TATIANE CORRÊA DE GODOY

**Modelagem de placas laminadas com materiais piezoelétricos
conectados a circuitos shunt resistivo-indutivo**

Dissertação apresentada à
Escola de Engenharia de São
Carlos da Universidade de
São Paulo, como parte dos
requisitos para a obtenção
do título de Mestre em
Engenharia Mecânica. Área
de Concentração: Dinâmica
das Máquinas e Sistemas.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Areias Trindade

São Carlos

2008

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

G589m Godoy, Tatiane Corrêa de
Modelagem de placas laminadas com materiais
piezoelétricos conectados a circuitos Shunt resistivo-
indutivo / Tatiane Corrêa de Godoy ; orientador Marcelo
Areias Trindade. -- São Carlos, 2008.

Dissertação (Mestrado-Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica e Área de Concentração em Dinâmica
das Máquinas e Sistemas) -- Escola de Engenharia de São
Carlos da Universidade de São Paulo, 2008.

1. Placas laminadas. 2. Materiais piezoelétricos.
3. Método dos Elementos Finitos. 4. Circuitos Shunt.
5. Teorias de cisalhamento. I. Título.

Dedico este trabalho a meus avós
Rubens, Jeny e Antonio (in memorian),
e à minha avó Duva, pelo exemplo de
caráter e histórias de vida, que sempre
me deram forças nos momentos difíceis.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar, meus pais, Francisco e Sueli, pela imensa importância na minha formação acadêmica e humana. Pelo amor, constante incentivo e pela fé que sempre depositaram em mim. A eles, devo praticamente tudo. E aos meus irmãos Daniele e Rafael, pela força de sempre.

Ao Professor Marcelo Areias Trindade serei eternamente grata pela oportunidade de trabalho conjunto, enormes competência e paciência, e sempre valiosas orientações, sem as quais não teria sido possível a realização deste trabalho.

À família Ito, em especial, ao meu namorado Rodrigo, meu eterno agradecimento por todo apoio e carinho em todos os momentos, todos !

Aos funcionários do laboratório de Dinâmica: Cristina, Leandro, Xina, Diego e Sérgio, pela sempre pronta ajuda ao longo desses anos. E aos amigos de pós-graduação Juliana e Carlos, pelas discussões, incentivos e cafés, que sempre ajudaram muito.

Finalmente, gostaria de agradecer o apoio financeiro provido pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES por meio de uma bolsa de mestrado.

Resumo

GODOY, T. C. **Modelagem de placas laminadas com materiais piezoelétricos acoplados a circuitos shunt resistivo-indutivo**. 2008. 152 p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Este trabalho apresenta uma modelagem de placas laminadas com sensores/atuadores piezoelétricos integrados e conectados a circuitos tipo shunt resistivo-indutivo (RL). O modelo faz uso de duas teorias de placa, FSDT (*First-order Shear Deformation Theory*) e TSDT (*Third-order Shear Deformation Theory*), e considera a possibilidade de inserção de pastilhas piezoelétricas trabalhando nos modos de extensão e cisalhamento. Um modelo de elementos finitos para placas laminadas piezoelétricas, em camada equivalente (*Equivalent Single Layer*), foi desenvolvido usando como graus de liberdade os deslocamentos mecânicos generalizados e a carga elétrica gerada nos circuitos acoplados. Após, uma implementação computacional foi realizada e validada através de comparações com resultados encontrados na literatura. Então, foram realizados estudos para configurações de placa laminada com diferentes quantidades de pastilhas piezoelétricas através de uma análise paramétrica para obtenção das posições de maior acoplamento entre pastilhas e estrutura para os primeiros modos de vibração da placa. Estes resultados possibilitaram a otimização da eficiência do acoplamento eletromecânico através da distribuição das pastilhas piezoelétricas para uma placa com maior quantidade de pastilhas bem como a comparação dos resultados obtidos entre as duas teorias utilizadas.

Palavras-chave: placas laminadas, materiais piezoelétricos, método dos elementos finitos, circuitos shunt, teorias de cisalhamento.

Abstract

GODOY, T. C. **Modeling of laminate plates with piezoelectric materials connected to resonant shunt circuits**. 2008. 152 p. Master's dissertation – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos.

This work presents the modeling of laminate plates with embedded piezoelectric sensors and actuators connected to resistive-inductive (RL) shunt circuits. The model considers two plate theories, FSDT (First-order Shear Deformation Theory) and TSDT (Third-order Shear Deformation Theory) and allows embedded piezoelectric patches in extension and thickness-shear modes. A finite element model for piezoelectric laminate plates, using Equivalent Single Layer (ESL), was developed considering the generalized mechanical displacements and the electric charges induced in the coupled electric circuits as degrees of freedom. Then, the model was implemented and validated by means of comparisons with results found in the literature. Thereafter, some laminate plate configurations with different numbers of piezoelectric patches were studied through a parametric analysis to obtain the positions that maximize the electromechanical coupling between patches and structure for the first vibration modes. These results allowed the optimization of the electromechanical coupling efficiency through piezoelectric patches distribution for a plate with a larger number of patches and the comparison between the results obtained with the two plate theories considered.

Keywords: laminate plates, piezoelectric materials, finite element method, shunt circuits, shear deformation theories.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	Revisão bibliográfica	3
1.3	Organização da dissertação	10
2	Teoria e conceitos preliminares	11
2.1	Hipóteses básicas e teorias de estruturas do tipo placa	11
2.2	Relações entre deformações e deslocamentos	16
2.3	Piezoelasticidade	19
2.4	Equações constitutivas para materiais piezoelétricos	20
2.5	Equações constitutivas para materiais ortotrópicos elásticos	23
2.6	Rotações das equações constitutivas	26
3	Modelagem da placa	31
3.1	Formulação matemática	31
3.1.1	Campos de deslocamentos e deformações	31
3.1.2	Equações constitutivas piezoelétricas	37

3.1.3	Princípio de Hamilton	45
3.2	Formulação por elementos finitos	50
3.2.1	Discretização do campo de deslocamento	50
3.2.2	Discretização do campo de deformações	55
3.2.3	Discretização dos deslocamentos elétricos	57
3.2.4	Discretização dos trabalhos virtuais	58
3.2.5	Equações de movimento	62
3.2.6	Acoplamento de um circuito RL à estrutura	63
3.3	Validação do modelo	67
3.3.1	Placas com camadas piezoelétricas polarizadas longitudinalmente	67
3.3.2	Placa com camada piezoelétrica polarizada transversalmente	78
4	Placas laminadas com pastilhas piezoelétricas integradas	85
4.1	Análise paramétrica para placas com duas pastilhas piezoelétricas	86
4.1.1	Placa laminada com duas pastilhas P_3	90
4.1.2	Placa laminada com duas pastilhas P_1	101
4.1.3	Comparação entre as placas laminadas com pastilhas P_3 e P_1	110
4.2	Placa laminada com oito pastilhas piezoelétricas	111
4.3	Comparações entre as placas com duas e oito pastilhas piezoelétricas P_3	115
5	Conclusões gerais	119
5.1	Perspectivas futuras	121

Lista de Tabelas

3.1	Propriedades dos materiais piezoelétricos polarizados nas direções P_1 e P_3 .	44
3.2	Propriedades dos materiais da placa 1, ($GE - 0^\circ / PZT - 5H$, $P_1 / GE - 0^\circ$).	69
3.3	Oito primeiras frequências adimensionais para a placa híbrida ($GE - 0^\circ / PZT - 5H$, $P_1 / GE - 0^\circ$) em circuito fechado.	71
3.4	Oito primeiras frequências adimensionais para a placa híbrida ($GE - 0^\circ / PZT - 5H$, $P_1 / GE - 0^\circ$) em circuito aberto.	72
3.5	Propriedades dos materiais da placa 2, ($GE - 0^\circ / PZT - 5A$, $P_1 / GE - 0^\circ$).	74
3.6	Oito primeiras frequências para a placa híbrida ($GE - 0^\circ / PZT - 5A$, $P_1 / GE - 0^\circ$) em circuito fechado.	76
3.7	Oito primeiras frequências para a placa híbrida ($GE - 0^\circ / PZT - 5A$, $P_1 / GE - 0^\circ$) em circuito aberto.	77
3.8	Propriedades dos materiais da placa 3, ($PZT - 4 / GE - 0^\circ / GE - 90^\circ / GE - 0^\circ / PZT - 4$), com PZT em P_3 .	80
3.9	Cinco primeiras frequências naturais normalizadas para a placa híbrida ($PZT - 4 / GE - 0^\circ / GE - 90^\circ / GE - 0^\circ / PZT - 4$), com PZT em P_3 , em circuito fechado.	82

3.10	Cinco primeiras frequências naturais normalizadas para a placa híbrida (PZT-4/ GE 0°/ GE 90°/ GE 0°/ PZT-4), com PZT em P_3 , em circuito aberto.	83
4.1	Propriedades do material GE AS4/3501 – 6 a 0°.	87
4.2	emcc máximo para os primeiros modos de vibração, todos na espessura z_2 da placa com duas pastilhas P_3	100
4.3	emcc máximo para os primeiros modos de vibração para placa com duas pastilhas piezoelétricas em P_1	109
4.4	Acoplamento eletromecânico para os primeiros modos de vibração da placa da Figura 4.16.	114
4.5	Acoplamento eletromecânico para os primeiros modos de vibração da placa da Figura 4.17.	114
4.6	Acoplamento eletromecânico para os primeiros modos de vibração para as placas laminadas com pastilhas P_3 nas posições da Figura 4.16 com FSDT.	116
4.7	Acoplamento eletromecânico para os primeiros modos de vibração para as placas laminadas com pastilhas P_3 nas posições da Figura 4.16 com TSDT.	116
4.8	Acoplamento eletromecânico para os primeiros modos de vibração para as placas laminadas com pastilhas P_3 nas posições da Figura 4.17 com FSDT.	117

4.9	Acoplamento eletromecânico para os primeiros modos de vibração para as placas laminadas com pastilhas P_3 nas posições da Figura 4.17 com TSDT.	117
-----	---	-----

Lista de Figuras

2.1	Cinemática de uma placa no plano xz para as teorias CLPT, FSDT e TSDT.	15
2.2	Deslocamento em um meio contínuo	16
2.3	Conversão de energia no efeito piezoelétrico direto e inverso.	19
2.4	Direções de uma lâmina unidirecional.	24
2.5	Planos de extensão e cisalhamento.	25
2.6	Eixo de rotação de uma lâmina ($1m, 2m, 3m$) em relação ao eixo preferen- cial do laminado $(1, 2, 3)$	27
3.1	Campo de deslocamento ao longo da espessura para as teorias FSDT e TSDT.	36
3.2	Placa laminada com PZT em modo de cisalhamento, P_1	37
3.3	Placa laminada com as possíveis configurações de campo elétrico aplica- das aos PZTs com polarização P_3	38
3.4	Possíveis comportamentos dinâmicos para placa laminada com PZTs em P_3 e campo elétrico paralelo, E_3	39
3.5	Elemento finito retangular com quatro nós e eixo cartesiano baricêntrico. .	51
3.6	Funções de Lagrange vistas espacialmente.	52

3.7	Perfil da placa.	59
3.8	Placa 1 vista do plano xz , com camada PZT-5H em modo de cisalhamento, P_1 , entre as camadas de GE.	68
3.9	Oito primeiros modos de vibração para a placa 1, com pastilha PZT P_1 . . .	70
3.10	Placa 2 vista do plano xz , com camada PZT-5A em modo de cisalhamento, P_1 , entre as camadas de GE.	73
3.11	Oito primeiros modos de vibração para a placa 2, com pastilha PZT P_1 . . .	75
3.12	Placa 3 vista do plano xz , com camadas PZT-4 em modo de extensão, P_3 , sobre e sob camadas de GE 0° e GE 90°	78
3.13	Cinco primeiros modos de vibração para placa 3, com pastilhas PZT P_3 . . .	81
4.1	Posições ocupadas por uma pastilha piezoelétrica ao longo da espessura e no plano da placa laminada.	88
4.2	Posições ocupadas por uma pastilha piezoelétrica no plano da placa. . . .	89
4.3	Vista do plano xz para placa com camadas elásticas de GE para os casos: com duas pastilhas PZT com polarização P_1 ou P_3	91
4.4	Quatro primeiros modos de vibração para placa com duas pastilhas P_3 . . .	92
4.5	emcc para o primeiro modo de vibração da placa com duas pastilhas pie- zoelétricas em P_3	93
4.6	emcc para o segundo modo de vibração da placa com duas pastilhas pie- zoelétricas em P_3	95
4.7	emcc para o terceiro modo de vibração da placa com duas pastilhas pie- zoelétricas em P_3	96

4.8	emcc para o quarto modo de vibração da placa com duas pastilhas piezoelétricas em P_3 para a TSDT.	98
4.9	Média do emcc para os 3 primeiros modos de vibração da placa com duas pastilhas piezoelétricas em P_3 para FSDT, e para os 4 primeiros modos para TSDT.	99
4.10	Quatro primeiros modos de vibração para placa com duas pastilhas P_1 . . .	101
4.11	emcc para o primeiro modo de vibração da placa com duas pastilhas piezoelétricas em P_1	103
4.12	emcc para o segundo modo de vibração da placa com duas pastilhas piezoelétricas em P_1	104
4.13	emcc para o terceiro modo de vibração da placa com duas pastilhas piezoelétricas em P_1	105
4.14	emcc para o quarto modo de vibração da placa com duas pastilhas piezoelétricas em P_1	106
4.15	Média do emcc para os 4 primeiros modos de vibração da placa com duas pastilhas piezoelétricas P_1 para FSDT e TSDT.	107
4.16	Vista de topo da placa com 8 pastilhas piezoelétricas P_3 dispostas nas posições de maior acoplamento eletromecânico para cada modo de vibração.	112
4.17	Vista de topo da placa com 8 pastilhas piezoelétricas P_3 dispostas nas posições de maior acoplamento eletromecânico médio.	113

Lista de símbolos

u_0, v_0, w_0	deslocamentos na linha média nas direções x, y, z , respectivamente
$u, v, w \dots$	campo de deslocamento nas direções x, y, z , respectivamente
$w_{0,x}, w_{0,y} \dots$	derivadas de w_0 nas direções x e y , respectivamente
$\psi_x, \psi_y \dots$	rotação das seções transversais aos planos yz e xz , respectivamente
$\boldsymbol{\varepsilon} \dots \dots \dots$	vetor deformação
$\varepsilon_i \dots \dots \dots$	componente do vetor deformação
$\boldsymbol{\sigma} \dots \dots \dots$	vetor tensão mecânica
$\sigma_i \dots \dots \dots$	componente do vetor tensão mecânica
$c^D \dots \dots \dots$	matriz constantes elásticas para deslocamento elétrico constante
$c^E \dots \dots \dots$	matriz constantes elásticas para campo elétrico constante
$\epsilon^\varepsilon \dots \dots \dots$	matriz permissividades dielétricas para deformações constantes
$e \dots \dots \dots$	matriz constantes piezoelétricas em (C/m^2)
$d \dots \dots \dots$	matriz constantes piezoelétricas em (m/V)
$h \dots \dots \dots$	matriz constantes piezoelétricas
$\beta^\varepsilon \dots \dots \dots$	matriz constantes dielétricas para deformações constantes

$\mathbf{D}$	vetor deslocamento elétrico
D_i	componente do vetor deslocamento elétrico na direção i
$\mathbf{E}$	vetor campo elétrico
E_i	componente do vetor campo elétrico na direção i
ρ	densidade do material
T	densidade de energia cinética
U	densidade de energia potencial (densidade de entalpia elétrica)
W	trabalho das forças externas aplicadas
$\mathbf{u}_u$	vetor deslocamentos generalizados
$\mathbf{u}_e$	vetor deslocamentos nodais
$\mathbf{N}, \mathbf{N}_j$	matrizes funções de interpolação
$\boldsymbol{\varepsilon}_u$	vetor deformações generalizadas
$\mathbf{D}_d$	vetor deslocamentos elétricos nas 2n camadas
$\mathbf{D}_e$	vetor deslocamentos elétricos nodais
$\mathbf{K}_m^e$	matriz rigidez mecânica elementar
$\mathbf{K}_m$	matriz rigidez mecânica global
$\mathbf{K}_{me}^e$	matriz rigidez eletromecânica elementar
$\mathbf{K}_{me}$	matriz rigidez eletromecânica global
$\mathbf{K}_e^e$	matriz rigidez dielétrica elementar
$\mathbf{K}_e$	matriz rigidez dielétrica global
$\mathbf{M}^e$	matriz massa elementar
$\mathbf{M}$	matriz massa global
$\mathbf{F}_m^e$	vetor forças generalizadas elementar

$\mathbf{F}_m$ vetor forças generalizadas global

$\mathbf{L}_c$ vetor indutância elétrica do circuito

$\mathbf{R}_c$ vetor resistência elétrica do circuito

$\mathbf{V}_c$ vetor tensão elétrica aplicada ao circuito

$\mathbf{q}_c$ vetor carga elétrica do circuito

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

As chamadas “Estruturas Inteligentes” (*Intelligent* ou *Smart Structures*) surgiram por volta de 1985 (Crawley e de Luis, 1987). Esse termo se refere a sistemas inspirados em modelos naturais que possuem qualidades como precisão, eficácia e adaptabilidade que as estruturas inteligentes procuram reproduzir. Estas consistem em sensores e atuadores acoplados à estrutura e interligados a um ou mais microprocessadores, capazes de responder à diferentes condições de operação por causas tanto internas quanto externas, como falhas ou danos à mesma, podendo alterar sua rigidez, forma, frequências naturais e outras propriedades mecânicas (Chopra, 2002).

Sensores e atuadores podem ter suas ações baseadas em diversos fenômenos físicos tais como expansão térmica, mudança de fase e piezoeletricidade. Um tipo de transdutor atualmente bastante utilizado como sensor/atuator são as cerâmicas piezoelétricas descobertas em 1954 por Jaffe et al., baseadas em titanato zirconato de chumbo (PZT). Os PZTs

apresentam inúmeras vantagens tais como baixo peso e altas precisão e eficácia, tendo alto acoplamento às estruturas inteligentes. Outra vantagem desses materiais é que podem ser acoplados interna ou externamente ao sistema, pois apresentam-se na forma de pastilhas muito finas. Um dos problemas quanto ao uso desse material se deve principalmente à sua grande fragilidade, que pode ser amenizada quando a cerâmica é inserida na estrutura, evitando assim danos ou quebra da pastilha. Contudo, a fabricação de laminados com pastilhas piezoelétricas dispostas internamente ainda não é um processo simples.

Nas duas últimas décadas, diversos grupos de pesquisa têm se empenhado na análise e desenvolvimento desses sistemas e o interesse no desenvolvimento de modelos matemáticos que descrevam com precisão o acoplamento de sensores/atuadores às estruturas tem se tornado cada vez maior, visto a diversidade de aplicações desses materiais a sistemas reais e aos que podem vir a ser desenvolvidos.

Concomitantemente, com o intuito de reduzir o consumo de combustível em carros e aviões, maior controle nas diferentes condições de operação dessas e outras estruturas e com o avanço tecnológico, passou-se a buscar o desenvolvimento de materiais cada vez mais leves, onde os laminados passaram a fazer parte da gama de materiais usuais em projetos de estruturas. Uma classe de laminado largamente utilizado quando grande rigidez mecânica é um parâmetro necessário é aquela dos compósitos.

Sendo assim, o estudo de laminados compósitos com inserções de pastilhas de material piezoelétrico tem grande número de aplicações no desenvolvimento de estruturas inteligentes.

Este trabalho apresenta uma modelagem de placa laminada com sensores e atuadores piezoelétricos com diferentes direções de polarização, modo de extensão e cisalha-

mento. Serão utilizadas para a modelagem duas teorias de placa em camada equivalente: a FSDT (*First-order Shear Deformation Theory*) e a TSDT (*Third-order Shear Deformation Theory*).

1.2 Revisão bibliográfica

O desenvolvimento efetivo de estruturas inteligentes requer a construção de modelos teóricos eficientes, capazes de simular a interação entre a estrutura e o acoplamento de seus sensores/atuadores. Diversos modelos analíticos para estruturas laminadas com materiais compósitos e piezoelétricos têm sido propostos (Chopra, 2002; Benjeddou, 2000; Gopinathan et al., 2000).

Um dos primeiros trabalhos na área foi o de Allik e Hughes (1970), que desenvolveram uma formulação variacional para o problema de vibração estrutural com elementos piezoelétricos implementando um modelo para análise numérica sendo utilizado um elemento tridimensional tetraédrico com 12 graus de liberdade de deslocamento e 4 graus de liberdade elétricos. Crawley e co-autores desenvolveram inúmeros estudos para problemas de vigas com sensores/atuadores piezoelétricos. Crawley e de Luis (1987) utilizaram uma formulação baseada na teoria de Euler-Bernoulli e desenvolveram soluções exatas e numéricas para a análise de vigas. Crawley e Anderson (1990) desenvolveram um estudo de atuadores piezoelétricos em vigas, discutindo suas principais características.

Alguns trabalhos, mais recentes, apresentaram revisões e críticas sobre teorias utilizadas atualmente para modelagens de placa, como o de Benjeddou (2000), que examinou e discutiu os avanços e tendências quanto à modelagem de estruturas adaptativas, princi-

palmente aquelas com materiais piezoelétricos por elementos finitos, destacando ainda tipos de análise que foram pouco exploradas na última década (1990-2000). Já Gopinathan et al. (2000) apresentaram uma revisão sobre algumas teorias para placas laminadas, apontando estudos que não têm sido realizados para efetiva aplicação das modelagens, como a análise dinâmica, e mostraram um modelo de placa com FSDT, comparando-a à solução exata tridimensional. Chopra (2002) descreveu as chamadas estruturas inteligentes bem como suas componentes quanto aos tipos e características de diversos materiais, modelos para estruturas com materiais piezoelétricos, vigas e placas, relatando suas inúmeras aplicações no campo da engenharia.

Diversas teorias simplificadas têm sido utilizadas para obtenção de soluções analíticas para placas laminadas com camadas piezoelétricas, no entanto, as equações de movimento para tais estruturas são obtidas somente em condições de contorno muito simples. Aldraihem e Khdeir (2006) apresentaram um modelo de camada equivalente (ESL, *Equivalent Single Layer*) usando teoria de primeira ordem (FSDT, *First-order Shear Deformation Theory*), para placas laminadas com 6 camadas e atuadores em modo de cisalhamento, obtendo solução analítica para modos de flexão. Com o Método de Lévy em conjunto com aproximações no espaço de estados, as soluções para comportamento estático da placa foram obtidas e analisadas para diferentes condições de contorno (CC), sendo duas delas simplesmente apoiada, e as outras duas, variando entre simplesmente apoiada, livre ou engastada. No ano seguinte, Khdeir e Aldraihem (2007) apresentaram um modelo de placa que viabilizava o uso de uma das três teorias de placa: a teoria clássica (CLPT, *Classical Laminated Plate Theory*), a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem (FSDT), e a teoria de deformação de cisalhamento de terceira

ordem (TSDT, *Third-order Shear Deformation Theory*). As soluções analíticas foram obtidas para diferentes CC, com modelo ESL e Método de Lévy também utilizados no trabalho anterior, porém, para placas laminadas com atuadores piezoelétricos em modo de extensão. A limitação desses modelos de estruturas apresentadas é que o material piezoelétrico representa uma lâmina da estrutura, ou seja, possui as dimensões do plano da placa, o que não representaria o comportamento de placas onde esses materiais acoplados apresentassem menores dimensões. Outro estudo com teoria de camada equivalente também foi apresentado por Reddy (1999), que utilizou formulações teóricas com modelo elementos finitos, baseados nas teorias CLPT, FSDT e TSDT, para placas laminadas com sensores e atuadores piezoelétricos sob CC simplesmente apoiada, obtendo soluções analíticas com controle feedback. A vantagem da teoria TSDT é que não requer fatores de correção do cisalhamento e apresenta maior precisão na distribuição de tensão interlaminar.

Para um maior refinamento dos resultados obtidos para o comportamento de placas multilaminadas, muitos modelos tridimensionais (3D) têm sido desenvolvidos. Heyliger e Saravanos (1995) utilizaram um modelo 3D com teoria *Layerwise* (LW) para placas laminadas com camadas piezoelétricas em modo de extensão e CC simplesmente apoiada, sendo obtidos os campos de deslocamentos e tensões através da espessura para diferentes configurações de placa quanto à razão largura/espessura.

Outros modelos de placa utilizaram a teoria LW para o caso bidimensional, como Saravanos et al. (1997). Eles desenvolveram um modelo elementos finitos para placa laminada com sensores e atuadores piezoelétricos em modo de extensão, analisando o comportamento quase estático e dinâmico das estruturas. Os resultados foram compa-

rados a soluções exatas, sendo analisadas diferentes configurações de placa quanto às camadas elásticas e relações entre as dimensões largura/espessura, em circuito aberto e circuito fechado, e para placas com diferentes quantidades de pastilhas piezoelétricas. Benjeddou et al. (2002), dentre outros, apresentam um modelo 2D baseado na teoria LW, supondo o comportamento na espessura da camada como FSDT. As soluções analíticas para vibração livre e CC simplesmente apoiada, foram comparadas às soluções exatas 3D elásticas (do tipo Navier, método de espaço de estados e LW por elementos finitos), e 2D (teoria mista, ESL-LW e HSDT, por elementos finitos). Os resultados para modelos 2D apresentaram proximidade aos obtidos com os modelos 3D.

Um dos primeiros trabalhos a utilizar materiais piezoelétricos em modo de cisalhamento para placa foi o de Zhang e Sun (1999), que apresentaram uma placa sanduíche com núcleo piezoelétrico, sob a CC engastada-engastada-livre-livre, utilizando a formulação de Rayleigh-Ritz para energia potencial estacionária, cujas soluções foram comparadas às obtidas para um modelo elementos finitos. Segundo Zhang e Sun, uma das vantagens em se posicionar uma cerâmica piezoelétrica trabalhando em cisalhamento no núcleo ao invés da superfície é o de se evitar danos à pastilha devido ao contato com objetos e/ou possível carga, dada sua fragilidade, e por ter-se obtido uma flexão da estrutura com o material piezoelétrico em cisalhamento no núcleo equivalente àquela obtida com o material em extensão na superfície, estando no centro da estrutura, sujeito à menores tensões. Desde então, muitos outros estudos foram realizados para configurações de placa com material piezoelétrico em cisalhamento, tais como o de Baillargeon e Vel (2005), que utilizaram um modelo tridimensional (3D) com teoria LW para placas laminadas, com CC simplesmente apoiada. Foram obtidas as 12 primeiras frequências naturais em circuitos

aberto e fechado para diferentes configurações de placa, com razões largura/espessura iguais a 4, 10 e 100. Vel e Batra (2001) também utilizaram um modelo 3D LW obtendo solução exata para a configuração de placa análoga, atuador piezoelétrico em cisalhamento no núcleo, com CC simplesmente apoiada, sendo os resultados comparados aos obtidos com FSDT para várias razões largura/espessura da placa. Outros autores, como Deü e Benjeddou (2005), utilizaram modelagem semelhante, 3D LW, porém, com CC elétricas variadas. Os resultados foram comparados a um modelo elementos finitos e uma análise paramétrica foi realizada para estudo do acoplamento eletromecânico em relação à posição da pastilha piezoelétrica à estrutura. Todos os modelos apresentaram maior refinamento nas soluções, porém com maior custo operacional.

O método dos elementos finitos (EF), desde os anos 50, tem sido uma ferramenta muito utilizada para diversos tipos de modelagens, principalmente aquelas nas quais as CC não são simples. Desde então, são inúmeros os trabalhos, nas mais diversas áreas da engenharia, onde o método EF é aplicado para a obtenção das equações de movimento e análises estática e dinâmica de sistemas. Tzou e Tseng (1990) desenvolveram um modelo para um elemento finito sólido de placa, esta, com camadas piezoelétricas de PVDF nas superfícies superior e inferior, atuando como sensor e atuador. Foram utilizados 75 elementos ao todo, 25 em cada camada, para uma placa de dimensões $(10 \times 10 \times 0.31)$ cm. Os resultados obtidos por controle feedback para 2 algoritmos mostraram que o amortecimento da estrutura aumenta com aumento da voltagem aplicada, esta, da ordem de 2000 V, sendo propostos estudos com material piezoelétrico PZT em diferentes direções de polarização.

Correia et al. (2000) apresentaram 3 modelos EF com elemento de 9 nós: o pri-

meiro, com HSDT e 11 graus de liberdade (GL) por nó; o segundo, com HSDT e 9 GL por nó; e o terceiro, com FSDT e 5 GL por nó; todos com 1 GL elétrico por camada piezoelétrica. Foram analisadas placas e vigas com diferentes materiais piezoelétricos (PVDF, PXE-52, PZT-4) para diferentes estudos de caso, sendo realizada uma otimização do atuador em relação à espessura da lâmina. As frequências naturais obtidas foram comparadas entre os modelos, algumas com resultados experimentais e soluções exatas e os modelos apresentaram bons resultados. Narayanan e Balamrugaan (2003) aplicaram teorias de controle para vigas, placas e cascas com sensores e atuadores distribuídos, modeladas com a teoria de viga de Timoshenko e FSDT-ESL. Foi utilizado um elemento finito com 9 nós por elemento, sendo considerado o efeito termoeletromecânico, para todos os casos. Abreu e Steffen (2004) apresentaram um modelo EF baseado no modelo de placa de Kirchhoff, CLPT, para placa simplesmente apoiada, com 3 pares sensores e atuadores piezoelétricos dispostos simetricamente sobre as superfícies superior e inferior da estrutura. As pastilhas foram dispostas em duas configurações e um elemento com 4 nós e 3 GL por nó foi utilizado para a malha de discretização, sendo realizadas análises estática e dinâmica, cujos resultados de frequências ressonantes e campo de deslocamentos foram comparados a soluções exatas e do software ANSYS, apresentando boa concordância. Outro estudo interessante foi o realizado por Robaldo et al. (2006), com uma formulação EF unificada, na qual os modelos ESL e LW para placas laminadas com camadas piezoelétricas podem ser executados ao mesmo tempo. A combinação dos parâmetros resulta em 12 EF que podem ser utilizados com a formulação. O modelo foi baseado no princípio dos deslocamentos virtuais e para ESL pode admitir a função Zig-Zag de Murakami. A ordem de expansão da função assumida na direção da espessura,

que para ESL são funções polinomiais de Taylor, e LW e o potencial elétrico, as de Legendre, pode ser escolhida de 1 a 4; e o número de nós por elemento pode variar de 1 a 4. Os resultados obtidos para as cinco primeiras frequências, para placas simplesmente apoiada, são comparados aos de solução 3D exata, apresentando boa concordância.

Parte do modelo desenvolvido neste trabalho, teve como base a formulação desenvolvida por Thornburgh e Chattopadhyay (2002) e Thornburgh et al. (2004), que utilizaram a função densidade de entalpia elétrica para descrever a energia potencial contida num meio piezoelétrico. As equações de movimento para placas foram obtidas pelo princípio variacional de Hamilton e discretizadas por EF após modelagem com TSDT-ESL. O primeiro trabalho (Thornburg e Chattopadhyay, 2002), foi desenvolvido para determinar a resposta analítica de uma estrutura arbitrária com circuitos resistivos acoplados. Os resultados obtidos foram comparados a valores experimentais da literatura. O segundo trabalho (Thornburg et al., 2004), com modelagem análoga, comparou os resultados obtidos para TSDT com àquelas obtidas com CLPT e experimentalmente, para ilustrar a importância da modelagem quanto a precisão estimada para a estrutura adaptativa. Foi observado que o aumento na espessura da placa influencia o cisalhamento transversal na resposta da placa, e que com o aumento da espessura desta, as frequências naturais obtidas pelas teorias, diferem grandemente. Thornburgh e Chattopadyay (2003), também desenvolveram um modelo para otimização do amortecimento passivo de estruturas compósitas, sendo duas pastilhas posicionadas em cada superfície da placa, superior e inferior, para otimização da posição para amortecimento de 1 e 2 modos de vibração, sendo utilizada diferentes configurações de circuitos resistivos.

1.3 Organização da dissertação

Este trabalho é dividido em 5 partes. O capítulo 2, apresenta conceitos físicos e teóricos básicos que serão utilizados no decorrer da dissertação para que no capítulo 3 a formulação do modelo bem como a descrição em detalhe matemático das teorias de placa e hipóteses utilizadas possam ser explanados com maior facilidade e clareza. Neste capítulo será feita a modelagem por elementos finitos e sua validação. No capítulo 4 serão estudadas placas laminadas com diferentes quantidades de pastilhas piezoelétricas com polarizações em modo de extensão e cisalhamento, onde ainda será analisado o coeficiente de acoplamento das mesmas às estruturas laminadas. Para finalizar, o capítulo 5 apresentará as conclusões gerais do trabalho e suas perspectivas futuras.

Capítulo 2

Teoria e conceitos preliminares

Para facilitar a compreensão da modelagem da placa, este capítulo apresenta uma revisão de teoria e conceitos preliminares necessários ao desenvolvimento da modelagem. Em particular, a cinemática de deformação de corpos sólidos tridimensionais e suas simplificações para estruturas tipo placa; relações constitutivas para sólidos ortotrópicos elásticos e piezoelétricos, suas rotações e simplificações.

2.1 Hipóteses básicas e teorias de estruturas do tipo placa

O termo *placa* se refere a corpos sólidos cuja espessura é pequena em relação às dimensões laterais dos dois planos do sólido. Este fato permite considerar desprezíveis as deformações no plano da espessura da placa ou que nesta dimensão uma função conhecida pode ser assumida. Tal hipótese resulta em uma limitação do uso de teorias de placa, pois funcionam para um número finito de casos, para os quais a razão H/L assume pequenos valores, sendo L uma das dimensões laterais da placa, e H , sua espessura. Quanto menor

a razão entre essas dimensões, melhor a descrição cinemática da estrutura pelas teorias de placa. Para placas laminadas onde a dimensão da espessura é considerável, uma teoria de elasticidade tridimensional é necessária, sendo cada camada modelada como um sólido tridimensional.

Reisser (1945) e Mindlin (1951) publicaram alguns dos primeiros e mais importantes trabalhos sobre placas. Reissner trabalhou com campos de tensões, enquanto Mindlin, com aqueles de deslocamentos. Kirchhoff também foi um dos pioneiros no desenvolvimento desses estudos. Contudo, estes trabalhos foram desenvolvidos para placas homogêneas.

As teorias sobre placas são geralmente citadas por siglas em inglês, que transmitem suas características principais, algumas delas são (Fagundes, 2002):

CPT (*Classic Plate Theory*), Teoria Clássica de Placas, é uma extensão da teoria de *viga de Euler-Bernoulli* para placas, e é conhecida como *teoria de placa de Kirchhoff*;

CST (*Constante Shear-Angle Deformation Theory*), Teoria do ângulo de cisalhamento constante, é baseada nos modelos de Reissner/Mindlin;

CLPT (*Classical Laminated Plate Theory*), Teoria clássica de placa laminada, que corresponde à CPT para o caso de placas laminadas;

FSDT (*First-order Shear Deformation Theory*), Teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem, é uma extensão da *teoria de viga de Timoshenko*, e é conhecida como *teoria de placa de Reissner-Mindlin*, correspondendo a CST, sendo o campo de deslocamentos axiais linear ao longo da espessura;

TSDT (*Third-order Shear Deformation Theory*), Teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem, onde o campo de deslocamentos axiais assume uma função de

forma cúbica ao longo da espessura;

HSDT (*High-order Shear Deformation Theory*), Teoria de deformação de cisalhamento de ordem superior, que engloba FSDT e TSDT pois o campo de deslocamentos é expandido por polinômios de ordem mais alta;

LW (*Layer-wise Constant Shear Angle Theory*), Teoria do ângulo de cisalhamento constante para lâmina discreta, corresponde à CST porém, aplicada a cada lâmina.

Segundo Reddy (1989), as teorias de placas laminadas podem ser agrupadas em 3 categorias:

I- Teorias tridimensionais (3D);

II- Teorias de Camada Simples Equivalente, ESL (*Equivalent Single Layer*);

III- Teorias do tipo Camada ou Lâmina Discreta, LW (*Layerwise*).

As teorias I consideram a geometria da placa tridimensionalmente, esta pode ou não ser laminada. Contudo, devido à complexidade das análises, as soluções através dessas teorias são limitadas a poucos casos.

As teorias ESL consideram a placa bidimensional e são formulações específicas para laminados. Essas teorias assumem 3 hipóteses: cada lâmina é elástica, o laminado é considerado uma única placa homogênea, e está submetido a um estado plano de tensões.

O terceiro grupo é também conhecido como Multi-lâmina e as teorias consideram o laminado constituído por lâminas empilhadas. O ângulo de rotação da normal varia de lâmina para lâmina, sendo o campo de tensões interlaminares precisamente representado.

Para melhor visualização das teorias utilizadas neste trabalho, FSDT e TSDT, estas serão aqui brevemente comparadas à CLPT, pois a formulação matemática para ambas será detalhada a posteriori na descrição do modelo.

A CLPT, baseada nas hipóteses de Kirchhoff, assume que a linha perpendicular à superfície média (normal transversal à placa) permanece retilínea após a deformação, sendo inextensível, e rotaciona de modo a permanecer perpendicular à superfície média após a deformação. Essas hipóteses implicam em deformações nulas em ε_3 , ε_4 e ε_5 , que serão descritas neste capítulo em seção posterior. A CLPT é baseada no seguinte campo de deslocamentos:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x}, \\ v(x, y, z, t) &= v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y}, \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Na FSDT, a condição de normalidade assumida na CLPT é removida, resultando em deformações de cisalhamento transversal constantes através da espessura e uma deformação normal na direção da espessura nula. Já a TSDT, assume que as tensões de cisalhamento transversal nas superfícies superior e inferior da placa devem ser nulas, e máximas no centro, o que representa melhor o comportamento esperado. Assim, o campo de deslocamentos assumidos para as teorias CLPT, FSDT e TSDT são representadas na Figura 2.1, na qual a cinemática da placa é considerada independente do número ou tipo de camadas que compõe o laminado.

Figura 2.1: Cinemática de uma placa no plano xz para as teorias CLPT, FSDT e TSDT.

2.2 Relações entre deformações e deslocamentos

Num meio elástico, os deslocamentos de dois pontos A e B para os pontos C e D devido a um esforço externo, como na Figura 2.2, pode ser representado por (Novozhilov, 1953):

$$\begin{aligned}
 A &= (x, y, z) \\
 B &= (x + dx, y + dy, z + dz) \\
 C &= (\alpha, \beta, \gamma) \\
 D &= (\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma).
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Figura 2.2: Deslocamento em um meio contínuo

A deformação ϵ_{ij} pode ser obtida pela diferença entre os segmentos AB e CD , que obtidos elementarmente são:

$$(AB)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \tag{2.3}$$

$$(CD)^2 = (d\alpha)^2 + (d\beta)^2 + (d\gamma)^2 \quad (2.4)$$

Assumindo que o meio é contínuo, reciprocamente pode-se assumir que:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(x, y, z), \\ \beta &= \beta(x, y, z), \\ \gamma &= \gamma(x, y, z). \end{aligned} \quad (2.5)$$

E assim:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy + \frac{\partial \alpha}{\partial z} dz, \\ d\beta &= \frac{\partial \beta}{\partial x} dx + \frac{\partial \beta}{\partial y} dy + \frac{\partial \beta}{\partial z} dz, \\ d\gamma &= \frac{\partial \gamma}{\partial x} dx + \frac{\partial \gamma}{\partial y} dy + \frac{\partial \gamma}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Para um deslocamento u, v, w qualquer, podemos escrever as seguintes relações:

$$\begin{aligned} u &= \alpha - x, \\ v &= \beta - y, \\ w &= \gamma - z, \end{aligned} \quad (2.7)$$

obtendo-se a deformação pela seguinte expressão:

$$(CD)^2 - (AB)^2 = (d\alpha^2 - dx^2) + (d\beta^2 - dy^2) + (d\gamma^2 - dz^2). \quad (2.8)$$

Substituindo as relações (2.7) em (2.6) e depois em (2.8), acoplando os termos semelhantes obtém-se a expressão:

$$\begin{aligned}
(CD)^2 - (AB)^2 = 2(\varepsilon_{xx}dxdx + \varepsilon_{yy}dydy + \varepsilon_{zz}dzdz \\
+ \varepsilon_{xy}dxdy + \varepsilon_{xz}dxdz + \varepsilon_{yz}dydz),
\end{aligned} \tag{2.9}$$

o que resulta:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \tag{2.10}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \tag{2.11}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right], \tag{2.12}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \tag{2.13}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right), \tag{2.14}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right). \tag{2.15}$$

Como neste trabalho serão consideradas pequenas deformações, os termos não lineares podem ser desconsiderados, resultando:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Como de costume na engenharia, a notação contraída de Kelvin-Voigt será utilizada neste trabalho, tal que

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_{xx}, & \varepsilon_2 &= \varepsilon_{yy}, & \varepsilon_3 &= \varepsilon_{zz}, \\ \varepsilon_4 &= 2\varepsilon_{yz}, & \varepsilon_5 &= 2\varepsilon_{xz}, & \varepsilon_6 &= 2\varepsilon_{xy}.\end{aligned}\tag{2.17}$$

2.3 Piezoeletricidade

O efeito piezoelétrico foi descoberto em 1880 pelos irmãos Pierre e Jacques Curie em cristais de quartzo e consiste basicamente na conversão de energia mecânica em elétrica, efeito direto. O efeito inverso foi previsto por Lippman em 1881 (Ikeda,1990). Esses efeitos consistem no aparecimento de um campo elétrico quando o material é deformado (direto) e numa deformação quando um campo elétrico é aplicado (inverso). A descoberta do efeito piezoelétrico em cerâmicas ferroelétricas nos anos 50 marcou o início da utilização e estudo desses materiais para fins de uso em transdutores (Eiras, 2004). Uma representação esquemática do efeito piezoelétrico é apresentada na Figura 2.3.

Figura 2.3: Conversão de energia no efeito piezoelétrico direto e inverso.

Os materiais piezocerâmicos pertencem à classe dos materiais ferroelétricos e são isotrópicos quando produzidos. Uma cerâmica é um conglomerado de pequenos cristais unidos aleatoriamente. Quando esfriamos uma cerâmica partindo de seu estado pa-

raelétrico de alta temperatura para o estado ferroelétrico, a célula unitária se deforma. Em geral sofre um estiramento na direção do eixo polar. A tensão intergranular é minimizada pela formação de domínios ou regiões, dentro de cada grão, os quais têm uma orientação comum dada pelos dipolos espontâneos. Assim, é necessária a aplicação de altos campos elétricos da ordem de KV/mm para a criação de uma orientação de polarização macroscópica, análogo ao processo de magnetização de um ímã permanente. Durante o processo de fabricação é possível escolher a direção dessa polarização. Após, a cerâmica fica com um momento dipolar líquido e responde linearmente a um campo elétrico ou a uma tensão mecânica como se fosse um monocristal. Este estado é metaestável podendo variar com o tempo, aumento da temperatura e se sob aplicação de altos campos elétricos ou pressão, valores que devem ser abaixo dos valores necessários para inverter o eixo polar.

De modo geral, a escolha do material piezoelétrico para a aplicação tecnológica é feita a partir do conhecimento das propriedades elásticas, dielétricas e piezoelétricas da cerâmica, condições que determinarão a eficiência do material no sistema. Neste trabalho, sob o ponto de vista da piezoelectricidade, serão utilizados ambos os efeitos, direto e inverso para análise do comportamento dinâmico do sistema.

2.4 Equações constitutivas para materiais piezoelétricos

Para um material dielétrico, como uma cerâmica PZT, o deslocamento dielétrico relaciona-se com o campo elétrico à deformação constante por:

$$D = \epsilon^E E \quad (2.18)$$

onde

- D (C/m^2) é o vetor deslocamento elétrico ,
- ϵ^E (C/Vm) é a matriz de permissividade dielétrica do material para deformações constantes, e
- E (V/m) é o vetor campo elétrico.

E a tensão mecânica relaciona-se à deformação para campo elétrico constante por:

$$\sigma = c^E \epsilon, \quad (2.19)$$

onde

- σ (N/m^2) é o vetor de tensões mecânicas,
- ϵ (m/m) é o vetor de deformações, e
- c^E (N/m^2) é a matriz rigidez elástica para campo elétrico constante.

Acoplando as relações elétricas e mecânicas para o material piezoelétrico, podemos escrever:

$$\sigma = c^E \epsilon - e^t E, \quad (2.20)$$

$$D = e \epsilon + \epsilon^E E, \quad (2.21)$$

onde o sobrescrito t indica transposto, sendo e (C/m^2), a matriz de constantes piezoelétricas dada por:

$$e = dc^E, \quad (2.22)$$

onde d (m/V) é a matriz de constante piezoelétrica para a forma tensão-carga elétrica.

O vetor campo elétrico pode ser obtido por:

$$E_i = -\frac{V_i}{h_i}, \quad (2.23)$$

sendo V_i (V) a tensão aplicada e h_i (m), a distância entre os eletrodos, em uma dada direção. Para posterior aplicação de circuitos à estrutura, da Eq. (2.23), torna-se mais conveniente explicitar a equação constitutiva em termos do vetor campo elétrico, assim, de (2.21):

$$E = -(\epsilon^\epsilon)^{-1}e\epsilon + (\epsilon^\epsilon)^{-1}D. \quad (2.24)$$

Substituindo a equação (2.24) em (2.20) obtém-se:

$$\begin{aligned} \sigma &= c^E \epsilon - e^t [(\epsilon^\epsilon)^{-1}D - (\epsilon^\epsilon)^{-1}e\epsilon] = \\ &= [c^E + e^t(\epsilon^\epsilon)^{-1}e]\epsilon - [e^t(\epsilon^\epsilon)^{-1}]D. \end{aligned} \quad (2.25)$$

E as equações constitutivas para o elemento sensor/atuador piezoelétrico tornam-se:

$$\sigma = c^D \epsilon - h^t D \quad (2.26)$$

e

$$E = -h\varepsilon + \beta^\varepsilon D, \quad (2.27)$$

onde as matrizes de constantes materiais para a forma tensão-campo elétrico são

$$c^D = c^E + e^t (\epsilon^\varepsilon)^{-1} e,$$

$$h = (\epsilon^\varepsilon)^{-1} e \quad e$$

$$\beta^\varepsilon = (\epsilon^\varepsilon)^{-1}.$$

Outras formas de escrever equações constitutivas para materiais piezoelétricos assim como as relações entre constantes materiais podem ser encontradas em Ikeda (1990).

2.5 Equações constitutivas para materiais ortotrópicos elásticos

De um modo geral, podemos definir um material compósito como uma combinação de dois ou mais elementos para se obter vantagens e melhorias que isoladamente tais elementos não desempenhariam. Na área de materiais plásticos, o material composto é uma combinação de uma resina polimérica reforçada por fibras. A resina pode ser: epóxi, poliéster, ester-vinílica etc. Quanto às fibras, as mais comumente utilizadas são: fibra de carbono, de vidro e aramídica.

A combinação dos materiais é feita sobre a superfície de um molde, que define sua forma, onde a resina passa por um processo de cura e as fibras podem ser colocadas nessa etapa do processo ou a posteriori por impregnação, sendo neste caso submetida à aquecimento e pressão de compactação. Pode-se ainda, dependendo da aplicação, incorporar

um núcleo de baixa densidade, espuma rígida ou colméia, com a finalidade de aumentar a rigidez sem penalizar o peso.

Para um material compósito as relações tensão/deformação dependem da direção das fibras na matriz, sendo seus eixos coordenados descritos geralmente na ordem da Figura 2.4.

Figura 2.4: Direções de uma lâmina unidirecional.

A relação tensão/deformação para um material elástico linear pode ser descrita pela Lei de Hooke generalizada:

$$\sigma = c^E \varepsilon, \quad (2.28)$$

sendo a matriz de constantes elásticas de rigidez simétrica, $c_{ij} = c_{ji}$, com 21 coeficientes independentes e possui dimensão (6x6).

A equação (2.28) também pode ser descrita na forma inversa:

$$\varepsilon = s\sigma, \quad (2.29)$$

sendo $s = c^{-1}$ chamada matriz de flexibilidade.

Para um material ortotrópico, os três planos de simetria reduzem os coeficientes independentes da matriz rigidez a 9. Assim, a relação tensão-deformação para um material ortotrópico resulta em

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}, \quad (2.30)$$

onde os índices 4, 5 e 6 para as tensões e as deformações correspondem ao cisalhamento nos planos 23, 13 e 12 respectivamente, como na Figura 2.5 (Donadon, 2000).

Figura 2.5: Planos de extensão e cisalhamento.

2.6 Rotações das equações constitutivas

A fim de compensar os esforços nas várias direções do laminado tais como: cisalhamento, flexão, compressão-extensão etc, as lâminas são geralmente dispostas com suas fibras em diferentes direções ao longo das camadas. Assim, procura-se maximizar a rigidez mecânica nas várias direções tanto quanto possível, sobrepondo as camadas com as fibras das lâminas em diferentes ângulos.

Às vezes é mais fácil gerar a matriz de rigidez do elemento finito em relação ao seu sistema de coordenadas, mas para formar depois a matriz de rigidez global da estrutura, é necessário referi-la a um sistema global de coordenadas e então a rotação é repetida para todos os elementos. Para tanto, é necessário desenvolver uma relação tensão/deformação entre as lâminas definindo-se a direção principal de uma delas e a relação matemática das demais para com esta.

As componentes das tensões referidas no sistema de coordenadas da lâmina, $(1m, 2m, 3m)$, são referidas no sistema de coordenadas preferencial, $(1, 2, 3)$, por (Reddy, 2004):

$$(\sigma_{kq}) = \ell_{ik} \ell_{jq} (\sigma_{ij})_m, \quad (2.31)$$

sendo $\ell_{ij} = (\hat{e}_i)_{\sigma_m} \cdot (\hat{e}_j)_\sigma$, onde $(\hat{e}_i)_{\sigma_m}$ e $(\hat{e}_j)_\sigma$ são os versores ortonormais nos sistemas de coordenadas da lâmina (σ_m) e preferencial (σ) , respectivamente. Ainda, a Eq.(2.31) pode ser expressa matricialmente como:

$$\sigma = L^t \sigma_m L, \quad (2.32)$$

Figura 2.6: Eixo de rotação de uma lâmina ($1m, 2m, 3m$) em relação ao eixo preferencial do laminado ($1, 2, 3$).

onde L é a matrix dos cossenos diretores ℓ_{ij} ,

$$L = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Assim, das Eqs.(2.32) e (2.33), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{1m} \\ \sigma_{2m} \\ \sigma_{3m} \\ \sigma_{4m} \\ \sigma_{5m} \\ \sigma_{6m} \end{Bmatrix}, \quad (2.34)$$

ou seja,

$$\sigma = Q \sigma_m \quad (2.35)$$

sendo Q , a matriz rotação que relaciona o campo de tensões rotacionado em um ângulo θ em σ_m , com o campo de tensões na direção preferencial, σ .

Relação análoga é válida para o tensor de deformações:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{1m} \\ \varepsilon_{2m} \\ \varepsilon_{3m} \\ \varepsilon_{4m} \\ \varepsilon_{5m} \\ \varepsilon_{6m} \end{Bmatrix}, \quad (2.36)$$

No referencial do material, as relações entre tensões e deformações são no plano como em (2.30):

$$\sigma_m = c \, \varepsilon_m, \quad (2.37)$$

Assim, de (2.35) e (2.36) obtém-se que, no referencial preferencial

$$\begin{aligned} Q^t \sigma &= c \, Q^t \varepsilon, \\ \sigma &= Q \, c \, Q^t \varepsilon, \\ \sigma &= \tilde{c} \, \varepsilon, \end{aligned} \quad (2.38)$$

sendo portanto,

$$\tilde{c} = Q \, c \, Q^t, \quad (2.39)$$

a matriz constitutiva no referencial preferencial do laminado, ou seja, no referencial (1,2,3) da Figura 2.6.

Capítulo 3

Modelagem da placa

É considerada neste trabalho uma placa com multicamadas de material ortotrópico (3 planos ortogonais de simetria) e de fina espessura, o que permite utilizar a hipótese $\sigma_3 = 0$, à qual são posteriormente acopladas pastilhas piezoelétricas. O laminado é modelado utilizando-se ESL para FSDT e TSDT.

3.1 Formulação matemática

3.1.1 Campos de deslocamentos e deformações

Em geral, as teorias CLPT e FSDT descrevem de forma satisfatória o comportamento cinemático de placas laminadas. Porém, a TSDT (*Third-order Shear Deformation Theory*) representa melhor o comportamento da placa pois não requer fatores de correção de cisalhamento como a FSDT, apresentando também maior precisão na distribuição da tensão interlaminar (Reddy, 1999).

A forma cúbica geral para os campos de deslocamentos da placa considerada para

TSDT pode ser dada por:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + z^2\xi_x(x, y, t) + z^3\zeta_x(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + z^2\xi_y(x, y, t) + z^3\zeta_y(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

na qual

- u_0 , v_0 e w_0 são os deslocamentos axiais de um ponto sobre o plano médio,
- ψ_x e ψ_y , as rotações das seções transversais nos planos yz e xz no plano médio ($z = 0$), e
- ξ_x , ξ_y , ζ_x e ζ_y , são funções determinadas a partir das condições de contorno de tensão e cisalhamento transversais nulos.

As deformações de cisalhamento transversal nas superfícies superior e inferior são consideradas nulas, tal que $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ em $\pm h/2$, onde h é a espessura da placa. Assim, de (2.16) e (2.17) obtém-se:

Para $z = +h/2$,

$$\varepsilon_5 = \psi_x + h\xi_x + \frac{3h^2}{4}\zeta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (3.2)$$

Para $z = -h/2$,

$$\varepsilon_5 = \psi_x - h\xi_x + \frac{3h^2}{4}\zeta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (3.3)$$

$$\therefore (3.2) = (3.3) \Leftrightarrow \xi_x = 0. \quad (3.4)$$

De modo análogo determina-se que:

$$\xi_y = 0. \quad (3.5)$$

Sob essas condições de deformação de cisalhamento também obtemos de (3.2) e (3.3) que:

$$\zeta_x = -c_1 \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (3.6)$$

sendo que:

$$c_1 = \frac{4}{3h^2}. \quad (3.7)$$

De modo análogo,

$$\zeta_y = -c_1 \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (3.8)$$

Assim, o campo de deslocamentos de (3.1) torna-se:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) - c_1 z^3 [\psi_x(x, y, t) + w_{0,x}(x, y, t)], \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) - c_1 z^3 [\psi_y(x, y, t) + w_{0,y}(x, y, t)], \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t), \end{aligned} \quad (3.9)$$

na qual a aproximação pela teoria FSDT pode ser obtida fazendo-se $c_1 = 0$. A notação $w_{0,i}$ representa $(\partial w_0 / \partial i)$.

Assim, utilizando (2.16) e (2.17), as deformações resultam:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= u_{0,x} + z\psi_{x,x} - c_1 z^3 (\psi_{x,x} + w_{0,xx}), \\
\varepsilon_2 &= v_{0,y} + z\psi_{y,y} - c_1 z^3 (\psi_{y,y} + w_{0,yy}), \\
\varepsilon_3 &= 0, \\
\varepsilon_4 &= (\psi_y + w_{0,y}) - 3c_1 z^2 (\psi_y + w_{0,y}), \\
\varepsilon_5 &= (\psi_x + w_{0,x}) - 3c_1 z^2 (\psi_x + w_{0,x}), \\
\varepsilon_6 &= (u_{0,y} + v_{0,x}) + z(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) - c_1 z^3 (\psi_{x,y} + \psi_{y,x} + 2w_{0,xy}).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

E rearranjando-as como Reddy (1984), as componentes de deformação podem ser descritas como:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \varepsilon_1^0 + z\varepsilon_1^1 - c_1 z^3 \varepsilon_1^3, \\
\varepsilon_2 &= \varepsilon_2^0 + z\varepsilon_2^1 - c_1 z^3 \varepsilon_2^3, \\
\varepsilon_3 &= 0, \\
\varepsilon_4 &= \varepsilon_4^0 - 3c_1 z^2 \varepsilon_4^2, \\
\varepsilon_5 &= \varepsilon_5^0 - 3c_1 z^2 \varepsilon_5^2, \\
\varepsilon_6 &= \varepsilon_6^0 + z\varepsilon_6^1 - c_1 z^3 \varepsilon_6^3,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

sendo

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^0 &= u_{0,x} , & \varepsilon_1^1 &= \psi_{x,x} , & \varepsilon_1^3 &= (\psi_{x,x} + w_{0,xx}); \\
\varepsilon_2^0 &= v_{0,y} , & \varepsilon_2^1 &= \psi_{y,y} , & \varepsilon_2^3 &= (\psi_{y,y} + w_{0,yy}); \\
\varepsilon_6^0 &= u_{0,y} + v_{0,x} , & \varepsilon_6^1 &= \psi_{x,y} + \psi_{y,x} , & \varepsilon_6^3 &= (\psi_{x,y} + \psi_{y,x} + 2w_{0,xy}); \\
\varepsilon_4^0 &= \psi_y + w_{0,y} , & \varepsilon_4^2 &= \varepsilon_4^0; \\
\varepsilon_5^0 &= \psi_x + w_{0,x} , & \varepsilon_5^2 &= \varepsilon_5^0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Deste modo, para as teorias FSDT e TSDT, os deslocamentos ao longo da espessura da placa são espacialmente como os representados na Figura 3.1.

Considera-se, para os exemplos seguintes de placa, que os materiais piezoelétricos estão completamente cobertos em suas superfícies superior e inferior por eletrodos, onde um campo elétrico na direção z , E_3 , pode ser aplicado.

Para uma placa laminada com materiais Graphite-Epoxy, GE, e PZT em modo de cisalhamento, P_1 , o material piezoelétrico pode atuar como representado na Figura 3.2 quando imerso entre duas camadas de GE, considerando-se que as superfícies superior e inferior do PZT estejam completamente recobertas por eletrodos. A polarização é perpendicular ao campo elétrico aplicado nos eletrodos, e as cargas em cinza e vermelho denotam as de polarização e campo elétrico respectivamente. O deslocamento da camada PZT é descrito pelas setas em verde. O cisalhamento segundo as teorias FSDT e TSDT são representadas à direita da Figura.

Já para uma placa laminada com GE e PZTs em P_3 , este pode atuar na estrutura em modos de extensão, compressão ou flexão, de acordo com as possíveis configurações de campo elétrico aplicado aos eletrodos para uma placa como a representada na Figura 3.3.

Figura 3.1: Campo de deslocamento ao longo da espessura para as teorias FSDT e TSDT.

Os PZTs, com polarização P_3 , terão o campo elétrico paralelo à direção de polarização, entretanto, os modos dependem dos sentidos entre E_3 e P_3 , sendo extensão quando E_3 e P_3 têm mesmo sentido, compressão quando E_3 e P_3 estão em sentidos opostos, e flexão quando ambas as configurações são utilizadas.

Assim, os deslocamentos das camadas piezoelétricas conjuntamente à camada GE

Figura 3.2: Placa laminada com PZT em modo de cisalhamento, P_1 .

a qual supostamente os PZTs estão totalmente acoplados serão simplificados como os indicados na Figura 3.4. As cargas em cinza e vermelho denotam as de polarização do PZT e campo elétrico aplicado aos eletrodos, respectivamente. Os deslocamentos das camadas PZT são descritos pelas setas em verde, sendo o quadrante de mesma cor, a configuração original da placa.

3.1.2 Equações constitutivas piezoelétricas

A construção de um modelo para uma estrutura compósita laminada inteligente é feita a partir da formulação das equações constitutivas do material de cada camada. Para o material piezoelétrico, devemos considerar além da energia potencial elástica, a energia elétrica e a de acoplamento eletromecânico.

Para um material piezoelétrico ortotrópico, polarizado na direção z (P_3), as equações constitutivas são:

Figura 3.3: Placa laminada com as possíveis configurações de campo elétrico aplicadas aos PZTs com polarização P_3 .

Figura 3.4: Possíveis comportamentos dinâmicos para placa laminada com PZTs em P_3 e campo elétrico paralelo, E_3 .

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ \hline E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} c_{11}^D & c_{12}^D & c_{13}^D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{31} \\ c_{12}^D & c_{22}^D & c_{23}^D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{32} \\ c_{13}^D & c_{23}^D & c_{33}^D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^D & 0 & 0 & 0 & -h_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^D & 0 & -h_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^D & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{15} & 0 & \beta_{11}^\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_{24} & 0 & 0 & 0 & \beta_{22}^\varepsilon & 0 \\ -h_{31} & -h_{32} & -h_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{33}^\varepsilon \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \hline D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{array} \right\} \quad (3.13)$$

Considerando as hipóteses de tensões planas, $\sigma_3 = 0$, e que para um material piezoelétrico polarizado em z , $D_1 = D_2 = 0$, isso implica que:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ \hline E_3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccc|c} \bar{c}_{11}^D & \bar{c}_{12}^D & 0 & 0 & 0 & -\bar{h}_{31} \\ \bar{c}_{12}^D & \bar{c}_{22}^D & 0 & 0 & 0 & -\bar{h}_{32} \\ 0 & 0 & \bar{c}_{44}^D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{55}^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{66}^D & 0 \\ \hline -\bar{h}_{31} & -\bar{h}_{32} & 0 & 0 & 0 & \bar{\beta}_{33}^\varepsilon \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \hline D_3 \end{array} \right\}, \quad (3.14)$$

sendo as componentes barra obtidas substituindo-se as hipóteses acima assumidas em (3.13) e definidas mais adiante.

O modelo considera ainda materiais piezoelétricos com polarização em x , assim,

uma rotação das propriedades do material é necessária (Benjeddou, Trindade e Ohayon, 1999), de (2.32):

$$\sigma = L^t \sigma_m L, \quad (3.15)$$

onde as tensões são rotacionadas primeiramente no eixo y em $+90^\circ$, resultando a matriz dos cossenos diretores L_1 :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

depois rotacionadas em z em $+180^\circ$, obtendo-se a segunda matriz de transformação L_2 :

$$L_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

assim,

$$L = L_2 \cdot L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

De modo análogo, as mesmas rotações são consideradas para ε, E e D .

Assim, as equações constitutivas para o material polarizado em x (P_1), com suas propriedades rotacionadas resultam agora em:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ \hline E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} c_{33}^D & c_{23}^D & c_{13}^D & 0 & 0 & 0 & -h_{33} & 0 & 0 \\ c_{23}^D & c_{22}^D & c_{12}^D & 0 & 0 & 0 & -h_{32} & 0 & 0 \\ c_{13}^D & c_{12}^D & c_{11}^D & 0 & 0 & 0 & -h_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66}^D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^D & 0 & 0 & 0 & -h_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^D & 0 & -h_{24} & 0 \\ \hline -h_{33} & -h_{32} & -h_{31} & 0 & 0 & 0 & \beta_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{24} & 0 & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{15} & 0 & 0 & 0 & \beta_{11} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \hline D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{array} \right\} \quad (3.19)$$

Considerando as mesmas hipóteses assumidas anteriormente ($\sigma_3 = D_1 = D_2 = 0$), as equações constitutivas para P_1 tornam-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ \hline E_3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccc|c} \bar{c}_{11}^D & \bar{c}_{12}^D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c}_{12}^D & \bar{c}_{22}^D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_{44}^D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{55}^D & 0 & -\bar{h}_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{66}^D & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\bar{h}_{35} & 0 & \bar{\beta}_{33}^\varepsilon \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \hline D_3 \end{array} \right\}. \quad (3.20)$$

De (3.14) e (3.20), podemos definir uma matriz de equações constitutivas generalizadas para P_1 e P_3 como na Eq. (3.21):

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ E_3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccc|c} \bar{c}_{11}^D & \bar{c}_{12}^D & 0 & 0 & 0 & -\bar{h}_{31} \\ \bar{c}_{12}^D & \bar{c}_{22}^D & 0 & 0 & 0 & -\bar{h}_{32} \\ 0 & 0 & \bar{c}_{44}^D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{55}^D & 0 & -\bar{h}_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{66}^D & 0 \\ \hline -\bar{h}_{31} & -\bar{h}_{32} & 0 & -\bar{h}_{35} & 0 & \bar{\beta}_{33}^\varepsilon \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ D_3 \end{array} \right\}. \quad (3.21)$$

Assim, levando em conta as rotações das constantes elásticas, piezoelétricas e dielétricas para os materiais piezoelétricos essas propriedades tornam-se como as descritas na Tabela 3.1.

Como E_1 e E_2 não são mensuráveis devido à disposição dos eletrodos na estrutura, os mesmos não são considerados na forma matricial das equações constitutivas (3.21).

Analogamente, no modo generalizado resultam:

$$\left\{ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccc} -\bar{h}_{11} & -\bar{h}_{12} & 0 & -\bar{h}_{15} & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{h}_{24} & 0 & -\bar{h}_{26} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{array} \right\}, \quad (3.22)$$

onde a substituição das componentes matriciais dependem da polarização original do material, Tabela 3.1, obtidas a partir das hipóteses assumidas.

Nota-se que equações constitutivas para materiais ortotrópicos podem ser obtidas

Tabela 3.1: Propriedades dos materiais piezoelétricos polarizados nas direções P_1 e P_3 .

Prop.	P_1	P_3
$\bar{c}_{11}^D$	$(c_{33}^D - c_{13}^{D\,2}/c_{11}^D)$	$(c_{11}^D - c_{13}^{D\,2}/c_{33}^D)$
$\bar{c}_{12}^D$	$(c_{23}^D - c_{12}^D c_{13}^D/c_{11}^D)$	$(c_{12}^D - c_{13}^D c_{23}^D/c_{33}^D)$
$\bar{c}_{22}^D$	$(c_{22}^D - c_{12}^{D\,2}/c_{11}^D)$	$(c_{22}^D - c_{23}^{D\,2}/c_{33}^D)$
$\bar{c}_{44}^D$	c_{66}^D	c_{44}^D
$\bar{c}_{55}^D$	c_{55}^D	c_{55}^D
$\bar{c}_{66}^D$	c_{44}^D	c_{66}^D
$\bar{h}_{11}$	$h_{33} - h_{31} c_{13}^D/c_{11}^D$	0
$\bar{h}_{12}$	$h_{32} - h_{31} c_{12}^D/c_{11}^D$	0
$\bar{h}_{15}$	0	h_{15}
$\bar{h}_{24}$	0	h_{24}
$\bar{h}_{26}$	h_{24}	0
$\bar{h}_{31}$	0	$h_{31} - h_{33} c_{13}^D/c_{33}^D$
$\bar{h}_{32}$	0	$h_{32} - h_{33} c_{23}^D/c_{33}^D$
$\bar{h}_{35}$	h_{15}	0
$\bar{\beta}_{33}^\varepsilon$	β_{11}^ε	$\beta_{33}^\varepsilon - h_{33}^2/c_{33}^D$

a partir da Eq.(3.21), anulando-se as constantes piezoelétricas. Neste caso, quaisquer rotações das propriedades dos materiais são efetuadas nas equações tridimensionais (3.13) antes da aplicação das hipóteses de tensões planas $\sigma_3 = 0$.

3.1.3 Princípio de Hamilton

As equações de movimento serão obtidas utilizando-se o princípio variacional de Hamilton, que para um sólido deformável de volume Ω pode ser escrito como:

$$\delta\Pi = \int_{t_0}^t \left[\int_{\Omega} (\delta T - \delta U) d\Omega + \delta W \right] dt = 0. \quad (3.23)$$

Para o campo de deslocamentos u , v , w , a energia cinética é da forma usual:

$$\int_{\Omega} T d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{u}^t \dot{u} + \dot{v}^t \dot{v} + \dot{w}^t \dot{w}) d\Omega, \quad (3.24)$$

sendo ρ a densidade do material.

Para uma variação infinitesimal (virtual) tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta T d\Omega &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \delta (\dot{u}^t \dot{u} + \dot{v}^t \dot{v} + \dot{w}^t \dot{w}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \rho (\delta \dot{u}^t \dot{u} + \delta \dot{v}^t \dot{v} + \delta \dot{w}^t \dot{w}) d\Omega. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Assim, o trabalho virtual das forças de inércia, integrando-se no tempo e efetuando-se uma integral por partes, resulta:

$$\begin{aligned} \int_t \int_{\Omega} \delta T d\Omega dt &= \left[\int_{\Omega} \rho (\delta u^t \dot{u} + \delta v^t \dot{v} + \delta w^t \dot{w}) \right]_t - \int_t \int_{\Omega} \rho (\delta u^t \ddot{u} + \delta v^t \ddot{v} + \delta w^t \ddot{w}) d\Omega dt \\ &= - \int_t \int_{\Omega} \rho (\delta u^t \ddot{u} + \delta v^t \ddot{v} + \delta w^t \ddot{w}) d\Omega dt, \end{aligned} \quad (3.26)$$

sendo que $\ddot{u}$, $\ddot{v}$ e $\ddot{w}$ representam as acelerações nas direções x , y e z .

Substituindo-se a expressão para o campo de deslocamentos (3.9), a Eq. (3.26) torna-se:

$$\begin{aligned}
\int_t \int_{\Omega} \delta T d\Omega dt = & \\
= - \int_t \int_{\Omega} \rho \{ & [\delta u_0^t + z\delta\psi_x^t - c_1 z^3 (\delta\psi_x^t + \delta w_{0,x}^t)] [\ddot{u}_0 + z\ddot{\psi}_x - c_1 z^3 (\ddot{\psi}_x + \ddot{w}_{0,x})] \\
& + [\delta v_0^t + z\delta\psi_y^t - c_1 z^3 (\delta\psi_y^t + \delta w_{0,y}^t)] [\ddot{v}_0 + z\ddot{\psi}_y - c_1 z^3 (\ddot{\psi}_y + \ddot{w}_{0,y})] \\
& + [\delta w_0^t \ddot{w}_0] \} d\Omega dt. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Efetuando-se a distribuição e rearranjando em função de z , obtém-se:

$$\begin{aligned}
\int_t \int_{\Omega} \delta T d\Omega dt = & \\
= - \int_t \int_{\Omega} \rho [& (\delta u_0^t \ddot{u}_0 + \delta v_0^t \ddot{v}_0 + \delta w_0^t \ddot{w}_0) + z(\delta u_0^t \ddot{\psi}_x + \delta\psi_x^t \ddot{u}_0 + \delta v_0^t \ddot{\psi}_y + \delta\psi_y^t \ddot{v}_0) \\
& + z^2(\delta\psi_x^t \ddot{\psi}_x + \delta\psi_y^t \ddot{\psi}_y) - c_1 z^3(\delta u_0^t \ddot{\psi}_x + \delta u_0^t \ddot{w}_{0,x} + \delta\psi_x^t \ddot{u}_0 + \delta w_{0,x}^t \ddot{u}_0 \\
& + \delta v_0^t \ddot{\psi}_y + \delta v_0^t \ddot{w}_{0,y} + \delta\psi_y^t \ddot{v}_0 + \delta w_{0,y}^t \ddot{v}_0) - c_1 z^4(2\delta\psi_x^t \psi_x + \delta\psi_x^t \ddot{w}_{0,x} + \delta w_{0,x}^t \ddot{\psi}_x \\
& + 2\delta\psi_y^t \psi_y + \delta\psi_y^t \ddot{w}_{0,y} + \delta w_{0,y}^t \ddot{\psi}_y) + c_1^2 z^6(\delta\psi_x^t \ddot{\psi}_x + \delta\psi_x^t \ddot{w}_{0,x} + \delta w_{0,x}^t \ddot{\psi}_x + \delta w_{0,x}^t \ddot{w}_{0,x} \\
& + \delta\psi_y^t \ddot{\psi}_y + \delta\psi_y^t \ddot{w}_{0,y} + \delta w_{0,y}^t \ddot{\psi}_y + \delta w_{0,y}^t \ddot{w}_{0,y})] d\Omega dt. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

A energia potencial pode ser descrita em termos da função densidade de entalpia elétrica (Thornburgh e Chattopadhyay, 2002; Thornburgh, Chattopadhyay e Ghoshal, 2004) dada por:

$$U(\varepsilon, D) = \frac{1}{2} \varepsilon^t c^D \varepsilon - \varepsilon^t h^t D + \frac{1}{2} D^t \beta^\varepsilon D. \quad (3.29)$$

E a variação virtual da energia potencial δU resulta:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \delta U d\Omega &= \int_{\Omega} \delta \left(\frac{1}{2} \varepsilon^t \bar{c}^D \varepsilon - \varepsilon^t \bar{h}^t D + \frac{1}{2} D^t \bar{\beta}^{\varepsilon} D \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\delta \varepsilon^t \bar{c}^D \varepsilon - \delta \varepsilon^t \bar{h}^t D - \delta D^t \bar{h} \varepsilon + \delta D^t \bar{\beta}^{\varepsilon} D) d\Omega,\end{aligned}\tag{3.30}$$

onde as componentes denotadas agora com *barra* podem representar qualquer um dos materiais piezoelétricos utilizados.

Os termos da integral no volume em relação às componentes mecânicas, elétricas e eletromecânicas podem ser descritos como:

$$\delta U_m = \delta \varepsilon^t \bar{c}^D \varepsilon,\tag{3.31}$$

$$\delta U_{me} = \delta \varepsilon^t \bar{h}^t D,\tag{3.32}$$

$$\delta U_{em} = \delta D^t \bar{h} \varepsilon,\tag{3.33}$$

$$\delta U_e = \delta D^t \bar{\beta}^{\varepsilon} D.\tag{3.34}$$

E a variação virtual da energia potencial assume a forma:

$$\int_{\Omega} \delta U d\Omega = \int_{\Omega} (\delta U_m - \delta U_{me} - \delta U_{em} + \delta U_e) d\Omega.\tag{3.35}$$

Substituindo-se as expressões para deformações (3.11) e equações constitutivas (3.21) nas Eqs. (3.31), (3.32), (3.33) e (3.34), tem-se que:

De (3.31):

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \delta U_m d\Omega &= \int_{\Omega} \delta \varepsilon^t \bar{c}^D \varepsilon d\Omega \\
&= \int_{\Omega} [(\delta \varepsilon_1 \bar{c}_{11}^D + \delta \varepsilon_2 \bar{c}_{12}^D) \varepsilon_1 + (\delta \varepsilon_1 \bar{c}_{12}^D + \delta \varepsilon_2 \bar{c}_{22}^D) \varepsilon_2 \\
&\quad + (\delta \varepsilon_4 \bar{c}_{44}^D) \varepsilon_4 + (\delta \varepsilon_5 \bar{c}_{55}^D) \varepsilon_5 + (\delta \varepsilon_6 \bar{c}_{66}^D) \varepsilon_6] d\Omega \\
&= \int_{\Omega} [(\delta \varepsilon_1^0 + z \delta \varepsilon_1^1 - c_1 z^3 \delta \varepsilon_1^3) \bar{c}_{11}^D (\varepsilon_1^0 + z \varepsilon_1^1 - c_1 z^3 \varepsilon_1^3) \\
&\quad + (\delta \varepsilon_2^0 + z \delta \varepsilon_2^1 - c_1 z^3 \delta \varepsilon_2^{3t}) \bar{c}_{12}^D (\varepsilon_1^0 + z \varepsilon_1^1 - c_1 z^3 \varepsilon_1^3) \\
&\quad + (\delta \varepsilon_1^0 + z \delta \varepsilon_1^1 - c_1 z^3 \delta \varepsilon_1^{3t}) \bar{c}_{12}^D (\varepsilon_2^0 + z \varepsilon_2^1 - c_1 z^3 \varepsilon_2^3) \\
&\quad + (\delta \varepsilon_2^0 + z \delta \varepsilon_2^1 - c_1 z^3 \delta \varepsilon_2^{3t}) \bar{c}_{22}^D (\varepsilon_2^0 + z \varepsilon_2^1 - c_1 z^3 \varepsilon_2^3) \\
&\quad + (\delta \varepsilon_4^0 - 3c_1 z^2 \delta \varepsilon_4^2) \bar{c}_{44}^D (\varepsilon_4^0 - 3c_1 z^2 \varepsilon_4^2) \\
&\quad + (\delta \varepsilon_5^0 - 3c_1 z^2 \delta \varepsilon_5^2) \bar{c}_{55}^D (\varepsilon_5^0 - 3c_1 z^2 \varepsilon_5^2) \\
&\quad + (\delta \varepsilon_6^0 + z \delta \varepsilon_6^1 - c_1 z^3 \delta \varepsilon_6^3) \bar{c}_{66}^D (\varepsilon_6^0 + z \varepsilon_6^1 - c_1 z^3 \varepsilon_6^3)] d\Omega.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Efetutando-se a distribuição e rearranjando em função de z , obtém-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \delta U_m d\Omega = \int_{\Omega} [& (\delta \varepsilon_1^0 \bar{c}_{11}^D \varepsilon_1^0 + \delta \varepsilon_2^0 \bar{c}_{12}^D \varepsilon_1^0 + \delta \varepsilon_1^0 \bar{c}_{12}^D \varepsilon_2^0 + \delta \varepsilon_2^0 \bar{c}_{22}^D \varepsilon_2^0 \\
& + \delta \varepsilon_4^0 \bar{c}_{44}^D \varepsilon_4^0 + \delta \varepsilon_5^0 \bar{c}_{55}^D \varepsilon_5^0 + \delta \varepsilon_6^0 \bar{c}_{66}^D \varepsilon_6^0) \\
& + z(\delta \varepsilon_1^0 \bar{c}_{11}^D \varepsilon_1^1 + \delta \varepsilon_1^1 \bar{c}_{11}^D \varepsilon_1^0 + \delta \varepsilon_2^0 \bar{c}_{12}^D \varepsilon_1^1 + \delta \varepsilon_2^1 \bar{c}_{12}^D \varepsilon_1^0 \\
& + \delta \varepsilon_1^0 \bar{c}_{12}^D \varepsilon_2^1 + \delta \varepsilon_1^1 \bar{c}_{12}^D \varepsilon_2^0 + \delta \varepsilon_2^0 \bar{c}_{22}^D \varepsilon_2^1 + \delta \varepsilon_2^1 \bar{c}_{22}^D \varepsilon_2^0 + \delta \varepsilon_6^0 \bar{c}_{66}^D \varepsilon_6^1 + \delta \varepsilon_6^1 \bar{c}_{66}^D \varepsilon_6^0) \\
& + z^2(\delta \varepsilon_1^1 \bar{c}_{11}^D \varepsilon_1^1 + \delta \varepsilon_2^1 \bar{c}_{12}^D \varepsilon_1^1 + \delta \varepsilon_1^1 \bar{c}_{12}^D \varepsilon_2^1 + \delta \varepsilon_2^1 \bar{c}_{22}^D \varepsilon_2^1 \\
& - 3c_1 \delta \varepsilon_4^0 \bar{c}_{44}^D \varepsilon_4^2 - 3c_1 \delta \varepsilon_4^2 \bar{c}_{44}^D \varepsilon_4^0 - 3c_1 \delta \varepsilon_5^0 \bar{c}_{55}^D \varepsilon_5^2 + \delta \varepsilon_5^2 \bar{c}_{55}^D \varepsilon_5^0 + \delta \varepsilon_6^1 \bar{c}_{66}^D \varepsilon_6^1) \\
& - c_1 z^3(\delta \varepsilon_1^0 \bar{c}_{11}^D \varepsilon_1^3 + \delta \varepsilon_1^3 \bar{c}_{11}^D \varepsilon_1^0 + \delta \varepsilon_2^0 \bar{c}_{12}^D \varepsilon_1^3 + \delta \varepsilon_2^3 \bar{c}_{12}^D \varepsilon_1^0 + \delta \varepsilon_1^0 \bar{c}_{12}^D \varepsilon_2^3 \\
& + \delta \varepsilon_1^3 \bar{c}_{12}^D \varepsilon_2^0 + \delta \varepsilon_2^0 \bar{c}_{22}^D \varepsilon_2^3 + \delta \varepsilon_2^3 \bar{c}_{22}^D \varepsilon_2^0 + \delta \varepsilon_6^0 \bar{c}_{66}^D \varepsilon_6^3 + \delta \varepsilon_6^3 \bar{c}_{66}^D \varepsilon_6^0) \\
& - c_1 z^4(\delta \varepsilon_1^1 \bar{c}_{11}^D \varepsilon_1^3 + \delta \varepsilon_1^3 \bar{c}_{11}^D \varepsilon_1^1 + \delta \varepsilon_2^1 \bar{c}_{12}^D \varepsilon_1^3 + \delta \varepsilon_2^3 \bar{c}_{12}^D \varepsilon_1^1 + \delta \varepsilon_1^1 \bar{c}_{12}^D \varepsilon_2^3 + \delta \varepsilon_1^3 \bar{c}_{12}^D \varepsilon_2^1 \\
& + \delta \varepsilon_2^1 \bar{c}_{22}^D \varepsilon_2^3 + \delta \varepsilon_2^3 \bar{c}_{22}^D \varepsilon_2^1 - 9c_1 \delta \varepsilon_4^2 \bar{c}_{44}^D \varepsilon_4^2 - 9c_1 \delta \varepsilon_5^2 \bar{c}_{55}^D \varepsilon_5^2 + \delta \varepsilon_6^1 \bar{c}_{66}^D \varepsilon_6^3 + \delta \varepsilon_6^3 \bar{c}_{66}^D \varepsilon_6^1) \\
& + c_1^2 z^6(\delta \varepsilon_1^3 \bar{c}_{11}^D \varepsilon_1^3 + \delta \varepsilon_2^3 \bar{c}_{12}^D \varepsilon_1^3 + \delta \varepsilon_1^3 \bar{c}_{12}^D \varepsilon_2^3 + \delta \varepsilon_2^3 \bar{c}_{22}^D \varepsilon_2^3 + \delta \varepsilon_6^3 \bar{c}_{66}^D \varepsilon_6^3)] d\Omega. \quad (3.37)
\end{aligned}$$

De (3.32):

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \delta U_{me} d\Omega &= \int_{\Omega} \delta \varepsilon^t \bar{h}^t D d\Omega \\
&= \int_{\Omega} [\delta \varepsilon_1 \bar{h}_{31} + \delta \varepsilon_2 \bar{h}_{32} + \delta \varepsilon_5 \bar{h}_{35}] D_3 d\Omega \\
&= \int_{\Omega} [(\delta \varepsilon_1^0 \bar{h}_{31} + \delta \varepsilon_2^0 \bar{h}_{32} + \delta \varepsilon_5^0 \bar{h}_{35}) + z(\delta \varepsilon_1^1 \bar{h}_{31} + \delta \varepsilon_2^1 \bar{h}_{32}) \\
&\quad - 3c_1 z^2(\delta \varepsilon_5^2 \bar{h}_{35}) - c_1 z^3(\delta \varepsilon_1^3 \bar{h}_{31} + \delta \varepsilon_2^3 \bar{h}_{32})] D_3 d\Omega. \quad (3.38)
\end{aligned}$$

De (3.33):

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \delta U_{em} d\Omega &= \int_{\Omega} \delta D^t \bar{h} \varepsilon d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \delta D_3 [\bar{h}_{31} \varepsilon_1 + \bar{h}_{32} \varepsilon_2 + \bar{h}_{35} \varepsilon_5] D_3 d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \delta D_3 [(\bar{h}_{31} \varepsilon_1^0 + \bar{h}_{32} \varepsilon_2^0 + \bar{h}_{35} \varepsilon_5^0) \\
 &\quad + z(\bar{h}_{31} \varepsilon_1^1 + \bar{h}_{32} \varepsilon_2^1) - 3c_1 z^2 (\bar{h}_{35} \varepsilon_5^2) - c_1 z^3 (\bar{h}_{31} \varepsilon_1^3 + \bar{h}_{32} \varepsilon_2^3)] d\Omega.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

E de (3.34) :

$$\int_{\Omega} \delta U_e d\Omega = \int_{\Omega} \delta D^t \bar{\beta}^\varepsilon D d\Omega = \int_{\Omega} \delta D_3 \bar{\beta}_{33} D_3 d\Omega. \tag{3.40}$$

O trabalho virtual realizado por forças externas mecânicas concentradas δW será definido no modelo elementos finitos.

3.2 Formulação por elementos finitos

3.2.1 Discretização do campo de deslocamento

Os deslocamentos generalizados u_0 , v_0 , w_0 , ψ_x e ψ_y supostos na Eq.(3.9) podem ser agrupados em um vetor $\mathbf{u}_u$ da forma:

$$\mathbf{u}_u = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \psi_x \\ \psi_y \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

e discretizados usando as funções de interpolações (funções de forma). Os deslocamentos no plano da placa u_0 , v_0 e as rotações ψ_x e ψ_y são considerados lineares no elemento finito, enquanto que o deslocamento transversal w_0 é considerado cúbico. Assim, funções de interpolação de Lagrange são consideradas para u_0 , v_0 , ψ_x e ψ_y e aquelas de Hermite para w_0 . Para tal, elementos finitos de placa retangulares e não-conformes, com 4 nós e 7 graus de liberdade nodais são considerados (u_0 , v_0 , w_0 , ψ_x , ψ_y , $w_{0,x}$, $w_{0,y}$). As dimensões do elemento de placa em x e y são $2a$ e $2b$, e o eixo cartesiano é considerado no centro da placa, conforme Figura 3.5,

Figura 3.5: Elemento finito retangular com quatro nós e eixo cartesiano baricêntrico.

onde ξ e η são as coordenadas naturais definidas como: $\xi = (x/a)$, $\eta = (y/b)$.

As funções de interpolação de Lagrange são da forma:

$$N_j(x,y) = \alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y + \zeta_j xy. \quad (3.42)$$

As funções para um elemento retangular escritas em termos das coordenadas natu-

rais resultam:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1+\eta) \\ (1-\xi)(1+\eta) \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Que vistas espacialmente são da forma apresentada na Figura 3.6.

Figura 3.6: Funções de Lagrange vistas espacialmente.

E os deslocamentos podem ser escritos em termos de seus valores nodais por:

$$\begin{aligned}
u_0(x, y, t) &= \sum_{j=1}^4 u_0^j N_j(x, y) \\
v_0(x, y, t) &= \sum_{j=1}^4 v_0^j N_j(x, y) , \\
\psi_x(x, y, t) &= \sum_{j=1}^4 \psi_x^j N_j(x, y) , \\
\psi_y(x, y, t) &= \sum_{j=1}^4 \psi_y^j N_j(x, y) ,
\end{aligned} \tag{3.44}$$

com $j = 1, 2, 3, 4$.

As funções de interpolação de Hermite são da forma cúbica. Para um elemento retangular, estas podem ser escritas em termos das coordenadas naturais tal que:

$$\begin{Bmatrix} N_5^j \\ N_6^j \\ N_7^j \end{Bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{Bmatrix} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(2 + \xi_0 + \eta_0 - \xi^2 - \eta^2) \\ \xi_j(\xi_0 - 1)(1 + \eta_0)(1 + \xi_0)^2 \\ \eta_j(\eta_0 - 1)(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)^2 \end{Bmatrix} , \tag{3.45}$$

onde ξ e η são as já definidas e, $\xi_0 = \xi \xi_j$ e $\eta_0 = \eta \eta_j$, sendo $\xi_j = x_j/a$ e $\eta_j = y_j/b$.

O deslocamento transversal w_0 assume então a forma:

$$w_0(x, y, t) = \sum_{j=1}^4 w_0^j N_5^j(x, y) + w_{0,x}^j N_6^j(x, y) + w_{0,y}^j N_7^j(x, y). \tag{3.46}$$

O vetor de deslocamentos generalizados $\mathbf{u}_u$ pode ser escrito em função do vetor de deslocamentos nodais $\mathbf{u}_e$ como:

$$\mathbf{u}_u = \mathbf{N}_u \mathbf{u}_e, \tag{3.47}$$

com

$$\mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e^1 & \mathbf{u}_e^2 & \mathbf{u}_e^3 & \mathbf{u}_e^4 \end{bmatrix}^t, \quad (3.48)$$

sendo

$$\mathbf{u}_e^j = \begin{bmatrix} u_0^j & v_0^j & w_0^j & w_{0,x}^j & w_{0,y}^j & \psi_x^j & \psi_y^j \end{bmatrix}^t \quad (3.49)$$

e j correspondente aos nós do elemento, $j = 1, 2, 3, 4$. Assim, a matriz de interpolação para $\mathbf{u}_u$ é:

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u^1 & \mathbf{N}_u^2 & \mathbf{N}_u^3 & \mathbf{N}_u^4 \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

sendo $\mathbf{N}_u^j$ para cada nó igual a:

$$\mathbf{N}_u^j = \begin{bmatrix} N_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_5^j & N_6^j & N_7^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_j \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Ainda, a seguinte simplificação é feita para facilitar cálculos posteriores (discretização dos trabalhos virtuais):

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{u_0} \\ \mathbf{N}_{v_0} \\ \mathbf{N}_{w_0} \\ \mathbf{N}_{\psi_x} \\ \mathbf{N}_{\psi_y} \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

correspondendo cada linha da matriz $\mathbf{N}_u$ à interpolação dos respectivos deslocamentos generalizados u_0 , v_0 , w_0 , ψ_x e ψ_y . As dimensões matriciais resultantes são portanto: $\mathbf{u}_u = (5 \times 1)$, $\mathbf{N}_u = (5 \times 28)$ e $\mathbf{u}_e = (28 \times 1)$.

3.2.2 Discretização do campo de deformações

As deformações generalizadas definidas nas Eqs. (3.11) e (3.12) podem ser agrupadas em um vetor $\boldsymbol{\varepsilon}_u$,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_u = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 & \varepsilon_2^0 & \varepsilon_4^0 & \varepsilon_5^0 & \varepsilon_6^0 & \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 & \varepsilon_6^1 & \varepsilon_4^2 & \varepsilon_5^2 & \varepsilon_1^3 & \varepsilon_2^3 & \varepsilon_6^3 \end{bmatrix}^t \quad (3.53)$$

e escritas em função dos deslocamentos generalizados como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_u = \mathbf{L}_\varepsilon \mathbf{u}_u, \quad (3.54)$$

com

$$\mathbf{L}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Assim, as deformações generalizadas podem ser escritas em função dos deslocamentos nodais como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_u = \mathbf{B} \mathbf{u}_e, \quad (3.56)$$

sendo

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}_\varepsilon \mathbf{N}_u. \quad (3.57)$$

Para facilitar cálculos posteriores, de forma análoga a (3.52), a seguinte

simplificação é feita:

$$\mathbf{B} = [B_{10} \ B_{20} \ B_{40} \ B_{50} \ B_{60} \ B_{11} \ B_{21} \ B_{61} \ B_{42} \ B_{52} \ B_{13} \ B_{23} \ B_{63}]^t, \quad (3.58)$$

correspondendo cada linha de $\mathbf{B}$ a um $\mathbf{B}_{ij}$ e assim, cada linha de (3.53) a $\varepsilon_i^j = \mathbf{B}_{ij}\mathbf{u}_e$. E as dimensões matriciais resultantes são: $\varepsilon_u = (13 \times 1)$, $\mathbf{B} = (13 \times 28)$, sendo $\mathbf{L}_\varepsilon = (13 \times 5)$.

Vale ressaltar que os cálculos considerados até o momento correspondem a um único elemento, sendo portanto necessário a posterior somatória para as $2n$ camadas e para todos os elementos da placa considerada. Ainda, a modelagem é feita segunda as hipóteses para a TSDT, sendo a FSDT obtida fazendo-se $c_1 = 0$.

3.2.3 Discretização dos deslocamentos elétricos

Os deslocamentos elétricos nas $2n$ camadas podem ser agrupados em um vetor $\mathbf{D}_d$ e escritos em função de deslocamentos elétricos nodais, tal que:

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{N}_D \begin{bmatrix} \mathbf{D}_e^1 \\ \mathbf{D}_e^2 \\ \mathbf{D}_e^3 \\ \mathbf{D}_e^4 \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

com

$$\mathbf{D}_e^j = \begin{bmatrix} D_3^{(n),j} & D_3^{(n-1),j} & \dots & D_3^{-(n-1),j} & D_3^{-(n),j} \end{bmatrix}^t, \quad (3.60)$$

e $j = 1, 2, 3, 4$ denotando os quatro nós do elemento.

Considerando interpolação linear para o deslocamento no elemento, analogamente às variáveis do campo de deslocamentos, uma matriz de funções de interpolação de Lagrange pode ser escrita como:

$$\mathbf{N}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_4 \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

com

$$\mathbf{N}_j = \begin{bmatrix} N_j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_j \end{bmatrix}, \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad (3.62)$$

onde a dimensão $\mathbf{N}_j$ é $(2n \times 2n)$ e $\mathbf{N}_D$, $(2n \times (2n \times 4))$.

3.2.4 Discretização dos trabalhos virtuais

Para simplificar a integração dos trabalhos virtuais para as $2n$ camadas na direção da espessura, considera-se uma placa simétrica, em termos das propriedades materiais e geométricas, em relação ao plano z_0 , como ilustra a Figura 3.7.

Com base nas expressões para os trabalhos virtuais e na discretização dos deslocamentos e deformações generalizados, pode-se escrever formas discretizadas para os trabalhos virtuais. Assim, de (3.37),

$$\int_{\Omega} \delta U_m d\Omega = \delta \mathbf{u}_e^t \mathbf{K}_m^e \mathbf{u}_e, \quad (3.63)$$

Figura 3.7: Perfil da placa.

sendo $\mathbf{K}_m^e$ a matriz de rigidez mecânica elementar, dada por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_m^e = 2 \sum_{i=1}^n \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ (z_i - z_{i-1}) \left[\sum_{k=1,2,4,5,6} \bar{c}_{kk}^{Di} (\mathbf{B}_{k0}^t \mathbf{B}_{k0}) + \bar{c}_{12}^{Di} (\mathbf{B}_{20}^t \mathbf{B}_{10} + \mathbf{B}_{10}^t \mathbf{B}_{20}) \right] \right. \\
 + \frac{1}{3} (z_i^3 - z_{i-1}^3) \left[\sum_{k=1,2,6} \bar{c}_{kk}^{Di} (\mathbf{B}_{k1}^t \mathbf{B}_{k1}) - 3c_1 \sum_{k=4,5} \bar{c}_{kk}^{Di} (\mathbf{B}_{k0}^t \mathbf{B}_{k2} + \mathbf{B}_{k2}^t \mathbf{B}_{k0}) \right] \\
 - \frac{c_1}{5} (z_i^5 - z_{i-1}^5) \left[\sum_{k=1,2,6} \bar{c}_{kk}^{Di} (\mathbf{B}_{k1}^t \mathbf{B}_{k3} + \mathbf{B}_{k3}^t \mathbf{B}_{k1}) - 9c_1 \sum_{k=4,5} \bar{c}_{kk}^{Di} (\mathbf{B}_{k2}^t \mathbf{B}_{k2}) \right. \\
 \left. \left. + \bar{c}_{12}^{Di} (\mathbf{B}_{21}^t \mathbf{B}_{13} + \mathbf{B}_{13}^t \mathbf{B}_{21} + \mathbf{B}_{11}^t \mathbf{B}_{23} + \mathbf{B}_{23}^t \mathbf{B}_{11}) \right] \right. \\
 \left. + \frac{c_1^2}{7} (z_i^7 - z_{i-1}^7) \left[\sum_{k=1,2,6} \bar{c}_{kk}^{Di} (\mathbf{B}_{k3}^t \mathbf{B}_{k3}) + \bar{c}_{12}^{Di} (\mathbf{B}_{13}^t \mathbf{B}_{23} + \mathbf{B}_{23}^t \mathbf{B}_{13}) \right] \right\} dx dy.
 \end{aligned}$$

(3.64)

A matriz de rigidez puramente mecânica é visivelmente mais simples quando a teoria considerada é a FSDT, pois neste caso, a constante $c_1 = 0$ anula o restante da equação a partir do quarto termo, lado direito da igualdade.

De (3.38),

$$\int_{\Omega} \delta U_{me} d\Omega = \delta \mathbf{u}_e^t \mathbf{K}_{me}^e \mathbf{D}_e, \quad (3.65)$$

sendo $\mathbf{K}_{me}^e$ a matriz de rigidez eletromecânica elementar, de acoplamento eletromecânico se o material for piezoelétrico, dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{me}^e = & \sum_{k=1}^n \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ (z_i - z_{i-1}) [\bar{h}_{31}^i \mathbf{B}_{10}^t + \bar{h}_{32}^i \mathbf{B}_{20}^t + \bar{h}_{35}^i \mathbf{B}_{50}^t] (\mathbf{N}_D^i + \mathbf{N}_D^{-i}) \right. \\ & + \frac{1}{2} (z_i^2 - z_{i-1}^2) [\bar{h}_{31}^i \mathbf{B}_{11}^t + \bar{h}_{32}^i \mathbf{B}_{21}^t] (\mathbf{N}_D^i - \mathbf{N}_D^{-i}) - c_1 (z_i^3 - z_{i-1}^3) [\bar{h}_{35}^i \mathbf{B}_{52}^t] (\mathbf{N}_D^i + \mathbf{N}_D^{-i}) \\ & \left. - \frac{c_1}{4} (z_i^4 - z_{i-1}^4) [\bar{h}_{31}^i \mathbf{B}_{13}^t + \bar{h}_{32}^i \mathbf{B}_{23}^t] (\mathbf{N}_D^i - \mathbf{N}_D^{-i}) \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (3.66)$$

De (3.39),

$$\int_{\Omega} \delta U_{em} d\Omega = \delta \mathbf{D}_e^t [\mathbf{K}_{me}^e]^t \mathbf{u}_e, \quad (3.67)$$

E de (3.40),

$$\int_{\Omega} \delta U_e d\Omega = \delta \mathbf{D}_e^t \mathbf{K}_e^e \mathbf{D}_e, \quad (3.68)$$

sendo $\mathbf{K}_e^e$ a matriz de rigidez dielétrica elementar dada por:

$$\mathbf{K}_e^e = 2 \sum_{i=1}^n (z_i - z_{i-1}) \tilde{\beta}_{33}^i \int_{-b}^b \int_{-a}^a (\mathbf{N}_D^i)^t \mathbf{N}_D^i dx dy. \quad (3.69)$$

A discretização dos trabalhos virtuais das forças de inércia, (3.28), resulta:

$$\int_t \int_{\Omega} \delta T d\Omega dt = - \int_t \delta \mathbf{u}_e^t \mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}_e dt, \quad (3.70)$$

sendo $\mathbf{M}^e$ a matriz de massa elementar dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^e = & 2 \sum_{i=1}^n \rho^i \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left\{ (z_i - z_{i-1}) \left[\mathbf{N}_{u_0}^t \mathbf{N}_{u_0} + \mathbf{N}_{v_0}^t \mathbf{N}_{v_0} + \mathbf{N}_{w_0}^t \mathbf{N}_{w_0} \right] \right. \\ & + \frac{1}{3} (z_i^3 - z_{i-1}^3) \left[\mathbf{N}_{\psi_x}^t \mathbf{N}_{\psi_x} + \mathbf{N}_{\psi_y}^t \mathbf{N}_{\psi_y} \right] - \frac{c_1}{5} (z_i^5 - z_{i-1}^5) \left[2 \mathbf{N}_{\psi_x}^t \mathbf{N}_{\psi_x} + \mathbf{N}_{\psi_x}^t \mathbf{N}_{w_{0,x}} + \mathbf{N}_{w_{0,x}}^t \mathbf{N}_{\psi_x} \right. \\ & + 2 \mathbf{N}_{\psi_y}^t \mathbf{N}_{\psi_y} + \mathbf{N}_{\psi_y}^t \mathbf{N}_{w_{0,y}} + \mathbf{N}_{w_{0,y}}^t \mathbf{N}_{\psi_y} \left. \right] + \frac{c_1^2}{7} (z_i^7 - z_{i-1}^7) \left[\mathbf{N}_{\psi_x}^t \mathbf{N}_{\psi_x} + \mathbf{N}_{\psi_x}^t \mathbf{N}_{w_{0,x}} + \mathbf{N}_{w_{0,x}}^t \mathbf{N}_{\psi_x} \right. \\ & \left. \left. + \mathbf{N}_{w_{0,x}}^t \mathbf{N}_{w_{0,x}} + \mathbf{N}_{\psi_y}^t \mathbf{N}_{\psi_y} + \mathbf{N}_{\psi_y}^t \mathbf{N}_{w_{0,y}} + \mathbf{N}_{w_{0,y}}^t \mathbf{N}_{\psi_y} + \mathbf{N}_{w_{0,y}}^t \mathbf{N}_{w_{0,y}} \right] \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (3.71)$$

E os trabalhos virtuais das forças externas são da forma:

$$\delta W = \delta \mathbf{u}_e^t \mathbf{F}_m^e, \quad (3.72)$$

sendo $\mathbf{F}_m^e$ um vetor de forças concentradas generalizadas aplicadas aos nós globais após a montagem das equações.

3.2.5 Equações de movimento

As equações de movimento podem ser obtidas substituindo-se as expressões resultantes para os trabalhos virtuais ao Princípio de Hamilton:

$$\begin{aligned} \int_t \left\{ \begin{matrix} \delta \mathbf{u}_e^t \\ \delta \mathbf{D}_e^t \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{M}^e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \ddot{\mathbf{u}}_e \\ \ddot{\mathbf{D}}_e \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m^e & -\mathbf{K}_{me}^e \\ -\mathbf{K}_{me}^{e\ t} & \mathbf{K}_e^e \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{D}_e \end{matrix} \right\} \right\} dt = \\ = \int_t \left\{ \begin{matrix} \delta \mathbf{u}_e^t \\ \delta \mathbf{D}_e^t \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{F}_m^e \\ 0 \end{matrix} \right\} \right\} dt, \quad (3.73) \end{aligned}$$

resultando no sistema de equações diferenciais do movimento:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \ddot{\mathbf{u}}_e \\ \ddot{\mathbf{D}}_e \end{matrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m^e & -\mathbf{K}_{me}^e \\ -\mathbf{K}_{me}^{e\ t} & \mathbf{K}_e^e \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{D}_e \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{F}_m^e \\ 0 \end{matrix}. \quad (3.74)$$

Montando-se o sistema para todos os elementos, as equações de movimento globais tornam-se:

$$\begin{aligned} \int_t \left\{ \begin{matrix} \delta \mathbf{u}^t \\ \delta \mathbf{D}^t \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{D}} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & -\mathbf{K}_{me} \\ -\mathbf{K}_{me}^t & \mathbf{K}_e \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{D} \end{matrix} \right\} \right\} dt = \\ = \int_t \left\{ \begin{matrix} \delta \mathbf{u}^t \\ \delta \mathbf{D}^t \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{F}_m \\ 0 \end{matrix} \right\} \right\} dt, \quad (3.75) \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{D}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & -\mathbf{K}_{me} \\ -\mathbf{K}_{me}^t & \mathbf{K}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_m \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.76)$$

onde $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}_m$, $\mathbf{K}_{me}$ e $\mathbf{K}_e$ são as matrizes globais de massa e rigidez mecânica, piezoelétrica e dielétrica, e, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{D}$, os vetores de deslocamentos mecânicos e elétricos nodais, respectivamente.

3.2.6 Acoplamento de um circuito RL à estrutura

Para que o material piezoelétrico possa atuar sobre a estrutura sua ligação a um ou mais circuitos se faz necessária. As equações de movimento para um circuito RL são análogas às equações de movimento para o sistema mecânico:

$$\delta T_c = \sum_j \{ \delta q_c^j \}^t L_c^j \ddot{q}_c^j, \quad (3.77)$$

$$\delta W_c^j = - \sum_j \{ \delta q_c^j \}^t R_c^j \dot{q}_c^j, \quad (3.78)$$

$$\delta W_e^j = - \sum_j \{ \delta q_c^j \}^t V_c^j, \quad (3.79)$$

sendo

- L_c^j , os valores de indutância,
- R_c^j , os valores da resistência, e
- V_c^j a tensão aplicada, no circuito j com carga q_c^j .

Somando-se todos os circuitos à estrutura e inserindo no Princípio de Hamilton, as equações de movimento tornam-se:

$$\int_t \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}^t \\ \delta \mathbf{D}^t \\ \delta \mathbf{q}_c^t \end{Bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{D}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{D}} \\ \dot{\mathbf{q}}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & -\mathbf{K}_{me} & 0 \\ -\mathbf{K}_{me}^t & \mathbf{K}_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{q}_c \end{Bmatrix} \right\} dt = \int_t \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}^t \\ \delta \mathbf{D}^t \\ \delta \mathbf{q}_c^t \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_m \\ 0 \\ \mathbf{V}_c \end{Bmatrix} dt \quad (3.80)$$

e,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{D}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{D}} \\ \dot{\mathbf{q}}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & -\mathbf{K}_{me} & 0 \\ -\mathbf{K}_{me}^t & \mathbf{K}_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{q}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_m \\ 0 \\ \mathbf{V}_c \end{Bmatrix} \quad (3.81)$$

Nesta etapa o acoplamento dos circuitos elétricos às pastilhas e assim, à estrutura, ainda não é efetivo. A conexão dos circuitos às pastilhas leva em conta não só a forma como a disposição dos eletrodos nas mesmas. Considerando que estes recobrem perfeitamente as pastilhas, pode-se deste modo atribuir uma superfície equipotencial às mesmas. No que se refere à modelagem, a superfície equipotencial faz com que o conjunto de nós

que abrangem uma ou mais pastilhas conectadas por um mesmo eletrodo tenham em teoria o mesmo deslocamento elétrico e deste modo, pode-se reorganizar o vetor deslocamento elétrico nodal em função do deslocamento elétrico em cada grupo de pastilhas conectadas a um mesmo eletrodo (macropastilha) como:

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}_p \mathbf{D}_p, \quad (3.82)$$

e

$$\mathbf{D}_p = \begin{bmatrix} D_{p1} & D_{p2} & D_{p3} & \cdots & D_{pm} \end{bmatrix}^t \quad (3.83)$$

no qual $\mathbf{L}_p$ é uma matriz binária e $\mathbf{D}_p$ é um vetor contendo os deslocamentos elétricos para cada grupo de pastilhas piezoelétricas na estrutura.

Considerando uma equivalência entre as cargas das pastilhas e dos circuitos aos quais elas estão conectadas,

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{q}_p, \quad (3.84)$$

onde o vetor $\mathbf{q}_c$ representa a carga nos circuitos conectados à estrutura e cada elemento do vetor $\mathbf{q}_p$, a carga no conjunto de pastilhas conectadas ao mesmo circuito. O vetor deslocamento elétrico pode ser expresso em função da carga da forma:

$$\mathbf{D}_p = \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{q}_p = \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{q}_c, \quad (3.85)$$

sendo $\mathbf{A}_p$ uma matriz diagonal contendo as áreas dos eletrodos de cada macropastilha piezoelétrica. Substituindo-se (3.85) em (3.82):

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}_p \mathbf{D}_p = \mathbf{B}_p \mathbf{q}_c, \quad (3.86)$$

onde $\mathbf{B}_p = \mathbf{L}_p \mathbf{A}_p^{-1}$.

Substituindo-se estas relações no Princípio de Hamilton em (3.80) e unindo os termos em $\mathbf{q}_c$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{q}}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & -\bar{\mathbf{K}}_{me} \\ -\bar{\mathbf{K}}_{me}^t & \bar{\mathbf{K}}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{q}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_m \\ \mathbf{V}_c \end{Bmatrix}, \quad (3.87)$$

nas quais:

- $\bar{\mathbf{K}}_{me} = \mathbf{K}_{me} \mathbf{B}_p$ e,
- $\bar{\mathbf{K}}_e = \mathbf{B}_p^t \mathbf{K}_e \mathbf{B}_p$.

Neste trabalho, duas condições de operação do circuito serão utilizadas, circuito aberto (OC) e curto circuito (SC). No primeiro caso, OC, as equações de movimento de (3.87) tornam-se:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_m \mathbf{u} = \mathbf{F}_m, \quad (3.88)$$

já que em OC, $\mathbf{D} = 0$ e conseqüentemente, $\mathbf{q}_c = 0$. Já em SC, tem-se que $\mathbf{E} = 0$, o que de implica que $\mathbf{V}_c = \mathbf{L}_c = \mathbf{R}_c = 0$, que substituído em (3.87) resulta:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K}_m - \bar{\mathbf{K}}_{me}\mathbf{K}_e^{-1}\bar{\mathbf{K}}_{me}^t)\mathbf{u} = \mathbf{F}_m. \quad (3.89)$$

Das Eqs. (3.88) e (3.89) são obtidos as frequências em circuito aberto e curto circuito, f_{oc} e f_{sc} , que indicam um parâmetro importante do sistema, a eficiência do acoplamento eletromecânico das pastilhas à estrutura, que serão calculados e analisados a posteriori.

3.3 Validação do modelo

Os modelos de elementos finitos FSDT e TSDT propostos foram implementados em ambiente MATLAB e são validados nesta seção através de comparação com resultados da literatura.

3.3.1 Placas com camadas piezoelétricas polarizadas longitudinalmente

Em uma primeira análise, considerou-se uma placa quadrada híbrida, com camadas Graphite-Epoxy, GE e piezoelétrica, PZT-5H, dispostas da forma (GE 0°/PZT-5H/GE 0°) sendo a camada de PZT-5H polarizada na direção P_1 , como representada na Figura 3.8.

Vale ressaltar que todas as Figuras de placas nesta dissertação não representam de modo proporcional as dimensões descritas na figura e/ou no texto para os materiais das placas. Esta simplificação foi feita com o intuito de melhorar a visualização de legendas e de efeitos dinâmicos representados.

Figura 3.8: Placa 1 vista do plano xz , com camada PZT-5H em modo de cisalhamento, P_1 , entre as camadas de GE.

A condição de contorno (CC) considerada para a placa foi simplesmente apoiada (S, simply-supported) nas quatro bordas, SSSS, a relação entre espessura total H e comprimento L foi $H/L = 10\%$ e uma malha com 900 elementos foi utilizada. As dimensões x , y e z são especificadas na Figura 3.8. As propriedades consideradas para os materiais encontram-se na Tabela 3.2.

Os oito primeiros modos de vibração para a placa 1 são apresentados na Figura 3.9.

Tabela 3.2: Propriedades dos materiais da placa 1, ($GE - 0^\circ / PZT - 5H$, $P_1 / GE - 0^\circ$).

Propriedades	PZT-5H (P_3)	GE (0°)
c_{11}^E (GPa)	126	183,4
c_{22}^E (GPa)	126	11,7
c_{33}^E (GPa)	117	11,7
c_{44}^E (GPa)	23	2,87
c_{55}^E (GPa)	23	7,17
c_{66}^E (GPa)	23	7,17
c_{12}^E (GPa)	79,5	4,36
c_{13}^E (GPa)	84,1	4,36
c_{23}^E (GPa)	84,1	3,92
e_{15} (Cm $^{-2}$)	17	0
e_{24} (Cm $^{-2}$)	17	0
e_{31} (Cm $^{-2}$)	-6,5	0
e_{32} (Cm $^{-2}$)	-6,5	0
e_{33} (Cm $^{-2}$)	23,3	0
ϵ_{11}^ϵ (nFm $^{-1}$)	15,03	153
ϵ_{22}^ϵ (nFm $^{-1}$)	15,03	153
ϵ_{33}^ϵ (nFm $^{-1}$)	13	153
ρ (kg m $^{-3}$)	7500	1580

Figura 3.9: Oito primeiros modos de vibração para a placa 1, com pastilha PZT P_1 .

Os resultados obtidos pelo modelo proposto baseado nas teorias FSDT e TSDT foram comparados às soluções analíticas 3D MSSA (Mixed State Space Approach) obtidas de Deü e Benjeddou (2005) em circuito fechado, SC (short-circuited), e aberto, OC (open-circuited), calculando-se em seguida o erro relativo, em percentual, dos modelos FSDT e TSDT. As análises dos resultados foram feitas com as frequências naturais adimensionais:

$$\lambda_{x,y} = \omega_{x,y} L^2 \sqrt{(\rho^{pzt} / c_{55}^{E\ pzt})} / H, \quad (3.90)$$

e os valores obtidos para as teorias são comparados com os da referência (Deü e Benjeddou, 2005), e dispostos nas Tabelas 3.3 e 3.4.

Tabela 3.3: Oito primeiras frequências adimensionais para a placa híbrida (GE 0°/PZT-5H, P_1 /GE 0°) em circuito fechado.

Modo	Frequência em SC (adim.)				
	Ref.	FSDT	Erro	TSDT	Erro
1	13,49	13,09	-3,06	13,29	-1,52
2	19,77	18,69	-5,80	18,90	-4,61
3	31,73	31,50	-0,74	31,82	0,28
4	40,68	42,51	4,31	44,52	8,63
5	44,44	44,91	1,04	46,91	5,26
6	47,81	49,83	4,05	50,45	5,23
7	52,33	52,01	-0,60	53,96	3,03
8	64,57	65,16	0,91	67,15	3,84

Pode-se observar que os resultados estão próximos aos obtidos por Deü e Benjed-

Tabela 3.4: Oito primeiras frequências adimensionais para a placa híbrida (GE 0°/PZT-5H, P_1 /GE 0°) em circuito aberto.

Modo	Frequência em OC (adim.)				
	Ref.	FSDT	Erro	TSDT	Erro
1	13,56	13,09	-3,56	13,29	-2,02
2	19,84	18,69	-6,17	18,90	-4,98
3	31,80	31,50	-0,95	31,82	0,07
4	41,26	42,51	2,95	44,52	7,33
5	45,02	44,91	-0,26	46,91	4,02
6	47,88	49,83	3,91	50,45	5,09
7	52,89	52,01	-1,69	53,96	1,99
8	65,10	65,16	0,10	67,15	3,06

dou (2005), embora para algumas frequências o erro observado ultrapasse 5%. Observa-se também que o modelo TSDT dá origem a frequências mais elevadas que o modelo FSDT. A comparação dos resultados do modelo proposto para condições SC e OC mostra que não existe diferença das frequências naturais nas duas condições. Isto pode ser explicado pelo fato de que em todos os modos de vibração, a camada piezoelétrica apresenta uma distribuição simétrica de deformação de cisalhamento e, portanto, de potencial elétrico induzido nos eletrodos, fazendo com que o potencial elétrico se anule devido à equipotencialidade considerada.

Figura 3.10: Placa 2 vista do plano xz , com camada PZT-5A em modo de cisalhamento, P_1 , entre as camadas de GE.

Uma segunda análise foi realizada com camada piezoelétrica em modo de cisalhamento. No entanto, agora uma placa híbrida da forma (GE 0°/PZT-5A /GE 0°) estudada por Baillargeon e Vel (2005) foi considerada, sendo uma das dimensões infinita, representada na Figura 3.10.

A condição de contorno considerada para a placa 2 foi simplesmente apoiada nos lados paralelos de menor dimensão, x , e livre nos outros dois (SSFF, simply-supported e free). As dimensões x , y e z são as especificadas na Figura 3.10, sendo a relação entre espessura e comprimento da menor dimensão de 1%. Utilizou-se uma malha com 300 elementos.

As propriedades consideradas para os materiais são apresentadas na Tabela 3.5.

Tabela 3.5: Propriedades dos materiais da placa 2, (GE-0°/ PZT-5A, P_1 / GE-0°).

Propriedades	PZT-5A (P_3)	GE (0°)
c_{11}^E (GPa)	99,2	183
c_{22}^E (GPa)	99,2	11,7
c_{33}^E (GPa)	86,9	11,7
c_{44}^E (GPa)	21,1	2,87
c_{55}^E (GPa)	21,1	7,17
c_{66}^E (GPa)	22,6	7,17
c_{12}^E (GPa)	54,2	4,36
c_{13}^E (GPa)	50,8	4,36
c_{23}^E (GPa)	50,8	3,92
e_{15} (Cm ⁻²)	12,3	0
e_{24} (Cm ⁻²)	12,3	0
e_{31} (Cm ⁻²)	-7,21	0
e_{32} (Cm ⁻²)	-7,21	0
e_{33} (Cm ⁻²)	15,1	0
ϵ_{11}^E (nFm ⁻¹)	15,3	153
ϵ_{22}^E (nFm ⁻¹)	15,3	153
ϵ_{33}^E (nFm ⁻¹)	15	153
ρ (kg m ⁻³)	7750	1580

Os primeiros modos de vibração para a placa 2 são apresentados na Figura 3.11.

Figura 3.11: Oito primeiros modos de vibração para a placa 2, com pastilha PZT P_1 .

Analogamente ao caso para a placa 1, os resultados obtidos pelo modelos propostos FSDT e TSDT foram comparados às soluções analíticas 3D-LW de Baillargeon e Vel (2005) para os modos de flexão da placa, em SC e OC. Os valores para as oito primeiras frequências de vibração, em (Hz), e o erro relativo, em percentual, à solução analítica são apresentados nas Tabelas 3.6 e 3.7.

Tabela 3.6: Oito primeiras frequências para a placa híbrida (GE 0°/PZT-5A, P_1 /GE 0°) em circuito fechado.

Modo	Ref.	Frequência em SC (Hz)			
		FSDT	Erro	TSDT	Erro
1	145,06	145,19	0,09	145,13	0,05
2	578,54	579,85	0,23	579,60	0,18
3	1295,49	1301,22	0,44	1300,66	0,40
4	2287,84	2304,78	0,74	2303,81	0,69
5	3544,82	3584,38	1,10	3582,89	1,06
6	5053,35	5132,34	1,54	5130,25	1,50
7	6798,55	6939,68	2,03	6936,95	2,00
8	8764,26	8996,26	2,58	8992,87	2,54

Pode-se observar uma boa concordância entre os resultados. No entanto, não foi observada diferença entre os valores de frequência nas condições SC e OC pelo mesmo motivo da análise anterior.

Tabela 3.7: Oito primeiras frequências para a placa híbrida (GE 0°/PZT-5A, P_1 /GE 0°) em circuito aberto.

Modo	Frequência em OC (Hz)				
	Ref.	FSDT	Erro	TSDT	Erro
1	145,06	145,19	0,09	145,13	0,05
2	578,65	579,85	0,21	579,60	0,16
3	1296,04	1301,22	0,40	1300,66	0,36
4	2289,53	2304,78	0,66	2303,81	0,62
5	3548,85	3584,38	0,99	3582,89	0,95
6	5061,46	5132,34	1,38	5130,25	1,34
7	6813,07	6939,68	1,82	6936,95	1,79
8	8788,09	8996,26	2,31	8992,87	2,28

3.3.2 Placa com camada piezoelétrica polarizada transversalmente

Uma terceira análise foi realizada para placa híbrida quadrada com material piezoelétrico PZT-4 polarizado na direção z , P_3 , e material Graphite-Epoxy com fibras posicionadas nas direções 0° e 90° . As camadas foram consideradas dispostas da forma (PZT-4/GE 0° /GE 90° /GE 0° /PZT-4). A espessura total considerada foi $H = 10\text{mm}$, com $0.1H$ para cada camada piezoelétrica, e a espessura restante distribuída igualmente para as camadas de GE como descritas na Figura 3.12.

Figura 3.12: Placa 3 vista do plano xz , com camadas PZT-4 em modo de extensão, P_3 , sobre e sob camadas de GE 0° e GE 90° .

A polarização é paralela ao campo elétrico, onde este pode ser aplicado no mesmo sentido de P_3 ou em sentido oposto atuando nas superfícies de cada PZT. A relação

entre espessura, H , e comprimento da placa, L , é de $H/L = 2\%$ e a condição de contorno é simplesmente apoiada nas quatro bordas, SSSS. Uma malha de discretização com 400 elementos foi utilizada. As propriedades do material GE e do material PZT-4 com polarização P_3 , são descritas na Tabela 3.8.

Os primeiros modos de vibração para a placa 3 são apresentados na Figura 3.13.

Tabela 3.8: Propriedades dos materiais da placa 3, (PZT-4/GE 0°/GE 90°/GE 0°/PZT-4), com PZT em P_3 .

Propriedades	PZT-4 (P_3)	GE (0°)
c_{11}^E (GPa)	138,5	133
c_{22}^E (GPa)	138,5	10,8
c_{33}^E (GPa)	114,8	14,4
c_{44}^E (GPa)	25,6	3,61
c_{55}^E (GPa)	25,6	5,65
c_{66}^E (GPa)	30,6	5,65
c_{12}^E (GPa)	77,4	2,59
c_{13}^E (GPa)	73,7	5,16
c_{23}^E (GPa)	73,7	7,14
e_{15} (Cm ⁻²)	12,7	0
e_{24} (Cm ⁻²)	12,7	0
e_{31} (Cm ⁻²)	-5,2	0
e_{32} (Cm ⁻²)	-5,2	0
e_{33} (Cm ⁻²)	15,1	0
ϵ_{11}^ϵ (nFm ⁻¹)	15,3	153
ϵ_{22}^ϵ (nFm ⁻¹)	15,3	153
ϵ_{33}^ϵ (nFm ⁻¹)	15	153
ρ (kg m ⁻³)	7500	1578

Figura 3.13: Cinco primeiros modos de vibração para placa 3, com pastilhas PZT P_3 .

Os resultados obtidos pelos modelos FSDT e TSDT foram comparados às soluções analíticas 3D-SSM (State Space Method, coupled) de Benjeddou et al. (2002) e Q9-HSDT (Higher Shear Deformation Theory, com 9 nós por elemento e 11 graus de liberdade), de Correia et al. (2000), em SC e OC. As análises dos resultados das cinco primeiras frequências normalizadas são apresentados nas Tabelas 3.9 e 3.10 e foram obtidos por:

$$\lambda_{x,y} = \frac{\omega_{x,y} L^2 \sqrt{\rho} [10^3 \text{Hz} (\text{Kg}/\text{m})^{1/2}]^{-1}}{2\pi h}, \quad (3.91)$$

sendo os erros relativos, em percentual.

Tabela 3.9: Cinco primeiras frequências naturais normalizadas para a placa híbrida (PZT-4/GE 0°/GE 90°/GE 0°/PZT-4), com PZT em P_3 , em circuito fechado.

Modos	Frequências em SC				
	1	2	3	4	5
3D-SSM	245,94	559,40	691,73	965,18	1090,98
Q9-HSDT	230,46	520,38	662,91	908,46	1022,09
FSDT	227,65	547,81	690,55	921,65	1118,41
Erro-3D	-8,03	-2,12	-0,17	-4,72	2,45
Erro-Q9	-1,23	5,01	4,00	1,43	8,61
TSDT	225,98	542,29	680,11	906,09	1099,05
Erro-3D	-8,83	-3,16	-1,71	-6,52	0,73
Erro-Q9	-1,98	4,04	2,53	-0,26	7,00

Os resultados apresentaram boa aproximação aos das teorias 3D-SSM e Q9-HSDT, embora algumas frequências tenham apresentado erros superiores à 5%. Nesta

Tabela 3.10: Cinco primeiras frequências naturais normalizadas para a placa híbrida (PZT-4/ GE 0°/ GE 90°/ GE 0°/ PZT-4), com PZT em P_3 , em circuito aberto.

Modos	Frequências em OC				
	1	2	3	4	5
3D-SSM	245,94	559,41	691,73	965,19	1091,00
Q9-HSDT	250,50	583,18	695,70	980,36	1145,41
FSDT	231,08	547,81	690,55	921,65	1120,37
Erro-3D	-6,43	-2,12	-0,17	-4,72	2,62
Erro-Q9	-8,40	-6,46	-0,75	-6,37	-2,23
TSDT	229,41	542,29	680,11	906,09	1100,94
Erro-3D	-7,20	-3,16	-1,71	-6,52	0,90
Erro-Q9	-9,19	-7,54	-2,29	-8,20	-4,04

configuração de placa, o modelo FSDT apresentou frequências mais elevadas que o modelo TSDT. As diferenças observadas nas frequências entre SC e OC só ocorrem para modos de vibração simétricos, modos 1 e 5, em ambos os modelos FSDT e TSDT. Essa diferença provém da distribuição de potencial elétrico sobre os eletrodos nas superfícies do material piezoelétrico, que sendo simétrica, não se anula. Já para os modos anti-simétricos, modos 2,3 e 4, o potencial se anula nas superfícies, pois em cada parte anti-simétrica, este possui um valor de carga, resultando uma somatória nula devido à equipotencialidade.

Capítulo 4

Placas laminadas com pastilhas piezoelétricas integradas

Materiais piezoelétricos, sob a forma de pastilhas finas de piezocerâmica por exemplo, podem ser inseridos em estruturas do tipo placas laminadas com o objetivo de converter parte da energia vibratória em energia elétrica a qual pode ser dissipada em um circuito elétrico, tipo shunt resistivo-indutivo por exemplo, e desta forma promovendo um controle ou redução das amplitudes de vibração da estrutura. No entanto, a eficiência do controle está diretamente relacionada ao acoplamento efetivo das propriedades eletromecânicas intrínsecas do material à estrutura, EMCC (*Electro-Mechanical Coupling Coefficient*), ou seja, na fração de energia mecânica que é efetivamente convertida em energia elétrica. Existem diversas formas para se obter numérica ou experimentalmente o EMCC promovido por uma certa pastilha piezoelétrica inserida em uma estrutura. Trindade e Benjedou (2007) apresentaram uma expressão para o EMCC quadrado como:

$$emcc = \left(\frac{f_{oc}^2 - f_{sc}^2}{f_{oc}^2} \right), \quad (4.1)$$

onde f_{oc} e f_{sc} representam as frequências de ressonância de um dado modo de vibração para CC de circuito aberto (OC) e curto-circuito (SC) entre os eletrodos da pastilha piezoelétrica de interesse.

Assim, o emcc representa a eficiência na conversão da energia de uma dada pastilha quando a estrutura vibra em um determinado modo.

Neste capítulo, foram estudadas placas laminadas com pastilhas piezoelétricas polarizadas nas direções P_1 e P_3 . As frequências dos primeiros modos de vibração em OC e SC, foram obtidas sendo utilizadas as teorias FSDT e TSDT para ambos os casos, com objetivo de calcular o emcc.

4.1 Análise paramétrica para placas com duas pastilhas piezoelétricas

Após a modelagem de uma série de placas, com camadas elásticas e piezoelétricas apresentadas no capítulo anterior, uma estrutura de placa laminada foi escolhida para estudo. Com o intuito de se analisar as posições de melhor acoplamento das pastilhas PZT à placa para ambas as teorias, FSDT e TSDT, realizou-se uma análise paramétrica de uma placa retangular engastada, com duas pastilhas piezoelétricas, com simetria transversal.

A placa de estudo é composta de 12 camadas elásticas de Graphite-Epoxy AS4/3501-6, com fibras nas direções 0° e 90° dispostas da forma $(90^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 0^\circ / 90^\circ /$

90°// 90°/ 90°/ 0°/ 0°/ 90°/ 90°) e as posições das pastilhas piezoelétricas foram variadas simetricamente ao longo da espessura. As propriedades dos materiais utilizados são para o PZT-5A as já descritas na validação do modelo, Tabela 3.5, e para o GE a 0°, as utilizadas por Trindade, Benjeddou e Ohayon (2001), descritas na Tabela 4.1. Foi considerada primeiramente uma placa com pastilhas polarizadas em P_3 e, posteriormente, com P_1 .

Os estudos encontrados na literatura apresentam em sua maioria CC simplificadas, utilizando combinações de bordas simplesmente apoiada (S) e/ou livre (F) e em poucos casos foi encontrada a condição de bordas engastadas (C, Clamped). Contudo, em grande quantidade de aplicações de estruturas tipo placa a condição de engaste nas quatro laterais da placa (CCCC) é requerida. Levando-se em consideração tal aspecto, esta foi a CC utilizada nestas análises.

Tabela 4.1: Propriedades do material GE AS4/3501 – 6 a 0°.

c_{11}^E (GPa)	146
c_{22}^E (GPa)	9,71
c_{33}^E (GPa)	11,7
c_{44}^E (GPa)	3,45
c_{55}^E (GPa)	4,14
c_{66}^E (GPa)	4,14
c_{12}^E (GPa)	2,91
c_{13}^E (GPa)	4,92
c_{23}^E (GPa)	4,76
ρ (kg m ⁻³)	1389

Uma primeira análise foi realizada considerando-se dois tamanhos de pastilhas PZTs ($25 \times 25 \times 0.5$) mm e ($25 \times 25 \times 0.25$) mm. Estas foram posicionadas na placa de modo a manter a primeira e última posição no plano xy a 10 mm das bordas, conforme Figura 4.1. Para se observar o efeito das pastilhas ao longo da espessura, estas foram posicionadas a cada início de camada GE, partindo do centro da placa às superfícies do topo e da base, simétrica e simultaneamente. Assim, 175 posições foram consideradas para o par de pastilhas, 25 a cada plano xy e 7 posições ao longo da espessura, sendo a malha refinada com 672 elementos finitos. As dimensões da placa, bem como as posições x, y, z ocupadas pelas pastilhas são representadas na Figura 4.1, contudo, vale ressaltar que as Figuras não estão em escala.

Figura 4.1: Posições ocupadas por uma pastilha piezoelétrica ao longo da espessura e no plano da placa laminada.

Após constatar-se uma resposta mais eficiente do acoplamento para a pastilha menos espessa, uma segunda análise foi realizada para um maior refinamento da malha de posicionamento das pastilhas no plano xy . As pastilhas deveriam ocupar 567 posições na placa, sendo 9 nas direções x e y , mantendo-se a variação da posição na espessura, a cada início de camada como à esquerda da Figura 4.1. As novas posições no plano xy para uma das pastilhas são descritas na Figura 4.2.

Figura 4.2: Posições ocupadas por uma pastilha piezoelétrica no plano da placa.

Nesta análise o custo computacional mostrou-se extremamente alto, devido ao aumento significativo do número de posições e conseqüentemente, número de vezes que o programa precisaria ser executado, sendo 4 vezes a cada posição (x, y, z) : em OC e SC,

para FSDT e TSDT. Para uma posição, o tempo de execução do programa foi de aproximadamente 10 minutos, ultrapassando o limite de memória do sistema operacional e a análise não pôde ser concluída.

Por fim, para possibilitar o maior refinamento da malha de elementos finitos no plano xy , devido à limitação do programa optou-se por considerar apenas 3 posições ao longo da espessura para cada tipo de placa (com pastilhas em P_1 e em P_3). Essas posições foram escolhidas de modo a possibilitar posterior análise comparativa. Deste modo, os PZTs ocuparam 243 posições da placa, sendo no plano xy as já descritas na Figura 4.2 e ao longo da espessura, dispostas na Figura 4.3, foi utilizada uma malha com 700 elementos.

A partir das frequências em OC e SC obtidas, os gráficos de emcc em função da posição no plano xy , foram gerados para cada espessura z , para cada placa (com pastilhas polarizadas em P_1 e em P_3), para ambas as teorias FSDT e TSDT, e para os 4 primeiros modos de vibração. As direções x e y denotam a posição do lado esquerdo da pastilha no sentido crescente de cada eixo coordenado e as posições em z (z_1, z_2, z_3), são definidas de acordo com a Figura 4.3. Para cada modo são apresentadas duas Figuras, a primeira tridimensional, para melhor visualização do acoplamento na superfície da placa e a segunda, bidimensional, para melhor comparação entre os valores numéricos do emcc para cada espessura.

4.1.1 Placa laminada com duas pastilhas P_3

Para a placa laminada com duas pastilhas P_3 simétricas, os 4 primeiros modos de vibração obtidos para a TSDT são apresentados na Figura 4.4. Para a FSDT, o quarto e quinto modos se alternaram em função dos parâmetros, o que não permitiu considerar o quarto

Figura 4.3: Vista do plano xz para placa com camadas elásticas de GE para os casos: com duas pastilhas PZT com polarização P_1 ou P_3 .

modo de vibração na análise paramétrica. Este fato pode ocorrer sempre, já que a análise utiliza-se apenas das frequências de vibração da placa sem considerar o modo associado.

O acoplamento eletromecânico, emcc, para cada modo em função das possíveis posições das pastilhas piezoelétricas na placa laminada são apresentados das Figuras 4.5 a 4.9.

Figura 4.4: Quatro primeiros modos de vibração para placa com duas pastilhas P_3 .

Para o primeiro modo de vibração da placa, Figura 4.5 , observa-se que o perfil do acoplamento apresenta forma semelhante ao modo de vibração, sendo máximo no centro da placa para todas as espessuras, posição esta onde a curvatura do modo é máxima, e a pastilha está sujeita à maior deformação normal. Devido ao engaste, o emcc também apresenta um acoplamento significativo próximo às bordas da placa, onde o modo apresenta curvatura significativa devido ao engaste.

Quanto à posição das pastilhas ao longo da espessura da placa, emcc em função de z , observa-se da Figura 4.5 que a posição z_2 é a de melhor acoplamento, sendo que, entre as teorias FSDT e TSDT, esta última apresenta maior porcentagem de energia convertida, próximo à 0,4%.

Figura 4.5: emcc para o primeiro modo de vibração da placa com duas pastilhas piezoelétricas em P_3 .

De acordo com estudos anteriores publicados na literatura, o acoplamento para pastilhas piezoelétricas em extensão (P_3) deveria ser maior quanto mais longe da linha neutra a pastilha estivesse, já que o efeito piezoelétrico se dá pelo acoplamento com a deformação normal, que é máxima nas superfícies da placa. No entanto, esta análise simplificada supõe pastilhas muito menos espessas que a placa. Como, no caso em análise, as espessuras das pastilhas não são desprezíveis em relação à placa, na posição z_3 as laterais direita e esquerda da pastilha ficam externas ao laminado, sob diferentes deformações da base ao topo, pois o acoplamento entre pastilha e estrutura se dá apenas no plano inferior do PZT, sendo este o único local onde a tensão interlaminar atua, e assim resultando menor emcc que em z_2 . Nesta última posição (z_2), além da base da pastilha, as laterais esquerda e direita também estão acopladas à placa, visto que estão imersas no laminado a menos da superfície do topo da pastilha, apresentando o melhor acoplamento de todas as posições em z . Por outro lado, a posição z_1 não apresenta acoplamento relevante para a pastilha polarizada em P_3 , visto que a deformação normal é pequena nesta posição.

Para o segundo modo de vibração da placa, Figura 4.6, observam-se duas posições no plano da placa onde o acoplamento eletromecânico é máximo, sendo em ambas as teorias na posição z_2 . Como no caso anterior, a forma do emcc segue a distribuição de deformação normal (curvatura) do modo de vibração. Novamente a TSDT apresentou maior acoplamento, aproximando-se de 0,5%, valor considerável levando-se em conta as proporções das dimensões da placa e das pastilhas. A diferença em relação ao primeiro modo foi que os valores do emcc obtidos para cada teoria, FSDT e TSDT, foram muito próximos.

O acoplamento eletromecânico para o terceiro modo de vibração da placa é apre-

Figura 4.6: emcc para o segundo modo de vibração da placa com duas pastilhas piezoelétricas em P_3 .

Figura 4.7: emcc para o terceiro modo de vibração da placa com duas pastilhas piezoelétricas em P_3 .

sentado na Figura 4.7. Assim como para os dois primeiros modos, a TSDT apresentou melhor resultado que a FSDT atingindo um acoplamento próximo a 0,5%, sendo duas posições as de melhor acoplamento no plano, como para o segundo modo de vibração da placa. Apesar da melhor posição de emcc encontrada para o terceiro modo ser como nos outros casos, a z_2 , foi observada menor diferença entre esta posição e z_3 que para os modos 1 e 2.

O quarto modo de vibração da placa, para o qual o acoplamento eletromecânico foi o maior dos 4 modos, é apresentado na Figura 4.8. Este modo apresenta quatro posições ótimas de acoplamento no plano xy da placa, sendo o máximo emcc de 0,8% e como nos casos anteriores, na posição z_2 com TSDT. O acoplamento na posição z_3 é menor mas também apresenta valor significativo, próximo a 0,6%.

Foram calculadas as médias aritméticas do emcc para os três primeiros modos para a FSDT e para os quatro primeiros para a TSDT, estas são apresentadas na Figura 4.9.

Observa-se que há 4 posições (x,y) de máximo, sendo a melhor posição na espessura z_2 , o que era esperado já que esta posição foi a melhor para todos os modos. Embora tenha atingido um acoplamento eletromecânico próximo a 1% para o quarto modo, o emcc médio obtido foi da ordem de 0,3%.

Figura 4.8: emcc para o quarto modo de vibração da placa com duas pastilhas piezoelétricas em P_3 para a TSDT.

Figura 4.9: Média do emcc para os 3 primeiros modos de vibração da placa com duas pastilhas piezoelétricas em P_3 para FSDT, e para os 4 primeiros modos para TSDT.

Os fatores de acoplamento máximos encontrados todos em z_2 , são descritos para cada modo na Tabela 4.2. O modo de vibração mais favorecido foi o quarto, seguido pelo segundo, terceiro e primeiro modos. Do máximo acoplamento para cada modo, Tabela 4.2, o primeiro apresentou 44% do máximo valor de acoplamento obtido pelo quarto modo; o segundo, 75%; e o terceiro 68%. Entre as teorias, a TSDT apresentou valores de emcc maiores que a FSDT para os modos considerados.

Tabela 4.2: emcc máximo para os primeiros modos de vibração, todos na espessura z_2 da placa com duas pastilhas P_3 .

Modo	emcc (%)	
	FSDT	TSDT
1	0,20	0,35
2	0,52	0,59
3	0,41	0,54
4	x	0,79
médio	0,25	0,32

4.1.2 Placa laminada com duas pastilhas P_1

Os quatro primeiros modos de vibração obtidos para a placa laminada com duas pastilhas piezoelétricas polarizadas em P_1 são apresentados na Figura 4.10.

Figura 4.10: Quatro primeiros modos de vibração para placa com duas pastilhas P_1 .

O acoplamento eletromecânico para esses modos, em relação às possíveis posições das pastilhas piezoelétricas na placa laminada são apresentados das Figuras 4.11 a 4.15.

Para o primeiro modo de vibração da placa, Figura 4.11, observam-se duas posições de acoplamento máximo no plano da placa. Para a FSDT, o emcc apresenta-se quase constante nas três posições da espessura, sendo pouco maior na posição mais externa, z_3 . Já para a TSDT, o comportamento foi inverso, isto é, maior emcc para as posições

mais internas sendo esses muito próximos, e mínimo na espessura z_3 . Para esta placa, diferentemente do caso para placa com pastilhas PZT em P_3 , a forma do acoplamento não representa a forma do modo de vibração, visto que a polarização da pastilha é longitudinal e o efeito piezoelétrico se dá pelo acoplamento com a deformação de cisalhamento. Para este modo de vibração, o efeito das pastilhas na placa não foi expressivo, sendo o maior emcc da ordem de 0,01%.

Para o segundo modo de vibração da placa, observa-se que existem quatro posições onde o acoplamento eletromecânico é máximo no plano da placa, Figura 4.12, e que os resultados com FSDT e TSDT foram análogos ao primeiro modo, sendo o melhor acoplamento das pastilhas na posição z_3 para FSDT e z_2 , para a TSDT. Como no caso anterior, o efeito das pastilhas na placa não foi significativo, apresentando para o segundo modo cerca de um décimo do emcc para o primeiro modo.

O acoplamento eletromecânico para o terceiro modo de vibração da placa é apresentado na Figura 4.13. O mesmo comportamento com FSDT e TSDT foi observado. Para este modo, a posição máxima de acoplamento é o centro da placa no plano xy , com emcc da ordem de 0,04% (z_3 para FSDT, z_2 para TSDT), o melhor resultado encontrado para os primeiros modos.

O quarto modo de vibração da placa apresenta duas posições de melhor acoplamento em xy e máximo emcc da ordem de 0,02% para FSDT em z_3 , Figura 4.14. Como nos casos anteriores, FSDT e TSDT apresentaram a mesma variação de acoplamento.

A média do acoplamento emcc para os 4 primeiros modos de vibração da placa foi calculada para cada espessura e é apresentada na Figura 4.15. Observam-se duas posições ótimas de acoplamento no plano xy para ambas as teorias, e como esperado dos resultados

Figura 4.11: emcc para o primeiro modo de vibração da placa com duas pastilhas piezoelétricas em P_1 .

Figura 4.12: emcc para o segundo modo de vibração da placa com duas pastilhas piezoelétricas em P_1 .

Figura 4.13: emcc para o terceiro modo de vibração da placa com duas pastilhas piezoelétricas em P_1 .

Figura 4.14: emcc para o quarto modo de vibração da placa com duas pastilhas piezoelétricas em P_1 .

Figura 4.15: Média do emcc para os 4 primeiros modos de vibração da placa com duas pastilhas piezoelétricas P_1 para FSDT e TSDT.

anteriores, a posição z_3 com FSDT é a que apresenta melhor resultado, com emcc médio da ordem de 0,014%.

Para a TSDT, esperava-se obter o melhor acoplamento quando as pastilhas fossem posicionadas em z_1 , onde a tensão de cisalhamento é considerada máxima, no plano médio da placa, e assim atuaria na pastilha que possui polarização neste plano. Contudo, observou-se melhor acoplamento para a posição z_2 . Uma possível hipótese para este resultado é que devido à simetria, as pastilhas na posição z_1 representam uma macro pastilha de dupla espessura, e com isso tornariam a região mais rígida impedindo parte do cisalhamento das camadas GE, resultando menor acoplamento, e assim maior emcc na espessura z_2 . Em z_3 , o acoplamento é sempre mínimo, como esperado pela teoria de cisalhamento.

A FSDT considera a tensão de cisalhamento constante ao longo da espessura, contudo, considerando o padrão de cisalhamento de todas as camadas, tratando-se de um laminado com camadas GE em diferentes disposições, esperava-se encontrar uma variação do acoplamento semelhante entre ambas as teorias, FSDT e TSDT. Uma possível hipótese para os resultados encontrados para as espessuras z_1 e z_2 , análogo à TSDT, é que no plano médio da placa, z_1 , as pastilhas tornariam a região tão rígida que impediriam o cisalhamento das camadas GE. Já para z_3 , o aumento da rigidez em cisalhamento equivalente é mínimo e, assim, z_3 seria a posição que fornece maior cisalhamento à placa e, portanto, aumentando o acoplamento da pastilha.

Os fatores de acoplamento máximos encontrados em z_3 para FSDT e em z_2 para TSDT, são apresentados na Tabela 4.3.

Para ambas as teorias, FSDT e TSDT, da Tabela 4.3, observa-se do acoplamento

eletromecânico que as pastilhas não se acoplam significativamente com a estrutura, e visto que as teorias apresentaram resultados divergentes, não foi possível concluir o padrão de cisalhamento para esta placa laminada.

Tabela 4.3: emcc máximo para os primeiros modos de vibração para placa com duas pastilhas piezoelétricas em P_1 .

	emcc (%)	
	FSDT (z_3)	TSDT (z_2)
1	0,013	0,009
2	0,002	0,002
3	0,049	0,035
4	0,023	0,017
médio	0,014	0,010

4.1.3 Comparação entre as placas laminadas com pastilhas P_3 e P_1

Da análise paramétrica bem como da eficiência do acoplamento eletromecânico entre pastilhas e placa, pôde-se observar que para o caso da placa com pastilhas de polarização P_3 os resultados obtidos foram mais satisfatórios e houve maior coerência entre as teorias FSDT e TSDT.

O intuito de se analisar ambas as polarizações era de se encontrar a teoria que melhor descrevesse os efeitos no interior da placa com pastilhas polarizadas em P_1 e nas extremidades da mesma, com pastilhas polarizadas em P_3 , para posterior configuração de uma placa tal que o emcc fosse otimizado utilizando-se ambas as pastilhas. Entretanto observou-se que o maior emcc obtido com pastilhas P_1 foi inferior ao menor resultado obtido com as pastilhas P_3 , indicando que a placa laminada considerada não favorece o acoplamento por cisalhamento e, portanto, o modo de cisalhamento das pastilhas. Deste modo, a análise seguinte dos primeiros modos de vibração para a mesma configuração de placa com maior número de pastilhas limitou-se ao uso apenas das pastilhas com polarização P_3 .

Vale ressaltar que para ambos os casos de placa, com pastilhas P_3 e P_1 , os emccs médios são obtidos através de média aritmética dos valores de emcc para cada posição da pastilha na placa para os primeiros modos de vibração considerados. Os emccs máximos são os observados das Figuras 4.9 à 4.15 para os modos de 1 a 4 e para a média dos modos. Os 4 máximos emccs médios ocorrem em posições diferentes do plano xy daquelas máximas dos modos 1 ao 4, pois são resultantes de uma superposição dos modos de vibração. Assim, haverá regiões de interferências construtivas e destrutivas ao longo do

plano da placa, onde porções dos modos podem se somar positiva ou negativamente.

4.2 Placa laminada com oito pastilhas piezoelétricas

Depois de efetuadas as análises paramétricas e do coeficiente de acoplamento eletromecânico para duas placas com 2 pastilhas piezoelétricas cada, polarizadas nas direções P_1 e P_3 , a mesma configuração de lâminas de material GE foi utilizada, ($90^\circ/90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ//90^\circ/90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ$), mantendo-se as dimensões da placa ($250 \times 350 \times 1,5$) mm e cada camada GE com espessura 0,125 mm. As pastilhas piezoelétricas utilizadas foram as de polarização P_3 e as propriedades dos materiais são as descritas anteriormente (Tabelas 3.5 e 4.1).

Para otimizar o acoplamento entre pastilhas e placa laminada, este estudo visou maximizar o emcc para cada modo de vibração utilizando uma pastilha para cada posição (x, y, z) de maior acoplamento. No entanto, devido à simetria do modelo, 8 pastilhas foram utilizadas (um par simétrico para cada um dos quatro modos).

Da análise paramétrica para a placa com pastilhas em P_3 , a posição na espessura onde houve maior acoplamento eletromecânico foi em $\pm z_2$ (Figura 4.3). Com base nisso, duas análises foram realizadas. A primeira, para a maximização do emcc de cada modo individualmente, assim, cada par de pastilhas foi colocado na melhor posição de acoplamento para cada um dos 4 primeiros modos. A Figura 4.16 mostra os resultados obtidos através da análise paramétrica. Na segunda análise, para a maximização do emcc médio dos 4 modos de vibração, os 4 pares de pastilhas foram dispostos nas 4 posições de máximo emcc médio, Figura 4.17, que apresentam o mesmo valor de acoplamento nas

4 posições.

Figura 4.16: Vista de topo da placa com 8 pastilhas piezoelétricas P_3 dispostas nas posições de maior acoplamento eletromecânico para cada modo de vibração.

Os emccs máximos para ambos os casos, pastilhas nas melhores posições para cada modo e para o emcc médio, encontram-se nas Tabelas 4.4 e 4.5. Para o primeiro caso foi utilizada uma malha discretizada com 600 elementos finitos e para a segunda placa, com 700 elementos finitos.

Para a FSDT, o primeiro caso, Tabela 4.4, a ordem de maior acoplamento para os modos foi 3, 1 e 2; e para o segundo caso, Tabela 4.5, foi 2,3 e 1. Contudo, para o segundo caso, o acoplamento médio foi aproximadamente 22% maior.

Já para a TSDT, o primeiro caso apresentou uma ordem de acoplamento dos modos

Figura 4.17: Vista de topo da placa com 8 pastilhas piezoelétricas P_3 dispostas nas posições de maior acoplamento eletromecânico médio.

como 4, 3, 1, 2; e para o segundo caso, 2, 4, 3 e 1. Assim como para a FSDT, o segundo caso, Tabela 4.5, apresentou um aumento no acoplamento médio, cerca de 27%.

Para ambas as teorias, FSDT e TSDT, o modo 2 aumenta significativamente quando as pastilhas são dispostas nas melhores posições do emcc médio, passando do menor acoplamento (Tabela 4.4), para o maior (Tabela 4.5). Embora a configuração da placa da Figura 4.17 tenha apresentado maior acoplamento médio, observa-se que o favorecimento do acoplamento para o segundo modo implica na redução do acoplamento eletromecânico do primeiro modo de vibração.

Entre as teorias, a TSDT apresenta um acoplamento médio 25% maior que a FSDT

no primeiro caso, e 28% maior no segundo.

Tabela 4.4: Acoplamento eletromecânico para os primeiros modos de vibração da placa da Figura 4.16.

Modo	emcc (%)	
	FSDT	TSDT
1	1,05	1,12
2	0,27	0,54
3	1,24	1,20
4	x	1,67
médio	0,85	1,13

Tabela 4.5: Acoplamento eletromecânico para os primeiros modos de vibração da placa da Figura 4.17.

Modo	emcc (%)	
	FSDT	TSDT
1	0,17	0,46
2	1,96	2,21
3	1,00	1,16
4	x	1,92
médio	1,04	1,44

4.3 Comparações entre as placas com duas e oito pastilhas piezoelétricas P_3

As Tabelas 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9 apresentam os resultados de acoplamento eletromecânico, emcc (%), para as placas com 2 e 8 pastilhas piezoelétricas P_3 , bem como o fator de multiplicação do acoplamento entre as placas com duas e oito pastilhas, FM.

As placas com 2 pastilhas são indicadas por 2P-Mi, sendo $i = 1, 2, 3, 4, m$, onde este índice representa o emcc do modo de vibração da placa na posição (x, y, z) de maior acoplamento eletromecânico, representado em destaque nas Tabelas, onde os valores de emcc para os demais modos foram obtidos da análise paramétrica. As posições de máximo acoplamento para os modos $i = 1, 2, 3, 4$, são aquelas da Figura 4.16, e para a média dos modos, $i = m$, aquelas da Figura 4.17.

Quanto ao aumento esperado do acoplamento eletromecânico para as placas com maior número de pastilhas, estes são apresentados nas Tabelas por FM. Nas Tabelas 4.6 e 4.7 esses valores foram obtidos da razão entre os valores de emcc para cada modo da placa 8P-(M1-M4), Figura 4.16, e aqueles em destaque para cada placa com duas pastilhas, 2P-Mi. Já o FM para o acoplamento médio, este foi obtido da razão entre o emcc médio para a placa 8P-(M1-M4) e, a média dos valores de emccs máximos das placas com duas pastilhas (valores em destaque na Tabela). Para análise dos acoplamentos médios, o mesmo procedimento foi realizado para as placas 8P-(4Mm) e 2P-Mm, para FSDT e TSDT, porém aqui, todas as razões foram efetuadas com os valores apresentados nas Tabelas 4.8 e 4.9, sendo os valores de emcc para as placas com oito pastilhas divididos modo a modo com os valores de emcc obtidos para as placas com duas pastilhas.

Tabela 4.6: Acoplamento eletromecânico para os primeiros modos de vibração para as placas laminadas com pastilhas P_3 nas posições da Figura 4.16 com FSDT.

Placa / Modos	emcc (%)			
	1	2	3	médio
2P-M1	0,20	0,0	0,0	-
2P-M2	0,12	0,52	0,0	-
2P-M3	0,05	0,0	0,41	-
8P-(M1-M4)	1,05	0,27	1,24	0,85
FM	5,25	0,52	3,02	2,25

Tabela 4.7: Acoplamento eletromecânico para os primeiros modos de vibração para as placas laminadas com pastilhas P_3 nas posições da Figura 4.16 com TSDT.

Placa / Modos	emcc (%)				
	1	2	3	4	médio
2P-M1	0,35	0,0	0,0	0,0	-
2P-M2	0,23	0,59	0,0	0,0	-
2P-M3	0,10	0,0	0,54	0,0	-
2P-M4	0,03	0,26	0,22	0,79	-
8P-(M1-M4)	1,12	0,54	1,2	1,67	1,13
FM	3,2	0,92	2,22	2,11	2,00

Tabela 4.8: Acoplamento eletromecânico para os primeiros modos de vibração para as placas laminadas com pastilhas P_3 nas posições da Figura 4.17 com FSDT.

Placa / Modos	emcc (%)			
	1	2	3	médio
2P-Mm	0,07	0,45	0,23	0,27
8P-(4Mm)	0,17	1,96	1,00	1,04
FM	2,43	4,35	4,35	3,85

Tabela 4.9: Acoplamento eletromecânico para os primeiros modos de vibração para as placas laminadas com pastilhas P_3 nas posições da Figura 4.17 com TSDT.

Placa / Modos	emcc (%)				
	1	2	3	4	médio
2P-Mm	0,15	0,51	0,26	0,35	0,32
8P-(4Mm)	0,46	2,21	1,16	1,92	1,44
FM	3,7	4,33	4,46	5,49	4,5

Observa-se da placa com duas pastilhas que, para a FSDT, o segundo modo apresenta o maior emcc, Tabela 4.6, enquanto que para a TSDT, foi o modo 4, Tabela 4.7. Porém, para as placas com 8 pastilhas esses resultados nem sempre foram mantidos. Entre as teorias, a TSDT apresentou sempre maior emcc.

Para FSDT, a placa 8P-(M1-M4) apresenta maior acoplamento para o terceiro modo, e, o segundo modo, antes o melhor, foi o de menor acoplamento dos três. Entretanto, para a placa 8P-(4Mm), a ordem do acoplamento dos modos, do maior ao menor, foi mantida: 2,3,1. Já para a TSDT, a placa 8P-(M1-M4) manteve o maior acoplamento para o modo 4, como na placa com duas pastilhas, enquanto alterou a ordem crescente de emcc para os demais, e a placa 8P-(4Mm) favoreceu de forma acentuada o modo 2, desfavorecendo para isso o modo 1.

Para as placas com duas pastilhas, para a FSDT não houve uma posição de maior acoplamento para um dos 3 modos que não anulasse ao menos um dos outros; já com a TSDT, para o modo 4 (que não foi considerado para a FSDT), todos os modos apresentaram acoplamento.

Embora os valores tenham oscilado analisando-se cada modo individualmente, os emccs médios apresentaram um aumento em torno de quatro vezes para as placas com 8 pastilhas em relação às placas com 2 (valores FM para emccs médios, Tabelas 4.8 e 4.9), como esperado.

Capítulo 5

Conclusões gerais

Neste trabalho foi realizada uma modelagem para uma placa laminada com pastilhas piezoelétricas acopladas a circuitos resistivo-indutivos (RL), possibilitando alterar os tipos de lâminas e pastilhas bem como suas quantidades. O modelo possibilitou também determinar a quantidade de circuitos, visto que a cada um deles podem estar acopladas uma ou mais pastilhas. Um estudo mais aprofundado dos valores RL não foi realizado por não ser o foco do trabalho no momento, mas a modelagem torna possível a procedência deste estudo no futuro quanto à otimização das componentes do circuito bem como a aplicação de teorias de controle e montagem experimental.

Um modelo de elementos finitos para placas laminadas com sensores e atuadores piezoelétricos em extensão e cisalhamento desenvolvido e implementado em ambiente MATLAB foi apresentado. O acoplamento eletromecânico foi representado através de uma formulação tipo stress-voltage e levando em conta os efeitos de equipotencialidade nos eletrodos e de acoplamento com o circuito elétrico. O modelo foi validado através de comparações entre as frequências naturais de vibração calculadas e encontradas na lite-

ratura para três exemplos de placa laminada com camadas piezoelétricas em extensão e cisalhamento em circuito aberto e fechado. As comparações indicam que ambos os modelos com teorias FSDT e TSDT representam adequadamente o comportamento dinâmico das estruturas em estudo. No entanto, no que diz respeito à representação da condição elétrica dos materiais piezoelétricos, para a qual não existe consenso entre os resultados encontrados na literatura, acredita-se que os resultados encontrados representam adequadamente o comportamento físico esperado.

Duas teorias de deformação de placa foram utilizadas para descrever o comportamento das estruturas laminadas, FSDT e TSDT. Primeiramente, realizou-se o estudo de uma estrutura laminada com duas pastilhas PZT, número este mínimo devido à simetria considerada no modelo, para através de uma análise paramétrica determinar as posições no plano e ao longo da espessura da placa onde as pastilhas forneciam maior acoplamento. A partir das frequências obtidas em circuitos aberto e fechado para os quatro primeiros modos de vibração da placa, foi possível calcular o coeficiente de acoplamento eletromecânico quadrado, $emcc$. Após, afim de se maximizar o acoplamento de pastilhas PZT à estrutura, fazendo uso da mínima quantidade destas para os modos considerados, a mesma placa foi utilizada para um segundo estudo com 8 pastilhas.

Para a placa laminada com duas pastilhas piezoelétricas polarizadas em P_1 a primeira teoria mostrou-se melhor, no entanto, esse resultado pode ser diferente para outras configurações de placa, visto que as teorias divergiram nos resultados. Já para as placas com pastilhas polarizadas em P_3 , a TSDT apresentou melhores resultados em todos os casos. Com base nestas análises não foi possível chegar a um consenso quanto à melhor teoria a ser utilizada para descrever o comportamento para deformações das placas

laminadas estudadas, com pastilhas P_1 e P_3 .

Da análise paramétrica foi possível determinar a melhor espessura entre duas pastilhas piezoelétricas e as posições de máximo acoplamento para os primeiros modos de vibração.

O estudo da placa laminada com 8 pastilhas consistiu em determinar a melhor distribuição para as pastilhas, se na posição de maior acoplamento para cada modo ou se nas posições de maior acoplamento médio. Os resultados obtidos mostraram que para ambas as teorias, FSDT e TSDT, a última distribuição apresenta maior acoplamento e como o esperado, em média 4 vezes maior em relação à placa com duas pastilhas. Para as placas com duas e 8 pastilhas, a TSDT apresentou os melhores resultados.

5.1 Perspectivas futuras

Como sugestão para trabalhos futuros, propõe-se a montagem experimental para as placas estudadas para comparação entre os resultados teóricos obtidos e aqueles experimentais. Deste modo, melhor análise da descrição do comportamento da placa através dos modelos FSDT e TSDT desenvolvidos seria possível.

Propõe-se também a otimização dos componentes dos circuitos RL visando o controle passivo de vibrações, e a escolha de uma estrutura que favoreça o cisalhamento, para que ambas as pastilhas possam ser utilizadas. O estudo de atuação por meio da fonte de tensão do circuito e sua aplicação ao controle ativo de vibrações também pode ser realizado. Ainda, um estudo para laminados com camadas viscoelásticas e pastilhas piezoelétricas, para investigação de controle ativo-passivo de vibrações pode ser realizado.

Referências bibliográficas

- Abreu, G.L.C.M. ; Steffen, Jr. V. (2004). Finite element modeling of plate with localized piezoelectric sensors and actuators. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences**, v.26, n.2, p.117-128.
- Aldraihem, O. J. ; Khdeir, A.A. (2006). Analytical solutions of antisymmetric angle-ply laminated with thickness-shear piezoelectric actuators. **Smart Materials and Structures**, v.15, p.232-242.
- Allik, H. ; Hughes, T.J.R. (1970). Finite element method for piezoelectric vibration. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.2, n.2, p.151-157.
- Baillargeon, B.P. ; Vel, S. (2005). Exact solution for the vibration and active damping of composite plates with piezoelectric shear actuators. **Journal of Sound and Vibration**, v.282, p.781-804.
- Benjeddou, A. (2000). Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey. **Computers & Structures**, v.76, p.347-363.
- Benjeddou, A. ; Deü, J.F.; Letombe, S. (2002). Free vibration of simply-supported

- piezoelectric adaptive plates: an exact sandwich formulation. **Thin-Walled Structures**, v.40, p.573-593.
- Benjeddou, A. ; Trindade, M.A. ; Ohayon, R. (1999). New shear actuated smart structure beam finite element. **AIAA Journal**, v.37, p.378-383.
- Chopra, I. (2002). Review of State of Art of Smart Structures and Integrated Systems. **AIAA Journal**, v.40, n.11, p.2145-2179.
- Correia, V.M.F. ; Gomes, M.A.A. ; Suleman, A. ; Soares, C.M.M. ; Soares, C.A.M. (2000). Modelling and design of adaptative composite structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.185, n.2, p.325-346.
- Crawley, E.F. ; Anderson, E.H. (1990). Detailed models of piezoceramic actuation of beams. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v.1, n.1, p.4-25.
- Crawley, E.F. ; de Luis, J. (1987). Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. **AIAA Journal**, v.25, n.10, p.1373-1385.
- Deü, J.F. ; Benjeddou, A. (2005). Free-vibration analysis of laminated plates with embedded shear-mode piezoceramic. **International Journal of Solids and Structures**, v.42, p.2059-2088.
- Donadon, M.V. (2000). **Vibrações de placas laminadas na presença de tensões induzidas piezoeletricamente**. 109f. Dissertação (Mestrado) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2000.

- Eiras, J. A. (2004). **Materiais piezoelétricos**. Grupo de Cerâmicas Ferroelétricas, Departamento de Física-UFSCar. Disponível em: < <http://br.geocities.com/gildernader/capitulos/Capitulo2-Materiais-Piezoeltricos> >. Acesso em: 13 jun. 2006.
- Fagundes, F.A. (2002). **Modelagem de vigas de compósitos laminados usando elementos finitos formulados na notação strain gradient**. 92f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2002.
- Gopinathan, S.V. ; Varadan, V.V. ; Varadan, V.K. (2000). A review and critique of theories for piezoelectric laminates. **Smart Materials and Structures**, v.9, p.24-48.
- Heyliger, P. (1997). Exact solutions for simply supported laminated piezoelectric plates. **Journal of Applied Mechanics**, v.64, p.229-306.
- Heyliger, P. ; Saravanan, D.A. (1995). Exact free-vibration analysis of laminated plates with embedded piezoelectric layers. **Journal of the Acoustical Society of America**, v.98, n.3, p.1547-1557.
- Ikeda, T. (1990). **Fundamentals of piezoelectricity**. New York: Oxford.
- Khdeir, A.A. ; Aldraihem, O. J. (2007). Analytical models and solutions of laminated composite piezoelectric plates. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v.14, p.67-80.
- Khdeir, A.A. ; Aldraihem, O.J. (2007). Analytical models and solutions of laminated composite piezoelectric plates. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v.14, p.67-80.

- Mindlin, R. D. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. **Journal of Applied Mechanics**, v.31, p.38.
- Narayanan, S. ; Balamurugan, V. (2003). Finite element modelling of piezolaminated smart structures for active vibration control with distributed sensors and actuators. **Journal of Sound and Vibration**, v.269, p.529-562.
- Novozhilov, V.V. (1953). **Foundations of the non-linear theory of elasticity**. Graylock Press, Rochester, N.Y.
- Reddy, J.N. (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates. **Journal of Applied Mechanics**, v.51, p.745-752.
- Reddy, J.N. (1989). On refined computational models of composite laminates. **Journal of Numerical Methods in Engineering**, v.27, p.361-382.
- Reddy, J.N. (1993). **An introduction to the finite element method**. 2.ed. New York: McGraw-Hill.
- Reddy, J.N. (1999). On laminated composite plates with integrated sensors and actuators. **Engineering Structures**, v.21, p.568-593.
- Reddy, J.N. (2004). **Mechanics of laminated composite plates and shells : theory and analysis**. 2.ed. Boca Raton : CRC Press.
- Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. **Journal of Applied Mechanics**, v.12, p.69-77.

- Robaldo, A. ; Carrera, E. ; Benjeddou, A. (2006). A unified formulation for finite element analysis of piezoelectric adaptive plates. **Computers & Structures**, v.84, p.1494-1505.
- Saravanos, D. A. ; Heyliger, P.R.; Hopkins, D.A. (1997). Layerwise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plates. **International Journal of Solids Structures**, v.34, n.3, p.359-378.
- Thornburgh, R.P. ; Chattopadhyay, A. (2002). Simultaneous modeling of mechanical and electrical response of smart composite structures. **AIAA Journal**, v.40, n.8, p.1603-16.
- Thornburgh, R.P. ; Chattopadhyay, A. (2003). Modeling and optimization of passively damped adaptive composite structures. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v.14, p.247-256.
- Thornburgh, R.P. ; Chattopadhyay, A.; Ghoshal, A. (2004). Transient vibration of smart structures using a coupled piezoelectric-mechanical theory. **Journal of Sound and Vibration**, v.274, p.53-72.
- Trindade, M. A. ; Benjeddou, A. (2007). On the evaluation of effective eletromechanical coupling coefficients for structures with piezoelectric elements. **III ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials**, Gdansk, 2007.
- Trindade, M.A. ; Benjeddou, A. ; Ohayon, R. (2001) Finite element modelling of hybrid active-passive vibration damping of multilayer piezoelectric sandwich beams-part

II: System analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.51, p.855-864.

Tzou, H.S. ; Tseng, C.I. (1990). Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement/control of distributed parameter systems: a piezoelectric finite element approach. **Journal of Sound and Vibration**, v.138, p.17-38.

Vel, S.S. ; Batra, R.C. (2001). Exact solution for rectangular sandwich plates with embedded piezoelectric shear actuators. **AIAA Journal**, v.39, p. 1363-1373.

Zhang, X.D. ; Sun, C.T. (1999). Analysis of a sandwich plate containing a piezoelectric core. **Smart Materials and Structures**, v.8, p.31-40.