UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

EDUARDO BANDEIRA MOREIRA RUEDA GERMANO

Otimização de Forma de Placas para o Posicionamento de
Frequências Naturais: Resultados Numéricos e Experimentais

São Carlos
2011

EDUARDO BANDEIRA MOREIRA RUEDA GERMANO

Otimização de Forma de Placas para o Posicionamento de
Frequências Naturais: Resultados Numéricos e Experimentais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo como requisito para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica e área de concentração Dinâmica de Máquinas

Orientador:
Prof. Dr. Rodrigo Nicoletti

ESTE EXEMPLAR TRATA-SE DA VERSÃO
CORRIGIDA. A VERSÃO ORIGINAL ENCONTRA-SE
DISPONÍVEL JUNTO AO DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA MECÂNICA DA EESC-USP.

São Carlos
2011

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pelo Serviço de Tratamento da Informação do
Serviço de Biblioteca – EESC/USP

G373o Germano, Eduardo Bandeira Moreira Rueda
Otimização de Forma de Placas para o Posicionamento
de Frequências Naturais: Resultados Numéricos e
Experimentais / Eduardo Bandeira Moreira Rueda Germano;
orientador Prof. Dr. Rodrigo Nicoletti. -- São Carlos,
2011.

Dissertação (Mestrado) -- Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Mecânica e Área de Concentração em Dinâmica
de Máquinas -- Escola de Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo, 2011.

1. Dinâmica de máquinas. 2. Otimização de forma. 3.
Otimização de espessura. 4. Posicionamento de frequências
naturais. 5. Método dos elementos finitos. 6. Análise
modal. 7. Algoritmo Quickhull. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **EDUARDO BANDEIRA MOREIRA RUEDA GERMANO**

Título da dissertação: **Otimização de forma de placas para o posicionamento de frequências naturais a partir de resultados em malha grosseira.**

Data da defesa: 07/10/2011:

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Dr. **Rodrigo Nicoletti (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Profª. Drª. **Maíra Martins da Silva**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Profª. Titular **Kátia Luchesi Cavalca Dedini**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

APROVADO .

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica:
Prof. Associado **Marcelo Areias Trindade**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Paulo Cesar Lima Segantine**

*Dedico este trabalho aos meus pais e à minha irmã,
pelo apoio incondicional e exemplo de vida.*

Agradecimentos

Ao orientador Prof. Dr. Rodrigo Nicoletti pela confiança, incentivo e inspiração no amadurecimento dos meus conhecimentos e conceitos que tornaram possível a conclusão desta dissertação.

Aos professores da Escola de Engenharia de São Carlos, que foram tão importantes na minha vida acadêmica e em minha formação como profissional. As disciplinas cursadas durante esses anos de estudo, tanto na graduação como no mestrado, foram fundamentais para o direcionamento da pesquisa.

Aos funcionários da Escola de Engenharia de São Carlos, pela cordialidade e atenção na solução das mais diversas dificuldades.

Aos meus pais, Luiz Carlos e Maria Estela, por terem me fornecido condições para me tornar o profissional que sou e não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

À minha irmã Patricia pelo companheirismo de todos esses anos, por estar ao meu lado em todos os momentos, pelas viagens e alegrias compartilhadas e pelas que ainda virão.

Aos meus familiares, pelo apoio e incentivo nesses anos todos que culminaram na conclusão de mais esta etapa.

Aos amigos de São Carlos, pelos momentos de descontração compartilhados, por todas as viagens, os desafios, os treinos e os pós-treinos, todos sempre com muita alegria.

Aos antigos companheiros de trabalho, pelas tantas horas boas compartilhadas nesses últimos anos, dentro e fora do departamento, mas também pelas horas tensas que, sem esses, teriam sido mais longas e menos agradáveis.

Aos novos companheiros de trabalho, pela compreensão e pela motivação nos dias finais da concepção deste projeto.

Aos amigos de outros lugares, e a todos colaboraram de alguma forma me incentivando para que prosseguisse e levasse a cabo mais esse desafio.

Resumo

GERMANO, E. B. M. R. **Otimização de forma de placas para o posicionamento de frequências naturais a partir de resultados em malha grosseira.** Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011. 76p.

O projeto de estruturas e máquinas deve considerar as restrições impostas pelas condições de contorno. Tais condições podem ser de natureza dinâmica, limitando assim as faixas de frequência às quais a estrutura ou máquina pode operar. Dentre as diferentes ferramentas disponíveis para trabalhar com restrições dinâmicas, a otimização de forma se mostra como uma interessante alternativa para afastar as frequências naturais das faixas problemáticas. Um modelo de elementos finitos de malha de 4x5 elementos é correlacionado com os resultados de uma análise modal experimental, e a otimização é realizada utilizando-se o software Nastran. Após usinar a placa com a espessura otimizada, boa concordância é atingida entre os resultados experimentais e os previstos numericamente. Apesar dos bons resultados, obter a placa com 4x5 elementos, cada qual com sua espessura, foi difícil por conta das dimensões envolvidas. É mais apropriado fabricar uma superfície contínua na placa com uma geometria conhecida. Para isso, modelos com malhas mais finas são necessários no procedimento de otimização, e tal quantidade de variáveis nem sempre converge a uma solução. De fato, um modelo com 48x60 elementos para a placa estudada não convergiu a uma solução para as mesmas frequências desejadas. A contribuição principal deste trabalho é mostrar que uma interpolação (linear ou cúbica) dos resultados de uma otimização de forma de malha grossa leva à solução do problema de otimização de uma malha mais refinada. Em outras palavras, é possível obter uma geometria de superfície contínua que otimiza frequências naturais em placas a partir de modelos de elementos finitos de malha mais grossa, sendo assim desnecessários modelos de malhas muito refinadas e altos custos computacionais.

Palavras-chave: otimização de forma, otimização de espessura, posicionamento de frequências naturais, método dos elementos finitos, análise modal, algoritmo Quickhull.

Abstract

GERMANO, E. B. M. R. **Shape optimization of plates for natural frequencies placement from coarse grid results**. Master's Degree – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011. 76p.

The design of structures and machines must consider the restrictions imposed by the boundary conditions. Such conditions can be of dynamic nature, thus limiting the frequency ranges that the structure/machine can operate. Among the different design tools available for dealing with dynamics restrictions, shape optimization is an interesting way of deviating natural frequencies from problematic ranges. In this work, one presents the shape optimization of a cantilever plate aiming at desired natural frequencies. A 4x5 elements grid finite element model is correlated to results from experimental modal analysis, and the optimization is done with help of Nastran software. After machining the plate with optimized thickness, good agreement is achieved between experimental and numerically predicted results. Despite successful results, machining the plate in 4x5 discrete elements with individual (stepped) thickness showed to be cumbersome. It is more appropriated to machine a smooth surface on the plate with known geometry. For that, finer grid element models are necessary in the optimization procedure, and such amount of design variables not always converge to a solution. In fact, a model with 48x60 elements for the plate in study did not converge to a solution for the same target frequencies. The main contribution of this work is showing that an interpolation (linear or cubic) of the coarser grid shape optimization results leads to the solution of a finer grid optimization problem. In other words, it is possible to obtain the smooth surface geometry that optimizes natural frequencies in plates from coarser grid finite element models, thus not requiring fine grid models and high computational costs.

Keywords: shape optimization, thickness optimization, eigenfrequencies placement, finite element method, modal analysis, Quickhull interpolation

Lista de figuras

Figura 1 – Fatores de magnificação em vibração forçada amortecida (BEARDS, 1995).	9
Figura 2 – Modos de vibrar de uma placa (SCHWARZ e RICHARDSON, 1999).	12
Figura 3 – Diagrama de bloco de um sistema mecânico.	12
Figura 4 – Representações de uma FRF (AVITABILE, 2001).	13
Figura 5 – Esquema de teste utilizando um shaker.	15
Figura 6 – Ciclo de média espectral.	17
Figura 7 - Um procedimento de otimização.	23
Figura 8 – Montagem do experimento para identificação dinâmica das placas.	30
Figura 9 – Placa de alumínio.	31
Figura 10 – Configuração para a identificação experimental da placa engastada: (1) shaker; (2) célula de carga; (3) acelerômetro.	31
Figura 11 – Modos de vibrar experimentais de uma placa engastada.	32
Figura 12 – Malhas de elementos finitos.	33
Figura 13 – Matriz MAC e NMD da diagonal principal da matriz para o modelo de 4x5 elementos.	35
Figura 14 – Matriz MAC e NMD da diagonal principal da matriz para o modelo de 12x15 elementos: □ sem massa adicional; * 5g adicionais.	36
Figura 15 – Matriz MAC e NMD da diagonal principal da matriz para o modelo de 48x60 elementos: □ sem massa adicional; * 5 g adicionais.	36
Figura 16 – Distribuição otimizada de espessura sobre a placa engastada para as frequências desejadas de 50,8 Hz, 100 Hz e 278 Hz (lado engastado para baixo).	38
Figura 17 – Placa de alumínio engastada com espessura otimizada (modelo de 4x5 elementos).	41
Figura 18 – Modos de vibrar experimentais da placa engastada otimizada.	42
Figura 19 – Superfícies interpoladas dos resultados obtidos dos modelos de malhas grossas em uma malha de 48x60 elementos.	46
Figura 20 – Curvas de nível das superfícies interpoladas.	47
Figura 21 - Resultados das otimizações para a malha de 12x15 elementos.	58

Lista de tabelas

Tabela 1 – Condições de carregamento que causam mecanismos de falha em estruturas.	2
Tabela 2 – Frequências naturais identificadas experimentalmente para a placa engastada.	32
Tabela 3 – Frequências naturais do modelo de malha 4x5 elementos.	34
Tabela 4 – Frequências naturais do modelo de malha 12x15 elementos.	35
Tabela 5 – Frequências naturais do modelo de malha 48x60 elementos.	36
Tabela 6 – Frequências naturais do modelo otimizado.	38
Tabela 7 – Frequências naturais identificadas experimentalmente do modelo otimizado de 4x5 elementos.	42
Tabela 8 – Frequências naturais calculadas a partir do modelo interpolado de 48x60 elementos.	45

Sumário

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO.....	1
Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.	2
<i>Dedico este trabalho aos meus pais e à minha irmã,</i>	3
Agradecimentos.....	5
Resumo	7
Abstract.....	9
Lista de figuras	11
Lista de tabelas	13
Sumário	15
Capítulo 1 - Introdução	1
1.1. Contexto e Motivação	1
1.2. Objetivos	3
1.3. Conteúdo da Dissertação.....	4
Capítulo 2 - Conceitos Fundamentais.....	7
2.1. Vibrações Mecânicas	7
2.1.1. Controle de vibrações.....	8
2.1.2. Testes dinâmicos de estruturas.....	11
2.1.3. Análise modal de elementos finitos	18
2.1.4. Modelagem de placas.....	19
2.1.5. Cálculo de autovalores e autovetores	21
2.2. Otimização	22
2.2.1. Introdução	22
Capítulo 3 - Revisão Bibliográfica	25
Capítulo 4 - Análise Modal da Placa Plana.....	29

4.1. Montagem do teste dinâmico da placa	29
4.2. Identificação Experimental da Placa Plana	30
4.3. Correlação do modelo de elementos finitos.....	33
Capítulo 5 - Otimização de Forma.....	37
Capítulo 6 - Análise Modal da Placa Otimizada	41
Capítulo 7 - Interpolação de Malha Grosseira	45
Capítulo 8 - Conclusões	49
8.1. Trabalhos futuros	50
Referências Bibliográficas	51
Apêndice A – Resultados das otimizações	57

Capítulo 1 - Introdução

1.1. Contexto e Motivação

Painéis metálicos são amplamente usados na indústria como parte de estruturas de máquinas. Em muitos casos esses painéis são sujeitos a restrições dinâmicas e de massa que devem ser consideradas durante o dimensionamento. É o caso dos sistemas aeronáuticos, espaciais e automotivos. Para lidar com as restrições dinâmicas em painéis (limites de frequência e de resposta em frequência), vários mecanismos de amortecimento têm sido desenvolvidos com sucesso como, por exemplo, camadas de betume, amortecedores, absorvedores de vibração, e cápsulas piezoelétricas ativas. Entretanto, a desvantagem de tais mecanismos é a adição de massa ao sistema.

Fenômenos vibracionais são classificados entre as principais fontes geradoras de falhas em estruturas e estão diretamente ligados a fadiga. Fadiga é um processo de falha em materiais provenientes de carregamentos cíclicos (SANDOR, 1999), uma forma comum de degradação que afeta uma larga gama de materiais sólidos e, por consequência, é frequentemente o fator principal de falha em veículos, máquinas e estruturas.

A Tabela 1 apresenta vários mecanismos de falha e suas condições de carga associadas. Nela é possível observar que quase todos os mecanismos de falha estão ligados a carregamentos vibracionais.

Dimensionar uma estrutura de modo que suas frequências naturais não sejam excitadas não é tarefa fácil, pois parâmetros de massa e rigidez devem ser observados simultaneamente. Massa e rigidez são de suma importância para se determinar as propriedades dinâmicas de uma estrutura. Quaisquer alterações dessas propriedades afetam diretamente o comportamento do sistema. Reduzir a massa implica em aumento da capacidade da máquina em responder a sinais de comando, em contrapartida, o sistema vai

perder a habilidade de atenuar ruídos e vibrações de alta frequência. Aumentar a rigidez implica em reduzir a resposta do sistema a baixas frequências de excitação. Porém, sem uma abordagem metodológica apropriada ou um auxílio computacional, por meio de otimização, por exemplo, alterar as propriedades de massa e rigidez se torna muito complexo.

Tabela 1 – Condições de carregamento que causam mecanismos de falha em estruturas.

Mecanismo de falha	Contenção	Ciclos térmicos	Umidade relativa	Temperatura de trabalho	Vibração e choque	Manutenção e manuseio	Tensão elétrica
Fratura frágil		X		X	X	X	
Fratura dúctil				X	X		
Escoamento		X		X	X		
Flambagem		X		X	X	X	
Grande deformação elástica		X			X		
Descolamento interfacial	X	X	X	X	X		
Início de trincas	X	X	X	X	X		
Desgaste					X		
Fluência		X		X	X		
Corrosão	X		X	X		X	
Crescimento dendrítico	X		X			X	X
Propagação de trincas		X			X	X	
Difusão				X			X

Fonte: SANDOR, B. I. et. al. Mechanical Engineering Handbook: Mechanics of Solids. Ed. Frank Kreith. Boca Raton: CRC Press LLC, 1999. 2466 p.

Otimização de forma de placas com foco nas frequências naturais e modos de vibrar desejados começaram a ser investigados em meados de 1990. Uma metodologia para otimização de espessura de placas em estruturas rotativas é apresentado em ÖZAKÇA e HINTON (1994). Nesse trabalho, o autor faz uso de curvas cúbicas para representar a variação de espessura ao longo da placa, e discute diferentes parâmetros que podem ser usados como variáveis de projeto: pontos-chave, vetores de posição ou coeficientes das curvas. Exemplos de aplicações numéricas são apresentados para cascas cônicas, placas circulares, seções de cascas curvas e sinos. Análises similares são apresentadas em Afonso e

HINTON (1995a, 1995b), considerando variações lineares e espessura ao longo da placa, para cascas de revolução e painéis circulares. Nesse caso, um algoritmo de elementos finitos é usado para o cálculo das frequências naturais e funções de sensibilidade são calculadas por diferenças finitas. Variação linear de espessura é também considerada em HINTON et al. (1995a, 1995b) para o problema de otimização de estruturas prismáticas formadas por placas dobradas.

Considerando a informação disponível na literatura, muito foi feito pela otimização de placas no campo numérico, mas poucos trabalhos apresentam validações experimentais. Na verdade, é encontrada comparação com resultados experimentais apenas em ERCOLI et al. (1990). Por essas razões, foi motivado o estudo de forma de painéis e variação de espessura de placas, focando no dimensionamento de estruturas com características dinâmicas desejadas (frequências naturais, modos de vibrar e funções de resposta em frequência).

1.2. Objetivos

A proposta principal deste trabalho é obter, por meio de um algoritmo de otimização, uma distribuição de espessuras para uma placa engastada que vise satisfazer uma entrada em espectro de frequências. Ou seja, com base nas frequências naturais de uma placa plana, escolhe-se as novas frequências desejadas. Essas novas frequências, em conjunto com o modelo de elementos finitos da placa, são utilizados como parâmetros para o algoritmo de otimização, que tem como saída a espessura de cada elemento do modelo. Para isso, investiga o impacto do refinamento da malha de elementos finitos sobre o algoritmo de otimização e compara os resultados numéricos aos experimentais, avaliando as correlações entre esses dois modelos.

O trabalho avalia também a possibilidade de se obter um refinamento do modelo otimizado com base na interpolação dos resultados da otimização de um modelo de elementos finitos de malha grossa. O que significa obter uma geometria otimizada a partir de um modelo de malha grossa e, posteriormente, interpolar esses resultados para obter uma malha mais refinada, o que é menos custoso no aspecto computacional.

Para alcançar tais objetivos, foram traçadas as seguintes metas pontuais:

- Identificar as FRF de uma placa plana por meios numérico e experimental, ajustando o primeiro modelo ao segundo para dois refinamentos diferentes de malha.
- Otimizar a distribuição de espessuras da placa, com base no espectro desejado, utilizando um software comercial de elementos finitos (MSC Nastran) e analisar a convergência do algoritmo para vários refinamentos de malha.
- Identificar as FRF da placa otimizada por meios numérico e experimental, analisando a concordância entre os resultados previsto e obtido.
- Investigar a possibilidade de se obter uma geometria contínua interpolada da superfície da placa que mantenha as frequências naturais a partir de uma malha grossa de elementos finitos.

1.3. Conteúdo da Dissertação

O presente trabalho aborda a temática de otimização de forma de placas finas com o objetivo de posicionar suas frequências naturais. Esse procedimento é realizado por meio de uma solução implementada no software comercial MSC Nastran, o qual retorna uma nova distribuição de espessuras da placa. São fabricados modelos reais das placas estudadas e esses modelos são comparados aos numéricos, traçando a correlação entre os resultados experimentais e computacionais. Também é avaliado o refinamento dessa solução a partir da interpolação dos resultados de malha grosseira, sem que seja necessário otimizar o modelo refinado.

Para melhor organização dos tópicos abordados, essa dissertação foi dividida em capítulos, cujos conteúdos são detalhados nos próximos parágrafos.

Capítulo 1 - Introdução: Introduz o tema abordado na dissertação, contextualiza o problema e apresenta as motivações que sustentaram o estudo. Além disso, elenca os objetivos principais do trabalho e as metas pontuais para alcança-los.

Capítulo 2 - Conceitos Fundamentais: Uma breve revisão sobre vibrações mecânicas e otimização, desde os trabalhos realizados na área e o estado da arte, até conceitos importantes que foram base para o desenvolvimento desse trabalho.

A subseção de vibração introduz o assunto e perpassa por fontes geradoras de vibrações e métodos para controlá-las. Explora também testes dinâmicos em estruturas, metodologias de ensaio, cálculo das FRF e seus estimadores. Ainda aborda tópicos de análise modal de elementos finitos, modelagem de placas e análise de vibração livre.

Já na subseção de otimização, apresenta a metodologia e suas vantagens.

Capítulo 3 - Revisão Bibliográfica: Elenca e descreve sucintamente diversos trabalhos relacionados a esse trabalho e por fim trata da solução de otimização do software MSC Nastran.

Capítulo 4 - Análise Modal da Placa Plana: Apresenta a montagem do ensaio e a metodologia para a identificação dinâmica experimental da placa plana. Descreve a placa quanto a sua forma e propriedades materiais, e os parâmetros utilizados durante o processo de obtenção de seus modos de vibrar.

A seguir, mostra os resultados do ensaio e a correlação entre o modelo de elementos finitos e o experimental, justificando por meio da Matriz MAC (*Modal Assurance Criterion*) e NMD (*Normalizes Modal Difference*).

Capítulo 5 - Otimização de Forma: Descreve o procedimento utilizado para a otimização da placa para o deslocamento de uma de suas frequências naturais, a função objetivo e as inequações de restrição.

Mostra os resultados obtidos com a otimização e discute brevemente seus resultados para dois refinamentos de malha (4x5 e 12x15).

Capítulo 6 - Análise Modal da Placa Otimizada: Para verificar os resultados da otimização, é usinada a placa resultante. Este capítulo descreve o procedimento de identificação experimental desse modelo otimizado e compara os valores obtidos com os previstos no capítulo anterior.

Capítulo 7 - Interpolação de Malha Grosseira: Os resultados da otimização para as malhas grosseiras são interpolados para a obtenção de uma superfície mais suave. Esse procedimento, seus resultados e a discussão sobre estes são descritos nesse capítulo.

Capítulo 8 - Conclusões: De forma objetivo, enumera as diversas conclusões resultantes do presente trabalho e estabelece a principal conclusão. Posteriormente sugere novas abordagens e possíveis extensões deste trabalho para trabalhos futuros.

Capítulo 2 - Conceitos Fundamentais

2.1. Vibrações Mecânicas

Fontes de vibrações no ambiente industrial são inúmeras. Aparecem em máquinas rotativas, processos de impacto como as prensas, veículos de transporte, fluxo de fluidos e muitos outros. A presença de vibrações frequentemente conduz a efeitos indesejáveis tais como imprecisões de fabricação e medida, ruído e desconforto, falhas mecânicas ou estruturais e manutenção frequente e dispendiosa de equipamentos.

Algumas vezes a vibração pode ser eliminada com base em uma análise teórica. Entretanto, os custos de manufatura envolvidos na eliminação de vibrações podem ser demasiado altos. Um projetista deve enfrentar o dilema de admitir uma quantidade razoável de vibração a um custo de manufatura razoável. Em alguns casos a força de excitação é inerente à máquina. Mesmo uma força de excitação relativamente pequena pode causar uma resposta relevante próximo à ressonância, especialmente em sistemas pouco amortecidos. Nestes casos a magnitude da resposta pode ser substancialmente reduzida pelo uso de isoladores e absorvedores auxiliares.

Toda vibração é uma combinação de vibração forçada e vibração ressonante (SCHWARZ e RICHARDSON, 1999). Vibrações forçadas são devidas a forças geradas internamente em uma estrutura, desbalanceamentos e cargas externas. Vibrações ressonantes ocorrem quando um ou mais modos de vibrar naturais de uma estrutura são excitados. A ressonância é causada pela interação entre as propriedades inerciais e elásticas do material e elevam a resposta oscilatória da estrutura a níveis de esforços e deformação muito superiores aos causados por carregamentos estáticos. Esta é a causa de vários dos problemas relatados em estruturas e máquinas.

2.1.1. Controle de vibrações

Em muitas situações práticas é possível reduzir, mas não eliminar, as forças dinâmicas que causam vibrações. Vários métodos podem ser usados para controlar vibrações. Esses métodos incluem controlar as frequências naturais do sistema para evitar ressonâncias; prever a resposta excessiva do sistema, mesmo na ressonância introduzindo amortecimento ou mecanismo de dissipação de energia; reduzir a transmissão de forças de excitação de uma parte da máquina para outra; e reduzir a resposta do sistema, pela adição de um neutralizador de massa auxiliar ou absorvedor de vibração (RAO, 1990). Algumas dessas técnicas serão agora revisadas.

Isolação de Vibrações

Isoladores de vibração são responsáveis por reduzir a transmissão da vibração do equipamento para o piso, do piso para o equipamento, ou entre partes internas do equipamento. Sua principal função é a de minimizar as vibrações e dos ruídos indesejáveis que podem gerar danos ao equipamento e as pessoas.

Muitos tipos isoladores de vibração são disponíveis comercialmente. Entre eles se encontram, com algumas das respectivas aplicações:

- Molas amortecidas: silos, guilhotinas, peneiras vibratórias, balanças dosadoras e sistemas de ar condicionado;
- Vibra-stop: compressores, lixadeiras, serras, trituradores, prensas, máquinas ferramentas e injetoras;
- Coxins: motores, balanças e ventiladores;
- Calços: Apoio de tubulações e suporte de equipamentos sem fixação;
- Batentes: limitador e amortecedor para portões, carrinhos e esteiras transportadoras.

A efetividade de um isolador é expressa pela transmissibilidade (TR), que é a razão de força transmitida (FT) pela força de excitação (FE). Um sistema simples de isolamento é modelado como uma mola e um amortecedor em paralelo. A transmissibilidade desse sistema é dada pela Equação (1) (BEARDS, 1995) e ilustrado na Figura 1.

$$TR = \frac{F_T}{F_O} = \frac{\sqrt{1 + 4\zeta^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \quad (1)$$

Figura 1 – Fatores de magnificação em vibração forçada amortecida (BEARDS, 1995).

Note que, na Equação (2), a isolação de vibração ocorre quando $\frac{\Omega}{\omega} > \sqrt{2}$; a eficiência aumenta com a diminuição da rigidez da montagem; o amortecimento reduz a eficiência da isolação, entretanto o amortecimento é necessário quando a ressonância ocorre em baixas frequências; a curva de resposta é essencialmente independente do amortecimento quando $\frac{\Omega}{\omega}$ é grande (>3) e o amortecimento é baixo $\zeta < 0,2$, daí

$$TR \approx \frac{1}{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 - 1} \quad (2)$$

(RAO, 1990) e para um sistema com mais de uma frequência de excitação, a mais baixa é a mais relevante. A eficiência de um sistema de isolamento é definido pela redução (R) na transmissibilidade (Equação (3)),

$$R = 1 - TR \quad (3)$$

Para se atingir certa redução (R) na transmissibilidade, uma rigidez (k) apropriada para a isolamento é obtida a partir da Equação (4).

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ e } \frac{\Omega}{\omega} = \sqrt{\frac{2 - R}{1 - R}} \quad (4)$$

Absorção de Vibração

Em alguns casos uma força de vibração é gerada propositalmente em um sistema por um conjunto massa-mola secundário para opor os distúrbios gerados pela vibração que se deseja reduzir ou eliminar. Um exemplo interessante desse método são os amortecedores de massa sintonizados utilizados em alguns arranha-céus para contrabalancear os movimentos oscilatórios causados pela ação do vento. A adição de um conjunto massa-mola secundário tem desvantagens como acréscimo de massa, complexidade e efetividade limitada a apenas uma frequência de excitação.

Balanceamento de Componentes Rotativos

As condições de desbalanceamentos estáticos e dinâmicos de corpos rotativos têm sido estudadas há muito tempo. São analisadas por métodos de mecânica elementar e testes simples e, se tomadas as correções adequadas, o balanceamento pode ser atingido. A

amplitude e posição angular do desbalanceamento podem ser determinadas por máquinas de balanceamento, nas quais as forças geradas pela vibração são medidas eletronicamente e correlacionadas com a posição.

2.1.2. Testes dinâmicos de estruturas

A maneira como uma estrutura se comporta dinamicamente tem efeito direto em sua eficiência. Seja essa estrutura uma máquina, uma ponte ou uma carenagem, é de suma importância a capacidade de mensurar seu desempenho dinâmico. Esse conhecimento possibilita aos projetistas determinar exatamente quais partes da estrutura precisam ser reforçados ou amortecidos.

Neste aspecto, os testes dinâmicos, em especial as análises modais experimentais, viabilizam a obtenção dos modos de vibrar. Certamente, conhecimento em aquisição de dados, processamento de sinais e teoria de vibrações são essenciais para a obtenção de resultados significativos.

Modos de vibrar

Modos de vibrar são características intrínsecas de uma estrutura. São determinados pelas propriedades do material, como massa, rigidez e amortecimento, e pelas condições de contorno da estrutura. Cada modo é definido por uma frequência natural e uma forma de modo. Quaisquer alterações nas condições de contorno ou nas propriedades do material acarretam em mudanças no modo de vibrar.

Ao excitar uma estrutura, a forma de vibrar assumida tende a ser dominada pela forma do modo de vibrar mais próximo à frequência de excitação. Ou seja, parâmetros modais experimentais podem ser obtidos ao se excitar uma estrutura monitorando o deslocamento de pontos de interesse, e posteriormente analisando os dados coletados.

Modos são classificados como modos de corpo rígido (translações e rotações) e modos de corpo flexível, e ambos podem estar relacionados com problemas de vibração.

A(c) Primeiro modo de torção.

(d) Segundo modo de torção.

Figura 2 mostra alguns dos modos fundamentais de corpo flexível de uma placa. Os modos mais estudados são os de frequência mais baixa por apresentarem maiores deformações e, por isso, suas consequências danosas são mais relevantes.

Figura 2 – Modos de vibrar de uma placa (SCHWARZ e RICHARDSON, 1999).

A função de resposta em frequência (FRF) é uma medida fundamental que contém as propriedades dinâmicas intrínsecas de uma estrutura mecânica. Parâmetros modais experimentais como frequência, amortecimento e modos também podem ser avaliados a partir de um conjunto de FRF.

A FRF descreve a relação entrada-saída entre pontos de uma estrutura em função da frequência. É uma medida da resposta de estrutura, em termos de deslocamento, velocidade ou aceleração, por unidade de força de excitação em um dado ponto. A Figura 3 representa um diagrama de bloco de um sistema mecânico sujeito a uma entrada de força $f(t)$ e uma saída de deslocamento $x(t)$, ambas em função do tempo (SCHWARZ e RICHARDSON, 1999).

Figura 3 – Diagrama de bloco de um sistema mecânico.

A Equação (5) indica que uma FRF ($H(w)$) é definida como a razão entre a resposta ($X(w)$) e a excitação ($F(w)$), ambas no domínio da frequência.

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \quad (5)$$

Uma função de resposta em frequência é uma função complexa e, por tanto, é representada por dois valores em cada frequência. A Figura 4 ilustra algumas formas comuns de representar uma FRF. O gráfico Co-quad representa o valor real e o imaginário em função da frequência. O valor real se refere a parte da resposta que está em fase com a entrada, e o valor imaginário a parte da resposta que está a 90° fora de fase. O gráfico de Bode representa o logaritmo da magnitude e a fase em função da frequência. O de Nyquist representa a parte real contra a parte imaginária. E o de Nichols o logaritmo da magnitude contra a fase. É importante notar que todos esses gráficos contém a mesma informação, mas apresentadas de formas diferentes para enfatizar certas características (RICHARDSON e FORMENTI, 1982).

Figura 4 – Representações de uma FRF (AVITABILE, 2001).

Quando excitada nas suas frequências naturais, a resposta de uma estrutura por unidade de força é muito grande, ou seja, uma pequena força de excitação causa uma grande resposta, o que é evidente quando se observa os picos na FRF.

Estruturas reais têm infinitos graus de liberdade e infinitos modos de vibrar. Do ponto de vista de testes, uma estrutura pode ser amostrada em quantos pontos se queira. Entretanto, devido a restrições de tempo e custo, geralmente se realiza um número reduzido de aquisições em um valor finito de frequências. Ainda assim, a partir da FRF, se

define com razoável precisão os modos que estão dentro da faixa de medição. Claro que, quanto mais pontos forem amostrados, maior refinamento terão as formas dos modos.

Medidas experimentais

Medidas experimentais são normalmente realizadas sob condições controladas onde a estrutura é artificialmente excitada. Existem diversas formas de excitação, dentre elas as mais comuns são por meio de martelo de impacto ou por meio de *shakers*. Os sinais provenientes dessas medições passam por pós-processamento e são utilizados para o cálculo das FRF. Formas de estimar a FRF de sistemas mecânicos são discutidas na próxima seção deste trabalho. Algumas formas de realizar testes experimentais em estruturas são agora revisadas.

Testes de impacto são realizados utilizando martelo de impacto provido de célula de carga acoplada e são muito úteis quando se deseja fixar o sinal de saída e medi-lo para múltiplos sinais de entrada. Neste caso fixa-se o instrumento de medição e os impactos são efetuados em diversos pontos da estrutura.

Já quando se deseja fixar o sinal de entrada e obter vários sinais de saída, o mais conveniente é utilizar um *shaker* (excitador eletrodinâmico) fixo e instrumentar a estrutura nos diversos pontos de interesse. Pode-se também realizar diversos ciclos de medição com apenas um instrumento de medição e a cada ciclo posicioná-lo em um ponto diferente.

Segundo SCHWARZ e RICHARDSON (1999), tanto o teste de impacto quanto o por meio de *shaker* acima citados são exemplos desse tipo de ensaio, pois em ambos utiliza-se uma única referência. Quando se utiliza uma única referência fixa o teste é chamado de SIMO (Single Input Multiple Output).

Quando dois ou mais sinais de entrada são utilizados, e as FRF são calculadas entre cada canal e múltiplas saídas, o teste é chamado de MIMO (Multiple Input Multiple Output). Esse tipo de ensaio é realizado quando a estrutura não pode ser adequadamente excitada por apenas uma referência, ou todos os modos não podem ser excitados a partir de uma referência única, ou a estrutura têm raízes repetidas (modos estão muito próximos ou acoplados que mais de uma referência é necessária para identificá-los).

Medidas utilizando um *Shaker*

Nem todas as estruturas podem passar por testes de impacto. Algumas por possuírem superfícies delicadas, outras por suas faixas de frequência limitadas. Quando o teste de impacto não puder ser utilizado, as medidas das FRF podem ser realizadas mediante a excitação artificial de *shakers*, como mostra a Figura 5.

Figura 5 – Esquema de teste utilizando um shaker.

O *shaker* é preso à estrutura por meio de uma haste, de modo que a direção de excitação limite-se à direção paralela ao eixo central da mesma, ou seja, a direção de medição da força. Uma célula de carga é fixada entre a estrutura e a haste para medir a força de excitação, gerando o sinal de entrada.

Existem vários sinais de excitação para testes utilizando *shaker*, dentre eles encontram-se o transiente, aleatório, pseudoaleatório e o *chirp*. Este último é utilizado como padrão de excitação neste trabalho.

O sinal *chirp* consiste basicamente em um sinal senoidal que varre uma faixa de frequência especificada. O sinal senoidal deve começar da frequência mais baixa do espectro de varredura, a qual deve ser aumentada linearmente até atingir a frequência mais alta.

Cálculo da FRF

A FRF foi definida como a razão entre o sinal de saída e de entrada, ambos no domínio da frequência, entretanto, na prática ela é calculada diferentemente nos analisadores modernos.

A capacidade de medida dos analisadores é construída com base em ciclos de média espectral, como mostrado na Figura 6. Esse ciclo assume que dois ou mais sinais com domínio no tempo são amostrados simultaneamente. Para o caso de dois sinais no domínio do tempo (um de entrada e um de saída), três estimadores espectrais são calculados (SCHWARZ e RICHARDSON, 1999):

- um espectro de potência para cada canal, chamado de *APS* (Auto Power Spectrum);
- e um espectro de potência cruzado entre os dois canais, chamado de *XPS* (Cross Power Spectrum).

Com base nesses três estimadores básicos, várias outras medidas podem ser calculadas, dentre elas as FRF. Em um analisador multicanal, esses estimadores podem ser aplicados a qualquer quantidade de pares de sinais desejados. Esses estimadores removem ruídos aleatórios e não linearidades aleatoriamente excitadas dos *XPS* de cada par de sinais. Essa medida de baixo ruído da vibração linear efetiva de uma estrutura é particularmente útil para análises modais experimentais. A partir dessas três médias espectrais as FRF podem ser calculadas de várias maneiras. Três dessas maneiras serão revisadas a seguir.

Quando se deseja atenuar os ruídos aleatórios e distorções no sinal de saída, utiliza-se um estimador comumente conhecido por H_1 . Nesse caso a FRF é calculada como a razão

do espectro de potência cruzado (XPS) dos pelo espectro de potência do sinal de entrada (APS_F), como mostrado na Equação (6).

Figura 6 – Ciclo de média espectral.

$$H_1 = \frac{XPS}{APS_F} \quad (6)$$

O estimador H_1 é um estimador de erro de mínimos quadrados da FRF quando ruídos externos e não linearidades são modeladas como um ruído Gaussiano adicionado ao sinal de saída (ROCKLIN et al., 1985).

Quando se deseja atenuar os ruídos aleatórios e distorções no sinal de entrada, utiliza-se um estimador conhecido por H_2 . Nesse caso a FRF é calculada como a razão do espectro de potência do sinal de saída (APS_X) pelo espectro de potência cruzado (XPS), como mostrado na Equação (7).

$$H_2 = \frac{APS_X}{XPS} \quad (7)$$

Da mesma forma, o estimador H_2 é um estimador de erro de mínimos quadrados da FRF quando ruídos externos e não linearidades são modeladas como um ruído Gaussiano adicionado ao sinal de entrada (ROCKLIN et al., 1985).

Quando se deseja atenuar os ruídos aleatórios e distorções em ambos os sinais de entrada e saída, utiliza-se um estimador conhecido por H_V . Nesse caso, primeiramente calculam-se os estimadores H_1 e H_2 , e a FRF é calculada como sendo a raiz quadrada do produto do estimador H_1 e do estimador H_2 , como mostrado na Equação (8).

$$H_V = \sqrt{H_1 \cdot H_2} \quad (8)$$

Uma maneira simples de conferir se a assumida para a FRF foi bem realizada é calcular a função de coerência C_{FX} entre o sinal de excitação F e o sinal de resposta X por meio da Equação (9).

$$C_{FX} = \frac{XPS^2}{APS_F \cdot APS_X} = \frac{H_1}{H_2} \quad (9)$$

A coerência deve apresentar um valor real entre 0 e 1. Quanto mais próximo de 1 for a coerência de um sinal para uma determinada faixa de frequência, mais bem estimada foi a FRF do sistema de interesse (SILVA, 2010).

2.1.3. Análise modal de elementos finitos

Quando uma placa é atingida por um objeto sólido, um som pode ser claramente ouvido. Isso ocorre porque a placa vibra em suas frequências naturais, ou ressonâncias. Se a placa for excitada em uma de suas frequências naturais, grandes amplitudes de deslocamentos serão observadas. Por isso, é importante conhecer as ressonâncias de uma máquina, para poder evitá-las, ainda em fases de projeto anteriores à fabricação. Para tal fim, se faz intensivo o uso da análise modal de elementos finitos, ou análise modal numérica.

Na engenharia moderna, é raro encontrar um projeto que não requeira algum tipo de análise de elementos finitos (FEA). As vantagens práticas de FEA, tanto em análise de esforços quando em dinâmica estrutural, são as responsáveis por duas décadas de uso dessa ferramenta (AKIN, 2005).

O método de elementos finitos (FEM) se tornou uma ferramenta indispensável em modelagem e simulação de sistemas de engenharia avançados em vários campos. Ao projetar tais sistemas, engenheiros e projetistas passam por processos sofisticados de modelagem, simulação, análise, detalhamento, prototipagem, testes e produção. Todo o trabalho preliminar ao início da produção tem o objetivo de garantir a eficácia do produto acabado, assim como uma boa relação de custo-benefício. E esse processo é geralmente iterativo, várias etapas são repetidas baseadas nos resultados obtidos em etapas anteriores, com o objetivo de alcançar o maior valor agregado com o mais baixo custo.

O grande poder de FEM se encontra em sua versatilidade. A estrutura analisada pode ter forma, condições de fixação e de carga arbitrárias. Entretanto, deve-se tomar cuidado, pois é fácil errar ao entrar com os dados do problema na ferramenta computacional de análise. Por essa razão, é essencial ao usuário dessas ferramentas o bom entendimento do problema e de modelagem, para que erros nos resultados computados possam ser detectados.

A priori, FEM foi desenvolvido para resolver problemas de análise de esforços, e desde então tem sido estendido a muitas outras aplicações como análise modal, térmica, acústica, de escoamento de fluidos etc. Em geral a análise procura determinar a distribuição de algum campo variável como, por exemplo, o campo de deslocamentos em análise de esforços, e a temperatura e o fluxo de calor em análises térmicas.

2.1.4. Modelagem de placas

O tópico de flexões de placas e sua extensão a cascas foi um dos primeiros aos quais FEM foi aplicado no começo da década de 60. Naquele tempo, as várias dificuldades encontradas não foram completamente resolvidas e por essa razão o assunto continua a ser objeto de estudo em pesquisas atuais.

Placas e cascas são formas particulares de sólidos tridimensionais, seu tratamento não apresenta maiores dificuldades teóricas, ao menos em termos de elasticidade. Porém, a espessura de tais estruturas é muito pequena quando comparadas às outras dimensões, e abordagens tridimensionais não são apenas custosas como ainda levam a sérios problemas de mau condicionamento numérico. Para facilitar a solução, várias hipóteses relacionadas ao comportamento de tais estruturas foram introduzidas, e resultaram em uma série de aproximações.

A teoria de placa fina é baseada nas hipóteses formalizadas por Kirchhoff em 1850 e naturalmente seu nome foi associado a sua teoria. Mais tarde, uma variação dessas hipóteses foi feita por Reissner em 1945, e posteriormente, de uma maneira um pouco diferente, por Mindlin em 1951. A modificação da hipótese de Kirchhoff permitiu a aplicação do modelo para placas espessas e é chamada de hipótese de Reissner-Mindlin (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000).

Na teoria de modelagem de placas finas é possível representar o estado de deformação por apenas uma variável, o deslocamento lateral do plano médio da placa. Assim, tal formulação é irredutível. Adotar tal aproximação introduz a segunda derivada na definição de deformação e, por isso, condições de continuidade entre os elementos devem ser impostas, não só nas deformações, mas também em suas derivadas.

O elemento escolhido para o modelo é do tipo *CQUAD4 Shell*. Esse elemento se baseia na teoria de Mindlin e é utilizado em casos de estruturas cuja espessura seja pequena em relação às outras dimensões. Com ele pode-se modelar estruturas planas ou curvas. Possuem cinco graus de liberdade por nó (três de translação e dois de rotação) e não apresenta rigidez associada ao grau de liberdade de rotação em torno do eixo normal a superfície. Deve-se tomar a precaução de utilizar esse elemento o mais próximo possível de um retângulo, já que sua precisão se deteriora conforme seus ângulos se afastam de 90°. Mais detalhes sobre a formulação de elementos de placa podem ser obtidos em JAREK e SILVA (2007).

2.1.5. Cálculo de autovalores e autovetores

Para um problema estrutural geral, as matrizes de rigidez, as matrizes de massa e o vetor de carregamentos devem ser definidos (Equação (10)). Resolvendo as equações resultantes desse processo se obtém o campo de deslocamentos da estrutura, e assim as deformações podem ser calculadas. A questão é como resolver tais equações, já que o número de equações está associado ao número de graus de liberdade, e esse número geralmente é grande. Para isso várias técnicas foram desenvolvidas e uma delas é chamada de decomposição modal.

$$KX + M\ddot{X} = F \quad (10)$$

Para resolver um problema utilizando a técnica de decomposição modal, primeiramente resolvemos a equação homogênea (Equação (11)). A equação homogênea é quando consideramos o vetor de carregamentos igual à zero ($F = 0$), por isso é chamado de análise de vibração livre (livre de forças externas). A solução para o problema de vibração livre pode ser assumido como sendo

$$X = \phi e^{i\omega t} \quad (11)$$

onde ϕ é a amplitude do deslocamento modal, ω é a frequência da vibração livre e t é o tempo. Substituindo a Equação (11) na Equação (10) se obtém

$$[K - \omega^2 M]\phi = 0 \quad (12)$$

onde ω^2 é frequentemente representado por λ . Para se obter a solução não trivial (onde $\phi \neq 0$), o determinante da matriz deve ser zero.

$$|K - \lambda M| = 0 \quad (13)$$

A expansão da Equação (13) leva a uma equação polinomial com raízes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ chamadas de autovalores. Os autovalores se relacionam com as frequências naturais da estrutura. Essa informação é muito importante para estruturas que recebem carregamentos

dinâmicos, pois caso sejam excitadas em alguma de suas frequências naturais, estas estruturas entrarão em ressonância e apresentarão vibrações de grande amplitude, podendo levar a consequências catastróficas.

Substituindo os autovalores λ_i de volta da Equação (13) temos

$$[K - \lambda_i M]\phi = 0. \quad (14)$$

Resolvendo essa equação encontramos os vetores ϕ_i , associados a cada λ_i , e chamados de autovetores. Cada autovetor corresponde a um modo de vibrar da estrutura, e representa sua forma de vibrar.

2.2. Otimização

2.2.1. Introdução

Existem basicamente duas abordagens para um projeto: projeto funcional e o projeto otimizado (MOAVENI, 1999). O projeto funcional é aquele que satisfaz todos os requisitos de projeto, mas ainda permite melhorias em certos aspectos. Essas melhorias são avaliadas e executadas em um processo de otimização.

Um ciclo de otimização é ilustrado na Figura 7. Baseado em condições iniciais, é necessário definir parâmetros como a função objetivo, que é a função a ser maximizada ou minimizada; as restrições, geralmente expressas por inequações que limitam a ação do algoritmo com relação aos valores que as variáveis podem adotar; e o critério de parada, o qual deve ser satisfeito para que o problema possa ser considerado como resolvido. É comum também definir outros parâmetros como, por exemplo, o número máximo de ciclos ou um valor fixo para a variação do parâmetro otimizado. Em seguida é realizada uma análise, que no caso desse trabalho é uma análise modal, para obter as frequências naturais. Os resultados dessa análise são avaliados e, baseado no critério de parada previamente definido, é decidido se ainda há margem para melhoria. Caso haja, os parâmetros de otimização são modificados baseando-se em uma metodologia que varia de um algoritmo

para outro, e então começa um novo ciclo, que se repete até que se satisfaçam os critérios de parada. Parâmetros comuns de otimização são custo, resistência, tamanho, peso, confiabilidade, ruído etc. No caso desse trabalho a otimização altera os parâmetros de espessura da placa e objetiva um espectro de frequências naturais escolhido.

Figura 7 - Um procedimento de otimização.

O problema de otimização deste trabalho será resolvido com uma combinação de duas soluções do software MSC Nastran: a solução 200 (de otimização) , que apresenta um pacote de algoritmos de otimização para variados tipo de problema diferentes e será responsável por avaliar a função objetivo e variar os parâmetros a serem otimizados; e a solução 103 (de análise modal), responsável pelas análises modais nos modelos otimizados.

Dentre as várias possibilidades de algoritmos foi escolhido o MMFD (*Modified Method of Feasible Direction*). Essa escolha se deve ao fato do problemas ser do tipo não-linear, não-convexo e de único objetivo.

Capítulo 3 - Revisão Bibliográfica

Encontrar uma topologia para placas que as otimize do ponto de vista estrutural tem sido alvo de estudo desde a década de 70 (BELBLIDIA, 2001).

Um bom trabalho de pesquisa bibliográfica foi feito por MACKERLE (2003). Essa bibliografia contém referência para artigos, dissertações e teses que tratam de otimização de forma e de topologia. Os tópicos mais relevantes para o presente trabalho incluem otimização de forma de modelos 2D sob carregamentos estáticos e dinâmicos; otimização integrada de forma; otimização de forma de estruturas vibratórias; otimização de forma de placas.

Um dos primeiros trabalhos de otimização de estruturas sob carregamentos dinâmicos foi realizado por FOX e KAPOOR (1970). Eles formularam o problema de peso mínimo de estruturas submetidas a esforços e deslocamentos dinâmicos, e obtiveram a solução por meio de uma abordagem de programação matemática.

Seguindo uma cronologia crescente, OLHOFF et al. (1981) e BENDSØE (1982) investigaram a topologia de placas baseados na teoria de placas de Kirchhoff enquanto BENDSØE e KIKUSHI (1988), SUSUKI e KIKUSHI (1991), e SOTO e DÌAS (1993) usaram a teoria de Mindlin-Reissner.

A otimização de placas com variação não uniforme de espessura (funções não contínuas) começou com a ideia de variação incremental. Nesse caso, a própria espessura é usada como variável de projeto em diferentes regiões da placa (regiões a serem otimizadas), com pequenas variações de valores. Procedimentos analíticos e resultados numéricos foram obtidos para placas retangulares concêntricas por GUTIERREZ et al. (1995) e placas circulares linearmente segmentadas por CHOU e WANG (1996). Algoritmos de elementos finitos também podem ser usados e são naturalmente adequados para a abordagem de variações fixas, pois dividem a área da placa em regiões discretas de espessura constante.

Uma abordagem diferente da variação uniforme de espessura é relacionada ao projeto topológico das placas. Nesse caso, há duas possibilidades de valores de espessura: nominal ou zero (sem material, ou seja, furo). Dessa forma, CHENG et al. (1994) resolveram o problema simultaneamente pela forma ótima e topologia da placa, focando nas frequências naturais desejadas da estrutura. Um exemplo de tal abordagem é encontrado em ZHAO et al. (1996), no qual um algoritmo de otimização estrutural evolucionário é utilizado para maximizar a frequência natural de flexão de placas finas. Já no trabalho de PEDERSEN (2003), não apenas as frequências naturais são maximizadas, mas também o intervalo entre a primeira e a segunda. O problema inverso também é apresentado, onde é encontrada a forma e a posição de furos na placa para as frequências desejadas.

O trabalho de BELBLIDIA et al. (1999) foca na otimização de placas enrijecidas unindo otimização topológica e estrutural. Para isso utilizam o modelo de Mindlin-Reissner de três camadas. A camada central representa a placa não enrijecida e as camadas simétricas superior e inferior representam as potenciais zonas enrijecidas. O objetivo é minimizar a energia de deformação mantendo o volume de enrijecimento especificado da placa constante.

Já MIN et al. (1999) utilizam o método de homogeneização é utilizado para obter a topologia ótima de estruturas e uma metodologia de integração direta é aplicada para resolver os problemas transientes lineares. A otimização é formulada para encontrar a melhor configuração de estrutura que minimiza a resposta dinâmica e um intervalo de tempo específico. E a partir daqui os trabalhos começam a dar mais importância aos aspectos vibracionais durante as otimizações.

MIN et al. (2000) propõem uma metodologia unificada de projeto para gerar estruturas que satisfazem requisitos estáticos e vibracionais usando uma abordagem de otimização multiobjectiva.

Otimização de forma de placas submetidas a restrições dinâmicas não é limitada ao posicionamento das frequências naturais. Por exemplo, uma análise de otimização é feita por LAI e ANANTHASURESH (2002) para os modos de vibrar desejados de barras e vigas, na qual a variável de projeto é a espessura ao longo da estrutura e a solução advém do problema inverso de autovetor. Considerando que os modos de vibrar definem os deslocamentos locais da estrutura harmonicamente excitada, esse resultado tem um amplo campo de aplicação em sistemas microeletromecânicos (MEMs). AFONSO et al. (2005)

utilizam processos de otimização topológica e estrutural combinados em uma ferramenta de otimização de projeto totalmente integrada (FIDO) com o intuito de produzir um projeto confiável de cascas e placas. MESKE et al. (2006) apresentam um método de otimização de forma visando frequências naturais. A abordagem se baseia na maximização da primeira frequência natural e leva em conta restrições de volume. Outro caso é apresentado por DAMAREN (2007), no qual a forma da placa com interação com um fluido é otimizada para aumentar o amortecimento da radiação acústica. Nesse caso, a placa possui espessura constante e elevações e dobras são introduzidas na superfície da placa (superfície não plana otimizada).

Quanto ao posicionamento de frequências naturais de placas, um dos primeiros trabalhos foi o de IRIE et al. (1980), o qual focou o cálculo das frequências naturais e nos modos de vibrar de placas com determinadas variações de espessura. Inicialmente, foram consideradas variações fixas nas quais áreas da placa tinham valores discretos de espessura com pequenas variações locais. ERCOLI et al. (1990) realizou uma comparação entre as soluções analíticas e numéricas dessas placas que mostrou boa concordância, e o erro comparado com os resultados experimentais para uma placa retangular permaneceram abaixo de 10%.

KUTTLER e SIGILLITO (1983) propuseram um método para calcular os limites inferior e superior de frequências naturais de placas com funções contínuas de variação de espessura. E posteriormente, BHAT et al. (1990) e AKIYAMA e KURODA (1997) estudaram placas com variação linear de espessura. Mais recentemente, CIVALEK (2009) estendeu o estudo das frequências fundamentais de placas retangulares com variação linear de espessura para casos isotrópicos e ortotrópicos, utilizando um método de convolução singular discreta.

As mais recentes Investigações em otimização de forma em placas visando frequências naturais são relacionadas a compósitos laminados. Primeiramente, DIANCONU et al. (2002) e TOPAL (2009) focam na direção usada na orientação das fibras como variável de projeto. Posteriormente, outros parâmetros começam a ser investigados: número de lâminas, número de camadas, e o tipo de compósito nas camadas, como apreciado nos trabalhos de WANG et al. (2005), BARGH e SADR (2011) e KARAKAYA e SOYKASAP (2011). Resultados numéricos apresentados neste último mostram que o ótimo é alcançado com alta rigidez nas camadas externas da placa de compósito.

Capítulo 4 - Análise Modal da Placa Plana

4.1. Montagem do teste dinâmico da placa

A Figura 8 mostra a foto da montagem do ensaio para a realização dos testes de identificação dinâmica das placas utilizadas. Essa montagem segue o modelo proposto no item 2.1.2 - Testes dinâmicos de estruturas (Medidas utilizando um *Shaker*) e esquematizado na Figura 5.

O computador representa o analisador de sinal. Ele gera a forma de onda senoidal do sinal de excitação *chirp* que varre a faixa de frequências pré-estabelecida para o ensaio. Esse sinal recebe um ganho do amplificador, que fornece um sinal forte para ser utilizado como entrada do *shaker*. Por sua vez, o *shaker* é associado à estrutura a ser medida (a placa) por meio de uma haste longa e delgada. A função da haste é transmitir a força gerada pelo *shaker* à placa somente na direção do eixo da mesma, minimizando as componentes espúrias e sem acréscimo excessivo de massa. Entre o *shaker* e a haste há uma célula de carga, utilizada para realimentar o analisador de sinal com o sinal de entrada, que neste caso é a força de excitação. A resposta da placa durante a varredura do sinal *chirp* é sentida pelo acelerômetro e enviada para o condicionador de sinal, que amplifica o sinal do acelerômetro e, mediante configuração de certos parâmetros fornecidos pelo fabricante do acelerômetro, compensa as não linearidades do mesmo. E por fim, o sinal já condicionado segue para o analisador de sinal para aquisição, armazenamento e pós-processamento.

Figura 8 – Montagem do experimento para identificação dinâmica das placas.

4.2. Identificação Experimental da Placa Plana

O propósito principal deste trabalho é otimizar as frequências naturais de uma placa metálica para os valores desejados alterando suas espessuras locais. Para tal, é usada uma placa de alumínio engastada, cujas dimensões são 150x185 mm e a espessura nominal é 2

mm (Figura 9). A densidade do material é $2.674 \text{ kg} / \text{m}^3$ e a massa da placa é de aproximadamente 148 g.

Figura 9 – Placa de alumínio.

A identificação das características dinâmicas da placa é realizada pelo método de Ewins-Gleeson de análise modal descrito por MAIA e SILVA (1997). A Figura 10 mostra como a placa é engastada. Mostra também que a força de excitação aplicada pelo *shaker* (indicado pelo número 1) é medida pela célula de carga (indicada pelo número 2) conectada ao canto da placa. A resposta da placa à excitação é medida pelo acelerômetro piezo resistivo de 2,4 g (indicado pelo número 3) em uma malha de 25 pontos. O sinal de excitação adotado foi um sinal *chirp* com faixa de 10 a 350 Hz com período de 2 s, em um total de 20 repetições e tempo de aquisição de 40 s. A taxa de aquisição adotada é de 2 kHz.

Figura 10 – Configuração para a identificação experimental da placa engastada: (1) shaker; (2) célula de carga; (3) acelerômetro.

As funções de resposta em frequência são calculadas pelo estimador H_1 (SILVA, 2010) pois o sinal de entrada é conhecido.

Tabela 2 – Frequências naturais identificadas experimentalmente para a placa engastada.

Frequência natural	1	2	3
Valor obtido experimentalmente (Hz)	50,8	135,5	277,5
Desvio padrão	0,436	1,558	2,387
Intervalo de confiança de 95%	$50,8 \pm 0,9$	136 ± 3	278 ± 5

Os resultados obtidos em termos das três frequências naturais são listados na Tabela 2. A medição das FRF nos 25 pontos da placa resultou em 25 valores para cada uma das frequências naturais. Na Tabela 2 é apresentada a média e o desvio padrão dos valores encontrados.

A variação observada é causada principalmente pela massa adicional do acelerador sobre a placa: alterando a posição do acelerômetro, seus 2,4 g se deslocam influenciando na distribuição de massa e deslocando sutilmente os picos de ressonância do sistema. Apesar das incertezas introduzidas pela massa do acelerômetro, a variação dos valores permaneceu baixa para o intervalo de confiança de 95 % (duas vezes o desvio padrão).

(a) Primeiro modo, 50,8 Hz.

(b) Segundo modo, 136 Hz.

(c) Terceiro modo, 278 Hz.

Figura 11 – Modos de vibrar experimentais de uma placa engastada.

O modo de vibrar associado à primeira frequência natural da placa é obtido pelo Método de Ewins-Gleeson (MAIA e SILVA, 1997), e os resultados são mostrados na Figura 11. Como é possível observar, a frequência de 50,8 Hz é associada ao primeiro modo de flexão; a

frequência de 136 Hz é associada ao primeiro modo de torção; e a frequência de 278 Hz é associada ao segundo modo de flexão. É possível notar uma deformação na forma do primeiro modo, o que está associado ao aumento de rigidez adicionado pela fixação do *shaker* em um dos cantos livres da placa.

4.3. Correlação do modelo de elementos finitos

De modo a otimizar a espessura da placa visando frequências naturais, um modelo de elementos finitos é desenvolvido usando o software MSC Nastran v.2005. Nesse caso, duas diferentes malhas são usadas: malha de 4x5 elementos e malha de 12x15 elementos (Figura 12).

Os elementos *CQUAD4 Shell* utilizados têm 2 mm de espessura e o material é considerado isotrópico (*MAT1*), com módulo de Young de $7,1 \times 10^{10} \text{ N / m}^2$ e coeficiente de Poisson de 0,3. Todos os nós do engaste estão totalmente restringidos de movimento (todos os deslocamentos e rotações iguais à zero). As frequências naturais e modos de vibrar associados são obtidos com a solução de análise modal do software citado (solução 103).

Figura 12 – Malhas de elementos finitos.

Adotando modelo de malha de 4x5 elementos e calculando as respectivas frequências naturais e modos de vibrar, são obtidos os resultados apresentados na Tabela 3. O erro entre os resultados numéricos e experimentais permaneceram abaixo de 5,2 % para as três primeiras frequências naturais. Os modos de vibrar também são coerentes aos medidos experimentalmente, o que é representado pela matriz MAC (*Modal Assurance*

Criterion) mostrado na Figura 13 (a), cuja forte preponderância diagonal indica a similaridade entre os modos numéricos e experimentais (ALLEMANG, 2003). A diferença modal normalizada (NMD – *Normalized Modal Difference*), mostrada na Figura 13 (b) para os valores da diagonal principal da matriz MAC, representa a fração, em média, pela qual os graus de liberdade do modo numérico diferem dos graus de liberdade do modo experimental (MAIA, 1997).

Tabela 3 – Frequências naturais do modelo de malha 4x5 elementos.

Frequência natural	1	2	3
Valor obtido experimentalmente (Hz)	50,8	135,5	277,5
Valor da análise FEA (Hz)	49,3	134,7	291,9
Erro em relação ao experimental (%)	3,0	0,6	5,2

Os resultados mostrados na Tabela 3 e na Figura 13 são obtidos a partir do modelo de 4x5 elementos, restringidos na aresta engastada. Os erros nos valores da análise FEA foram calculados em relação aos valores obtidos experimentalmente, ou seja, dividindo-se o módulo da diferença entre os valores pelo valor obtido experimentalmente.

É possível observar na Figura 11 que a célula de carga introduz massa na placa enquanto a haste adiciona rigidez ao ponto de excitação. Por isso, é esperado alcançar melhores resultados inserindo uma massa concentrada e uma mola linear no ponto de excitação no modelo. Após algumas tentativas de ajuste desses valores de massa e rigidez no modelo, somente é possível aprimorar os valores de frequência natural a partir da deterioração da matriz MAC, que indica maiores erros nos modos de vibrar. Por essa razão, e considerando que os erros nas frequências naturais estão com margem aceitável (Tabela 3), o modelo de 4x5 elementos de placa sem massa ou rigidez adicional foi considerado uma boa representação da placa engastada em estudo. Isto não significa que não há melhor modelo para representar o sistema.

Figura 13 – Matriz MAC e NMD da diagonal principal da matriz para o modelo de 4x5 elementos.

Adotando o modelo de malha de 12x15 elementos e calculando as respectivas frequências naturais e modos de vibrar, são obtidos os resultados apresentados na Tabela 4. No caso do modelo sem massa ou rigidez adicional na posição de excitação, o erro entre os resultados numéricos e experimentais ficam abaixo de 5,5 % para os primeiros dois modos, mas para o terceiro modo o erro dobra, sendo de 11,3 %. Nesse caso, foi adicionada uma massa concentrada de 5 g no ponto de excitação para simular a influência do *shaker* no modelo e, apesar do erro do primeiro modo ter aumentado substancialmente, obtiveram-se valores gerais mais homogêneos, com todos permanecendo abaixo de 7,1 % (Tabela 4).

Tabela 4 – Frequências naturais do modelo de malha 12x15 elementos.

Frequência natural	Sem massa adicional			Com 5g adicionais		
	1	2	3	1	2	3
Valor obtido experimentalmente (Hz)	50,8	135,5	277,5	50,8	135,5	277,5
Valor da análise FEA (Hz)	50,1	142,9	308,7	47,3	126,8	297,1
Erro em relação ao experimental (%)	1,4	5,5	11,3	6,9	6,4	7,1

Analisando a matriz MAC dos modelos testados, pode-se observar a forte preponderância da diagonal, o que indica a similaridade entre os modos numérico e experimental (Figura 14 (a)). Comparando ambos os modelos (com ou sem massa adicional (Figura 14 (b))), se observa que os 5 g adicionais no modelo não apenas melhoram as frequências naturais, mas também a qualidade do segundo e terceiro modo de vibrar. Por essas razões, o modelo de 12x15 elementos com 5 g adicionais no ponto de excitação é considerado uma boa representação do sistema em estudo. Novamente, isso não significa que não há melhor modelo para representar esse sistema.

(a) Matriz MAC (5 g adicionais).

(b) Diagonal principal MAC e NMD.

Figura 14 – Matriz MAC e NMD da diagonal principal da matriz para o modelo de 12x15 elementos: □ sem massa adicional; * 5g adicionais.

Resultados similares são obtidos com uma malha mais refinada de 48x60 elementos. Novamente, melhores resultados são obtidos por um modelo com 5 g adicionais no ponto de excitação (Tabela 5). A massa adicional de 5 g no modelo também melhorou a qualidade do segundo e terceiro modo de vibrar (Figura 15). Por essas razões, o modelo de 48x60 elementos com 5 g adicionais no ponto de excitação é considerado uma boa representação do sistema em estudo.

Tabela 5 – Frequências naturais do modelo de malha 48x60 elementos.

Frequência natural	Sem massa adicional			Com 5g adicionais		
	1	2	3	1	2	3
Valor obtido experimentalmente (Hz)	50,8	135,5	277,5	50,8	135,5	277,5
Valor da análise FEA (Hz)	50,2	144,2	310,7	47,4	127,7	298,5
Erro em relação ao experimental (%)	1,2	6,4	12,0	6,7	5,8	7,6

(a) Matriz MAC (5 g adicionais).

(b) Diagonal principal MAC e NMD.

Figura 15 – Matriz MAC e NMD da diagonal principal da matriz para o modelo de 48x60 elementos: □ sem massa adicional; * 5g adicionais.

Capítulo 5 - Otimização de Forma

A otimização da espessura da placa visando frequências naturais é realizada com a solução 200 do software MSC Nastran. A função objetivo adotada é apresentada na Equação (15)

$$f = \left(1 - \frac{\omega_{n1}}{\Omega_1}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega_{n2}}{\Omega_2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega_{n3}}{\Omega_3}\right)^2 \quad (15)$$

onde ω_{ni} é a i-ésima frequência natural da placa (numérica) e Ω_i é a i-ésima frequência natural desejada. A espessura t_i de cada elemento no modelo é a variável de projeto do problema de otimização e está sujeita às inequações de restrição (Equação (16))

$$1,5 \leq t_j \leq 5,0 \text{ mm}. \quad (16)$$

Os valores iniciais dos valores t_j são iguais a 2 mm (espessura original da chapa).

O problema de otimização a ser resolvido é do tipo não-linear, não convexo e de único objetivo. Para esse fim, adota-se a solução 200 do software MSC Nastran com as configurações padrão. Assim, o método de otimização empregado é o MMFD (*Modified Method of Feasible Directions*), o qual é adequado para problemas não-lineares. A convergência é atingida quando a variação absoluta do valor da função objetivo entre dois ciclos consecutivos de otimização for menor do que 10^{-20} . O número máximo de iterações foi definido como sendo 15.

As frequências naturais da placa são 50,8 Hz, 136 Hz e 278 Hz, como anteriormente identificadas. Para avaliar se o deslocamento da segunda frequência afetaria as frequências adjacentes, alterou-se o valor da segunda frequência natural para 100 Hz, mantendo as outras com o mesmo valor. Assim, as frequências naturais desejadas são: 50,8 Hz, 100 Hz, 278 Hz. Adotando o modelo de elementos finitos descrito previamente (malha 4x5 e malha

12x15 com 5 g adicionais), e resolvendo o problema de otimização (Equação (15) e Equação (16)) com a ajuda do software MSC Nastran, são obtidos os resultados apresentados na Tabela 6 e Figura 16. Os resultados mostrados na Figura 16 se referem à espessura igualmente distribuída em relação ao plano médio da placa ($t_j/2$ acima do plano médio da placa e $t_j/2$ abaixo).

Tabela 6 – Frequências naturais do modelo otimizado.

Modelo Otimizado	Malha 4x5			Malha 12x15		
Frequência Natural	1	2	3	1	2	3
Valor desejado para a otimização (Hz)	50,8	100	278	50,8	100	278
Valor da análise FEA (Hz)	48,7	101,6	274,3	50,1	100,1	273,7
Erro em relação ao desejado (%)	4,1	1,6	1,3	1,4	0,1	1,5

A forma otimizada da placa com 12x15 elementos resultou em frequências naturais muito próximas as desejadas, enquanto que o modelo com 4x5 elementos apresentou maior erro para a primeira frequência natural (Tabela 6). Isso é provavelmente causado pelo grande número de variáveis de projeto no modelo 12x15, que proporciona maior liberdade para o algoritmo de otimização encontrar a solução ótima em comparação com o modelo 4x5.

Figura 16 – Distribuição otimizada de espessura sobre a placa engastada para as frequências desejadas de 50,8 Hz, 100 Hz e 278 Hz (lado engastado para baixo).

Analisando a solução otimizada (Figura 16), é possível observar que há massa concentrada nos cantos livres da placa (cantos superior direito e esquerdo) e também na região central próxima ao engaste (região inferior central). Essa distribuição é algo esperado considerando que o objetivo é diminuir a frequência natural do modo de torção sem afetar

as frequências dos modos de flexão. As massas concentradas nos cantos livres reduzem as frequências naturais de torção. E para garantir que as frequências naturais de flexão não se alterem, mais massa é inserida na região central próxima ao engaste para balancear a massa nos cantos livres e aumenta a rigidez à flexão da placa.

Os resultados obtidos para o modelo 4x5 são simétricos em relação ao plano central da placa, enquanto os resultados obtidos para o modelo 12x15 são levemente assimétricos. Isso é um efeito da massa adicional de 5 g no modelo 12x15 (o que não existe no modelo 4x5) e altera a distribuição de massa da placa.

O tempo necessário para executar o algoritmo de otimização para ambos os modelos permaneceu abaixo de 5 minutos em um microcomputador de mesa Pentium 4 com processador de 3,2 GHz e 2,5 Gb de memória RAM. O problema de otimização do modelo 4x5 precisou de 5 ciclos para convergir a uma solução, enquanto o do modelo 12x15 precisou de 6 ciclos. O algoritmo de otimização não convergiu a uma solução no caso do modelo de 48x60 elementos. Por isso, foi possível encontrar formas otimizadas para uma placa em uma configuração com espessuras discretas (resultados de malha grossa), mas uma forma otimizada contínua não foi obtida, como seria esperado para o modelo de malha refinada de 48x60 elementos (resultados de malha fina). Neste último caso, o número de variáveis (2880 variáveis) seria muito grande para o algoritmo tratar.

Apesar de ter-se analisado apenas a segunda frequência natural da chapa, o mesmo procedimento pode ser aplicado em qualquer das frequências naturais da mesma. Assim, para cada refinamento de malha (4x5 e 12x15), desloca-se uma das três primeiras frequências naturais para um valor inferior e um superior. Resultados deste tipo de análise são apresentados no Apêndice A. Na Figura A.1 do Apêndice A são mostrados os resultados das otimizações utilizando uma malha de 4x5 elementos. Já na Figura A.2 do Apêndice A são mostrados os resultados das otimizações utilizando uma malha de 12x15 elementos.

Capítulo 6 - Análise Modal da Placa Otimizada

Com o intuito de verificar os resultados de otimização, a solução obtida para o modelo de 4x5 elementos (Figura 16 (a)) foi usinada no mesmo material da placa original e aparece na Figura 17.

Figura 17 – Placa de alumínio engastada com espessura otimizada (modelo de 4x5 elementos).

A identificação das características dinâmicas da placa é realizada de acordo com o procedimento experimental usado na identificação da placa original (Capítulo 1 desse trabalho). Nesse caso, foi adotado um sinal de excitação chirp com faixa de 10 a 350 Hz com período de 4 s, em um total de 20 repetições e um tempo de aquisição de 80 s. Novamente, a taxa de excitação adotada é de 2 kHz e as funções de resposta em frequência são calculadas pelo estimador H_1 . Foram repetidos vários testes para diferentes condições de aperto dos parafusos do engaste até que o engaste não afetasse significativamente os resultados

Os resultados obtidos em termos das três primeiras frequências naturais são listados na Tabela 7. A variação observada nos resultados de 25 pontos de medida é causada principalmente pela massa adicional do acelerômetro sobre a placa. A variação dos valores permaneceu baixa para o intervalo de confiança de 95 %. Comparando os resultados experimentais com os previstos pela simulação numérica (Tabela 6), uma concordância notavelmente boa é encontrada, com o erros menores que 0,6 %. Finalmente, comparando

as frequências naturais obtidas com as desejadas, novamente boa concordância foi alcançada, com erros abaixo de 3,9 %.

Tabela 7 – Frequências naturais identificadas experimentalmente do modelo otimizado de 4x5 elementos.

Frequência natural	1	2	3
Valor obtido experimentalmente (Hz)	48,8	102,2	276,0
Desvio padrão	0,577	1,581	2,300
Intervalo de confiança de 95%	$49,8 \pm 1,2$	102 ± 3	276 ± 5
Previsto na análise modal (Hz)	48,7	101,6	274,3
Erro em relação ao previsto(%)	0,2	0,6	0,6
Valor desejado para a otimização (Hz)	50,8	100	278
Erro em relação ao desejado (%)	3,9	2,2	0,7

Os modos de vibrar associados às três primeiras frequências naturais da placa otimizada também são obtidos pelo método Ewins-Gleeson. Os resultados na Figura 18 mostram que os modos de vibrar não variam quando comparados aos da placa original (Fig. 3). A frequência de 49,8 Hz é associada ao primeiro modo de flexão; a de 102 Hz ao primeiro modo de torção; e a de 276 Hz ao segundo modo de flexão.

Figura 18 – Modos de vibrar experimentais da placa engastada otimizada.

Assim, o posicionamento das frequências naturais de uma placa engastada, por meio da alteração da forma (distribuição de espessura), foi alcançada com sucesso usando um modelo de 4x5 elementos finitos. Uma análise semelhante poderia ser realizada para os resultados da malha de 12x15, mas fabricar a placa com as respectivas espessuras locais se mostrou uma operação muito complexa, até mesmo para um número menor de elementos, como a configuração de 4x5. Uma solução mais rápida de manufatura é usinar uma superfície contínua na placa. Para tal, é preciso conhecer a superfície a ser usinada, o que é possível a partir dos resultados do problema de otimização usando o modelo de malha fina. O problema é que modelos de malha fina têm um grande número de variáveis de projeto, e isso pode comprometer a convergência do algoritmo como observado no caso do modelo de 48x60 elementos. Uma solução alternativa é interpolar os resultados obtidos para as malhas grossas, que são computacionalmente pouco custosas e atingem bons resultados experimentais, em uma malha fina de pontos para formar uma superfície contínua.

Capítulo 7 - Interpolação de Malha Grosseira

A interpolação dos resultados otimizados é feita por meio do comando *interp2* do software MatLab. Esse comando de interpolação é adequado para funções de duas dimensões (superfícies) e se baseia na triangulação de dados de Delaunay usando o algoritmo Quickhull (BARBER et al., 1996). É possível adotar funções de interpolação linear ou cúbica no procedimento.

Tabela 8 – Frequências naturais calculadas a partir do modelo interpolado de 48x60 elementos.

Frequência natural	1	2	3
Valor desejado para a otimização (Hz)	50,8	100,0	278,0
Interpolação linear do modelo 4x5	46,6	100,9	289,0
Erro em relação ao desejado (%)	8,3	0,9	4,0
Interpolação linear do modelo 4x5	46,8	96,5	290,3
Erro em relação ao desejado (%)	7,9	3,5	4,4
Interpolação linear do modelo 4x5	50,2	100,9	275,1
Erro em relação ao desejado (%)	1,2	0,9	1,0
Interpolação linear do modelo 4x5	50,2	100,6	275,2
Erro em relação ao desejado (%)	1,2	0,6	1,0

Interpolando os resultados obtidos para os modelos de malhas grossas (modelos de 4x5 e 12x15 elementos) é possível obter os resultados mostrados nas Figura 19 e Figura 20. Em ambos os casos (interpolação linear e cúbica), é considerada a espessura na posição central de cada elemento na placa. Os resultados são interpolados em uma malha fina de 48x60 elementos. Como se pode notar nas Figura 19 (a) e Figura 19 (b), há uma clara diferença entre as interpolações linear e cúbica no caso da malha de 4x5 elementos. Em contrapartida, nenhuma diferença notável é percebida no caso da malha de 12x15 elementos (Figura 19 (c) e Figura 19 (d)), o que se reflete nas respectivas curvas de nível traçadas (Figura 20).

A distribuição de espessuras mais contínua encontrada pela interpolação dos resultados de otimização de malha grossa é usada para calcular as frequências naturais da placa (agora em um modelo de 48x60 elementos). Os resultados são apresentados na Tabela 8.

Figura 19 – Superfícies interpoladas dos resultados obtidos dos modelos de malhas grossas em uma malha de 48x60 elementos.

Bons resultados são obtidos a partir da interpolação das espessuras otimizadas da malha de 12x15. Embora os resultados da interpolação da malha de 4x5 sejam aceitáveis, parece que a malha de 4x5 não possui informação suficiente (valores de espessura na placa) para levar um modelo de 48x60 elementos a uma solução do problema de otimização. A diferença entre as interpolações linear e cúbica é muito sutil no caso da malha de 12x15. Esse é outra indicação de que o número de variáveis de projeto (elementos de espessuras próprias) atua de forma importante ao tentar encontrar uma solução para o problema de otimização em modelos de malhas mais finas.

(a) 4x5 linear.

(b) 4x5 cúbica.

(c) 12x15 linear.

(d) 12x15 cúbica.

Figura 20 – Curvas de nível das superfícies interpoladas.

Consequentemente, uma malha de 4x5 parece ser muito grosseira para alcançar bons resultados a partir da interpolação, e a malha de 12x15 elementos é mais adequada. Apesar do aumento no número de variáveis de projeto, a malha de 12x15 elementos ainda é suficientemente grossa para apresentar baixo custo computacional e convergir no processo de otimização.

Capítulo 8 - Conclusões

A aplicação do procedimento de otimização para ajustar as frequências naturais de uma placa metálica com espessura variável resultou nas seguintes conclusões:

- é possível alcançar resultados positivos a partir da otimização da espessura de placas utilizando um software comercial de elementos finitos. O erro entre os valores de frequências naturais desejada e experimental permaneceram abaixo de 3,9 %.
- a interpolação dos resultados de uma malha grossa da análise de elementos finitos levou a solução aproximada do problema de otimização para o modelo de malha fina. Nesse caso, melhores resultados foram obtidos com o modelo de malha de 12x15 elementos em comparação aos obtidos com o modelo de malha de 4x5 elementos. Apesar de aumentar o número de variáveis de projeto, a malha de 12x15 ainda é grossa o suficiente para ter baixo custo computacional e alcançar convergência no processo de otimização.
- a interpolação cúbica leva a resultados sutilmente melhores do que os obtidos com a interpolação linear. Entretanto, no caso da malha de 12x15 elementos, tal diferença pode ser desconsiderada, e ambos os algoritmos de interpolação levam a bons resultados.

É importante salientar que uma boa correlação de modelo é crucial para se obter resultado de sucesso, especialmente no procedimento de otimização de forma. Tal correlação é fortemente afetada pelas condições de contorno da placa, o que no caso em questão (engastada-livre-livre-livre) foi simples o suficiente para ser bem representada e atualizada no modelo.

A contribuição principal deste trabalho é mostrar que uma interpolação (linear ou cúbica) dos resultados de uma otimização de forma de malha grossa leva à solução do problema de otimização de malha fina.

8.1. Trabalhos futuros

Durante a elaboração deste trabalho, várias possibilidades foram levantadas, porém não realizadas, pois ampliariam muito o escopo da pesquisa ocasionando em perda de objetividade. Para efeito de sugestão, segue algumas das abordagens propostas para trabalhos futuros.

Primeiramente, é proposto analisar experimentalmente os resultados obtidos a partir da interpolação do modelo otimizado de malha grosseira. Para tal, devido a sua superfície complexa, será preciso fazer uso de uma máquina de comando numérico. Após a fabricação, a identificação da placa e a correlação com os resultados numéricos previstos pode ser realizada.

Em segundo, é proposto avaliar diversas formas de variar a rigidez da placa. No presente trabalho, esse aumento ficou vinculado à variação de espessura da mesma, porém outras abordagens podem ser utilizadas. Algumas das maneiras de se enrijecer uma placa incluem a execução de vincos (que não implicam em acréscimo de massa), nervuras e os *embossed patterns* (padrões de bossas). A mudança de parâmetro leva também a um novo estudo de como efetuar a otimização para as características dinâmicas desejadas.

A terceira e última possibilidade aqui elencada propõe investigar a aplicação da metodologia empregada no presente trabalho em problemas que apresentem interação de fluidos com a estrutura, entrando no campo da vibroacústica.

Referências Bibliográficas¹

AFONSO, S. M. B.; HINTON, E. **Free vibration analysis and shape optimization of variable thickness plates and shells – I. Finite element studies.** Computing Systems in Engineering 6, 1995a. 27-45.

AFONSO, S. M. B.; HINTON, E. **Free vibration analysis and shape optimization of variable thickness plates and shells – II. Sensitivity analysis and shape optimization.** Computing Systems in Engineering 6, 1995b. 47-66.

AFONSO, S. M. B.; SIENZ, J.; BELBLIDIA, F. **Structural optimization strategies for simple and integrally stiffened plates and shells.** Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software 22 n.4, 2005. 429-452.

AKIN, J. E. **Finite Element Analysis with Error Estimators: An Introduction to the FEM and Adaptive Error Analysis for Engineering Students.** Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005. 465 p.

AKIYAMA, K.; KURODA, M. **Fundamental frequencies of rectangular plates with linearly varying thickness.** Journal of Sound and Vibration 205, 1997. 380-384.

ALLEMANG, R. J. **The modal assurance criterion – Twenty years of use and abuse.** Sound and Vibration 8, 2003. 14-21.

AVITABILE, P. **Experimental Modal Analysis: A Simple Non-Mathematical Presentation.** N. Lowell, Massachusetts. University of Massachusetts, 2001.

BARBER, C.B.; DOBKIN, D.P.; HUHDANPAA, H.T. **The Quickhull algorithm for convex hulls.** ACM Transactions on Mathematical Software 22, 1996. 469-483.

BARGH, H. G.; SADR, M. H. **Optimal design by elitist-genetic algorithm for maximum fundamental frequency of fiber metal laminated plates.** Key Engineering Materials 471-472, 2011. 331-336.

BEARDS, C. F. **Engineering Vibration Analysis with Application to Control Systems.** Amesbury, Wilts: J W Arrowsmith, 1995. 437 p. ISBN 0 340 63183 X.

BELBLIDIA, F. et al. **Integrated design optimization of stiffened plate structures.** Eng. Comput. 16 (8), 1999. 934-951.

¹ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

BELBLIDIA, F. et al., **Topology optimization of plate structures using a single- or three-layered artificial material model**. Adv. Eng. Software 32 (2), 2001. 159–168.

BENDSØE, M. P. **Some smear-out models for integrally stiffened plates with applications to optimal design**. In: Proc. Int. Symp. on Optimum Structural Design, University of Arizona, Tucson, Arizona, 1982. p.13±34.

BENDSØE, M. P; Kikuchi, N. **Generating optimal topologies in structural design using homogenization method**. Comput Meth Appl Mech Engng, 1988.

BHAT, R. B. et al. **Numerical experiments on the determination of natural frequencies of transverse vibrations of rectangular plates of non-uniform thickness**. Journal of Sound and Vibration 138, 1990. 205-219.

CHENG, H. C.; KIKUCHI, N.; MA, Z. D. **Generalized shape/topology designs of plates/shell structures for eigenvalue optimization problems**. Proceedings of the 1994 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Chicago, 1994. 483-491.

CHOU, F. S.; WANG, C. M. **Optimization of linear segmented circular Mindlin plates for maximum fundamental frequency**. Structural Optimization 11, 1996. 128-133.

CIVALEK, Ä. O. **Fundamental frequency of isotropic and orthotropic rectangular plates with linearly varying thickness by discrete singular convolution method**. Applied Mathematical Modelling 33, 2009. 3825-3835.

DAMAREN, C. J. **Hydrodynamic shape optimization of thin floating plates**. Ocean Engineering 34, 2007. 2231-2239.

DIANCONU, C. G.; SATO, M.; SEKINE, H. **Layup optimization of symmetrically laminated thick plates for fundamental frequencies using lamination parameters**. Structural and Multidisciplinary Optimization 24, 2002. 302-311.

ERCOLI, L. et al. **Fundamental frequency of vibration of rectangular plates of discontinuously varying thickness with a free edge: analytical and experimental results**. Journal of Sound and Vibration 141, 1990. 221-229.

FOX, R. L.; KAPOOR, M. P. **Structural optimization in the dynamic regime: a computational approach**. AIAA J. 8, 1970. 1798- 1804.

GUTIERREZ, R. H.; ROSSI, R. E. LAURA, P. A. A. **Determination of the fundamental frequency of transverse vibration of rectangular plates when the thickness varies in a discontinuous fashion**. Ocean Engineering 22, 1995. 663-668.

HINTON, E.; ÖZAKÇA, M.; RAO N. V. R. **Free vibration analysis and shape optimization of variable thickness plates, prismatic folded plates and curved shells, Part 1: finite strip formulation.** Journal of Sound and Vibration 181, 1995a. 553-556.

HINTON, E.; ÖZAKÇA, M.; RAO, N. V. R. **Free vibration analysis and shape optimization of variable thickness plates, prismatic folded plates and curved shells, Part 2: shape optimization.** Journal of Sound and Vibration 181, 1995b. 567-581.

IRIE, T.; YAMADA, G.; IKARI, H. **Natural frequencies of stepped thickness rectangular plates.** International Journal of Mechanical Sciences 22, 1980. 767-777.

JAREK, A.; SILVA, R. R. **Elementos Finitos Enriquecidos para Flambagem e Vibração de Placas.** Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2007. 120p.

KARAKAYA, S.; SOYKASAP, Ä. O. **Natural frequency and buckling optimization of laminated hybrid composite plates using genetic algorithm and simulated annealing.** Structural and Multidisciplinary Optimization 43, 2011. 61-72.

KUTTLES, J. R.; SIGILLITO, V. G. **Vibrational frequencies of clamped plates of variable thickness.** Journal of Sound and Vibration 86, 1983. 181-189.

LAI, E.; ANANTHASURESH, G. K. **On the design of bars and beams for desired mode shapes.** Journal of Sound and Vibration 354, 2002. 393-406.

LIU, G. R.; QUEK, S. S. **The Finite Element Method: A Pratical Course.** Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2003. 361 p. ISBN 0 7506 5866 5.

MACKERLE, J. **Topology and shape optimization of structures using FEM and BEM. A bibliography (1999–2001).** Finite Elements in Analysis and Design 39, 2003. 243-253.

MAIA, N. M. M.; SILVA, J. M. M. **Theoretical and experimental modal analysis.** Taunton: Research Studies Press Ltd., 1997.

MESKE, R.; LAUBER, B.; SCHNACK, E. **A new optimality criteria method for shape optimization of natural frequency problems.** Struct Multidisc Optim, 2006. 295–310.

MIN, S. et al. **Optimal topology design of structures under dynamic loads.** Struct. Optim. 17, 1999. 208–218.

MIN, S. et al. **Unified topology design of static and vibrating structures using multiobjective optimization.** Comput. Struct. 75 (1), 2000. 93–116.

MOAVENI, S. **Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS**. Minnesota State University, Mankato. Upper Saddle River, New Jersey 07458: Prentice Hall, 1999. 272 p.

OLHOFF, N. et al. **Sliding regimes and anisotropy in optimal design of vibrating axisymmetric plates**. Int JSolids Struct, 1981.

ÖZAKÇA, M.; HINTON, E. **Free vibration analysis and optimization of axisymmetric plates and shells – II. Shape optimization**. Computer and Structures 52, 1994. 1199-1211.

PEDERSEN, N. L; PEDERSEN, P. **Shape, position and orientational design of holes for plates with optimized eigenfrequencies**. Materials Science Forum 440-441, 2003. 321-328.

RAO, S. S. **Mechanical Vibrations**. e.2. Addison Wesley Longman Publishing Co, 1990. 516 p. ISBN-13: 978-0201501575.

RICHARDSON, M. H.; FORMENTI, D. L. **Parameter estimation from frequency response measurements using rational fraction polynomials**. 1st IMAC Conference, Orlando, FL, 1982. 15 p.

ROCKLIN, G.T; CROWLEY, J.; VOLD, H. A **Comparison of H1, H2, and HV Frequency Response Functions**. 3rd International Modal Analysis Conference, 1985.

SANDOR, B. I. et al. **Mechanical Engineering Handbook: Mechanics of Solids**. Ed. Frank Kreith. Boca Raton: CRC Press LLC, 1999. 2466 p.

SCHWARZ, B. J.; RICHARDSON, M. H. **Experimental Modal Analysis**. Vibrant Technology, Inc. Jamestown, California 95327, 1999. 12 p.

SILVA, S. **Vibrações mecânicas: Notas de Aulas**. v.2. Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Engenharias e Ciências Exatas, 2010.

SOTO, C.; DÌAZ, A. **On modeling of ribbed plates for shape optimization**. Structural Optimization, 1993.

SUZUKI, K.; KIKUCHI, N. **A homogenization method for shape and topology optimization**. Comput Meth Appl Mech Engng, 1991.

TOPAL, U. **Frequency optimization of laminated general quadrilateral and trapezoidal thin plates**. Materials and Design 30, 2009. 3643-3652.

WANG, X.; OGUAMANAM, D. C. D.; HANSEN, J. S. **Shape optimization of stiffers in stiffened composite plates with thermal residual stresses**. Strutural and Multidisciplinary Optimization 30, 2005. 38-42.

ZHAO, C.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. **Evolutionary natural frequency optimization of thin plate bending vibration problems**. Structural Optimization 11, 1996. 244-251.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method. Volume 2: Solid Mechanics**. e.5. Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2000. 477 p. ISBN 0 7506 5055 9.

Apêndice A – Resultados das otimizações

(a) Frequências naturais: 30 / 136 / 278 Hz

(b) Frequências naturais: 70 / 136 / 278 Hz

(c) Frequências naturais: 50,8 / 100 / 278 Hz

(d) Frequências naturais: 50,8 / 170 / 278 Hz

(e) Frequências naturais: 50,8 / 136 / 200 Hz

(f) Frequências naturais: 50,8 / 136 / 348 Hz

Figura A.1 – Resultados das otimizações para a malha de 4x5 elementos.