 20]$, com valor intermediário 15. Caso contrário, 5, o valor intermediário de $[0, 10]$, será empregado. Esse procedimento é então repetido sucessivamente até que a faixa em que se situa o ganho procurado, $[G_{lb}, G_{ub}]$, seja menor do que a tolerância exigida, satisfeita pela condição $G_{ub} - G_{lb} < G_{tol}$. Quando a tolerância é atingida, opta-se por $G_b := G_{lb}$ por segurança, já que não é garantido que G_{ub} resultará em um sistema aceitável, a menos que se realize outra iteração do algoritmo. Por aceitável entende-se um sistema em que nenhum modo é superamortecido ou nenhum modo possui um amortecimento menor

Figura 43 – Fluxograma do algoritmo utilizado para calcular o ganho máximo permitido.

do que 50% do valor inicial. Para evitar que algum possível problema de convergência tome muito tempo, um limite máximo de iterações, $MAXIT$, é estabelecido. A [Figura 43](#) mostra o fluxograma do algoritmo empregado. A bisseção por si só é um algoritmo extremamente simples, mas optou-se por construir o fluxograma para melhor ilustrar as condições que limitam o aumento do ganho.

6.3 Função objetivo

Depois de desenvolver o sistema de controle de vibrações e examinar o efeito do ganho na resposta do sistema, logo se percebe que a função objetivo adotada no [Capítulo 5](#) para o sistema em malha aberta já não pode ser mais aplicada para o sistema em malha

fechada, pois o formato de cada pico de ressonância na FRF de mobilidade da viga agora não pode mais ser comparado com um perfil de referência. Como um exemplo, na [Figura 44](#),

Figura 44 – Comparação entre os picos de ressonância da FRF em malha aberta e em malha fechada para o caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4 com $\mathbf{a}$ calculado por LSQ.

a retroalimentação negativa de velocidade para coeficientes $\mathbf{a}$ calculados por LSQ e ganho $G = 0.4239$ resultou em um sistema em malha fechada em que a magnitude do 2º e 3º modos foram fortemente atenuados para 12.4% e 24.7% dos valores originais. Os modos 1 e 4 foram moderadamente atenuados, com magnitudes de 35.8% e 65.0% dos valores iniciais, respectivamente. Já os modos 5 e 6 tiveram o amortecimento reduzido e ambos praticamente dobraram em magnitude, com aumento de 200% e 198%, respectivamente. Os demais modos não foram influenciados de forma significativa. Dependendo da eficiência da retroalimentação de velocidade cada pico da FRF em malha fechada será mais ou menos saliente, o que dificulta o uso de uma FRF de referência, pois isso exigiria que os valores de amortecimento fossem fixos. Além disso, para sistemas de controle mais complexos, que venham a incluir polos em sua lei de controle, a FRF final poderá até apresentar um número diferente de modos de vibrar.

Uma alternativa poderia ser o estabelecimento de uma FRF de referência que não é composta por modos de vibração, mas que é apenas a ausência de qualquer deflexão, ou seja, $G(r) = 0$. Como o objetivo do sistema de controle de vibrações é, dentro dos limites de projeto, reduzir ao máximo a amplitude das vibrações da estrutura, então faz sentido pensar que o caso ideal é de um sistema em que não há vibrações, $G_c(r) = 0$, sendo que agora o índice c denota o sistema em malha fechada.

Uma vez que a função objetivo $Q(\Xi, \mathbf{a})$ utilizada no estudo em malha aberta

empregou o desvio quadrático como norma, uma extensão direta poderia ser o desvio quadrático entre a FRF do sistema em malha fechada e a sua referência $G_c(r) = 0$. Ao final, a função objetivo acaba se tornando o quadrado da norma 2 da FRF do filtro modal:

$$\begin{aligned} f_c = Q(\Xi, \mathbf{a}) &= \langle E(\Xi, \mathbf{a}, r), E(\Xi, \mathbf{a}, r) \rangle \\ &= \langle Y(\Xi, \mathbf{a}, r) - 0, Y(\Xi, \mathbf{a}, r) - 0 \rangle = \langle Y(\Xi, \mathbf{a}, r), Y(\Xi, \mathbf{a}, r) \rangle. \end{aligned}$$

No entanto, existe um problema ao se utilizar essa definição em malha fechada. Quando se realizou o projeto do filtro modal em malha aberta, os coeficientes de amortecimento da estrutura eram fixados e nenhum modo se tornava mais ou menos amortecido. Como visto no exemplo acima, no entanto, em malha fechada o amortecimento aparente da estrutura pode mudar. Conforme o amortecimento de um dos modos cai, o pico correspondente se torna mais agudo. Por conta disso, o uso da área sob a curva para a função objetivo pode não contabilizar quando um modo se torna instável. A Figura 45 possui o 5º modo

Figura 45 – Sinal de saída do filtro modal em malha fechada com o amortecimento de cada modo afetado pela lei de controle.

marginalmente instável e o 6º modo com um amortecimento reduzido. Ambos estão bem agudos com os picos ressaltados. Consequentemente, não contribui muito para a integral, apesar de o erro máximo ser significativo. A norma baseada na integral não garante a convergência absoluta do erro.

Logo, seria interessante estabelecer um critério que garanta convergência absoluta para a resposta do filtro modal. Decidiu-se, então, basear na magnitude dos picos de ressonância da FRF de receptância perturbada e medida na ponta da viga, que corresponde aos valores $W_t/P(r_{dj})$, sendo que r_{dj} representa a frequência natural amortecida do j -ésimo modo. A fim de levar em consideração tanto a atenuação dos picos de ressonância como o esforço de controle necessário, tomou-se uma soma ponderada dos picos da magnitude

de $W_t/P(r_{dj})$ e dos picos da magnitude da FRF do esforço de controle $u(r_{dj})$. A soma emprega os coeficientes Q_j para ponderar a amplitude de vibração na ponta da viga e R_j para ponderar o esforço de controle quando a viga é submetida a uma perturbação de frequência r_{dj} . A soma ponderada das contribuições de cada modo para o desempenho e para o custo de controle pode então ser escrita como

$$f_c(\Xi, \mathbf{a}, G) = \sum_{j=1}^{12} Q_j \left| \frac{W_t}{P}(r_{dj}) \right| + \sum_{j=1}^{12} R_j \left| \frac{U}{P}(r_{dj}) \right| + K \kappa(A_{LSQ}), \quad (6.5)$$

sendo que K é um termo utilizado para levar em consideração o erro introduzido no cálculo dos coeficientes quando o método LSQ for necessário. O condicionamento da matriz $\kappa(A_{LSQ})$ e a sua importância para o projeto de filtros modais foi brevemente discutido na [subseção 4.4.2](#).

Apesar da simplicidade da viga engastada, a formulação adotada para a função objetivo permite que diversas configurações diferentes de controle modal possam ser aplicadas, dependendo dos valores escolhidos para os parâmetros $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{K}$ e $\mathbf{W}$. Deve-se, então, definir as configurações a serem testadas de acordo com o resultado que se deseja ter. Além disso, também é importante escolher valores para os parâmetros de forma a permitir uma comparação coerente dos resultados.

Duas metodologias foram investigadas, com base nas variáveis a serem incluídas na otimização:

- a) somente posições dos sensores;
- b) posições e ganhos dos sensores, bem como o ganho da retroalimentação de velocidade.

Na primeira metodologia, apenas as posições dos sensores são as variáveis do método de otimização. Os ganhos α_j dos sensores são determinados através do LSQ e o ganho G da retroalimentação de velocidade é posteriormente escolhido de forma a minimizar a função objetivo dentro da faixa $[0, G_b]$ de valores permissíveis para G . A fim de acelerar a busca do valor ótimo de G , assumiu-se que o formato da função objetivo $f_c(\Xi, \mathbf{a}, G)$ ao variar G com ξ_j e α_j fixos pertence à classe das funções unimodais, cujo mínimo pode ser rapidamente determinado ([RAO, 2009](#)). Essa hipótese permite que os casos em que apenas o posicionamento é considerado uma variável de otimização possam determinar os coeficientes α_j a partir de mínimos quadrados e, finalmente, determinar G a partir do método da busca de mínimos para funções unimodais. Em todos os casos investigados em que o número de sensores foi inferior ou igual a 6, foi isso o que se observou. As curvas de ganho plotadas na [seção 6.5](#) confirmam que essa hipótese pode ser razoável, apesar de não ter sido demonstrada. Infelizmente, para o caso em que o número de sensores é igual a 12, a função objetivo deixou de ser unimodal. Ainda não foi possível identificar a causa desse comportamento.

Na segunda metodologia, o método de otimização se encarrega de procurar os valores mais adequados para todas as características que influem no desempenho do sistema de controle.

Definidas as duas metodologias de otimização, dois casos foram ainda estabelecidos, baseados no que poderia ser desejável para resolver um possível problema com vibrações estruturais:

- a) foco nos primeiros modos;
- b) FRF do filtro modal em malha aberta similar à do par sensor e atuador co-localizados, mas sem a ocorrência de co-localização física entre qualquer par sensor atuador. Em outras palavras, deseja-se uma FRF que apresente fase mínima sem que seja necessário incluir qualquer sensor na mesma posição do atuador.

As subseções a seguir descreverão em maior detalhe o objetivo de cada caso e as ponderações empregadas.

6.3.1 FUU: foco nos primeiros modos

Neste caso deseja-se minimizar apenas alguns dos picos, que podem ser escolhidos de acordo com os requisitos do filtro modal. Como normalmente se deseja focar nos primeiros modos os pesos foram selecionados de forma a ressaltar os 3 primeiros modos, com

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 1000 & 10000 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Os pesos crescem exponencialmente pois, em geral, os picos da FRF $W_t(r)/P$ utilizada na função objetivo decaem exponencialmente para modos mais altos, como se pode verificar na [Figura 44](#). Já os pesos do esforço de controle foram fixados com o intuito de permitir uma melhor comparação entre os diferentes casos estudados, com

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Se houver a necessidade de aplicar método LSQ, a FRF de referência $G(r)$ atribui pesos iguais a 0,1834, que é a magnitude da FRF do par co-localizado para o 1º modo da viga.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0,1834 & 0,1834 & 0,1834 & \cdots & 0,1834 \end{bmatrix},$$

sendo que o número de elementos em $\mathbf{W}$ depende de quantos modos o sinal de referência é composto. Esse valor foi escolhido a fim de que os picos da FRF do filtro modal estejam na mesma ordem de grandeza da FRF do par sensor-atuador co-localizados na ponta, pois é mais fácil comparar os resultados. A sigla utilizada para identificar o caso FUU vem da estratégia empregada para escolher os valores de $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ e $\mathbf{W}$. Como $\mathbf{Q}$ foi determinada com foco nos primeiros modos, a primeira letra é F. Uma vez que $\mathbf{R}$ é uniforme, pois todos são iguais a 1, então a segunda letra é U. Finalmente, uma vez que todos os elementos de $\mathbf{W}$ são iguais a 0,1834, os coeficientes também são uniformes. Assim, a terceira letra é U.

6.3.2 CXX: sinal de fase mínima sem co-localização

Neste caso, deseja-se que o sinal do filtro modal seja o mais próximo possível de um sensor co-localizado, mantendo a fase mínima. A fim de se obter esse perfil, os coeficientes de ponderação Q_j , $j = 1, \dots, 12$ foram definidos como o inverso dos picos de ressonância da receptância do sistema em malha aberta, tendo-se então

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{1,834 \times 10^{-1}} = 5,453 \\ Q_2 &= \frac{1}{2,542 \times 10^{-2}} = 3,934 \times 10^1 \\ &\vdots \\ Q_{12} &= \frac{1}{5,015 \times 10^{-4}} = 1,994 \times 10^3. \end{aligned}$$

Para encontrar os demais valores utilizados e maiores detalhes do motivo de se escolher esses valores, ver [subseção 6.5.7](#). Os coeficientes R_j , $j = 1, \dots, 12$ também foram uniformemente distribuídos, com a diferença de que um valor maior teve que ser adotado para reduzir o esforço de controle. Já a ponderação do sinal de referência para o filtro modal foi definida neste caso como sendo igual aos picos da FRF de mobilidade do par co-localizado, resultando em

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1,834 \times 10^{-1} & 2,542 \times 10^{-2} & 1,034 \times 10^{-2} & 5,375 \times 10^{-3} \\ 3,257 \times 10^{-3} & 2,168 \times 10^{-3} & 1,424 \times 10^{-3} & 1,135 \times 10^{-3} \\ 8,642 \times 10^{-4} & 6,475 \times 10^{-4} & 5,848 \times 10^{-4} & 5,015 \times 10^{-4} \end{bmatrix}.$$

Ao se identificar os casos, sempre se utiliza a letra **C** seguida de dois algarismos **XX**, que denotam a faixa máxima permitida de posicionamento dos sensores. Por exemplo, **C90** significa que só é permitido posicionar sensores entre $\xi = 0$ e $\xi = 0,90$, lembrando que $\xi = x/L$ representa a posição ao longo da viga em termos fracionários. Como o último nó do 12º modo está em $\xi = 0,97$, não faz sentido tentar otimizar o filtro para obter um sinal da fase mínima sem co-localização, pois do ponto de vista do sistema discretizado, posicionar um atuador em $\xi = 1$ e um sensor em $\xi > 0,97$ sempre retornará uma FRF de fase mínima. Ainda há, no entanto, uma certa incerteza em se calcular a posição exata dos nós de um modo de vibrar. Por esse motivo, o valor foi arredondado para $\xi = 0,95$. Consequentemente, os valores de **XX** não serão maiores do que 95.

6.4 Organização dos estudos de caso

Devido à grande quantidade de parâmetros envolvidos para a obtenção de diversos resultados de interesse, torna-se conveniente organizar os diversos testes a serem realizados. Nas seguintes seções, os resultados serão discutidos em detalhes. A fim de se manter uma notação concisa, cada caso será identificado por uma sigla da forma

VAROTM-TIPOFM-MODSIS-MODFMI-NUMSEN-UEQFLG,

sendo que VAROTM, TIPOFM, MODSIS, MODFMI e NUMSEN denotam cada uma dos parâmetros de configuração de otimização:

- a) VAROTM, variáveis de otimização, é composto por três símbolos. Se VAROTM = P00, então somente as posições dos sensores são consideradas para otimização. Caso VAROTM = PAG então as posições, os ganhos do filtro modal e o ganho da retroalimentação de velocidade são variáveis de otimização.
- b) TIPOFM, tipo de filtro modal, são três letras ou algarismos que indicam o tipo de filtro modal sendo empregado, de acordo com as matrizes de ponderações empregadas no cálculo da função objetivo e a faixa permissível de posicionamento dos sensores.
 - FUU indica que o filtro dá prioridade aos primeiros modos, como descrito na [subseção 6.3.1](#).
 - CXX indica que a o filtro está limitado para apresentar um sinal característico de uma FRF co-localizada sem que haja co-localização do atuador com qualquer um dos sensores. A faixa de posições permitidas para os sensores varia de 0 a XX%, sendo que XX pode ser um inteiro de 0 a 99. Para maiores informações, ver [subseção 6.3.2](#).
- c) MODSIS, modos do sistema, é um vetor de variáveis lógicas codificadas em hexadecimal que indicam quais modos foram incluídos no modelo dinâmico da viga. Para se conferir quais modos estão presentes, deve-se substituir o dígito hexadecimal pelo valor em binário correspondente e conferir, da direita para a esquerda, quais modos estão incluídos no modelo. O dígito 1 indica que o modo correspondente foi incluído no modelo, enquanto o dígito 0 indica que não.

 Por exemplo, a notação em hexadecimal FFF converte-se para a notação em binário 1111 1111 1111, o que significa que todos os 12 primeiros modos estão incluídos no modelo. Já a notação 05F em binário assume a forma 0000 0101 1111, que significa que apenas os modos 1, 2, 3, 4, 5 e 7 estão incluídos na dinâmica do modelo.
- d) MODFMI, modos do filtro modal ideal, que será usada como referência. Trata-se de um vetor de 1 (verdadeiro) e 0 (falso) codificados em hexadecimal exatamente da mesma forma como `md_sis`. Cada um indica se o modo correspondente foi incluído na FRF de referência do sensor modal, que será empregada para a otimização pelo LSQ. Não necessariamente cada modo possui o mesmo peso, já que essa ponderação fica a cargo do vetor **W**, como visto em [subseção 4.2.2](#).
- e) NUMSEN, número de sensores, é um número que expressa a quantidade de sensores que compõem o filtro modal.

- f) **UEQFLG**, indica se os resultados correspondem aos obtidos através da equalização do esforço máximo. Caso tenha sido realizado, então aparecerá na identificação do caso como **UEQ**. Caso contrário, não será incluído.

Figura 46 – Roteiro de estudo dos resultados para o caso P00

6.5 Resultados

Para o caso P00, em que apenas as posições são variáveis de otimização, plotou-se para cada resultado final o desempenho proporcionado pelo filtro modal com os coeficientes determinados pelo método dos mínimos quadrados e o desempenho proporcionado pelo controle utilizando o par co-localizado. O ganho do controle de retroalimentação de velocidade foi definido com base na minimização da função custo. Nos gráficos de resposta no tempo, também aparecem as curvas do sistema em malha aberta. A Figura 46 ilustra o roteiro empregado para a comparação de resultados. Já para o caso PAG, em que tanto as posições como os ganhos do filtro e o ganho da malha de retroalimentação são variáveis de otimização do algoritmo genético, a comparação de resultados é realizada da seguinte

forma:

- a) um sistema é construído a partir dos resultados da otimização;
- b) um sistema é construído a partir do posicionamento obtido pela otimização, mas com ganhos α_j do filtro modal calculados a partir da aplicação do LSQ e o ganho de retroalimentação G definido a partir da minimização da função objetivo;
- c) um sistema é construído com base em um par de sensor e atuador co-localizados;
- d) um sistema em malha aberta é comparado aos sistemas em malha fechada.

A [Figura 47](#) ilustra o roteiro empregado para a comparação de resultados.

Agora considerando tanto o caso P00 quanto o caso PAG, pode ser que o método chegue a um posicionamento em que dois sensores estão muito próximos um do outro, como os resultados do caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4 mostrado na [Figura 48](#). Também é possível que um dos sensores seja posicionado muito próximo à base da viga, como nos resultados do caso GAS-PAG-C90-FFF-FFF-6, [Figura 49](#). Em ambos os casos, o filtro modal apresenta uma matriz de produtos internos mal condicionada, ver [Equação 4.59](#), dificultando a aplicação do MMQ como descrita na [seção 4.3](#). Além disso, a intuição sugere que há um número redundante de sensores, o que faz a otimização descartá-los ao usar dois sensores para medir a mesma deflexão ou posicionar na base da viga, onde a deflexão sempre é nula. Quando quaisquer um desses casos ocorrer, sugere-se que a otimização seja executada novamente com um sensor a menos para cada um que for repetido ou posicionado na base. Caso não se deseje descartar os resultados, é possível tentar recuperar o condicionamento da matriz ao descartar os sensores redundantes utilizando-se a seguinte simplificação:

- a) Caso dois ou mais sensores estejam muito próximos um ao outro, tipicamente com posições adimensionais que diferem de apenas 0.005, então esse grupo de sensores próximos pode ser aproximado mantendo-se apenas um dos sensores com um ganho igual à soma de todos os ganhos do grupo.
- b) Caso um sensor esteja posicionado próximo à base da viga, basta desconsiderá-lo.

Como exemplo do primeiro caso, tome-se o resultado ilustrado na [Figura 48](#). A [Tabela 1](#) mostra a posição e o ganho de cada sensor. Como os sensores 3 e 4 estão muito próximos um ao outro, esse par pode ser substituído por um sensor na mesma posição com um ganho igual à sua soma, $6.6647 + 4.5652 = 11.2299$, resultando no filtro modal descrito pela [Tabela 2](#).

Já como um exemplo do segundo caso, a [Tabela 3](#) mostra o resultado retornado pela otimização do caso GAS-PAG-C90-FFF-FFF-6, em que um dos sensores estava muito próximo à base da viga. Como nesse ponto as deflexões são muito pequenas e o valor do

Figura 47 – Roteiro de estudo dos resultados para o caso PAG

Figura 48 – Sensores muito próximos um ao outro

Figura 49 – Um sensor muito próximo à base

Tabela 1 – Redundância de sensores

Sensor	Posição	Ganho
1	0,5045	-9,3987
2	0,7093	-5,7588
3	0,9968	6,6647
4	0,9965	4,5652

Tabela 3 – Sensor próximo à base

Sensor	Posição	Ganho
1	0,0070	-43,7459
2	0,7096	25,9301
3	0,7628	65,7434
4	0,8277	122,3788
5	0,8776	-199,4143
6	0,9000	124,3622

Tabela 2 – Redundância removida

Sensor	Posição	Ganho
1	0,5045	-9,3987
2	0,7093	-5,7588
3	0,9968	11,2299

Tabela 4 – Sensor próximo à base removido

Sensor	Posição	Ganho
1	0,7096	25,9301
2	0,7628	65,7434
3	0,8277	122,3788
4	0,8776	-199,4143
5	0,9000	124,3622

ganho para este particular sensor não está acima dos demais em ordens de grandeza, então é aceitável simplesmente ignorá-lo. Assim, com a remoção do sensor nº 1, tem-se um outro filtro modal, com 5 sensores, ver [Tabela 4](#).

As duas simplificações descritas acima levantam a questão do quanto o filtro modal modificado difere do original. A [Figura 50](#) mostra que as FRFs do filtro modal original, *org*, e do filtro modal com o sensor removido, *rem*, são muito próximas entre si para o caso GAS-PAG-FUU-002-4, em que dois sensores estavam muito próximos um ao outro. O mesmo também se verifica para o caso GAS-PAG-C90-002-6, [Figura 51](#), em que um sensor próximo à base foi removido.

Figura 50 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-FUU-002, com e sem remoção de sensor

Figura 51 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-C90-FFF, com e sem remoção de sensor

6.5.1 Caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4

Tabela 5 – Resumo do caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4

Método de otimização	Híbrido (algoritmo genético e SQP)
Variáveis de otimização	Posicionamento dos sensores Ganhos dos sensores; Ganho da retroalimentação
Ponderação	$Q = (100, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ $R = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ $W = 0,1834$
Modo preferencial	1
Número de sensores	4

Esta otimização focou a atenuação do 1º modo da estrutura, com foco reduzido nos demais. Assim, optou-se por $Q_1 = 100$ e $Q_j = 1$ para os demais, a fim de reduzir o pico de ressonância do 1º modo. Com o objetivo de poder comparar melhor os resultados com outros casos em que se deseja atenuar outros modos, os pesos do esforço de controle R_j foram fixados em 1 para todos. O filtro modal foi fixado para ser composto por 4 sensores que podem ser posicionados em qualquer ponto ao longo da viga. No entanto, a otimização por algoritmo genético não só levou em conta a posição de cada sensor como também os seus respectivos ganhos e o ganho de retroalimentação negativa de velocidade, sendo que ao final o SQP foi aplicado ao algoritmo genético de forma híbrida a fim de encontrar a configuração ótima com uma tolerância reduzida.

De acordo com a [Figura 52](#), tanto o filtro modal otimizado pelo AG (*opt*) quanto o otimizado pelo LSQ (*lsq*) puderam isolar muito bem o 1º modo. Ainda assim, não foi possível manter a fase mínima, como o caso do par co-localizado (*col*).

Comparando-se o *lsq* e o *opt* ao *col*, nota-se que apenas o 1º modo é significativamente afetado, enquanto se pode notar pouco efeito nos demais. Em comparação ao desempenho apresentado pelo controle por par co-localizado, que afeta todos os modos, o filtro modal consegue ser mais seletivo.

A deflexão da ponta da viga como aparece na [Figura 54](#) possui um menor sobressinal para a metodologia *lsq* em comparação às metodologias *opt* e *col*, o que pode à primeira vista levar a crer que os filtros modais obtidos usando-se *lsq* são melhores. No entanto, a inspeção da resposta no tempo do esforço de controle, [Figura 55](#), mostra que na realidade o esforço de controle para o caso *lsq* também é maior, o que não permite comparar todas as três ao mesmo tempo. Esse problema motivou o procedimento usado mais à frente de ajustar o ganho de forma a limitar o esforço máximo de controle a fim de se poder comparar cada metodologia.

As curvas de ganho da [Figura 56](#) mostram o quanto a função objetivo varia conforme o ganho da retroalimentação varia mantendo constantes o posicionamento e os ganhos dos

sensores. Por exemplo, no caso do filtro modal *opt*, o posicionamento dos sensores e os ganhos são como os obtidos através do AG, com a correção de ganho descrita na [seção 6.1](#). A função objetivo é então calculada a partir do sistema em malha fechada com o ganho G variando de 0 (malha aberta) até o G_b , que é o limite em que um dos modos perde 50% do amortecimento ou se torna superamortecido, o que acontecer antes, dando origem à curva *opt* plotada com uma linha traço-ponto preto. Depois um novo sistema é criado em que os sensores do filtro modal são posicionados da mesma forma como antes mas possuem os ganhos recalculados através do LSQ. A curva resultante, identificada por *lsq*, é plotada com uma linha cinza claro sólida. Finalmente, um outro sistema é criado com um sistema de controle baseado em um par co-localizado na extremidade da viga. Novamente, varia-se o ganho de retroalimentação G desde 0 até que um dos modos se torne superamortecido. A curva resultante, identificada por *col*, é plotada em tracejado simples cinza escuro.

Para completar, na [Figura 57](#) tem-se o valor da função objetivo para os sistemas:

- *opt*: valor da função objetivo do ótimo encontrado pelo algoritmo genético (AG).
- *lsq*: valor da função objetivo do sistema em que o filtro modal possui mesmo posicionamento encontrado pelo AG mas com os ganhos determinados por mínimos quadrados (LSQ). O ganho de retroalimentação é calculado pela minimização da curva de ganho na [Figura 56](#).
- *col*: valor da função objetivo do sistema em que o sistema se baseia em um par co-localizado na extremidade da viga. Novamente, o ganho de retroalimentação é encontrado com base na curva da [Figura 56](#).

Figura 52 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4

Figura 53 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4

Como se nota pela [Figura 55](#), escolher o ganho de retroalimentação G de forma a minimizar a função objetivo como ilustrado na [Figura 56](#) não forneceu, neste caso, uma forma adequada de se comparar o desempenho entre as diferentes estratégias de controle (par co-localizado, ganhos otimizados por LSQ e otimização por AG). Nota-se claramente que cada estratégia de controle está associada a um nível de esforço de controle diferente, mesmo quando se atinge o mínimo para a função objetivo. Isso decorre da decisão de se utilizar a resposta em frequência durante a otimização em vez da resposta no tempo.

Comparar as diferentes técnicas de controle dessa forma não é muito justo, pois o controle que lançar mão de maiores esforços tende a apresentar melhores resultados. A fim de permitir uma melhor comparação entre as diferentes estratégias de controle, optou-se por recalcular os ganhos de retroalimentação de velocidade de forma a se limitar a magnitude da resposta no tempo do esforço de controle – $|u(t)|$ – a um limite máximo. Para fins de comparação, fixou-se para todos os casos um limite máximo para $|u(t)|$ igual a 0.5.

Um problema ao se utilizar a magnitude do pico de $u(t)$ está no aumento do custo computacional causado pela necessidade de simular o sistema para cada valor de ganho de retroalimentação. Uma varredura dos valores permissíveis do ganho G da retroalimentação de velocidade mostra que, à medida que G aumenta, $\max|u(t)|$ também aumenta, como se nota pela [Figura 56](#). Na realidade, verificou-se esse fenômeno em todos os casos estudados, evidente pelas outras curvas de máximo esforço. Com uma função monotônica, é possível encontrar o ganho que corresponde ao limite máximo de esforço através de uma simples busca binária, como descrito no capítulo de fundamentos teóricos. Assim, uma busca que seria extensiva passa a ter uma convergência exponencial. O valor mais adequado para o limite de esforço depende das restrições do projeto. Na maioria dos gráficos aqui obtidos, vê-se que até $\max|u(t)| = 0.3$ a relação entre ganho e sobressinal é quase linear, embora isso não ocorra sempre. Depois desse valor, normalmente a curva de esforço começa a saturar. A fim de poder comparar todos as diferentes metodologias, PAG e P00, e os diferentes casos, FUU e CXX, foi estabelecido que o limite máximo seria sempre de $0.5N$. Nas próximas discussões apenas serão mostrados os resultados dos sistemas em malha fechada em que os ganhos de retroalimentação foram corrigidos para equalizar o pico de esforço.

Com o limite máximo de esforço fixo nota-se na [Figura 59](#) que não há uma grande vantagem do sistema que utiliza o filtro modal sobre o que utiliza o controle co-localizado. Apesar de o sobressinal ser menor na resposta ao tempo para os sistemas que utilizam o filtro modal (tanto do tipo *opt* quanto do tipo *col*), vê-se que o tempo de acomodação não melhora, já que o 2º modo está bem aparente e demora a decair. Apesar disso, os valores da função objetivo para os novos valores de G desfavorecem o controle do tipo *col*. Isso ocorre por se ponderar igualmente o esforço para todos os modos de vibração.

Figura 54 – Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4

Figura 55 – Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4

Figura 56 – Curvas de ganho, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4

Figura 57 – Valores da função objetivo, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4

Como a FRF do par co-localizado afeta neste caso todos os modos, o custo do controle, $\sum_{j=1}^{12} R_j |U/P(r_j)|$ acaba por aumentar o valor da função objetivo para o controle por par co-localizado.

Figura 58 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, $\max|u(t)| \leq 0.5$, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4

Figura 59 – Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4

Figura 60 – Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4

Figura 61 – Curvas de esforço máximo, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4

Figura 62 – Valores da função objetivo, caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4

6.5.2 Caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4

Tabela 6 – Resumo do caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4

Método de otimização	Híbrido (algoritmo genético e SQP)
Variáveis de otimização	Posicionamento dos sensores Ganhos dos sensores; Ganho da retroalimentação
Ponderação	$Q = (1; 1000; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1)$ $R = (1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1)$ $W = (0; 0,1834)$
Modo preferencial	2
Número de sensores	4

Esta otimização focou a atenuação do 2º modo da estrutura, com foco reduzido nos demais. Inicialmente se tentou aplicar mais esforço de controle no 2º modo com uma ponderação $Q_2 = 100$, assim como no caso anterior. No entanto, as otimizações que seguiam essa ponderação davam pouca prioridade ao 2º modo. Isso pode ser explicado pelo formato da FRF $W_t/P(s)$, [Figura 64](#). A FRF tende a decair com -40 dB, uma tendência que até mesmo os picos de ressonância seguem. Assim, à medida que os modos avançam, é necessário escolher ponderações cada vez maiores. Por conta disso, optou-se por $Q_2 = 1000$ e $Q_j = 1$ para os demais.

Os resultados mostram que o filtro modal consegue atenuar o 2º modo em comparação com os modos de ordem mais alta, mas não consegue deixar de atuar no 1º modo. Mesmo uma tentativa com $Q_2 = 10000$ retornou resultados similares. Uma explicação para a dificuldade de se atuar isoladamente pode ser a escolha da posição do atuador, que é fixa. Na extremidade da viga, todos os modos são perturbados, o que dificulta que um modo seja isolado dos demais. Durante a busca de uma ponderação melhor, surgiu uma configuração que retornou resultados aparentemente melhores. No entanto, como a ponderação do esforço de controle não foi utilizada, o que significa que não se aplicou um custo ao esforço de controle, esse resultado é discutível. De qualquer forma, a próxima seção tratará brevemente desse resultado.

Figura 63 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4

Figura 64 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, $\max|u(t)| \leq 0.5$, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4

Figura 65 – Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4

Figura 66 – Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4

Figura 67 – Curvas de ganho, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4

Figura 68 – Curvas de esforço máximo, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4

6.5.3 Caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-3

Tabela 7 – Resumo do caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-3

Método de otimização	Híbrido (algoritmo genético e SQP)
Variáveis de otimização	Posicionamento dos sensores Ganhos dos sensores; Ganho da retroalimentação
Ponderação	$Q = (1; 100; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1) \times 10^{-3}$ $R = (0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0)$ $W = (0; 0,1834)$
Modo preferencial	2
Número de sensores	3

Uma das otimizações para o 2º modo retornou resultados interessantes. Ao se eliminar a ponderação para o esforço de controle, foi possível encontrar um caso em que o 2º modo foi mais atenuado do que o 1º, ao se comparar com o desempenho do controle por par co-localizado, como se verifica pela [Figura 70](#). No entanto, ainda não foi possível evitar que o 1º modo fosse afetado. A bem da verdade, o filtro modal ainda detecta o 1º modo muito bem [Figura 69](#), que é o motivo de o 1º modo ser tão afetado. Não se sabe exatamente o motivo, mas o 3º modo acabou por ser também atenuado. Provavelmente vem da dificuldade de se isolar um dos modos quando o número de sensores não se iguala ao número de modos no modelo da estrutura.

Com relação à resposta no tempo quando o esforço de controle é limitado a 0.5, ambos os sistemas *opt* e *col* apresentaram um desempenho similar no tempo, como se vê na resposta ao tempo da deflexão da ponta da viga, [Figura 71](#) e uma resposta no tempo do esforço de controle também similar [Figura 72](#). O desempenho do *lsq*, no entanto, é bem inferior, sendo na realidade pior do que o sistema a malha aberta. Uma observação atenta da [Figura 69](#) mostra que o método LSQ, ao tentar ajustar a saída do filtro modal ao sinal de referência, acaba por deixar diversos modos fora de fase com o 2º modo, inclusive o 1º, que possui grande relevância na resposta no tempo. Como resultado, qualquer ganho de retroalimentação maior do que zero irá reduzir o amortecimento do 1º modo. Esse efeito acaba por limitar o ganho a ser aplicado ao filtro modal, como se vê em [Figura 73](#), pois o 1º modo logo atinge o seu limite de 50% do amortecimento original. Isso resulta em um desempenho que é limitado pelo próprio projeto do filtro e não pelo limite máximo do esforço do atuador. Essa limitação pode ser melhor constatada pela [Figura 73](#), em que a curva *lsq* deixa de crescer bem antes das demais. Mesmo com um atuador maior, esforços de controle não poderiam ser aplicados. Caso contrário, o 1º modo estaria fora das restrições de projeto.

Figura 69 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-3

Figura 70 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, $\max|u(t)| \leq 0.5$, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-3

Figura 71 – Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-3

Figura 72 – Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-3

Figura 73 – Curvas de ganho, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-3

Figura 74 – Curvas de esforço máximo, caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-3

6.5.4 Caso GAS-PAG-FUU-FFF-003-4

Tabela 8 – Resumo do caso GAS-PAG-FUU-FFF-003-4

Método de otimização	Híbrido (algoritmo genético e SQP)
Variáveis de otimização	Posicionamento dos sensores Ganhos dos sensores; Ganho da retroalimentação
Ponderação	$Q = (100; 1000; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1)$ $R = (1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1)$ $W = (0,1834; 0,1834)$
Modos preferenciais	1, 2
Número de sensores	4

Esta otimização possui como objetivo atenuar o 1º e o 2º modos de vibração. Infelizmente, apesar de se usar uma ponderação diferente, os resultados obtidos são similares aos obtidos no caso GAS-PAG-FUU-FFF-001-4, [subseção 6.5.1](#), o que é de certa forma frustrante, já que aparentemente otimizar com um peso bem mais elevado para o 2º modo não causou muito efeito nos resultados finais. Novamente, o sistema *lsq* neste caso possui uma margem de ganho limitada devido aos modos que estão fora de fase com relação aos dois primeiros.

Figura 75 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-FUU-FFF-003-4

Figura 76 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, $\max|u(t)| \leq 0.5$, caso GAS-PAG-FUU-FFF-003-4

Figura 77 – Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-003-4

Figura 78 – Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-003-4

Figura 79 – Curvas de ganho, caso GAS-PAG-FUU-FFF-003-4

Figura 80 – Curvas de esforço máximo, caso GAS-PAG-FUU-FFF-003-4

6.5.5 Caso GAS-PAG-FUU-FFF-004-4

Tabela 9 – Resumo do caso GAS-PAG-FUU-FFF-004-4

Método de otimização	Híbrido (algoritmo genético e SQP)
Variáveis de otimização	Posicionamento dos sensores Ganhos dos sensores; Ganho da retroalimentação
Ponderação	$Q = (1; 1; 10000; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1)$ $R = (1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1)$ $W = (0; 0; 0,1834)$
Modo preferencial	3
Número de sensores	4

Nesta otimização procurou-se atenuar apenas o 3º modo. Assim como caso GAS-PAG-FUU-FFF-002-4, não foi possível deixar de isolar o 1º modo. Por outro lado, foi possível interferir pouco nos demais modos, isto é, todos os que não eram o 1º e nem o 3º. Este tipo de filtro não possui muito interesse prático, como se pode notar pela [Figura 83](#). Mesmo com o mesmo nível de esforço máximo, $0.5N$, o filtro modal apresenta uma resposta no tempo ruim se comparado com o controle por par co-localizado, uma vez que deixa de atenuar as vibrações do 2º modo. Este caso é apenas um caso patológico para investigar a flexibilidade do filtro modal. A ponderação empregada conseguiu seguir o que era pretendido em quase toda a faixa de frequências, o que confere maior possibilidade de se selecionar o quanto cada modo deve ser atenuado. No entanto, as tentativas mostraram que é difícil deixar de interferir no 1º modo. Nos casos que foram investigados, ou se atenua o 1º como retornado pelo AG, ou se desestabiliza o 1º modo como fez o *lsq*.

Figura 81 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-FUU-FFF-004-4

Figura 82 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, $\max|u(t)| \leq 0.5$, caso GAS-PAG-FUU-FFF-004-4

Figura 83 – Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-004-4

Figura 84 – Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-004-4

Figura 85 – Curvas de ganho, caso GAS-PAG-FUU-FFF-004-4

Figura 86 – Curvas de esforço máximo, caso GAS-PAG-FUU-FFF-004-4

6.5.6 Caso GAS-PAG-FUU-FFF-007-4

Tabela 10 – Resumo do caso GAS-PAG-FUU-FFF-007-4

Método de otimização	Híbrido (algoritmo genético e SQP)
Variáveis de otimização	Posicionamento dos sensores Ganhos dos sensores; Ganho da retroalimentação
Ponderação	$Q = (100; 1000; 10000; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1)$ $R = (1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1)$ $W = (0,1834; 0,1834; 0,1834)$
Modos preferenciais	1, 2, 3
Número de sensores	4

Com o objetivo de isolar os três modos, ponderações exponencialmente crescentes foram atribuídos aos coeficientes $Q_1 = 100$, $Q_2 = 1000$ e $Q_3 = 10000$, devido ao decaimento da FRF $W_t/P(r)$. Os demais modos, sem interesse, receberam ponderação igual a 1. Todos os coeficientes responsáveis pela ponderação do esforço de controle foram estabelecidos como unitários, $R_j = 1, j = 1, \dots, 12$.

A FRF do filtro modal otimizado pelo AG aproxima-se da FRF que seria obtida pelo par co-localizado, [Figura 87](#). Pelas ponderações atribuídas aos modos, esperava-se que os picos fossem mais homogêneos, como os picos da FRF *ref*. Enquanto o método LSQ procurar acompanhar os picos da FRF *ref* sacrificando a condição de fase mínima, o AG tende a sacrificar o desempenho em troca de menor tendência a desestabilizar a estrutura ao se tentar manter o sinal mais próximo da fase mínima. Como resultado, os sistemas *opt* e *col* apresentam desempenho semelhante, enquanto o sistema *lsq* segue a mesma tendência que se tem verificado de possuir uma séria limitação na margem de ganho.

Figura 87 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-FUU-FFF-007-4

Figura 88 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, $\max|u(t)| \leq 0.5$, caso GAS-PAG-FUU-FFF-007-4

Figura 89 – Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-007-4

Figura 90 – Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-PAG-FUU-FFF-007-4

Figura 91 – Curvas de ganho, caso GAS-PAG-FUU-FFF-007-4

Figura 92 – Curvas de esforço máximo, caso GAS-PAG-FUU-FFF-007-4

6.5.7 Comentário com relação ao desempenho dos filtros modais

Os resultados obtidos até o momento mostraram que superar o par co-localizado é extremamente desafiador. O filtro modal permite concentrar o esforço de controle em alguns modos isolados, o que lhe confere praticidade, mas na prática normalmente se deseja atenuar os modos de mais baixa ordem, o que torna um par co-localizado bem posicionado muito atrativo. A FRF do par co-localizado:

- possui maior magnitude para os modos de mais baixa ordem e decai em frequências mais altas;
- mantém a fase mínima, o que garante estabilidade para sistemas de controle simples como a retroalimentação de velocidade;
- só precisa de um sensor.

Uma estratégia melhor que se adotou para as duas otimizações a seguir consiste de imitar o sinal de um par co-localizado enquanto ao mesmo tempo se tenta eliminar o seu maior ponto fraco: a necessidade de co-localização entre sensor e atuador. Exigir que pares de sensores e atuadores sempre estejam na mesma posição não é um grande problema em vigas, mas em placas a co-localização entre sensores e atuadores não é possível quando se deseja que todos os dispositivos sejam instalados no mesmo lado da placa. Se o conceito de imitar o sinal co-localizado puder ser estendido para placas então teoricamente seria possível obter um sinal de fase mínima, o que seria mais interessante.

A abordagem adotada foi, então, fornecer pesos a todos os modos com base nos picos da FRF do par co-localizado da viga em malha aberta, que correspondem aos picos da FRF *ol* na [Figura 94](#). A magnitude desses picos são iguais a

$$\begin{aligned} \frac{W_t}{P}(r_j) = & \begin{bmatrix} 1,834 \times 10^{-1} & 2,542 \times 10^{-2} & 1,034 \times 10^{-2} \\ 5,375 \times 10^{-3} & 3,257 \times 10^{-3} & 2,168 \times 10^{-3} \\ 1,424 \times 10^{-3} & 1,135 \times 10^{-3} & 8,642 \times 10^{-4} \\ 6,475 \times 10^{-4} & 5,848 \times 10^{-4} & 5,015 \times 10^{-4} \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \quad (6.6)$$

sendo que r_j corresponde à frequência normalizada de ressonância para o j -ésimo modo de *ol*. Dessa forma, os pesos Q_j foram definidos como sendo o inverso das magnitudes dos

picos da FRF. Logo,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left[\frac{W_t}{P}(r_j) \right]^{-1} = \frac{1}{1,834 \times 10^{-1}} = 5,453 \\ Q_2 &= \left[\frac{W_t}{P}(r_j) \right]^{-1} = \frac{1}{2,542 \times 10^{-2}} = 3,934 \times 10^1 \\ &\vdots \\ Q_{12} &= \left[\frac{W_t}{P}(r_j) \right]^{-1} = \frac{1}{5,015 \times 10^{-4}} = 1,994 \times 10^3 \end{aligned}$$

Dessa forma, esperava-se que a otimização por AG retornasse um filtro modal cuja FRF fosse o mais próximo possível da fase mínima. Uma vez que o caso PAG não utiliza um sinal de referência para empregar o método LSQ, é necessário realizar a otimização em malha fechada. Para o caso P00, no entanto, não é estritamente necessário fechar a malha para se otimizar o filtro. Uma abordagem similar à empregada para o estudo da viga em malha aberta poderia ser empregado, com a única diferença de que o sinal alvo deixaria de possuir picos unitários, mas possuiria picos com amplitude variável, o que seria equivalente a realizar um *shaping*.

6.5.8 GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3

Tabela 11 – Resumo do caso GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3

Método de otimização	Híbrido (algoritmo genético e SQP)
Variáveis de otimização	Posicionamento dos sensores
	Ganhos dos sensores
	Ganho da retroalimentação
Ponderação	$Q = \begin{pmatrix} 1,0000 \times 10^2; & 4,5108 \times 10^3; & 3,1118 \times 10^4; \\ 1,1740 \times 10^5; & 3,2041 \times 10^5; & 7,1848 \times 10^5; \\ 1,5254 \times 10^6; & 2,5575 \times 10^6; & 4,3004 \times 10^6; \\ 7,1624 \times 10^6; & 9,7347 \times 10^6; & 1,3572 \times 10^7 \end{pmatrix}$
	$R = (10; 10; 10; 10; 10; 10; 10; 10; 10; 10; 10; 10)$
	$W = \begin{pmatrix} 1,834 \times 10^{-1}; & 2,542 \times 10^{-2}; & 1,034 \times 10^{-2}; \\ 5,375 \times 10^{-3}; & 3,257 \times 10^{-3}; & 2,168 \times 10^{-3}; \\ 1,424 \times 10^{-3}; & 1,135 \times 10^{-3}; & 8,642 \times 10^{-4}; \\ 6,475 \times 10^{-4}; & 5,848 \times 10^{-4}; & 5,015 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$
Modos preferenciais	Todos
Número de sensores	3

Inicialmente, tentou-se obter para este caso um filtro modal com um sinal próximo ao do par co-localizado utilizando-se 4 sensores. No entanto, um dos sensores costumava se dirigir à base da viga, onde o valor de deflexão é nulo para todos os modos. Efetivamente, isso descarta o sensor, que deixa de oferecer leituras significativas. Um caso alternativo resultava em dois sensores posicionados no mesmo local, que poderiam ser substituídos simplesmente por um sensor com o ganho igual à soma dos ganhos dos outros dois. Em ambos os casos pode-se supor que existe um sensor redundante, uma vez que um deles está sendo inutilizado. Consequentemente, uma dúvida foi lançada: poderia o sistema apresentar um desempenho igual ou até melhor eliminando um dos sensores e aplicando a otimização com apenas 3 sensores? O procedimento foi repetido com apenas 3 sensores e os resultados foram semelhantes, com a única diferença de que não havia mais um sensor posicionado na base da viga e nem dois sensores posicionados no mesmo local. Esse é um resultado inesperado, pois se a viga possui 12 modos, então quanto mais sensores forem incorporados ao filtro modal a malha aberta, melhor será o seu desempenho, até o máximo de 12 sensores. Ou seja, um filtro de 12 sensores será melhor do que um de 9, que será melhor do que um de 6. Mas neste caso em malha fechada com uma FRF alvo diferente, o desempenho era perfeitamente aceitável com apenas 3 sensores. Mais importante, sensores extras revelaram-se redundantes.

Algo notável à primeira vista foi a similaridade entre a FRF do filtro modal e a FRF do par co-localizado, [Figura 93](#), apesar de não se ter incluído na função objetivo o desvio do filtro modal com relação à sua FRF de referência, que seria o par co-localizado. Ao se aplicar o método LSQ às posições definidas pelo AG, o filtro modal utilizado no sistema *lsq* acabou por apresentar um sinal semelhante ao utilizado no sistema *opt*, com a exceção de que o 12º modo ficou em oposição de fase aos demais. Apesar de não garantir

estabilidade, o sistema *lsq* conseguiu atingir um desempenho muito próximo aos do *opt* e *col*.

A [Figura 95](#) mostra a resposta no tempo de cada sistema com a magnitude do esforço máximo restrita a 0.5, permitindo que a comparação de desempenho seja mais válida. A resposta de todos os sistemas se sobrepõem no gráfico, um sinal de que o o filtro modal se comporta como o par co-localizado para o dado sistema dinâmico.

Figura 93 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3

Figura 94 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, $\max|u(t)| \leq 0.5$, caso GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3

Figura 95 – Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3

Figura 96 – Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3

Figura 97 – Curvas de ganho, caso GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3

Figura 98 – Curvas de esforço máximo, caso GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3

6.5.9 GAS-PAG-C90-FFF-FFF-5

Tabela 12 – Resumo do caso GAS-PAG-C90-FFF-FFF-5

Método de otimização	Híbrido (algoritmo genético e SQP)
Variáveis de otimização	Posicionamento dos sensores Ganhos dos sensores; Ganho da retroalimentação
Ponderação	$Q = \begin{pmatrix} 1,0000 \times 10^2; & 4,5108 \times 10^3; & 3,1118 \times 10^4; \\ 1,1740 \times 10^5; & 3,2041 \times 10^5; & 7,1848 \times 10^5; \\ 1,5254 \times 10^6; & 2,5575 \times 10^6; & 4,3004 \times 10^6; \\ 7,1624 \times 10^6; & 9,7347 \times 10^6; & 1,3572 \times 10^7 \end{pmatrix}$ $R = (10; 10; 10; 10; 10; 10; 10; 10; 10; 10; 10; 10)$ $W = \begin{pmatrix} 1,834 \times 10^{-1}; & 2,542 \times 10^{-2}; & 1,034 \times 10^{-2}; \\ 5,375 \times 10^{-3}; & 3,257 \times 10^{-3}; & 2,168 \times 10^{-3}; \\ 1,424 \times 10^{-3}; & 1,135 \times 10^{-3}; & 8,642 \times 10^{-4}; \\ 6,475 \times 10^{-4}; & 5,848 \times 10^{-4}; & 5,015 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$
Modos preferenciais	Todos
Número de sensores	5

Logo surgiu uma hipótese de que, à medida que a faixa proibida para sensores expandir, um número maior de sensores seria necessário a fim de se obter a FRF de fase mínima, de preferência similar à do par co-localizado. Assim, tentou-se restringir agora as posições permissíveis para a faixa que vai desde 0 até 90% da estrutura, o que significa que sensores não poderiam ser posicionados a uma distância de até 10% do comprimento da viga, contando a partir do atuador. Várias tentativas de otimização foram realizadas, desde 12 até 6 sensores. Todos esses casos retornaram sensores posicionados na base viga ou dois sensores muito próximos. Com 5 sensores, por algum motivo, não foi possível chegar ao sinal de fase mínima. Estranhamente, o caso com 6 sensores retornou um filtro modal de fase mínima com um dos sensores posicionados muito próximo à base. Tomou-se, então esse projeto com o sensor próximo à base sendo descartado, tornando-se um filtro modal de 5 sensores. Como esperado, o novo filtro modal manteve a fase mínima. Esse é o resultado que será mostrado nesta seção. Infelizmente, ainda não se chegou a uma explicação para a falha do caso que era originalmente limitado a 5 sensores.

A [Figura 99](#) mostra resultados de certa forma semelhantes ao que se obteve no caso GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3. Até o filtro modal retornado pelo método LSQ exibiu a mesma falha: o último modo ficou em oposição de fase com relação aos demais. No entanto, há uma pequena diferença. O filtro modal encontrado pelo AG consegue manter a fase mínima, mas a magnitude de sua FRF não acompanha tão bem a magnitude da FRF do par co-localizado. Os desempenhos dos diferentes sistemas *lsq*, *col* e *opt* são muito semelhantes do ponto de vista da resposta em frequência, [Figura 100](#). Do ponto de vista da resposta no tempo, [Figura 101](#), os sistemas *col* e *lsq* apresentam um sobressinal de 4.13%, enquanto o sistema *opt* não apresenta sobressinal, exatamente como no caso GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3. A fim de se realizar uma comparação mais prática, o esforço

de controle foi limitado para $0.5N$, como de costume, e as respostas em frequência e no tempo foram recalculadas, de acordo com o procedimento padrão adotado neste estudo. Neste caso fica mais evidente que o sistema *opt* apresenta certa dificuldade em acompanhar o sistema *col*, como se nota nos picos de ressonância da [Figura 100](#). Esse problema também pode ser visto na resposta no tempo, [Figura 100](#). Apesar de as curvas dos sistemas *lsq*, *col* e *opt* estarem próximas, as oscilações do 2º modo no sistema *opt* demoram mais para decair se comparadas ao sistema *col*. No entanto, essa diferença não acaba por retardar o tempo de assentamento. Assim como no caso GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3, uma peculiaridade deste filtro modal é a semelhança dos gráficos, como a resposta no tempo e os valores da função objetivo para o esforço igual a $0.5N$, assim como as curvas de esforço máximo.

Figura 99 – FRF do filtro modal, caso GAS-PAG-C90-FFF-FFF-5

Figura 100 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, $\max|u(t)| \leq 0.5$, caso GAS-PAG-C90-FFF-FFF-5

Figura 101 – Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-PAG-C90-FFF-FFF-5

Figura 102 – Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-PAG-C90-FFF-FFF-5

Figura 103 – Curvas de ganho, caso GAS-PAG-C90-FFF-FFF-5

Figura 104 – Curvas de esforço máximo, caso GAS-PAG-C90-FFF-FFF-5

6.5.10 GAS-P00-C90-FFF-FFF-5

Tabela 13 – Resumo do caso GAS-P00-C90-FFF-FFF-5

Método de otimização	Híbrido (algoritmo genético e SQP)
Variáveis de otimização	Posicionamento dos sensores
Ponderação	$Q = (1.0000 \cdot 10^2, 4.5108 \cdot 10^3, 3.1118 \cdot 10^4, 1.1740 \cdot 10^5, 3.2041 \cdot 10^5, 7.1848 \cdot 10^5, 1.5254 \cdot 10^6, 2.5575 \cdot 10^6, 4.3004 \cdot 10^6, 7.1624 \cdot 10^6, 9.7347 \cdot 10^6, 1.3572 \cdot 10^7)$ $R = (10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10)$ $W = (1.834 \cdot 10^{-1}, 2.542 \cdot 10^{-2}, 1.034 \cdot 10^{-2}, 5.375 \cdot 10^{-3}, 3.257 \cdot 10^{-3}, 2.168 \cdot 10^{-3}, 1.424 \cdot 10^{-3}, 1.135 \cdot 10^{-3}, 8.642 \cdot 10^{-4}, 6.475 \cdot 10^{-4}, 5.749 \cdot 10^{-4}, 4.915 \cdot 10^{-4})$
Modos preferenciais	Todos
Número de sensores	5

Para conferir a diferença entre usar como variáveis de otimização somente as posições dos sensores que compõem o filtro modal e usar não só o posicionamento como também os ganhos dos sensores e o ganho de retroalimentação, foi testada a metodologia P00, como descrita na [seção 6.4](#), para mais tarde comparar os resultados com a metodologia PAG. Os resultados mostram que otimizar o sistema com base no posicionamento acaba em um filtro modal em que os modos de ordem 5 a 11 ficam fora de fase, não mais garantindo estabilidade se usado no sistema de controle por retroalimentação de velocidade.

A resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário mostrada na [Figura 107](#) indica um maior sobressinal quando a metodologia P00 é empregada, se comparado com o sobressinal resultante usando o par co-localizado. Constata-se, então, uma piora do desempenho se comparado com o filtro modal projetado com a metodologia PAG.

A resposta no tempo do esforço de controle, mostrada na [Figura 108](#), mostra que o esforço do filtro projetado usando o *lsq* possui um pico de $0.4089N$. Se o ganho de retroalimentação for ampliado além desse valor, o 6º modo passará a ter um amortecimento menor do que 0.25%, o que é considerado inaceitável para os critérios usados neste estudo. Assim, não seria possível fazer pleno uso de um maior esforço de controle, mesmo que estivesse disponível. O valor em que isso ocorre é $1.694Ns/m$, enquanto que o ganho máximo permissível para o par co-localizado é de $4.366Ns/m$.

Devido à desestabilização dos modos de ordem 5 a 11, a função objetivo para o sistema *lsq* sobe rapidamente para ganhos mais elevados, diferentemente do que acontece com o par co-localizado. No entanto, os gráficos de esforço máximo para ambos os sistemas crescem de forma relativamente similar até o ganho máximo permitido para o sistema *lsq*.

A partir dos resultados obtidos neste caso, conclui-se que realizar a otimização apenas com base nas posições dos sensores pode levar a um resultado pior do que se conseguiria considerando as posições, os ganhos dos sensores e o ganho de retroalimentação de velocidade.

Figura 105 – FRF do filtro modal, caso GAS-P00-C90-FFF-FFF-5

Figura 106 – Magnitude da FRF $W_t/P(r)$ na extremidade da viga em malha fechada, $\max|u(t)| \leq 0.5$, caso GAS-P00-C90-FFF-FFF-5

Figura 107 – Resposta da deflexão na ponta da viga ao degrau unitário, caso GAS-P00-C90-FFF-FFF-5

Figura 108 – Resposta do esforço de controle ao degrau unitário, caso GAS-P00-C90-FFF-FFF-5

Figura 109 – Curvas de ganho, caso GAS-P00-C90-FFF-FFF-5

Figura 110 – Curvas de esforço máximo, caso GAS-P00-C90-FFF-FFF-5

7 Análise da placa em malha aberta

Depois de realizada a otimização do filtro modal em malha aberta aplicado a uma viga engastada, procedeu-se à otimização do filtro modal em malha aberta aplicado a uma placa com os quatro lados engastados. Como o problema de vibrações da placa sujeita a essas condições de contorno não possui uma solução exata, apenas soluções aproximadas são possíveis. Dos dois métodos normalmente empregados, a saber Ritz-Galerkin e elementos finitos, este estudo empregou o método de Ritz-Galerkin. Assim como no caso da viga engastada em malha aberta, as equações governantes do sistema foram determinadas. Depois, a formulação da FRF do filtro modal foi desenvolvida a fim de se definir a função objetivo, baseada no desvio quadrático entre a FRF do filtro modal e uma FRF de referência.

7.1 Modelo dinâmico da placa

Desta vez o objeto de estudo foi uma placa retangular engastada nos quatro lados de comprimento $a = 500$ mm, largura $b = 400$ mm e espessura $h = 3$ mm, como mostrado na [Figura 111](#). Alumínio é o material empregado, com módulo de elasticidade $E = 70$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0.33$ e densidade $\rho = 2810$ kg/m³. A equação governante de para uma placa retangular isotrópica de espessura constante é dada por

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, y, t) = f(x, y, t), \quad (7.1)$$

Figura 111 – Dimensões utilizadas para a placa neste estudo.

com as condições de contorno correspondentes ao engaste nas quatro bordas expressas como

$$w(x, 0, t) = 0 \quad w(x, b, t) = 0 \quad w(0, y, t) = 0 \quad w(a, y, t) = 0 \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0, y, t) = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x}(a, y, t) = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x, 0, t) = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x, b, t) = 0 \quad (7.3)$$

sendo que x denota a posição ao longo da largura da placa, y a posição ao longo da altura da placa, t o tempo, $w(x, y, t)$ o deslocamento do ponto (x, y) da placa no instante t e $f(x, y, t)$ o carregamento distribuído sendo aplicado à placa no ponto (x, y) . O coeficiente D é a rigidez à flexão da placa, definido como

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

A fim de facilitar a escolha dos valores de tolerâncias nos métodos numéricos de integração, (7.1) foi reescrita em termos de variáveis adimensionais. As grandezas adimensionais relacionam-se às grandezas originais por meio das relações

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \eta = \frac{y}{b} \quad \tau = t\omega_a \quad v(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{a}w(a\xi, b\eta, \omega_a t) \quad (7.4)$$

$$\omega_a = \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho}} \quad R = \frac{a}{b} \quad \gamma(\xi, \eta, \tau) = \frac{a}{D}f(a\xi, b\eta, \omega_a t). \quad (7.5)$$

A substituição na Equação 7.1 pelas variáveis adimensionais dá

$$D \left(\frac{1}{a^4} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \frac{1}{a^2 b^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{1}{b^4} \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right) av(\xi, \eta) + \rho \omega_a^2 a \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = f(a\xi, b\eta, \omega_a \tau).$$

Ao fatorar $1/a^4$ no 1º termo do 1º membro e dividir ambos os membros por $a\rho\omega_a^2$, tem-se que

$$\frac{D}{a^4 \rho \omega_a^2} \left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \frac{a^2}{b^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{a^4}{b^4} \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right) v(\xi, \eta) + \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = \frac{1}{a\rho\omega_a^2} f(a\xi, b\eta, \omega_a \tau).$$

Relembrando as definições na eq. (7.4) de R , ω_a e $\gamma(\xi, \eta, \tau)$, chega-se a

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2R^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + R^4 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right) v(\xi, \eta) + \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = \gamma(\xi, \eta, \tau), \quad (7.6)$$

com as condições de contorno

$$v(\xi, 0, \tau) = 0 \quad v(\xi, 1, \tau) = 0 \quad v(0, \eta, \tau) = 0 \quad v(1, \eta, \tau) = 0 \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}(0, \eta, \tau) = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial \xi}(1, \eta, \tau) = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi, 0, \tau) = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi, 1, \tau) = 0. \quad (7.8)$$

Não há uma solução exata para o caso em que todos os quatro lados de uma placa estão engastados. Como consequência, a solução deve ser aproximada. No entanto, ainda é possível fazer uso de alguns dos métodos compilados em (LEISSA, 1969) para encontrar

uma representação dos modos de vibração da placa em termos de funções analíticas. Para este modelo foi empregado o método desenvolvido em (YOUNG, 1950 apud LEISSA, 1969), que usou o produto de autofunções da viga como componentes para construir os vetores de Ritz. Consiste de aplicar o método de Rayleigh-Ritz ao método de Warburton (WARBURTON, 1954 apud YOUNG, 1950).

Lembrando que a placa em estudo possui todos os lados engastados, será necessário empregar então as autofunções da viga biengastada, caso se deseje usar a aproximação por Warburton. A autofunção normalizada do j -ésimo modo da viga biengastada é dada por

$$\psi_j(\xi) = c_j w_j(\xi),$$

sendo que

$$w_j(\xi) = \sinh(\beta_j \xi) - \sin(\beta_j \xi) - \frac{\sinh(\beta_j) - \sin(\beta_j)}{\cosh(\beta_j) - \cos(\beta_j)} (\cosh(\beta_j \xi) - \cos(\beta_j \xi))$$

$$c_j = \sqrt{\int_0^1 w(\xi)^2 d\xi}.$$

A aproximação dos modos da placa pelo método de Warburton, que emprega o produto das funções de forma da viga, assume a forma

$$\theta_{jk}(\xi, \eta) = \psi_j(\xi) \psi_k(\eta).$$

Levando em conta que as funções de forma são ortonormais entre si, o conjunto $W = \{\theta_{jk}(\xi, \eta) \mid j = 1, \dots, m \wedge k = 1, \dots, n\}$, forma uma base ortogonal.

É possível, no entanto, obter aproximações melhores para as autofunções. Uma das aproximações possíveis, proposta por Young, aplica o método de Rayleigh-Ritz à base de Warburton W com o objetivo de obter os vetores de Ritz. Se o modo ab da placa retangular for representado pelo vetor de Ritz $\phi_{ab}(\xi, \eta)$ como uma combinação linear dos vetores que compõem a base W , então

$$\phi_{ab}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n A_{abjk} \theta_{jk}(\xi, \eta) \quad (7.9)$$

Existe um certo problema com esta notação, no entanto. Os coeficientes A_{abjk} acabam tomando a forma de um tensor de 4^a ordem, o que dificulta o posterior cálculo de autovalores e autovetores, pois as rotinas matemáticas são normalmente programadas para matrizes. Logo, é necessário nesta etapa remapear os índices do tensor A_{abjk} para uma matriz e os índices das matrizes $\phi_{ab}(\xi, \eta)$ e $\theta_{jk}(\xi, \eta)$ para vetores coluna. Convencionou-se o mapeamento $s = m(k - 1) + j$ para converter do índice duplo para o índice simples e os mapeamentos $j = (s - 1) \bmod m$ e $k = \lfloor s/m \rfloor + 1$ para converter o índice simples para o índice duplo. No MATLAB, essa transformação é facilmente realizada por meio das

Tabela 14 – Exemplo de conversão entre os índices s , j e k para $m=3$ e $n=4$

		k			
		1	2	3	4
j	1	1	4	7	10
	2	2	5	8	11
	3	3	6	9	12

funções **sub2ind** e **ind2sub**. Tendo-se realizado a transformação para o índice simples, a eq. (7.9) pode ser reescrita como

$$\phi_t(\xi, \eta) = \sum_{s=1}^{mn} A_{st} \theta_s(\xi, \eta) \quad (7.10)$$

Como um exemplo, suponha que $m = 3$ e $n = 4$. Então a conversão entre os índices s , j e k ocorre como descrita pela Equação 7.1.

Tendo definido o remapeamento de índices, será dado prosseguimento para a aproximação das autofunções através da mesma estratégia adotada para a viga engastada no Capítulo 3, que é a expansão em série do campo de deslocamentos da estrutura em termos das formas modais, com o coeficiente de cada forma modal sendo dependente do tempo:

$$v(\xi, \eta, \tau) = \sum_{t=1}^{mn} q_t(\tau) \phi_t(\xi, \eta) = \sum_{t=1}^{mn} q_t(\tau) \sum_{s=1}^{mn} A_{st} \theta_s(\xi, \eta). \quad (7.11)$$

No caso de um sistema em regime permanente sob perturbação harmônica, $q_t(\tau)$ pode ser substituído por $\tilde{q}_t e^{ir\tau}$, resultando em

$$v(\xi, \eta, \tau) = \sum_{t=1}^{mn} \tilde{q}_t e^{ir\tau} \phi_t(\xi, \eta). \quad (7.12)$$

A substituição da Equação 7.12 na equação homogênea (quando $\gamma(\xi, \eta, \tau) = 0$) associada à equação governante (7.6) dá

$$\left[\left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2R^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + R^4 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right) \phi_s(\xi, \eta) - r^2 \phi_s(\xi, \eta) \right] \tilde{q}_t e^{ir\tau} = 0,$$

logo

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2R^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + R^4 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right) \phi_s(\xi, \eta) - r^2 \phi_s(\xi, \eta) = 0, \quad (7.13)$$

lembrando que a equação homogênea associada corresponde àquela em que a perturbação externa é nula, $\gamma(\xi, \eta, \tau) = 0$. As condições de contorno se tornam

$$\Phi(\xi, 0) = 0 \quad \Phi(\xi, 1) = 0 \quad \Phi(0, \eta) = 0 \quad \Phi(1, \eta) = 0 \quad (7.14)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}(0, \eta) = 0 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}(1, \eta) = 0 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}(\xi, 0) = 0 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}(\xi, 1) = 0. \quad (7.15)$$

Se cada membro da eq. (7.13) for multiplicado por $\phi_s(\xi, \eta)$ e o produto for integrado no domínio da placa, tem-se que

$$\int_0^1 \int_0^1 \phi_s(\xi, \eta) \left[\left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2R^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + R^4 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right) \phi_s(\xi, \eta) - r^2 B^4 \phi_s(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta = 0, \quad (7.16)$$

Para encontrar os coeficientes A_{st} das funções de forma, de alguma forma será necessário incorporar A_{st} à eq. (7.16), algo que pode ser realizado se for usada a eq. (7.10) que expressa as funções de forma $\phi_t(\xi, \eta)$ em função dos coeficientes A_{st} e as aproximações de Warburton $\theta_s(\xi, \eta)$. A substituição da eq. (7.10) na eq. (7.16) resulta em

$$\int_0^1 \int_0^1 \sum_{t=1}^{mn} A_{st} \theta_s(\xi, \eta) \left[\left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2R^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + R^4 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right) \sum_{u=1}^{mn} A_{su} \theta_s(\xi, \eta) - r^2 B^4 \sum_{u=1}^{mn} A_{su} \theta_s(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta = 0.$$

Observar que um novo índice u foi acrescentado para não capturar o índice t já presente. Reordenando-se as somas para fora, tem-se

$$\sum_{t=1}^{mn} \sum_{u=1}^{mn} A_{st} \int_0^1 \int_0^1 \theta_t(\xi, \eta) \left[\left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2R^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + R^4 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right) \theta_u(\xi, \eta) - r^2 \theta_u(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta A_{su} = 0$$

A integração por partes do termo com derivadas de 4ª ordem com a aplicação das condições de contorno em (7.15) e (7.14) resulta em

$$\sum_{t=1}^{mn} \sum_{u=1}^{mn} A_{st} \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \theta_t}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \theta_u}{\partial \xi^2} + R^4 \frac{\partial^2 \theta_t}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \theta_u}{\partial \eta^2} + 2R^2 \frac{\partial^2 \theta_t}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \theta_u}{\partial \xi \partial \eta} \right) d\xi d\eta \quad (7.17)$$

$$-r^2 \int_0^1 \int_0^1 \theta_t \theta_u d\xi d\eta A_{su} = 0. \quad (7.18)$$

Se as matrizes de rigidez e de inércia forem definidas como

$$K_{tu} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \theta_t}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \theta_u}{\partial \xi^2} + R^4 \frac{\partial^2 \theta_t}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \theta_u}{\partial \eta^2} + 2R^2 \frac{\partial^2 \theta_t}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \theta_u}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta \quad (7.19)$$

$$M_{tu} = \int_0^1 \int_0^1 \theta_t \theta_u d\xi d\eta, \quad (7.20)$$

então a eq. (7.17) assume a forma

$$A_{st}(K_{tu} - r^2 M_{tu})A_{su} = 0.$$

Os autovalores $\lambda = r^2$ dão o quadrado das frequências naturais do sistema, enquanto os autovetores determinam os coeficientes da matriz A_{st} , sendo que cada linha s dá os coeficientes do s -ésimo modo de vibração. Tendo-se determinado A_{jk} , é possível então determinar as aproximações ϕ_j para as formas modais descritas pela eq. (7.10).

Agora que as formas modais podem ser estimadas, é possível expandir o campo de deslocamentos da placa em uma série em termos das formas modais, o que toma a forma

$$v(\xi, \eta, \tau) = \sum_{j=1}^{mn} q_j(\tau) \phi_j(\xi, \eta) \quad (7.21)$$

A substituição de $v(\xi, \eta, \tau)$ na equação governante adimensional (7.6) pela expansão em série da eq. (7.21) resulta em

$$\sum_{t=1}^{mn} q_t(\tau) \left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2R^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + R^4 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right) \phi_t(\xi, \eta) + \frac{dq_t}{d\tau}(\tau) \phi_t(\xi, \eta) = \gamma(\xi, \eta, \tau) \quad (7.22)$$

Para resolver a equação diferencial (7.22), procede-se ao desacoplamento de suas variáveis, que pode ser realizado tendo em mente as relações ortonormais entre as formas modais. Assim, a eq. (7.22) é pré-multiplicada por uma forma modal $\phi_s(\xi, \eta)$ e integrada no domínio da placa, o que dá

$$\begin{aligned} q_t(\tau) \int_0^1 \int_0^1 \phi_s(\xi, \eta) \left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2R^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + R^4 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right) \phi_t(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ + \frac{d^2 q_t}{d\tau^2}(\tau) \int_0^1 \int_0^1 \phi_s(\xi, \eta) \phi_t(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^1 \phi_s(\xi, \eta) \gamma(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Se o termo contendo derivadas de quarta ordem for integrado por partes duas vezes com a aplicação das condições de contorno, resulta que

$$q_t(\tau) \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial \xi^2} + 2R^2 \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial \xi \partial \eta} + R^4 \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial \eta^2} d\xi d\eta \quad (7.23)$$

$$+ \frac{d^2 q_t}{d\tau^2}(\tau) \int_0^1 \int_0^1 \phi_s(\xi, \eta) \phi_t(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^1 \phi_s(\xi, \eta) \gamma(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta. \quad (7.24)$$

Sejam definidos a matriz Ω_{st}^2 e o vetor Γ_s como

$$\begin{aligned} \Omega_{st}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial \xi^2} + 2R^2 \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial \xi \partial \eta} + R^4 \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial \eta^2} d\xi d\eta \\ \Gamma_s &= \int_0^1 \int_0^1 \phi_s(\xi, \eta) \gamma(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Devido à relação de ortonormalidade entre as autofunções normalizadas, $\int_0^1 \int_0^1 \phi_s(\xi, \eta) \phi_t(\xi, \eta) d\xi d\eta$ é uma matriz identidade e Ω_{st}^2 é uma matriz diagonal com o quadrado das frequências naturais não amortecidas. Assim, a eq. (7.23) pode ser simplificada para

$$\Omega^2 \mathbf{q}(\tau) + \mathbf{I} \frac{d^2 \mathbf{q}}{d\tau^2}(\tau) = \mathbf{\Gamma}(\tau).$$

Também pode ser incluído um amortecimento modal $\mathbf{\Lambda}$ às equações. Neste estudo, consideramos um amortecimento de 0.5% para todos os modos.

$$\Omega^2 \mathbf{q}(\tau) + \mathbf{\Lambda} \frac{d\mathbf{q}}{d\tau}(\tau) + \mathbf{I} \frac{d^2 \mathbf{q}}{d\tau^2}(\tau) = \mathbf{\Gamma}(\tau).$$

Figura 112 – Detalhe de um dos sensores que compõem o filtro modal.

7.2 FRF do filtro modal

Agora, considera-se que o sistema esteja em regime permanente com uma perturbação harmônica $\mathbf{\Gamma} = \tilde{\mathbf{\Gamma}}e^{i\omega t} = \tilde{\mathbf{\Gamma}}e^{ir\tau}$. Então novamente a resposta no tempo dos graus de liberdade do sistema também é harmônica e assume a forma $\mathbf{q}(\tau) = \tilde{\mathbf{q}}e^{ir\tau}$, sendo que $\tilde{\mathbf{q}}$ é um vetor de números complexos, cada qual denotando a magnitude e a defasagem do grau de liberdade com relação à perturbação.

Dessa forma, $\tilde{\mathbf{q}}$ pode ser determinado como

$$(\mathbf{\Omega}^2 + ir\mathbf{\Lambda} - r^2\mathbf{I})\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{\Gamma}}.$$

A matriz $(\mathbf{\Omega}^2 + ir\mathbf{\Lambda} - r^2\mathbf{I})$ é diagonal, uma vez que se trata da soma de matrizes diagonais. Então, cada componente $\tilde{q}_j$ de $\tilde{\mathbf{q}}$ pode ser facilmente determinada como sendo

$$\tilde{q}_j = \frac{\tilde{\Gamma}_j}{(\Omega_{jj}^2 + ir\Lambda_{jj} - r^2)}.$$

Como agora a resposta em frequência de todos os graus de liberdade pode ser determinada, a resposta em frequência do campo de deslocamentos pode ser reconstruída

$$\tilde{v}(\xi, \eta, r) = \sum_{j=1}^{mn} \tilde{q}_j(r) \phi_j(\xi, \eta). \quad (7.25)$$

Em uma placa retangular contendo p sensores, denotemos por j , com $j = 1, \dots, p$, o índice usado para identificar um dentre os p sensores, cuja posição é (x_j, y_j) . Relembrando os adimensionais $\xi_j = x_j/a$ e $\eta_j = y_j/b$, a FRF do sensor posicionado em (x_j, y_j) é então $Y_j(\xi_j, \eta_j, r) = \tilde{v}(\xi, \eta, r)$. A definição de filtro modal (4.1), originalmente no domínio do

tempo, também pode ser aplicada no domínio da frequência, uma vez que a transformada de Fourier é operador linear. Assim,

$$Y(\xi, \eta, \alpha, r) = \sum_{j=1}^p \alpha_j Y_j(r) \quad (7.26)$$

No entanto, a expressão para $Y_j(r)$ já foi determinada, como se vê na [Equação 7.25](#). Assim, a substituição de $Y_j(r)$ na [Equação 7.26](#) pela expressão equivalente dá

$$Y(\Xi, H, A, r) = \sum_{j=1}^p \alpha_j Y_j(r) = \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{s=1}^{mn} q_s(\tau) \phi_s(\xi_j, \eta_j) \quad (7.27)$$

Por meio dos coeficientes α_j é possível ajustar a FRF do filtro modal de forma a se ter um comportamento mais próximo do que se deseja, como por exemplo isolar apenas o 1º modo enquanto os demais devem ser atenuados. Assim como realizado no caso do filtro modal em malha aberta para a viga engastada, estabelece-se a FRF $G(r)$ de um filtro ideal que será usada como referência através da soma dos modos de interesse

$$G(r) = \sum_{j \in T} \frac{\Lambda_{jj} \Omega_{jj}}{\Omega_{jj}^2 - r^2 + i \Lambda_{jj} r} \quad (7.28)$$

O erro do filtro modal é então definido como a diferença entre a FRF do filtro modal e a sua referência, $E(\Xi, H, A, r) = Y(\Xi, H, A, r) - G(r)$. Para que a FRF do filtro modal se aproxime à sua referência, o objetivo será reduzir o erro quadrático ao longo da faixa de frequência de interesse $[r_{min}, r_{max}]$. Assim, trata-se de um problema de otimização em que se procura minimizar o valor da função objetivo

$$\begin{aligned} f_o(\Xi, H, A, r) &= \int_{r_{min}}^{r_{max}} E(r) \bar{E}(r) dr \\ &= \int_{r_{min}}^{r_{max}} [Y(r) - G(r)] [\bar{Y}(r) - \bar{G}(r)] dr \\ &= \int_{r_{min}}^{r_{max}} \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{s=1}^{mn} q_s(\tau) \phi_s(\xi_j, \eta_j) - G(r) \right] \\ &\quad \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{s=1}^{mn} \bar{q}_s(\tau) \phi_s(\xi_j, \eta_j) - \bar{G}(r) \right] dr. \end{aligned} \quad (7.29)$$

É possível fornecer o gradiente da função objetivo ao método de otimização, caso seja desejável, mesmo que a notação esteja um pouco complexa. Relembrando que o gradiente corresponde a um vetor em que cada componente pode ser encontrada através da derivada parcial da função objetivo com relação a cada uma das variáveis,

$$\nabla f_o = \left[\frac{\partial f_o}{\partial \xi_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f_o}{\partial \xi_p} \quad \frac{\partial f_o}{\partial \eta_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f_o}{\partial \eta_p} \quad \frac{\partial f_o}{\partial \alpha_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f_o}{\partial \alpha_p} \right]^T. \quad (7.30)$$

Cada derivada parcial pode ser obtida da formulação da função objetivo mostrada na eq. (7.29) de forma relativamente simples, resultando em

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_o}{\partial \xi_a} = \alpha_a \int_{r_{min}}^{r_{max}} \sum_{s=1}^{mn} q_s(\tau) \frac{\partial \phi_s}{\partial \xi}(\xi_a, \eta_a) & \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{s=1}^{mn} \bar{q}_s(\tau) \phi_s(\xi_j, \eta_j) - \bar{G}(r) \right] \\ & + \sum_{s=1}^{mn} \bar{q}_s(\tau) \frac{\partial \phi_s}{\partial \xi}(\xi_a, \eta_a) \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{s=1}^{mn} q_s(\tau) \phi_s(\xi_j, \eta_j) - G(r) \right] dr, \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_o}{\partial \eta_a} = \alpha_a \int_{r_{min}}^{r_{max}} \sum_{s=1}^{mn} q_s(\tau) \frac{\partial \phi_s}{\partial \eta}(\xi_a, \eta_a) & \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{s=1}^{mn} \bar{q}_s(\tau) \phi_s(\xi_j, \eta_j) - \bar{G}(r) \right] \\ & + \sum_{s=1}^{mn} \bar{q}_s(\tau) \frac{\partial \phi_s}{\partial \eta}(\xi_a, \eta_a) \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{s=1}^{mn} q_s(\tau) \phi_s(\xi_j, \eta_j) - G(r) \right] dr \end{aligned} \quad (7.32)$$

$$\frac{\partial f_o}{\partial \alpha_a} = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \left[\sum_{s=1}^{mn} q_s(\tau) \phi_s(\xi_a, \eta_a) - G(r) \right] \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{s=1}^{mn} \bar{q}_s(\tau) \phi_s(\xi_j, \eta_j) - \bar{G}(r) \right] \quad (7.33)$$

$$+ \left[\sum_{s=1}^{mn} \bar{q}_s(\tau) \phi_s(\xi_a, \eta_a) - \bar{G}(r) \right] \left[\sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{s=1}^{mn} q_s(\tau) \phi_s(\xi_j, \eta_j) - G(r) \right] dr, \quad (7.34)$$

sendo que todos os ganhos α_j são considerados números reais, assim como no estudo da vida engastada.

7.3 Comparação do modelo com os valores tabelados

Apesar de reunir vários métodos de solução do problema de vibrações de placas, a obra usada como referência (LEISSA, 1969) não fornece muitos detalhes com relação à programação dos métodos em si. Por conta disso, foi conveniente comparar os resultados do modelo construído com os valores tabelados na referência empregada.

As frequências naturais do modelo programado neste estudo foram comparadas às obtidas por Young (YOUNG, 1950 apud LEISSA, 1969) e Ödman (ÖDMAN, 1955 apud LEISSA, 1969). Três casos foram considerados: uma placa quadrada (Tabela 15), uma placa retangular com razão largura/altura $a/b = 0.5$ (Tabela 16) e uma placa retangular com razão largura/altura $a/b = 0.667$ (Tabela 17). Para cada frequência natural um erro relativo percentual $\epsilon_X = [r_{jk} - (r_{jk})_X] / (r_{jk})_X \cdot 100\%$ foi calculado, sendo que r_{jk} é o modo jk de vibração e o subscrito X denota o autor dos resultados, com $X = Y$ para Young e $X = O$ para Ödman.

Todos os resultados do modelo desenvolvido para este estudo estão próximos às referências da literatura, embora os valores entre parênteses, que foram obtidos por interpolação, tendam a apresentar um erro um pouco maior. Ainda assim, os resultados indicam que o modelo está correto.

Tabela 15 – Comparação entre as frequências naturais do modelo programado e as dos trabalhos originais para uma placa quadrada.

Modo	r_{jk}	Young	ϵ_Y (%)	Ödman	ϵ_O (%)
11	35.98755	35.99	6.81e-3	35.998965	3.17e-2
21	73.40126	73.41	1.19e-2	73.405	5.10e-3
12	73.40346	73.41	8.91e-3	73.405	2.10e-3
22	108.2552	108.27	1.37e-2	108.237	1.68e-2
13	131.6014	131.64	2.93e-2	131.902	2.28e-1
31	132.2216	132.25	2.15e-2	131.902	5.16e-1
23	165.0635	165.15	5.23e-2	165.023	2.45e-2

Tabela 16 – Comparação entre as frequências naturais do modelo programado e as do trabalho original de Ödman para placas retangulares com razão largura/altura igual a 0.5

Modo	Frequência Natural	Ödman	ϵ_O (%)
11	24.57960	24.58	1.63e-3
12	31.83176	31.83	5.53e-3
13	44.78556	44.78	1.24e-2
14	63.35365	63.34	2.16e-2
21	63.99096	(64.1)	1.70e-1
22	71.09791	71.08	2.52e-2
23	83.33758	(83.2)	1.65e-1
15	87.29221	87.26	3.69e-2
24	100.8747	100.80	7.41e-2
16	116.4078	(117)	5.06e-1
31	123.2662	(124)	5.92e-1
25	123.8399	(124.2)	2.90e-1

7.4 Otimização

A fim de aproximar a FRF do filtro modal à FRF de referência, o método do ponto interior foi empregado para minimizar a função objetivo. A rotina usada foi a `fmincon`, que está disponível na *Optimization Toolbox* do MATLAB. A função objetivo possui como variáveis de otimização as posições ξ_j e η_j dos sensores, assim como os seus respectivos ganhos α_j , para $j = \{1, \dots, p\}$. O gradiente da função objetivo foi calculada e fornecida ao método. A Hessiana, no entanto, é bem mais complexa de se calcular e `fmincon` foi configurada para estimá-la com o método BFGS. Uma alteração relativa menor do que $1 \cdot 10^{-6}$ foi usada como o critério de convergência da otimização.

O método do ponto interior requer que uma estimativa inicial para as variáveis de otimização seja fornecida. A primeira tentativa consistiu de uma grade 4 por 3 sensores regularmente espaçados, cada um deles associado ao um ganho inicial unitário. Então o

Tabela 17 – Comparação entre as frequências naturais do modelo programado e as do trabalho original de Ödman para placas retangulares com razão largura/altura igual a 0.667

Modo	Frequência Natural	Ödman	ϵ_O (%)
11	27.00730	27.01	1.00e-2
12	41.71190	41.72	1.94e-2
21	66.13214	(65.5)	9.65e-1
13	66.54319	66.53	1.98e-2
22	79.82839	79.81	2.30e-2
14	100.8464	100.81	3.61e-2
23	103.1948	(103)	1.89e-1
31	125.3148	(126)	5.44e-1
24	136.1813	136.10	5.97e-2
32	138.6982	138.64	4.20e-2
15	144.2612	144.21	3.55e-2
33	161.4190	161.23	1.17e-1

método de otimização foi executado e os resultados foram gravados. Os procedimentos da segunda tentativa foram iguais aos da primeira, com a diferença de que se empregou uma estimativa inicial aleatória.

A fim de conferir se os resultados obtidos são consistentes com o método dos mínimos quadrados (LSQ), a FRF do filtro modal otimizado foi comparada com a FRF do filtro modal em que as posições foram mantidas iguais ao do filtro modal otimizado, mas os ganhos dos sensores foram recalculados com o método LSQ. Como para uma dada posição o método LSQ sempre retornará o melhor filtro modal no sentido dos mínimos quadrado, ambos os sinais deveriam ser os mesmos. O fluxograma na [Figura 113](#) ilustra o procedimento adotado.

7.5 Resultados

A primeira tentativa, que empregou uma grade de 4 por 3 sensores como estimativa inicial, retornou uma distribuição simétrica de sensores, como se nota pela [Figura 114](#). O filtro modal como retornado pela otimização mostra boa concordância com o obtido com os sensores recalculados pelo método LSQ, como se vê pela [Figura 116](#). Não são exatamente iguais, pois a otimização pode parar antes de atingir o mínimo ou então pequenos erros numéricos na representação por ponto flutuante podem ser amplificados dependendo do condicionamento da matriz de mínimos quadrados. O segundo caso, embora mostre uma distribuição de sensores que não é intuitiva, retornou um filtro modal cujo desempenho é melhor do que o obtido no primeiro caso. Enquanto o primeiro caso mostra um erro máximo de -39.06dB (1.05%), o erro no segundo caso é no máximo -51.66dB (0.0826%),

Figura 113 – Procedimento usado para comparar o filtro modal otimizado com o filtro modal em que os ganhos são recalculados com o LSQ.

Figura 114 – Posicionamento final dos sensores após otimização usando a grade regularmente espaçada como estimativa inicial.

Figura 115 – Posicionamento final dos sensores após otimização usando pontos aleatórios como estimativa inicial.

Figura 116 – FRF do filtro modal após otimização usando a grade regularmente espaçada como estimativa inicial e comparação com os ganhos recalculados por LSQ.

Figura 117 – FRF do filtro modal após otimização usando pontos aleatórios como estimativa inicial e comparação com o ganhos recalculados por LSQ.

mostrando que diferentes estimativas iniciais podem levar a diferentes mínimos locais.

8 Considerações finais

8.1 Conclusões

Para modos de alta ordem, acima da 6^o ordem neste estudo, o erro numérico pode se tornar significativo (até 11.06% de erro na função de forma do 12^o modo, de acordo com o erro relativo adotado), mesmo ao se utilizar a representação por ponto flutuante de dupla precisão do MATLAB, que segue a norma IEEE 754 para dupla precisão. Uma correção simples foi aplicada para resolver esse problema, ver [seção 3.2](#). Apesar de ser um detalhe relativamente trivial, não foi possível encontrar ainda esse tipo de adaptação na literatura.

Em malha aberta, se as posições ótimas são conhecidas, então os ganhos ótimos do filtro modal podem ser recuperados pelo método dos mínimos quadrados, caso a definição da função objetivo seja o desvio quadrático entre o sinal do filtro modal e o sinal desejado. A [seção 4.3](#) expôs esse caso particular. Em malha fechada, porém, não é possível mais adotar um sinal de referência a ser atingido pelo sistema. Dependendo da forma como o sistema de controle atenua as vibrações, o amortecimento da estrutura pode variar, impossibilitando a decomposição da FRF do sistema em algumas poucas componentes previamente identificadas, como se faz no caso do método LSQ aplicado ao filtro modal em malha aberta.

Em malha aberta, normalmente quanto mais sensores são adicionados ao sistema, melhor será o desempenho do sistema, até o ponto em que o número de sensores iguala o número de modos, ponto a partir do qual os sensores extras tornam-se redundantes. Já para a malha fechada foram encontrados alguns casos em que o desempenho do filtro modal é satisfatório em um número reduzido de sensores e otimizações. Tentativas com mais sensores acabaram por posicioná-los em locais repetidos ou na base da viga, como nos casos GAS-PAG-C95-FFF-FFF-3 e GAS-PAG-C90-FFF-FFF-5, que foram abordados na [seção 6.5](#).

Inicialmente se pretendia encontrar um filtro modal que pudesse superar o par co-localizado. O filtro modal mostrou-se superior ao par co-localizado com relação à flexibilidade de se poder concentrar mais esforço de controle em alguns modos em particular, enquanto o par co-localizado distribui mais esforço de controle aos primeiros modos e menos esforço aos modos de mais alta ordem. Pode ser discutível se desse ponto de vista realmente existe alguma vantagem dos filtros modais sobre o par sensor-atuador co-localizado, pois atenuar os modos de mais baixa ordem é o que normalmente se deseja. Além disso, projetar um sistema de controle de vibrações estável para o par co-localizado é mais simples.

Com tantas vantagens, não foi possível vencer o par co-localizado apenas com base no desempenho do controle. A estratégia adotada posteriormente foi então tentar substituir o par co-localizado, enquanto ao mesmo tempo se tentava relaxar uma de suas restrições, que é a co-localização de sensor e atuador. Após os procedimentos adotados na [subseção 6.5.7](#), foi possível utilizar o número extra de sensores do filtro modal para atingir uma FRF de fase mínima com um formato característico da FRF do par co-localizado. O melhor resultado, do ponto de vista dos autores, foi o filtro modal composto por 5 sensores que, do ponto de vista da perturbação considerada, apresenta uma FRF de fase mínima em um modelo de viga contendo os primeiros 12 modos de vibrar, [subseção 6.5.9](#).

Segundo as regras estabelecidas na literatura, para se atingir o controle modal independente de um modelo com 12 modos, serão necessários ao menos 12 sensores e 12 atuadores. Essa regra foi provada por Meirovitch ([MEIROVITCH; BARUH, 1982](#)) e não pode ser violada. Mas Pagani Jr. e Trindade chegaram à conclusão que a escolha do posicionamento dos sensores pode resultar em um filtro modal satisfatório em casos específicos, como detectar apenas os dois primeiros modos em uma placa que contém os 14 primeiros modos fazendo uso de apenas 12 pastilhas piezoelétricas ([PAGANI JR, 2009](#)). Neste trabalho, um filtro modal composto por 5 sensores pontuais em um modelo com 12 modos mostrou-se adequado para fins de controle de vibrações. É verdade que esse filtro modal não é mais capaz de isolar um ou outro modo em particular, mas pôde (i) aumentar o amortecimento de todos os 12 primeiros modos e (ii) focar esforço de controle para os modos de mais baixa ordem.

Como o modelo inclui 12 modos de vibração, pode-se indagar a respeito da estabilidade do sistema caso o 13º modo fosse incluído. Neste estudo, simplesmente se aceitou que o comportamento seja indefinido fora da faixa de frequências considerada. Apenas através da construção de um sistema incluindo mais modos de vibração seria possível obter mais informações. Mas então seria possível questionar a estabilidade do 14º modo. Ao final, o número de modos a serem incluídos e, conseqüentemente, a faixa de frequência a ser considerada sempre dependerão dos requisitos de projeto.

8.2 Trabalhos futuros

A partir das descobertas realizadas durante este estudo, três possíveis linhas de trabalho foram identificadas:

- a) Otimizar o filtro modal espacial em malha fechada para a placa utilizando formulação analítica, como uma continuação do trabalho já iniciado aqui. Em particular, seria interessante estender o caso **CXX** utilizado em vigas para a formulação de placas.
- b) Otimizar o filtro modal espacial em malha fechada para placas utilizando pastilhas piezoelétricas como sensores e atuadores.
- c) Estender a formulação e as técnicas de otimização para o caso em que o modelo da estrutura não pode ser reduzido a um sistema SISO, permitindo que o atuador também varie de posição e possa ser incluído na otimização.

Referências

- AMBROSIO, P.; RESTA, F.; RIPAMONTI, F. An H_2 norm approach for the actuator and sensor placement in vibration control of a smart structure. *Smart Materials and Structures*, v. 21, n. 12, p. 125016, dez. 2012. Citado na página 40.
- BALAS, M. Feedback control of flexible systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 23, n. 4, p. 673–679, ago. 1978. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 50.
- BAZ, A.; POH, S. Experimental implementation of the modified independent modal space control method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 139, n. 1, p. 133–149, maio 1990. Citado na página 46.
- BRUNTON, S. L.; PROCTOR, J. L.; KUTZ, J. N. *Compressive sampling and dynamic mode decomposition*. 2013. Artigo publicado no arXiv. Disponível em: <http://arxiv.org/pdf/1312.5186v1.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2015. Citado na página 53.
- BYRD, R. H.; GILBERT, J. C.; NOCEDAL, J. A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming. *Mathematical Programming*, v. 23, n. 1, p. 149–185, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 92.
- BYRD, R. H.; HRIBAR, M. E.; NOCEDAL, J. An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming. *SIAM Journal of Optimization*, v. 9, n. 4, p. 877–900, 1999. Citado na página 41.
- CANDÈS, E. J.; WAKIN, M. B. An Introduction to Compressive Sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 25, n. 2, p. 21–30, 2013. Citado na página 53.
- CHENEY, W.; KINCAID, D. *Numerical Mathematics and Computing*. Belmont, CA, USA: Thomson Brooks/Cole, 2008. 763 p. Citado na página 89.
- COLLINGER, J. C.; WICKERT, J. A.; CORR, L. R. Adaptive Piezoelectric Vibration Control With Synchronized Switching. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v. 131, n. 4, p. 041006, 2009. Citado na página 47.
- DERAEMAER, A.; PREUMONT, A. Vibration based damage detection using large array sensors and spatial filters. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 20, n. 7, p. 1615–1630, 2003. Citado na página 49.
- FARLOW, S. J. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. New York, USA: Dover Publications, 1993. 414 p. Citado na página 36.
- FRISWELL, M. I. On the design of modal actuators and sensors. *Journal of Sound and Vibration*, v. 241, n. 3, p. 361–372, 2001. Citado na página 46.
- FRISWELL, M. I. On the design of modal actuators and sensors. *Journal of Sound and Vibration*, v. 241, p. 361–372, 2001. Citado na página 91.
- GARDONIO, P.; ELLIOTT, S. J. Smart panels for active structural acoustic control. *Smart Materials and Structures*, v. 13, n. 6, p. 1314–1336, dez. 2004. Citado na página 48.

GAWRONSKI, W. Modal actuators and sensors. *Journal Sound and Vibration*, v. 229, n. 4, p. 1013–1022, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 46, 80 e 91.

GÉRADIN, M.; RIXEN, D. *Mechanical Vibrations: Theory and Application to Structural Dynamics*. 2^a. ed. Chichester: John Wiley & Sons, 1997. 425 p. Citado na página 57.

GODOY, T. C. de. *Projeto, otimização e análise de incertezas de um dispositivo gerador de energia proveniente de vibrações mecânicas utilizando transdutores piezelétricos e circuito ressonante*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012. Citado na página 40.

GOULD, L.; MURRAY-LASSO, M. On the modal control of distributed systems with distributed feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 11, n. 4, p. 729–737, out. 1966. Citado na página 45.

HAN, J.-H.; LEE, I. Optimal placement of piezoelectric sensors and actuators for vibration control of a composite plate using genetic algorithms. *Smart Materials and Structures*, v. 8, n. 2, p. 257–267, abr. 1999. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 50.

HOOGENDIJK, R. et al. Directional notch filters for motion control of flexible structures. *Mechatronics*, v. 24, n. 6, p. 632–639, 2014. Citado na página 52.

HOUSNER, G. W. et al. Structural Control: Past, Present, and Future. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 123, n. 9, p. 897–971, set. 1997. Citado na página 39.

INMAN, D. J. Active modal control for smart structures. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 359, n. 1778, p. 205–219, jan. 2001. Citado na página 48.

KIM, S.-M.; OH, J.-E. A modal filter approach to non-collocated vibration control of structures. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 332, n. 9, p. 2207–2221, abr. 2013. Citado na página 48.

LEE, C.-K.; MOON, F. C. Modal Sensors/Actuators. *Journal of Applied Mechanics*, v. 57, n. 2, p. 434, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 71.

LEISSA, A. W. *Vibration of Plates*. Washington D.C.: U.S. Government Printing Office, 1969. 360 p. Citado 4 vezes nas páginas 37, 172, 173 e 179.

LEO, D. J. *Engineering Analysis of Smart Material Systems*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2007. 570 p. Citado na página 37.

MATHWORKS, T. *Constrained Nonlinear Optimization Algorithms*. 2013. Documentação do MATLAB 2013a. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 91.

MATHWORKS, T. *Unconstrained Nonlinear Optimization Algorithms*. 2013. Documentação do MATLAB 2013a. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 94.

MEIROVITCH, L. *Dynamics and Control of Structures*. Chichester: John Wiley & Sons, 1990. 425 p. Citado na página 46.

MEIROVITCH, L.; BARUH, H. Control of Self -Adjoint Distributed-Parameter Systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 5, n. 1, p. 60–66, jan. 1982. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 186.

- MENDROK, K. Multiple damage localization using modal filters. *Diagnostyka*, v. 15, n. 3, p. 15–21, 2014. Citado na página 49.
- MENDROK, K. Force identification with use of spatial filter based on ODS. *Diagnostyka*, v. 16, n. 1, p. 23–28, 2015. Citado na página 49.
- MENDROK, K.; KUROWSKI, P. Operational modal filter and its applications. *Archive of Applied Mechanics*, v. 83, n. 4, p. 509–519, 2013. Citado na página 49.
- MENDROK, K.; UHL, T. Experimental verification of the damage localization procedure based on modal filtering. *Structural Health Monitoring*, v. 10, n. 2, p. 157–171, 2010. Citado na página 49.
- MOHEIMANI, S. A survey of recent innovations in vibration damping and control using shunted piezoelectric transducers. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 11, n. 4, p. 482–494, fev. 2003. Citado na página 47.
- MOHEIMANI, S. O. R.; FLEMING, A. J.; BEHRENS, S. On the feedback structure of wideband piezoelectric shunt damping systems. *Smart Materials and Structures*, v. 12, n. 1, p. 49–56, fev. 2003. Citado na página 47.
- MOITA, J. M. S. o. et al. Optimal design in vibration control of adaptive structures using a simulated annealing algorithm. *Composite Structures*, v. 75, p. 79–87, 2006. Citado na página 40.
- NISE, N. S. *Control Systems Engineering*. 3^a. ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2000. 695 p. Citado na página 38.
- ÖDMAN, S. T. A. Studies of Boundary Value Problems. Part II. Characteristic functions of Rectangular Plates. In: *Proceedings n^o 24, Swedish Cement and Concrete Res. Inst.* Estocolmo, Suécia: [s.n.], 1955. p. 7–62. Citado na página 179.
- PAGANI JR, C. C. *Projeto e otimização de filtros modais usando redes de sensores piezoelétricos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 40, 43, 51 e 186.
- PAGANI JR, C. C.; TRINDADE, M. A. Optimization of modal filters based on arrays of piezoelectric sensors. *Smart Materials and Structures*, v. 18, n. 9, p. 1–12, set. 2009. Citado 3 vezes nas páginas 50, 51 e 91.
- PREUMONT, A. Vibration control of active structures: an introduction. In: *Meccanica*. [S.l.: s.n.], 1999. Citado na página 39.
- PREUMONT, A. et al. Spatial filters in structural control. *Journal of Sound and Vibration*, v. 265, n. 1, p. 61–79, jul. 2003. Citado 5 vezes nas páginas 48, 51, 71, 81 e 91.
- PREUMONT, A.; SETO, K. *Active Control of Structures*. Chichester: John Wiley & Sons, 2008. 305 p. Citado na página 39.
- QIU, Z.-c. et al. Optimal placement and active vibration control for piezoelectric smart flexible cantilever plate. *Journal of Sound and Vibration*, v. 301, n. 3-5, p. 521–543, abr. 2007. Citado na página 50.

- RAO, S. S. *Engineering Optimization: Theory and Practice*. 4^a. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2009. 332 p. Citado 5 vezes nas páginas 35, 39, 41, 94 e 115.
- REEVES, C. R.; ROWE, J. E. *Genetic algorithms principles and perspectives : a guide to GA theory*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003. 332 p. Citado na página 42.
- ROSENBROCK, H. H. Distinctive problems of process control. *Chemical Engineering Progress*, v. 58, n. 9, p. 43–50, 1962. Citado na página 45.
- SHIGUEOKA, A. H.; TRINDADE, M. A. Continuous optimization of discrete modal filters applied to flexible structures. In: *VIII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*. Uberlândia, MG, Brasil: [s.n.], 2014. Citado na página 81.
- SIMON, J.; MITTER, S. A theory of modal control. *Information and Control*, v. 13, n. 4, p. 316–353, out. 1968. Citado na página 45.
- STRANG, G. *Álgebra Linear e suas aplicações*. São Paulo, Brasil: Cengage Learning, 2010. 444 p. Citado na página 89.
- TANAKA, N.; SANADA, T. Modal control of a rectangular plate using smart sensors and smart actuators. *Smart Materials and Structures*, v. 16, n. 1, p. 36–46, fev. 2007. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 71.
- TONDREAU, G.; DERAEMAERKER, A. Local modal filters for automated data-based damage localization using ambient vibrations. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 39, p. 162–180, 2013. Citado na página 49.
- TRINDADE, M. A.; PAGANI JR, C. C.; OLIVEIRA, L. P. Semi-modal active vibration control of plates using discrete piezoelectric modal filters. *Journal of Sound and Vibration*, v. 351, p. 17–28, 2015. Citado na página 51.
- TRINDADE, M. A. et al. Effect of parametric uncertainties on the effectiveness of discrete piezoelectric spatial modal filters. *International Journal for Uncertainty Quantification*, v. 3, n. 6, p. 1–24, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 89.
- WALTZ, R. A. et al. An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps. *Mathematical Programming*, v. 107, n. 3, p. 391–408, 2006. Citado na página 41.
- WANG, Y.; INMAN, D. J. A survey of control strategies for simultaneous vibration suppression and energy harvesting via piezoceramics. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 23, n. 18, p. 2021–2037, maio 2012. Citado na página 47.
- WARBURTON, G. B. The vibration of rectangular plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, v. 168, n. 12, p. 371–384, 1954. Citado na página 173.
- WÓJCICKI, J.; MENDROK, K.; UHL, T. Spatial Filter for Operational Deflection Shape Component Filtration. In: *Damage Assessment of Structures X*. Dublin, Ireland: [s.n.], 2013. p. 868–875. Citado na página 49.
- YOUNG, D. Vibration of rectangular plates by the ritz method. *Journal of Applied Mechanics*, v. 17, n. 4, p. 448–453, 1950. Citado 2 vezes nas páginas 173 e 179.

ZORIC, N. D. et al. Optimal vibration control of smart composite beams with optimal size and location of piezoelectric sensing and actuation. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 24, n. 4, p. 499–526, nov. 2012. Citado 2 vezes nas páginas [40](#) e [52](#).

ZOU, Z. et al. Embedding Compressive Sensing-Based Data Loss Recovery Algorithm Into Wireless Smart Sensors for Structural Health Monitoring. *IEEE Sensors Journal*, v. 15, n. 2, p. 797–808, 2015. Citado na página [53](#).