UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

**Metodologia para a modificação de parâmetros de sistemas
lineares baseada na designação de estruturas próprias por
retroação de saídas e sua aplicação na coxinzagem de
motores de veículos de passeio**

Daniel José Laporte

São Carlos
2013

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Metodologia para a modificação de parâmetros de sistemas lineares baseada na designação de estruturas próprias por retroação de saídas e sua aplicação na coxinzagem de motores de veículos de passeio

Dissertação de mestrado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em ciências.

Versão definitiva após correções sugeridas pela banca

Área de concentração: Dinâmica de máquinas e sistemas

Orientado: Daniel José Laporte

Orientador: Prof. Dr. Álvaro Costa Neto

São Carlos
2013

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

L315m Laporte, Daniel José
Metodologia para a modificação de parâmetros de
sistemas lineares baseada na designação de estruturas
próprias por retroação de saídas e sua aplicação na
coxinização de veículos de passeio / Daniel José
Laporte; orientador Álvaro Costa Neto. São Carlos,
2013.

Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Mecânica e Área de Concentração em
Dinâmica de Máquinas e Sistemas -- Escola de Engenharia
de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2013.

1. Modos de vibrar. 2. Modificação de parâmetros.
3. Sistemas lineares. 4. Designação de estruturas próprias.
5. Coxinização. 6. Modelagem. 7. Eigenstructure assignment.
8. Engine mounts. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **DANIEL JOSÉ LAPORTE**.

Título da dissertação: "Estudo preliminar da designação de estruturas próprias de sistemas lineares com a modificação de parâmetros através da retroação de saídas".

Data da defesa: 11/06/2013

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Dr. **Álvaro Costa Neto (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Dr. **Luis Carlos Passarini**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

aprovado

Dr. **Marcelo Prado**
(Empresa Multicorpos)

aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica:
Prof. Associado **Marcelo Areias Trindade**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

Este trabalho é dedicado:

Aos meus pais Vera e José pelo exemplo que têm me dado por toda a vida, e principalmente por terem feito tudo por mim e me permitirem estar aqui.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Álvaro Costa Neto por me permitir fazer este trabalho e pela orientação.

Ao Dr. Cláudio Gomes Fernandes pelas valiosas discussões e ensinamentos.

À Escola de Engenharia de São Carlos.

Aos colegas e amigos do campo de provas da Ford em Tatuí, pelo apoio durante todo o trabalho.

Aos meus pais Vera e José e aos meus irmãos Gisele e Marcel por fazerem parte de minha vida.

À minha esposa Denise, pela compreensão, apoio e pelos melhores conselhos.

“Mestre não é quem sempre ensina, mas quem de repente aprende.”

João Guimarães Rosa (Grande Sertão Veredas)

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
LISTA DE SÍMBOLOS	iii
1. Introdução e objetivos	1
2. Revisão da literatura	4
2.1. Designação da estrutura própria de sistemas em retroação	4
2.1.1. Designação de pólos	4
2.1.2. Designação de estruturas próprias com retroação completa de estados.....	7
2.1.3. Designação de estruturas próprias com retroação de saídas	8
3. Revisão teórica.....	13
3.1. Resposta transitória de sistemas dinâmicos.....	13
3.2. Controlabilidade.....	17
3.3. Designação de estruturas próprias com a retroação total de estados	18
3.4. Designação de estruturas próprias com a retroação de saídas	23
3.4.1. Designabilidade de autovetores e determinação da matriz de ganhos de controle K.....	24
3.5. Designação de estruturas próprias usando a retroação de saídas restritas.....	34
3.6. Designação de pólos	37
4. Metodologia para a designação de estruturas próprias desejadas através da pseudo-retroação de saídas	41
5. Estudo de caso: Coxinização de motores de veículos de passeio	50
5.1. Modelagem analítica do veículo a 7 graus de liberdade	51
5.2. Modelagem analítica do veículo a 8 graus de liberdade (inclusão do coxim hidráulico)	58
5.3. Definição das entradas e saídas do sistema de controle.....	61
5.4. Designação de autovalores e definição dos subespaços.....	65
5.5. Designação da estrutura própria por retroação de saídas restritas.....	66
5.6. Identificação do sistema a ser analisado, descrição e características de resposta do veículo considerado como estudo de caso	68
5.6.1. Identificação dos parâmetros do modelo de 7 graus de liberdade	68
5.6.2. Resposta do veículo a entradas específicas e descrição do problema	70
5.7. Resultados e discussões	75
5.7.1. Coxins convencionais	75
5.7.2. Cxim hidráulico	79
6. Conclusão	83
7. Referências	85
8. APÊNDICE 1 – Matrizes dinâmicas dos sistemas do estudo de caso	89

9.	APÊNDICE 2 – Rotina para a identificação dos parâmetros do modelo de 7 DOF .	95
10.	APÊNDICE 3 – Parâmetros dos modelos do estudo de caso.....	100

RESUMO

LAPORTE, D. J. **Metodologia para a modificação de parâmetros de sistemas lineares baseada na designação de estruturas próprias por retroação de saídas e sua aplicação na coxinição de veículos de passeio.** 2013. 119 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

A designação de estruturas próprias de sistemas dinâmicos com retroação completa de estados ou saídas foi objeto de estudo de muitos pesquisadores durante a segunda metade do século XX. Os trabalhos mais relevantes sobre o tema foram revisados e serviram como base para a elaboração da metodologia apresentada neste trabalho. Que consiste na designação de estruturas próprias desejadas para um sistema linear em malha aberta com a modificação de parâmetros do sistema através da pseudo retroação de saídas devidamente definidas. O método foi aplicado na coxinição de um veículo de passeio. No qual os modos de vibrar de modelos lineares com 7 e 8 graus de liberdade do veículo foram adequados com o intuito de reduzir as acelerações verticais de chassi, características do fenômeno *shake* de motor e câmbio (faixa de frequência entre 7 e 25Hz). Para tanto, reduziu-se a participação do grau de liberdade vertical de chassi nos modos com grande participação dos graus de liberdade de motor e massa não suspensa. Os resultados obtidos com a aplicação da metodologia na coxinição foram valores de rigidezes, amortecimentos e características de coxins hidráulicos que resultam na redução significativa da aceleração vertical de chassi, que implica em uma melhora perceptível para o consumidor na qualidade do conforto do veículo.

Palavras-Chave: Modos de vibrar, modificação de parâmetros, sistemas lineares, designação de estruturas próprias, coxinição, modelagem

ABSTRACT

LAPORTE, D. J. **Metodologia para a modificação de parâmetros de sistemas lineares baseada na designação de estruturas próprias por retroação de saídas e sua aplicação na coxinzagem de veículos de passeio.** 2013. 119 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

Eigenstructure assignment using full state or output feedback control had been object of study of many researchers during the second half of XX century. The most important works about eigenstructure assignment were reviewed, specially some applications within aerospace industry, that was the responsible for developing all the theory concerning pole and eigenvector placement. The review of the related theory was also based on the pioneering and most expressive works and were base for the methodology developed and described in this work. Which consists basically on the assignment of some desired eigensctstructure of open loop linear systems modifying some parameters of the systems by means pseudo feedback of some outputs into inputs specifically defined. This methodology was applied to a 8 DOF vehicle model, a case of study, in order to adequate the system modes changing engine mounts parameters to improve the vehicle ride comfort, mainly eigenstructures about powertrain shake range frequencies.

Keywords: Modes, linear system, eigenstructure assignment, pole placement, engine mounts definition, ride comfort

LISTA DE SÍMBOLOS

$F(t)$: Matriz dinâmica do sistema;

$G(t)$: Matriz de entradas do sistema;

$H(t)$ Matriz de saídas do sistema;

$x(t) \in \mathbb{R}^n$: Vetor de estados do sistema;

$u(t) \in \mathbb{R}^m$: Vetor de entradas do sistema;

$y(t) \in \mathbb{R}^r$: Vetor de saídas do sistema;

λ_i : i -ésimo autovalor;

v_i : i -ésimo autovetor;

λ_i^d : i -ésimo autovalor desejado de ser designado;

v_i^d : i -ésimo autovetor desejado de ser designado;

K : Matriz de ganhos de controle;

$v_i \in \text{span} \{N_{\lambda_i}\}$: v_i pertencem ao espaço em que as colunas de N_{λ_i} formam uma base;

v_{i_A} : i -ésimo autovetor mais próximo do i -ésimo autovetor desejados v_i^d ;

z_1 : Estado deslocamento vertical de chassi;

v_1 : Estado velocidade vertical de chassi;

θ_1 : Estado deslocamento de arfagem de chassi;

ω_1 : Estado velocidade de arfagem de chassi;

z_3 : Estado deslocamento vertical de motor e cambio.

v_3 : Estado velocidade vertical de motor e cambio.

z_{2d} : Estado deslocamento vertical de massa não suspensa dianteira direita;

v_{2d} : Estado velocidade vertical de massa não suspensa dianteira direita;

z_{2e} : Estado deslocamento vertical de massa não suspensa dianteira esquerda;

v_{2e} : Estado velocidade vertical de massa não suspensa dianteira esquerda;

ϕ_3 : Estado de rolagem de motor e cambio;

ω_3 : Estado de velocidade de rolagem de motor e cambio;

z_4 : Estado deslocamento vertical de massa não suspensa traseira;

v_4 : Estado velocidade vertical de massa não suspensa traseira;

z_h : Estado deslocamento da massa do coxim hidráulico que representa a dependência com a frequência do elemento;

v_h : Estado velocidade da massa do coxim hidráulico que representa a dependência com a frequência do elemento;

k_1 : Rigidez vertical equivalente da suspensão traseira, sem a inclusão dos pneus;

C_1 : Amortecimento vertical equivalente da suspensão dianteira, sem a inclusão dos pneus;

k_{2d} : Rigidez vertical equivalente da suspensão dianteira direita, sem a inclusão dos pneus;

C_{2d} : Amortecimento vertical equivalente da suspensão dianteira direita, sem a inclusão dos pneus;

k_{2e} : Rigidez vertical equivalente da suspensão dianteira esquerda, sem a inclusão dos pneus;

C_{2e} : Amortecimento vertical equivalente da suspensão dianteira esquerda, sem a inclusão dos pneus;

k_3 : Rigidez vertical do coxim direito;

C_3 : Amortecimento vertical do coxim direito;

k_4 : Rigidez vertical do coxim esquerdo;

C_4 : Amortecimento vertical do coxim esquerdo;

k_{h1} : Rigidez superior do coxim hidráulico;

C_{h1} : Amortecimento superior do coxim hidráulico;

k_{h2} : Rigidez inferior do coxim hidráulico;

C_{h2} : Amortecimento inferior do coxim hidráulico;

k_{ve} : Rigidez da viscoelasticidade do coxim hidráulico;

C_{ve} : Amortecimento da viscoelasticidade do coxim hidráulico;

d_1 : Distância longitudinal da massa não suspensa traseira ao CG do chassi;

d_2 : Distância longitudinal das massas não suspensas dianteiras ao CG do chassi;

d_{3d} : Distância longitudinal do ponto de fixação do coxim direito ao CG do chassi;

d_{3e} : Distância longitudinal do ponto de fixação do coxim esquerdo ao CG do chassi;

d_4 : Distância lateral do CG do conjunto motor câmbio ao coxim direito;

d_5 : Distância lateral do CG do conjunto motor câmbio ao coxim esquerdo;

m_1 : Massa do chassi;

I_1 : Inércia de arfagem do chassi;

m_{2d} : Massa não suspensa direita;

m_{2e} : Massa não suspensa esquerda;

m_3 : Massa do conjunto motor e câmbio;

I_3 : Inércia de arfagem do conjunto motor e câmbio;

m_4 : Massa não suspensa traseira;

m_h : Massa representativa da dependência com a aceleração do coxim hidráulico;

Δ_z^e : Deslocamento relativo do ponto de ancoragem do coxim esquerdo com o chassi ao ponto de ancoragem do mesmo elemento com o conjunto motor/câmbio;

Δ_v^e : Velocidade relativa do ponto de ancoragem do coxim esquerdo com o chassi ao ponto de ancoragem do mesmo elemento com o conjunto motor/câmbio;

Δ_z^d : Deslocamento relativo do ponto de ancoragem do coxim direito com o chassi ao ponto de ancoragem do mesmo elemento com o conjunto motor/câmbio;

Δ_v^d : Velocidade relativa do ponto de ancoragem do coxim direito com o chassi ao ponto de ancoragem do mesmo elemento com o conjunto motor/câmbio;

Δ_z^{h1} : Deslocamento relativo do ponto de ancoragem do coxim direito com o conjunto motor/câmbio à massa m_h ;

Δ_v^{h1} : Velocidade relativa do ponto de ancoragem do coxim direito com o conjunto motor/câmbio à massa m_h ;

Δ_z^{h2} : Deslocamento relativo do ponto de ancoragem do coxim direito com o chassi à massa m_h ;

Δ_v^{h2} : Velocidade relativa do ponto de ancoragem do coxim direito com o chassi à massa m_h ;

1. Introdução e objetivos

A modelagem de sistemas dinâmicos e estudo da resposta têm sido parte fundamental no trabalho de engenharia desde o começo do século XX nas mais diversas áreas da tecnologia, da aeroespacial, responsável pelo desenvolvimento de grande parte da teoria e métodos que tangem à dinâmica de sistemas, até construção civil moderna, onde são empregados complexos modelos matemáticos que ajudam a entender a resposta do sistema às entradas, como ventos e abalos sísmicos.

Dentre a imensa gama de tipos de modelos matemáticos utilizados, podemos citar desde os mais complexos, com emprego de sofisticadas técnicas numéricas que auxiliam na resolução de problemas ligados à dinâmica não linear, até modelos mais simples e lineares, que são tão importantes quando os mais complexos.

Modelos ricos em detalhes tendem a representar melhor a realidade, no entanto, a solução de modelos complexos pode requerer muito tempo e capacidade computacional, e desta forma inviabilizar sua utilização se a agilidade na solução for relevante, como é o caso da modelagem de plantas para sistemas de controle, onde geralmente modelos lineares são utilizados.

Além disso, modelos mais simples e lineares são geralmente empregados em fases iniciais de projetos, onde a linearização de componentes normalmente pouco afeta o nível de acuracidade esperado, ou mesmo em fases mais avançadas do projeto se os componentes do sistema apresentarem comportamento suficientemente próximo de linear.

A importante pergunta que se deve fazer neste ponto é: Se existe a possibilidade de elaborarmos modelos tão complexos quanto desejamos, por que utilizamos modelos lineares e simples no estudo e projeto de sistemas? A grande vantagem da utilização de sistemas lineares, além da velocidade de cálculo, é o emprego da teoria de álgebra linear para o seu estudo, que possibilita a definição de estruturas próprias intrínsecas ao sistema. As estruturas próprias são os chamados modos de vibrar compostos por autovalores e seus respectivos autovetores, que formam uma base no espaço dos estados. Assim, qualquer mapa de estados pode ser representado por uma combinação linear nesta base.

Desta forma, mesmo que sustentado sobre hipóteses simplificadoras, um modelo linear permite ao projetista escolher os melhores modos de vibrar embasado em estudos e julgamentos de engenharia. Como por exemplo, Franklin, Powell e Emami-Naeini (2009), no caso de estudo do controle lateral e longitudinal de um Boeing 747, escrevem que segundo estudos, pilotos gostam e sentem menos fadiga quando os autovalores em malha fechada dos modos com predominância dos graus de liberdade de velocidade de guinada e deriva lateral possuem frequências naturais inferiores a 0.5 e fatores de amortecimento superiores a 0.5.

De fato, mesmo antes da década de 1960, os engenheiros de controle já tinham o conhecimento dos melhores arranjos de estruturas próprias para sistemas específicos, baseados em estudos já feitos na época, e utilizavam até então as teorias clássicas de controle para conseguir os pólos desejados, como por exemplo, o diagrama do lugar das raízes.

É nesta ótica que em meados da década de 1960 surgem trabalhos sobre a designação de pólos de sistemas em malha fechada, a começar por inúmeros estudos envolvendo uma única entrada em retroação, como é o caso do trabalho de Rissanen (1960), seguindo, alguns anos mais tarde, por trabalhos envolvendo múltiplas entradas em retroação, como é o caso dos trabalhos de Davison citados na revisão da literatura.

E cerca de uma década depois, surgem trabalhos envolvendo a designação de pólos e autovetores utilizando a retroação completa de estados, como é o caso do trabalho pioneiro de Moore (1976), e no mesmo período surgem trabalhos sobre a designação de estruturas próprias com a retroação de saídas, como é o caso da importante contribuição de Srinathkumar (1978). (Andry Jr.; Shapiro; Chung, 1983) .

Assim, a teoria de designação de estruturas próprias em sua grande parte desenvolvida nas décadas de 1960 e 1970, possibilitou muitas aplicações em sistemas retroalimentados, principalmente na área aeroespacial.

É sobre esta mesma linha de raciocínio, que o presente trabalho propõe uma metodologia para a designação de estruturas próprias de sistemas lineares, como é feito na teoria de controle moderna, no entanto, sem a necessidade da retroalimentação controlada. A designação das estruturas próprias mais adequadas

a um sistema dinâmico particular é conseguida através da alteração dos parâmetros do sistema com auxílio de uma pseudo-retroação.

Outro objetivo deste trabalho, além de desenvolver a metodologia acima, é a sua aplicação na adequação dos parâmetros de coxinição de motor/câmbio de um veículo de passeio, visando melhorar a qualidade do conforto em faixas de frequência onde os modos com grande participação dos graus de liberdade ligados ao motor/câmbio são comuns.

2. Revisão da literatura

2.1. Designação da estrutura própria de sistemas em retroação

A utilização de retroação de estados para a designação de qualquer par conjugado de autovalores desejados, desde que o sistema seja controlável, é uma técnica e resultado bastante utilizado desde a metade do século XX. Começando pelo caso mais simples de uma única entrada em retroação, que segundo Kalman e colaboradores (1969), Bertram em 1959 foi o primeiro a estender o resultado de controlabilidade para o caso de uma única variável, teorema 3.2 da revisão teórica, utilizando o método do lugar das raízes.

Durante toda a década de 1960 e metade da de 1970, foram publicados excelentes trabalhos no âmbito da designação de autovalores, buscando preencher o espaço vazio existente entre a teoria de controle clássica e a moderna, entre eles as contribuições de Rosenbrock e Davison. Culminando com o advento dos trabalhos envolvendo designação de autovetores, que vieram a completar a lacuna deixada pelas metodologias de designação de pólos, entre os precursores estariam Moore e Srinathkumar. Podemos ainda mencionar as importantes contribuições dadas por Shapiro, com aplicações da teoria e estudos contemplando robustez e estabilidade dos métodos de designação de estruturas próprias de sistemas em malha fechada.

2.1.1. Designação de pólos

Durante toda a década de 1960 e parte de 1970, os pesquisadores estavam focados principalmente no desenvolvimento de algoritmos que determinassem os modos dominantes no sistema (participação modal), o grau de influência que uma saída em retroação ou um distúrbio tem sobre um modo específico, e ainda alterar e adequar os modos do sistema em malha fechada baseados nos dois pontos acima e nas características do problema. Isto era o que eles denominavam controle modal.

Dentre outros, a designação de pólos de sistemas em retroação de múltiplas entradas foi estudada por Popov (1964), Wonham (1967), que foi o primeiro a estender o resultado de controlabilidade do caso de sistemas de uma simples até múltiplas entradas. (Andry Jr.; Shapiro; Chung, 1983)

Rosenbrock (1962) expôs as dificuldades encontradas no controle de processos e propôs soluções. O exemplo utilizado por ele neste trabalho foi um processo de destilação, no qual, ao contrário de sistemas mecânicos ou elétricos, a retroação direta de um parâmetro, como a concentração de uma dada substância, é impraticável devido ao atraso na resposta inerente ao processo, ou ao custo da instrumentação.

Assim, Rosenbrock propôs a utilização de variáveis secundárias ao processo, como temperaturas e vazões, para o equacionamento no espaço dos estados, e mantê-las o mais constante possível com auxílio da lei de controle encontrada com a designação dos pólos contemplados no equacionamento. Para mantê-las constantes, Rosenbrock sugere que seus respectivos pólos possuam a parte real o mais negativa possível, aumentando assim o amortecimento modal. Desta forma, ao manter estas variáveis constantes, conserva-se também o estado do sistema praticamente invariável, permitindo que medições de monitoramento robustas sejam feitas nas variáveis de interesse, como concentrações, etc. A metodologia utilizada para a designação de pólos foi desenvolvida por ele naquele trabalho, que mais tarde foi utilizada por Davison e Goldberg (1969).

Simon e Mitter (1968) também tiveram uma grande contribuição para o desenvolvimento da teoria de controle modal, nome dado por eles para designação de pólos. No trabalho citado, apontam a necessidade na época do desenvolvimento de algoritmos que ajudassem na aplicação da teoria da designação de pólos, e propõe naquele trabalho, por exemplo, algoritmos para a alocação de um único pólo, ou mesmo a designação de grupos de pólos por cada etapa de iteração, o que ajuda a melhorar a robustez do método.

Davison e Goldberg (1969) mostraram preocupação com a escolha dos estados para a retroação, porque nem sempre é possível e economicamente viável a medição de todos os estados do sistema, e muitas vezes a aplicação de estimadores de estados também se torna difícil, como é o caso de modelos de plantas químicas com centenas de estados. Assim, eles definiram uma metodologia para escolha de uma lei de controle em que os estados em retroação fossem os que mais influenciariam nos modos dominantes. Aplicaram a metodologia no controle da temperatura e pressão de um Boiler com 6 estados medidos e 2 entradas em

retroação. Naquele problema, o controle encontrado visou manter o nível de água e a temperatura constantes, independente da variação das outras variáveis. Outra aplicação foi no desenvolvimento do controle da temperatura e potência de um reator nuclear, de modo a mantê-las também constantes, independente da flutuação das outras variáveis do sistema.

Davison (1970) mostrou uma metodologia para a designação incompleta de pólos, com a retroação de saídas, sendo que o número de saídas em retroação limitaria o número de autovalores arbitrariamente designáveis. Assim, Davison mostrou que se o posto de G for igual a r , uma lei de controle da forma $u = Ky$, ou seja, com retroação de saídas, pode sempre ser encontrada, de maneira que r autovalores do sistema em malha fechada $F + GKH$ serão arbitrariamente próximos (mas não necessariamente iguais) aos r desejados. Com este trabalho, Davison não conseguiu mostrar ainda como designar arbitrariamente os r autovalores sem que o restante seja também definido, ao menos inalterado. Isso foi conseguido e publicado por ele em 1972 e 1975, trabalhos abaixo.

Davison e Chadha (1972) apresentaram uma proposta de controle de uma planta química com 41 graus de liberdade, nesta proposta eles modificam somente os dois modos dominantes, sem a alteração dos outros modos do sistema, a condição suficiente para que isso seja atendido foi mostrado no teorema 1 da referência. A lei de controle conseguida por eles possibilitou o aumento do amortecimento modal, com o aumento da parte real negativa dos pólos dominantes. Há que se ressaltar ainda que os modos dominantes que foram designados foram encontrados com a aplicação da metodologia encontrada em Davison e Goldberg (1969).

Davison (1975) mostrou que existe uma matriz de ganhos de controle K de modo que o sistema $F + GKH$, em malha fechada por retroação de saídas, tem como seus autovalores $s = \min(n, m + r - 1) = \max(m, r) + 1$ que são arbitrariamente próximos aos desejados juntamente com $\max(m, r) - 1$ autovalores que permanecem inalterados. O algoritmo sugerido por ele é semelhante ao mostrado pelo autor em 1972, trabalho acima, está descrito na

revisão teórica e será de grande valia no desenvolvimento da metodologia que será proposta no presente trabalho.

2.1.2. Designação de estruturas próprias com retroação completa de estados

Durante a década de 1970, pesquisadores já tinham o conhecimento de que a especificação de autovalores em malha fechada não define um sistema único em retroação. Em meados da publicação do trabalho de Moore (1976), esta não unicidade foi parcialmente explorada nos trabalhos de Srinathkumar e Rhoten (1975) e Shah e colaboradores (1975), mas foi Moore (1976) quem definiu pela primeira vez o subespaço que contém os autovetores de um sistema em malha fechada possíveis de serem designados, mostrando desta forma, toda a flexibilidade existente nesta não unicidade já conhecida a priori. Moore (1976) apresenta também um algoritmo e as condições suficientes e necessárias para a determinação da lei de controle que possibilite a designação de qualquer autovalor e autovetor contido no dito subespaço. A metodologia desenvolvida por Moore está na seção revisão teórica do presente trabalho.

Srinathkumar e Rhoten (1975) tocaram no fato da não unicidade descrito acima, e propuseram uma metodologia para que além da designação de pólos, os autovetores também fossem analisados e alterados através de uma lei de controle devidamente definida. Naquele trabalho, mostraram como exemplo o controle da dinâmica lateral de um avião de alta performance F8-C, Vought F8 Crusader, no qual com a utilização de sua metodologia, em comparação com o uso de uma simples designação de pólos, o modo de velocidade de guinada e deriva lateral resultou praticamente desacoplado do modo de velocidade de rolagem e ângulo de inclinação, reduzindo assim a resposta de deriva lateral para níveis desejados.

Shah e colaboradores (1974) mostraram as condições suficientes e necessárias para a definição de uma lei de controle que elimine ou reduza o efeito de um dado distúrbio na resposta do sistema.

Klein e Moore (1976) publicaram um algoritmo que possibilita a designação de uma estrutura própria por retroação completa de estados de maneira semelhante à

mostrada por Moore em 1976, no entanto, sem a necessidade da distinção entre os autovalores a serem designados.

Estão ainda entre os importantes pesquisadores da designação de polos, Porter e D'Azzo, a começar pelo trabalho publicado por eles em 1977, no qual, mostraram um algoritmo que facilita a obtenção de uma base para o subespaço onde estão contidos os autovetores possíveis de serem designados. Subespaço definido primeiramente por Moore em 1976.

Porter e D'Azzo (1978a), mostraram além do algoritmo para a obtenção de uma base que define o subespaço apresentado por Moore (1976), já mostrado por eles em 1977, a possibilidade da designação simultânea da forma canônica de Jordan, autovalores e autovetores.

Porter e D'Azzo (1978b), utilizaram basicamente as teorias descritas por Moore (1976) e Kimura (1975). Em um trabalho que ajuda a compreender melhor a utilização da designação de estruturas próprias para designação completa dos estados, seja para o caso contínuo que para o discreto. A mesma metodologia também é encontrada em D'Azzo e Hoppis (1981).

Estão ainda, segundo Andry Jr., Shapiro e Chung (1983), entre os trabalhos publicados para o caso de designação apresentado nesta seção: Fhamy e O'Reilly (1982), Dayawansa e Mukundan (1982), Fallside e Seraji (1971) e Chidambara, Broen e Zaborsky (1974). Todos trabalhos citados em Andry Jr., Shapiro e Chung (1983).

2.1.3. Designação de estruturas próprias com retroação de saídas

Sob o ponto de vista prático, nem sempre é interessante e economicamente viável a retroação de todos os estados, especialmente para sistemas de grande porte, como plantas de processos que contemplam centenas de estados. É nesta ótica que surgem os trabalhos envolvendo retroação de saídas.

Primeiramente com os trabalhos envolvendo designação de pólos com a retroação de saídas, como os trabalhos pioneiros de Davison e Kimura, revisados na seção 2.1.1, e posteriormente, aqueles que abrangem também a designação dos

autovetores, como os trabalhos de Srinathkumar e a importante contribuição de Shapiro e Chung, com pesquisas abrangendo estabilidade de métodos e muitas aplicações voltadas à indústria aeroespacial.

Srinathkumar (1978a) e (1978b) estão sem dúvida entre os trabalhos mais importantes relacionados a designação de auto estruturas com retração de saídas, pelo fato de terem sido pioneiros no tema e mostrado importantes procedimentos e resultados. Desta forma, fazem parte de literatura obrigatória para quem está interessado no assunto. Nestes trabalhos, Srinathkumar mostrou a possibilidade da designação de autovalores, oferecendo a liberdade para a designação de autovetores, sendo que $\max(m, r)$ autovalores e autovetores podem ser designados arbitrariamente, havendo a possibilidade da designação de $\min(n, m + r - 1)$ autovalores, com a consideração de algumas condições a serem atendidas. Srinathkumar (1978b) mostrou ainda como caso de estudo e aplicação da metodologia descrita por ele, o controle lateral de uma aeronave.

Sobel e Shapiro (1984a) mostraram a aplicação da metodologia de designação de estruturas próprias com retroação de saídas restritas encontrada em Andry Jr., Shapiro e Chung (1983) no controle lateral de uma aeronave em dois projetos de controle. Inicialmente, objetivo do controle foi a adequação dos autovalores para atingir os valores recomendados de frequências e amortecimentos e autovetores escolhidos de forma que o modo de trajetória de vôo não influenciasse a resposta do ângulo de inclinação lateral, da velocidade de rolagem e de guinada de maneira que a resposta trajetória do vôo seja somente fruto deste modo.

Sobel e Shapiro (1984a) apresentaram ainda, um segundo projeto de controle, onde zeros foram impostos na matriz de ganhos de controle. Os elementos que tiveram a retroação anulada foram escolhidos baseados na percepção física de que o autopiloto de rolagem precisa operar independentemente dos direcionais do controle lateral. Foi observada uma degradação na resposta, como fora previsto pelos autores. No entanto, sob o ponto de vista prático, e baseado nos resultados obtidos pelos autores, uma degradação irrelevante. Tornando aceitáveis os dois projetos de controle. Além de que, com a redução dos ganhos de controle no segundo projeto, obteve-se um sistema de controle mais robusto. O que torna o segundo projeto apresentado, bastante interessante.

Sobel e Shapiro (1984b) apresentaram uma proposta para o controle longitudinal de uma aeronave utilizando a teoria de designação de estruturas próprias por retroação de saídas encontrada em Andry Jr., Shapiro e Chung (1983). A escolha dos autovetores desejados foi baseada em performance, que entende-se pela capacidade de desacoplar a atitude de arfagem do ângulo da trajetória do voo, e sensibilidade dos autovalores a perturbações na planta, que é minimizada quanto maior a ortogonalidade entre os autovetores. Foi mostrada a síntese do controle longitudinal de um avião de combate experimental AFTI F-16 (*Advanced Fighter Technology Integration*) como um exemplo de aplicação do método proposto, através de duas propostas distintas de arranjos de autovetores.

Sobel e Shapiro (1985a) apresentaram seis maneiras com que o controle de uma aeronave pode ser projetado em termos de autovalores e autovetores (desacoplamentos), que resultam em comportamentos dinâmicos diferentes, de modo que o piloto possa escolher entre os seis para atender o desempenho desejado para uma dada tarefa ou missão. Duas das seis maneiras descritas por eles neste trabalho também estão mostradas acima nos dois trabalhos de 1984 destes mesmos autores.

Sobel e Shapiro (1985b) mostraram a análise da sensibilidade de um autovalor em malha fechada às variações na matriz dinâmica do sistema em retroação. Assim, autovalores menos sensíveis a incertezas e variações de parâmetros podem ser escolhidos para serem designados. Naquele trabalho os autores mostraram uma metodologia para obter os autovalores em malha fechada que fossem menos sensíveis às incertezas ou variação de parâmetros, principalmente no amortecimento dos modos de interesse, porque está diretamente ligado ao sobressinal e tempo de estabilização. A metodologia foi aplicada ao estudo de caso de dinâmica lateral de uma aeronave L-1011 (Lockheed L-1011 Tristar), também encontrado em Andry Jr., Shapiro e Chung (1983), no qual os autovetores escolhidos foram “*Dutch roll*” (que é um modo de guinada acoplado com rolagem) desacoplado com o modo de rolagem pura. Que como consequência, o pólo do modo de “*Dutch roll*” é insensível aos parâmetros do modo de rolagem e o pólo do modo de rolagem é insensível aos parâmetros do modo de “*Dutch roll*”.

O resultado da aplicação da metodologia de Sobel e Shapiro (1985b) no estudo de caso, foi a redução da sensibilidade amortecimento do modo de “*Dutch roll*” sem alterar o valor nominal do fator de amortecimento modal. Importante resultado, já que o modo de “*Dutch roll*” é indesejado por reduzir a estabilidade da aeronave. E como consequência da metodologia encontrada em Andry Jr., Shapiro e Chung (1983), os pólos do modo de rolagem insensíveis aos parâmetros que mais influenciam no modo de “*Dutch roll*”.

Outra grande contribuição dos trabalhos de Sobel e Shapiro está relacionada à construção de algoritmos que ajudam nas decisões em termos de robustez/performance, em que robustez está relacionada a sensibilidade de autovalor às variações (incertezas) no sistema, como visto nos trabalhos anteriores destes autores Sobel e Shapiro (1984b, 1985a e 1985b), e performance entende-se por autovetores desejados que resultam no comportamento mais adequado do sistema, como os trabalhos revisados de Sobel e Shapiro (1984a e 1985a) baseados na metodologia proposta por Andry Jr., Shapiro e Chung (1983), com estudos de caso também visando performance.

Sob esta ótica, Sobel e Shapiro (1987a) apresentaram uma rotina que reúne estas duas características, performance e robustez, aplicando a metodologia apresentada a um estudo de caso. Em que mostraram que com a escolha do autovalor com menor sensibilidade, os autovetores conseguidos com a designação ficariam longe dos desejados, ou seja, com a presença de grandes acoplamentos indesejados. E desta forma, a melhor solução para o problema estudado, foi a mesma apresentada por Andry Jr., Shapiro e Chung (1983), isto é, projeção dos autovetores desejados no subespaço que contém os autovetores possíveis em malha fechada.

Desta forma, para problemas similares, ou seja, em que exista grande liberdade para a escolha dos autovetores, a melhor alternativa pode ser aquela apresentada por Andry Jr., Shapiro e Chung (1983). Em outros problemas, onde a solução de projeção dos autovetores desejados no subespaço, resulte em uma matriz modal com mau condicionamento, a metodologia descrita no trabalho de Sobel e Shapiro (1987a) pode ser a mais indicada.

Sobel e Shapiro (1987b) mostraram o uso desta mesma metodologia para dois casos de estudo, um considerando a dinâmica lateral de uma aeronave do tipo L-1011, já mostrado anteriormente em Andry Jr., Shapiro e Chung (1983) , onde foi mostrado que a menor sensibilidade conseguida resulta em autovetores distantes dos desejados. O segundo caso de estudo foi um helicóptero Ch-47 (Boeing Ch-47 Chinook), onde foi mostrado que nem sempre minimizando sensibilidade de autovalores implica em melhoria de robustez. Os autores destacaram a necessidade do desenvolvimento de uma teoria que concilie de uma forma mais eficaz performance, robustez e sensibilidade.

3. Revisão teórica

3.1. Resposta transitória de sistemas dinâmicos

A revisão da resposta transitória de sistemas dinâmicos é conduzida sob a mesma linha de raciocínio encontrada em Andry Jr., Shapiro e Chung (1983) , porém, ela também pode ser encontrada em Derusso, Roy e Close (1990), denominada por eles de interpretação modal e conceito geométrico, o qual a grande vantagem é a simplicidade conceitual que oferece ao engenheiro uma intuição da natureza das soluções de sistemas lineares.

Em Derusso, Roy e Close (1990) pode-se encontrar também a resposta transitória de sistemas dinâmicos a uma dada entrada definida, em um dado instante de tempo e a partir de um estado inicial, com a utilização da matriz de transição de estados. No entanto, devido ao foco do presente trabalho, ficaremos limitados à interpretação modal e conceito geométrico para o estudo da resposta transitória de sistemas dinâmicos.

TEOREMA 3.1: Todo sistema dinâmico com tempo contínuo, dimensionalmente finito, linear e suave obedece às seguintes relações:

$$\frac{dx}{dt} = F(t)x(t) + G(t)u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = H(t)x(t) \quad (2)$$

Em que $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ são, respectivamente, a matriz do sistema, de entradas e de saídas. E o vetor $x(t)$ é composto pelos estados do sistema, $u(t)$ é formado pelas entradas no sistema e $y(t)$ pelas saídas. E que $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e $y(t) \in \mathbb{R}^r$.

Em nosso estudo, iremos considerar as matrizes F , G e H reais e invariáveis no tempo.

A parte homogênea da solução da equação diferencial apresentada no teorema 3.1, corresponde à contribuição na resposta inerente ao sistema dinâmico (resposta livre), que nada mais é que uma solução para a equação a seguir.

$$\frac{dx}{dt} = F \cdot x(t); \quad x(0) = x_0 \quad (3)$$

Diferentemente da definição geral apresentada no teorema 3.1, a equação 3 considera o sistema linear e invariante no tempo.

Os termos relativos às entradas e saídas no sistema são desprezados, segue com a solução homogênea da equação diferencial definida pelas relações do teorema 3.1.

Uma solução bem conhecida desta equação diferencial, encontrada em Derusso, Roy e Close (1990), em Kailath (1980), ou outra obra relacionada a sistemas dinâmicos e variáveis de estado, é dada por:

$$x(t) = \exp(F \cdot t) x_0. \quad (4)$$

A representação da solução acima de maneira simples, e de grande importância, é possível através da utilização dos autovetores/autovalores relacionados à matriz F , que é uma transformação linear. Desta forma, da definição de autovalores e autovetores, temos:

$$F \cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

Em que λ_i é o i ésimo autovalor e v_i é o i ésimo autovetor de F . Estamos assumindo que os autovalores de F são distintos.

Sabemos que a matriz F é uma transformação linear de vetores definidos na base inicial I , ou seja, F_I^I . Para encontrarmos a mesma transformação linear dos mesmos vetores, porém, definidos na base formada pelos autovetores, ou seja, F_v^v , devemos prosseguir da seguinte maneira:

$$F_v^v = M^{-1} \cdot F_I^I \cdot M. \quad (6)$$

De maneira que M é uma matriz em que suas colunas são os autovetores relacionados à F , e desta forma, M é a matriz mudança de base da base formada pelos autovetores para a base inicial I , Assim:

$$M = [v_1, v_2, \dots, v_n]; \quad (7)$$

$$x = M \cdot z. \quad (8)$$

Em que z é o vetor de estados definido na base formada pelos autovetores e z o mesmo vetor de estados definido na base inicial I .

De acordo com a equação (6), reescrevemos a equação (3) utilizando a base formada pelos autovetores:

$$\frac{dz}{dt} = M^{-1} \cdot F_I^I \cdot M \cdot z(t); \quad z(0) = z_0 = M^{-1} \cdot x_0. \quad (9)$$

De posse da seguinte verdade, se F possui autovalores distintos:

$$M^{-1} \cdot F_I^I \cdot M = \Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n], \quad (10)$$

a solução mostrada na equação 4 na base dos autovalores é:

$$z(t) = \exp(\Lambda \cdot t) \cdot z_0. \quad (11)$$

Retornando para o sistema de coordenadas inicial, temos:

$$x(t) = M \cdot \exp(\Lambda \cdot t) \cdot M^{-1} \cdot x_0. \quad (12)$$

Para mostrarmos esta equação de maneira mais interessante, vamos definir:

$$M^{-1} = L, \text{ onde } L = [l_1, l_2, \dots, l_n]^T \quad (13)$$

E sabendo que:

$$M \exp(\Lambda \cdot t) = [v_1, v_2, \dots, v_n] \text{diag}\{\exp(\lambda_1 \cdot t) \exp(\lambda_2 \cdot t), \dots, \exp(\lambda_n \cdot t)\} \quad (14)$$

Que equivale a:

$$M \exp(\Lambda t) = [\exp(\lambda_1 t) v_1; \exp(\lambda_2 t) v_2; \dots, \exp(\lambda_n t) v_n] \quad (15)$$

Desta forma, de posse das equações 12, 13 e 15, temos:

$$x(t) = [\exp(\lambda_1 t) v_1; \exp(\lambda_2 t) v_2; \dots; \exp(\lambda_n t) v_n] [l_1, l_2, \dots, l_n]^T x_0 \quad (16)$$

ou

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \exp(\lambda_i t) v_i l_i x_0 \quad (17)$$

Se denotarmos $l_i x_0 = \alpha_i$ e $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$,

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \exp(\lambda_i t) v_i \quad (18)$$

$$\alpha = M^{-1} x_0 \quad (19)$$

Assim, qualquer resposta livre de um sistema dinâmico linear e constante com o tempo é dependente das três seguintes entidades: (Andry Jr.; Shapiro; Chung, 1983)

- Autovalores, que determinam a razão de decaimento/subida da resposta livre;
- Autovetores, que determinam o “formato” da resposta, bem como fase entre os estados;
- Condições iniciais, que determinam a participação de cada modo na resposta livre.

3.2. Controlabilidade

R. E. Kalman desenvolveu a definição matemática de controlabilidade aplicada à teoria de controle na primeira metade de 1959. (Kalman, 1968)

Todo o formalismo matemático pode ser encontrado em Kalman e colaboradores (1969). Para os objetivos deste trabalho, ficaremos restritos ao teorema a seguir (teorema 3.4 da referência), que é provado com muita elegância matemática ao considerar um sistema dinâmico linear invariante, ou seja, suas características são invariantes no tempo.

TEOREMA: Um sistema linear Σ de dimensão n é completamente controlável se e somente se $\text{posto}(C) = \text{posto}[G, FG, \dots, F^{n-1}G] = n$

Franklin, Powell e Emami-Naeini (2009) definem controlabilidade de uma maneira muito interessante e prática: A partir do diagrama de blocos estruturado na forma canônica controlável, descrito na referência, descrevem a transformação linear que levaria os estados em uma base qualquer para a base canônica controlável. A transformação linear T é dada de maneira que $t_n = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \cdot C^{-1}$ compõe a enésima fileira de T^{-1} , onde $C = [G \ FG \ \dots \ F^{n-1}G]$. A existência desta transformação T somente é possível se e somente se $C = [G \ FG \ \dots \ F^{n-1}G]$ for não singular.

3.3. Designação de estruturas próprias com a retroação total de estados

Dado um arranjo auto conjugado de escalares $\{\lambda_i^d\}, i = 1, 2, \dots, n$, e um correspondente arranjo auto-conjugado de vetores $\{v_i^d\}, i = 1, 2, \dots, n$, encontre uma matriz real $K (m \times n)$, tal que os autovalores de $F + GK$ sejam exatamente aqueles previamente definidos acima. (Andry Jr.; Shapiro; Chung, 1983) .

Devemos ter em mente que as estruturas próprias desta matriz $F + GK$ estão contidas no núcleo dela. Esta matriz é a matriz do sistema dinâmico $\dot{x} = (F + GK)x$, em malha fechada, considerando a retroação completa dos estados, em que o vetor de entradas é definido por $u(t) = Kx$.

Segundo Andry Jr., Shapiro e Chung (1983) Wonham foi o primeiro a estender o conceito de controlabilidade nos casos de uma única entrada para o caso de múltiplas entradas (TEOREMA 3.2).

TEOREMA 3.2. Um sistema descrito por (1) e (2) é controlável se e somente se para todo arranjo auto conjugado de escalares $\{\lambda_i^d\}, i = 1, 2, \dots, n$, existe uma matriz real $K (m \times n)$ tal que $F + GK$ possui $\{\lambda_i^d\}, i = 1, 2, \dots, n$ como seus autovalores.

No final da década de 1950 e toda a década de 1960, a designação de pólos foi objeto de estudo de muitos autores, Bertram, por exemplo, que segundo Kalman (1969), foi o primeiro a obter o teorema 3.2 acima para o caso de uma única entrada, usando o método do lugar das raízes.

No caso de múltiplas entradas, a matriz de retroação K para um dado arranjo de autovalores desejados não é única. Este fato, segundo Andry Jr., Shapiro e Chung (1983) (1983), é uma “benção”, pois nos permite definir um subespaço relativo a cada autovalor que contenha os autovetores em malha fechada. Desta forma escolhemos o autovetor mais apropriado definindo uma matriz K .

Segundo Andry Jr., Shapiro e Chung (1983), Moore (1976) foi o primeiro a identificar a liberdade oferecida pela retroação de estados além da especificação de autovalores em malha fechada, para o caso em que eles são distintos.

Seguindo o raciocínio de Moore (1976), que começou considerando a seguinte equação diferencial em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = (F + GK)x(t) \quad (20)$$

Obtida a partir da aplicação da retroação linear de estados $u(t) = Kx(t)$ ao sistema definido em (1), sendo (F, G) controlável, em que $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$.

Cada uma das seguintes matrizes foi associada a cada número $\lambda \in \mathfrak{R}(\mathbb{C})$:

$$S_\lambda = [\lambda I - F \mid G] \quad (21)$$

$$R_\lambda = \begin{bmatrix} N_\lambda \\ M_\lambda \end{bmatrix} \quad (22)$$

Sendo que as colunas desta última matriz (22) constituem uma base para o núcleo da matriz S_λ (21) para $\forall \lambda$. As colunas de N_λ serão linearmente independentes se G possuir colunas linearmente independentes. (Moore, 1976)

Se (F, G) for controlável, então K pode ser escolhido para conseguir qualquer par conjugado de autovalores em malha fechada. Exceto para o caso onde $m = 1$, em que um arranjo de autovalores em malha fechada não define unicamente K , é simples de mostrar que K é unicamente definida, se existir, pela seleção de um arranjo de autovalores distintos e seus respectivos arranjos de autovetores. Desta forma, a liberdade oferecida através da seleção de autovalores é escolher um possível arranjo de autovetores em malha fechada. (Moore, 1976)

De acordo com D'Azzo e Houpis (1981), a equação (21) é obtida a partir da definição de autovalores/autovetores para o sistema em malha fechada (20):

$$[F + GK]v_i = \lambda_i v_i \quad (23)$$

Tornando ao trabalho de Moore (1976), a proposição a seguir, a mais importante do trabalho citado, trata do caso em que os autovalores de malha fechada

são distintos. Para esse caso, a seguinte proposição mostra as condições necessárias e suficientes para a existência de K .

PROPOSIÇÃO 1. Seja $\{\lambda_i, i \in \mathbb{N}\}$ um arranjo de pares conjugados de números complexos distintos, então, existe uma matriz K de números reais tal que $[F + GK]v_i = \lambda_i v_i$ ($i \in \mathbb{N}$) se e somente se as seguintes três condições forem satisfeitas para $i \in \mathbb{N}$.

- I. Os vetores v_i são vetores linearmente independentes em $\mathbb{C}^n$;*
- II. $v_i = v_j^*$ sempre quando $\lambda_i = \lambda_j^*$;*
- III. $v_i \in \text{span} \{N_{\lambda_i}\}$.*

Se K existe e $\text{posto}(B) = m$, então K é única.

Prova da condição suficiente (Moore, 1976):

Suponha que $v_i, i \in \mathbb{N}$, sejam escolhidos de modo a satisfazer as três condições da proposição 1. Uma vez que $v_i \in \text{span} \{N_{\lambda_i}\}$, para $i \in \mathbb{N}$, a seguinte equação é verdade: $v_i = N_{\lambda_i} z_i$ para um dado vetor $z_i \in \mathbb{R}^m (\mathbb{C}^m)$, desta forma, a partir de (21) e (22), temos a seguinte equação: (Moore, 1976)

$$(\lambda_i I - F)v_i + G M_{\lambda_i} z_i = 0 \quad (23)$$

A equação (23) revelou que se K for escolhida de maneira que $-M_{\lambda_i} z_i = K v_i$, teremos:

$$[\lambda_i I - (F + GK)]v_i = 0.$$

Moore (1976) prosseguiu mostrando que, a matriz K composta por números reais, que satisfaça a seguinte equação (24), pode ser sempre obtida.

$$K[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] = [w_i \ w_i \ \dots \ w_i] \quad (24)$$

$$w_i = -M_{\lambda_i} z_i$$

Se cada λ_i for real, então v_i, z_i serão reais e $[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ será não singular, neste caso:

$$K = [w_i \ w_i \ \dots \ w_i][v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^{-1} \quad (25)$$

Ainda segundo Moore (1976), para o caso da existência de autovalores complexos. Assumindo que $\lambda_i = \lambda_j^*$. A segunda condição da proposição 1 estabelece que $v_i = v_j^*$, que implica que $w_i = w_j^*$. Portanto, a equação que precisa ser resolvida é:

$$K[v_{1R} + jv_{1I} \ v_{1R} - jv_{1I} \ V] = [w_{1R} + jw_{1I} \ w_{1R} - jw_{1I} \ W] \quad (26)$$

Em que V e W são $v_i, i = 3, \dots, n$, e $w_i, i = 3, \dots, n$, respectivamente.

Multiplicando pela direita os dois lados da equação (26) pela seguinte matriz não singular:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -j\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & j\frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & & I \end{array} \right]$$

Não altera o cálculo de K e Moore (1976), chegou à seguinte equação:

$$K[v_{1R} \ v_{1I} \ V] = [w_{1R} \ w_{1I} \ W] \quad (27)$$

Repare que na prova da proposição 1, foi mostrado um procedimento para o cálculo da matriz K .

Prova da condição necessária.

A necessidade das primeiras duas condições da proposição 1 é baseada na teoria básica de matriz. (Moore, 1976)

O restante da prova foi seguida por Moore (1976) a partir da equação $[F + GK]v_i = \lambda_i v_i$, que foi rearranjada e levou a: $[\lambda_i I - F]v_i = GKv_i$. Escrevendo de uma outra maneira:

$$\left[\begin{array}{c|c} \lambda_i I - F & G \end{array} \right] \begin{bmatrix} v_i \\ -Kv_i \end{bmatrix} = 0 \quad (28)$$

Desta maneira v_i está contido no subespaço núcleo de $\left[\begin{array}{c|c} \lambda_i I - F & G \end{array} \right]$. Segue que $v_i \in \text{span} \{N_{\lambda_i}\}$. (Moore, 1976)

Uma vez que $[F + GK]$ é unicamente definido pelos seus autovalores e autovetores (malha fechada), K é única sempre que G é de posto completo. (Moore, 1976)

Moore (1976) seguiu ainda propondo que, mesmo que um autovalor λ_i não se altere sob a retroação (sistema (F, G) é não controlável), é sempre possível e há uma considerável liberdade em conseguir $v_i \in \text{span} \{N_{\lambda_i}\}$, desde que satisfeitas algumas condições descritas em Moore (1976), condições que foram omitidas da revisão teórica do presente trabalho por fugirem do escopo principal.

3.4. Designação de estruturas próprias com a retroação de saídas

O método descrito na seção anterior nem sempre é viável em se tratando de situações práticas pelo fato de utilizar a retroação de todos os estados, que nem sempre é possível, necessária ou economicamente viável. Nesta seção veremos como é possível utilizar a retroação de saídas de um dado sistema dinâmico, bem como quantos autovetores/autovalores conseguimos designar, ou até mesmo o quão próximos conseguimos chegar de uma estrutura própria para uma dada escolha de saídas como retroação.

Em se tratando de designação de estrutura própria de sistemas com a retroação de saídas, os trabalhos publicados por Srinathkumar, 1978a e 1978b, são referências na área e fortemente recomendados para os interessados na metodologia. O seguinte teorema apresentado e provado por Srinathkumar, 1978a, ele mostrou a relação entre número de estados e saídas em retroação com o número de autovalores e graus de liberdade em uma dada base que podem ser designados:

TEOREMA 3.3 . Dado um sistema controlável e observável, e assumindo que as matrizes F e G são ditas de posto completo, então, $\max(m, r)$ autovalores em malha fechada podem ser designados e $\max(m, r)$ autovetores (ou vetores recíprocos por dualidade) podem ser parcialmente designados com $\min(m, r)$ entradas em cada vetor arbitrariamente escolhidas utilizando o ganho de retroação de saídas, isto é, com a seguinte lei de controle $u = Ky$.

Lembrando que $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e $y(t) \in \mathbb{R}^r$.

Seguiremos com a revisão teórica embasada nos trabalhos de Sobel e Shapiro (1985c) e Andry Jr., Shapiro e Chung (1983).

3.4.1. Designabilidade de autovetores e determinação da matriz de ganhos de controle K

O propósito desta seção é identificar quais são os autovetores possíveis de serem designados como autovetores em malha fechada, primeira parte, e dados os autovalores desejados, qual é o arranjo de autovetores em malha fechada que mais se aproxima dos desejados, segunda parte.

3.4.1.1. Especificação total dos autovetores desejados v_i^d

De acordo com Andry Jr., Shapiro e Chung (1983), ao aplicarmos a lei de controle $u = Ky$, segundo o teorema 2.3, às equações (1) e (2) temos o seguinte sistema em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = (F + GKH)x(t)$$

Assumindo que λ_i , $i = 1, 2, \dots, \max(m, r)$, sejam os autovalores desejados em malha fechada e v_i os respectivos autovetores. Então, da definição de autovalor/autovetor: (Andry Jr., Shapiro e Chung, 1983)

$$(F + GKH)v_i = \lambda_i v_i \quad (29)$$

Ou

$$v_i = (\lambda_i I - F)^{-1} GKH v_i \quad (30)$$

Devemos assumir que nenhum dos autovalores desejados seja autovalor de $(\lambda_i I - F)$, para garantirmos a não singularidade de $(\lambda_i I - F)$, e desta maneira a sua inversa. (Sobel e Shapiro, 1985c)

A partir de (30), definimos $m_i = KHv_i$. Desta forma a equação (30) se torna: (Sobel e Shapiro, 1985c)

$$v_i = (\lambda_i I - F)^{-1} G m_i \quad (31)$$

A implicação da equação (31) é de grande importância: o vetor v_i é uma combinação linear de vetores formados pelas colunas de $(\lambda_i I - F)^{-1} G$. Portanto, v_i

está contido em um subespaço de dimensão igual ao número de colunas de $(\lambda_i I - F)^{-1}G$, ou seja, m , que é o número de variáveis de controle independentes. Desta forma, o número de variáveis de controle determina a dimensão dos subespaços em que os autovetores em malha fechada pertencem. (Sobel e Shapiro, 1985c)

Ainda segundo Sobel e Shapiro (1985c), a orientação do subespaço é determinada pelos parâmetros em malha aberta, representados por F , G e pelos autovalores desejados em malha fechada λ_i . Informação que será bastante útil para a elaboração da metodologia apresentada neste trabalho.

Se os autovetores desejados pertencerem a estes subespaços, significa que conseguimos a designação exata da estrutura própria desejada. (Sobel e Shapiro, 1985c). Caso contrário, a próxima seção mostrará como encontrar o arranjo de autovetores mais próximo possível do desejado.

3.4.1.2. Autovetores mais próximos dos autovetores desejados v_i^d

Se os autovetores desejados pertencerem aos subespaços definidos na seção anterior, então dizemos que a designação foi exata, entretanto, em geral isso nem sempre acontece. Para estes casos, devemos escolher os autovetores que mais se aproximam dos desejados, os quais são simplesmente os vetores formados pela projeção de cada autovetor desejado no respectivo subespaço formado pela base na qual as colunas de $(\lambda_i I - F)^{-1}G$ são os vetores. (Andry Jr., Shapiro e Chung, 1983)

Na figura a seguir, figura 3.1, é mostrada uma representação geométrica da idéia descrita acima.

Figura 3.1. Interpretação geométrica de v_i^d , onde v_i^d é o autovetor desejado e v_{iA} é o autovetor possível de ser designado mais próximo do desejado. Fonte: Andry Jr., Shapiro e Chung (1983) modificada pelo autor

A partir deste ponto, Andry Jr., Shapiro e Chung (1983) mostraram como calcular os autovetores v_{iA} que mais se aproximam dos desejados v_i^d . Começaram por definir:

$$L_i = (\lambda_i I - F)^{-1} G \quad (32)$$

Se o vetor procurado pertence ao subespaço definido acima, então:

$$v_{iA} = L_i z_i \quad z_i \in \mathfrak{R}^m \quad (33)$$

Para encontrar z_i cujo v_{iA} é a projeção de v_i^d no “subespaço alcançável” definido acima, devemos escolher z_i tal que minimizará a seguinte equação, que é o quadrado do módulo do vetor diferença entre v_i^d e v_{iA} : (Andry Jr.; Shapiro; Chung, 1983)

$$J = \|v_i^d - v_{iA}\|^2 = \|v_i^d - L_i z_i\|^2 \quad (34)$$

Aqueles autores seguem com a derivada da função J com respeito a z_i :

$$dJ/dz_i = 2L_i^T(L_i z_i - v_i^d) \quad (35)$$

Considerando a equação (35), e a igualdade $dJ/dz_i = 0$, Andry Jr., Shapiro e Chung (1983) chegaram a:

$$z_i = (L_i^T L_i)^{-1} L_i^T v_i^d \quad (36)$$

$$v_{iA} = L_i (L_i^T L_i)^{-1} L_i^T v_i^d \quad (37)$$

Devido a um possível mau condicionamento da matriz $L_i^T L_i$, cuidados precisam ser tomados na inversão desta. Harvey e Stein (1978) sugerem uma decomposição de Cholesky ou uma decomposição de valor singular. (Andry Jr.; Shapiro; Chung, 1983)

De maneira similar, podemos utilizar a metodologia apresentada no trabalho de Kautsky, Nichols e Van Dooren (1985), em que os autores mostram que o vetor v_i está contido no núcleo de $U_1^T(\lambda_i I - F)$. A matriz U_1 é obtida através de uma decomposição de valor singular (SVD) de F . O método de Kautsky é numericamente mais robusto, e será utilizado no estudo de caso através de uma pseudo-inversa.

De acordo com Andry Jr., Shapiro e Chung (1983), alguns comentários importantes podem ser citados sobre o subespaço formado pela base na qual as colunas de $(\lambda_i I - F)^{-1}G$ são os elementos:

- I. *Se o autovetor desejado v_i^d é quase ortogonal ao subespaço definido acima, então, dificilmente o autovetor desejado ajudará em uma melhor resposta para o sistema. (Andry Jr.; Shapiro; Chung, 1983)*
- II. *Se um subespaço maior, em termos de dimensão for necessário, então, mais variáveis de controle são requeridas, desde que o subespaço gerado a partir de $(\lambda_i I - F)^{-1}G$ é m . (Andry Jr.; Shapiro; Chung, 1983)*

- III. *Em um sistema com uma única entrada na retroação, ou seja G é uma coluna, não há possibilidade da designação de nenhum autovetor, embora, um elemento do autovetor possa ser especificado.* (Andry Jr.; Shapiro; Chung, 1983)

3.4.1.3. Especificação parcial de v_i^d

De acordo com Andry Jr., Shapiro e Chung (1983), em muitos casos práticos, a especificação total de todos os elementos dos autovetores não é necessária ou mesmo possível, mas na maioria dos casos o interessante é a especificação de somente alguns elementos dos autovetores. Assim, Andry Jr., Shapiro e Chung (1983) seguem assumindo que o autovetor desejado tem a seguinte forma:

$$v_i^d = [v_{i1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, v_{ij}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, v_{in}]^T$$

Em que v_{ij} são os elementos especificados e $\mathbf{x}$ os não especificados.

Assim, rearranjando os elementos:

$$\{v_i^d\}^{R_i} = \begin{bmatrix} l_i \\ d_i \end{bmatrix}$$

Em que l_i é um vetor com os elementos especificados e d_i um vetor com os elementos não especificados de v_i^d .

As linhas de $(\lambda_i I - F)^{-1} G$ também foram reordenadas, desta forma:

$$\langle (\lambda_i I - F)^{-1} G \rangle^{R_i} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_i \\ D_i \end{bmatrix} \quad (38)$$

Portanto, assim como foi feito para o caso de especificação completa dos elementos dos autovetores, Andry Jr., Shapiro e Chung (1983), concluem que para o caso de especificação parcial:

$$z_i = (\tilde{L}_i^T \tilde{L}_i)^{-1} \tilde{L}_i^T l_i \quad (39)$$

$$v_{iA} = L_i (\tilde{L}_i^T \tilde{L}_i)^{-1} \tilde{L}_i^T l_i \quad (40)$$

3.4.1.4. Determinação da matriz de ganhos de retroação K

Nesta seção, seguiremos conforme raciocínio e forma apresentada por Andry Jr., Shapiro e Chung (1983), no qual determinaram a matriz de ganhos de retroação K para o caso onde os autovalores/autovetores são reais, bem como uma metodologia para se trabalhar com o caso de serem complexos, como foi feito na designação completa de estados na seção 3.3.

Assumindo que a terminologia autovetor nesta seção se refere ao autovetor designável em malha fechada, ou seja, o autovetor projetado no subespaço definido por $(\lambda_i I - F)^{-1}G$.

Assim como foi feito na seção 3.4.1.1 deste texto, aplicado a lei de controle $u = Ky$ nas equações (1) e (2), temos :

$$\dot{x}(t) = (F + GKH)x(t)$$

Por razões que ficarão óbvias na próxima seção 3.5, transformaremos a matriz de entradas G na seguinte forma:

$$G \rightarrow \begin{bmatrix} l_m \\ \text{---} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Segundo Andry Jr., Shapiro e Chung (1983), não perdemos generalidade fazendo essa transformação desde que G seja de posto completo.

Para obtermos esta transformação (não única) relativa à equação (41), Andry Jr., Shapiro e Chung (1983), sugeriram:

$$T = \left[G \mid P \right] \quad (42)$$

Em que P é uma matriz qualquer de forma que $\text{posto}[T] = n$.

Utilizando T , fizeram a seguinte transformação de coordenadas $x = T\tilde{x}$.

Desta forma, o sistema em malha aberta (1) e (2) ficou descrito por:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \tilde{F}\tilde{x}(t) + \tilde{G}u(t) \quad (43)$$

$$y(t) = \tilde{H}\tilde{x}(t) \quad (44)$$

Em que,

$$\tilde{F} = T^{-1}F T$$

$$\tilde{G} = T^{-1}G = \begin{bmatrix} l_m \\ \text{---} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{H} = H T$$

Com esta transformação, os autovalores continuam os mesmos e os autovetores se relacionam da seguinte forma:

$$T^{-1}v_i = \tilde{v}_i$$

Agora, feitas as transformações por meio de T , por conveniência, e como sugerido por Andry Jr., Shapiro e Chung (1983), iremos retirar a notação ($\tilde{\cdot}$). Assim, seguiremos da definição de autovalor/autovetor:

$$(F + GKH)v_i = \lambda_i v_i \quad (45)$$

Que pode ser reescrita na seguinte forma, segundo aqueles autores:

$$(\lambda_i I - F)v_i = GKHv_i \quad (46)$$

Andry Jr., Shapiro e Chung (1983) particionaram a equação (46) com base na nova estrutura de G dada pela transformação T anteriormente citada:

$$\left[\begin{array}{c|c} \lambda_i l_m - F_{11} & -F_{12} \\ \hline -F_{21} & \lambda_i l_{n-m} - F_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} z_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_m \\ \text{---} \\ 0 \end{bmatrix} KH \begin{bmatrix} z_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad (47)$$

Em que,

$$v_i = \begin{bmatrix} z_i \\ \text{---} \\ w_i \end{bmatrix}$$

$$F = \left[\begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline F_{21} & F_{22} \end{array} \right]$$

A seguinte equação (48) foi obtida a partir da primeira equação matricial de (47):

$$\begin{bmatrix} \lambda_i l_m - F_{11} & | & -F_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i \\ w_i \end{bmatrix} = KH \begin{bmatrix} z_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad (48)$$

Que multiplicando:

$$(\lambda_i l_m - F_{11})z_i - F_{12}w_i = KHv_i \quad (49)$$

Ou

$$\lambda_i l_m z_i - (F_{11}z_i + F_{12}w_i) = KHv_i \quad (50)$$

Ou

$$\lambda_i z_i - F_1 = KHv_i \quad (51)$$

Em que $F_1 = [F_{11} \ F_{12}]$. Assim, reescrevendo (51):

$$(F_1 + KH)v_i = \lambda_i z_i \quad (52)$$

Assim, para todos os autovetores e autovalores, Andry Jr., Shapiro e Chung (1983), concluíram que:

$$(F_1 + KH)V = Z \quad (53)$$

Em que

$$V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_r], \ V_{(n \times r)} \quad (54)$$

$$Z = [\lambda_1 z_1 \ \lambda_2 z_2 \ \dots \ \lambda_n z_n], \ Z_{(m \times r)} \quad (55)$$

Desta forma, para o caso de V e Z serem reais, obtiveram:

$$K = (Z - F_1 V)(HV)^{-1} \quad (56)$$

Para o caso de V e Z serem complexos, seguiremos conforme Konstantopoulos e Antsaklis (1996), que dizem que se pelo menos um elemento das

matrizes V e Z for complexo, então segue o procedimento para transformá-lo em real.

Sem perda de generalidade, Konstantopoulos e Antsaklis (1996) assumiram que o arranjo de autovalores desejados são pares conjugados, os quais $\lambda_1 = \lambda_2^* \in \mathbb{C}$ e $(r - 2)$ autovalores reais, que são $\{\lambda_i \in \mathfrak{R}, i = 3, \dots, r\}$. Então, $v_1 = v_2^*$, onde v^* denota o complexo conjugado do vetor v . Definiram:

$$v_1 = v_1^R + jv_1^I \quad (57)$$

$$\lambda_1 z_1 = \tilde{z}_1^R + j\tilde{z}_1^I \quad (58)$$

Em que v^R e v^I denotam as partes real e imaginária do vetor v , respectivamente.

Assim, reescreveram a equação (53), utilizando (57) e (58).

$$\begin{aligned} (F_1 + KH)(v_1^R + jv_1^I, v_1^R - jv_1^I \dots v_r) = \\ (\tilde{z}_1^R + j\tilde{z}_1^I, \quad \tilde{z}_1^R - j\tilde{z}_1^I \dots \lambda_r z_1) \end{aligned} \quad (59)$$

Multiplicaram ambos os lados pela seguinte matriz, utilizada também na seção 3.4:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -j\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & j\frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & & I \end{array} \right]$$

Chegaram a:

$$(F_1 + KH)(v_1^R \ v_1^I \dots v_r) = (\tilde{z}_1^R \ \tilde{z}_1^I \dots \lambda_r z_1) \quad (60)$$

$$(F_1 + KH)\tilde{V} = \tilde{Z} \quad (61)$$

Assim, facilmente Konstantopoulos e Antsaklis (1996) concluíram que:

$$\check{V} = (v_1^R \ v_1^I \ ... \ v_r) \quad (62)$$

$$\check{Z} = (\tilde{z}_1^R \ \tilde{z}_1^I \ ... \ \lambda_r z_1) \quad (63)$$

Desta forma, as matrizes $\check{V}$ e $\check{Z}$ são reais, e o cálculo de K segue de (56).

A matriz K existirá desde que a matriz (HV) seja não singular. Do ponto de vista matemático, a não singularidade, portanto a inversa, de (HV) é garantida pelo fato do espaço nulo de H e o espaço formado pelas colunas de V somente se intersectarem na origem. Do ponto de vista físico, (HV) será singular (ou mal condicionada) quando as saídas (indicadas por H) tiverem pouco impacto, ou nenhum impacto, nos autovetores (indicado pela matriz V). Portanto, o mau condicionamento de (HV) proporciona uma boa maneira de checar a razoabilidade dos autovetores em relação às saídas que estão retroagindo. (Andry Jr.; Shapiro; Chung, 1983)

Para os casos em que a matriz (HV) é mal condicionada ou muito próxima à singularidade, é recomendado utilizar-se da pseudo-inversa para o cálculo de K , conforme aplicado por Sobel, Shapiro e Andry Jr. (1994).

Existem ainda alguns comentários importantes feitos por Andry Jr., Shapiro e Chung (1983):

- I. *A matriz K calculada com a equação (56) irá posicionar precisamente r autovalores desejados e irá designar os autovetores associados o mais próximo possível dos autovetores desejados;*
- II. *Se o controle sobre um grande número de pólos for desejado, o posto de H necessariamente precisa ser aumentado, ou seja, sensores adicionais precisam ser adicionados ao sistema;*
- III. *Se a melhoria da designabilidade de autovetores for necessária, o posto de G precisa necessariamente ser aumentado, ou seja, variáveis independentes de controle precisam ser adicionadas ao sistema;*

O comentário *III está relacionado com o comentário II feito anteriormente por Andry Jr., Shapiro e Chung (1983), citado no final da seção 3.4.1.2 deste texto.*

3.5. Designação de estruturas próprias usando a retroação de saídas restritas

Na seção anterior revisamos um método para determinar uma matriz de ganhos de controle K de modo que toda entrada de controle do sistema em malha fechada está relacionada através de K a cada saída em retroação. Assim, temos a matriz K completa. Nesta seção, será considerada a possibilidade de cada uma das entradas estar relacionada com somente algumas saídas em retroação. Para tanto, iremos impor algumas restrições à matriz K , tal que, o elemento da matriz relativo à entrada/saída que não se deseja retroagir será anulado.

Este resultado é de muita importância para o presente trabalho, pois para a pseudo-retroação deseja-se que somente estejam relacionadas entre si as entradas e saídas relativas ao elemento que se pretende modificar os parâmetros, separando assim, as entradas e saídas de cada elemento em questão.

Seguimos com a revisão teórica baseada na metodologia descrita em Andry Jr., Shapiro e Chung (1983).

Aqueles autores, começaram a partir da equação (53):

$$(F_1 + KH)V = Z$$

Devemos lembrar que as matrizes F e H estão transformadas para termos a matriz G na forma desejada, seção 3.5.1.4.

Distribuíram V em (53):

$$F_1V + KHV = Z \quad (64)$$

Ou,

$$KHV = Z - F_1V \quad (65)$$

Andry Jr., Shapiro e Chung (1983) definiram,

$$\Omega \triangleq HV$$

$$\psi \triangleq Z - F_1 V$$

Então, reescreveram (65) de modo a enfatizar a estrutura de G .

$$I_m K \Omega = \psi \quad (66)$$

A equação (66) em termos do produto de *Kronecker* e um “*row stacking operator*”. (Andry Jr., Shapiro e Chung, 1983)

$$[I_m \otimes \Omega^T] S(K) = S(\psi) \quad (67)$$

Em que S representa o “*row stacking operator*”.

De acordo com Andry Jr., Shapiro e Chung (1983), se k_i denota a i ésima linha de K ($m \times r$), e ψ_i a i ésima linha de ψ , de forma que:

$$k_i = [k_{i1} \ k_{i2} \ \dots \ k_{ir}]$$

$$\psi_i = [\psi_{i1} \ \psi_{i2} \ \dots \ \psi_{ir}]$$

Então:

$$\begin{bmatrix} \Omega^T & 0_m & \dots & 0_m \\ 0_m & \Omega^T & \dots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & \dots & \Omega^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1^T \\ k_2^T \\ \vdots \\ k_m^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1^T \\ \psi_2^T \\ \vdots \\ \psi_m^T \end{bmatrix} \quad (68)$$

A matriz Ω^T compõe todos os elementos da diagonal principal enquanto que fora da diagonal as matrizes 0_m de zeros.

O formato da equação (68) é devido tão somente à transformação da matriz G e às outras matrizes, propósito que foi comentado na seção 3.4.1.4. A vantagem

deste formato de (68) é que cada linha da matriz K ($m \times r$), ou seja, vetor k_i está ligado a Ω^T separadamente, assim: (Andry Jr., Shapiro e Chung, 1983)

$$[\Omega^T] \begin{bmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ k_{ij} \\ k_{ir} \end{bmatrix} = [\psi_i^T]$$

Se estivermos interessados em desconsiderar a retroação equivalente a k_{ij} da matriz K , ou seja, k_{ij} , será igual a zero, devemos excluir k_{ij} do vetor k_i e a coluna j da matriz Ω^T . Assim, trabalhamos com a seguinte equação alterada: (Andry Jr., Shapiro e Chung, 1983)

$$\tilde{\Omega}^T k_i^T = \psi_i^T$$

Em que $\tilde{\Omega}^T$ é a matriz Ω^T tendo excluída a coluna j e k_i^T é o vetor k_i tendo excluído o elemento j .

Pelo fato do sistema ter se tornado indeterminado, isto é, possui mais equações que incógnitas, têm-se de utilizar a pseudo-inversa para a solução, assim: (Andry Jr., Shapiro e Chung, 1983)

$$\tilde{k}_i^T = \text{pinv}(\tilde{\Omega}^T) \psi_i^T \quad (69)$$

Ou,

$$\tilde{k}_i = \psi_i \text{pinv}(\tilde{\Omega}) \quad (70)$$

Se mais de um elemento da matriz K precisa ser anulado, então, a matriz $\tilde{\Omega}^T$ e os vetores k_i^T devem ser modificados de maneira apropriada.

Uma vez que restrições são impostas à matriz de ganhos K , a designação exata dos autovalores desejados pode não ser possível. (De acordo com as referências Shapiro e Chung (1981a) e (1981b) citadas em Andry Jr., Shapiro e Chung (1983).

Entretanto, segundo Andry Jr., Shapiro e Chung (1983), os autovalores em malha fechada estarem próximos dos desejados, significa que o comportamento dinâmico do sistema pode ser aceitável para o projetista. Este resultado é de grande valia e será verificado nos resultados do estudo de caso deste trabalho.

3.6. Designação de pólos

Assim como para designação de estrutura própria completa de um sistema em malha fechada, a designação de pólos pode ser feita com retroação completa de estados, bem como retroação de algumas saídas. O primeiro caso não será mostrado aqui nesta revisão por fugir do escopo principal do presente trabalho, no entanto, pode ser encontrado em qualquer literatura que trate da teoria moderna de controle, como Franklin, Powell e Emami-Naeini (2009)

Já a designação de pólos por retroação de saídas será de muita valia para o presente trabalho, principalmente o método encontrado em Davison e Chadha (1972) e Davison e Wang (1975), que possibilitou a designação de alguns pólos desejados mantendo o restante dos pólos inalterados.

Seguiremos com a revisão do método mostrado por Davison e Wang (1975).

Primeiramente, definiram que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sejam os autovalores de F .

Davison e Wang (1975) apresentaram os seguinte lemas e corolário:

Lema 1: Dado o sistema representado pela equação (1), então a matriz de ganhos de controle $K \in R^{m \times r}$ pode sempre ser encontrada de maneira que $(F + GKH)$ tenha sempre $\max(m, r)$ autovalores designados arbitrariamente próximos aos $\max(m, r)$ valores pretendidos.

Lema 2: Assuma que (F, G, H) seja controlável e observável com posto $G = m$, posto $H = r$, e que F tenha n autovalores distintos, assim, para quase todas (G, H) existe uma matriz de ganhos de controle $K \in R^{m \times r}$ de maneira que $(F + GKH)$ tenha como seus autovalores $s = \min(n, m + r - 1) - \max(m, r) + 1$

autovalores que sejam arbitrariamente próximos a quaisquer s valores simétricos especificados, juntamente com quaisquer $\max(m, r) - 1$ autovalores simétricos selecionados de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Corolário 1: Lema 2 é verdadeiro se s for substituída por $s' = \min(n, m + r - 1) - \min(m, r) + 1$ e $\max(m, r) - 1$ for substituído por $\min(m, r) - 1$.

A prova para o lema 2 será mostrado aqui pelo fato de mostrar o algoritmo que nos leva à designação de pólos por retroação de saídas com a possibilidade de conservarmos inalterados o restante dos autovalores que não forem ser designados, como descrito acima no lema 2.

Portanto, para um sistema do tipo representado pela equação (1), assumimos que $r \geq m$ e que $r > 1$ para evitar o trivial. O próximo passo é reordenar os autovalores de F de maneira que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$, $t \triangleq r - 1$, sejam os autovalores em malha aberta que devem permanecer assim em $F + GKH$. (Davison e Wang, 1975)

Para tanto, Davison e Wang, (1975) utilizaram a seguinte transformação de coordenadas T aplicada às matrizes F, G e H de maneira que $(F, G, H) \rightarrow (HT, T^{-1}FT, T^{-1}G)$, onde T foi escolhida de modo que $T^{-1}FT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, ou seja, forma canônica modal, conforme definido por Franklin, Powell e Emami-Naeini (2009). Que resulta no seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} (T^{-1}G)_1 \\ (T^{-1}G)_2 \end{pmatrix} u \\ y &= ((HT)_1 (HT)_2) \xi \end{aligned} \quad (71)$$

Em que

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &\triangleq \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t), \quad \Lambda_2 \triangleq \text{diag}(\lambda_{t+1}, \dots, \lambda_n), \quad T^{-1}G \triangleq \begin{pmatrix} (T^{-1}G)_1 \\ (T^{-1}G)_2 \end{pmatrix}, \\ CT &\triangleq ((HT)_1, (HT)_2). \end{aligned}$$

As seguintes duas condições devem ser atendidas, de acordo com Davison e Wang (1975):

Condição 1:

$$\text{posto}(T^{-1}G)_2 = \min(m, n - 1)$$

Condição 2: Nenhuma coluna de $(HT)_2$ deve estar contida no espaço definido pelas colunas de $(HT)_1$, ou seja, se c_1 é uma coluna de $(HT)_2$, então $c_1 \notin \text{span}((HT)_1)$.

Para tanto, o próximo passo é escolher $l' \in R^{l \times r}$ de maneira que $l'(HT)_1 = 0$ e $l'(HT)_2 \triangleq (c_{t+1}^*, c_{t+1}^*, \dots, c_n^*)$ em que c_j^* , $j = t + 1, \dots, n$ são escalares não nulos. (Davison e Wang, 1975)

Aplicando a lei de controle $u = K^*l'y$ ao sistema representado por (71) resultará na seguinte matriz de sistema em malha fechada: (Davison e Wang, 1975)

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 & (T^{-1}G)_1 K^* l' (HT)_2 \\ 0 & \Lambda_2 + (T^{-1}G)_2 K^* l' (HT)_2 \end{pmatrix} \quad (72)$$

Portanto, Davison e Wang (1975) concluíram que desde que $(\Lambda_2, (T^{-1}G)_2)$ seja controlável e $(l'(HT)_2, \Lambda_2)$ seja observável e desde que $\text{posto}(T^{-1}G)_2 = \min(m, n - 1)$, então do lema 1, K^* pode sempre ser encontrado de maneira que

$\Lambda_2 + (T^{-1}G)_2 K^* l' (HT)_2$ tenha $\min(m, n - r + 1)$ autovalores designados arbitrariamente próximos aos $\min(m, n - r + 1)$ valores especificados.

A importante conclusão desta prova é que uma lei de controle $u = Ky, K \triangleq K^*l'$ foi encontrado de modo a matriz do sistema em malha fechada (72)

possui $(r - 1)$ polos de malha aberta simétricos especificados e $\min(m, n - r + 1)$ polos arbitrariamente próximos aos $\min(m, n - r + 1)$ valores simétricos pretendidos.

Portanto, de (72) concluímos que Λ_1 são os autovalores que permanecem inalterados do sistema em malha aberta e $\Lambda_2 + (T^{-1}G)_2 K^* l' (HT)_2$ representam os autovalores que deseja-se designar. E $K^* l'$ é a lei de controle que possibilita isso acontecer.

Há ainda que se ressaltar que, segundo teorema 1 encontrado em Davison e Wang (1975), é possível determinar uma matriz de ganhos de controle K de modo que $F + GKH$ possua $\min(n, m + r - 1)$ autovalores designados arbitrariamente. Que também é um resultado muito importante, pois elimina a necessidade da designação de somente $\min(m, n - r + 1)$ autovalores, conforme teoria descrita acima.

4. Metodologia para a designação de estruturas próprias desejadas através da pseudo-retroação de saídas

O principal escopo do presente trabalho é a apresentação de uma metodologia para a alteração ou designação da estrutura própria de um sistema dinâmico linear conduzida sob a mesma linha de raciocínio das teorias de controle moderno, como os métodos e trabalhos mostrados na revisão deste trabalho, com uma diferença, o rearranjo nos modos será conseguido através da devida modificação de alguns parâmetros de modelagem que virão como resultado de uma pseudo-retroação de saídas.

Assim, a metodologia consiste basicamente em definir entradas e saídas de forma que a relação entre elas seja um parâmetro do sistema. Deste modo, o sistema de controle funcionaria como elementos do mesmo tipo e em paralelo aos existentes no sistema, e os ganhos de controle presentes na matriz de controle K são as parcelas que devem ser somadas ou subtraídas dos parâmetros que representam os elementos na modelagem. Para sistemas mecânicos, foco do presente trabalho, os parâmetros passíveis de serem alterados com esta metodologia são os ditos elementos de força, como rigidezes de molas e buchas, amortecimentos, etc.

Deste modo, a matriz K será formada pelos elementos que relacionam as entradas e saídas escolhidas relativas a um dado elemento da modelagem, e por elementos nulos, relativos às entradas e saídas que não se relacionam fisicamente, ou seja, não existe um elemento da modelagem da planta que os contemple.

Seguindo esta linha de raciocínio, para um sistema definido pela matriz dinâmica F , devemos determinar as matrizes G e H , de entradas e saídas, conforme descrito no parágrafo acima, e teremos o seguinte sistema:

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

$$y = Hx$$

E a lei de controle $u = Ky$.

Sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e $y(t) \in \mathbb{R}^r$.

A sequência de etapas presentes nesta metodologia consiste basicamente na designação de autovalores e posterior designação de autovetores. A primeira etapa dará origem a um novo sistema que será utilizado como “planta” na segunda etapa, nesta linha de raciocínio, define-se:

- K_a : Matriz de ganhos de controle resultado da designação de autovalores;
- K_e : Matriz de ganhos de controle resultado da designação de autovetores;
- $K = K_a + K_e$: Matriz de ganhos de controle que será utilizada para a alteração dos parâmetros de interesse do sistema;
- $F_a = F + GK_aH$: Matriz dinâmica do sistema após a designação de polos, ou seja, planta base para a designação de autovetores;

Seguimos com a designação dos autovalores desejados. A escolha dos autovalores a serem designados deve ser feita baseada no regime de funcionamento do sistema, em valores pré-definidos em literatura, na experiência e no julgamento de engenharia.

Para a designação dos pólos escolhidos para serem designados, dependendo da utilização, poderá ser utilizada a designação de pólos por retroação de saídas, simplesmente empregando a equação característica do sistema em malha fechada no equacionamento: $\det[sI - (F + GK_aH)] = 0$.

Poderá ser utilizado também o método descrito na seção 3.6 da revisão teórica, que possibilita, dependendo da metodologia escolhida, a designação de $\min(m, n - r + 1)$ ou $\min(n, m + r - 1)$ autovalores mantendo-se os $\max(m, r) - 1$ autovalores em malha aberta inalterados, que para a metodologia descrita nesta seção, $m = r$ sempre.

De modo que a lei de controle K^*_a pode sempre ser encontrada de maneira que $\Lambda_2 + (T^{-1}G)_2 K^*_a l'(HT)_2$ possua os autovalores desejados.

Sendo que, segundo seção 3.6 da revisão teórica:

- $\Lambda_1 \triangleq \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t)$, $\Lambda_2 \triangleq \text{diag}(\lambda_{t+1}, \dots, \lambda_n)$ são respectivamente os autovalores em malha aberta que pretende-se mantê-los em malha fechada e os autovalores desejados;
- T deve ser escolhida de maneira que $T^{-1}FT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$;
- $HT \triangleq ((HT)_1, (HT)_2)$;
- $T^{-1}G \triangleq \begin{pmatrix} (T^{-1}G)_1 \\ (T^{-1}G)_2 \end{pmatrix}$;
- l' deverá ser encontrado de modo que $l'(HT)_1 = 0$;
- $u = K_a y$, $K_a \triangleq K_a^* l'$.

A determinação da lei de controle conforme equação $\Lambda_2 + (T^{-1}G)_2 K_a^* l'(HT)_2$ não é única, e a escolha da matriz K_a para esta etapa de designação de pólos será feita com base na seguinte linha de raciocínio.

O sistema resultante desta etapa de designação de pólos será definido por uma modificação em alguns parâmetros do sistema original, consequência da pseudo-retroação, equivalente à seguinte matriz:

$$F_a = F + GK_a H$$

É este sistema modificado que será base para a próxima etapa do método, ou seja, designação de autovetores. Portanto, deve-se escolher uma matriz de ganhos de controle K_a resultado da designação de pólos, de modo que se otimize a designação dos autovetores desejados que será feita na próxima etapa.

Seguindo conforme seção 3.4.1.2 da revisão teórica deste trabalho, os autovetores em malha fechada, relativos ao autovalor λ_i , possíveis de serem designados pertencem ao subespaço formado por uma base da qual os vetores são as colunas da seguinte matriz:

$$L_i = (\lambda_i I - F_a)^{-1} G$$

Assim, o algoritmo para a determinação da matriz K_a de designação de pólos desta primeira etapa, deve conter além da designação dos autovalores descrito nesta seção, também a escolha dos subespaços formados pela matriz acima, de

modo que estes subespaços também serão utilizados na próxima etapa de designação de autovetores.

Tais subespaços devem ser escolhidos com base na projeção dos autovetores desejados sobre o subespaço, de maneira que a projeção seja tão próxima do autovetor desejado quanto necessário. Um método para determinar esta projeção pode ser encontrado na seção 3.4.1.2, basicamente equação (37), reescrita abaixo.

Conforme definido na seção 3.4.1.2 da revisão teórica, a seguinte equação (37) determina qual o autovetor v_{i_A} , relativo ao autovalor λ_i , possível de ser designado que mais se aproxima do autovetor desejado v_i^d , ou seja, v_{i_A} é a projeção de v_i^d em L_i^T .

$$v_{i_A} = L_i(L_i^T L_i)^{-1} L_i^T v_i^d \quad (37)$$

Deve-se lembrar que os elementos da matriz K_a (relação entre entradas e saídas) que não possuem equivalência com nenhum parâmetro da modelagem deverão ser iguais a zero, conforme indicado no início desta seção. Assim, isto também deve ser considerado no algoritmo para o cálculo da matriz K_a de ganhos de retroação para esta primeira etapa de designação de pólos.

Também é válido ressaltar que ao invés da escolha de um único arranjo de autovalores desejados, pode-se adotar uma “região saudável” para valores de autovalores desejados que seja contemplado no algoritmo utilizado para a designação dos pólos feita nesta etapa inicial, que resultará em um sistema base para a próxima etapa de designação de autovetores.

Após a designação dos pólos, seguimos com a designação dos autovetores desejados. Começamos por definir que a matriz dinâmica do sistema é dada pela seguinte equação consequência da designação de polos feita anteriormente:

$$F_a = F + GK_aH$$

Seguindo com a designação de autovetores, conforme o teorema 3.3, proposto por Srinathkumar (1978a) e presente na revisão teórica, temos que: “...*max(m, r)* autovetores (ou vetores recíprocos por dualidade) podem ser parcialmente

designados com $\min(m, r)$ entradas em cada vetor arbitrariamente escolhidas utilizando o ganho de retroação de saídas...”

Desta forma, a designação de autovetores deve partir de uma reordenação da sequência dos estados que compõe os autovetores utilizando a metodologia encontrada em Andry Jr., Shapiro e Chung (1983) e apresentada na seção 3.4.1.3 da revisão teórica, de forma que os primeiros $\min(m, r)$ elementos dos autovetores sejam relativos aos que desejamos designar, assim, seja o seguinte autovetor desejado:

$$v_i^d = [v_{i1}, x, x, x, x, v_{ij}, x, x, v_{in}]^T$$

Em que v_{ij} são os elementos especificados e x os não especificados.

Assim, rearranjando os elementos, temos:

$$\{v_i^d\}^{R_i} = \begin{bmatrix} l_i \\ d_i \end{bmatrix}$$

Em que l_i é um vetor com os elementos especificados e d_i um vetor com os elementos não especificados de v_i^d .

As linhas de $(\lambda_i I - F_a)^{-1} G$ também foram reordenadas, desta forma:

$$\langle (\lambda_i I - F_a)^{-1} G \rangle^{R_i} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_i \\ D_i \end{bmatrix} \quad (38)$$

Portanto, a projeção do autovetor desejado no subespaço formado por $L_i = (\lambda_i I - F_a)^{-1} G$, que define o autovetor possível de ser designado mais próximo do desejável, é dado por:

$$z_i = (\tilde{L}_i^T \tilde{L}_i)^{-1} \tilde{L}_i^T l_i \quad (39)$$

$$v_{i_A} = L_i (\tilde{L}_i^T \tilde{L}_i)^{-1} \tilde{L}_i^T l_i \quad (40)$$

Partimos agora para a determinação da matriz de ganhos de controle K_e seguindo conforme metodologia apresentada nas seções 3.4.1.4 e 3.5, que

expõe como computar a matriz K_e de modo que uma saída em retroação se relacione com somente uma entrada através de um ganho contido na matriz K_e .

Para tanto, conforme seção 3.4.1.4, será necessário criar uma transformação de coordenadas T , que dê à matriz G uma forma particular e necessária para a determinação da matriz K_e conforme descrito acima e também para a imposição de elementos nulos nela, assim como descrito na seção 3.5.

A matriz T deverá ser de modo que a matriz G seja da seguinte forma:

$$\tilde{G} = T^{-1}G = \begin{bmatrix} l_m \\ \text{----} \\ 0 \end{bmatrix}$$

E como consequência, as matrizes G e H e os autovetores v_{i_A} serão:

$$\tilde{F}_a = T^{-1}F_a T$$

$$\tilde{H} = H T$$

$$\tilde{v}_i = T^{-1}v_i$$

Desta forma, depois de feita a transformação, segue-se com o cálculo da matriz de ganhos de controle K_e , lembrando que as matrizes e vetores das equações abaixo já estão transformados para o novo sistema de coordenadas, e o $(\cdot)$ foi retirado da representação das variáveis por comodidade.

Para a determinação da matriz K_e é adotada a metodologia desenvolvida na seção 3.5, ou seja, com a imposição de elementos nulos na matriz relativos às entradas e saídas que não equivalem a nenhum parâmetro que se pretende alterar de modo a designar as estruturas próprias desejadas. Para tanto, define-se os seguintes parâmetros:

$$\Omega \triangleq HV$$

$$\psi \triangleq Z - F_{a1}V$$

Onde, $F_{a1} = F_{a11} + F_{a12}$, que por sua vez F_{a11} e F_{a12} é encontrado na equação (49), seção 3.4.1.4, resultado da transformação de coordenadas proposital feita. E para o caso em que V e Z serem reais, temos:

$$V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_r], \ V_{(n \times r)} \quad (54)$$

$$Z = [\lambda_1 z_1 \ \lambda_2 z_2 \ \dots \ \lambda_n z_n], \ Z_{(m \times r)} \quad (55)$$

E para o caso de V e Z serem complexos, sejam os seguintes elementos complexos que compõe V e Z :

$$v_1 = v_1^R + jv_1^I \quad (57)$$

$$\lambda_1 z_1 = \tilde{z}_1^R + j\tilde{z}_1^I \quad (58)$$

Em que v^R e v^I denotam as partes real e imaginária do vetor v , respectivamente.

Assim, de acordo com o que foi apresentado e provado na revisão teórica, temos:

$$\check{V} = (v_1^R \ v_1^I \ \dots \ v_r) \quad (62)$$

$$\check{Z} = (\tilde{z}_1^R \ \tilde{z}_1^I \ \dots \ \lambda_r z_1) \quad (63)$$

Desta forma, as matrizes $\check{V}$ e $\check{Z}$ são reais, e segue-se da mesma forma que nas equações (54) e (55).

Se k_i denota a i ésima linha de K ($m \times r$), e ψ_i a i ésima linha de ψ , de forma que:

$$k_i = [k_{i1} \ k_{i2} \ \dots \ k_{ir}]$$

$$\psi_i = [\psi_{i1} \ \psi_{i2} \ \dots \ \psi_{ir}]$$

Partindo da equação (68), seção 3.5, chega-se à seguinte equação, em que cada vetor k_i está ligado a Ω^T separadamente:

$$[\Omega^T] \begin{bmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ k_{ij} \\ k_{ir} \end{bmatrix} = [\psi_i^T]$$

Deste modo, se estivermos interessados em desconsiderar a retroação equivalente a k_{ij} da matriz K_e , ou seja, k_{ij} , será igual a zero, devemos excluir k_{ij} do vetor k_i^T e a coluna j da matriz Ω^T . Assim, trabalhamos com a seguinte equação alterada:

$$\tilde{\Omega}^T \tilde{k}_i^T = \psi_i^T$$

Em que $\tilde{\Omega}^T$ é a matriz Ω^T excluída a coluna j e $\tilde{k}_i^T$ é o vetor k_i excluído o elemento j .

Os elementos que se pretende anular são exatamente os relativos às entradas e saídas que não equivalem a nenhum parâmetro que se pretende alterar.

Pelo fato do sistema ter se tornado indeterminado, possui mais equações que incógnitas, têm-se de utilizar a pseudo-inversa para a solução, assim:

$$\tilde{k}_i^T = \text{pinv}(\tilde{\Omega}^T) \psi_i^T \quad (69)$$

Ou,

$$\tilde{k}_i = \psi_i \text{pinv}(\tilde{\Omega}) \quad (70)$$

Se mais de um elemento da matriz K_e precisa ser anulado, então, a matriz Ω^T e os vetores k_i devem ser modificados de maneira apropriada.

Uma vez que restrições são impostas à matriz de ganhos K_e , a designação exata dos autovalores desejados pode não ser possível, portanto, cabe ao projetista estipular a exatidão necessária de acordo com as características do projeto. (Andry Jr.; Shapiro; Chung, 1983) .

Finalmente, de posse das matrizes K_a e K_e conseguimos determinar a matriz $K = K_a + K_e$ que contém os valores que devemos somar ou subtrair dos parâmetros dos elementos que pretendemos alterar de modo a conseguirmos a designação da estrutura própria desejada por pseudo-retroação de saídas.

A metodologia descrita nesta seção será utilizada na próxima para um estudo de caso.

5. Estudo de caso: Coxinização de motores de veículos de passeio

O presente estudo consiste basicamente na modificação dos parâmetros dos elementos de força coxins de motor e câmbio, utilizando um algoritmo para a designação de estruturas próprias baseado na metodologia descrita na seção anterior. Esta modificação visa a adequação das estruturas próprias do sistema de modo a reduzir a parcela de massa suspensa nos autoveículos que contenham grande participação dos graus de liberdade de motor e câmbio. Reduzindo assim, a influência do subsistema motor/câmbio na dinâmica vertical do veículo, melhorando o conforto.

Sob o ponto de vista do consumidor leigo, a qualidade do conforto de um veículo é bastante deteriorada quando há uma grande influência dos modos de predominância de motor/câmbio e massa não suspensa sobre a resposta da massa suspensa dentro da dinâmica vertical. Porque mesmo sem ter o conhecimento da origem da vibração, a sua percepção é de desconforto.

Dentro deste problema, no que tange à influência dos modos com grande participação dos graus de liberdade de motor/câmbio na resposta vertical da massa suspensa, o chamado “*shake*” de motor/câmbio, temos duas subdivisões, o chamado “*shake*” de baixa e “*shake*” de alta. O primeiro normalmente ocorre em frequências entre 7Hz e 11Hz, e o segundo em frequências entre 12Hz e 25Hz.

A designação da estrutura própria desejada para a adequação dos níveis de conforto em frequências próximas às de eixo e motor/câmbio, frequências citadas no parágrafo acima, será conseguida com a utilização da designação com retroação parcial das saídas e restrições na matriz de ganhos de controle, conforme metodologia desenvolvida na seção anterior.

A estrutura própria buscada será algo que minimize a parcela de velocidade vertical de chassi nos autoveículos com maior participação na resposta inerente à dinâmica vertical, nas faixas de frequências citadas acima. Mais detalhes na seção 5.3.2.

O trabalho de designação com retroação de saídas é desenvolvido com ajuda de dois modelos matemáticos do veículo, um modelo de 7 graus de liberdade, e outro de 8 graus de liberdade com a inclusão do coxim hidráulico. A complexidade

dos modelos, bem como os graus de liberdade que os compõe, foi determinada de maneira a representar com um bom grau de confiabilidade o fenômeno de “shake” de motor/câmbio dentro da dinâmica linear e das limitações inerentes. Os parâmetros dos modelos são extraídos através de um filtro de Kalman após medições da resposta do sistema a uma entrada impulso.

O resultado será a redefinição de parâmetros de elementos de força do sistema motor/câmbio, tais como rigidezes e amortecimentos de coxins.

5.1. Modelagem analítica do veículo a 7 graus de liberdade

Uma boa modelagem se inicia com a definição precisa das hipóteses e simplificações que serão utilizadas, de maneira que nosso modelo seja suficientemente robusto e que represente nosso sistema real com um grau de complexidade proporcional à sua utilização.

Assim, definimos as seguintes Hipóteses, Felício (2007):

- As massas são rígidas, concentradas e possuem inércias constantes;
- As molas são puras e lineares. Não têm perda de energia e não possuem massa. Os seus respectivos coeficientes são constantes;
- Os amortecedores são puros e lineares. Não tem efeito de mola e não possuem massa. Os seus respectivos coeficientes são constantes;
- Quando a massa puder transladar, seu movimento é em uma só direção;
- Quando a massa puder girar, a sua rotação é em um único eixo;
- Superfícies perfeitamente lisas.

Em um primeiro momento iremos considerar as rigidezes dos coxins e amortecimentos constantes com o deslocamento e com a velocidade. Bem como as constantes de amortecimento dos amortecedores, assim como definido nas hipóteses acima.

Os sete graus de liberdade utilizados são:

- θ_1 : Arfagem de chassi;
- z_1 : Vertical de chassi;

- z_{2d} : Massa não suspensa dianteira direita;
- z_{2e} : Massa não suspensa dianteira esquerda;
- z_4 : Massa não suspensa traseira;
- ϕ_3 : Rolagem de motor e cambio;
- z_3 : Vertical de motor e cambio.

Os 7 graus de liberdade estão representados na figura 5.1.

Figura 5.1. Modelo de 7 graus de liberdade. Fonte: Elaborada pelo autor

Corpo 1:

O diagrama de corpo livre para o corpo 1 está representado na figura 5.2, abaixo:

Figura 5.2. Diagrama de corpo livre do corpo 1. Fonte: Elaborada pelo autor

Das relações de molas lineares e amortecedores lineares, temos:

$$F_1 = -k_1(z_1 + \theta_1 d_1 - z_4) - C_1(\dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_1 - \dot{z}_4) \quad (73a)$$

$$F_{2d} = -k_{2d}(z_1 - \theta_1 d_2 - z_{2d}) - C_{2d}(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_2 - \dot{z}_{2d}) \quad (73b)$$

$$F_{2e} = -k_{2e}(z_1 - \theta_1 d_2 - z_{2e}) - C_{2e}(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_2 - \dot{z}_{2e}) \quad (73c)$$

$$F_3 = -k_3(z_1 - \theta_1 d_{3d} - z_3 - \phi_3 d_4) - C_3(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_{3d} - \dot{z}_3 - \dot{\phi}_3 d_4) \quad (73d)$$

$$F_4 = -k_4(z_1 - \theta_1 d_{3e} - z_3 + \phi_3 d_5) - C_4(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_{3e} - \dot{z}_3 + \dot{\phi}_3 d_5) \quad (73e)$$

Para o corpo 1 temos a aplicação da lei de Newton para o deslocamento vertical no centro de massa e lei de Euler para a rotação de arfagem de chassi, Assim:

Lei de Newton:

$$F_1 + F_{2d} + F_{2e} + F_3 + F_4 = m_1 \ddot{z}_1 \quad (74)$$

Lei de Euler:

$$d_1 F_1 - d_2 (F_{2d} + F_{2e}) - d_{3d} F_3 - d_{3e} F_4 = I_1 \ddot{\theta}_1 \quad (75)$$

Assim, da equação (74), as equações de movimento são:

$$\begin{aligned} & -k_1(z_1 + \theta_1 d_1 - z_4) - C_1(\dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_1 - \dot{z}_4) - \\ & -k_{2d}(z_1 - \theta_1 d_2 - z_{2d}) - C_{2d}(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_2 - \dot{z}_{2d}) - \\ & -k_{2e}(z_1 - \theta_1 d_2 - z_{2e}) - C_{2e}(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_2 - \dot{z}_{2e}) - \\ & -k_3(z_1 - \theta_1 d_{3d} - z_3 - \phi_3 d_4) - C_3(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_{3d} - \dot{z}_3 - \dot{\phi}_3 d_4) - \\ & -k_4(z_1 - \theta_1 d_{3e} - z_3 + \phi_3 d_5) - C_4(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_{3e} - \dot{z}_3 + \dot{\phi}_3 d_5) = m_1 \ddot{z}_1 \end{aligned} \quad (76)$$

E da equação (75), as equações de movimento são:

$$\begin{aligned} & -d_1[k_1(z_1 + \theta_1 d_1 - z_4) + C_1(\dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_1 - \dot{z}_4)] + \\ & d_2[k_{2d}(z_1 - \theta_1 d_2 - z_{2d}) + C_{2d}(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_2 - \dot{z}_{2d}) + k_{2e}(z_1 - \theta_1 d_2 - z_{2e}) + \\ & + C_{2e}(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_2 - \dot{z}_{2e})] + \\ & + d_{3d}[k_3(z_1 - \theta_1 d_{3d} - z_3 - \phi_3 d_4) + C_3(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_{3d} - \dot{z}_3 - \dot{\phi}_3 d_4)] + \\ & + d_{3e}[k_4(z_1 - \theta_1 d_{3e} - z_3 + \phi_3 d_5) + C_4(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_{3e} - \dot{z}_3 + \dot{\phi}_3 d_5)] = I_1 \ddot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (77)$$

Corpo 2 direito e esquerdo:

O diagrama de corpo livre para os corpos 2, direito e esquerdo, está esquematizado na figura 5.3, abaixo:

Figura 5.3. Diagrama de corpo livre dos corpos 2. Fonte: Elaborada pelo autor

Desta forma:

$$F_{1d} = -k_p z_{2d} \quad (78a)$$

$$F_{1e} = -k_p z_{2e} \quad (78b)$$

$$F_{2d} = -k_{2d}(z_{2d} - z_1 + \theta_1 d_2) - C_{2d}(\dot{z}_{2d} - \dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_2) \quad (78c)$$

$$F_{2e} = -k_{2e}(z_{2e} - z_1 + \theta_1 d_2) - C_{2e}(\dot{z}_{2e} - \dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_2) \quad (78d)$$

Para os corpos 2, esquerdo e direito, temos a aplicação da lei de Newton para o movimento vertical das massas não suspensas, assim:

$$F_{1d} + F_{2d} = m_{2d} \ddot{z}_{2d} \quad (79)$$

$$F_{1e} + F_{2e} = m_{2e} \ddot{z}_{2e} \quad (80)$$

Da equação (79), as equações de movimento são:

$$-k_p z_{2d} - k_{2d}(z_{2d} - z_1 + \theta_1 d_2) - C_{2d}(\dot{z}_{2d} - \dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_2) = m_{2d} \ddot{z}_{2d} \quad (81)$$

E da equação (80), as equações de movimento são:

$$-k_p z_{2e} - k_{2e}(z_{2e} - z_1 + \theta_1 d_2) - C_{2e}(\dot{z}_{2e} - \dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_2) = m_{2e} \ddot{z}_{2e} \quad (82)$$

Corpo 3:

O diagrama de corpo livre para o corpos 3 é:

Figura 5.4. Diagrama de corpo livre do corpo 3. Fonte: Elaborada pelo autor

A partir deste diagrama de corpo livre, figura 5.4, tiramos as seguintes relações de molas e amortecedores lineares:

$$F_1 = -k_3(z_3 + \phi_3 d_4 - z_1 + \theta_1 d_{3d}) - C_3(\dot{z}_3 + \dot{\phi}_3 d_4 - \dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_{3d}) \quad (83a)$$

$$F_2 = -k_4(z_3 - \phi_3 d_5 - z_1 + \theta_1 d_{3e}) - C_4(\dot{z}_3 - \dot{\phi}_3 d_5 - \dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_{3e}) \quad (83b)$$

Para o corpo 3 temos a aplicação da lei de Newton para o deslocamento vertical e lei de Euler para a rotação rolagem do motor/cambio, Assim:

Lei de Newton:

$$F_1 + F_2 = m_3 \ddot{z}_3 \quad (84)$$

Lei de Euler:

$$d_4 F_1 - d_5 F_2 = I_3 \ddot{\phi}_3 \quad (85)$$

Desta forma, da equação (84), as equações de movimento são:

$$\begin{aligned}
& -k_3(z_3 + \phi_3 d_4 - z_1 + \theta_1 d_{3d}) - C_3(\dot{z}_3 + \dot{\phi}_3 d_4 - \dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_{3d}) - \\
& -k_4(z_3 - \phi_3 d_5 - z_1 + \theta_1 d_{3e}) - C_4(\dot{z}_3 - \dot{\phi}_3 d_5 - \dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_{3e}) = m_3 \ddot{z}_3 \quad (86)
\end{aligned}$$

E da equação (85), as equações de movimento são:

$$\begin{aligned}
& -d_4[k_3(z_3 + \phi_3 d_4 - z_1 + \theta_1 d_{3d}) + C_3(\dot{z}_3 + \dot{\phi}_3 d_4 - \dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_{3d})] + \\
& + d_5[k_4(z_3 - \phi_3 d_5 - z_1 + \theta_1 d_{3e}) + C_4(\dot{z}_3 - \dot{\phi}_3 d_5 - \dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_{3e})] = I_3 \ddot{z}_3 \quad (87)
\end{aligned}$$

Corpo 4:

Figura 5.5. Diagrama de corpo livre do corpo 4. Fonte: Elaborada pelo autor

Do diagrama de corpo livre da figura 5.5, temos:

$$F_1 = -2k_p z_4 \quad (88a)$$

$$F_2 = -k_1(z_4 - z_1 - \theta_1 d_1) - C_1(\dot{z}_4 - \dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_1) \quad (88b)$$

Ao aplicar a lei de Newton devido ao movimento da massa suspensa traseira, temos:

$$F_1 + F_2 = m_4 \ddot{z}_4 \quad (89)$$

Assim, da equação (89), a equação de movimento é:

$$-2k_p z_4 - k_1(z_4 - z_1 - \theta_1 d_1) - C_1(\dot{z}_4 - \dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_1) = m_4 \ddot{z}_4 \quad (90)$$

Neste ponto da modelagem, possuímos as 7 equações de movimento de nosso sistema: (76), (77), (81), (82), (86), (87) e (90).

Seguimos a construção de nosso modelo matemático apresentando ele na forma de equações de estados. Reagrupamos os elementos das equações de movimento de maneira a formarmos a seguinte equação matricial: $\dot{x} = Fx$, em que x é o vetor de estados:

$$x = [z_1 \ v_1 \ \theta_1 \ \omega_1 \ z_3 \ v_3 \ z_{2d} \ v_{2d} \ z_{2e} \ v_{2e} \ \phi_3 \ \omega_3 \ z_4 \ v_4]^T$$

A Matriz F_c é apresentada no apêndice 1.

5.2. Modelagem analítica do veículo a 8 graus de liberdade (inclusão do coxim hidráulico)

Com a substituição do coxim convencional do lado direito (lado do motor) pelo hidráulico, o modelo matemático receberá algumas alterações.

O coxim hidráulico é modelado conforme figura 5.6.

Figura 5.6. Modelo de coxim hidráulico. Fonte: Elaborada pelo autor

Onde k_3 e C_3 são a rigidez e amortecimento relativos à parte “convencional” do coxim, ou seja, a parte de borracha. A mola e o amortecedor que estão em série, k_{ve} e C_{ve} , representam o efeito visco-elástico do elemento (modelo de Maxwell). O restante, como a massa m_h , são para agregar a dependência com a aceleração.

Assim, as equações de movimento escritas na seção anterior serão alteradas de maneira a acrescentar os novos elementos apresentados no parágrafo anterior, e será escrita uma nova equação de movimento para o novo grau de liberdade relativo à massa m_h .

As equações que serão alteradas são aquelas relativas ao movimento vertical e arfagem de chassi e movimento vertical e rolagem do conjunto motor/câmbio. Ou seja, as equações (76), (77), (86) e (87).

No caso das equações (76) e (77), formadas a partir do diagrama de corpo livre do corpo 1, figura 5.2, temos a alteração da força F_3 , equação (73d), que com a inclusão dos novos elementos, resulta em:

$$F_3 = -k_3(z_1 - \theta_1 d_{3d} - z_3 - \phi_3 d_4) - C_3(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_{3d} - \dot{z}_3 - \dot{\phi}_3 d_4) - k_{h2}(z_1 - \theta_1 d_{3d} - z_h) - C_{h2}(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_{3d} - \dot{z}_h) - C_{ve}(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_{3d} - \dot{z}_o) \quad (91)$$

Assim, as equações (76) e (77) se tornam:

$$\begin{aligned} & -k_1(z_1 + \theta_1 d_1 - z_4) - C_1(\dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_1 - \dot{z}_4) - \\ & -k_{2d}(z_1 - \theta_1 d_2 - z_{2d}) - C_{2d}(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_2 - \dot{z}_{2d}) - \\ & -k_{2e}(z_1 - \theta_1 d_2 - z_{2e}) - C_{2e}(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_2 - \dot{z}_{2e}) - \\ & -k_3(z_1 - \theta_1 d_{3d} - z_3 - \phi_3 d_4) - C_3(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_{3d} - \dot{z}_3 - \dot{\phi}_3 d_4) - \\ & -k_{h2}(z_1 - \theta_1 d_{3d} - z_h) - C_{h2}(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_{3d} - \dot{z}_h) - C_{ve}(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_{3d} - \dot{z}_o) \\ & -k_4(z_1 - \theta_1 d_{3e} - z_3 + \phi_3 d_5) - C_4(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_{3e} - \dot{z}_3 - \dot{\phi}_3 d_5) = m_1 \ddot{z}_1 \quad (92) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -d_1[k_1(z_1 + \theta_1 d_1 - z_4) + C_1(\dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_1 - \dot{z}_4)] + \\ & d_2[k_{2d}(z_1 - \theta_1 d_2 - z_{2d}) + C_{2d}(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_2 - \dot{z}_{2d}) + k_{2e}(z_1 - \theta_1 d_2 - z_{2e}) \\ & + C_{2e}(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_2 - \dot{z}_{2e})] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +d_{3d}[k_3(z_1 - \theta_1 d_{3d} - z_3 - \phi_3 d_4) + C_3(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_{3d} - \dot{z}_3 - \dot{\phi}_3 d_4) + \\
& +k_{h2}(z_1 - \theta_1 d_{3d} - z_h) + C_{h2}(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_{3d} - \dot{z}_h) + C_{ve}(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_{3d} - \dot{z}_o)] \\
& +d_{3e}[k_4(z_1 - \theta_1 d_{3e} - z_3 + \phi_3 d_5) + C_4(\dot{z}_1 - \dot{\theta}_1 d_{3e} - \dot{z}_3 - \dot{\phi}_3 d_5)] = I_1 \ddot{\theta}_1 \quad (93)
\end{aligned}$$

E para o caso das equações (86) e (87), formadas a partir do diagrama de corpo livre do corpo 3, figura 5.4, a força F_1 , após a inclusão dos novos elementos, se torna:

$$\begin{aligned}
F_1 = & -k_3(z_3 + \phi_3 d_4 - z_1 + \theta_1 d_{3d}) - C_3(\dot{z}_3 + \dot{\phi}_3 d_4 - \dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_{3d}) \\
& -k_{h1}(z_3 + \phi_3 d_4 - z_h) - C_{h1}(\dot{z}_3 + \dot{\phi}_3 d_4 - \dot{z}_h) - k_{ve}(z_3 + \phi_3 d_4 - z_0) \quad (94)
\end{aligned}$$

Desta forma, as equações (86) e (87) se tornam:

$$\begin{aligned}
& -k_3(z_3 + \phi_3 d_4 - z_1 + \theta_1 d_{3d}) - C_3(\dot{z}_3 + \dot{\phi}_3 d_4 - \dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_{3d}) - \\
& -k_{h1}(z_3 + \phi_3 d_4 - z_h) - C_{h1}(\dot{z}_3 + \dot{\phi}_3 d_4 - \dot{z}_h) - \\
& -k_4(z_3 - \phi_3 d_5 - z_1 + \theta_1 d_{3e}) - C_4(\dot{z}_3 - \dot{\phi}_3 d_5 - \dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_{3e}) \\
& -k_{ve}(z_3 + \phi_3 d_4 - z_0) = m_3 \ddot{z}_3 \quad (95)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -d_4[k_3(z_3 + \phi_3 d_4 - z_1 + \theta_1 d_{3d}) + C_3(\dot{z}_3 + \dot{\phi}_3 d_4 - \dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_{3d}) + \\
& +k_{h1}(z_3 + \phi_3 d_4 - z_h) + C_{h1}(\dot{z}_3 + \dot{\phi}_3 d_4 - \dot{z}_h) + k_{ve}(z_3 + \phi_3 d_4 - z_0)] + \\
& +d_5[k_4(z_3 - \phi_3 d_5 - z_1 + \theta_1 d_{3e}) + C_4(\dot{z}_3 - \dot{\phi}_3 d_5 - \dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_{3e})] = I_3 \ddot{\phi}_3 \quad (96)
\end{aligned}$$

Assim, a equação de movimento para o novo grau de liberdade é:

$$\begin{aligned}
& -k_{h1}(z_h - z_3 - \phi_3 d_4) - C_{h1}(\dot{z}_h - \dot{z}_3 - \dot{\phi}_3 d_4) - k_{h2}(z_h - z_1 + \theta_1 d_{3d}) - \\
& -C_{h2}(\dot{z}_h - \dot{z}_1 + \dot{\theta}_1 d_{3d}) = m_h \ddot{z}_h \quad (97)
\end{aligned}$$

E a equação do ponto que no modelo representa a união entre o elemento viscoso e o elástico da parcela visco-elástica do coxim hidráulico é:

$$-k_{ve}(z_0 - z_3 - \phi_3 d_4) - C_{ve}(\dot{\theta}_1 d_{3d} + \dot{z}_0 - \dot{z}_1) = 0 \quad (98)$$

Assim, as 9 equações de movimento que compõe o sistema com a inclusão do coxim hidráulico são: (81), (82), (90), (92), (93), (95), (96), (97) e (98).

E o vetor de estados com a inclusão do coxim hidráulico é:

$$x = [z_1 \ v_1 \ \theta_1 \ \omega_1 \ z_3 \ v_3 \ z_{2d} \ v_{2d} \ z_{2e} \ v_{2e} \ \phi_3 \ \omega_3 \ z_4 \ v_4 \ z_h \ v_h \ z_0]^T$$

A partir destas equações chegamos à matriz dinâmica do sistema com o coxim hidráulico incluso (F_h), que se encontra no apêndice 1.

5.3. Definição das entradas e saídas do sistema de controle

Para a designação da estrutura própria por retroação de saídas para estes modos serão definidas:

Saídas: Velocidades e posições relativas dos pontos de ancoragem dos elementos dos coxins que serão redimensionados, como por exemplo, dos elastômeros, dos elementos internos do coxim hidráulico (ver figuras 5.1 e 5.6);

Entradas: Forças que tais elementos aplicam nos corpos em que eles estão fixados.

Para entendermos melhor quem são as entradas para a retroação de controle, vamos pensar que as entradas são forças aplicadas por atuadores paralelos e ancorados nos corpos nos mesmos pontos que os elementos os quais as constantes serão redimensionadas. Nas figuras 5.7 e 5.8 estão representadas as entradas.

Figura 5.7. Representação das entradas no sistema com coxins convencionais f_1 e f_2 .

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 5.8. Representação do coxim direito hidráulico com entradas f_2 , f_3 e f_4 .

Fonte: Elaborada pelo autor

Seguindo este raciocínio, para o caso em que são empregados apenas coxins convencionais, modelagem descrita na seção 5.1, o vetor de saídas deve ser:

$$y_c = [\Delta_z^e, \Delta_v^e, \Delta_z^d, \Delta_v^d]^T \quad (99)$$

$$\Delta_z^e = z_3 - d_5 \phi_3 - z_1 + d_{3e} \theta_1$$

$$\Delta_v^e = v_3 - d_5\omega_3 - v_1 + d_{3e}\omega_1$$

$$\Delta_z^d = z_3 + d_4\phi_3 - z_1 + d_{3d}\theta_1$$

$$\Delta_v^d = v_3 + d_4\omega_3 - v_1 + d_{3d}\omega_1$$

Em que Δ_z^e, Δ_v^e são respectivamente a posição e velocidade relativa dos pontos de ancoragem do coxim esquerdo (coxim do câmbio) e Δ_z^d, Δ_v^d o mesmo para o coxim direito.

Desta forma a matriz de saídas para o uso exclusivo de coxins convencionais H_c é:

$$H_c = \begin{bmatrix} -1 & 0 & d_{3e} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_{3e} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & d_{3d} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_{3d} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Relembrando que o vetor de estados para o caso com coxins convencionais é:

$$x = [z_1 \ v_1 \ \theta_1 \ \omega_1 \ z_3 \ v_3 \ z_{2d} \ v_{2d} \ z_{2e} \ v_{2e} \ \phi_3 \ \omega_3 \ z_4 \ v_4]^T$$

E para o caso em que se emprega coxim hidráulico, algumas alterações devem ser feitas. Com a adição de mais uma inércia, m_h , ligada às extremidades do coxim hidráulico por meio de mais dois elementos, conforme figura 5.6, o vetor de saídas se torna:

$$y_h = [\Delta_z^e, \Delta_v^e, \Delta_z^{h1}, \Delta_v^{h1}, \Delta_z^{h2}, \Delta_v^{h2}]^T \quad (100)$$

$$\Delta_z^{h1} = z_3 + d_4\phi_3 - z_h$$

$$\Delta_v^{h1} = v_3 + d_4\omega_3 - v_h$$

$$\Delta_z^{h2} = z_h - z_1 + d_{3d}\theta_1$$

$$\Delta_v^{h2} = v_h - v_1 + d_{3d}\omega_1$$

Em que o vetor de entradas é:

$$u_h = [f_1, f_3, f_4]^T \quad (102)$$

5.4. Designação de autovalores e definição dos subespaços

O algoritmo que será utilizado para a designação de autovalores, que serão definidos por uma “região saudável”, também será utilizado para a determinação do subespaço formado pelas colunas de $(\lambda_i I - F)^{-1}G$, o qual, conforme mostrado anteriormente na seção 4, contém os autovetores relativos a λ_i em malha fechada possíveis de serem designados. Este subespaço é diretamente influenciado pelo autovalor associado, pela matriz de entradas, que define também a dimensão do subespaço, e pela matriz dinâmica do sistema, F . Esta última por sua vez, entre outros parâmetros, é formada pelos coeficientes que iremos redefinir a fim de conseguirmos a designação desejada da estrutura própria do sistema, tais como: $k_3, c_3, k_4, c_4, k_{h1}, c_{h1}, k_{h2}, c_{h2}$ e m_h .

Este último parâmetro não será redimensionado na designação por retroação de saídas, próxima seção, por não representar fisicamente uma constante entre uma entrada e uma saída. E pelo fato de nosso sistema somente possuir 3 entradas independentes, não será possível também, na próxima seção de designação por retroação de saídas, trabalhar com os parâmetros k_3, c_3 . No entanto, tanto k_3, c_3 quanto m_h serão utilizados nesta seção para a otimização do subespaço.

Portanto, os valores iniciais dos parâmetros que iremos redefinir são de grande importância para a definição do subespaço ao qual os autovetores relativos a λ_i possíveis de serem designados pertencem e conseqüentemente importantes para que o subespaço proporcione uma boa designação. Basta imaginarmos a pior situação, em que os valores iniciais dos parâmetros sejam de tal forma que o autovetor desejado seja normal ao subespaço.

A otimização inicial desses parâmetros é feita de acordo com a metodologia descrita na seção 4, que é designação dos pólos desejados em conjunto com o que

buscamos em relação aos autovetores, ou seja, a definição do subespaço definido por (32).

Autovetor desejado para o problema apresentado é qualquer autovetor em que a razão entre o elemento relativo ao estado velocidade vertical de chassi (x_i) e o elemento relativo ao da velocidade da massa não suspensa dianteira (x_j) seja a menor possível, assim, para o primeiro caso, em que somente são empregados coxins convencionais:

$$v_i = [-x_i \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad x_j \quad - \quad - \quad - \quad -]^T, \quad x \in \mathbb{C} | x \neq 0$$

Analogamente para o segundo caso, em que é empregado um coxim hidráulico em substituição ao convencional direito, temos:

$$v_i = [-x_i \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad x_j \quad - \quad - \quad - \quad -]^T, \quad x \in \mathbb{C} | x \neq 0$$

Em que $(-)$ representa os outros elementos do autovetor desejado os quais são irrelevantes, em se tratando de minimização da velocidade vertical de chassi.

Estes mesmos autovetores resultados da otimização descrita nesta seção serão utilizados na seção seguinte.

5.5. Designação da estrutura própria por retroação de saídas restritas

A designação por retroação de saídas restritas, ou seja, quando a entrada força relativa a cada elemento é resultado da retroação exclusiva da posição e velocidade do mesmo elemento, temos que as constantes encontradas na matriz de ganhos de controle K são os valores que se devem somar ou subtrair (dependendo do sinal) das constantes de mola e amortecimento dos elementos que estão sendo redimensionadas.

Conforme teorema 3.3 apresentado na seção 3.5, conseguimos designar $\text{Max}(m,r)$ autovetores, ou seja, dois pares conjugados para o primeiro caso e três pares conjugados para o caso onde é empregado coxim hidráulico.

Neste ponto, já temos os melhores autovetores designáveis (pertencentes ao subespaço), segundo o critério de otimização descrito na seção anterior. O próximo

passo é a obtenção da matriz de ganhos de controle que para as entradas e saídas escolhidas, nos levam às melhores estruturas próprias designáveis.

Assim, seguindo a teoria descrita na seção 3.5, para o caso em que somente são empregados coxins convencionais, a matriz de ganhos de retroação é:

$$K_c = \begin{bmatrix} \Delta k_4 & \Delta c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta k_3 & \Delta c_3 \end{bmatrix} \quad (103)$$

Lembrando que o vetor de saídas é:

$$y_c = [\Delta_z^e, \Delta_v^e, \Delta_z^d, \Delta_v^d]^T$$

E o vetor de entradas é:

$$u_c = [f_1, f_2]^T$$

E para o caso onde o coxim hidráulico é empregado, a matriz de ganhos de retroação de controle é:

$$K_h = \begin{bmatrix} \Delta k_4 & \Delta c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta k_{h1} & \Delta c_{h1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta k_{h2} & \Delta c_{h2} \end{bmatrix} \quad (104)$$

Lembrando que o vetor de saídas é:

$$y_h = [\Delta_z^e, \Delta_v^e, \Delta_z^{h1}, \Delta_v^{h1}, \Delta_z^{h2}, \Delta_v^{h2}]^T$$

E o vetor de entradas é:

$$u_h = [f_1, f_3, f_4]^T$$

Na figura 5.9 mostra um esquema da instrumentação com as entradas e saídas no sistema para a identificação de parâmetros. Os dados como sinais das saídas e a entrada foram utilizados em uma rotina no *software* MATLAB. O resultado é um modelo de 7 graus de liberdade, como modelado na seção anterior.

A entrada escolhida para a identificação dos parâmetros foi um simples impulso nas massas não suspensas. Porque sendo os amortecimentos dos elementos amortecedores os parâmetros com maior não linearidade no sistema representado pela figura 5.9, e a variação do amortecimento com a frequência e amplitude dos eventos induzem pouca variação de fase nos modos de interesse para o presente estudo.

A rotina em MATLAB utilizada para a identificação dos parâmetros, com a aplicação de um filtro de Kalman encontra-se no apêndice 2

Os dados do veículo, figura 5.9, resultado da utilização do filtro de Kalman, encontram-se no apêndice 3.

5.6.2. Resposta do veículo a entradas específicas e descrição do problema

Para o estudo da influência dos modos de motor e câmbio na resposta vertical do chassi a entradas oriundas da pista, será criado um sinal de entrada com presença significativa de eventos nas faixas de frequência inerentes às estruturas próprias que pretendemos analisar, assim como ocorre com o veículo físico ao trafegar por vias com estas características. O sinal será criado de acordo com metodologia descrita em Rill (2011). Segundo o autor um perfil randômico pode ser criado por or meio da superposição de senos.

O sinal de pista criado possui as seguintes características: Frequências espaciais de 0.904rad/m a 6.786rad/m, que para um veículo trafegando a uma velocidade 100km/h, temos frequências entre 4Hz a 30Hz. PSD da ordem de $30 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/(\text{rad/m})$, que implica em uma pista de severidade média, e *waviness* igual a 2. Na figura 5.10 abaixo está representado o sinal de pista criado.

Figura 5.10. Perfil da pista. Fonte: Elaborada pelo autor

Este sinal foi utilizado como entrada para o modelo identificado anteriormente e reproduzido em ambiente multicorpos (*MSC.ADAMS/VIEW*), assim pode-se quantificar a aceleração na coordenada equivalente ao trilho do banco do motorista,

figura 5.11, além de identificar quais modos são predominantes na resposta ao analisar a PSD do sinal da aceleração no trilho do banco do motorista, figura 5.12.

Figura 5.11. Aceleração no trilho do banco do motorista. Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 5.12. PSD da aceleração na posição do banco do motorista para o sistema inicial. Fonte: Elaborada pelo autor

Da mesma forma, a participação modal pode ser constatada pela relação de amplitudes do diagrama de bode do sistema com entrada na massa não suspensa e saída velocidade no trilho do banco do motorista, bode encontrado através do ambiente *Matlab*, figura 5.13.

Figura 5.13. Diagrama de bode para entrada força na massa não suspensa (F_{fw}) e saída velocidade vertical no banco do motorista (V_{st}). Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 5.1. - Autovalores e autovetores do sistema inicial do caso de estudo. Estados conforme figura 5.7. Fonte: Elaborada pelo autor

	1	2	3	4	5
	Autovalores				
	-0.2745 + 9.3282i	-4.1282 + 9.6210i	-3.8028 + 10.2434i	-0.4714 + 12.2433i	-3.3431 + 12.8328i
Estados	Autovetores				
z1	0.0001 + 0.0028i	-0.0004 + 0.0009i	-0.0000 - 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.0004 - 0.0003i
v1	-0.1645 + 0.0006i	-0.0436 - 0.0504i	0.0000 - 0.0000i	-0.0007 - 0.0000i	0.0129 + 0.0352i
t1	-0.0001 - 0.0025i	0.0003 - 0.0007i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 - 0.0000i	0.0003 - 0.0002i
w1	0.1475 + 0.0007i	0.0366 + 0.0388i	-0.0000 - 0.0000i	0.0013 + 0.0000i	0.0119 + 0.0310i
z3	-0.0004 - 0.0145i	-0.0012 - 0.0010i	0.0000 + 0.0000i	-0.0000 - 0.0001i	0.0000 - 0.0000i
v3	0.8498	0.0946 - 0.0476i	-0.0000 + 0.0000i	0.0043 + 0.0000i	0.0028 + 0.0015i
z2d	-0.0015 + 0.0055i	-0.0042 - 0.0098i	0.0036 + 0.0097i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
v2d	-0.3168 - 0.0993i	0.7004	-0.707	-0.0021 + 0.0010i	-0.0020 + 0.0009i
z2e	-0.0015 + 0.0055i	-0.0042 - 0.0098i	-0.0036 - 0.0097i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
v2e	-0.3168 - 0.0993i	0.7004 + 0.0000i	0.7070 + 0.0000i	-0.0021 + 0.0010i	-0.0020 + 0.0009i
t3	0.0000 + 0.0015i	-0.0001 + 0.0001i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0005 - 0.0130i	-0.0000 - 0.0001i
w3	-0.0901 - 0.0002i	-0.0021 - 0.0116i	-0.0000 - 0.0000i	0.9999	0.0053 - 0.0012i
z4	0.0002 - 0.0002i	0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	0.0030 + 0.0116i
v4	0.0093 + 0.0111i	-0.0007 + 0.0026i	0.0000 + 0.0000i	0.0011 + 0.0003i	-0.9987
	Módulo dos elementos dos autovetores				
z1	0.0028	0.001	0	0	0.0004
v1	0.1645	0.0667	0	0.0007	0.0374
t1	0.0025	0.0008	0	0	0.0004
w1	0.1475	0.0533	0	0.0013	0.0332
z3	0.0145	0.0016	0	0.0001	0
v3	0.8498	0.1059	0	0.0043	0.0032
z2d	0.0057	0.0107	0.0103	0	0
v2d	0.332	0.7004	0.707	0.0024	0.0022
z2e	0.0057	0.0107	0.0103	0	0
v2e	0.332	0.7004	0.707	0.0024	0.0022
t3	0.0015	0.0002	0	0.013	0.0001
w3	0.0901	0.0118	0	0.9999	0.0055
z4	0.0002	0	0	0	0.012
v4	0.0145	0.0027	0	0.0011	0.9987

O diagrama de bode e PSD da resposta indicam que os modos com predominância na resposta estão próximos a 9Hz. Analisando a Tabela 5.1, os modos 1 e 2 seriam os principais responsáveis pela elevada relação de amplitudes indicado no diagrama de bode e pelo pico de aceleração, para as faixas de frequência dos modos com predominância dos graus de liberdade de motor e câmbio.

Dentre esse dois modos, o modo 1 é o que possui a maior participação na resposta, basta analisar a relação entre o elemento v_1 e v_{2d} (ou v_{2e}), respectivamente os graus de liberdade de velocidade vertical de chassi e velocidade da massa não suspensa. Neste caso, para o modo 1, temos v_1/v_{2d} igual a 0.496, ao passo que para o modo 2 temos somente 0.095. Também observa-se elevada relação v_1/v_{2d} para o modo 4 de 0.292. Veja tabela 5.2

Tabela 5.2. – Relação entre o módulo dos graus de liberdade V_1 e V_{2d} para os modos 1, 2 e 4 do sistema inicial. Fonte: Elaborada pelo autor

Modos	1	2	4
V_1/V_{2d}	0.496	0.095	0.292

A designação de autovalores e autovetores consistirá em impor 2 modos, para o caso de coxins convencionais, e 3 modos para o caso da utilização de coxins hidráulicos. Todos com a menor relação entre v_1/v_{2d} possível. Com isso, teremos a redução da resposta velocidade vertical de chassi, V_1 , e consequentemente aceleração de chassi, a entradas que excitam principalmente estes modos, ou seja, que favoreçam o fenômeno de *shake* de motor.

5.7. Resultados e discussões

5.7.1. Coxins convencionais

Tabela 5.3. - Autovalores e autovetores do sistema após a modificação dos parâmetros do coxim convencional. Fonte: Elaborada pelo autor

	1	2	3	4	5
	Autovalores				
	-0.3248 +10.4490i	-4.1547 + 9.7058i	-3.8028 +10.2434i	-0.6140 +13.8727i	-3.3433 +12.8328i
Estados	Autovetores				
z1	0.0001 + 0.0023i	0.0003 - 0.0009i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0004 - 0.0003i
v1	-0.1538 + 0.0029i	0.0437 + 0.0422i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.0126 + 0.0351i
t1	-0.0001 - 0.0021i	-0.0002 + 0.0007i	0.0000 - 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0003 - 0.0002i
w1	0.1389 - 0.0016i	-0.0367 - 0.0315i	0.0000 + 0.0000i	-0.0007 + 0.0000i	0.0121 + 0.0310i
z3	-0.0004 - 0.0129i	0.0017 + 0.0008i	-0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 - 0.0001i
v3	0.8473	-0.0911 + 0.0862i	-0.0000 - 0.0000i	-0.0001 + 0.0001i	0.0045 + 0.0016i
z2d	0.0003 + 0.0053i	0.0042 + 0.0097i	-0.0036 - 0.0097i	-0.0000 - 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
v2d	-0.3452 + 0.0062i	-0.6993	0.707	0.0005 - 0.0005i	-0.0024 + 0.0017i
z2e	0.0003 + 0.0053i	0.0042 + 0.0097i	0.0036 + 0.0097i	-0.0000 - 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
v2e	-0.3452 + 0.0062i	-0.6993 - 0.0000i	-0.7070 - 0.0000i	0.0005 - 0.0005i	-0.0024 + 0.0017i
t3	0.0000 + 0.0002i	0.0001 - 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.0005 + 0.0115i	-0.0001 - 0.0000i
w3	-0.0125 + 0.0024i	0.0005 + 0.0044i	0.0000 - 0.0000i	-0.9999	0.0044 - 0.0041i
z4	0.0002 - 0.0002i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0030 + 0.0116i
v4	0.0142 + 0.0118i	-0.0002 - 0.0031i	-0.0000 - 0.0000i	-0.0010 + 0.0003i	-0.9986
	Módulo dos elementos dos autovetores				
z1	0.0023	0.0009	0	0	0.0004
v1	0.1538	0.0608	0	0	0.0373
t1	0.0021	0.0007	0	0	0.0004
w1	0.1389	0.0483	0	0.0007	0.0333
z3	0.0129	0.0019	0	0	0.0001
v3	0.8473	0.1254	0	0.0001	0.0048
z2d	0.0053	0.0105	0.0103	0	0
v2d	0.3453	0.6993	0.707	0.0007	0.0029
z2e	0.0053	0.0105	0.0103	0	0
v2e	0.3453	0.6993	0.707	0.0007	0.0029
t3	0.0002	0.0001	0	0.0115	0.0001
w3	0.0127	0.0044	0	0.9999	0.0061
z4	0.0003	0	0	0	0.012
v4	0.0184	0.0031	0	0.001	0.9986

A tabela 5.3, acima, mostra as auto-estruturas obtidas após modificação dos parâmetros dos coxins convencionais resultado da pseudo-retroação das saídas.

Observa-se que os modos alterados foram o 1 e o 4, respectivamente com a relação $v1/v2d$ de 0.44 e 0. Os valores anteriores eram 0.495 e 0.29. Veja tabela 5.4.

Tabela 5.4. – Relação entre o módulo dos graus de liberdade V1 e V2d para os modos 1 e 4 do com parâmetros modificados. Fonte: Elaborada pelo autor

V1/V2d		
Modos	1	4
Sist. Inicial	0.496	0.29
Coxim conv.	0.44	0

Os modos 1 e 4 foram impostos justamente por serem eles os com a maior relação de velocidades, $v1/v2d$. O modo 3 representa um modo de *tramp* e o modo 5 de massa não suspensa traseira, pouco influenciado pelos modos de motor e câmbio.

Há que se destacar ainda que por existirem elementos nulos na matriz de ganhos de controle, cuidados devem ser tomados, pois a designação é feita para a matriz completa, e nunca é possível conseguir exatamente o mesmo resultado com a matriz contendo os zeros impostos. Basta que os autovalores estejam próximos nos dois casos, matriz completa e com elementos nulos, para que a designação ocorra da maneira desejada. Conforme apontado na seção 3.5 da revisão teórica do presente trabalho.

Desta forma, ao analisarmos a figura 5.14, vemos que o pico de frequência para o sistema resultado da retroação de todas as saídas em todas as entradas definidas, está muito próximo ao pico do sistema com os parâmetros modificados, desta forma, sistemas com comportamentos dinâmicos semelhantes.

Figura 5.14. Diagrama de bode para entrada força na massa não suspensa (F_{fw}) e saída velocidade vertical no banco do motorista (V_{st}) para o sistema otimizado com coxim convencional.

Na figura 5.14 está representado o diagrama de bode para os três sistemas:

- O sistema inicial;
- O sistema após a modificação dos parâmetros através da pseudo-retroação de saídas. Neste caso temos a imposição de zeros na matriz de ganhos de controle relativos aos parâmetros fisicamente inexistentes, por exemplo, velocidade do coxim esquerdo com a força no coxim direito;
- O sistema com todas as 4 saídas retroagindo nas 2 entradas;

Através do diagrama de bode nota-se a redução considerável da relação de amplitudes entre velocidade vertical na posição do assento do motorista e força vertical na roda nos dois casos de otimização.

Da mesma forma, na figura 5.15, abaixo, verificamos a redução na PSD do sinal da aceleração na posição do assento do motorista, resposta para a entrada pista criada anteriormente.

Figura 5.15. PSD da aceleração na posição do banco do motorista para o sistema otimizado com coxim convencional.

Vale ressaltar que o fator de amortecimento modal foi mantido para ambos os modos designados, desta forma, concluímos que a considerável redução da participação modal das estruturas próprias com predominância dos graus de liberdade de motor e câmbio se deve ao rearranjo do autovetores, com a redução da participação do grau de liberdade velocidade vertical de chassi em frente ao da velocidade vertical de massa não suspensa.

5.7.2. Coxim hidráulico

Tabela 5.5. - Autovalores e autovetores do sistema após a modificação dos parâmetros do coxim hidráulico. Fonte: Elaborada pelo autor

	1	2	3	4	5
	Autovalores				
	-2.2243 + 9.3978i	-4.4688 + 11.7051i	-3.8028 + 10.2434i	-4.3367 + 9.3293i	-3.3434 + 12.8327i
Estados	Autovetores				
z1	0.0009 + 0.0019i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0000 - 0.0000i	-0.0006 + 0.0014i	-0.0004 + 0.0003i
v1	-0.1253 + 0.0287i	-0.0002 - 0.0007i	0.0000 - 0.0000i	-0.0677 - 0.0729i	-0.0134 - 0.0348i
t1	-0.0010 - 0.0016i	-0.0000 + 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	0.0003 - 0.0012i	-0.0003 + 0.0002i
w1	0.1068 - 0.0376i	-0.0006 - 0.0039i	-0.0000 + 0.0000i	0.0587 + 0.0513i	-0.0115 - 0.0313i
z3	-0.0023 - 0.0099i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 - 0.0000i	-0.0007 - 0.0035i	-0.0001 + 0.0000i
v3	0.6151	-0.0017 - 0.0006i	-0.0000 + 0.0000i	0.2236 + 0.0540i	0.0005 - 0.0044i
z2d	-0.0012 + 0.0086i	-0.0001 - 0.0001i	-0.0036 - 0.0097i	-0.0044 - 0.0095i	0.0000 - 0.0000i
v2d	-0.4932 - 0.1901i	0.0095 - 0.0033i	0.707	0.6804	0.0026 + 0.0010i
z2e	-0.0012 + 0.0086i	-0.0001 - 0.0001i	0.0036 + 0.0097i	-0.0044 - 0.0095i	0.0000 - 0.0000i
v2e	-0.4932 - 0.1901i	0.0095 - 0.0033i	-0.7070 + 0.0000i	0.6804 - 0.0000i	0.0026 + 0.0010i
t3	-0.0005 - 0.0001i	-0.0045 - 0.0117i	-0.0000 + 0.0000i	-0.0003 - 0.0003i	-0.0001 - 0.0001i
w3	0.0140 - 0.0304i	0.9876	-0.0000 - 0.0000i	0.0297 - 0.0105i	0.0102 - 0.0031i
z4	0.0000 - 0.0003i	0.0000 - 0.0001i	0.0000 + 0.0000i	0.0001 - 0.0001i	-0.0030 - 0.0116i
v4	0.0157 + 0.0050i	0.0079 + 0.0063i	-0.0000 + 0.0000i	0.0020 + 0.0071i	0.9986
zh	-0.0001 - 0.0029i	-0.0007 - 0.0019i	0.0000 + 0.0000i	-0.0009 - 0.0003i	0.0000 - 0.0000i
vh	0.1747 + 0.0360i	0.1553 + 0.0022i	-0.0000 + 0.0000i	0.0427 - 0.0454i	0.0029 + 0.0011i
z0	-0.0034 - 0.0098i	-0.0017 - 0.0036i	0.0000 + 0.0000i	-0.0012 - 0.0038i	-0.0001 - 0.0000i
	Módulo dos elementos dos autovetores				
z1	0.0021	0	0	0.0015	0.0004
v1	0.1286	0.0008	0	0.0995	0.0373
t1	0.0019	0.0001	0	0.0012	0.0004
w1	0.1133	0.004	0	0.078	0.0334
z3	0.0101	0	0	0.0036	0.0001
v3	0.6151	0.0018	0	0.2301	0.0044
z2d	0.0087	0.0001	0.0103	0.0105	0
v2d	0.5285	0.01	0.707	0.6804	0.0028
z2e	0.0087	0.0001	0.0103	0.0105	0
v2e	0.5285	0.01	0.707	0.6804	0.0028
t3	0.0006	0.0126	0	0.0005	0.0001
w3	0.0335	0.9876	0	0.0315	0.0107
z4	0.0003	0.0001	0	0.0001	0.012
v4	0.0164	0.0101	0	0.0073	0.9986
zh	0.0029	0.002	0	0.001	0
vh	0.1784	0.1553	0	0.0623	0.0031
z0	0.0103	0.004	0	0.004	0.0001

Com a inclusão da massa m_h à modelagem, que representa a dependência da força que o elemento gera a aceleração relativa entre o lado passivo e ativo do coxim, temos 3 entradas independentes em nosso sistema, f_1 , f_3 e f_4 , todas definidas na seção 5.3 deste texto, o que implica na liberdade para designarmos 3 autovalores e autovetores, estes últimos podendo contemplar 3 elementos arbitrários.

Ao comparar a tabela 5.5 com a tabela 5.1, constata-se que os modos designados com a modificação dos parâmetros do coxim hidráulico e convencional (lado esquerdo) são os modos 1, 2 e 4. Que possuem respectivamente a relação v_1/v_{2d} igual a 0.24, 0.08 e 0.15, no sistema inicial esses valores eram 0.495, 0.095 e 0.29. Como podemos verificar na tabela 5.6.

Tabela 5.6. – Relação entre o módulo dos graus de liberdade V_1 e V_{2d} para os modos 1, 2 e 4 do com parâmetros modificados com coxim hidráulico. Fonte: Elaborada pelo autor

V_1/V_{2d}			
Modos	1	2	4
Sist. Inicial	0.496	0.095	0.29
Coxim hydr.	0.24	0.08	0.15

Esta redução do grau de liberdade velocidade vertical de chassi em comparação com o grau de liberdade velocidade vertical da massa suspensa dianteira, resulta na redução da resposta velocidade vertical na posição do assento do banco do motorista a uma entrada força na massa não suspensa dianteira, conforme está mostrado na relação de amplitudes do diagrama de bode da figura 5.16.

Figura 5.16. Diagrama de bode para entrada força na massa não suspensa (F_{fw}) e saída velocidade vertical no banco do motorista (V_{st}) para o sistema otimizado com coxim hidráulico. Fonte: Elaborada pelo autor

De forma semelhante, a resposta do sistema, com a inclusão do coxim hidráulico em substituição ao convencional do lado direito, à entrada pista criada anteriormente, verificamos a considerável redução da PSD da aceleração na posição do banco do motorista, figura 5.17.

Há também que se ressaltar o aumento do fator de amortecimento modal, em decorrência do maior amortecimento inerente ao elemento hidráulico, que também impactou na redução da resposta.

Figura 5.17. PSD da aceleração na posição do banco do motorista para o sistema otimizado com coxim hidráulico. Fonte: Elaborada pelo autor

6. Conclusão

A teoria de designação de estruturas próprias, seja através da retroação total de estados, ou pela retroação de algumas saídas em certas entradas, foi objeto de estudo de muitos pesquisadores da área de controle, notadamente os diretamente ligados à indústria aeroespacial. Os mais importantes trabalhos na área foram revisados neste trabalho.

A liberdade oferecida com a retroação no controle de sistemas lineares, e determinação do espaço onde pertencem os possíveis autovetores ligados a um autovalor possíveis de serem designados, foi estendida, através da metodologia apresentada neste trabalho, para a variação de parâmetros do sistema e os consequentes espaços onde pertencem os autovetores, cada espaço ligado a um autovalor.

Esta liberdade da escolha dos autovetores mais adequados a um problema específico contidos em subespaços definidos pela alteração de parâmetros do sistema é de grande valia para a otimização de sistemas lineares, pois permite a designação exata e em geral com poucos recursos computacionais. Aqui está a vantagem sobre os outros métodos de otimização, tais como algoritmos genéticos ou análises estatísticas, além do entendimento e visualização dos subespaços que contém os autovetores possíveis de serem designados com a alteração de parâmetros do sistema.

A metodologia desenvolvida neste trabalho, com a utilização da teoria de controle de designação de auto-estrutura com a retroação de saídas para a alteração de parâmetros sob a mesma finalidade da teoria utilizada, não foi encontrada na literatura até o momento, tornando este trabalho pioneiro.

A viabilidade e os benefícios podem ser verificados no estudo de caso utilizado como aplicação do método. Durante o desenvolvimento do estudo, algumas dúvidas foram levantadas, como a influência no resultado final dos valores iniciais dos parâmetros que se pretende alterar e a perda de precisão da designação dos modos com a imposição necessária de zeros na matriz de ganhos de controle.

A influência dos valores iniciais dos parâmetros no resultado foi verificada e a solução encontrada foi uma otimização numérica inicial deles com objetivo de proporcionar o melhor espaço possível para a posterior escolha do autovetor. Para

trabalhos futuros fica a determinação matemática da relação entre os parâmetros iniciais e os subespaços.

O estudo da precisão na designação de modos com a imposição de zeros na matriz de ganhos de controle, que foi verificada no estudo de caso, e a solução encontrada para melhorar a designação foi a mesma encontrada em Andry et al (1983), onde basta que os autovalores sejam próximos o suficiente dos designados integralmente com a matriz de controle completa, também segue para um trabalho futuro, pois mesmo com a solução aplicada no estudo de caso, estudos precisam ser feitos para o completo entendimento e solução do problema.

Por fim, seguem sugestões para aplicação da metodologia, como a designação dos modos mais adequados para vibração de conjuntos motor/câmbio de veículos comerciais, também seria um bom estudo de caso a adequação dos modos de vibrar ligados à dinâmica vertical e lateral para veículo de competição com alto grau de influência da aerodinâmica.

7. Referências¹

- ANDRY Jr., A. N.; SHAPIRO, E.Y.; CHUNG, J.C. Eigenstructure assignment for linear systems. **IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems**, v. 19, p. 711-728, 1983.
- D'AZZO, J. J.; HOPPIS, C. H. **Análise e projeto de sistemas de controle lineares**. 2.ed. Rio de Janeiro: Guanabara dois, 1981. cap. 17-18, p. 530-562.
- DAVISON, E. J. On pole assignment in linear systems with incomplete state feedback. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. AC-15, p. 348-351, 1970.
- DAVISON, E. J.; CHADHA, K. J. On the control of a large chemical plant by using modal analysis. **Automatica**, v. 8, p. 263-373, 1972.
- DAVISON, E. J.; GOLDBERG, R. W. A design technique for the incomplete state feedback problem in multivariable control systems. **Automatica**, v. 5, p. 335-346, 1969.
- DAVISON, E. J.; WANG, S. H. On pole assignment in linear multivariable systems using output feedback. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. AC-20, p. 516-518, 1975.
- DERUSSO, P. M.; ROY, R. J.; CLOSE, C. M. **State Variables for engineers**. Malabar, Florida: Robert E. Krieger Publishing Company, 1990. cap. 5, p. 313-394.
- FELICIO, L. C. **Modelagem dinâmica de sistemas e estudo da resposta**. São Carlos, Brasil: Rima editora, 2007.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. **Feedback control of dynamic systems**. 6.ed. EUA: Prentice Hall, 2009. cap. 7, p. 413-536.
- HARVEY, C.H.; STEIN, G. Quadratic weights for asymptotic regulator properties. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. AC-23, p. 378-387, 1978.
- KAILATH, T. **Linear systems**. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1980.
- KALMAN, R. E. Lectures on controllability and observability. **Seminar on Controllability and Observability, Fondazione Guglielmo Marconi, Pontecchio Marconi**, Bologna, ITALY, julho, 1968.
- KALMAN, R. E. **Theory of regulators of linear plants** *In*: Topics in mathematical system theory. New York: McGraw-Hill, 1969. cap. 2, p. 25-66.
- KAUTSKY, J.; NICHOLS, N. K.; VAN DOOREN, P. Robust pole assignment in linear state feedback. **Intenational journal of control**, v. 41, p. 1129-1155, 1985.

¹ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023

- KIMURA, H. Pole assignment by gain output feedback. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. AC-20, p. 509-516, 1975.
- KLEIN, G.; MOORE, B. C. Eigenvalue – Generalized eigenvalue assignment with state feedback. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. AC-22, p. 140-141, 1977.
- KONSTANTOPOULOS, I. K.; ANTSAKLIS, P. J. Eigenstructure assignment in reconfigurable control systems. **Technical report of the ISIS group, Department of electrical engineering, University of Notre Dame, ISIS-96-001**, 1996.
- MOORE, B. C. On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed loop eigenvalue assignment. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. AC-21, p. 689-692, 1976.
- POPOV, V. M., (1964). Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions. **Revue Roumaine Des Sciences Techniques, Électrotechnique et Énergétique**, v. 9, p. 629-630, 1964.
- PORTER, B.; D'AZZO, J. J. Algorithm for closed-loop eigenstructure assignment by state feedback in multivariable linear systems. **International journal of control**, v. 27, p. 943-947, 1978a.
- PORTER, B.; D'AZZO, J. J. Algorithm for the synthesis of state-feedback regulators by entire eigenstructure assignment. **Electronics letters**, v. 13, p. 230-231, 1977.
- PORTER, B.; D'AZZO, J. J. Closed-loop eigenstructure assignment by state feedback in multivariable linear systems. **International journal of control**, v. 27, p. 487-492, 1978b.
- RILL, G. Vehicle dynamics. **Short course in vehicle dynamics at UNICAMP**, Campinas, Brasil, september, 2011.
- RISSANEN, J., (1960). Control system synthesis by analogue computer based on the "generalized linear feedback control" concept. **Procedures Symposium Analog Computation Applied to the Study of Chemical Processes, International Seminar**, p. 1-13, Brussels, Belgium, 1960.
- ROSENBROCK, H. H. Distinctive problems in process control. **Chemical Engineering Progress**, v. 58, p. 43-50, 1962.
- SHAH, S. L.; FISHER, D. G.; SEBORG, D. E. Disturbance localizations in linear time-invariant multivariable systems. **Electronics letters**, v. 10, p. 513, 1974.
- SHAH, S. L.; FISHER, D. G.; SEBORG, D. E. Eigenvalue/Eigenvector assignment for multivariable systems and further results for output feedback control. **Electronics letters**, v. 11, p. 388-389, 1975.

¹ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023

- SIMON, J. D.; MITTER, S. K. A theory of modal control. **Information and control**, v. 13, p. 316-353, 1968.
- SOBEL, K. M.; SHAPIRO, E. Y. Application of eigensystem assignment to lateral translation and yaw pointing flight control. **Proceedings of 23rd conference on decision and control**, Las Vegas, NV, p. 1423-1428, dezembro, 1984a.
- SOBEL, K. M.; SHAPIRO, E. Y. Design of decoupled longitudinal flight control laws utilizing eigensystem assignment. **American control conference**, San Diego, CA, p. 403-408, junho, 1984b.
- SOBEL, K. M.; SHAPIRO, E. Y. Eigenstructure assignment for design of multimode flight control systems. **IEEE control systems magazine**, v. 5, p. 9-15, 1985a.
- SOBEL, K. M.; SHAPIRO, E. Y. Eigenstructure assignment, eigensensitivity, and flight control design. **Proceedings of 24th conference on decision and control**, Ft. Lauderdale, FL, p. 658-659, dezembro, 1985b.
- SOBEL, K. M.; SHAPIRO, E. Y. Eigenstructure assignment: A tutorial – Part I Theory. **Proceeding american control conference**, Boston, MA, p. 456-460, junho, 1985c.
- SOBEL, K. M.; SHAPIRO, E. Y. Eigenstructure assignment: A tutorial – Part II Applications. **Proceeding american control conference**, Boston, MA, p. 461-467, junho, 1985d.
- SOBEL, K. M.; SHAPIRO, E. Y. Robustness/performance tradeoffs in eigenstructure assignment with flight control applications. **American control conference**, Minneapolis, MN, p. 380-385, junho, 1987a.
- SOBEL, K. M.; SHAPIRO, E. Y. Flight control examples of robust eigenstructure assignment. **Proceedings of 26th conference on decision and control**, Los Angeles, CA, p. 1290-1291, dezembro, 1987b.
- SOBEL, K. M.; SHAPIRO, E. Y.; ANDRY, A. N. Eigenstructure assignment. **International journal of control**, v. 59, p. 13-37, 1994.
- SRINATHKUMAR, S. Eigenvalue/Eigenvector assignment using output feedback. **NASA Technical Papers**, v. 1, p. 1-29, 1978a.
- SRINATHKUMAR, S. Eigenvalue/Eigenvector assignment using output feedback. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. AC-23, p. 78-81, 1978b.
- SRINATHKUMAR, S.; RHOTEN, R. P. Eigenvalue/Eigenvector assignment for multivariable systems. **Electronics letters**, v. 11, p. 124-125, 1975.
- WONHAM, W. M. On pole assignment in multi-input controllable linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. AC-12, p. 660-665, 1967.

¹ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023

8. APÊNDICE 1 – Matrizes dinâmicas dos sistemas do estudo de caso

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(k_1+k_2d+k_2e+k_3+k_4)/m_1 & -(c_1+c_2d+c_2e+c_3+c_4)/m_1 & (-k_1*d_1+(k_2d+k_2e)*d_2+k_3*d_3d+k_4*d_3e)/m_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ (-d_1*k_1+d_2*(k_2d+k_2e)+d_3d*k_3+d_3e*k_4)/I_1 & (-d_1*c_1+d_2*(c_2d+c_2e)+d_3d*c_3+d_3e*c_4)/I_1 & -(k_1*d_1^2+(k_2d+k_2e)*d_2^2+k_3*d_3d^2+k_4*d_3e^2)/I_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ (k_3+k_4)/m_3 & (c_3+c_4)/m_3 & -(k_3*d_3d+k_4*d_3e)/m_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_2d/m_2d & c_2d/m_2d & -k_2d*d_2/m_2d \\ 0 & 0 & 0 \\ k_2e/m_2e & c_2e/m_2e & -k_2e*d_2/m_2e \\ 0 & 0 & 0 \\ (-d_5*k_4+d_4*k_3)/I_3 & (-d_5*c_4+d_4*c_3)/I_3 & (-d_4*d_3d*k_3+d_5*d_3e*k_4)/I_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1/m_4 & c_1/m_4 & k_1*d_1/m_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-c_1*d_1+(c_2d+c_2e)*d_2+c_3*d_3d+c_4*d_3e)/m_1 & (k_3+k_4)/m_1 & (c_3+c_4)/m_1 & k_2d/m_1 & c_2d/m_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(c_1*d_1^2+(c_2d+c_2e)*d_2^2+c_3*d_3d^2+c_4*d_3e^2)/I_1 & -(d_3d*k_3+d_3e*k_4)/I_1 & -(d_3d*c_3+d_3e*c_4)/I_1 & -d_2*k_2d/I_1 & -d_2*c_2d/I_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(c_3*d_3d+c_4*d_3e)/m_3 & -(k_3+k_4)/m_3 & -(c_3+c_4)/m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c_2d*d_2/m_2d & 0 & 0 & -(k_p+k_2d)/m_2d & -c_2d/m_2d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2e*d_2/m_2e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-d_4*c_3*d_3d+d_5*c_4*d_3e)/I_3 & (-d_4*k_3+d_5*k_4)/I_3 & (-d_4*c_3+d_5*c_4)/I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1*d_1/m_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

APÊNDICE 1 – Matrizes dinâmicas dos sistemas do estudo de caso (continuação)

0	0	0	0	0	0
k_{2e}/m_1	c_{2e}/m_1	$(k_3*d_4 - k_4*d_5)/m_1$	$(c_3*d_4 - c_4*d_5)/m_1$	k_1/m_1	c_1/m_1
0	0	0	0	0	0
$-d_2*k_{2e}/I_1$	$-d_2*c_{2e}/I_1$	$-(k_3*d_3*d_4 - k_4*d_3*e*d_5)/I_1$	$-(c_3*d_3*d_4 - c_4*d_3*e*d_5)/I_1$	d_1*k_1/I_1	c_1*d_1/I_1
0	0	0	0	0	0
0	0	$(k_4*d_5 - k_3*d_4)/m_3$	$(c_4*d_5 - c_3*d_4)/m_3$	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
$-(k_p + k_{2e})/m_{2e}$	$-c_{2e}/m_{2e}$	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	$-(k_3*d_4^2 + k_4*d_5^2)/I_3$	$-(c_3*d_4^2 + c_4*d_5^2)/I_3$	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	$-(k_1 + k_{pr})/m_4$	$-c_1/m_4$

APÊNDICE 1 – Matrizes dinâmicas dos sistemas do estudo de caso (continuação)

$$F_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(k_1+k_2d+k_2e+k_3+kh_2+k_4)/m_1 & -(c_1+c_2d+c_2e+c_3+ch_2+c_4)/m_1 & (-k_1*d_1+(k_2d+k_2e)*d_2+k_3*d_3d+kh_2*d_3d+k_4*d_3e)/m_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ (-d_1*k_1+d_2*(k_2d+k_2e)+d_3d*(k_3+kh_2)+d_3e*k_4)/l_1 & (-d_1*c_1+d_2*(c_2d+c_2e)+d_3d*(c_3+ch_2)+d_3e*c_4)/l_1 & -(k_1*d_1^2+(k_2d+k_2e)*d_2^2+(k_3+kh_2)*d_3d^2+k_4*d_3e^2)/l_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ (k_3+k_4)/m_3 & (c_3+c_4)/m_3 & -(k_3*d_3d+k_4*d_3e)/m_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_2d/m_2d & c_2d/m_2d & -k_2d*d_2/m_2d \\ 0 & 0 & 0 \\ k_2e/m_2e & c_2e/m_2e & -k_2e*d_2/m_2e \\ 0 & 0 & 0 \\ (-d_5*k_4+d_4*k_3)/l_3 & (-d_5*c_4+d_4*c_3)/l_3 & (-d_4*d_3d*k_3+d_5*d_3e*k_4)/l_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1/m_4 & c_1/m_4 & k_1*d_1/m_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ kh_2/mh & ch_2/mh & -kh_2*d_3d/mh \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

APÊNDICE 1 – Matrizes dinâmicas dos sistemas do estudo de caso (continuação)

0	0	0	0	0
$(-c1*d1+(c2d+c2e)*d2+c3*d3d+ch2*d3d+c4*d3e)/m1$	$(k3+k4+kve)/m1$	$(c3+c4)/m1$	$k2d/m1$	$c2d/m1$
1	0	0	0	0
$-(c1*d1^2+(c2d+c2e)*d2^2+(c3+ch2)*d3d^2+c4*d3e^2)/I1$	$-(d3d*k3+d3e*k4-d3d*kve)/I1$	$-(d3d*c3+d3e*c4)/I1$	$-d2*k2d/I1$	$-d2*c2d/I1$
0	0	1	0	0
$-(c3*d3d+c4*d3e)/m3$	$-(k3+k4+kh1+kve)/m3$	$-(c3+c4+ch1)/m3$	0	0
0	0	0	0	1
$-c2d*d2/m2d$	0	0	$-(kp+k2d)/m2d$	$-c2d/m2d$
0	0	0	0	0
$-c2e*d2/m2e$	0	0	0	0
0	0	0	0	0
$(-d4*c3*d3d+d5*c4*d3e)/I3$	$(-d4*(k3+kh1+kve)+d5*k4)/I3$	$(-d4*(c3+ch1)+d5*c4)/I3$	0	0
0	0	0	0	0
$c1*d1/m4$	0	0	0	0
0	0	0	0	0
$-ch2*d3d/mh$	$kh1/mh$	$ch1/mh$	0	0
$-d3d$	kve/cve	0	0	0

APÊNDICE 1 – Matrizes dinâmicas dos sistemas do estudo de caso (continuação)

0	0	0	0	0	0
$c2d/m1$	$k2e/m1$	$c2e/m1$	$((k3+kve)*d4-k4*d5)/m1$	$(c3*d4-c4*d5)/m1$	$k1/m1$
0	0	0	0	0	0
$-d2*c2d/l1$	$-d2*k2e/l1$	$-d2*c2e/l1$	$-((k3-kve)*d3d*d4-k4*d3e*d5)/l1$	$-(c3*d3d*d4-c4*d3e*d5)/l1$	$d1*k1/l1$
0	0	0	0	0	0
0	0	0	$(k4*d5-(k3+kh1+kve)*d4)/m3$	$(c4*d5-(c3+ch1)*d4)/m3$	0
1	0	0	0	0	0
$-c2d/m2d$	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	$-(kp+k2e)/m2e$	$-c2e/m2e$	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	$-((k3+kh1+kve)*d4^2+k4*d5^2)/l3$	$-((c3+ch1)*d4^2+c4*d5^2)/l3$	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$-(k1+kpr)/m4$
0	0	0	0	0	0
0	0	0	$kh1*d4/mh$	$ch1*d4/mh$	0
0	0	0	$d4*kve/cve$	0	0

APÊNDICE 1 – Matrizes dinâmicas dos sistemas do estudo de caso (continuação)

0	0	0	0
$c1/m1$	$kh2/m1$	$ch2/m1$	$-kve/m1$
0	0	0	0
$c1*d1/l1$	$-d3d*KH2/l1$	$-d3d*CH2/l1$	$-kve*d3d/l1$
0	0	0	0
0	$kh1/m3$	$ch1/m3$	$kve/m3$
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	$d4*kh1/l3$	$d4*ch1/l3$	$d4*kve/l3$
1	0	0	0
$-c1/m4$	0	0	0
0	0	1	0
0	$-(kh1+kh2)/mh$	$-(ch1+ch2)/mh$	0
0	0	0	$-kve/cve$

9. APÊNDICE 2 – Rotina para a identificação dos parâmetros do modelo de 7 DOF

```

clear all
clc

dados=xlsread('dados_7_DOF.xls', 'B4:Q25004');

Fdd=dados(:,1); %output força que a mola diant. dir. aplica sobre a massa não susp. diant. dir.
Fde=dados(:,2); %output força que a mola diant. esq. aplica sobre a massa não susp. diant. esq.
Ftd=dados(:,3); %output força que a mola tras. dir. aplica sobre a massa não susp. tras. dir.
Fte=dados(:,4); %output força que a mola tras. esq. aplica sobre a massa não susp. tras. dir.
delcez=dados(:,5)/1000; %output desloc. relativo do coxim esq. em relação à massa suspensa.
delcev=dados(:,6)/1000; %output vel. relativa do coxim esq. em relação à massa suspensa.
delcdz=dados(:,7)/1000; %output desloc. relativo do coxim dir. em relação à massa suspensa.
delcdv=dados(:,8)/1000; %output vel. relativa do coxim dir. em relação à massa suspensa.
delsez=dados(:,9)/1000; %output desloc. relativo da massa não susp. diant. esq. em relação à massa suspensa.
delsev=dados(:,10)/1000; %output vel. relativa da massa não susp. diant. esq. em relação à massa suspensa.
delsdz=dados(:,11)/1000; %output desloc. relativo da massa não susp. diant. dir. em relação à massa suspensa.
delsdv=dados(:,12)/1000; %output vel. relativa da massa não susp. diant. dir. em relação à massa suspensa.
delstdz=dados(:,13)/1000; %output desloc. relativo da massa não susp. tras. dir. em relação à massa suspensa.
delstdv=dados(:,14)/1000; %output vel. relativa da massa não susp. tras. dir. em relação à massa suspensa.
delstez=dados(:,15)/1000; %output desloc. relativo da massa não susp. tras. esq. em relação à massa suspensa.
delstev=dados(:,16)/1000; %output vel. relativa da massa não susp. tras. esq. em relação à massa suspensa.
pistaddz=dados(:,17)/1000; %Input desloc. vertical pista diant. dir.
pistadv=dados(:,21)/1000; %Input veloc. vertical pista diant. dir.
pistadez=dados(:,18)/1000; %Input desloc. vertical pista diant. esq.
pistadev=dados(:,22)/1000; %Input veloc. vertical pista diant. esq.
pistatdz=dados(:,19)/1000; %Input desloc. vertical pista tras. dir.
pistatdv=dados(:,23)/1000; %Input veloc. vertical pista tras. dir.
pistatez=dados(:,20)/1000; %Input desloc. vertical pista tras. esq.
pistatev=dados(:,24)/1000; %Input veloc. vertical pista tras. esq.

u=[pistaddz,pistadv,pistadez,pistadev,pistatdz,pistatdv,pistatez,pistatev];
y=[Fdd,Fde,Ftd,Fte,delcez,delcev,delcdz,delcdv,delsez,delsev,delsdz,delsdv,delstdz,delstdv,delstez,delstev];

z=iddata(y,u,0.001);

```

APÊNDICE 2 – Rotina para a identificação dos parâmetros do modelo de 7 DOF (Continuação)

```
par1=1000; %c2d
par2=1000; %c2e
par3=350000; %k3
par4=1000; %c3
par5=250000; %k4
par6=1000; %c4
par7=180000; %kp
par8=8; %cp
par9=2000; %c1
par10=1;

Pvec = [par1; par2; par3; par4; par5; par6; par7; par8; par9; par10];

auxval(1)=0.01;

Minit=idgrey('mynoise_7_DOF',Pvec,'c', auxval);

model = pem(z,Minit, 'display','on','MaxIter',1);
```

APÊNDICE 2 – Rotina para a identificação dos parâmetros do modelo de 7 DOF. (Continuação)

Função mynoise_7_DOF:

```
function [A,B,C,D,K,x0] = mynoise_7_DOF(par,T,aux)

m1=913;
m2d=39;
m2e=39;
m3=167;
m4=70;
I1=1.351E3;
I3=12;
d1=1.286;
d2=1.165;
d3d=1.34943;
d3e=1.282589;
d4=0.415413;
d5=0.456596;

%x=[z1,v1,t1,w1,z3,v3,z2d,v2d,z2e,v2e,t3,w3,z4d,v4d,z4e,v4e]
%u=[pistaddz,pistaddv,pistadez,pistadev,pistatdz,pistatdv,pistatez,pistatev];
%y=[Fdd,Fde,Ftd,Fte,delcez,delcev,delcdz,delcdv,delsez,delsev,delsdz,delsdv,delstdz,delstdv,delstez,delstev]'

A=[ Matriz do sistema A com os parâmetros que se pretende identificar substituídos pelas respectivas variáveis par
1, par2, par3, etc... ];
```

APÊNDICE 2 – Rotina para a identificação dos parâmetros do modelo de 7 DOF. (Continuação)

```

B=[0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    par(7)/m2d,par(8)/m2d,0,0,0,0,0,0;    %kp/m2d,par(8)/m2d,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,par(7)/m2e,par(8)/m2e,0,0,0,0,0;    %0,0,kp/m2e,par(8)/m2e,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,par(7)/m4,par(8)/m4,0,0;    %0,0,0,0,kp/m4,par(8)/m4,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,par(7)/m4,par(8)/m4];    %0,0,0,0,0,0,kp/m4,par(8)/m4];

C=[0,0,0,0,0,0,-par(7),-par(8),0,0,0,0,0,0,0,0;    %0,0,0,0,0,0,-kp,-cp,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0,-par(7),-par(8),0,0,0,0,0,0;    %0,0,0,0,0,0,0,0,-kp,-cp,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-par(7),-par(8),0,0;    %0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-kp,-cp,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-par(7),-par(8);    %0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-kp,-cp;
    -1,0,d3e,0,1,0,0,0,0,0,-d5,0,0,0,0,0;
    0,-1,0,d3e,0,1,0,0,0,0,0,-d5,0,0,0,0,0;
    -1,0,d3d,0,1,0,0,0,0,0,d4,0,0,0,0,0;
    0,-1,0,d3d,0,1,0,0,0,0,0,d4,0,0,0,0,0;
    1,0,-d2,0,0,0,-1,0,0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,1,0,-d2,0,0,0,-1,0,0,0,0,0,0,0,0;
    1,0,-d2,0,0,0,0,0,-1,0,0,0,0,0,0,0;
    0,1,0,-d2,0,0,0,0,0,-1,0,0,0,0,0,0;
    1,0,d2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0;
    0,1,0,d2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0;
    1,0,d2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0;
    0,1,0,d2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1];

```

APÊNDICE 2 – Rotina para a identificação dos parâmetros do modelo de 7 DOF. (Continuação)

```
D=[par(7),par(8),0,0,0,0,0,0; %kp,cp,0,0,0,0,0,0;
    0,0,par(7),par(8),0,0,0,0; %0,0,kp,cp,0,0,0,0;
    0,0,0,0,par(7),par(8),0,0; %0,0,0,0,kp,cp,0,0;
    0,0,0,0,0,0,par(7),par(8); %0,0,0,0,0,0,kp,cp;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0];
```

```
R1=[par(10),0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0;
    0,0,0,0,0,0,0,0];
```

```
R2=aux(1)*eye(12);
```

```
[x0,K] = kalman(ss(A,B,C,0,T),R1,R2);
x0 = [0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
```


10. APÊNDICE 3 – Parâmetros dos modelos do estudo de caso.

	Símbolos utilizados	Unidades	Valores		
			Inicial	Após coxinição com coxim convencional	Após coxinição com coxim hidráulico
Parâmetros modificados					
Constante de rigidez do coxim direito	k3	[N/mm]	259	347.67	183
Constante de rigidez do coxim esquerdo	k4	[N/mm]	144	197.38	152.53
Constante de amortecimento do coxim direito	c3	[N.s/mm]	0.259	0.324	0.18
Constante de amortecimento do coxim esquerdo	c4	[N.s/mm]	0.144	0.201	0.2
Constante de rigidez superior do coxim hidráulico	kh1	[N/mm]	x	x	122.81
Constante de rigidez inferior do coxim hidráulico	kh2	[N/mm]	x	x	124
Constante de amortecimento superior do coxim hidráulico	ch1	[N.s/mm]	x	x	3.43
Constante de amortecimento inferior do coxim hidráulico	ch2	[N.s/mm]	x	x	3.43
Parâmetros não modificados					
Massa suspensa	m1	[kg]		913	
Massas não suspensas dianteiras direita	m2d, m2e	[kg]		39	
Massa não suspensa traseira	m4	[kg]		70	
Massa do motor/câmbio	m3	[kg]		167	
Inércia de rolagem da massa suspensa	I1	[kg·m²]		1351	
Inércia de rolagem do motor/câmbio	I3	[kg·m²]		12	
Dist. long. do ponto de fix. da mola tras. ao CG da massa suspensa	d1	[mm]		1286	
Dist. long. do ponto de fix. das molas diant. ao CG da massa suspensa	d2	[mm]		1165	
Dist. do ponto de fix. do coxim direito ao CG da massa suspensa	d3d	[mm]		1394	
Dist. do ponto de fix. do coxim esquerdo ao CG da massa suspensa	d3e	[mm]		1283	
Dist. lateral do ponto de fix. do coxim direito ao CG do motor/câmbio	d4	[mm]		415	
Dist. lateral do ponto de fix. do coxim esquerdo ao CG do motor/câmbio	d5	[mm]		456	
Constante de rigidez da mola traseira	k1	[N/mm]		42	
Constante de rigidez das molas dianteiras	k2d e k2e	[N/mm]		24	
Constante de amortecimento do amortecedor traseiro	c1	[N.s/mm]		2875	
Constante de amortecimento dos amortecedores dianteiros	c2d e c2e	[N.s/mm]		2576	