MARCELO GUSTAVO DE SOUZA

**Identificação e caracterização de não-linearidades em dinâmica
estrutural**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Tit. Paulo Sergio Varoto

São Carlos

2008

Dedicatória

Ao meu eterno pai Antonio Jose de Souza Neto, minha mãe
Maria, minha irmã Aline e a minha esposa Juliana.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, pela saúde.

Agradeço ao Prof. Paulo S. Varoto pela orientação, pelos auxílios e pelo incentivo durante a elaboração do trabalho.

Agradeço a minha família, minha mãe Maria, minha Irmã Aline, sem o apoio deles nada seria possível.

Agradeço a Juliana pela atenção, paciência, conselhos e pelo carinho, que foram de fundamentais importância para mim e a sua família pelo companheirismo.

Aos colegas de laboratório, pela ajuda prestada na hora certa, em especial ao Thiago que acompanhou todo trabalho e sempre que pode me ajudou.

Meus sinceros agradecimentos aos funcionários do laboratório, Cristina, Xina, Serginho, pela amizade, e em especial ao Diego pela ajuda durante os ensaios.

À CNPQ, pelo financiamento o qual tornou possível o desenvolvimento desse trabalho.

A todos que de alguma forma contribuíram com este trabalho.

RESUMO

SOUZA, M. G. **Identificação e Caracterização de Não-Linearidades em Dinâmica Estrutural**. 2008. 152 p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos 2008.

Esta dissertação tem como objetivo principal realizar uma investigação sobre técnicas de identificação e caracterização de não linearidades em dinâmica estrutural. Em particular, busca-se aplicar as Transformadas de Hilbert e Hilbert-Huang na identificação e caracterização de um sistema estrutural composto de uma viga metálica em balanço com uma massa concentrada em sua extremidade livre e apresentando uma não linearidade cúbica. Este efeito não linear é obtido através de um fio metálico tracionado que é fixo à extremidade livre da viga em balanço. O sistema é modelado através de ferramentas analíticas convencionais e o modelo do sistema é usado em simulações numéricas. Ensaios experimentais de vibração livre são realizados e os sinais medidos são usados como dados de entradas nas transformadas afim de se investigar o fenômeno não linear presente na estrutura. Os resultados simulados numericamente apresentaram uma excelente correlação com os resultados experimentais no que se refere à identificação e caracterização do efeito não linear cubico presente no sistema. Algumas distorções entre resultados simulados e experimentais foram observados no que se refere à quantificação do parâmetro não linear, mas de forma geral, as técnicas empregadas produziram resultados bastante satisfatórios.

Palavras-chave: Vibrações não-lineares, método de Hilbert, método de Hilbert-Huang

ABSTRACT

SOUZA, M. G. Identification and Characterization of Nonlinearities in Structural Dynamics. 2008. 152 pp. M.Sc. Thesis – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos 2008.

The major goal of this dissertation is to investigate currently available techniques to the identification and characterization of nonlinearities in structural dynamics. Particular attention is paid to the application of the Hilbert and Hilbert-Huang Transforms in the nonlinearity identification and characterization process. For that purpose, a structural system composed of a steel cantilever beam carrying a lumped mass at its free end is used. The nonlinear effect is introduced by attaching the lumped mass to a thin steel wire that is positioned transversely to the beam's longitudinal axis. By varying the traction force on this wire different levels of nonlinearity can be observed on the beam's bending motion when it undergoes free vibrations. The system analytical model is obtained by employing standard modeling techniques and this model is used in numerical simulations. An experimental survey is carried out on an actual prototype in order to provide a comparison basis for the numerically simulated results. The output vibration signals resulting from either the numerical simulations and experimental tests are then used with the transform methods studied and the results are compared. A good correlation is observed between numerical and experimental data, what is a clear indication of the robustness of the Hilbert and Hilbert-Huang transforms.

Keywords: Nonlinear vibrations, Hilbert Transform, Hilbert-Huang Transform, Nonlinearity Identification

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 Aparato experimental utilizado, CHONG e IMREGUN (2000).....	27
FIGURA 2.1 Oscilador linear massa-mola, amortecido.	34
FIGURA 2.1 Resposta transiente do sistema.....	36
FIGURA 2.3 FRF, representada acima e logo abaixo o ângulo de fase.	38
FIGURA 2.4 Teste de homogeneidade para uma estrutura real. A superposição das FRFs, dentro de uma certa gama de α , mostra que a estrutura é linear, nesta região, WORDEN e TOMLINSON (2001).	44
FIGURA 2.5 Medidas de FRF para um oscilador não linear com um grau de liberdade, contendo uma não linearidade cúbica na rigidez, submetido a diferentes tipos de excitação: (a) entrada senoidal; (b) impulso; (c) Chirp; (d) randômica. (WORDEN e TOMLINSON (2001).	47
FIGURA 3.1. Plano complexo (POULARIKAS,1996, p.467).....	53
FIGURA 3.2 Transformada de Hilbert aplicada a um sinal harmônico simples: linha cheia corresponde a um seno;a linha tracejada a sua respectiva transformada de Hilbert, ou seja, um cosseno.....	57
FIGURA 3.3 Plano complexo, usado para derivar o conceito amplitude instantânea, ângulo de fase instantâneo e frequência instantânea.	59
FIGURA 3.4 Envelope superior e inferior, obtidas através do ajuste cubic spline, TOLWINSKI, S. (2007).	69
FIGURA 3.5 Linha azul representa a envelope superior, linha vermelha a envelope inferior e a linha rosa a média aritmética dos dois envelopes, TOLWINSKI, S. (2007).	69
FIGURA 3.6 Primeira suposta função intrínseca de modo.....	70
FIGURA 3.7. Resposta dinâmica do sistema linear descrito pela Equação (3.56).....	75
FIGURA 3.8. Resposta no domínio da frequência.	76

FIGURA 3.9 Curva de amplitude em função do tempo (função envelope).....	77
FIGURA 3.10. Curva de frequência natural em função do tempo.	77
FIGURA 3.11. Curva da amplitude em função da frequência natural	78
FIGURA 3.12. Curva de força em função da amplitude	78
FIGURA 3.13. Resposta dinâmica do sistema não-linear com $\varepsilon = 0.01$	79
FIGURA 3.14. Resposta no domínio da frequência, para o sistema não-linear.....	80
FIGURA 3.15. Amplitude instantânea, para o sistema não-linear.	81
FIGURA 3.16. Frequência natural instantânea, sistema não-linear.	82
FIGURA 3.17. Amplitude em função da frequência, sistema não-linear.....	82
FIGURA 3.18. Força em função da amplitude, sistema não-linear..	83
FIGURA 3.19. Resposta do sistema não-linear forçado.	84
FIGURA 3.20 Resposta em frequência do sistema não-linear forçado.....	85
FIGURA 3.21 Primeira IMF $c_1(t)$, obtida pela técnica EMD.	85
FIGURA 3.22. Segunda IMF $c_2(t)$, obtida pela técnica EMD.....	86
FIGURA 3.23 Resposta em frequência da primeira IMF, $c_1(t)$	87
FIGURA 3.24 Resposta em frequência da segunda IMF, $c_2(t)$	87
FIGURA 3.25 Curva da amplitude instantânea obtida para a função $c_1(t)$	88
FIGURA 3.26 Curva da frequência natural instantânea da função $c_1(t)$	89
FIGURA 3.27 Amplitude em função da frequência natural obtida de c_1	89
FIGURA 3.28 Força em função da amplitude, obtida de c_1	90
FIGURA 4.1 Estrutura experimental utilizada.....	95
FIGURA 4.2 - Esta foto mostra a estrutura utilizada para os ensaios experimentais, com o acelerômetro no centro da massa concentrada.	95
FIGURA 4.3 Modelo físico utilizado, MARIM (2004).	96

FIGURA 4.4 Diagrama de forças no sistema sob investigação, MARIM (2004).	97
FIGURA 4.5 Resposta dinâmica para o modelo matemático (sistema linear).	104
FIGURA 4.6 Resposta em frequência para o modelo linear da viga.	105
FIGURA 4.7 Frequência natural instantâneo, para o sistema linear.	106
FIGURA 4.8 Amplitude instantânea do sistema linear.	107
FIGURA 4.9 Amplitude versus frequência natural, sistema linear.	107
FIGURA 4.10 Curva de força versus amplitude, sistema linear.	108
FIGURA 4.11 Resposta dinâmica para o sistema não linear (viga-fio).	110
FIGURA 4.12 Resposta no domínio da frequência, sistema não-linear.	111
FIGURA 4.13 Frequência natural instantânea, sistema não-linear.	112
FIGURA 4.14 Amplitude instantânea, sistema não-linear.	113
FIGURA 4.15 Amplitude versus frequência, sistema não-linear.	113
FIGURA 4.16 Curva de força versus amplitude, sistema linear.	114
FIGURA 5.1 Sistema experimental utilizado	119
FIGURA 5.2 Aparato experimental e sistema de aquisição de dados.	119
FIGURA 5.3 Esquema de fixação entre a massa concentrada e fio.	120
FIGURA 5.4 Sinal de aceleração (sistema não-linear).	122
FIGURA 5.5 Resposta em frequência do sistema não-linear.	123
FIGURA 5.6 Primeira IMF $c_1(t)$, obtida pelo método EMD.	124
FIGURA 5.7 Sinal de deslocamento da viga.	126
FIGURA 5.8 Resposta em frequência da viga.	127
FIGURA 5.9 Curva da frequência natural instantânea para a viga sem fio.	129
FIGURA 5.10 Curva da amplitude instantânea para a viga sem fio.	129
FIGURA 5.11 Amplitude versus frequência natural para a viga sem fio.	130
FIGURA 5.12 Curva de força versus amplitude para a viga sem fio.	130

FIGURA 5.13 Resposta de deslocamento da viga, com fio.	131
FIGURA 5.14 Resposta em frequência (filtrada), para o sistema viga-fio.	132
FIGURA 5.15 Frequência natural instantânea, sistema viga-fio.....	134
FIGURA 5.16 Amplitude instantânea, sistema viga-fio.	134
FIGURA 5.17 Amplitude versus frequência natural, sistema viga-fio.	135
FIGURA 5.18 Curva de força versus amplitude, sistema viga-fio.....	135
FIGURA 5.19 Folga entre o fio e o suporte na massa concentrada.	137
FIGURA 5.20 Resposta dinâmica do sistema com folga no suporte.....	137
FIGURA 5.21 Resposta em frequência do sistema com folga no suporte.	138
FIGURA 5.22 Frequência natural instantânea, sistema com folga.	140
FIGURA 5.23 Amplitude instantânea, sistema com folga.	140
FIGURA 5.24 Amplitude versus frequência natural, sistema com folga.....	141
FIGURA 5.25 Curva de força versus amplitude, sistema com folga	141

LISTA DE ABREVIACÕES

EMD	Empirical Method Decomposition
FFT	Fast Fourier Transform
FRF	Função de Resposta em Frequência
GDL	Graus De Liberdade
IMF	Intrinsecal Mode Function
MGDL	Múltiplos Graus De Liberdade

LISTA DE SÍMBOLOS

Romanas Maiúsculas

A	Amplitude do sinal (m)
$\dot{A}$	Derivada primeira da amplitude com relação ao tempo (m/s)
$\ddot{A}$	Derivada segunda da amplitude com relação ao tempo (m/s^2)
A_f	Área da secção transversal do fio (m^2)
$A(\omega)$	Acelerância
A_j	Amplitude do j-ésimo elemento do sistema
$[C]$	Matriz de amortecimento
D_v	Limite de convergência
E_f	Módulo de elasticidade do fio (Pa)
E_v	Módulo de elasticidade da viga (Pa)
F_f	Força no fio (N)
$\{f\}$	Vetor de força aplicado ao sistema (N)
$F(\omega)$	Força no domínio da frequência
$H(\omega)$	Função de Resposta em Frequência
$H_{ij}(\omega)$	FRF em relação a entrada i e saída j
H_{AB}	FRF em relação a entrada A e saída B
H_{BA}	FRF em relação a entrada B e saída
$H[\psi_1(t)]$	Transformada de Hilbert do sinal $\psi_1(t)$
I_{zv}	Momento de inércia da viga com relação ao eixo z (m^4)
$[K]$	Matriz de rigidez do sistema

K_{eq}	Rigidez equivalente
L_v	Comprimento da viga (m)
L	Lagrangiana do sistema
$[M]$	Matriz de massa
P	Valor principal de Cauchy
Q_{NC}	Força não conservativa generalizada
R	Raio do semi-círculo do plano complexo
T	Energia cinética
T_f	Tração no fio
T_f^i	Tração inicial no fio
U_f	Energia de deformação no fio
U_T	Energia de deformação total
U_v	Energia de deformação na viga
V	Energia potencial do sistema
X_0	Amplitude inicial de deslocamento
$X(\omega)$	Entrada no domínio da frequência
$V(\omega)$	Mobilidade
Y	Deslocamento analítico do sistema

Romanas minúsculas

a	Amplitude do sinal
a_3	Amplitude do termo não linear
c	Coeficiente de amortecimento
$c_1(t)$	Primeira IMF

$c_{11}(t)$	Primeira suposta IMF, primeira interação
c_{12}	Primeira suposta IMF, segunda interação
c_{1k}	Primeira suposta IMF, k-ésima interação
$c_i(t)$	i-ésima IMF
c_i	Coeficiente do i-ésimo termo do sistema
f_0	Amplitude inicial da força aplicada
$f(t)$	Força externa aplicada ao sistema
$f_1(t)$	Força aplicada na posição 1
$f_2(t)$	Força aplicada na posição 2
f_A	Força aplicada na posição A
f_B	Força aplicada na posição B
f_d	Força amortecedora
f_s	Força de rigidez do sistema
$h_0(A)$	Coeficiente de amortecimento não linear
k	Constante de rigidez do sistema
l	Comprimento médio do fio
m_0	Massa total do sistema viga, massa concentrada, suporte e acelerômetro
m	Massa do oscilador
m_i	Massa do i-ésimo termo do sistema
m_{11}	Média da envelope superior e inferior, primeira interação
m_{12}	Média da envelope superior e inferior, segunda interação
m_{1k}	Média da envelope superior e inferior, k-ésima interação

p_i	i-ésimo termo de força aplicada ao sistema
$r_n(t)$	Resíduo do método EMD
u_0	Deslocamento da massa concentrada
u_i	Resposta do i-ésimo termo do sistema com MGD
x	Deslocamento do sistema
$\dot{x}$	Derivada primeira em relação ao tempo
$\ddot{x}$	Derivada segunda em relação ao tempo
x_t	Resposta do sistema 1GDL
$x_1(t)$	Sinal de saída capturado na posição 1
$x_2(t)$	Sinal de saída capturado na posição 2
$x_A(t)$	Sinal de saída capturado na posição A
$x_B(t)$	Sinal de saída capturado na posição B
$\{x\}$	Coordenadas geométricas do sistema com MGD
y	Deslocamento linear
$\tilde{y}$	Transformada de Hilbert da função deslocamento linear y
t	tempo
$\{z\}$	Coordenada geométrica na base desacoplada MGD

Grega Maiúscula

$\Phi(t)$	Ângulo de fase do sinal
Ω	Frequência da força aplicada ao sistema
$[\Psi]$	Matriz de auto-vetores do sistema linear

Gregas Minúsculas

α	Ângulo formado pelo fio e a horizontal
β	Ganho de força do sistema
δW_{NC}	Trabalho virtual das forças não conservativas
δu_0	Deslocamento virtual
ϕ_{ij}	Elemento da matriz modal
$\phi(t)$	Ângulo de fase
ε	Coefficiente de não linearidade
τ	Coordenada do eixo y no plano complexo
ω_0	Frequência natural do sistema com 1GDL
ω_d	Frequência amortecida do sistema
ω_n	Frequência natural do n -ésimo modo
ω_{di}	Frequência amortecida do sistema de MGD
ω_{ni}	Frequência natural do i -ésimo termo do sistema MGD
$\psi(z)$	Função analítica complexa
ζ	Coefficiente de amortecimento da sistema
ζ_i	Coefficiente de amortecimento do i -ésimo termo do sistema de MGD

SUMÁRIO

1 Introdução	19
1.1 Considerações Preliminares	19
1.2 – Revisão de Literatura	21
1.2.1– Técnicas de identificação de não-linearidades.....	21
1.3 – Objetivos	30
1.4 – Organização da Dissertação	30
2 Fundamentos da análise modal e de sua utilização na identificação de não linearidades	32
2.1 – Introdução	32
2.2 – Sistemas mecânicos lineares com 1GDL, oscilações livres.....	33
2.2.1 – Oscilador mecânico massa-mola, amortecido.	33
2.2.2 – Análise modal de sistemas com MGD L.	38
2.3 – Identificação de não linearidades, através do princípio de superposição, Homogeneidade, reciprocidade e diferentes tipos de excitações.....	42
2.3.1 – Princípio de superposição.	42
2.3.2 – Homogeneidade e distorções de FRFs.....	43
2.3.3 – Reciprocidade.	45
2.3.4 – Uso de diferentes tipos de excitação.....	46
2.3.5 – Harmônicos distorcidos.	47
3 Fundamentos teóricos, acerca do método de identificação e caracterização de não linearidades, através da transformada de Hilbert e Hilbert-Huang	51
3.1 – Introdução	51
3.2 – Transformada de Hilbert	52

3.3 – Técnica para analisar sistemas oscilantes não lineares, usando a Transformada de Hilbert.....	58
3.3.1 – Análise de sinais, através da transformada de Hilbert. Obtenção da amplitude instantânea, fase instantânea e frequência instantânea.....	58
3.3.2 – Aplicação da transformada de Hilbert, para analisar sistemas mecânicos vibrantes não lineares com (1GDL).	61
3.4 – A Transformada de Hilbert-Huang.....	66
3.4.1 – Método de decomposição empírica de modo (EMD)	66
3.4.1.1 – Procedimento para implementar computacionalmente o método (EMD) e suas respectivas (IMF).....	68
3.5 – Exemplos numéricos.....	74
3.5.1 – Análise numérica de um sistema de (1GDL) com oscilações livres, através da Transformada de Hilbert.	74
3.5.2 – Análise numérica de um sistema não-linear com oscilações forçadas, através da Transformada de Hilbert-Huang.....	83
4 Obtenção do modelo matemático do sistema sob investigação.....	92
4.1 – Introdução.....	92
4.2 – Modelo Físico sob investigação.	93
4.3 – Modelagem matemática.....	96
4.4 – Resultados numéricos obtidos para o modelo físico.	103
4.4.1 – Resultado numérico obtido para o modelo linear da viga.	103
4.4.2 – Resultado numérico obtido para o modelo não-linear (viga-fio).	109
5 Resultados experimentais do sistema real sob investigação.....	116
5.1 – Resultados obtidos experimentalmente	116

5.1.1 – Problemas na obtenção da FRF e descrição do aparato experimental utilizado.	
.....	117
5.1.2 – Primeira análise de resultados, método de Hilbert-Huang.	121
5.1.3 – Segunda análise de resultados, método utilizando filtro e Hilbert	125
5.1.3.1 – Análise da resposta livre da viga sem o fio (sistema linear).....	126
5.1.3.2 – Análise da resposta experimental livre da viga com o fio (sistema não-linear).....	131
5.2.3.3 – Análise da resposta experimental livre da viga com o fio possuindo uma folga na base de fixação da massa concentrada (efeito Clearance)	136
6 Conclusão e trabalhos futuros	142
6.1 – Conclusão.....	142
6.2 – Trabalhos Futuros	144
7 Referências bibliográficas e bibliografia consultada	145
8 Anexo.....	149

Introdução

No capítulo de introdução dessa dissertação serão apresentadas algumas considerações preliminares acerca de identificação, caracterização e quantificação de não linearidades em dinâmica estrutural, através da análise modal experimental. Ainda neste capítulo, será apresentada uma revisão da literatura envolvendo os assuntos pertinentes à técnicas de identificação de não linearidades em estruturas. Por fim, serão apresentados os objetivos principais deste trabalho e será apresentada a organização desta dissertação.

1.1 Considerações Preliminares

Com o advento do computador, no século passado, a área de engenharia passou a se desenvolver de forma rápida e mais eficaz, uma vez que, este podem nos fornecer cálculos rápidos e com grande precisão, produzindo assim, máquinas e estruturas cada vez mais rápidas e leves, que são verdadeiras obras de arte da engenharia. Uma destas atuais obras da engenharia é o A-380, aeronave de transporte de passageiros com capacidade para transportar até 845 passageiros e que pode alcançar uma velocidade máxima de 953 Km/h.

Entretanto, a crescente necessidade de máquinas mais leves e cada vez mais velozes tem forçado os diversos segmentos produtivos da área metal-mecânica a buscar novas formas alternativas a fim de conferir níveis adequados de rigidez a um dado produto. Neste contexto, a vibração estrutural desempenha um papel importante no cenário de máquinas e estruturas

em geral sujeitas a carregamentos dinâmicos. Em particular, quando submetido a grandes deformações, um dado elemento estrutural pode exibir um comportamento dinâmico não-linear muitas vezes indesejado, principalmente se seu projeto tenha sido concebido à luz de hipóteses de linearidade.

Assim, é provável que todas estruturas práticas de engenharia sejam não-lineares até certo ponto,(WORDEN; TOMLINSON, 2004), sob condições reais de operação, o que pode modificar, algumas vezes de forma catastrófica, o comportamento destes sistemas estruturais.

Estas não linearidades podem ser causadas por um, ou a combinação de vários fatores, como: juntas estruturais, propriedades não-lineares do material (rigidez, amortecimento), geometria, etc.

Neste contexto, identificação, caracterização e quantificação de não-linearidades em estruturas são de fundamental importância para as áreas de projetos mecânicos e estruturais e este é um dos grandes desafios da análise modal experimental. O desafio consiste em descobrir como extrair quantitativas características dinâmicas e efeitos não-lineares através da resposta dinâmica, especialmente se apenas respostas transientes forem consideradas, (PAI, et al. 2007).

Contudo, uma gama de técnicas e métodos para tratar de problemas não-lineares, tanto analiticamente quanto experimentalmente, vem sendo desenvolvidas nos últimos anos, sobretudo para averiguar se uma estrutura pode ser classificada como linear ou não linear, (WORDEN; TOMLINSON, 2004).

1.2 – Revisão de Literatura

Nesta seção será apresentada uma revisão da literatura envolvendo o assunto sobre identificação, caracterização e quantificação de não-linearidades em estruturas, através de análise modal experimental. Conforme se apresentara nos objetivos deste trabalho, enfatizar-se-á o estudo de técnicas de identificação de não linearidades através da análise do sinal da resposta do sistema, no domínio do tempo (aceleração, velocidade e deslocamento), no qual será aplicada a técnica de análise conhecida como Hilbert-Huang, visto que a obtenção de características dinâmicas e efeitos não lineares pela resposta dinâmica do sistema por si só já oferecem desafios significativos ao experimentalista em análise modal.

1.2.1– Técnicas de identificação de não-linearidades

Os estudos fundamentais sobre teoria de sistemas estruturais oscilantes foram desenvolvidos ao longo de vários anos e apresentados em diversos livros importantes, como por exemplo, em (KRYLOV, 1937); (STOKER, 1950); (MACLACHAN, 1950); (MINORSKI, 1962); (NAYFEH; MOOK, 1979); (EWINS, 2000); (THOMPSON; STEWART, 1986); (MEIROVITCH, 1986); (CARTWELL, 1990); (RAO, 1992); (INMAN, 1994); (SRINIVASAN, 1995); (THOMSON; DHALEH, 1998); (VIRGIN, 2000); (WORDEN; TOMLINSON, 2001) e outros, os quais serviram de base para estudos na área de identificação e caracterização de sistemas lineares e não lineares. Neste contexto, a análise modal experimental tornou-se uma poderosa ferramenta tanto para desenvolver modelos matemáticos, como também, para validar os mesmos, sobretudo na área de identificação, caracterização e quantificação de não linearidades em estruturas vibrantes.

A análise modal foi aplicada pela primeira vez com sucesso em 1940, (MAIA, et al., 1997), em um estudo que proporcionou o entendimento do comportamento dinâmico de uma estrutura de aeronave. No entanto, nesta época a tecnologia, de acordo com a visão de hoje, era menos sofisticada e modelos teóricos totalmente lineares concordavam bem com testes modais. Mas, após a segunda guerra mundial, principalmente com o advento do computador eletrônico, as estruturas tornaram-se mais esbeltas, o que veio a potencializar as suas não-linearidades, gerando uma discordância entre teoria e experimento, uma vez que, a maioria dos modelos teóricos continuou a ser concebido à luz de hipóteses lineares.

Assim, podemos dizer que hoje vivemos em um mundo com estruturas altamente complexas e não-lineares, o que nos gerou e ainda vem gerando uma vasta gama de técnicas e métodos, tanto analiticamente como experimentalmente, em ordem para averiguar se uma estrutura é linear ou não linear, dentre as quais citaremos algumas a seguir.

Masri e Caughey (1979) apresentaram uma técnica de identificação de não linearidades não-paramétrica. Para isto, usam informações sobre estados variáveis de sistemas não lineares para expressar características do sistema em termos de funções ortogonais. O método pode ser usado tanto com excitação determinística, quanto excitação aleatória, para identificar não linearidades arbitrárias. No entanto, o método requer informações relacionadas ao deslocamento, velocidade, aceleração e força restauradora atuando no sistema para determinar não linearidades através da técnica de regressão.

Simon e Tomlinson (1984) utilizaram a transformada de Hilbert para identificar e caracterizar não linearidades em sistemas estruturais, em análise modal. Esta técnica é fundamentada no desenvolvimento de um algoritmo para transformada de Hilbert discreta e usada em programas de computação, os quais podem ser aplicados para analisar a função de resposta e frequência (FRF) de dados reais. Nenhuma hipótese relativa ao grau de não-

linearidade é feita, o qual é uma restrição em métodos clássicos para lidar com não linearidades. Simulações numéricas, para sistemas com um grau de liberdade (1GDL) e múltiplos graus de liberdade (MGDL), contendo diferentes tipos de não-linearidades como: não-linearidades no amortecimento, na rigidez e *clearance* (folga entre junções) são analisadas. O método mostrou-se eficiente na identificação e caracterização de diferentes tipos de não linearidades. A ausência da necessidade de gerar modos explícitos é a grande vantagem da técnica e, também, um diferencial em relação a outras técnicas usando Hilbert. Entretanto, o fato do método analisar sinais de FRF implica em dificuldades para analisar sinais de respostas, gerados por sinais de entrada diferentes de funções senoidais, como por exemplo, sinais aleatórios ou transientes.

Feldman (1994) também utiliza a transformada de Hilbert para analisar sistemas vibratórios não lineares. Entretanto, neste trabalho utiliza-se a transformada de Hilbert para analisar o sinal no domínio do tempo, diferentemente do trabalho citado anteriormente, (SIMON; TOMLINSON, 1984), onde se utiliza o domínio da frequência. Em linhas gerais, podemos dizer que a transformada de Hilbert, para um dado sinal harmônico no domínio do tempo, corresponde apenas a um atraso na fase do sinal de $\frac{-\pi}{2}$. Portanto, a transformada de Hilbert de um $\sin(t)$ é um $\cos(t)$. Assim, utilizando a teoria de funções complexas obtém-se informação acerca da amplitude instantânea e do ângulo de fase instantânea do sinal de resposta do sistema. Derivando-se o ângulo de fase do sinal obtém-se a frequência instantânea do sinal. Com isso, ele mostra que inter-relacionando estas funções, ou seja, amplitude instantânea, frequência instantânea e respectivas derivadas das mesmas pode-se construir funções e traçar gráficos que nos fornece informações sobre o comportamento dinâmico do sistema, mostrando se este é linear o não-linear. No entanto, neste trabalho considerado como parte I, em identificação de sistemas não lineares, Feldman só analisa sistemas submetidos a

vibrações livres, deixando o caso de vibrações forçadas para a parte II, que citaremos a seguir. A técnica desenvolvida apresentou bons resultados para identificação de não-linearidades como rigidez não-linear e amortecimento, através de simulação de um sistema de um grau de liberdade, equação de Duffing.

Feldman (1994), este trabalho de Feldman é considerado uma continuação do trabalho citado anteriormente, por isso é denominado de parte II, na identificação de não-linearidade em sistemas oscilantes. Novamente, a transformada de Hilbert é utilizada para a identificação de parâmetros modais não-lineares instantâneos, como frequências instantâneas, amortecimento instantâneo e amplitude de vibração instantânea. Entretanto, nesta etapa é analisado sistemas com vibrações forçadas. A técnica pode ser utilizada para analisar sistemas com múltiplos graus de liberdade desde que este seja posto a vibrar ou próximo ou em uma das frequências naturais do sistema, para cada modo de vibrar. Entretanto, é preciso utilizar uma equação, deduzida no trabalho, para estimar a massa de cada modo analisado.

Huang et al. (1996), apresenta um método para analisar dados baseados num método chamado de decomposição empírica de modos (*EMD-empirical method decomposition*), o qual gera uma coleção de funções intrínseca de modos (*IMF- intrinsic mode function*). Com as IFMs, obtidas, aplica-se a transformada de Hilbert em cada função intrínseca de modo derivando-se por exemplo a frequência instantânea no tempo. Desta forma, pode-se localizar qualquer evento no tempo, com também o eixo da frequência. A decomposição pode ser vista como uma expansão dos dados em termos de IFMs. Uma observação importante é que a decomposição é um método adaptativo, assim, desde que a decomposição é baseada na característica local dos dados, na escala do tempo, ela pode ser aplicada para análise de sinais não-lineares e não estacionários.

Feldman (1997) também aplica a transformada de Hilbert para analisar a resposta de sistemas não-lineares, vibração livre. Simulações numéricas para sistemas com 1GDL e com dois graus de liberdades (2GDL) são realizados para efeitos não lineares na rigidez e no amortecimento. No entanto, a técnica da transformada de Hilbert dá resultados efetivos para sistemas com 1GDL, tendo muitas controvérsias para o uso em análise de sistemas com MGD. Assim, é usada uma técnica para filtragem ordinária no domínio da frequência, para analisar o modelo com 2GDL, o que demonstrou bons resultados para identificar as não linearidades.

Staszewski (1998) desenvolveu uma técnica de identificação e caracterização de não-linearidades em sistemas estruturais similar à técnica da transformada de Hilbert. A técnica é baseada na análise da amplitude e frequência instantâneas, obtidas através das chamadas *Ridges e Skeletons* da transformada de Wavelet, aplicada a resposta impulsiva de sistemas não lineares. A transformada contínua de Wavelet é um método que converte um sinal unidimensional, espaço 1D no domínio do tempo, em uma resposta no domínio tempo-frequência, ou seja, espaço 2D bidimensional. A técnica foi aplicada em simulações numéricas para análise de sistemas não-lineares com 1GDL e para sistemas com MGD, dando resultados satisfatórios para identificação de não linearidades. No entanto, simulações mostram que o método não dá resultados satisfatórios, quando o sinal de resposta possui alto nível de ruído.

Yasuda e Kamiya (1999) propuseram uma nova técnica experimental de identificação aplicável para estruturas elásticas. A técnica proposta é baseada no princípio do balanço harmônico e pode ser classificada como uma técnica no domínio da frequência. Isto requer que a força de excitação seja periódica, o que torna o método restrito. Para remover esta restrição, eles desenvolveram uma nova técnica no domínio do tempo. O primeiro passo é examinar a forma da equação governante e então duas técnicas para estimar parâmetros da

equação governante são desenvolvidas. A primeira é baseada no método dos mínimos quadrados, e a segunda é baseada na minimização da solução do problema, utilizando o método dos multiplicadores indeterminados de Lagrange. Este último apresenta resultados mais precisos, no entanto, um procedimento de interação é usado o qual necessita de valores conhecidos de parâmetros iniciais. A técnica foi testada, tanto numérica quanto experimentalmente, produzindo resultados satisfatórios.

Chong e Imregun (2000), parte I, descreveram uma técnica de análise modal no domínio da frequência para identificar não linearidades fracas em sistema com MGDL com modos bem separados, através dos parâmetros modais. O conceito de superposição de modos lineares é combinado com a técnica de modos normais não lineares, uma aproximação que permite a formulação de um procedimento para identificar sistemas em termos de parâmetros modais variáveis. Simulações numéricas foram realizadas para validar o método para um sistema de 4GDL, com uma não linearidade cúbica na rigidez do sistema. Os resultados obtidos com o método foram comparados com outros resultados obtidos através da técnica do balanço harmônico, demonstrando uma concordância satisfatória entre os dois.

Chong e Imregun (2000), parte II dando continuidade ao trabalho apresentado na parte I, realizaram um experimento para a validação da técnica descrita anteriormente. O experimento, consiste de uma viga linear engastada em uma das extremidades e com duas outras vigas presas na outra extremidade formando um T, cuja finalidade é provocar uma não linearidade cúbica na rigidez do sistema, ver Figura (1.1), abaixo.

FIGURA 1.1 Aparato experimental utilizado, (CHONG; IMREGUN, 2000).

Os resultados obtidos concordaram satisfatoriamente com as medidas correspondentes, indicando o sucesso da metodologia da análise modal não linear, mesmo na presença de ruídos. No entanto, embora os resultados experimentais concordem satisfatoriamente com resultados obtidos pelo método do balanço harmônico, a técnica de análise modal não linear apresenta um número de limitações, como por exemplo:

- 1- Ela funciona melhor para análise de sistemas que tenham não linearidades fracas.;
- 2- As frequências naturais devem ser bem separadas;
- 3- A análise é baseada no primeiro harmônico da resposta e conseqüentemente não é confiável para estudar não linearidades em sistema com múltiplos harmônicos.

Ghanem e Romeu (2001) apresentaram um procedimento para identificar parâmetros mecânicos, de sistemas não lineares discretos. Isto, permite tanto estimar parâmetros de modelos dinâmicos previamente conhecidos, bem como, através da resposta de entrada e saída de modelos não lineares. O procedimento é baseado na solução da equação de

movimento do sistema não linear através da técnica Wavelet-Galerkin, permitindo estimar parâmetros de modelos não lineares através de dados de resposta de entrada e saída. Simulações numéricas para sistemas com não linearidade cúbica na rigidez e não linearidades devido ao atrito foram testadas, obtendo-se parâmetros precisos tanto para excitação livre como para forçada. No entanto, os resultados foram obtidos para simulações numéricas ideais, ou seja, sem a presença de ruído.

Moon e Kang (2003) desenvolveram uma técnica analítica para estimar respostas de sistemas não lineares aplicadas a máquinas rotativas. A técnica é baseada no método teórico das múltiplas escalas e o princípio de superposição de modos. Então, sistemas complexos não lineares são divididos em subestruturas contendo componentes lineares e não lineares. Através de resultados obtidos em simulações numéricas demonstrou-se a eficiência da técnica com respeito a previsões feitas pelo método de perturbações.

Yang e Lin (2004) usaram uma técnica adaptativa de localização baseada na estimação recursiva via mínimos-quadrados para identificar parâmetros de sistemas e variações nestes parâmetros em estrutura não lineares apresentando histerese. O algoritmo de localização é baseado na adaptação de dados de medidas para determinar parâmetros de variação. O método usa deslocamento, velocidade e aceleração para determinar uma solução recursiva de parâmetros do sistema. O trabalho apresenta simulações numéricas para 1GDL e 2GDL, em estruturas não lineares histeréticas.

Goge et al. (2005) usaram uma técnica para identificar não linearidades em estrutura de aeronaves, observando-se o comportamento entre frequência de ressonância, amplitude de vibração, nível de excitação e funções de excitação, em testes de GVTs (*Ground Vibrations Testing*). Para isto, analisaram o comportamento da estrutura, através de curvas de frequência de ressonância versus amplitude máxima de vibração, amplitude versus força de excitação, e

FRFs (funções de resposta e frequência) para diferentes tipos de excitação, para cada modo de vibração.

Ta e Lardiès (2006) também usaram a transformada contínua de Wavelet para identificar e quantificar sistemas vibratórios não lineares através da análise do sinal de resposta livre do sistema. A técnica também é baseada na análise da amplitude e da frequência instantâneas. O método, utiliza uma função Morlet modificada na Wavelet quando comparado com o descrito por (STASZEWSKI, 1998). Resultados numéricos e experimentais para sistemas com 1GDL e MGD, contendo não linearidades fracas na rigidez e no amortecimento, são apresentados.

Pai (2007) apresentou um método para identificar e caracterizar não linearidades em estruturas vibratórias. O método é chamado de transformada de Hilbert-Huang e pode ser aplicada a análise de sistemas com MGD, uma vez que, utiliza junto com o método de Hilbert uma técnica para decompor sinais com múltiplos harmônicos em sinais com harmônicos simples. A técnica de decomposição foi desenvolvida por, (HUANG et al., 1996). Simulações numéricas foram realizadas para validar o método e mostraram-se bastantes eficientes. A técnica de Hilbert-Huang foi considerada mais apropriada que a transformada de Fourier e a transformada de Wavelet para analisar sinais não lineares.

Pai (2007) neste trabalho também utilizou à técnica da transformada de Hilbert-Huang para identificar, caracterizar e quantificar não linearidades presentes em sistemas estruturais. Entretanto, o principal enfoque neste trabalho é estudar sistemas não lineares, analisando a modulação da amplitude e da frequência (AFMM- *amplitude and frequency modulation method*), predita pela teoria de perturbação. Algumas simulações numéricas foram realizadas, demonstrando uma eficaz acurácia do método na estimação de parâmetros não lineares, através da análise da modulação da frequência e amplitude, como rigidez cúbica,

amortecimento quadrático, e outros. No entanto, devido a imprecisões geradas no final dos dados de análise, por causa do chamado fenômeno de Gibb, a técnica precisa ser mais bem estudada para dar mais precisão e robustez ao método. Além do mais, o método da modulação da amplitude e da frequência precisa ser validado experimentalmente.

1.3 – Objetivos

Esta dissertação tem, então, como objetivo principal o estudo e a validação de uma técnica para identificação, caracterização e quantificação de não linearidades em estruturas vibratórias, através de medidas experimentais. Para o cumprimento deste objetivo principal definiu-se os seguintes objetivos secundários:

Realizar uma revisão de literatura, acerca de técnicas de identificação de não linearidades em estruturas, desenvolvidas nos últimos anos.

Confrontar as técnicas, averiguando qual delas identificam uma gama maior de efeitos não lineares, com razoável precisão.

Escolher a técnica, fazer um estudo teórico e profundo sobre a técnica e aplicar o método em um experimento para validar a mesma.

A escolha da técnica para estudo e validação neste trabalho se deu analisando as seguintes características: precisão, facilidade na aplicação e implementação e aplicabilidade para vários efeitos não lineares. A técnica escolhida para o estudo e validação foi a de transformada de Hilbert-Huang, (HUANG et al., 1996), (PAI, 2007).

1.4 – Organização da Dissertação

Esse trabalho é composto por sete capítulos, os quais encontram-se divididos da seguinte forma:

O capítulo 1 corresponde ao capítulo de introdução, onde são apresentados o objetivo desta dissertação assim como a revisão de literatura que dá base para a realização do trabalho.

O capítulo 2 apresenta o desenvolvimento teórico acerca de vibrações lineares e não lineares.

O capítulo 3 apresenta a técnica de Hilbert e Hilbert-Huang para identificar, caracterizar e quantificar não linearidades em estruturas, bem como alguns exemplos numéricos.

O Capítulo 4 apresenta o modelo físico e teórico estudado neste trabalho, e os respectivos resultados numéricos para o modelo matemático obtido.

O capítulo 5 apresenta os resultados experimentais e discussão.

O capítulo 6 apresenta conclusão, assim como sugestões para a continuação deste que poderão ser desenvolvidas no futuro.

O capítulo 7 apresenta as referências bibliográficas e as bibliografias consultadas

No anexo está apresentado o programa utilizado para decompor sinais com múltiplos harmônicos, técnica EMD.

Fundamentos da análise modal e de sua utilização na identificação de não linearidades

Este capítulo é destinado a dar uma introdução teórica, acerca de oscilações lineares e não lineares de sistemas mecânicos. O objetivo principal é revisar conceitos fundamentais em análise modal de estruturas, possibilitando desta forma uma melhor compreensão do comportamento dinâmico de tais sistemas, principalmente com relação a distinção entre suas respostas dinâmicas, lineares e não lineares. Para isto, serão analisadas respostas de tais sistemas tanto no domínio da frequência, através das funções de resposta em frequência (FRF), quanto no domínio do tempo.

2.1 – Introdução

Podemos dizer que o mundo em que vivemos hoje é altamente não linear. Entretanto, para compreender os sistemas mecânicos não lineares, faz-se necessário um conhecimento prévio acerca de análise modal de sistemas lineares para que possamos melhor compreender a análise modal e principalmente através dela distinguir ou identificar sistemas com comportamento não lineares.

Desta forma, este capítulo está dividido da seguinte forma: na segunda seção daremos uma breve introdução sobre sistemas mecânicos lineares com 1GDL e apresentaremos o

conceito de FRF, bem como as principais características destes sistemas simples. Ainda nesta seção, estenderemos a análise para sistemas com MGD. Na terceira seção, já com os conhecimentos básicos, previamente estabelecidos, introduziremos alguns testes para identificar sistemas não lineares, através da análise modal experimental, tais como: homogeneidade ou FRF distorcidas, reciprocidade, uso de diferentes tipos de excitações e por fim, discutiremos a presença de harmônicos distorcidos, em respostas no domínio do tempo em sistemas não lineares.

2.2 – Sistemas mecânicos lineares com 1GDL, oscilações livres.

O objetivo desta seção é revisar os principais conceitos da teoria de análise modal de vibrações mecânicas, sobretudo com relação ao conceito de FRF e característica da resposta dinâmica no domínio do tempo. Para isto, analisaremos sistemas mecânicos simples, osciladores lineares.

2.2.1 – Oscilador mecânico massa-mola, amortecido.

Aplicando a segunda lei de Newton, para descrever a equação de movimento do oscilador harmônico massa-mola, amortecido, da Figura (2.1), abaixo, obtemos:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = f(t), \quad (2.1)$$

onde, m é a massa do sistema, c o coeficiente de amortecimento, k constante de rigidez da mola e $f(t)$ a força externa aplicada ao sistema. Esta equação é conhecida como equação de movimento do sistema com 1GDL.

FIGURA 2.1 Oscilador linear massa-mola, amortecido.

Uma observação importante, com relação a Equação (2.1) é que ela é uma equação diferencial ordinária não homogênea e linear. Assim, uma importante consequência disto é o Princípio de Superposição o qual pode ser formulado como se segue, (WORDEN; TOMLINSON, 2001):

“Se a resposta do sistema para uma arbitrária força $f_1(t)$ for $x_1(t)$, e para uma segunda entrada independente $f_2(t)$ for $x_2(t)$, então a resposta do sistema para a superposição $\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$ (com as apropriadas condições de contorno) é $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ para quaisquer valores das constantes α e β .”

Este princípio, como será mostrado mais adiante, será de fundamental importância para distinguir o comportamento dinâmico entre estruturas lineares e não lineares e principalmente na identificação de estruturas não lineares, através da análise modal.

Retornando agora para a Equação (2.1), através de teorias elementares é possível mostrar que a solução, para o caso de vibração livre sub-amortecida, ou seja, $f(t) = 0$ com condições iniciais $x(0) = A$ e $\dot{x}(0) = 0$ é:

$$x_t = A e^{-\zeta \omega_0 t} \cos(\omega_d t) \quad (2.2)$$

onde,

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (2.3)$$

e

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (2.4)$$

Aqui, $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ é a frequência natural sem amortecimento, ζ é o fator de amortecimento e $\omega_d \neq \omega_0$ é a chamada frequência natural amortecida do sistema.

Uma característica importante é que a frequência natural amortecida ω_d é sempre menor que frequência natural ω_0 . Como pode ser visto, através da Figura.(2.2), a resposta transiente é caracterizada por um decaimento exponencial, conhecida como função envelope, tal termo é dado por $Ae^{-\zeta\omega_0 t}$. Nesta expressão, a exponencial, possui um fator de amortecimento ζ e uma frequência natural de vibração ω_0 que são constantes no tempo, fato que não será verdade para sistemas não lineares, como será mostrado em seções posteriores.

Retornando novamente a Equação (2.1), vamos tratar a análise do comportamento de tal sistema só que de um ponto de vista diferente, considerando as principais características dinâmicas do sistema no domínio da frequência.

Para esta análise, vamos considerar na Equação (2.1) uma excitação da forma:

$$f(t) = f_0 e^{i\alpha t}, \quad (2.5)$$

FIGURA 2.1 Resposta transiente do sistema.

Desta forma, é de se esperar que a solução da Equação (2.1), com a excitação dada pela Equação (2.5), seja dada por:

$$x(t) = X_0 e^{i\omega t}, \quad (2.6)$$

onde, X_0 e f_0 agora são amplitudes complexas, as quais nos darão informações sobre a magnitude e o ângulo de fase do sistema. Logo, substituindo-se a Equação (2.5) e a Equação (2.6), com suas respectivas derivadas com relação ao tempo, na Equação (2.1), obtemos:

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k)X_0 e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t} \quad (2.7)$$

da qual, extraímos a requerida resposta modal na forma de uma função de resposta em frequência (FRF), conhecida também como receptância, (EWINS, 2000):

$$H(\omega) = \frac{X_0}{f_0}(\omega) = \frac{1}{k - \omega^2 m + i\omega c} \quad (2.8)$$

Note que esta expressão é uma função complexa, e portanto, possui informações tanto da magnitude $|H(\omega)|$ como do ângulo de fase $\Phi(\omega)$, ou seja:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}} \quad (2.9)$$

e

$$\phi(\omega) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega c}{(k - \omega^2 m)} \right). \quad (2.10)$$

Podemos observar que a FRF e o ângulo de fase, ou seja, Equação (2.9) e Equação (2.10), para sistemas lineares são independentes da magnitude da força de excitação, isto é, não dependem do nível de excitação aplicado ao sistema. Este fato não será verdade para FRF de sistemas não lineares, como observaremos em seções posteriores.

Para melhor compreender o comportamento destes sistemas, do ponto de vista de sua FRF, traçamos um gráfico para as equações: Equação (2.9) e Equação (2.10), ver Figura (2.3).

Outro ponto muito importante, é que a FRF de um sistema pode se apresentar de outras formas, ou seja, nós poderíamos ter selecionado como resposta de saída a velocidade, isto é, $v(t) = \dot{x}(t)$ e assim, definido outra FRF (conhecida como mobilidade), definida como:

$$V(\omega) = \frac{v}{f} = i\omega H(\omega) \quad (2.11)$$

FIGURA 2.3 FRF, representada acima e logo abaixo o ângulo de fase.

Ou, a FRF conhecida como aceleração, definida através da aceleração de saída

$a(t) = \ddot{x}(t)$, ou seja:

$$A(\omega) = \frac{a}{f} = -\omega^2 H(\omega) \quad (2.12)$$

2.2.2 – Análise modal de sistemas com MGD L.

Nesta seção, vamos generalizar a análise feita na seção anterior, para modelos com MGD L. Para isto, vamos analisar o caso de N osciladores harmônicos unidimensionais, amortecidos e acoplados.

Um modelo deste tipo, pode ser descrito pela seguinte equação de movimento:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}e^{i\omega t}, \quad (2.13)$$

onde, $[M]$ é a matriz de massa do sistema, $[C]$ a matriz de amortecimento, $[K]$ a matriz de rigidez, todas simétricas e de ordem N , $\{F\}$ o vetor de força aplicada ao sistema e $\{x\}$ as coordenadas geométricas.

A Equação (2.13), pode ser facilmente resolvida, aplicando-se conceitos sobre teoria de álgebra linear, (WORDEN; TOMLINSON, 2001), os quais asseguram a existência de uma matriz ortogonal $[\Psi]$, que diagonaliza simultaneamente as matrizes $[M]$, $[K]$ e $[C]$, quando esta última for por exemplo proporcional a matriz de massa.

De posse desta matriz $[\Psi]$, também conhecida como matriz modal, é possível através de uma mudança de coordenadas:

$$\{x\} = [\Psi]\{z\} \quad (2.14)$$

e da pré multiplicação da Equação (2.13) por $[\Psi]^T$, a transposta da matriz modal, desacopla todo o sistema, e obter um conjunto de osciladores harmônicos simples, como no caso das seções anteriores, ou seja,

$$m_i \ddot{z}_i + c_i \dot{z}_i + k_i z_i = p_i e^{i\omega t} \quad (2.15)$$

onde, p_i é o elemento de força generalizada. Esta equação é análoga a Equação (2.1), e pode ser resolvida facilmente como mostrado.

No caso de p_i ser igual a zero, a solução pode ser dada por:

$$z_i = A_i e^{-\zeta_i \omega_{ni} t} \text{sen}(\omega_{di} t - \theta_i) \quad (2.16)$$

onde, A_i e θ_i , são ambos obtidos pelas condições iniciais e

$$\zeta_i = \frac{c_i}{2\sqrt{m_i k_i}} \quad (2.17)$$

é o amortecimento modal e,

$$\omega_{di} = \omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (2.18)$$

é a i -ésima frequência natural amortecida. Assim, retornando para as coordenadas físicas, Equação (2.14), obtemos:

$$x_i = \sum_{j=1}^n \Psi_{ij} A_j e^{-\zeta_i \omega_i t} \text{sen}(\omega_{di} t - \theta_i) . \quad (2.19)$$

Retornando para a Equação (2.15), outra análise é no caso de p_i ser diferente de zero.

Neste caso, é instrutivo desenvolver uma análise no domínio da frequência, ou seja, em termos da definição de FRF, estabelecida na seção anterior. Assim, com algum trabalho algébrico e utilizando a definição de FRF, estabelecida na seção anterior, é possível chegar na expressão:

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{{}_k A_{ij}}{-m_i \omega^2 + i c_i \omega + k_i} \quad (2.20)$$

onde,

$${}_k A_{ij} = \frac{\Psi_{ik} \Psi_{jk}}{m_k} = \phi_{ik} \phi_{jk} . \quad (2.21)$$

Segue desta equação, que a FRF de um sistema linear com MGD, é a soma de n FRFs, de sistemas com 1GD, uma para cada frequência natural, (WORDEN; TOMLINSON, 2001).

A teoria sobre FRF, exposta acima é de fundamental importância em análise experimental de sistema, uma vez que, de posse de alguma curva experimental de FRF, ou seja, $H(\omega)$ os dados da curva podem ser ajustados para a forma da Equação (2.20) e os melhores valores para os parâmetros m_i , c_i e k_i , com $i = 1, \dots, N$, podem ser obtidos. Este processo é chamado de modelo modal do sistema é de extrema importância em análise de sistemas vibrantes lineares.

No entanto, enquanto a análise modal é uma ferramenta poderosa para a solução e análise de modelos dinâmicos lineares e invariantes no tempo, esta infelizmente não pode ser empregada na solução de modelos não-lineares. Tal incapacidade provem do fato de que os modelos não lineares não podem ser desacoplados por intermédio da matriz modal, (SILVA, 2006). Portanto, para a solução e análise de modelos dinâmicos não lineares torna-se necessário o emprego de alguma técnica dedicada a tais modelos. Uma das mais empregadas na análise de sistema não lineares é a técnica das múltiplas escalas, a qual por sua vez, descreveremos mais adiante e fará parte deste trabalho para analisar tais sistema, em conjunto com outra técnica, conhecida como Hilbert-Huang, que será descrita em detalhes no Capítulo (3), e que é a base deste trabalho.

Entretanto, embora as FRF sejam ferramentas obtidas a partir de modelos lineares, ainda assim, é possível utilizá-las como um instrumento na identificação de sistemas não lineares, uma vez que estes ferem o *princípio de superposição*, e que pode ser visto claramente em análise modal experimental, por técnicas como: homogeneidade e distorção de

FRF, reciprocidade, diferentes tipos de excitações e harmônicos distorcidos, que serão brevemente examinadas na seção seguinte.

2.3 – Identificação de não linearidades, através do princípio de superposição, homogeneidade, reciprocidade e diferentes tipos de excitações.

Nesta seção, daremos uma breve introdução em identificação de sistemas não lineares, mostrando as principais características e comportamento de sistemas não lineares, utilizando análise modal experimental. Para isto, serão apresentadas algumas técnicas como: princípio de superposição, homogeneidade e FRF distorcidas, reciprocidade, diferentes tipos de excitações e harmônicos distorcidos.

2.3.1 – Princípio de superposição.

O princípio de superposição, como discutido na seção 2.2, é o mais importante teste de linearidade para um sistema; em termos matemáticos ele define o que é linear e o que não é linear, (WORDEN; TOMLINSON, 2001).

Como descrito na seção 2.2, ele pode ser usado na identificação de sistemas lineares da seguinte forma: Se um sistema com condições iniciais dadas por $S_1 = \{x_1(0), \dot{x}_1(0)\}$ responde a uma entrada $f_1(t)$ com uma saída $x_1(t)$ e em contra partida, para um segundo teste, com condições iniciais dadas por $S_2 = \{x_2(0), \dot{x}_2(0)\}$, cuja entrada é um $f_2(t)$, com uma saída $x_2(t)$, então, de acordo com o princípio de superposição, se aplicarmos ao sistema a condição inicial $S_3 = \{S_1, S_2\}$, para uma entrada dada por $f_3(t) = \alpha f_1 + \beta f_2$, onde α e β , são constantes, pelo princípio de superposição é de se esperar que o sistema, uma vez linear,

responda com $x_3(t) = \alpha x_1 + \beta x_2$, quaisquer que sejam, α e β e para todos os pares de entrada $f_1(t)$ e $f_2(t)$.

No entanto, apesar de fundamental, na prática o teste de superposição é limitado, uma vez que, as possibilidades de escolha para α , β , f_1 e f_2 são infinitas. Entretanto, para mostrar não linearidade basta que um conjunto de α , β , f_1 e f_2 viole o princípio de superposição, e embora na prática esta escolha possa ser difícil, simples procedimentos podem ser estabelecidos. Os procedimentos mais comumente utilizados serão descritos a seguir e são baseados no teste de homogeneidade, reciprocidade e por fim, harmônicos distorcidos.

2.3.2 – Homogeneidade e distorções de FRFs.

O teste de homogeneidade nada mais é do que uma consequência direta do princípio de superposição. Sem dúvida é o método mais comum no que diz respeito a identificação de sistemas não lineares em testes dinâmicos. Em essência, o método pode ser descrito como: supondo que o sistema seja linear, então de acordo com o princípio de superposição, para um sinal de entrada $\alpha f_1(t)$, é de se esperar que o sistema responda com um sinal de saída $\alpha x_1(t)$. Desta forma, sua função de resposta e frequência, ou seja, sua FRF, deve ser invariante a magnitude de entrada do sinal, uma vez que:

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{\alpha X(\omega)}{\alpha F(\omega)}. \quad (2.22)$$

Assim, uma vez que, as FRFs são invariantes sobre mudanças de α , efetivamente não deve haver mudanças nas mesmas qualquer que seja o nível de excitação do sistema, para que

seja classificado como linear. Um teste de homogeneidade, para um sistema linear, pode ser visto na Figura(2.4), obtida de, (WORDEN; TOMLINSON, 2001), a qual mostra que o sistema é invariante.

No entanto, se o sistema for não linear, o princípio de superposição será ferido, e a consequência implicará em distorções nas FRFs, ou seja, quando sobrepostas para comparar se há invariância, para níveis diferentes de excitação (α), estas apresentaram algumas distorções sobretudo nas regiões próxima a ressonância, (WORDEN; TOMLINSON, 2001).

Assim, o teste de homogeneidade é usualmente aplicado em teste dinâmico para FRFs onde o nível do sinal de entrada é mapeado em um intervalo, no qual o sistema deverá ser operado. Entretanto, o teste não é infalível, uma vez que, algumas não linearidades poder não ser detectadas pela homogeneidade, como é o caso de sistemas com não linearidade conhecidas como “bilinear”, ou seja, um duplo coeficiente de rigidez.

FIGURA 2.4 Teste de homogeneidade para uma estrutura real. A superposição das FRFs, dentro de uma certa gama de α , mostra que a estrutura é linear, nesta região, (WORDEN; TOMLINSON, 2001).

2.3.3 – Reciprocidade.

A reciprocidade é outro importante teste, a qual se violada, pode ser usada para detectar a presença de não linearidades na estrutura submetida a testes dinâmicos, (WORDEN; TOMLINSOM, 2001). Entretanto, o teste não é suficiente para assegurar que a estrutura seja realmente não linear, uma vez que, algumas estruturas não lineares simétricas podem exibir reciprocidade, mesmo que não satisfaçam o princípio de superposição.

O teste da reciprocidade pode ser assim definido: se para um sinal de entrada $f_A(t)$, aplicado em uma ponto A , obtivermos um sinal de saída $x_B(t)$, em um ponto B , então, é possível obtermos a FRF $H_{AB}(\omega)$, deste teste dinâmico, ou seja:

$$H_{AB}(\omega) = \frac{x_B}{f_A}. \quad (2.23)$$

Em contra partida, é possível inverter a ordem, ou seja, aplicarmos o sinal de entrada $f_B(t)$, no ponto B , e medirmos o sinal de saída $x_A(t)$, no ponto A . Conseqüentemente, como obtido atrás é possível definir uma FRF $H_{BA}(\omega)$, destes sinais como:

$$H_{BA}(\omega) = \frac{x_A}{f_B}. \quad (2.24)$$

Assim, para que a estrutura obedeça a condição de reciprocidade, é necessário que:

$$H_{BA}(\omega) = H_{AB}(\omega). \quad (2.25)$$

Ou seja, suas FRFs, são invariantes na posição, o que determina a base do teste experimental.

2.3.4 – Uso de diferentes tipos de excitação.

Embora não menos importante que os outros testes descritos acima, nesta subseção não entraremos em detalhes específicos sobre cada tipo de excitação em particular, apenas descreveremos os efeitos causados de forma geral.

Assim, podemos dizer que, de maneira geral, estruturas e sistemas não lineares respondem em diferentes formas quando submetidos a diferentes tipos de sinais de entrada de excitação. Só para efeito de comentário, os tipos mais comuns de sinais de entrada utilizados são: entrada senoidal, impacto, chirp e excitação aleatória (randômica). Destes, apenas o sinal randômico não é recomendado para identificação de não linearidades, como pode ser visto na Figura (2.5), abaixo, extraída do texto de (WORDEN; TOMLINSON, 2001).

Desta forma, como mostrado pela Figura (2.5) abaixo, outra maneira de identificar não linearidades em sistemas estruturais, é através da observação do seu comportamento em testes dinâmicos, uma vez que, sistemas não lineares, podem sofrer fortes mudanças em sua FRF, quando submetida a diferentes tipos de excitação.

FIGURA 2.5 Medidas de FRF para um oscilador não linear com um grau de liberdade, contendo uma não linearidade cúbica na rigidez, submetido a diferentes tipos de excitação: (a) entrada senoidal; (b) impulso; (c) Chirp; (d) randômica. (WORDEN; TOMLINSON, 2001).

2.3.5 – Harmônicos distorcidos.

Nesta subseção, vamos estudar o comportamento de sistemas não lineares, do ponto de vista da presença de harmônicos distorcidos, em respostas no domínio do tempo. Com isso, demonstraremos que esta pode ser uma grande ferramenta na identificação de não

linearidades em testes modais. Para isto, estudaremos um sistema simples, oscilador massa-mola, amortecido com uma não linearidade cúbica na rigidez da mola, mas o procedimento pode ser estendido, para outros tipos de não linearidades, apresentando comportamentos análogos.

Harmônicos distorcidos ou forma de ondas distorcidas é uma clara indicação da presença de não linearidade no sistema, (WORDEN e TOMLINSON, 2001). Isto é uma direta consequência do princípio de superposição. Assim, se excitarmos uma sistema linear com um sinal de entrada mono-harmônico, por exemplo, um sinal senoidal com frequência Ω , a resposta também deverá ser um sinal senoidal, com a mesma frequência Ω (depois do sinal transiente). No entanto, isto nem sempre é verdade para sistemas não lineares, uma vez que, estes podem responder de maneira diferente, ou seja, com harmônicos distorcidos. Usando teoria de perturbação (método das múltiplas escalas) é possível mostrar que estas distorções são devido a presença de elevados harmônicos na resposta do sistema, isto é, embora excitado com um sinal mono-harmônico, por exemplo um sinal senoidal com frequência Ω , o sistema pode responder com múltiplos harmônicos, tais como $\text{sen}(3\Omega t)$, $\text{sen}(5\Omega t)$, etc.

Agora, usando teoria de perturbação, vamos analisar e conseqüentemente mostrar as características devido a presença de harmônicos distorcidos na resposta de um oscilador não linear massa-mola, amortecido, com uma não linearidade cúbica na rigidez.

Para isto, como mostrado no trabalho de (PAI, 2007), vamos analisar as características dinâmicas não lineares, considerando o seguinte oscilador, com fraca não linearidade, submetido a uma excitação harmônica com frequência Ω , próxima da frequência linear natural ω , ou seja;

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u + \varepsilon u^3 = F \cos(\Omega t + \phi), \quad (2.26)$$

onde, ζ , ε , F e ϕ são constantes. Desta forma, de acordo com a teoria de perturbação, (NAYFEH; MOOK, 1979), a solução, sem a parte transiente, é dada por:

$$u(t) = a \cos(\Omega t) + a_3 \cos(3\Omega t) = \hat{a}(t) \cos(\Omega t + \Theta(t)), \quad (2.27)$$

com, amplitude variável:

$$\hat{a}(t) \equiv \sqrt{a^2 + a_3^2 + 2aa_3 \cos(2\Omega t)} \approx a + a_3 \cos(2\Omega t), \quad (2.28)$$

uma fase variável:

$$\Theta(t) \equiv \tan^{-1} \frac{a_3 \sin(2\Omega t)}{a + a_3 \cos(2\Omega t)} \approx \frac{a_3}{a} \sin(2\Omega t), \quad (2.29)$$

e uma frequência variável no tempo:

$$\hat{\Omega} \equiv \Omega + \dot{\Theta}(t) \approx \Omega + \frac{2\Omega a_3}{a} \cos(2\Omega t). \quad (2.30)$$

Onde, $a_3 \equiv \frac{\varepsilon a^3}{32\Omega^2} \ll a$. Assim, de acordo com as equações acima, podemos notar que

a resposta $u(t)$, do sistema não linear, é um harmônico distorcido com uma amplitude $\hat{a}(t)$

variando no tempo entre $a - a_3 \leq \hat{a} \leq a + a_3$ e uma frequência $\hat{\Omega}(t)$ variando entre

$\Omega(1 - 2a_3/a) \leq \hat{\Omega} \leq \Omega(1 + 2a_3/a)$. Tanto $\hat{a}$, quanto $\hat{\Omega}$ possuem uma frequência de

modulação dada por 2Ω , e $\frac{\Omega}{a} \frac{d\hat{a}}{d\hat{\Omega}} \approx 0.5$. Desta forma, o fenômeno de distorção, como

mostrado acima, pode ser usado para determinar a ordem de não linearidade do sistema

(cúbica ou outras) e o parâmetro ε , pode também ser estimado, através da igualdade

$a_3 \equiv \frac{\varepsilon a^3}{32\Omega^2}$, usando a média para a amplitude $a(t)$ e a amplitude modulada a_3 , (PAI, 2007).

Entretanto, para obtermos a amplitude variável $\hat{a}(t)$ e a frequência variável $\hat{\Omega}(t)$, em análise de sinais experimentais, é preciso aplicar uma poderosa ferramenta matemática ao sinal do sistema, para poder analisá-lo. Esta ferramenta é conhecida como Transformada de Hilbert e Transformada de Hilbert-Huang, e será introduzida no Capítulo (3) deste trabalho, o que constituirá toda base de análise deste trabalho.

Fundamentos teóricos, acerca do método de identificação e caracterização de não linearidades, através da transformada de Hilbert e Hilbert-Huang

Neste capítulo, vamos introduzir o conceito de transformada de Hilbert e sua aplicação para análise de sistemas não lineares com um grau de liberdade (1GDL), o método de decomposição empírica de modos (EMD) e suas geradas funções intrínsecas de modo (IMF) e a técnica de Hilbert-Huang, para analisar sistemas com múltiplos graus de liberdade (MGDL). Por último, alguns exemplos numéricos, para um sistema não linear (oscilador de Duffing), serão realizados para demonstrar a eficiência das técnicas.

3.1 – Introdução

Em estudo de vibração de estruturas, as integrais de transformação são de extrema importância, uma vez que, através de algumas transformações podemos levar um sistema de um domínio para outro mais conveniente. É o caso da transformada de Fourier, onde por exemplo podemos passar uma função do domínio do tempo para o domínio da frequência e vice-versa.

Além disso, algumas integrais de transformação, não mudam a função de domínio mas, nos fornecem todo o mapa da função a ser analisada no próprio domínio da função. Este é o caso da transformada de Hilbert, que será a base de todo nosso estudo sobre identificação

e caracterização de sistemas não lineares. No entanto, afim de compreender melhor esta poderosa ferramenta matemática, faz-se necessário uma abordagem um pouco mais detalhada sobre o assunto.

Desta forma, o capítulo que se segue está assim dividido: Na segunda seção, introduziremos o conceito de sinal analítico e através do teorema de Cauchy, deduziremos a chamada transformada de Hilbert que será a base de todo nosso estudo; na terceira seção introduziremos uma técnica para análise de sistemas oscilatórios com (1GDL) não lineares, através da transformada de Hilbert, para identificar e caracterizar as não linearidades presentes no sistema, bem como suas limitações; na quarta seção, introduziremos a transformada de Hilbert-Huang. Para isto, apresentaremos antes a técnica (EMD) e suas geradas (IMF), que será utilizada em conjunto com a transformada de Hilbert para analisar sinais com múltiplos componentes de frequência; Na última seção, realizaremos algumas simulações numéricas, para analisar o comportamento de um sistema não-linear (oscilador de Duffing), frente aos métodos percorridos nas seções anteriores.

3.2 – Transformada de Hilbert

A transformada de Hilbert será a base de todo nosso estudo sobre identificação, caracterização e quantificação de sistemas não lineares, assim, faz-se necessário uma boa revisão teórica acerca desta importante integral de transformação.

Para definirmos esta transformada, vamos considerar um plano retangular com coordenadas (t, τ) . Sendo D o domínio deste plano, podemos tomar cada ponto de D , como sendo um número complexo ψ . Assim, nós podemos definir uma função complexa $\psi(z)$, com $z \in D$, tal que:

$$\psi(z) = \psi(t, \tau) = u(t, \tau) + jv(t, \tau) \quad (3.1)$$

onde, $u(t, \tau)$ e $v(t, \tau)$ são funções complexas e $j^2 = -1$.

A função dada pela Equação (3.1), é chamada de função analítica no domínio D , se e somente se, $u(t, \tau)$ e $v(t, \tau)$ forem continuamente diferenciáveis, (POULARIKAS, 1996). Então, tomando um ponto z_0 dentro de um contorno fechado $C \in D$, tal que $\psi(z_0)$ seja analítica dentro de C , de acordo com o teorema de Cauchy, (POULARIKAS, 1996), teremos:

$$\psi(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{\psi(z)}{z - z_0} dz. \quad (3.2)$$

Um sinal analítico é definido como uma função complexa de variável real t , na forma:

$$\psi(t) = u(t, 0) + jv(t, 0), \quad (3.3)$$

ou seja, para $\tau = 0$ as funções $u(t)$ e $v(t)$ passam a ser funções reais. Portanto, o sinal analítico (sinal complexo) representa o valor da função analítica $\psi(z_0)$, tomado ao longo do eixo real t , ver Figura (3.1), abaixo.

FIGURA 3.1. Plano complexo (POULARIKAS, 1996, p.467)

Assim, pode ser mostrado que a integral de contorno ao longo do semi-círculo de raio R , Figura (3.1), quando $R \rightarrow \infty$, é por definição um sinal analítico (POULARIKAS, 1996, p.468) ou seja,

$$\psi(t_0) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} P \int_{-R}^R \frac{\psi(t)}{t - t_0} dt \quad (3.4)$$

ou,

$$\psi(t_0) = \frac{1}{2\pi j} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t - t_0} dt \quad (3.5)$$

onde, P é o valor principal de Cauchy, (POULARIKAS, 1996, p.468).

Desta forma, usando a Equação (3.3), aplicada à Equação (3.5), temos:

$$u(t_0) + jv(t_0) = \frac{1}{2\pi j} P \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{u(t) + jv(t)}{t_0 - t} \right] dt \quad (3.6)$$

logo, podemos dizer que:

$$u(t_0) = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{t - t_0} dt \quad (3.7)$$

e,

$$v(t_0) = -\frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{t - t_0} dt. \quad (3.8)$$

Isto mostra que, a parte real e imaginária do sinal analítico $\psi(t_0)$ são dadas por dois pares de integrais, denominados como pares de Hilbert.

Da Equação (3.7) e Equação (3.8), podemos definir, de forma geral, a chamada Transformada de Hilbert e sua respectiva inversa, como:

$$H[u(t)] = v(t) = -\frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(n)}{n-t} dn \quad (3.9)$$

e a transformada inversa como,

$$H^{-1}[v(t)] = u(t) = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(n)}{n-t} dn, \quad (3.10)$$

onde, $u(t)$ e $v(t)$ são sinais reais.

Desta forma, a transformada de Hilbert de um sinal real $u(t)$, nos fornece outro sinal real $v(t)$, os quais são relacionados pelo sinal analítico $\psi(t)$, ver Equação (3.3).

Para melhor compreendermos como é esta relação, entre $u(t)$ e $v(t)$, vamos dar o seguinte exemplo: tomando $u(t)$ como um sinal harmônico simples, por exemplo,

$$u(t) = \cos(\omega t) \quad (3.11)$$

com, $\omega = 2\pi$ sendo uma constante. Então, aplicando a transformada de Hilbert para este sinal real, teremos:

$$H[\cos(\omega t)] = v(t) = -\frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega n)}{n-t} dn. \quad (3.12)$$

Assim, fazendo a mudança de variável $y = n - t$, obtemos:

$$H[\cos(\omega t)] = v(t) = \text{sen}(\omega t) \quad (3.13)$$

logo, o sinal analítico pode ser dado por:

$$\psi(t) = \cos(\omega t) + j\text{sen}(\omega t) \quad (3.14)$$

Portanto, podemos notar que a transformada de Hilbert, para um sinal harmônico, no domínio do tempo, corresponde apenas a um atraso na fase do sinal de $\frac{-\pi}{2}$, ou seja, -90° , com a função permanecendo no mesmo domínio.

Fazendo uma comparação entre a transformada de Fourier, e a transformada de Hilbert, podemos concluir que:

(i) A transformada de Fourier nos fornece o mapa da função do domínio do tempo para o domínio da frequência e vice-versa.

(ii) A transformada de Hilbert nos dá o mapa da função no tempo no mesmo domínio.

Para melhor compreender, vamos fazer uma ilustração gráfica para mostrar o efeito da transformada de Hilbert, quando aplicada a um sinal harmônico simples, como feito atrás. Por exemplo, vamos tomar o sinal como sendo uma função senoidal, ou seja,

$$x(t) = 2\text{sen}(30\pi t) \quad (3.15)$$

Assim, aplicando a transformada de Hilbert para a Equação (3.15), de acordo com a Equação (3.13), obtemos:

$$H[x(t)] = y(t) = 2\cos(30\pi t) . \quad (3.16)$$

Logo, como havíamos observado na seção anterior, a transformada de Hilbert para um sinal harmônico como o da Equação (3.15), atrasa o sinal de 90° . Podemos observar tal efeito através da Figura (3.2)

Portanto, como descrito acima, a Transformada de Hilbert, não leva a função para outro domínio, apenas muda a fase do sinal de 90° , como mostra a Figura (3.2). Assim, com esta poderosa ferramenta, como será mostrado na próxima seção, é possível obter informações acerca de alguns parâmetros modais, como frequência natural instantânea, amplitude instantânea, etc, quando aplicada a análise de sistemas oscilatórios lineares e não lineares.

FIGURA 3.2 Transformada de Hilbert aplicada a um sinal harmônico simples: linha cheia corresponde a um seno; a linha tracejada a sua respectiva transformada de Hilbert, ou seja, um cosseno.

3.3 – Técnica para analisar sistemas oscilantes não lineares, usando a Transformada de Hilbert.

Nesta seção é introduzida a técnica usando a Transformada de Hilbert, para detectar não linearidades em sistemas mecânicos de vibração, através da análise da resposta livre do sistema.

Através da técnica, como será mostrado, é possível determinar parâmetros modais como: frequência instantânea de vibração, ângulo de fase instantâneo, amplitude instantânea do sistema, e caracterizar o tipo de não linearidade inerente ao sistema, como por exemplo, não linearidades presentes na rigidez ou amortecimento do sistema, etc.

3.3.1 – Análise de sinais, através da transformada de Hilbert.

Obtenção da amplitude instantânea, fase instantânea e frequência instantânea.

A transformada de Hilbert é uma ferramenta matemática, a qual nos permite investigar casualidade, estabilidade e linearidade de sistemas passivos, (WORDEN; TOMLINSON, 2001). Assim, a Transformada de Hilbert é suficiente para testar tanto sistemas lineares como não lineares.

A análise de sinais de vibração, através da Transformada de Hilbert tem algumas vantagens e é recomendada para investigar parâmetros modais instantâneos como: frequência de vibração instantânea, fase instantânea, amplitude instantânea de vibração, etc, permitindo assim, identificar não linearidades presentes na rigidez ou amortecimento de sistemas mecânicos e estruturais.

De acordo com a teoria de sinal analítico, um grande número de processos, incluindo vibração de sistemas, podem ser convertidos pela Transformada de Hilbert para uma nova função, a qual é representada como a combinação de outras duas funções; uma nos dá informação sobre a variação da amplitude no tempo (chamada de função envelope) e a outra sobre o ângulo de fase instantâneo do sistema.

Esta noção de amplitude instantânea, ângulo de fase instantâneo e frequência instantânea de um sinal analítico, na forma:

$$\Psi(t) = u(t) + jv(t), \quad (3.17)$$

onde, $v(t)$ é a Transformada de Hilbert do sinal real $u(t)$, ou seja,

$$v(t) = H[u(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (3.18)$$

pode ser unicamente e convenientemente definida, introduzindo-se a noção de rotação de fasor no plano (u, v) , como mostra a Figura (3.3) abaixo.

FIGURA 3.3 Plano complexo, usado para derivar o conceito amplitude instantânea, ângulo de fase instantâneo e frequência instantânea.

A mudança da coordenada retangular (u, v) , para polar (A, Φ) é dada por:

$$u(t) = A(t) \cos(\Phi(t)) \quad (3.19)$$

e

$$v(t) = A(t) \sin[\Phi(t)], \quad (3.20)$$

logo, a Equação (3.17), torna-se:

$$\Psi(t) = A(t) e^{j\Phi(t)}. \quad (3.21)$$

Assim, da Equação (3.19) e Equação (3.20), podemos definir a amplitude instantânea do sinal analítico como sendo:

$$A(t) = \sqrt{u(t)^2 + v(t)^2} \quad (3.22)$$

e a fase instantânea como:

$$\Phi(t) = \tan^{-1} \frac{v(t)}{u(t)}. \quad (3.23)$$

Então, tomando-se a derivada da Equação (3.23), em relação ao tempo, obtemos a frequência angular instantânea $\Omega(t)$, como sendo:

$$\Omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{u(t)\dot{v}(t) - v(t)\dot{u}(t)}{u(t)^2 + v(t)^2}. \quad (3.24)$$

Desta forma, através da Transformada de Hilbert, é possível construir um sinal analítico e usar o conceito de fasor para construir a amplitude, o ângulo de fase e a frequência instantânea de um sinal real qualquer. Com esta técnica, como mostraremos na próxima subseção, é possível determinar se um sistema mecânico de vibração é linear ou não-linear.

Entretanto, a transformada de Hilbert, só é bem definida quando aplicada a análise de sinais harmônicos simples, (HUANG et al.,1998). Esta desvantagem da transformada de Hilbert será superada quando aplicada em conjunto com o método de decomposição empírica de modos (EMD), que será introduzido na seção 3.4.

Na próxima subsecção mostraremos como aplicar a transformada de Hilbert, para identificar não linearidades em sistemas mecânicos com (1GDL), submetidos a oscilações livres.

3.3.2 – Aplicação da transformada de Hilbert, para analisar sistemas mecânicos vibrantes não lineares com (1GDL).

Nesta subsecção, vamos aplicar a Transformada de Hilbert, junto com o conceito de fasor, apresentado anteriormente, para analisar a resposta dinâmica de um oscilador harmônico unidimensional, contendo não linearidades no amortecimento e/ou na rigidez. Com esta técnica, poderemos investigar o comportamento não-linear de sistemas, através das relações derivadas: frequência natural instantânea, fator de amortecimento instantâneo, amplitude instantânea e outras.

Para isto, vamos considerar um sistema não-linear simples; oscilador harmônico amortecido massa-mola unidimensional (oscilador de Duffing), submetido a vibrações livres. Como trata-se de um sistema não-linear podemos assumir que exista uma dependência entre a frequência natural (ω_0) de vibrar e a amplitude (A), logo, uma dependência entre o fator de amortecimento (h_0) e a amplitude (A) também é esperada, (WORDEN; TOMLINSON, 2001).

Logo, aplicando a segunda lei de Newton para este sistema, obtemos a equação diferencial que governa o sistema, ou seja,

$$m\ddot{y}(t) + c(A)\dot{y}(t) + k(A)y = 0 \quad (3.25)$$

onde, m é a massa do sistema, $c(A)$ o coeficiente de amortecimento e $k(A)$ a rigidez da mola. Reescrevendo a Equação (3.25), em uma forma mais conveniente, obtemos:

$$\ddot{y} + 2h_0(A)\dot{y} + \omega_0^2(A)y = 0, \quad (3.26)$$

onde, $h_0(A) = \frac{c(A)}{2m}$ é a característica do amortecimento viscoso, $\omega_0^2(A) = \frac{k(A)}{m}$ é a frequência natural não amortecida do sistema e $y(t)$ é a solução da Equação (3.26), ou seja, a resposta dinâmica do sistema.

É importante salientar que, uma vez que a amplitude instantânea A é função do tempo, ou seja, $A = A(t)$ então, a frequência e o amortecimento na Equação (3.26), podem ser consideradas como funções do tempo também.

Desta forma, podemos considerar que $\omega_0^2 = \omega_0^2(t)$ e $h_0 = h_0(t)$. Assim, aplicando a Transformada de Hilbert na Equação (3.26) e usando algumas propriedades como:

$$H[\psi_1(t)] = \tilde{\psi}_1(t), \quad (3.27)$$

$$H[\psi_1(t)\psi_2(t)] = \psi_1(t)H[\psi_2(t)] = \psi_2(t)H[\psi_1(t)] \quad (3.28)$$

e

$$H[\dot{\psi}_1(t)] = \dot{\tilde{\psi}}_1(t) \quad (3.29)$$

onde, o subscrito ($\sim$), é usado para denotar a Transformada de Hilbert da função, nós obtemos:

$$\ddot{\tilde{y}} + 2h_0\dot{\tilde{y}} + \omega_0^2\tilde{y} = 0. \quad (3.30)$$

Multiplicando-se a Equação (3.30) por j , onde $j^2 = -1$, e somando com a Equação (3.26), obtemos:

$$\ddot{Y} + 2h_0(A)\dot{Y} + \omega_0^2(A)Y = 0, \quad (3.31)$$

onde, Y é a função analítica do sistema, ou seja,

$$Y = y(t) + j\tilde{y}(t) = A(t)e^{j\Phi(t)} \quad (3.32)$$

com,

$$A(t) = \sqrt{y(t)^2 + \tilde{y}(t)^2} \quad (3.33)$$

e

$$\Phi(t) = \arctan \frac{\tilde{y}(t)}{y(t)}. \quad (3.34)$$

A função $\tilde{y}(t)$ é a Transformada de Hilbert da resposta de vibração $y(t)$ do sistema, $A(t)$ é a amplitude instantânea do oscilador (chamada de função envelope) e $\Phi(t)$ é o ângulo de fase instantâneo do sistema.

Logo, a frequência angular instantânea $\omega(t)$ do sistema, pode ser calculada derivando-se o ângulo de fase instantâneo $\Phi(t)$, em relação ao tempo, ou seja,

$$\omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{y(t)\dot{\tilde{y}}(t) - \dot{y}(t)\tilde{y}(t)}{y(t)^2 + \tilde{y}(t)^2}. \quad (3.35)$$

Agora, tomando-se a primeira e a segunda derivada, em relação ao tempo, na Equação (3.32) e utilizando técnicas algébricas, obtemos:

$$\dot{Y} = Y(t) \left[\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + j\omega(t) \right] \quad (3.36)$$

e

$$\ddot{Y} = Y(t) \left[\frac{\ddot{A}(t)}{A(t)} - \omega(t)^2 + 2j\dot{A}(t)\frac{\omega(t)}{A(t)} + j\dot{\omega}(t) \right]. \quad (3.37)$$

Assim, substituindo-se a Equação (3.36) e a Equação (3.37), na Equação (3.31), e reagrupando os termos, temos:

$$Y \left[\frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2 + \omega_0^2 + 2h_0 \frac{\dot{A}}{A} + j \left(\frac{2\dot{A}\omega}{A} + \dot{\omega} + 2h_0\omega \right) \right] = 0. \quad (3.38)$$

Desta forma, da igualdade dada pela Equação (3.38) acima, para uma solução geral de Y não trivial, devemos impor que:

$$\frac{\dot{A}^2}{A} - \omega^2 + \omega_0^2 + 2h_0 \frac{\dot{A}}{A} = 0 \quad (3.39)$$

e

$$\frac{2\dot{A}\omega}{A} + \dot{\omega} + 2h_0\omega = 0. \quad (3.40)$$

Desta forma, da Equação (3.39) e Equação (3.40), podemos escrever uma expressão para os parâmetros modais instantâneos, frequência natural e coeficiente de amortecimento, como funções da primeira e segunda derivadas da função envelope $A(t)$ e da frequência instantânea $\omega(t)$, ou seja,

$$\omega_0^2(t) = \omega^2 - \frac{\ddot{A}}{A} + 2\frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{\dot{A}\dot{\omega}}{A\omega} \quad (3.41)$$

e

$$h_0(t) = -\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{\omega}}{2\omega} \quad (3.42)$$

onde, $\omega_0(t)$ é a frequência natural instantânea não amortecida do sistema e $h_0(t)$ é o coeficiente de amortecimento instantâneo do sistema.

Portanto, de posse da Equação (3.41) e Equação (3.42), juntamente com a Equação (3.33), é possível estabelecer relações, entre a frequência natural e a amplitude do sistema, bem como entre o coeficiente de amortecimento e a amplitude, o que nos permite identificar possíveis não linearidades na rigidez ou no amortecimento de sistemas não-lineares, através da análise do comportamento de tais parâmetros.

Além do mais, uma vez que, $h(A)$ e $\omega^2(A)$ são conhecidas, as características da força amortecedora $f_d(A)$, por unidade de massa, e da força restauradora $f_s(A)$, por unidade de massa, podem ser obtidas pelas equações abaixo, (WORDEN; TOMLINSON, 2001):

$$\begin{aligned} f_d(A) &= \omega(A)Ah(A) \\ f_s(A) &= A\omega_0^2(A) \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.4 – A Transformada de Hilbert-Huang

Nesta secção vamos introduzir a técnica para analisar sinais de sistemas não-lineares com (MGDL), denominada de transformada de Hilbert-Huang.

Como será mostrado, a técnica de Hilbert-Huang para analisar sinais, pode ser dividida em duas etapas: na primeira parte, um sinal $x(t)$ de um sistema com (MGDL) é decomposto empiricamente em funções intrínsecas de modos, o processo é conhecido como decomposição empírica de modos (EMD). Este processo, por sua vez, gera funções intrínsecas de modo (IMF), as quais são funções harmônicas simples, ou seja, cada uma possui um único modo ou frequência associada ao sinal original $x(t)$. Na segunda parte, aplica-se a transformada de Hilbert, como descrito na secção 3.3, para obter as frequências instantâneas ω_i e amplitudes instantâneas A_i , para cada função intrínseca de modo obtida no processo (EMD). Com isso, é possível analisar cada modo do sistema não-linear, pertencentes ao sistema original com múltiplos graus liberdade, o que não era possível de ser realizado apenas usando a transformada de Hilbert.

3.4.1 – Método de decomposição empírica de modo (EMD)

A aplicação da Transformada de Hilbert, para obtenção da frequência instantânea, como demonstrado na seção 3.3, em análise de sinais, só é bem definida quando aplicada à análise de sistemas com um grau de liberdade ou sinais com uma única frequência. A aplicação da transformada de Hilbert para análise de sinais com mais de uma frequência, pode gerar valores de frequência instantânea negativos, dificultando o entendimento físico do problema. Assim, a transformada de Hilbert só é bem comportada quando aplicada a funções harmônicas simples, (SHARPLEY; VATCHER, 2004).

Reconhecendo a limitação da transformada de Hilbert para análise de sinais com múltiplas componentes de frequência, (HUANG et al, 1998), introduziu a Transformada de Hilbert-Huang, demonstrando que o método é potencialmente superior a transformada de Fourier e a transformada de Wavelet, para processamento de sinais não lineares e não estacionários.

O método de decomposição empírica de modos é um processo alternativo o qual decompõe sinais reais $f(t)$, no domínio do tempo, em n funções intrínsecas de modo (c_i), correspondendo a diferentes escalas no tempo, (PAI, 1998), ou seja,

$$f(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) + r_n, \quad (3.44)$$

onde, r_n é o resíduo e c_i , como dito acima, funções intrínsecas de modo. Assim, de acordo com a Equação (3.44), podemos rapidamente sintetizar que o método (EMD), representa o sinal original, ou função $f(t)$, através de uma superposição de sinais simples, ou funções c_i , cada uma representando um único modo correspondente, ou frequência, do sinal original (IMF). Desta forma, como cada função c_i corresponde a um único modo ou frequência, a transformada de Hilbert pode ser aplicada, como na seção anterior, para representar a frequência instantânea do modo ω_i e amplitude instantânea A_i , de cada modo particular.

Sendo assim, podemos dizer que o método da transformada de Hilbert-Huang, é composto por duas etapas: A primeira consiste na decomposição de um sinal $f(t)$ no domínio do tempo em n funções intrínsecas de modo, e a segunda consiste em aplicar a transformada de Hilbert para cada sinal ou função intrínseca para calcular as respectivas frequências

instantâneas e amplitudes instantâneas, obtendo assim, informações inerentes a cada modo, particular do sistema sob análise.

No entanto, para que uma função seja considerada uma função intrínseca de modo, ela deve satisfazer duas condições, (HUANG et al, 1998);

- O número de extremos (máximos e mínimos, locais) e o número de zeros da função, devem ser iguais ou, pelo menos, diferir de no máximo um.
- Em qualquer ponto, o valor médio da média entre as envelopes formadas pelos pontos máximos locais e pontos mínimos locais, deve ser zero.

3.4.1.1 – Procedimento para implementar computacionalmente o método (EMD) e suas respectivas (IMF).

Nesta subsecção, vamos descrever de forma bem sucinta o método EMD, para obtenção das IMF, para que se possa implementar tal método via computacional. Segundo Huang e colaboradores, o método EMD foi motivado “pela simples suposição que quaisquer dados consistem de simples modos intrínsecos de oscilação”.

Com relação a implementação, podemos definir os seguintes passos:

Primeiramente, determina-se todos os extremos locais, pontos de máximo e pontos de mínimo, do sinal $f(t)$ que será analisado.

De posse dos extremos locais, ajusta-se duas curvas através do ajuste conhecido como cubic spline, o qual fornece duas funções chamadas de envelopes, uma para os extremos superiores e outra os inferiores, ver Figura (3.4).

FIGURA 3.4 Envelope superior e inferior, obtidas através do ajuste cubic spline, (TOLWINSKI, S. 2007).

O terceiro passo consiste na obtenção de uma função (m_{11}), obtida através da média aritmética entre as duas funções envelopes, a envelope superior e a envelope inferior, obtidas no item ii, ver Figura (3.5).

FIGURA 3.5 Linha azul representa a envelope superior, linha vermelha a envelope inferior e a linha rosa a média aritmética dos dois envelopes, (TOLWINSKI, S. 2007).

O quarto passo é determinar a primeira suposta função intrínseca c_{11} .

Assim, a primeira suposta função intrínseca (c_{11}) é calculada por:

$$c_{11}(t) = f(t) - m_{11}(t) \quad (3.45)$$

onde, $f(t)$ é o sinal original, m_{11} a média entre as envelopes e c_{11} a primeira suposta função intrínseca de modo, ver Figura (3.6).

FIGURA 3.6 Primeira suposta função intrínseca de modo.

Entretanto, para que c_{11} , seja definitivamente a primeira função intrínseca, é preciso que esta satisfaça as condições estabelecidas na seção anterior.

Se as condições da secção 3.4.1, não forem satisfeitas por c_{11} , então toma-se c_{11} , como um novo sinal a ser analisado e repete-se os passos anteriores, ou seja, obtém-se novas envelopes, para a função c_{11} , e uma nova média m_{12} entre estas envelopes. Com isso, deriva-se uma nova suposta função intrínseca c_{12} , ou seja,

$$c_{12}(t) = c_{11}(t) - m_{12}(t) \quad (3.46)$$

Novamente, verifica-se as condições impostas para que c_{12} seja uma IMF. O processo pode ser repetido k vezes, até que tais condições sejam satisfeitas, ou seja, se depois de k repetições a suposta função intrínseca obedecer as condições para ser uma IMF, então teremos:

$$c_{1k}(t) = c_{1(k-1)}(t) - m_{1k}(t) \quad (3.47)$$

onde, $k = 2, \dots, K$. Assim, c_{1k} é a primeira função intrínseca de modo e é denotada por c_1 .

No entanto, este processo repetitivo deve ter um critério de parada. Historicamente, de acordo com a revisão de literatura, dois critérios são usados. O primeiro foi usado por, (HUANG et al. 1998), é definido usando um tipo de teste de convergência de Cauchy. Matematicamente falando, este teste requer que:

$$D_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N [c_{1k}(t_i) - c_{1(k-1)}(t_i)]^2}{\sum_{i=1}^N c_{1(k-1)}^2(t_i)}} \quad (3.48)$$

onde, D_v é chamado de limite de convergência. Assim, o critério de parada é estabelecido se D_v for um número menor que um pré determinado valor estabelecido. Este critério de parada é bem rigoroso, mas difícil de ser implementado na prática. Duas questões críticas precisam ser resolvidas: primeiramente, o quão pequeno deve ser o valor pré-estabelecido. Segundo, o fato de D_v ser pequeno não garante que o número de zeros do sinal seja igual ou diferente de um, do número de extremos (condições para ser uma IMF).

Então, (HUNG et al. 2003) propôs um segundo critério de parada, baseado na concordância do número de zeros e extremos. Neste novo critério, especificamente falando, um número S de repetições, para os passos estabelecidos anteriormente, é pré selecionado. Desta forma, o procedimento só irá parar depois de S repetições, quando o número de zeros e extremos forem iguais ou diferirem de um. Entretanto, este segundo critério de parada também tem certas dificuldades, por exemplo, como selecionar o número S . Obviamente, qualquer seleção é “ad hoc”, ou seja, é colocada a força, e uma rigorosa justificativa é necessária.

Em um recente estudo, (HUANG et al. 2003), usou muitas escolhas para o número S , na determinação de um conjunto de IMF. Então, após vários testes de comparação de

conjuntos individuais, (HUANG et al., 2003) estabeleceu que o intervalo ótimo para escolher o número S de repetições no procedimento deverá estar entre 4 e 8. Assim, de acordo com este critério, a primeira função intrínseca de modo $c_{1k} = c_1$, é obtida, após repetidas interações com repetições entre 4 e 8, descrito anteriormente.

Para obtenção da segunda função intrínseca de modo c_2 , define-se uma nova função, chamada de resíduo r_1

$$r_1(t) = f(t) - c_1(t) \quad (3.49)$$

onde, $f(t)$ é o sinal original, $c_1(t)$ a primeira função intrínseca de modo e $r_1(t)$ o resíduo.

Logo, para obter c_2 , repete-se todo o procedimento descrito anteriormente, com uma ressalva; agora todo procedimento é feito considerando como sinal a função resíduo r_1 . Assim, devemos ter:

$$c_{21}(t) = r_1(t) - m_{21} \quad (3.50)$$

e

$$c_2 = c_{2k}(t) = c_{2(k-1)}(t) - m_{2k} . \quad (3.51)$$

Depois de calcular c_2 , define-se um resíduo r_2 como novo dado, e repete-se os mesmos passos descritos anteriormente, ou seja,

$$r_2(t) = f(t) - c_1(t) - c_2(t) \quad (3.52)$$

e

$$\begin{aligned}
c_{31} &= r_2(t) - m_{31} \\
c_3 &= c_{3k}(t) = c_{3(k-1)}(t) - m_{3k}(t) \\
r_3 &= f(t) - c_1(t) - c_2(t) - c_3(t).
\end{aligned} \tag{3.53}$$

O processo pode ser parado quando o n -ésimo resíduo r_n , tornar-se uma função mono-harmônica, ou seja, uma função de harmônico simples, para o qual nenhuma IMF poderá ser extraída.

Finalmente, depois que todas as funções intrínsecas de modos $c_i(t)$ forem extraídas, aplica-se a transformada de Hilbert para cada modo extraído, exatamente como descrito na seção 3.3. Com isso, obtém-se:

$$\Psi_i(t) = u_i(t) + jv_i(t) = A_i(t) \exp(j\phi_i(t)) \tag{3.54}$$

com,

$$\begin{aligned}
A_i &= \sqrt{u_i^2 + v_i^2} \\
\phi_i &= \tan^{-1} \frac{u_i}{v_i} \\
\omega_i &= \frac{d\phi_i}{dt},
\end{aligned} \tag{3.55}$$

onde, A_i é a amplitude instantânea, ϕ_i a fase instantânea e ω_i a frequência instantânea do i -ésimo modo.

O processo EMD e suas funções intrínsecas de modo, junto com a transformada de Hilbert, descrito na seção 3.3 é conhecido como transformada de Hilbert-Huang e pode ser usado para identificação e caracterização de sistemas oscilantes não-lineares, mesmo para sistemas com mais de um grau de liberdade, o que não era possível só com a transformada de Hilbert.

Entretanto, este processo apresenta certos problemas como: o ajuste chamado de “cubic spline”, usado no procedimento para achar as envelopes superiores e inferiores, no método EMD, causa sérios erros no fim da transformada de Hilbert-Huang. Estes erros são causados principalmente por descontinuidade (ou seja, $c_i(0) \neq c_i(T)$) e conseqüentemente induz durante a transformada de Hilbert o fenômeno conhecido como Gibb, em cada intrínseco modo, gerando assim, uma imprecisão nos dados finais da análise, Pai (2007).

No entanto, mesmo com tais imprecisões geradas no fim dos dados de análise, ocorridas pelo chamado fenômeno de Gibb, o procedimento pode ser considerado adequado para o estudo de sistemas não lineares, isto será demonstrado através de alguns exemplos numéricos na próxima secção.

3.5 – Exemplos numéricos

Nesta secção, apresentaremos alguns exemplos numéricos para ilustrar a aplicação da técnica de Hilbert e Hilbert-Huang, através da análise de um sistema com uma não linearidade cúbica na rigidez (oscilador de Duffing).

3.5.1 – Análise numérica de um sistema de (1GDL) com oscilações livres, através da Transformada de Hilbert.

Primeiramente, vamos consideramos o seguinte oscilador linear:

$$\ddot{u}_0 + c\dot{u}_0 + \omega_0^2 u_0 + \epsilon u_0^3 = 0 \quad (3.56)$$

onde, os parâmetros foram fixados nos seguintes valores: $c = 0.05$, $\omega_0 = 1$, $\varepsilon = 0$ e as condições iniciais, $u(0) = 10$ e $\dot{u}(0) = 0$.

Desta forma, através do software Matlab 7.0, obtivemos a resposta dinâmica do sistema, representado pela Figura (3.7).

FIGURA 3.7. Resposta dinâmica do sistema linear descrito pela Equação (3.56).

De posse da resposta dinâmica, aplicamos a FFT (Transformada Rápida de Fourier) para analisar o comportamento do sistema, no domínio da frequência, ver Figura (3.8).

FIGURA 3.8. Resposta no domínio da frequência.

Embora, aparentemente, a Figura (3.7) e a Figura (3.8), representem um comportamento característico de um sistema linear, ou seja, por exemplo não vemos indícios de harmônicos distorcidos (condição de não linearidade estudada no Capítulo 2), é necessário para uma análise mais precisa e confiável, que analisemos as seguintes relações entre os parâmetros modais: frequência versus tempo, amplitude versus tempo, frequência versus amplitude e por fim a relação entre a força de restauração do movimento (força por unidade de massa versus amplitude).

As Figuras (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12) mostram estas relações, obtidas através da técnica de Hilbert.

FIGURA 3.9 Curva de amplitude em função do tempo (função envelope).

FIGURA 3.10. Curva de frequência natural em função do tempo.

FIGURA 3.11. Curva da amplitude em função da frequência natural

FIGURA 3.12. Curva de força em função da amplitude

A condição de linearidade do sistema é comprovada, uma vez que analisando as Figuras (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12), percebemos que não existe dependência entre a amplitude (função envelope) e a frequência natural de vibrar, ou seja, conforme a amplitude varia a frequência natural permanece aproximadamente fixa, em torno da frequência natural, a menos de uma variação sofrida no final dos dados, e que pode ser desprezado por causa de erros gerado pelo fenômeno conhecido como efeito de Gibb (Gibb's phenomenon), (Pai, 2007).

Vamos agora retornar a Equação (3.56) e considerar agora a análise de um oscilador não-linear. Para isto, vamos supor que o termo não linear ε , na Equação (3.56), seja dado por: $\varepsilon = 0.01$.

Desta forma, utilizando os mesmos parâmetros da análise anterior, a menos do novo termo $\varepsilon = 0.01$ inserido, e as mesmas condições iniciais, obtivemos, através do Matlab 7.0, a resposta dinâmica do sistema não-linear, ver Figura (3.13).

FIGURA 3.13. Resposta dinâmica do sistema não-linear com $\varepsilon = 0.01$

Para podermos analisar o comportamento do sistema não linear, do ponto de vista do domínio da frequência, novamente aplicamos a FFT a resposta do sistema não-linear, cujo resultado é mostrado abaixo na Figura (3.14).

Assim, comparando as respostas dinâmicas, do sistema linear e do não-linear, representadas pela Figura. (3.7) e Figura (3.13), pelo menos de forma visual, não é possível distinguir ou identificar nenhum indício de não linearidades. No entanto, olhando as respostas em frequência, Figura (3.8) e Figura (3.14), é possível notar uma pequena distorção na resposta do sistema não-linear, como prevista pela teoria não linear apresentada no Capítulo 2.

FIGURA 3.14. Resposta no domínio da frequência, para o sistema não-linear.

Entretanto, para uma melhor identificação e caracterização desta não linearidade é preciso, como mostrado atrás, utilizar a técnica de Hilbert, para derivar as relações existentes entre os parâmetros modais. As relações obtidas para o sistema não-linear, podem ser vistas pelas Figuras (3.15), (3.16), (3.17) e (3.18).

Desta forma, como podemos notar, nas Figuras (3.15), (3.16), (3.17) e (3.18), existe uma dependência entre a amplitude de vibração e a frequência natural, fato este que é característico de sistemas não-lineares. Assim, a técnica de Hilbert revela que a frequência natural instantânea do sistema varia em torno de aproximadamente 0,16Hz, ver Figura (3.16), frequência esta que concorda com a Equação (3.56). Além disso, a técnica também mostra uma clara dependência da frequência natural instantânea com relação a amplitude instantânea de vibração, ver Figura (3.17), e que não acontece para sistemas lineares. Para finalizar a análise não-linear, a Figura (3.18), mostra um comportamento não-linear para o gráfico da força por unidade de massa, em função da amplitude. O ajuste cúbico neste gráfico pode ser usado para estimar o parâmetro não-linear do sistema.

FIGURA 3.15. Amplitude instantânea, para o sistema não-linear.

FIGURA 3.16. Frequência natural instantânea, sistema não-linear.

FIGURA 3.17. Amplitude em função da frequência, sistema não-linear.

FIGURA 3.18. Força em função da amplitude, sistema não-linear..

3.5.2 – Análise numérica de um sistema não-linear com oscilações forçadas, através da Transformada de Hilbert-Huang.

Como na seção anterior, estamos interessados em derivar as principais características dinâmicas de sistemas não-lineares. Entretanto, nesta subseção, vamos tratar da análise de sistemas forçados, e que por sua vez, exigirá que utilizemos a técnica de Hilbert-Huang, uma vez que a resposta dinâmica de sistemas forçados não contém apenas um harmônico.

Então, para esta análise vamos considerar um oscilador forçado, com não linearidade cúbica, dada pela Equação (3.57), abaixo:

$$\ddot{u}_0 + 0.1\dot{u}_0 + (2\pi)^2 u_0 + \epsilon u_0^3 = F_0 \cos(\Omega t) \quad (3.57)$$

onde, $F_0 = 5$, $\varepsilon = 1$, $\Omega = \pi$, $u(0) = 4$ e $\dot{u}(0) = 0$. A Figura (3.19) e a Figura (3.20) mostram a resposta dinâmica deste sistema não linear, e sua respectiva FFT (resposta em frequência), obtidas através da resolução da Equação (3.57), pelo software Matlab 7.0.

No entanto, como discorrido em seções anteriores, uma vez que a resposta dinâmica deste sistema forçado possui duas componentes de frequência em sua resposta (i.e., $\omega_1 = 1Hz$ e $\omega_2 = 0.5Hz$), ver Figura (3.20), apenas a técnica de Hilbert não é suficiente para derivar as relações entre os parâmetros modais. Assim, neste caso, é preciso empregar a técnica de Hilbert-Huang, para analisar o sistema proposto.

FIGURA 3.19. Resposta do sistema não-linear forçado.

FIGURA 3.20 Resposta em frequência do sistema não-linear forçado.

FIGURA 3.21 Primeira IMF $c_1(t)$, obtida pela técnica EMD.

Desta forma, aplicando primeiramente o método (EMD), através do software Matlab 7.0, para obter as duas funções empírica relacionadas a cada modo do sistema, obtemos, ver Figura (3.21) e a Figura (3.22).

No entanto, podemos notar na Figura (3.22) uma imprecisão gerada pelo método nos pontos iniciais, i.e., entre o instante $0 \leq t \leq 15$ a função $c_2(t)$ não representa bem uma função seno, com seria de se esperar. Uma possível consequência deste erro pode ser atribuído as condições de parada no programa, ou, devido a distorções apresentadas na Figura (3.20).

Para verificarmos se os sinais $c_1(t)$ e $c_2(t)$, são funções que representam bem as funções em frequência dada pela Figura (3.20), derivamos abaixo as respectivas FFTs para cada IMF, gerada pelo método EMD. A Figura (3.23) e a Figura (3.24), nos mostram estas respectivas funções em frequência.

FIGURA 3.22. Segunda IMF $c_2(t)$, obtida pela técnica EMD.

FIGURA 3.23 Resposta em frequência da primeira IMF, $c_1(t)$.

FIGURA 3.24 Resposta em frequência da segunda IMF, $c_2(t)$.

Assim, como podemos observar, as duas IMF representam bem o sinal original do sistema não-linear e assim, a superposição destas duas funções recuperam o sinal original.

No entanto, é preciso destacar que para derivar a resposta em frequência da segunda IMF, desconsideramos os pontos iniciais (i.e., $0 \leq t \leq 15$) da Figura (3.22), para depois derivarmos a sua resposta no domínio da frequência.

Então, uma vez aplicada a técnica EMD, podemos novamente usar o método de Hilbert para analisar cada função empírica de modo. Entretanto, vamos analisar neste caso somente o sinal referente ao primeiro modo do oscilador, ver Figura (3.21).

As Figuras (3.25), (3.26), (3.27) e (3.28), mostram o resultado.

FIGURA 3.25 Curva da amplitude instantânea obtida para a função $c_1(t)$

FIGURA 3.26 Curva da frequência natural instantânea da função $c_1(t)$

FIGURA 3.27 Amplitude em função da frequência natural obtida de c_1

FIGURA 3.28 Força em função da amplitude, obtida de c_1

Novamente, como analisando na subseção anterior, podemos notar que a frequência natural da resposta transiente, Figura (3.26), varia em torno de 1Hz (frequência natural do sistema linear equivalente). Além do mais, também podemos observar que há uma clara dependência entre a frequência natural e a amplitude do sistema, ver Figura (3.27), o que de acordo com a teoria de perturbação é um indício de não linearidade presente no sistema. Por fim, a Figura (3.28), revela que o sistema possui uma não linearidade cúbica na rigidez, como assumido na Equação (3.57).

Entretanto, como descrito no capítulo 2, através da análise de perturbação seria de se esperar que a Figura (3.25) e a Figura (3.26), apresentasse uma modulação na frequência de 1Hz, ou seja, de duas vezes a frequência de excitação do sistema (0.5Hz). Mas, como podemos observar a modulação da Figura (3.25) e da Figura (3.26) é insignificante, uma vez

que o termo $a_3 = \frac{\varepsilon a^3}{32\Omega^2} \ll a$, ver teoria do Capítulo 2.

No entanto, a clara dependência, não-linear, entre a frequência natural e a amplitude do sistema já é um forte indício de que o sistema seja não linear. Outra evidência forte, como vimos, é mostrada na Figura (3.28) a qual indica, através do ajuste, que a não linearidade é cúbica.

Obtenção do modelo matemático do sistema sob investigação

Neste capítulo será feita a descrição do modelo físico a ser analisado, a modelagem matemática do sistema (modelo teórico) e a simulação numérica do modelo matemático derivado do sistema real sob investigação.

4.1 – Introdução

A modelagem matemática de sistemas, para o processo de investigação de seu comportamento dinâmico é extremamente importante durante a fase inicial de um projeto. Desta forma, neste capítulo apresentaremos o modelo físico sob estudo, o modelo matemático e algumas simulações numéricas para o modelo sob investigação. Para isto, o capítulo está dividido da seguinte forma: na segunda seção apresentaremos o modelo físico sob estudo; na terceira seção, deduziremos através de Lagrange a equação de movimento do sistema real sob investigação; na quarta seção, aplicaremos a técnica de Hilbert, discorrida no capítulo anterior, para analisar o modelo matemático obtido para o sistema real sob investigação. Com isso, poder-se-á comparar tais resultados obtidos com o resultados experimentais, o quais serão apresentados no próximo capítulo.

4.2 – Modelo Físico sob investigação.

Nesta seção, apresentamos o modelo físico sob investigação, o qual será a base de todo o trabalho nesta dissertação. Para melhor entendimento do sistema, também será mostrado, mais adiante, fotos do sistema e aparato experimental utilizados.

O sistema sob investigação, é constituído de uma viga engastada em uma das extremidades, contendo uma massa concentrada na outra e presa por um fio de aço tensionado. O fio de aço é utilizado para provocar, conforme será visto na próxima seção, uma não linearidade cúbica ao sistema.

Já o objetivo de termos colocado uma massa concentrada, na extremidade livre, foi para afastar o primeiro modo de vibrar da estrutura dos demais modos de vibração. Desta forma, a estrutura estudada pode, sem grande perda de generalidade, ser aproximada de uma estrutura de um grau de liberdade, ou seja, tornar-se-á um sistema análogo ao sistema de Duffing.

Além disso, para a modelagem matemática da próxima seção, podemos tomar as seguintes considerações ou aproximações, para o sistema: a inércia de rotação pode ser desconsiderada, uma vez que, a espessura da viga é muito pequena quando comparada ao seu comprimento, e a sua massa, ou seja, apenas as características geométricas serão consideradas; o material da viga é isotrópico e obedece a lei de Hooke, assim podemos dizer que a rigidez da viga é considerada uma rigidez linear; a amplitude de vibração transversal da viga está dentro do regime elástico, ou seja, desconsideraremos deformações plásticas e aquecimentos internos durante a vibração do sistema; por último, a vibração transversal da viga é considerada puramente planar.

Esta estrutura sob investigação foi baseada em um trabalho proposto por, (SETIO; JEZEQUEL, 1992), que ensaiou uma estrutura semelhante e no trabalho de iniciação científica de, (MARIM, 2004), que realizou ensaios na mesma estrutura, para identificar a presença da não linearidade cúbica, devido ao fio de aço, usando outra técnica de investigação. Tal estrutura sob investigação é apresentada em fotos abaixo, ver a Figura (4.1) e a Figura (4.2).

Com relação ao dimensionamento da estrutura utilizada, podemos defini-las como: uma viga de aço com **28,6 mm** de largura, **1,2mm** de espessura e **100mm** de comprimento; uma massa concentrada, na extremidade da viga, de **88,5g**; um sensor (acelerômetro miniatura) colocado no centro de gravidade da massa concentrada, de fabricação da B&K com massa de **0,64g**, tornando assim, a massa total concentrada na extremidade da viga com tendo aproximadamente um total de **89,14g**; um fio de aço, para provocar a não linearidade na estrutura, com diâmetro de **0,28mm**, um comprimento de **110mm** e módulo de elasticidade E_f igual a **210GPa**; por fim um bloco, para tencionar o fio, com massa de **2,343g**.

Alem disso, a viga de aço inox, possui módulo de elasticidade E_v igual a **195Gpa** e momento de inércia I_{vz} , em relação ao eixo z, dado a sua geometria apresentada na próxima seção, igual a **$4.118410^{-12}m^4$** .

FIGURA 4.1 Estrutura experimental utilizada

FIGURA 4.2 - Esta foto mostra a estrutura utilizada para os ensaios experimentais, com o acelerômetro no centro da massa concentrada.

4.3 – Modelagem matemática.

Nesta seção, vamos derivar a equação de movimento, para o modelo físico apresentado acima. Para isto, utilizaremos o princípio de Hamilton ou equações de Lagrange.

Entretanto, para podermos utilizar o princípio de Hamilton, faz-se necessário o conhecimento prévio das energias presentes no sistema, como: energia cinética, energia de deformação da viga, energia de deformação do fio e das forças não conservativas.

Com as considerações e aproximações feitas na seção anterior, vamos tratar o sistema da Figura (4.2), como um sistema de um grau de liberdade, representando assim o modelo físico pela Figura (4.3), abaixo.

FIGURA 4.3 Modelo físico utilizado, (MARIM, 2004).

Para a modelagem matemática, do modelo físico acima sob investigação, vamos iniciar analisando o sistema em equilíbrio de forças para, a partir desta análise obtermos a força resultante no sistema e então derivarmos as energias envolvidas e através de Lagrange a equação de movimento do sistema.

No sistema tem-se um fio tencionado, preso a massa concentrada, devido a ação da força peso de um bloco, preso em uma das extremidades do fio, ver Figura (4.1). Quando a massa concentrada é submetida a um deslocamento u_0 , o fio causará nela uma força F_f , como mostra a Figura (4.4), abaixo, devido a tensão no fio.

FIGURA 4.4 Diagrama de forças no sistema sob investigação, (MARIM, 2004).

Assim, a deformação unitária do fio causada pelo deslocamento u_0 , da massa concentrada, é, (WEAVER; TIMOSHENKO; YOUNG, 1990):

$$d = \frac{\sqrt{l^2 + u_0^2} - l}{l} \quad (4.1)$$

onde, l representa a metade do comprimento total do fio.

Então, expandindo em série de Taylor, para pequenos deslocamentos, obtemos:

$$d = \frac{\sqrt{l^2 + u_0^2} - l}{l} \cong \frac{u_0^2}{2l^2} \quad (4.2)$$

Desta forma, sabendo que a força de tração que o fio está submetido é dada por:

$$T_f = T_f^i + A_f E_f \frac{u_0^2}{2l^2} \quad (4.3)$$

onde, A_f é área da seção transversal do fio, E_f o módulo de elasticidade do fio e T_f^i a tensão inicial no fio.

Logo, podemos concluir que a força F_f do fio, que atua na massa concentrada é:

$$F_f = 2T_f \cos \alpha . \quad (4.4)$$

Substituindo, a Equação (4.3) na Equação (4.4), obtemos:

$$F_f = 2 \left(T_f^i + A_f E_f \frac{u_0^2}{2l^2} \right) \cos \alpha , \quad (4.5)$$

e, de acordo com a Figura (4.4), podemos fazer uso da seguinte relação trigonométrica,

$$\cos \alpha = \frac{u_0}{\sqrt{l^2 + u_0^2}} . \quad (4.6)$$

Desta forma, substituindo-se a Equação (4.6) na Equação (4.5), temos:

$$F_f = 2 \left(T_f^i + A_f E_f \frac{u_0^2}{2l^2} \right) \frac{u_0}{l}, \quad (4.7)$$

uma vez que, a aproximação foi obtida do fato que $u_0 \ll l$.

Portanto, a Equação (4.7) representa a força que o fio aplica na massa concentrada do sistema.

Com a Equação (4.7), é possível derivar a energia de deformação do fio U_f , usando a definição de trabalho de uma força, através da expressão:

$$U_f = \int_0^{u_0} F_f du_0 = \int_0^{u_0} \left(\frac{2T_f^i u_0}{l} + A_f E_f \frac{u_0^3}{l^3} \right) du_0, \quad (4.8)$$

resultando na equação:

$$U_f = \frac{T_f^i}{l} u_0^2 + \frac{A_f E_f}{4l^3} u_0^4, \quad (4.9)$$

a qual, representa a energia de deformação do fio.

Agora, baseado no fato que a amplitude de vibração utilizada seja infinitesimal, então a energia de deformação da viga U_v , pode ser dada por, (GOMES DE SILVA, 2004):

$$U_v = \frac{1}{2} E_v I_{vz} \left(\int_0^{L_v} (u'')^2 dx \right), \quad (4.10)$$

onde, as linhas denotam a derivada parcial com relação a x , E_v é o módulo de elasticidade da viga, I_{vz} o momento de inércia da viga, com relação ao eixo z .

A função que representa o deslocamento lateral $u(x,t)$, pode ser relacionada por um deslocamento lateral $u_0(t)$ do centro de massa (massa concentrada) através de uma representação “Galerkin” baseada numa função linear $f(x)$ definida por, (GOMES DE SILVA, 2004):

$$u(x,t) = f(x)u_0(t). \quad (4.11)$$

Assim, substituindo-se a Equação (4.11) na Equação (4.10), obtemos:

$$U_v = \frac{1}{2} E_v I_{vz} \left(\int_0^{L_v} (f'')^2 dx \right) u_0^2, \quad (4.12)$$

a qual, descreve a energia de deformação da viga, em relação ao deslocamento do centro de massa da massa concentrada, presa em uma das extremidades da viga.

Portanto, a energia total de deformação do sistema pode ser dada como a soma da energia de deformação da viga mais a energia de deformação do fio, ou seja:

$$U_T = \frac{1}{2} E_v I_{vz} \left(\int_0^{L_v} (f'')^2 dx \right) u_0^2 + \frac{T_f^i}{l} u_0^2 + \frac{A_f E_f}{4l^3} u_0^4, \quad (4.13)$$

Já a energia cinética do sistema, pode ser dada por:

$$T = \frac{1}{2} m_0 \dot{u}_0^2, \quad (4.14)$$

onde, o ponto representa a primeira derivada em relação tempo, ou seja, sua velocidade em relação a posição de equilíbrio e m_0 representa a massa concentrada do sistema. Perceba na Equação (4.14), que não levamos em consideração termos relacionados a energia cinética de rotação, uma vez que esta foi desprezada.

A força não conservativa que atua no sistema com relevância, pode ser considerada única. Esta força não conservativa está relacionada ao amortecimento estrutural e é dada por $c\dot{u}_0$, ou seja, é uma força proporcional a velocidade de deslocamento do sistema, onde c representa o coeficiente linear de atrito viscoso deste sistema. Esta força é uma força restritiva ao movimento, ou seja, está em constante oposição ao movimento, o que justificará o sinal negativo na equação abaixo.

Esta força não-conservativa é derivada através do conceito de trabalho virtual, (MEIROVITCH, 1967). Este trabalho virtual não-conservativo δW_{NC} , que é realizado no sistema é dado por $\delta W_{NC} = (-c\dot{u}_0)\delta u_0$ e é definido como uma função da força não-conservativa generalizada Q_{NC} , através da relação $\delta W_{NC} = Q_{NC}\delta u_0$.

Assim, podemos obter a força não-conservativa generalizada que atua no sistema, da expressão abaixo:

$$Q_{NC} = \frac{\delta W_{NC}}{\delta u_0} = -c\dot{u}_0. \quad (4.15)$$

Então, com a energia cinética dada pela Equação (4.14), a energia de deformação dada pela Equação (4.13) e a força não-conservativa generalizada pela Equação (4.15), podemos aplicar a equação de Lagrange para obtermos a equação de movimento do sistema, ou seja, o modelo matemático que descreve a dinâmica do sistema (modelo físico), (MEIROVITCH, 1967):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_0} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_0} = Q_{NC}, \quad (4.16)$$

onde, $L = T - V$ é chamada de Lagrangiana do sistema, ou seja, é a energia cinética T menos a energia potencial V do sistema. Neste caso, a energia potencial V , do sistema, é dada pela energia de deformação U_T , Equação (4.13).

Portanto, substituindo as respectivas energias e a força não-conservativa na Equação (4.16), obtemos o modelo espacial para o movimento transversal do sistema, sob as condições impostas na seção 4.2:

$$m_0 \ddot{u}_0 + c \dot{u}_0 + k_{eq} u_0 + \varepsilon u_0^3 = 0, \quad (4.17)$$

onde, k_{eq} é a rigidez equivalente do sistema e dada por:

$$k_{eq} = E_V I_{VZ} \int_0^{L_V} (f'')^2 dx + 2 \frac{T_f^i}{l}, \quad (4.18)$$

e ε é o parâmetro não linear do sistema, dado por:

$$\varepsilon = \frac{A_f E_f}{l^3}. \quad (4.19)$$

Com relação ao termo da integral que aparece na Equação (4.18), usaremos a seguinte aproximação, (GOMES DE SILVA, 2004):

$$\int_0^{L_V} (f'')^2 dx = \left(\frac{\pi}{2L_V} \right)^4 \frac{L_V}{2}, \quad (4.20)$$

onde, L_V é o comprimento total da viga.

Note que nosso sistema sob estudo, embora seja um sistema contínuo, através das aproximações realizadas e principalmente por causa da massa concentrada, colocada na extremidade livre da viga, aproxima-se, sem grande perda de generalidade, de um sistema

unidimensional com um grau de liberdade. Este sistema, pode então ser comparado ao conhecido oscilador de Duffing.

4.4 – Resultados numéricos obtidos para o modelo físico.

Nesta seção, apresentaremos os resultados numéricos obtidos, através da aplicação da técnica de Hilbert, para analisar o modelo matemático derivado neste capítulo. Para a obtenção dos resultados, dois softwares matemáticos foram utilizados: Matlab 7.0 , para derivar a solução das equações de movimento do modelo; e o software Origin 7.0, utilizado para traçar os gráficos obtidos.

4.4.1 – Resultado numérico obtido para o modelo linear da viga.

De acordo com o modelo físico sob investigação, derivado na seção anterior, a equação matemática que descreve o modelo, sem o termo não-linear, é dada por:

$$\ddot{u}_0 + 2\zeta\omega_n\dot{u}_0 + \omega_n^2 u_0 = 0, \quad (4.21)$$

onde, $\omega_n = \sqrt{27425}(\text{rad} / \text{s}) \cong 26,3(\text{Hz})$ é a frequência natural do sistema e $\zeta = c/(2m_0\omega_n) = 0.005$ é o fator de amortecimento.

Todos o parâmetros na Equação (4.21), foram obtidos da seção (4.2) e (4.3), a menos do fator de amortecimento ζ , o qual foi por hipótese estabelecido como sendo $\zeta = 0.005$, que é bem razoável para a estrutura estudada, (MARIM, 2004). Então, usando o software Matlab 7.0, com as condições iniciais $u(0) = 0.01$ e $\dot{u}(0) = 0$, derivamos a resposta dinâmica

para a Equação (4.21) acima, obtendo como resultado a curva mostrada na Figura (4.5) abaixo, traçada através do software Origin 7.0.

Então, para verificarmos o comportamento da estrutura, do ponto de vista da frequência de vibração, aplicamos a resposta dinâmica acima a FFT do sinal, usando o software Origin 7.0, obtendo a curva mostrada na Figura (4.6).

FIGURA 4.5 Resposta dinâmica para o modelo matemático (sistema linear).

Podemos notar que tanto a resposta no domínio do tempo, Figura (4.5), como a no domínio da frequência, Figura (4.6), aparentemente não apresentam nenhuma distorção, como era de se esperar, uma vez que o sistema simulado é linear.

FIGURA 4.6 Resposta em frequência para o modelo linear da viga.

No entanto, para retificarmos esta linearidade, vamos aplicar a técnica de Hilbert, discorrida no capítulo anterior, para podermos observar o comportamento entre os parâmetros da estrutura, como: variação da frequência natural no tempo; variação da amplitude (envelope) no tempo; amplitude (envelope) versus frequência natural e variação da força por unidade de massa versus amplitude.

As Figuras (4.7), (4.8), (4.9) e (4.10) mostram estas relações, obtidas após aplicação da técnica de Hilbert, respectivamente.

Então, analisando as figuras obtidas, podemos concluir que a estrutura viga, sem fio, representada pela Equação (4.21) possui um comportamento linear, como era de se esperar. Podemos concluir isto, apenas observando o comportamento das seguintes curvas:

Na Figura (4.7), observamos a variação da frequência natural em relação ao tempo. Esta curva nos mostra que não há grandes mudanças da frequência, especialmente em grandes amplitudes. Assim, a frequência permanece aproximadamente em 26,3 Hz, e que concorda com a Equação (4.21) do modelo.

FIGURA 4.7 Frequência natural instantâneo, para o sistema linear.

Na Figura (4.9), podemos observar a relação existente entre amplitude e frequência de vibração do sistema. De acordo com esta curva, é possível observar que a estrutura analisada é linear, uma vez que, não existe variação significativa entre a amplitude e a frequência natural, especialmente em grandes amplitudes.

Na Figura (4.10), vemos o comportamento da força de rigidez do sistema em relação a amplitude de vibração. Nesta figura, através do ajuste linear, obtemos o seguinte valor para o

FIGURA 4.8 Amplitude instantânea do sistema linear.

FIGURA 4.9 Amplitude versus frequência natural, sistema linear.

FIGURA 4.10 Curva de força versus amplitude, sistema linear.

coeficiente linear, $b = 694,9(Hz)^2 \cong 27430(rad/s)^2$ o qual concorda muito bem com o coeficiente linear da força na rigidez, ver Equação (4.21).

Desta forma, de acordo com as Figuras apresentadas acima, obtidas através da técnica de Hilbert, podemos realmente concluir que o sistema analisado numericamente, possui um comportamento linear, como seria de se esperar, uma vez que, o sistema sob análise é representado por uma equação linear, ver Equação (4.21).

No entanto, uma observação importante é com relação a grande variação presente nos dados finais dos gráficos, ver por exemplo a figura (4.9). Esta variação está relacionada com erros gerados durante o processo de Hilbert que é conhecido do fenômeno de Gibb, PAI (2007). O fenômeno de Gibb aparece por causa do uso de funções contínuas para ajustar funções descontínuas. No entanto, estes erros gerados podem ser desprezados na investigação de estruturas, uma vez que as características não-lineares apresentam-se no início da resposta do sistema (grandes amplitudes).

4.4.2 – Resultado numérico obtido para o modelo não-linear (viga-fio).

Como mostrado na secção anterior, a equação que descreve o comportamento do sistema viga-fio, sistema não-linear, pode ser representada pela equação abaixo:

$$\ddot{u}_0 + (2\zeta\omega_n)\dot{u}_0 + (\omega_n^2)u_0 + (\varepsilon/m_0)u_0^3 = 0, \quad (4.22)$$

onde, de acordo com os parâmetros estabelecidos para a viga e fio, descrito na secção 4.2, temos;

$$\omega_n^2 = \frac{\left(\frac{Ev.Izv.\pi^4}{32L^3} + \frac{2T_f^i}{l} \right)}{m_0} = 36983(rad/s)^2 \cong (30,6)^2 (Hz)^2$$

$$\varepsilon/m_0 = \frac{\left(\frac{A_f E_f}{l^3} \right)}{m_0} = 8.7 \times 10^8 \quad (4.23)$$

$$e$$

$$\zeta = 0.005$$

Assim, a resposta dinâmica do sistema não-linear (viga-fio), Equação (4.22), aplicadas com os parâmetros dados pela Equação (4.23), obtida através do software Matlab 7.0 é representada pela Figura (4.11), abaixo:

Então, comparando a Figura (4.11) com a Figura (4.5), a menos da diferença entre os tempos de decaimento, não há evidência de não linearidades na resposta dada pela figura (4.11).

FIGURA 4.11 Resposta dinâmica para o sistema não linear (viga-fio).

Assim, a fim de encontrarmos algum indício de não linearidade na resposta do sistema não-linear, vamos observar a comportamento do sistema, do ponto de vista de seu domínio da frequência. Para isto, representamos na figura (4.12) abaixo, a FFT da resposta dinâmica do sistema não-linear, para que possamos compará-la com a FFT do sistema linear, representado pela Figura (4.6).

Comparando as duas respostas no domínio da frequência, ou seja, Figura (4.6) e Figura (4.12), podemos concluir: A resposta dada pela Figura (4.6), possui uma única frequência bem definida em aproximadamente 26.3 Hz, o que concorda com a Equação (4.21) do sistema linear. Já a resposta dada pela Figura (4.12), possui uma frequência não bem definida, ou seja, podemos notar uma distorção na resposta no domínio da frequência, para o sistema não linear. Perceba que esta distorção na frequência está entre aproximadamente

FIGURA 4.12 Resposta no domínio da frequência, sistema não-linear.

30Hz e 55 Hz, o que concorda com bastante precisão com a frequência prevista na Equação (4.23).

Assim, a distorção mostrada na Figura (4.12), apesar de não ser uma forte evidência da presença de não linearidades presente no sistema, pode pelo menos a priori servir de alerta de tal.

Para identificar e caracterizar a real presença de não linearidade no sistema, vamos aplicar a técnica de Hilbert, como feito na subseção anterior. Assim, as Figuras (4.13), (4.14), (4.15) e (4.16) são obtidas, as quais representam respectivamente: a variação da frequência natural no tempo; variação da amplitude no tempo; amplitude versus frequência natural e força por unidade de massa versus amplitude do sistema não-linear.

Desta forma, através das Figuras (4.13), (4.14), (4.15) e (4.16), é possível afirmar que o sistema analisado é de fato não-linear, como esperado, ver Equação (4.22). Para isto,

façamos as seguintes análises, referentes aos gráficos obtidos numericamente para o sistema não-linear viga-figo:

Figura (4.13), esta nos mostra que a frequência de vibração natural do sistema converge para um determinado valor, ou seja, varia para grandes amplitude de aproximadamente 55 Hz, até aproximadamente 30 Hz, para pequenas amplitudes. Esta variação da frequência natural com o tempo é um forte indício de não linearidade em sistema vibrante.

FIGURA 4.13 Frequência natural instantânea, sistema não-linear.

FIGURA 4.14 Amplitude instantânea, sistema não-linear.

FIGURA 4.15 Amplitude versus frequência, sistema não-linear.

FIGURA 4.16 Curva de força versus amplitude, sistema linear

Figura (4.15); esta nos mostra a relação entre a amplitude de vibração do sistema com a frequência natural de vibrar. Assim, como pode ser visto na figura, conforme a amplitude de vibração diminui, a frequência natural também diminui tendendo para uma frequência bem determinada, aproximadamente 30 Hz, que é a frequência natural do sistema sem o termo cúbico, ver Equação (4.22). Este comportamento é característico de sistemas não lineares.

Por fim, a Figura (4.16) nos mostra a curva de força versus amplitude do sistema, e que será usada para caracterizar o tipo de não linearidade presente no sistema, bem como a quantificação de tal. Para isto, como mostra a figura (4.16), ajustou-se uma curva cúbica a curva de força versus amplitude, com a ajuda do software Origin 7.0. Com este ajuste, os resultados encontrados para a frequência natural ao quadrado ω_n^2 e para o termo não linear ε/m_0 , foram: $\omega_n^2 = 1134,9(Hz)^2 \cong 44800(rad/s)^2$ e $\varepsilon/m_0 = 9.0 \times 10^8$, o que concorda de forma satisfatória com os termos dados pela Equação (4.23), demonstrando uma boa precisão

da técnica para identificar, caracterizar e quantificar sistema com não linearidades cúbicas na rigidez.

Entretanto, não foi possível analisar a modulação dos gráficos de frequência versus tempo e amplitude versus tempo, como discorrido no capítulo dois desta dissertação, como forma de caracterizar o tipo de não linearidade, já que os resultados apresentados acima dizem respeito a vibrações livres do sistema. Este fato, como será observado, deve-se a não realização de vibrações forçadas na parte experimental e que será justificado no próximo capítulo.

Resultados experimentais do sistema real sob investigação

O principal objetivo deste capítulo é apresentar e discutir os resultados obtidos através de medidas experimentais, para o modelo físico sob investigação. Para isto, será utilizado a técnica de Hilbert e Hilbert-Huang, discorrida nesta dissertação. Com isso, poder-se-á confrontar os resultados experimentais com os resultados numéricos, obtidos no capítulo anterior. Todos os resultados foram obtidos através do uso de softwares matemáticos: Matlab 7.0 e Origin 7.0. No entanto, através de justificativas que serão discorridas durante este capítulo realizaremos duas etapas de análises para as medidas experimentais obtidas.

5.1 – Resultados obtidos experimentalmente.

O principal objetivo desta seção é apresentar e discutir os resultados experimentais obtidos para o modelo físico não-linear sob investigação, descrito no capítulo anterior, usando a técnica de Hilbert-Huang. No entanto, como será mostrado, a técnica de Hilbert-Huang se mostrou ineficiente para analisar tais sinais. Com tudo, como forma alternativa de análise, aplicamos um filtro passa baixa ao sinal de resposta da estrutura real, afim de torná-lo mono-harmônico e desta forma poder aplicar a análise através da técnica de Hilbert. Embora a

técnica utilizando o filtro, em conjunto com Hilbert, em princípio não seja o grande escopo deste trabalho, esta mostrou-se de total eficiência para analisar o sistema não-linear proposto.

5.1.1 – Problemas na obtenção da FRF e descrição do aparato experimental utilizado.

Nesta subseção, vamos descrever alguns problemas iniciais com relação a obtenção da FRF do sistema e detalhar o aparato experimental utilizado.

Para a obtenção da primeira frequência natural em flexão do sistema, foi escolhido um procedimento padrão de ensaio modal. Para isto, através de um mecanismo de excitação, o sistema sob teste é excitado em uma ampla faixa de frequência e sua resposta medida através de um acelerômetro. A força aplicada ao sistema também é medida, mas através de um transdutor de força. Assim, o sinal de excitação e a resposta são processados utilizando técnicas padrão de processamento de sinais e que gera a chamada função de resposta em frequência do sistema (FRF). Com esta FRF, é possível identificar possíveis não linearidades no sistema, por exemplo através de distorções apresentadas por esta, ver Capítulo 2.

Entretanto, apesar de utilizarmos duas técnicas de excitação para obtenção da FRF do sistema (excitador eletrodinâmico e martelo), estas mostraram-se ineficientes para extrair a FRF, por dois motivos: na excitação pelo mecanismo eletrodinâmico, este foi fixado à massa concentrada. Entretanto, como o sistema sob investigação é bem flexível, foi observado significativa interação entre o excitador eletrodinâmico e a estrutura. Tal fenômeno é conhecido como *force drop off*, (VAROTO; OLIVEIRA, 2002), e alterou significativamente a FRF medida; quanto a excitação por impacto, está apresentou problemas relacionados à

impactos duplos, uma vez que, a estrutura sob investigação é bem flexível, e que gerou imprecisão na FRF do sistema.

Desta forma, embora a FRF seja de fundamental importância, pelo menos como um teste inicial, para indicar não linearidade em estruturas, neste trabalho esta técnica foi descartada pelos motivos já citados acima.

No entanto, como será mostrado, a técnica de Hilbert, aliada ao processo de filtragem de frequência mostrou-se satisfatório para a identificação, caracterização e quantificação da não linearidade cúbica presente no sistema sob investigação. Entretanto, antes de apresentarmos tais resultados, vamos descrever o aparato experimental utilizado.

A Figura (5.1) e a Figura (5.2), mostram a foto do sistema experimental sob investigação e o esquema prático da configuração utilizada para a aquisição das medidas, respectivamente.

Como podemos observar na Figura (5.1), a viga é engastada em uma das extremidades em uma base de fixação de aço e concreto, e em sua extremidade livre é colocada uma massa concentra (contendo um parafuso para acoplar o fio a massa). Um fio, com uma certa tensão inicial é preso nas duas extremidades por outras duas bases de fixação, e colocado perpendicularmente a viga.

FIGURA 5.1 Sistema experimental utilizado

FIGURA 5.2 Aparato experimental e sistema de aquisição de dados.

Este fio tem seu comprimento médio acoplado a massa concentrada, através de um pequeno parafuso preso ao centro de massa da massa concentrada, e que possui um orifício de aproximadamente 2mm de diâmetro. Assim, o fio perpendicular a viga passa por este orifício e é engastado por meio de outro pequeno parafuso a massa concentrada, ver Figura (5.3). No entanto, testes com folga no engate do fio a massa concentra também foram realizados, mostrando um fenômeno conhecido como *clearance* ou *backlash*, embora não descrito na parte de simulações numérica. Os dados gerais de todo o sistema sob investigação já foram descritos no capítulo anterior, onde se deriva a equação de movimento do sistema.

FIGURA 5.3 Esquema de fixação entre a massa concentrada e fio.

Todas as medidas foram realizadas considerando apenas vibração livre do sistema. Para isto, de forma manual e com muito cuidado foram dados pequenos deslocamentos

iniciais a massa concentrada, tirando a mesma de sua posição de equilíbrio, e permitindo assim que esta entrasse em movimento até que o equilíbrio se restabelecesse. A resposta do sistema foi capturada por um acelerômetro B&K 4374 (3.11pC/g) fixado sobre o centro de gravidade da massa concentrada.

O sistema de aquisição de sinais consiste em um amplificador de carga B&K 2626, para o sinal de aceleração do acelerômetro e analisados pelo software ACE.

Durante os ensaios, duas configurações para o sistema de aquisição de dados, foram usadas:

Para o teste de linearidade da viga, ou seja, ensaios realizados apenas com o sistema viga, sem fio, utilizou-se uma janela em frequência até 125 Hz, com um total de 4096 pontos resultando em uma resolução temporal de $\Delta t \cong 0.03s$ e uma resolução em frequência de $\Delta f \cong 0.23Hz$.

Já para os ensaios do sistema não-linear (viga-fio), tanto com o fio engastado à massa concentrada, como para o teste de clearance (fio com folga no suporte de fixação à massa concentrada), utilizou-se uma janela em frequência até 350Hz, com um total de 4096 pontos resultando em uma resolução temporal de $\Delta t \cong 0.001s$ e uma resolução em frequência de $\Delta f \cong 0.23Hz$.

5.1.2 – Primeira análise de resultados, método de Hilbert-Huang.

Nesta primeira análise, vamos mostrar o resultado obtido através da técnica de Hilbert-Huang. Entretanto, só apresentaremos os resultados relacionados ao sistema não-linear (viga-fio), uma vez que, a resposta da viga sem fio (sistema linear), mostrou-se coerente a um

sistema linear com um grau de liberdade, como proposto no capítulo anterior, podendo assim, ser analisado apenas pela técnica de Hilbert e que será demonstrado na próxima seção.

A Figura (5.4), apresenta o sinal de aceleração obtido durante o ensaio para identificar, caracterizar e quantificar a não linearidade cúbica do sistema sob investigação. No entanto, analisando seu comportamento no domínio da frequência, ver Figura (5.5), podemos notar que trata-se de uma resposta com certas distorções e com múltiplas frequências, fato este provocado pela não linearidade presente no sistema. Assim, para analisar o sinal é preciso primeiro aplicar a técnica de decomposição de sinal (EMD), discurrida no Capítulo (3), para obter a IMF ($c_1(t)$) relacionada ao primeiro modo do sistema, modo estes de interesse para a investigação.

FIGURA 5.4 Sinal de aceleração (sistema não-linear).

A Figura (5.6) representa a primeira IMF ($c_1(t)$), obtida via programação numérica, ver anexo , (LAMBERT M. et al. 2007), através do programa Matlab 7.0, aplicado a resposta de aceleração, representada na Figura (5.4). Como pode ser visto facilmente pela Figura (5.6), esta não representa bem a resposta livre do sistema, referente ao primeiro modo. Apesar da tentativa de ajustar melhor o programa numérico, o resultado continuou ruim, fato que atribuo a grandes distorções apresentadas na resposta no domínio da frequência, apresentada na Figura (5.5), e que geram erros no processo de separação das frequências no método EMD.

Sendo assim, embora o método de Hilbert-Huang tenha se apresentado de maneira satisfatória para analisar o exemplo numérico descrito no Capítulo 3 (sistema forçado contendo duas frequências na resposta), este não apresentou um bom resultado neste capítulo,

FIGURA 5.5 Resposta em frequência do sistema não-linear.

FIGURA 5.6 Primeira IMF $c_1(t)$, obtida pelo método EMD.

uma vez que, a técnica de decomposição de sinal EMD, apresentou falhas no processo de geração da primeira IMF, $c_1(t)$.

No entanto, uma segunda tentativa para separar a frequência, relacionada ao primeiro modo de vibrar do sistema, e assim poder aplicar a técnica de Hilbert, será proposta como tentativa de análise, embora não seja o foco principal desta dissertação. Este novo processo que apresentaremos na próxima seção utilizará um processo de filtragem do sinal de resposta da estrutura, para separar a frequência desejada. Este processo de filtragem do sinal sob investigação foi realizado através do software Origin 7.0.

5.1.3 – Segunda análise de resultados, método utilizando filtro e Hilbert

Nesta seção, será introduzida uma segunda tentativa para separar a frequência de interesse do sinal de resposta do sistema (primeiro modo de vibrar), das demais frequências que aparecem no espectro de frequência, mostrado na Figura (5.5). Para isto, utilizaremos um filtro passa baixa, através do programa matemático conhecido como Origin 7.0, e que será utilizado para tratar o sinal de aceleração da estrutura. Com isso, uma vez que o filtro separa as demais componentes de frequência do sinal da primeira, este torna-se um sinal monoharmônico, e pode-se aplicar a técnica de Hilbert para obtenção das relações: frequência natural versus amplitude (envelope), amplitude versus tempo, frequência natural versus tempo e força versus amplitude.

No entanto, para aplicar a técnica de Hilbert, além do sinal ter que ser um sinal monoharmônico, de acordo com a teoria apresentada no Capítulo (3), este deve ser um sinal de deslocamento. Entretanto, o sinal de resposta capturado pelo acelerômetro é um sinal de aceleração e portanto deve ser integrado duas vezes para se obter o sinal de deslocamento da estrutura. Para as integrações do sinal de aceleração, filtragem e análise dos dados, foi utilizado o software matemático Origin 7.0 e o programa Matlab 7.0.

5.1.3.1 – Análise da resposta livre da viga sem o fio (sistema linear)

A Figura (5.7) e a Figura (5.8), mostra respectivamente; o sinal de deslocamento da viga sem fio e sua resposta no domínio da frequência (FFT), obtidos através do sinal de aceleração do sistema, depois do processo de integração e filtragem.

Entretanto, embora tenha sido estabelecido na seção anterior que o sistema constituído apenas pela viga seja um sistema linear que aproxima-se de um sistema de um grau de liberdade, ou seja, seu sinal de resposta é um sinal mono-harmônico, na obtenção da FFT deste sistema um filtro passa baixa foi utilizado, ver Figura (5.8). Este procedimento foi estabelecido, visando padronizar o sistema de análise estabelecido nesta seção, uma vez que, nas próximas análises (sistema não-linear viga-fio) o filtro passa baixa será utilizado também.

FIGURA 5.7 Sinal de deslocamento da viga.

FIGURA 5.8 Resposta em frequência da viga.

Outra observação que devemos fazer para esta e todas as outras respostas sob análise e que apresentaremos nesta seção é que devido ao processo de integração aplicado ao sinal de aceleração, para obter-se o sinal de deslocamento, uma componente DC (uma constante) é somada ao sinal integrado, cada vez que temos que integrar o sinal. Esta componente DC gera uma assimetria ao sinal obtido pela integração e isto conduzirá a uma resposta errônea do comportamento da estrutura. Para corrigir este erro, gerado durante o processo de integração, um filtro passa alta é utilizado, cada vez que se integra o sinal, o que elimina a componente DC e torna o sinal simétrico novamente. Olhando a resposta no domínio da frequência, Figura (5.8), é possível observar que foram utilizados dois filtros; um filtro passa baixa e outro passa alta.

Com o sinal de deslocamento obtido, através dos procedimentos descritos acima, aplicou-se a técnica de Hilbert descrita no Capítulo 3, ao sinal de deslocamento (viga sem fio) para analisar o sistema. As Figuras (5.9), (5.10), (5.11) e (5.12), mostram os resultados obtidos através de Hilbert.

Desta forma, analisando as Curvas obtidas através da técnica de Hilbert, podemos concluir que o sistema viga (sem fio) sob investigação é um sistema linear pelas seguintes observações:

A Figura (5.9) demonstra que o sistema sob investigação é realmente linear, pois não há um deslocamento significativo da curva de frequência natural em relação ao tempo, ou seja, a frequência natural permanece durante a medida em aproximadamente 24,8Hz o que é próximo do valor previsto através das simulações numéricas (26,3 Hz) do Capítulo 4, tendo uma discordância de aproximadamente 4%.

A Figura (5.11) mostra o comportamento entre a amplitude e a frequência natural de vibração. Esta curva nos mostra que a frequência natural de vibração não varia com a amplitude, o que é um forte indicativo de comportamento de sistemas lineares.

A Figura (5.12) também é um forte indicativo da linearidade do sistema (viga sem fio), uma vez que, esta mostra que a curva de força versus amplitude do sistema é linear. Assim, através do ajuste linear mostrado na Figura (5.12) obteve-se o seguinte valor para o coeficiente linear da reta $a = 615,1(Hz)^2 \cong 24285(rad/s)^2$ e que corresponde ao quadrado da frequência natural da viga. Este valor, comparado com o valor predito pelo modelo teórico, ver Capítulo 4, apresenta uma discordância de aproximadamente 11%. No entanto podemos concluir que o sistema constituído apenas pela viga (sem o fio) pode ser realmente considerado com um sistema linear.

FIGURA 5.9 Curva da frequência natural instantânea para a viga sem fio.

FIGURA 5.10 Curva da amplitude instantânea para a viga sem fio.

FIGURA 5.11 Amplitude versus frequência natural para a viga sem fio.

FIGURA 5.12 Curva de força versus amplitude para a viga sem fio.

5.1.3.2 – Análise da resposta experimental livre da viga com o fio (sistema não-linear)

A Figura (5.13), representa a resposta livre experimental para o sistema viga-fio sob investigação. Este sinal corresponde ao sinal de deslocamento da massa concentrada (colocada na extremidade livre da viga), obtido através do processo de filtragem e integração, como o realizado na subseção anterior.

FIGURA 5.13 Resposta de deslocamento da viga, com fio.

A Figura (5.14), representa o sinal no domínio da frequência, obtida através da FFT do sinal correspondente ao deslocamento da Figura (5.13). Comparando o sinal da Figura (5.14) com o da Figura (5.5), podemos notar claramente o uso do filtro.

FIGURA 5.14 Resposta em frequência (filtrada), para o sistema viga-fio.

Desta forma, como realizado na subseção anterior, de posse do sinal de deslocamento do sistema não-linear (viga-fio), Figura (5.13), obtivemos através da técnica de Hilbert as Figuras (5.15), (5.16), (5.17) e (5.18).

Para comprovar a não linearidade cúbica do sistema, e quantificá-la, façamos uma análise análoga a descrita anteriormente, através das curvas obtidas pela técnica de Hilbert:

A Figura (5.15), apresenta a curva da frequência natural em função do tempo. Esta curva nos mostra uma pequena variação da frequência entre aproximadamente 35Hz e 30Hz, entre os instantes de 0s a 0.8s, aproximadamente. Esta variação da frequência, é um forte indício de não linearidade presente no sistema, e portanto caracteriza um comportamento não-linear.

A Figura (5.17), mostra a relação entre amplitude e a frequência natural de vibrar. Claramente, é possível notar que a relação entre as duas grandezas é não linear, para as

amplitudes maiores. Desta forma, o fato da frequência natural ser variável com a amplitude também caracteriza um forte indício da presença de não linearidade no sistema.

Finalmente, como forma de caracterizar e quantificar esta não linearidade apontada nos itens anteriores, vamos analisar as curvas da Figura (5.18). Esta Figura nos mostra a relação entre força na rigidez do sistema e amplitude. Claramente, podemos notar que a curva de força versus amplitude não é linear. Então, através do ajuste cúbico, obtido com o software Origin 7.0, obtivemos os seguintes valores para o termo linear e cúbico do ajuste: termo linear $a = 787,9(Hz)^2 \cong 31105(rad/s)^2$ e que corresponde ao termo relacionado ao quadrado da frequência natural, demonstrando assim, uma discrepância entre teoria e experimental de aproximadamente 16%, ver Capítulo 4; já para o termo cúbico $c \cong 5,5 \times 10^8$ e que corresponde ao termo relacionado ao coeficiente não linear, comparando com o valor teórico esperado, houve uma discrepância um pouco mais acentuada, de aproximadamente 36%, ver Capítulo 4. No entanto, embora o erro entre teoria e experimento seja relativamente grande, o método provou ser de grande eficiência na identificação e caracterização da não linearidade cúbica do sistema, mostrando uma boa coerência entre o modelo teórico e experimento.

FIGURA 5.15 Frequência natural instantânea, sistema viga-fio.

FIGURA 5.16 Amplitude instantânea, sistema viga-fio.

FIGURA 5.17 Amplitude versus frequência natural, sistema viga-fio.

FIGURA 5.18 Curva de força versus amplitude, sistema viga-fio.

5.2.3.3 – *Análise da resposta experimental livre da viga com o fio possuindo uma folga na base de fixação da massa concentrada (efeito Clearance)*

Nesta subseção, utilizando o mesmo sistema viga-fio com uma pequena mudança apenas na maneira de fixar o fio no suporte preso a massa concentrada (ver Figura (5.19)), vamos analisar o efeito produzido por folgas entre estruturas. Folga entre junções de estruturas são de extrema importância em projetos mecânicos e máquinas, uma vez que estas podem gerar níveis inadequados de vibrações não lineares. Assim, embora nesta dissertação não demonstramos nenhuma simulação numérica de tal efeito, vamos nesta subseção mostrar as consequências de tal efeito em uma medida real. Este efeito de folga entre junções de estruturas é conhecido como *Clearance*, e na nossa análise espera-se que ela apenas potencialize a não linearidade cúbica já existente no sistema viga-fio.

A Figura (5.20), mostra a resposta dinâmica deste sistema (sinal de deslocamento), obtida através do sinal de aceleração capturado com o acelerômetro, usando as mesmas configurações do sistema descrito anteriormente, a menos claro, da forma de fixação do fio no suporte preso a massa concentrada.

É importante ressaltarmos que para obtenção do sinal da Figura (5.19), também utilizou-se o procedimento de integração e filtragem da resposta de aceleração do sistema, como na subseção anterior.

A Figura (5.21), mostra o comportamento do sistema, do ponto de vista de seu domínio da frequência (Filtrada), obtida através da FFT do sinal de deslocamento.

FIGURA 5.19 Folga entre o fio e o suporte na massa concentrada.

FIGURA 5.20 Resposta dinâmica do sistema com folga no susporte

FIGURA 5.20 Resposta em frequência do sistema com folga no suporte.

Como podemos notar, comparando a Figura (5.21), com a resposta em frequência do sistema anterior, Figura (5.14), um aumento significativo na distorção da FFT relacionada ao sistema com folga na junção entre o fio e a massa concentrada é observado.

No entanto, para uma completa análise do comportamento não-linear do sistema, aplicamos a técnica de Hilbert ao sinal de deslocamento do sistema, obtendo como resultados as Figuras (5.22), (5.23), (5.24) e (5.25). Analisando estas curvas, temos:

A Figura (5.22), apresenta a curva da frequência natural em função do tempo. Esta curva nos mostra uma pequena variação da frequência entre aproximadamente 35Hz e 25Hz, entre os instantes de 0s a 3s, aproximadamente. Esta variação da frequência, é um forte indício de não linearidade presente no sistema, e portanto caracteriza um comportamento não-linear. Comparativamente com o sistema anterior, Figura(5.15), podemos notar que o efeito de Clearance, realça a variação da frequência.

A Figura (5.24), mostra de maneira mais clara o efeito produzido pela folga entre o fio e o suporte de fixação preso a massa concentrada. Note que a variação da frequência natural com a amplitude é muito mais forte do que no caso anterior, Figura (5.17).

Finalmente, a Figura (5.25), nos mostra a relação entre a força de rigidez do sistema e a amplitude. Assim, como pode ser notado, esta relação é não-linear. Só para efeito comparativo com o sistema descrito anteriormente, um ajuste cúbico também foi traçado a curva de força. De acordo com este ajuste, os valores obtidos para o termo linear e o termo cúbico, foram, respectivamente: $a = 20529(rad/s)^2$, termo que está relacionado com o quadrado a frequência natural (rad/s) e $c = 1,4 \times 10^8$, termo relacionado a não linearidade cúbica do sistema.

Embora, não tenha sido desenvolvido um modelo teórico para comparação dos resultados, a técnica de Hilbert mostrou-se satisfatória para identificar a presença de não linearidades no sistema com folga. No entanto, devido a complexidade do sistema não é possível determinar nas respostas, obtidas por Hilbert, indicativos desta folga (clearance).

FIGURA 5.22 Frequência natural instantânea, sistema com folga.

FIGURA 5.23 Amplitude instantânea, sistema com folga.

FIGURA 5.24 Amplitude versus frequência natural, sistema com folga.

FIGURA 5.25 Curva de força versus amplitude, sistema com folga.

Conclusão e trabalhos futuros

Neste capítulo se encerra o trabalho discorrendo as conclusões das aplicações das técnicas utilizadas para identificar, caracterizar e quantificar a não linearidade cúbica presente em uma estrutura tipo viga, acoplada a um fio, a partir de dados experimentais da estrutura. Lembrando que, apesar do trabalho inicialmente ser derivado quase que exclusivamente em duas técnicas de identificação de não linearidades, a técnica da Transformada de Hilbert e a Transformada de Hilbert-Huang, uma terceira técnica foi introduzida para a análise dos dados experimentais, a qual utiliza um filtro de frequência. Os resultados obtidos através dos dados experimentais foram confrontados com os dados teóricos do modelo.

6.1 – Conclusão

Este trabalho foi direcionado ao estudo e validação da técnica da Transformada de Hilbert e Hilbert-Huang para identificar, caracterizar e quantificar não linearidades em estruturas, através de dados experimentais. Para verificar o desempenho das técnicas estudadas foi desenvolvido um modelo teórico levando em consideração as grandezas de interesse neste trabalho, grandezas não lineares e algumas simulações numéricas. O modelo teórico obtido, através da modelagem matemática do sistema viga-fio sob investigação, equivale a um oscilador de Duffing, com uma não linearidade cúbica na rigidez do sistema.

A primeira técnica estudada, Transformada de Hilbert, só foi usada para analisar sistemas cuja resposta no domínio da frequência possui apenas um harmônico. Esta restrição,

de acordo com a literatura, é devido ao fato da técnica não ser bem definida para analisar sistemas contendo múltiplos harmônicos em sua resposta o que pode levar a erros na interpretação dos dados obtidos. Assim, a menos desta restrição, a técnica da Transformada de Hilbert, apresentou bom resultados para analisar dados gerados através de simulações numéricas, tanto para simulações gerais, quanto para a simulação com dados reais do modelo físico.

A segunda técnica estudada, Transformada de Hilbert-Huang, foi utilizada para analisar sinais cuja resposta em frequência apresenta mais que um harmônico no sistema. Como discorrida nesta dissertação é uma técnica composta de duas partes: na primeira parte, separa-se o sinal, com mais de uma frequência, a ser analisado em sinais simples, ou seja, cada um contendo apenas uma das frequências do sinal original; a segunda parte nada mais é do que a aplicação da técnica da Transformada de Hilbert para um dos sinais monoharmônico de interesse, obtido na primeira parte. Esta técnica apresentou bons resultados para a análise da resposta do sistema simulado. No entanto, a técnica apresentou falhas para analisar a resposta experimental do sistema sob investigação. A esta falha apresentada pela técnica na análise dos dados experimentais aponta-se ao fato da resposta no domínio da frequência do sistema apresentar uma grande distorção, o que dificultaria ao método separar o sinal original em sinais com frequências simples. Entretanto, ainda no contexto de Hilbert, uma terceira técnica foi introduzida como forma alternativa para analisar os dados experimentais.

A terceira técnica utilizada como forma alternativa, frente ao problema apresentado por Hilbert-Huang, também utiliza a Transformada de Hilbert para analisar os dados experimentais. No entanto, uma vez que, as respostas dos dados experimentais são respostas contendo mais de uma frequência, a técnica de Hilbert por si só não pode ser empregada para análise. Assim, antes de se aplicar a técnica de Hilbert para analisar o sinal experimental do

sistema, um filtro passa baixa, foi aplicado em todas respostas experimentais obtidas. O filtro utilizado separou as frequências acima da frequência relacionada ao primeiro modo de vibrar do sistema (frequência de interesse). Para a implementação deste filtro, utilizou-se um software matemático Origin 7.0, com uma caixa de ferramentas com filtros já pré-desenvolvida. Idéia semelhante já tinha sido utilizada por FELDMAN (1997). Com as novas resposta obtidas, respostas filtradas, aplicou-se a técnica de Hilbert, para analisar o sinal referente ao deslocamento do sistema experimental. Esta técnica utilizando um Filtro em conjunto com Hilbert, apresentou excelentes resultados na identificação, caracterização e quantificação da não linearidade cúbica presente no sistema sob investigação. Esta conclusão foi obtida confrontando os dados do modelo teórico com os resultados experimentais, o que valida a técnica utilizada.

Assim, pode-se concluir neste trabalho que a técnica de Hilbert em conjunto com o filtro de frequências é uma boa técnica para identificar a não linearidade cúbica presente no sistema real sob investigação, através da análise de dados experimentais.

6.2 – Trabalhos Futuros

Nesta dissertação, do ponto de vista experimental, se tratou apenas da análise de oscilações livres, é interessante como trabalho futuro uma análise detalhada do sistema sob investigação, só que do ponto de vista de oscilações forçadas.

Também é sugerido uma melhor análise do programa responsável pelo método de decomposição do sinal em funções de intrínseco modos.

Referências bibliográficas e bibliografia consultada

Este capítulo apresenta uma lista de todas as referências bibliográficas e bibliografias utilizadas para a confecção deste trabalho.

CARTMELL, M. *Introduction to Linear, Parametric and Nonlinear Vibrations*. New York: Chapman and Hall, p. 242, 1990.

CHONG, Y. H.; IMREGUN, M. Variable modal parameter identification for non-linear mdof systems Part I: Formulation and numerical validation. **Shock and Vibration**, v. 7, p. 217-227, 2000.

CHONG, Y. H.; IMREGUN, M. Variable modal parameter identification for non-linear mdof systems Part II: Experimental validation and advanced case study. **Shock and Vibration**, v. 7, p. 229-240, 2000.

CRAIG, R. R. **Structural Dynamics: an introduction computer method**. New York: Wiley, 1981.

EWINS, D. J. **Modal testing: theory, practice and application**. London: Research Studies Press LTD, 2000.

FELDMAN, M. Non-Linear Systems Vibration Analysis Using Hilbert Transform-I. Free Vibration Analysis Method 'Freevib'. **Mechanical systems and Signal Processing**, v. 2, p. 119-127, 1994.

FELDMAN, M. Non-Linear Systems Vibration Analysis Using Hilbert Transform-II. Forced Vibration Analysis Method 'Forcevib'. **Mechanical systems and Signal Processing**, v. 3, p. 309-318, 1994.

FELDMAN, M. Non-linear free vibration identification via the Hilbert transform. **Journal of Sound and Vibration**, v. 3, p. 475- 489, 1997.

GHANEM, R.; ROMEO, F. A Wavelet-based approach for modal and parameter identification of non linear systems. **International Journal of Non-linear Mechanical**, v. 36, p. 835-859, 2001.

- GOGÉ, et al.; Detection and description of non-linear phenomena in experimental modal analysis via linearity plots. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 40, p27–48, 2005.
- GOMES DE SILVA, D.,VAROTO, P. S. On the Sufficiency of Classical Response Models in Predicting the Dynamic Behavior of Flexible Structures. In: PROCEEDINGS OF IMA-XXII, 2004. **International Modal Analysis Conference**, p. 20, 2004.
- HUANG, N. E. et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. **Proc. R. Soc. Lond**, p. 903-995, 1998.
- KRYLOV, M. N.; BOGOLYUBOV, N. N. Introduction to nonlinear mechanics. Kiev: Izv. Akad. Nauk, 1937
- LAMBERT, et al. **Empirical Mode Decomposition**. Matlab Code, 2007. Disponível em: <<http://www.owl.net.rice.edu/~elec301/Projects02/empiricalMode/code/emd.m>>. Acesso em: 03 de novembro de 2007.
- MAIA, N. M., SILVA, J. M. M. **Theoretical and Experimental Modal Analysis**. New York: Wiley & Sons, 1997.
- MARIN, M. **Estudo Analítico e Experimental da Vibração Livre de Sistemas de Um Grau de Liberdade Incluindo Efeitos Elásticos Não Lineares**. Trabalho de iniciação científica, USP, São Carlos, (2004).
- MEIROVITCH, L. **Elements of vibration analysis**. New York: McGraw-Hill, 1970.
- MASRI, S. F.; CAUCHEY, T. K. A nonparametric identification technique for nonlinear dynamic problems. U.S. International Committee for Theoretical and Applied Mechanics and University of California, U.S. **National Congress of Applied Mechanics, 8th**, University of California, Los Angeles, Calif., June 26-30, 1978. ASME, Transactions, **Journal of Applied Mechanics**, vol. 46, June 1979, p. 433-447
- MCCONNELL, K. G. **Vibration Testing: Theory and Practice**. New York: Wiley & Sons, 1995.
- MCLAUCHLAN, N. W. **Ordinary nonlinear differential equations in engineering and Physics science**. London: Oxford University Press, 1950.
- MEIROVITCH, L. **Methods of analytical dynamics**. New York: McGraw-Hill, 1970.
- MINORSKI, N. **Nonlinear oscillations**. Princeton: Van Nostrand Reinhold, 1962
- MOON, B. Y.; KANG, B. S. Vibration analysis of harmonically excited non-linear system using the method of multiple scales. **Journal of Sound and Vibration**, v. 263, p. 1–20, 2003.

- NAYFEH, A. H. **Perturbation Methods**. New York: Wiley & Sons, 1973.
- NAYFEH, A. H. **Introduction to Perturbation Techniques**. New York: Wiley & Sons, 1981.
- NAYFEH, A. H. **Problems in Perturbation**. New York: Wiley & Sons, 1985.
- NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. **Nonlinear oscillations**. New York: Wiley & Sons, 1979.
- PAI, F. P.; PALAZOTTO, A.N. Detection and identification of nonlinearities by amplitude and frequency modulation analysis. **Mechanical Systems and Signal Processing**, 2007.
- PAI, P. F. Nonlinear vibration characterization by signal decomposition. **Journal of Sound and Vibration**, v. 307, p. 527–544, 2007.
- POULARIKAS, A.D.; **The Transforms and Applications Handbook**. CRC Press, p. 463, 1996.
- RAO, J. S. **Advanced theory of vibration**. New Cork: John Willey & Sons, 1992.
- SETIO, S.; SETIO, H. D.; JEZEQUEL, L. A method of non-linear modal identification from frequency response tests. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 158, n. 3, p. 497-515, 1992.
- SHARPLEY, R.C.; VATCHEV, V. **Analysis of the intrinsics mode functions**. Departmente of Mechanical University of South Carolina, 2004.
- SILVA, D. G. **Vibrações Ressonantes Não Lineares em Estruturas do Tipo Viga Sob Excitação Paramétrica e Combinada**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade de São Paulo, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, 2006.
- SIMON, M.; TOMLINSON, G. R. Use of the Hilbert Transform in modal analysis of linear and non-linear structures. **Journal of Sound and Vibration**, v. 4, p. 421-436, 1984.
- SRINIVASAN, P. **Nonlinear Mechanical Vibration**. WILEY EASTERN LIMITED, New Delhi, India, 1995.
- STASZEWSKI, W. J. Identification of non-linear systems using multi-scale Ridges and Skeletons of the Wavelet Transform. **Journal of Sound and Vibration**, v. 4, p. 639-650, 1998.
- STOKER, J. J. **Nonlinear vibration in mechanical and electrical systems**. New Cork: John Willey & Sons, 1950.

- TA, MINH-NGHI; LARDIES, J. Identification of weak nonlinearities on damping and stiffness by the continuous wavelet transform. **Journal of Sound and Vibration**, v. 293, p.16–37, 2006.
- THOMSON, W. T.; DAHLEH, M. D. Theory of vibration with applications. New Jersey: Prentice-Hall, p. 524, 1998.
- THOMPSON, J. M. T.; STEWART, H. B. **Nonlinear dynamics and chaos**. New York: Wiley & Sons, 1986.
- TOLWINSKI, S. The Hilbert Transform and Empirical Mode Decomposition. University of Arizona, 2007. Disponível em: <http://www.math.arizona.edu/~tolwinski/Hilbertproject.ppt.html>. Acesso em: 05 de Novembro de 2007.
- VAROTO, P. S.; OLIVEIRA, L. P. R. On the force drop off phenomenon in shaker testing in experimental modal analysis. **Shock and Vibration**, v. 9, p. 165-175, 2002.
- VIRGIN, L. N. **Introduction to experimental nonlinear dynamics**. Cambridge University Press, 2000.
- WORDEN, K.; TOMLINSON, G. R. **Nonlinearity in Structural Dynamics Detection, Identification and Modelling**. IOP Publishing Ltd, 2001.
- YANG, J. N.; LIN, S. On-line identification of non-linear hysteretic structures using an adaptive tracking technique. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 39, p. 1481–1491, 2003.
- YASUDA, K.; KAMIYA, K. Experimental Identification Technique of nonlinear Beams in time Domain. **Nonlinear Dynamics**, v. 18, p. 185-202, 1999.

Anexo

PROGRAMA UTILIZADO PARA DECOMPOR SINAIS COM MÚLTIPLOS HARMÔNICOS (EMD)

O Programa mostrado abaixo, LAMBERT M. et al. (2007), foi utilizado para separar sinais com múltiplos harmônicos, tanto na parte de simulações numéricas quanto na parte experimental.

```
% EMD: Emprical mode decomposition

% imf = emd(x)%

% x - input signal (must be a column vector)

% This version will calculate all the imf's (longer)

% imf - Matrix of intrinsic mode functions (each as a row)

%      with residual in last row.

% See: Huang et al, Royal Society Proceedings on Math, Physical,

%      and Engineering Sciences, vol. 454, no. 1971, pp. 903-995,

%      8 March 1998

% Author: Ivan Magrin-Chagnolleau <ivan@ieee.org>

function imf = emd(x);

c = x(:)'; % copy of the input signal (as a row vector)

N = length(x);

% loop to decompose the input signal into successive IMF

imf = []; % Matrix which will contain the successive IMF, and the residue
```

```

while (1) % the stop criterion is tested at the end of the loop

% inner loop to find each imf

h = c; % at the beginning of the sifting process, h is the signal

SD = 1; % Standard deviation which will be used to stop the sifting process

while SD > 0.3

% while the standard deviation is higher than 0.3 (typical value)

% find local max/min points

d = diff(h); % approximate derivative

maxmin = []; % to store the optima (min and max without distinction so far)

for i=1:N-2

if d(i)==0                % we are on a zero

maxmin = [maxmin, i];

elseif sign(d(i))~=sign(d(i+1)) % we are straddling a zero so

maxmin = [maxmin, i+1];    % define zero as at i+1 (not i)

end

end

if size(maxmin,2) < 2 % then it is the residue

break

end

% divide maxmin into maxes and mins

if maxmin(1)>maxmin(2)      % first one is a max not a min

```

```

maxes = maxmin(1:2:length(maxmin));

mins = maxmin(2:2:length(maxmin));

else                                     % is the other way around

maxes = maxmin(2:2:length(maxmin));

mins = maxmin(1:2:length(maxmin));

end


% make endpoints both maxes and mins

maxes = [1 maxes N];

mins = [1 mins N];

% spline interpolate to get max and min envelopes; form imf

maxenv = spline(maxes,h(maxes),1:N);

minenv = spline(mins, h(mins),1:N);

    %plot(maxenv,'s-'), hold on, plot(minenv,'o-'), hold off, pause,

    m = (maxenv + minenv)/2; % mean of max and min enveloppes

    prevh = h; % copy of the previous value of h before modifying it

    h = h - m; % subtract mean to h

    % calculate standard deviation

    eps = 0.0000001; % to avoid zero values

    SD = sum ( ((prevh - h).^2) ./ (prevh.^2 + eps) );

end

```

```
imf = [imf; h]; % store the extracted IMF in the matrix imf

% if size(maxmin,2)<2, then h is the residue

% stop criterion of the algo.

if size(maxmin,2) < 2

    break

end

c = c - h; % subtract the extracted IMF from the signal

end

return
```