TIAGO FRANCISCO GOMES DA COSTA

Estudo numérico de uma asa com controle ativo de flutter por realimentação da pressão medida num ponto.

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Engenharia Aeronáutica
Orientador: Prof. Tit. Eduardo Morgado Belo

São Carlos
2007

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

C837e Costa, Tiago Francisco Gomes da
Estudo numérico de uma asa com controle ativo de
flutter por realimentação da pressão medida num ponto /
Tiago Francisco Gomes da Costa ; orientador Eduardo
Morgado Belo. -- São Carlos, 2007.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica e Área de Concentração em Aeronaves -
- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de
São Paulo.

1. Engenharia aeronáutica. 2. *Flutter*.
3. Aeroelasticidade. 4. Aeroservoelasticidade.
5. Supressão de *flutter*. 6. Aerodinâmica não-
estacionária. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **TIAGO FRANCISCO GOMES DA COSTA**

Dissertação defendida e julgada em 06/07/2007 perante a Comissão Julgadora:

Prof. Titular **EDUARDO MORGADO BELO (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **CARLOS DE MARQUI JUNIOR**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **PAULO AFONSO DE OLIVEIRA SOVIERO**
(Instituto Tecnológico de Aeronáutica/ITA)

Aprovado

Prof. Associado **JONAS DE CARVALHO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Mecânica

Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**
Presidente da Comissão da Pós-Graduação da EESC

Aos meus pais, Fatima e Odelcio, que me educaram na vida.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Eduardo Morgado Belo, meu orientador, que esteve comigo me conduzindo pelo meio científico desde 2001.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro durante este trabalho de mestrado.

Ao meu irmão Luis, pela amizade e parceria por toda a vida, que ajudaram a formar meu caráter e personalidade, aqui refletidos. Também pelas horas dedicadas a me ajudar vigiando o andamento de algumas simulações.

À Regina, companheira de todas as horas, por ter compartilhado momentos bons e ruins, e que muito me incentivou e deu forças na fase mais expressiva do mestrado.

À Equipe EESC-USP de AeroDesign e seus membros, que além de grandes amigos, me proporcionaram trabalho em equipe e muitas horas de discussões e projetos que indiretamente influenciaram o desenvolvimento do raciocínio lógico, criativo e científico.

Aos meus colegas do Laboratório de Aeroelasticidade, Dinâmica de Vôo e Controle (LADinC), pelas horas que passamos juntos, e discussões científicas que vieram a contribuir para este trabalho.

Aos meus amigos Edelson, João, Rafael, César, Northon, Andrei, Bruno, Guilherme e Ronaldo, amigos desde o ensino médio e meus amigos de república, Paulo, Jamim, Victor, Fábio, Leandro, Ricardo e Pedro, por me acompanharem e torcerem por mim em meu desenvolvimento acadêmico.

A todos os professores do laboratório, responsáveis por esta grande instituição de ensino que é a Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, e em especial, Fernando M. Catalano, Flávio D. Marques, e Carlos De Marqui Jr., que estiveram mais próximos deste trabalho, e que de certa forma contribuíram com discussões construtivas e sugestões técnicas.

ÍNDICE

RESUMO	IX
ABSTRACT	X
LISTA DE FIGURAS	XI
LISTA DE TABELAS	XV
LISTA DE SÍMBOLOS	XVI
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Revisão Bibliográfica e Justificativa do Trabalho	1
1.1.1 O <i>flutter</i> e sua história	1
1.1.2 Dinâmica estrutural	5
1.1.3 Aerodinâmica não-estacionária	7
1.1.4 Aeroelasticidade e aeroservoelasticidade	10
1.1.5 Sistema de controle ativo	14
1.2 Objetivo do trabalho	16
2 MATERIAIS E MÉTODOS	17
2.1 Fundamentos	17
2.2 Estrutura do trabalho	18
3 EQUACIONAMENTO DINÂMICO DO PROBLEMA	20
4 A ASA SIMULADA	24

4.1	Geometria e Estrutura	24
4.2	Análise Modal – Elementos Finitos	26
5	AERODINÂMICA NÃO-ESTACIONÁRIA	33
5.1	Aerodinâmica bidimensional	33
5.1.1	Escoamentos elementares	33
5.1.2	Aerofólios finos	35
5.1.3	Coefficientes e propriedades do perfil	38
5.2	Aerodinâmica tri-dimensional não estacionária	41
5.2.1	Do conceito inicial ao método usado	41
5.2.2	A lei de Biot-Savart	43
5.2.3	O método da malha de vórtices na superfície sustentadora	45
5.2.4	O método da malha de vórtices na esteira	47
5.2.5	Solução do sistema aerodinâmico	48
5.3	Carregamento aerodinâmico	52
6	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DINÂMICA	55
6.1	Acoplamento Entre Aerodinâmica e Estrutura	55
6.1.1	Motivo do acoplamento	55
6.1.2	Interpolação por Splines de Superfície	57
6.2	Método Preditor-Corretor	61
7	SISTEMA DE CONTROLE	65
7.1	Introdução	65
7.2	Sistema de controle para o caso com dois graus de liberdade	66
7.3	Sistema de controle para o caso da asa finita flexível	75

7.3.1	Introdução	75
7.3.2	Modelagem da superfície de comando	75
7.3.3	Sistema completo para solução do <i>flutter</i> com controle ativo	78
8	RESULTADOS	82
8.1	Resultados preliminares	82
8.1.1	Refinamento da malha da asa	82
8.1.2	Tamanho da esteira	87
8.1.3	Tipo de esteira	91
8.1.4	Influência do <i>camber</i>	95
8.1.5	Velocidade de <i>flutter</i>	98
8.2	Análises do sistema de controle	102
8.2.1	Controle da seção típica	102
8.2.2	Controle da asa finita flexível	105
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	115
9.1	Conclusões	115
9.2	Sugestão para trabalhos futuros	116
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	118

RESUMO

COSTA, T. F. G. (2007). **Estudo numérico de uma asa com controle ativo de flutter por realimentação da pressão medida num ponto.** 122p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.

Neste trabalho é desenvolvido um sistema de controle ativo para supressão de *flutter* de uma asa utilizando-se sensores de pressão em pontos estratégicos de sua superfície. O *flutter* é um fenômeno aeroelástico que caracteriza um acoplamento instável entre estrutura flexível e escoamento aerodinâmico não estacionário. Quando a modificação da estrutura ou da aerodinâmica da asa não é viável, o uso de sistemas de controle passa a ser uma boa opção. Para o desenvolvimento do sistema de controle proposto, é primeiramente desenvolvido um modelo numérico de asa flexível. Com esse modelo numérico e a pressão na superfície da asa medida em certos pontos e realimentada ao sistema controlador, são determinadas correções no ângulo de uma superfície de controle no bordo de fuga. A tentativa de se utilizar um sistema de controle bem simples, com o uso de um único sensor de pressão, mostra a viabilidade de se implementar um sistema deste tipo em aeronaves reais. Esse sistema pode tornar-se uma alternativa aos desenvolvidos até então com o uso de acelerômetros, além de ser útil em sistemas onde se procura prever o estol e observar o comportamento da distribuição de pressão sobre a asa em voo.

Palavras-chave: *flutter*, aeroelasticidade, aeroservoelasticidade, supressão de *flutter*, aerodinâmica não-estacionária.

ABSTRACT

COSTA, T. F. G. (2007). **Numeric study of a wing with flutter active control by feedback of the pressure measured in one point.** 122p. Dissertation (M. Sc.) – Engineering School of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2007.

In this work, a wing *flutter* suppression active control system using pressure sensors in strategic points is developed. *Flutter* is an aeroelastic phenomenon characterized by an unstable coupling of a flexible structure and a non-stationary aerodynamic flow. When changes of the wing structure or of the aerodynamics are not viable, the use of automatic control systems becomes a good option. For the developing of the suggested control system, a numeric model of a finite flexible wing is firstly done. With this model and the pressure over the wing surface read in certain points and feedback to the control system, changes of the control surface angle on the trailing edge are determined. The attempt to use a simple control system, with a unique pressure sensor shows the viability of implanting this kind of system in real aircrafts. This system may become an alternative to those developed until now, using accelerometers. Yet, it could be useful, in systems where it is necessary to predict stall and observe the pressure load behavior over the wing in flight.

Keywords: *flutter*, aeroelasticity, aeroservoelasticity, *flutter* suppression, non-stationary aerodynamics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Diagrama proposto por Collar (1946 apud BISPLINGHOFF et al., 1996, p.2) simplificado. _____	3
Figura 4.1 – Perfil Selig S1223 (NASG, 2006). _____	24
Figura 4.2 – Dimensões da asa. _____	25
Figura 4.3 – Detalhamento da estrutura. _____	25
Figura 4.4 – Aplicação dos materiais. _____	27
Figura 4.5 – 17,07 Hz – 1ºModo (1º modo de flexão vertical). _____	28
Figura 4.6 – 40,86 Hz – 2ºModo (1º modo de flexão frontal). _____	28
Figura 4.7 – 41,93 Hz – 3ºModo (2º modo de flexão vertical). _____	28
Figura 4.8 – 69,67 Hz – 4ºModo (1º modo de torção). _____	29
Figura 4.9 – 11,256 Hz – 1ºModo (1º modo de flexão vertical). _____	30
Figura 4.10 – 28,281 Hz – 2ºModo (1º modo de flexão frontal). _____	30
Figura 4.11 – 53,650 Hz – 3ºModo (2º modo de flexão vertical acoplado com leve torção). _____	31
Figura 4.12 – 71,973 Hz – 4ºModo (1º modo de torção). _____	31
Figura 4.13 – 125,24 Hz – 5ºModo (3º modo de flexão vertical acoplado com leve torção). _____	31
Figura 4.14 – 155,99 Hz – 6ºModo (2º modo de flexão frontal acoplado com torção). _____	31
Figura 4.15 – 205,11 Hz – 7ºModo (2º modo de torção). _____	32
Figura 4.16 – 211,18 Hz – 8ºModo (4º modo de flexão vertical acoplado com leve torção). _____	32
Figura 4.17 – 295,88 Hz – 9ºModo (3º modo de torção acoplado com leve flexão vertical). _____	32
Figura 4.18 – 316,07 Hz – 10ºModo (4º modo de torção). _____	32
Figura 5.1 – Simplificação da linha de <i>camber</i> . _____	36
Figura 5.2 - Discretização de vórtices representando o perfil _____	37
Figura 5.3 - Linha de <i>camber</i> com 8 painéis para $\alpha = 5^\circ$, $C_L = 1,5094$ e $C_M = -0.29$ _____	38
Figura 5.4 – Parâmetros geométricos usados na determinação de $\dot{\alpha}$ _____	40
Figura 5.5 - Vórtice em ferradura. _____	42
Figura 5.6 - O funcionamento da asa finita. _____	42

Figura 5.7 - Teoria das faixas. As espessuras dos vórtices representam sua intensidade. _____	43
Figura 5.8 - Método da malha de vórtices. _____	43
Figura 5.9 - Lei de Biot-Savart (ANDERSON, 1991). _____	44
Figura 5.10 - Simplificação da lei de Biot-Savart para segmentos retos de vórtice (KATZ; PLOTKIN, 1991). _____	44
Figura 5.11 - Posicionamento dos painéis, anéis de vórtices e pontos de controle ao longo da asa. _____	46
Figura 5.12 - Velocidades num painel de vórtices. _____	49
Figura 5.13 - Condição de Kutta _____	51
Figura 5.14 - Cilindro girando - teorema de Kutta-Joukowski (ANDERSON, 1991). _____	52
Figura 5.15 - Sustentação de um painel _____	53
Figura 6.1 – Diagrama do método preditor-corretor na forma PECLE _____	62
Figura 7.1 - Modelo de <i>flutter</i> com dois graus de liberdade. _____	66
Figura 7.2 - Diagrama de blocos para o sistema. _____	72
Figura 7.3 - Diagrama de blocos para o modelo completo. _____	75
Figura 7.4 - Deflexão do comando. _____	75
Figura 7.5 – Proximidades entre segmentos causando divergência entre os anéis da esteira. _____	76
Figura 7.6 - Vão entre partes móvel do comando e fixa do bordo de fuga da asa. A esteira deveria apresentar este comportamento. _____	77
Figura 7.7 - Junção entre comando e asa corrigida. Os painéis corrigidos estão marcados em verde _____	77
Figura 7.8 – Diagrama de blocos representativo do algoritmo usado na simulação de resposta aeroelástica de um sistema malha fechada. _____	79
Figura 8.1 – Comparação do comportamento do 1º modo de flexão para uma variação no refinamento da malha ao longo da envergadura. _____	84
Figura 8.2 – Comparação do comportamento do 1º modo de torção para uma variação no refinamento da malha ao longo da envergadura. _____	84
Figura 8.3 – Comparação do comportamento do 1º modo de flexão para uma variação no refinamento da malha ao longo da corda. _____	85
Figura 8.4 – Comparação do comportamento do 1º modo de torção para uma variação no refinamento da malha ao longo da corda. _____	85
Figura 8.5 – Variação do tempo computacional da simulação com o refinamento da malha na corda. _____	86
Figura 8.6 – Comparação do comportamento do 1º modo de flexão para uma variação no refinamento da malha ao longo da envergadura para malha já refinada na corda. _____	86

Figura 8.7 – Comparação do comportamento do 1º modo de torção para uma variação no refinamento da malha ao longo da envergadura para malha já refinada na corda. _____	87
Figura 8.8 – Comportamento do decaimento exponencial do 1º modo de flexão para variação no comprimento de corte da esteira. _____	89
Figura 8.9 – Erro no decaimento exponencial do 1º modo de flexão para variação no comprimento de corte da esteira. _____	89
Figura 8.10 – Variação do tempo computacional da simulação para variação no comprimento de corte da esteira. _____	90
Figura 8.11 – Comparação do primeiro modo de flexão para os casos de esteira completa e esteira de 4 metros. _____	90
Figura 8.12 – Comparação do primeiro modo de torção para os casos de esteira completa e esteira de 4 metros. _____	91
Figura 8.13 – Esteira plana no instante da iteração 1809 (forma um plano em regime permanente e um histórico das posições do bordo de fuga em regime não estacionário). _____	93
Figura 8.14 – Esteira 3D no instante da iteração 109 (A esteira ainda não atingiu o comprimento de corte de 4,0 m, e por isso ainda exibe o vórtice inicial) _____	93
Figura 8.15 – Esteira 3D no instante da iteração 546 (A esteira ainda não atingiu o comprimento de corte de 4,0 m, e por isso ainda exibe o vórtice inicial). _____	93
Figura 8.16 – Comportamento do 1º modo de flexão para os casos de esteira plana e 3D. _____	94
Figura 8.17 – Comportamento do 1º modo de torção para os casos de esteira plana e 3D. _____	94
Figura 8.18 – Comportamento a 20 m/s do 1º modo de flexão para os casos de perfil placa plana e com <i>camber</i> , e resultado do modelo de Benini (2002). _____	96
Figura 8.19 – Comportamento a 20 m/s do 1º modo de torção para os casos de perfil placa plana e com <i>camber</i> , e resultado do modelo de Benini (2002). _____	96
Figura 8.20 – Comportamento a 75 m/s do 1º modo de flexão para os casos de perfil placa plana e com <i>camber</i> , e resultado do modelo de Benini (2002). _____	97
Figura 8.21 – Comportamento a 75 m/s do 1º modo de torção para os casos de perfil placa plana e com <i>camber</i> , e resultado do modelo de Benini (2002). _____	97
Figura 8.22 – Comportamento do 1º modo de flexão para velocidades até 60 m/s. _____	99
Figura 8.23 – Comportamento do 1º modo de flexão para velocidades entre 60 m/s e 75 m/s. _____	100
Figura 8.24 – Comportamento do 1º modo de flexão para velocidades entre 75 m/s e 85 m/s. _____	100
Figura 8.25 – Comportamento do 1º modo de torção para velocidades até 60 m/s. _____	101
Figura 8.26 – Comportamento do 1º modo de torção para velocidades entre 60 m/s e 75 m/s. _____	101
Figura 8.27 – Comportamento do 1º modo de torção para velocidades entre 75 m/s e 85 m/s. _____	102
Figura 8.28 – Variação do fator de amortecimento do modelo da seção típica não controlada em relação à velocidade. _____	104

Figura 8.29 - Variação do fator de amortecimento do modelo da seção típica controlada em relação ao ganho da realimentação (velocidade de 75m/s).	104
Figura 8.30 – Posição dos sensores. Os sensores foram posicionados um por vez nos painéis destacados.	105
Figura 8.31 – Relação entre o pico da resposta na frequência do 1º modo de flexão para diversos ganhos e painéis onde o sensor foi posicionado. O pico de referência é o de ganho zero (aí a relação é unitária).	107
Figura 8.32 – Relação entre o pico da resposta na frequência do 1º modo de torção para diversos ganhos e painéis onde o sensor foi posicionado. O pico de referência é o de ganho zero (aí a relação é unitária).	107
Figura 8.33 – Ângulo da superfície de comando para o caso do sensor no painel 13 e ganho de 0,067.	108
Figura 8.34 – Resposta do sistema no domínio da frequência para o 1º modo de flexão para sensor no painel 13.	109
Figura 8.35 – Resposta do sistema no domínio da frequência para o 1º modo de torção para sensor no painel 13.	109
Figura 8.36 – Resposta do sistema no domínio da frequência para o 1º modo de flexão para sensor no painel 39.	110
Figura 8.37 – Resposta do sistema no domínio da frequência para o 1º modo de torção para sensor no painel 39.	110
Figura 8.38 – 1º modo de flexão ao longo do tempo para sensor no painel 13 e velocidade de 75 m/s.	111
Figura 8.39 – 1º modo de torção ao longo do tempo para sensor no painel 13 e velocidade de 75 m/s.	112
Figura 8.40 – Flecha na ponta da asa para sensor no painel 13 e velocidade de 75 m/s.	112
Figura 8.41 – Torção na ponta da asa para sensor no painel 13 e velocidade de 75 m/s.	113
Figura 8.42 – 1º modo de flexão ao longo do tempo para sensor no painel 13 e velocidade de 75 m/s a 85 m/s.	114
Figura 8.43 – 1º modo de torção ao longo do tempo para sensor no painel 13 e velocidade de 75 m/s a 85 m/s.	114

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 – Classificação dos problemas aeroelásticos (DE MARQUI JR., 2004).	3
Tabela 1.2 – Linha temporal das áreas estudadas (DUGUNDJI, 2003).	4
Tabela 1.3 – Ordem cronológica do surgimento dos métodos. (YATES JR, 1985)	9
Tabela 1.4 – Evolução cronológica dos sistemas de controle (FRANKLIN et al., 2006)	14
Tabela 4.1 – Propriedades dos materiais da asa (EQUIPE EESC-USP DE AERODESIGN, 2002).	26
Tabela 4.2 – Propriedades dos materiais laminados no modelo de elementos finitos.	26
Tabela 4.3 – Resultados.	29
Tabela 4.4 – Modos naturais encontrados para a asa engastada na raiz. Os modos marcados com “OK” foram usados nas simulações aeroelásticas. Os modos com movimentos quase exclusivos no plano da asa e os modos com frequência muito elevada foram descartados.	30
Tabela 6.1 – Valores aplicáveis às equações (6.33) e (6.34).	63
Tabela 8.1 – Condições das simulações para determinação do refinamento da malha da asa.	82
Tabela 8.2 – Condições das simulações para determinação da influência do tamanho da esteira.	87
Tabela 8.3 – Condições das simulações para determinação da influência do tipo de esteira.	92
Tabela 8.4 – Condições das simulações para determinação da influência do <i>camber</i>	95
Tabela 8.5 – Condições das simulações para determinação da velocidade de <i>flutter</i>	98
Tabela 8.6 – Condições das simulações de controle.	105

LISTA DE SÍMBOLOS

A	coeficiente da equação fundamental da interpolação (item 6.1), matriz dinâmica do sistema no espaço de estados (capítulo 7)
a_0, a_1, a_2	coeficientes da equação de interpolação
A_c, B_c, C_c, D_c, E_c	coeficientes da equação do passo corretor de integração numérica
A_p, B_p, C_p, D_p, E_p	coeficientes da equação do passo preditor de integração numérica
B	coeficiente da equação fundamental da interpolação (item 6.1), matriz de controle do sistema no espaço de estados (capítulo 7)
$\vec{b}$	vetor que representa a envergadura de um painel
C	matriz de saída do sistema do espaço de estados
$[C]$	matriz de amortecimento
C_{damp}	coeficiente de amortecimento artificial
C_L	coeficiente de sustentação
C_{L_α}	coeficiente de sustentação com relação ao ângulo de ataque
$C_{L_{\dot{\alpha}}}$	coeficiente de sustentação com relação à taxa de variação no tempo do ângulo de ataque
C_{L_δ}	coeficiente de sustentação com relação ao ângulo da superfície de comando
C_M	coeficiente de momento de arfagem
C_{M_α}	coeficiente de momento de arfagem com relação ao ângulo de ataque
$C_{M_{\dot{\alpha}}}$	coeficiente de momento de arfagem com relação à taxa de variação no tempo do ângulo de ataque
C_{M_δ}	coeficiente de momento de arfagem com relação ao ângulo da superfície de comando
D	rigidez de placa plana
d_1	posição de referência onde termina a primeira senóide que define o <i>camber</i> do perfil fino e começa a segunda senóide

d_2	posição de referência onde termina a segunda senóide que define o <i>camber</i> do perfil fino e começa a terceira senóide
D_i	Arrasto induzido
$d\vec{l}$	trecho infinitesimal de um segmento de vórtice
$d\vec{V}$	Valor infinitesimal da velocidade induzida num ponto pela lei de Biot-Savart
E	matriz de termos constantes do sistema do espaço de estados
$\hat{e}$	vetor unitário perpendicular ao plano que contém $\vec{r}$ e o segmento de vórtice
f	vetor com as funções que descrevem o comportamento dinâmico do sistema
F	coeficiente da equação de interpolação simplificada
$\{F\}$	vetor de forças externas (genérico)
$\{F_a\}$	vetor de forças externas (nas coordenadas da malha aerodinâmica)
$\{F_e\}$	vetor de forças externas (nas coordenadas da malha estrutural)
G	constante elástica de mola de torção
$[G]$	matriz de transformação de coordenadas entre as malhas estrutural e aerodinâmica
h	menor distância entre o segmento de vórtice e o ponto onde se calcula a velocidade induzida
H	matriz de termos constantes na equação de saída do sistema do espaço de estados
h_1	tamanho do <i>camber</i> na posição d_1
h_2	tamanho do <i>camber</i> na posição d_2
i	índice de contagem na direção x , índice de contagem geral para os painéis
I	momento de inércia da seção típica / Matriz identidade
IT	número da iteração
j	índice de contagem na direção y
K	constante elástica de mola
$[K]$	matriz de rigidez estrutural

K_g	ganho de realimentação no sistema de controle
L	sustentação
$\vec{L}$	sustentação
$\vec{L}_1$	parte estacionária da sustentação
$\vec{L}_2$	parte não-estacionária da sustentação
L_{2D}	sustentação no caso bidimensional
L_{3D}	sustentação no caso de asas finitas
m	massa da seção típica
M	momento de arfagem
$[M]$	matriz de massa
n	número de pontos no método de interpolação
$\vec{N}$	direção normal a um painel
n_a	número de anéis na asa
n_c	número de painéis ao longo da corda
n_e	número de anéis na esteira
N_{IT}	número total de iterações de uma simulação
n_m	número de modos
n_{pe}	número de nós da malha estrutural
$\vec{N}_{pla}$	direção normal ao plano da asa
p	pressão estática do ar
$\{P\}$	vetor de forças genéricas
$P_{i,j}$	ponto de menor índice do anel de índices i, j

q	pressão dinâmica multiplicada pela área de referência
Q	polinômio característico de uma matriz
r	distância entre dois pontos no método de interpolação
$\vec{r}$	vetor que liga o ponto onde a velocidade induzida é calculada ao segmento de vórtice
$\vec{r}_1$	vetor que liga o início do segmento reto de vórtice ao ponto onde se calcula a velocidade induzida
$\vec{r}_2$	vetor que liga o fim do segmento reto de vórtice ao ponto onde se calcula a velocidade induzida
r_c	vetor de comando externo na superfície de controle
$\vec{R}_{pto\ controle}$	vetor que liga o centro de rotação do perfil a um ponto de controle
S	área de referência para o cálculo de forças aerodinâmicas.
S_{pn}	área do painel
t	tempo
$\vec{V}$	vetor função da velocidade do escoamento em qualquer ponto (item 5.1), velocidade induzida por um segmento reto de vórtice (item 5.2.2)
$\vec{V}_\infty$	velocidade do fluxo livre
$\vec{V}_{a_i j}$	velocidade induzida por cada anel j no ponto de controle i
$V_{ar_{rot}}$	velocidade do ar devido à rotação do painel
$\vec{V}_{e_{ik}}$	velocidade induzida pelo anel de vórtice k da esteira no ponto de controle i
$V_{efetivo}$	velocidade do fluxo corrigida da influência da ponta de asa
$\vec{V}_i$	velocidade total induzida no ponto de controle do painel i
$\vec{V}_{ij}$	somatória das velocidades induzidas no ponto de controle i pelos quatro segmentos de vórtice que formam o anel j para uma intensidade unitária do anel
$\vec{V}_N$	velocidade do fluxo na direção normal a um painel
$V_{painel_{rot}}$	velocidade tangencial de rotação de um painel

$\vec{V}_{pc_i}$	velocidade de deslocamento do pondo de controle i
V_{total}	velocidade no ar num dado ponto da esteira
W	coeficiente da equação de integração numérica
$\{w\}$	vetor de deslocamentos genéricos
$\vec{W}_{j,t}$	indica a posição dos pontos da esteira segundo as coordenadas ao longo da envergadura e ao longo do tempo
x	posição ao longo da corda; direção no espaço do eixo longitudinal apontando para trás da aeronave
X	vetor com as variáveis que são integradas numericamente
x	vetor de estados
$\dot{x}$	derivada do vetor de estados
$\{x\}$	vetor de posição dos nós da malha estrutural
$\{\dot{x}\}$	vetor de velocidade dos nós da malha estrutural
$\{\ddot{x}\}$	Vetor de aceleração dos nós da malha estrutural
x_0	valor de referência na direção x
x_1, x_2, x_3, x_4	variáveis de estado no equacionamento da seção típica
$\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4$	derivadas no tempo das variáveis de estado no equacionamento da seção típica
X_1	parte do vetor X correspondente aos deslocamentos modais
X_2	parte do vetor X correspondente às velocidades modais
x_c	distância entre o centro de gravidade da seção típica e o ponto de aplicação das forças aerodinâmicas (positivo quando o C.G. está à frente)
X_c	vetor X calculado no passo corretor
x_d	posição x da dobradiça da superfície de comando
x_e	distância entre o centro de gravidade da seção típica e o ponto de aplicação das forças elásticas (positivo quando o C.G. está à frente)

x_p	posição x de um certo ponto pertencente à superfície de comando
X_p	vetor X calculado no passo preditor
y	posição ao longo da envergadura; direção no espaço do eixo lateral apontando para a asa direita da aeronave
Y	valor de pressão num dado painel
$\dot{Y}$	taxa de variação no tempo da pressão num dado painel
Y_a	pressão num dado painel com relação ao ângulo de ataque
$Y_{\dot{a}}$	pressão num dado painel com relação à taxa de variação no tempo do ângulo de ataque
y_0	valor de referência na direção y
z	posição vertical; direção no espaço do eixo vertical apontando para cima
$\{\bar{z}_a\}$	deslocamentos dos nós da malha aerodinâmica
$\{\bar{z}_e\}$	deslocamentos dos nós da malha estrutural
z_{p_1}, z_{p_2}	posição vertical de um certo ponto pertencente à superfície de comando antes e depois da deflexão da superfície
α	ângulo de ataque
$\dot{\alpha}$	taxa de variação no tempo do ângulo de ataque
$\alpha_{efetivo}$	ângulo de ataque corrigido da influência da ponta de asa
β_1	ângulo entre o segmento de vórtice e o vetor $\vec{r}_1$
β_2	ângulo entre o segmento de vórtice e o vetor $\vec{r}_2$
δ	ângulo da superfície de comando
Δt	intervalo de tempo correspondente a uma iteração
$\{\phi\}$	vetor modal
$[\Phi]$	matriz modal

$[\hat{\Phi}]$	matriz modal normalizada
ϕ_1	amplitude no modo de flexão da seção típica
ϕ_2	amplitude no modo de torção da seção típica
$[\Phi_a]$	matriz modal escrita nas coordenadas dos nós da malha aerodinâmica
$[\Phi_a]_{pc}$	matriz modal escrita para os pontos de controle dos anéis
$[\Phi_a]_{vt}$	matriz modal escrita para os vértices dos anéis
$[\Phi_e]$	matriz modal escrita nas coordenadas dos nós da malha estrutural
φ	função potencial de velocidades
γ	relação entre a semi-envergadura e a envergadura da superfície de comando
Γ	intensidade de uma linha de vórtice por unidade de comprimento
$\{\eta\}$	vetor de deslocamentos modais
$\{\dot{\eta}\}$	vetor de velocidades modais
$\{\ddot{\eta}\}$	vetor de acelerações modais
κ	coeficiente do sistema para determinação da equação de interpolação simplificada
λ	autovalor de uma matriz
θ	ângulo de atitude (arfagem)
ρ	densidade do ar
ω	frequência natural
$\bar{\Omega}$	velocidade angular de rotação do perfil
$[\omega^2]$	matriz com os quadrados das frequências naturais na diagonal
ω_1	frequência natural do modo de flexão da seção típica
ω_2	frequência natural do modo de torção da seção típica

1.1 Revisão Bibliográfica e Justificativa do Trabalho

1.1.1 O *flutter* e sua história

Os fenômenos causados pela interação entre escoamentos de fluido, no caso o ar, e corpos flexíveis são chamados de aeroelásticos. A aeroelasticidade é a área do conhecimento humano que estuda esses fenômenos. Fenômenos aeroelásticos vêm acontecendo em aeronaves desde o seu surgimento, e com isso, acabou influenciando seu desenvolvimento ao longo dos anos (GARRICK; REED, 1981).

O estudo da aeroelasticidade já é comum no ramo aeronáutico da engenharia, mas é importante notar que ele é muito mais abrangente, já que deve ser levado em consideração em muitos outros projetos, como por exemplo, de pontes delgadas e de grande extensão a serem construídas em locais onde possam ocorrer ventos fortes como foi o caso da ponte de Tacoma colapsada em 7 de novembro de 1940 pela ocorrência de *stall flutter* (FUNG, 1993). Moinhos de vento, que possuem as pás muito compridas e flexíveis também merecem atenção, aproximando-se mais do caso aeronáutico. A engenharia civil costuma estudar, como os esforços aerodinâmicos atuam em edificações. Alguns grandes arranha-céus costumam ser equipados com sistemas de balanceamento de massa e amortecedores para que seu movimento devido à influência do vento seja amenizado, para não prejudicar o conforto das

pessoas que habitam o lugar (tem-se como exemplo o edifício Taipei 101, com 509 metros de altura, que possui um contrapeso de cerca de 800 toneladas para corrigir, entre outros, problemas de vento forte, como descrito no *website* da construtora; EMPORIS, 2006). Segundo Ricciardelli et al. (2000), o primeiro edifício com amortecedor de massa foi o John Hancock Tower, em Boston, finalizado em 1975. No Canadá, e em outras regiões muito frias e que ventam muito, foram registrados casos de cabos de alta tensão em linhas de transmissão de energia elétrica em que houve a formação e deposição de gelo sobre o cabo, e após atingir certa massa e forma, o cabo oscila excitado pelo vento até colapsar (fenômeno conhecido como *Galloping*). Existem estudos e artigos publicados sobre esse fenômeno, como é o caso de Loredou-Souza & Davenport (1998). Dowell et al. (1978) apresenta abordagens matemáticas para a aeroelasticidade na engenharia civil. Sistemas de balanceamento de massa e/ou controles ativos por meio de atuadores acabaram sendo usados em alguns casos de pontes, edificações e controle de *galloping* (PREIDIKMAN, 1998). Contudo, é intuitivo que o maior objeto de estudos da aeroelasticidade sejam as aeronaves.

Desde os primórdios do vôo, os fenômenos aeroelásticos vêm sendo observados nas aeronaves, cujas estruturas necessitavam ser muito leves, devido aos motores de pouca potência da época e, portanto flexíveis. Mas foi durante a Segunda Guerra Mundial, com o aumento da velocidade das aeronaves, que os fenômenos aeroelásticos começaram a se tornar perigosos. Posteriormente, como o aparecimento de jatos, com asas enflechadas e de alto alongamento, cuidadosos estudos do ponto de vista matemático (analítico e numérico), computacional e experimental nessa área foram realizados durante o desenvolvimento e testes dos protótipos (DUGUNDJI, 2003).

Kunz (2005) apresenta uma revisão sobre *flutter* em hélices girando, fenômeno que começou a ganhar importância em aeronaves a hélice de grande desempenho depois dos acidentes com duas aeronaves Lockheed L-188C Electra no fim da década de 60. Com a

evolução dos helicópteros, novos estudos aeroelásticos foram iniciados, tratando de aeronaves de asas rotativas, tanto em vôo pairado como em vôo normal. Friedmann (1999) apresenta uma revisão da história da aeroelasticidade, dando ênfase às aeronaves de asas rotativas. Esse tipo de aeronave apresenta um agravante aos problemas aeroelásticos, por possuírem movimentos oscilatórios forçados no ângulo de incidência da asa, que podem excitar o *flutter*.

No início dos estudos nessa área, Collar (1946 apud BISPLINGHOFF et al., 1996, p.2) propôs uma forma de resumir algumas áreas de estudo aeronáuticas de acordo com o diagrama da Figura 1.1. Os fenômenos aeroelásticos normalmente aparecem descritos como interações entre diversas forças, permitindo então classificar os diversos tipos de problema de acordo com a Tabela 1.1.

Figura 1.1 – Diagrama proposto por Collar (1946 apud BISPLINGHOFF et al., 1996, p.2) simplificado.

Tabela 1.1 – Classificação dos problemas aeroelásticos (DE MARQUI JR., 2004).

	Estático	Dinâmico
Estabilidade	Divergência	<i>Flutter</i> <i>Stall Flutter</i>
Resposta	Distribuição de carregamento Efetividade de controle Reverso de controle	Resposta a rajadas Resposta a comandos <i>Buffeting</i>

A classificação como estático representa casos que não têm dependência do tempo. Os problemas de resposta são aqueles cujo estudo relaciona exclusivamente uma saída (variável lida) e uma entrada (variável imposta). Os problemas de estabilidade envolvem fenômenos auto-excitados.

Todos os casos citados na Tabela 1.1 são analisados durante o desenvolvimento de uma aeronave. Diversos requisitos são impostos por normas (como as FAR americanas ou RBHA brasileiras, por exemplo) para que as aeronaves sejam homologadas para voar. Ao mesmo tempo, os consumidores (empresas de transporte aéreo de passageiros e cargas, e demais compradores particulares) exigem que, ao longo do tempo, as aeronaves voem cada vez mais rápido e com menos consumo de combustível. Todo fabricante de aeronaves deve cumprir as imposições da norma e do mercado, tornando necessários estudos cada vez mais aprofundados nas áreas relacionadas à aeroelasticidade.

Dugundji (2003) apresenta uma linha temporal com as décadas do surgimento de diversas áreas de estudo relacionadas à aeroelasticidade, como mostrado na Tabela 1.2.

Tabela 1.2 – Linha temporal das áreas estudadas (DUGUNDJI, 2003).

1950	- Computação digital - Efeitos de aquecimento na aerodinâmica - Avanços no estudo do mecanismo do <i>flutter</i> - <i>Flutter</i> de placas planas
1960	- Método dos elementos finitos para estruturas - <i>Flutter</i> de hélices em rotação - Método de painéis para carregamentos aerodinâmicos
1970	- Representação completa da aeronave por elementos estruturais e painéis aerodinâmicos - CFD - Representação no espaço de estados para sistemas de controle - Não-linearidades estruturais
1980	- Técnicas de coleta de dados digitais - Introdução dos compósitos - <i>Flutter</i> nas pás de compressores <i>fan</i> - Atuadores piezelétricos e controle ativo
1990	- Não linearidades e ciclos-limites

O *flutter*, no meio aeronáutico, é o fenômeno aeroelástico mais estudado. O motivo de tanta preocupação com tal problema é a dificuldade de prevê-lo e evitá-lo. O *flutter* pode ser descrito como um acoplamento instável entre as forças de inércia, elásticas e aerodinâmicas. Partindo-se de uma asa sujeita a um escoamento de ar, a aeroelasticidade estática é capaz de definir o equilíbrio do sistema, encontrando o carregamento da estrutura deformada e a

deformação. No caso do *flutter*, sendo dada uma perturbação (como uma pequena rajada, por exemplo), haverá uma modificação no carregamento aerodinâmico sobre a asa. Esse carregamento aerodinâmico deforma a estrutura. O movimento da estrutura está sujeito a forças elásticas e inerciais (dinâmica estrutural) que influenciam esse movimento. A nova posição da estrutura, bem como seu movimento alteram o carregamento (aerodinâmica não-estacionária – sistema fora do regime permanente) reiniciando um ciclo. A ocorrência das forças inerciais, elásticas e aerodinâmicas acontece fora de fase, e com a variação da velocidade do escoamento, as fases de cada força variam, de forma que o sistema pode se tornar auto-excitado. Retirando energia do escoamento, a estrutura da asa pode oscilar com amplitude crescente até uma possível ruptura por fadiga (normalmente estudado no regime elástico linear) ou amplitude limite da oscilação (em que devem ser consideradas as não linearidades estruturais). Uma descrição mais técnica do *flutter*, inclusive do ponto de vista matemático, pode ser encontrada na literatura clássica (BISPLINGHOFF et al, 1996; BISPLINGHOFF; ASHLEY, 2002; DOWELL et al., 1978; FUNG, 1993).

Por se tratar de uma área multidisciplinar, e o presente trabalho ser modularizado nas áreas de dinâmica estrutural, aerodinâmica e sistemas de controle, será feita a seguir uma breve revisão da bibliografia relacionada a essas áreas.

1.1.2 Dinâmica estrutural

O modelo estrutural mais simples, usado por Theodorsen (1935), representava a asa por uma única seção, em que o movimento de flexão está associado com o deslocamento vertical e a torção com o movimento de rotação da seção. Estruturalmente esse modelo possui as duas direções acopladas devido à diferença de posição entre o eixo elástico e o centro de gravidade. Esse modelo é extremamente simples, e não representa bem a dinâmica de uma asa completa, entretanto, do ponto de vista didático, é extremamente elucidativo.

Com o surgimento e desenvolvimento do método dos elementos finitos (FEM – *Finite Element Method*) (CRAIG JR., 1981; SMITH, 1988; ZIENKIEWICZ, 2000), diversas estruturas muito mais complexas puderam ser simuladas via computador. As possibilidades se multiplicaram, pois o futuro dependeria de aperfeiçoar as propriedades dos elementos usados. O método conta com elementos para discretização de vigas, cascas e volumes (Uma revisão histórica sobre os elementos de viga e de superfície lineares de baixa ordem pode ser encontrada em PITKÄRANTA, 2003). Elementos mais complexos aceitam propriedades de materiais ortotrópicos e variações das propriedades com a temperatura. Para o caso das análises modais, o FEM é muito sensível à matriz de massa. Sendo assim, diversas maneiras de se discretizar a massa da estrutura foram propostas. Basicamente pode-se distribuir a massa do elemento ao longo de sua extensão, concentrá-la nos nós ou as duas opções ao mesmo tempo. Esse tipo de aproximação influencia diretamente as frequências naturais do modelo. Kim (1993) apresenta uma revisão sobre a discretização da massa no FEM.

Existem alguns métodos que foram desenvolvidos mais especificamente para problemas que envolvem tempo ou frequência. Barboni et al. (1993) propõe um método onde se conhece a matriz de transferência que inter-relaciona as variáveis de estado de uma estrutura composta num único elemento. Qualquer estrutura, quando discretizada por este tipo de elemento, pode ser simulada quanto a problemas térmico, aeroelásticos e de estabilidade. Este modelo recebeu o nome de PTFE (*Parameter-Transfer Finite Element*). Pitarresi e Manolis (1991) descrevem um método discreto, que pode ser considerado uma extensão do FEM, de forma que além da discretização espacial da estrutura, o tempo também é discretizado. Este método foi batizado de TFEM (*Temporal Finite Element Method*).

As modelagens contínuas são úteis para desenvolver ainda mais o conhecimento fundamental sobre as estruturas. Banerjee (1999) mostra o equacionamento contínuo de uma estrutura em viga com acoplamento estrutural entre os modos de torção e flexão, concluindo

que sua solução exige menos tempo computacional que o método dos elementos finitos. Contudo, modelos matemáticos contínuos não conseguiram se difundir, por varrerem uma pequena gama de possibilidades estruturais. A simplicidade do método dos elementos finitos permite que, em casos onde haja grande esforço computacional, elementos de viga (os mais simples) ainda sejam usados (PREIDIKMAN; MOOK, 2000). Modelos de viga são usados, também, em alguns casos onde outros fatores complicam a modelagem, como em análises multicorpos, no trabalho de Du et al. (1993) ou otimizações, como em Butler e Banerjee (1996). Os modelos de viga vêm sendo muito aperfeiçoados com relação às teorias de grandes deformações. (JEON et al., 1998).

Os elementos finitos superficiais e volumétricos são mais utilizados onde se deseja uma representação mais fiel da geometria da estrutura. Esses modelos se tornam complexos para a utilização conjunta com outros métodos. Contudo, ao realizar simulações puramente estruturais, ou análises modais, onde nenhum fator além da estrutura e da massa é levado em consideração, esse tipo de representação normalmente é mais utilizada. A estrutura simulada neste trabalho se encaixa neste caso, recebendo uma discretização bastante fiel da geometria e das propriedades estruturais. Os softwares comerciais de CAE (*Computer Aided Engineering*), que fazem as simulações pelo método dos elementos finitos, normalmente possuem bibliotecas bastante completas com diversos elementos. Eles podem variar em número de nós por elemento e o número de graus de liberdade por nó e até mesmo as funções que descrevem suas propriedades (funções que relacionam as deformações dos elementos com relação a certos tipos de esforços aplicados).

1.1.3 Aerodinâmica não-estacionária

O nome escoamento não-estacionário é usado para representar os casos em que as condições de contorno (superfícies) mudam de posição ao longo do tempo ou os casos onde as condições de contorno são estacionárias, e o escoamento é não estacionário devido a

turbulências, ou outros efeitos quaisquer (YATES JR, 1985). Ou ainda as duas coisas ao mesmo tempo. Neste trabalho, o escoamento é considerado não estacionário devido ao movimento das condições de contorno.

Mabey (1999) apresenta uma revisão sobre aerodinâmica não estacionária, classificando basicamente os casos como de aerodinâmica do escoamento colado e do escoamento separado. Os fluxos colados são normalmente relacionados às análises de *flutter*, características dinâmicas e manobrabilidade da aeronave e resposta a rajadas. O escoamento separado normalmente é usado em análises de *buffeting* e ciclos limites.

Os modelos aerodinâmicos podem ainda ser classificados como subsônicos, supersônicos e transônicos. Os dois primeiros podem ser representados, com certa precisão através de equacionamentos lineares, enquanto que o último é bem mais complexo (MABEY, 1999), necessitando normalmente da solução de escoamentos viscosos e compressíveis.

Modelos subsônicos, como deste trabalho, ainda são bastante utilizados devido a uma forte tendência no desenvolvimento de cargueiros avançados subsônicos (MABEY, 1999) e UAVs (*unhabited aerial vehicles* / veículos aéreos não tripulados) com missões HALE (*high-altitude long-endurance* / altitudes elevadas e grande autonomia) (PATIL et al., 2000), onde são usadas asas de grande alongamento, e portanto grandes chances de ocorrência de *flutter*.

O primeiro modelo aerodinâmico não-estacionário de grande importância usado para cálculos aeroelásticos foi desenvolvido por Theodorsen (1935) para uma seção típica da asa. O modelo é potencial, bidimensional, baseado na teoria de sustentação de uma placa plana e constitui uma solução harmônica do carregamento. Algumas variantes do modelo de Theodorsen (1935) podem ser encontradas em Bisplinghoff et al. (1996), como é o caso de correções para compressibilidade. Esse modelo bidimensional ganhou, mais tarde, uma concepção tridimensional, conhecida como teoria das faixas, onde cada faixa da asa é

representada por uma seção típica, descrita pelo equacionamento bidimensional, como o de Theodorsen (1935), por exemplo.

Para a representação de asas finitas, métodos mais complexos para solução do carregamento não estacionário foram desenvolvidos. É o caso do método da malha de vórtices (*vortex-lattice*), que é formulado sobre a teoria de potencial de velocidades e os modelos de malha de dipolos (*double-lattice*), que é baseado no potencial de acelerações (YATES JR, 1985).

Tabela 1.3 – Ordem cronológica do surgimento dos métodos. (YATES JR, 1985)

1º	Seção típica bi-dimensional incompressível
2º	Teoria das faixas
3º	Teoria de superfície de sustentação subsônica - Malha de vórtices - Malha de dipolos
4º	Método dos painéis subsônico/supersônico

Os métodos de malhas de vórtices e dipolos são comparados em Giesing (1985). A malha de dipolos é baseada numa teoria de pulso acústico, e é mais usada na solução de escoamentos no domínio da frequência. O modelo em malha de vórtices permite a solução do carregamento aerodinâmico no domínio do tempo, e portanto facilita a implementação de sistema de controle ativo (usado neste trabalho). Soviero e Bortulus (1992) apresentam um método de malha de vórtices que leva em conta a compressibilidade, com base na equação de onda para superfícies sustentadoras oscilando harmonicamente. Eles comparam os resultados obtidos pelo método com os obtidos pelo método da malha de dipolos. Contudo, essa modelagem, da forma como foi proposta, só é válida no domínio da frequência.

A teoria fundamental que serve de base para o método da malha de vórtices pode ser encontrada em Anderson (1991). Essa é uma bibliografia didática que mostra os primeiros passos da aerodinâmica potencial. Mais detalhes sobre o equacionamento do método pode ser encontrado em Katz e Plotkin (2001) e Moran (1984).

Os modelos aeroelásticos vêm se tornando a cada dia mais complexos, tanto do ponto de vista estrutural quanto aerodinâmico. Os casos iniciais estudados eram bi-dimensionais lineares, que deram lugar às asas finitas, e atualmente já são simuladas aeronaves completas incluindo algumas não linearidades (como é o caso em Patil et al. (2000)). Com o intuito de simplificar os modelos aerodinâmicos, Dowell (1996) utilizou-se do mesmo conceito da dinâmica estrutural, fazendo uma redução da ordem do modelo através de um reconhecimento de modos aerodinâmicos. A partir daí o estado aerodinâmico do modelo num dado instante de tempo pode ser escrito como uma função de apenas alguns modos.

Para os casos onde se deseja mais precisão que as aproximações linearizadas e métodos potenciais, ou casos em que os métodos mais simples não se aplicam, pode-se recorrer à solução completa das equações de Navier-Stokes (equações que regem os movimentos dos fluidos). A dedução dessas equações pode ser encontrada na literatura clássica, como Anderson (1991, 1995) e Moran (1984). Para solucionar essas equações, alguns métodos de integração numérica são usados, como é o caso das diferenças finitas. Esse método tem um custo computacional elevado por necessitar de uma malha muito refinada e intervalos de tempo muito curtos para garantir a convergência (ANDERSON, 1995). Com o progresso da tecnologia dos computadores os métodos de solução das equações de Navier-Stokes ganharam mais espaço nas pesquisas, e receberam o nome de CFD (*Computational Fluid Dynamics*). O método das diferenças finitas apresenta outro grande inconveniente que é a dificuldade na geração das malhas de fluidos. O método de volumes finitos é bem mais versátil na geração de malhas (ANDERSON, 1995), e por isso é usado na grande maioria de softwares de CFD comerciais.

1.1.4 Aeroelasticidade e aeroservoelasticidade

Com o passar do tempo, a tecnologia aeronáutica tem experimentado o surgimento de diversos materiais, tentando sempre melhorar as relações de resistência/peso. Atualmente, os

compósitos, como fibras de vidro, carbono, aramida e outros, estão sendo cada vez mais usados em partes de maior risco. Na aviação experimental, já existem aeronaves construídas quase na totalidade em compósitos. Eckstrom e Spain (1982) apresentam um estudo sobre a influência da espessura, orientação das fibras e temperatura em asas fabricadas com cascas de material composto, mas conclui que são necessários mais estudos nessa área.

Todo esse desenvolvimento dos materiais tem levado a aeronaves mais leves, e estruturas mais delgadas (BISPLINGHOFF; ASHLEY, 2002). Estruturas delgadas normalmente são mais flexíveis que as espessas, e mesmo suportando as cargas estáticas, ou de regime estacionário, podem estar sujeitas a cargas dinâmicas, que oferecem perigo e acabam se tornando mais um limite de desempenho da aeronave.

O estudo do *flutter* é de extrema importância para que se possa prever e impedir seu acontecimento. Quando se torna inviável corrigir este problema modificando a estrutura ou a aerodinâmica de um corpo, uma possível saída é a aplicação de um sistema de controle que atue sobre o sistema. A modificação da estrutura ou da aerodinâmica do sistema é normalmente chamada de contramedida “passiva”, enquanto que o uso de sistemas automáticos de controle é chamado de contramedida “ativa”. Garrick e Reed (1981) fazem as primeiras propostas de técnicas passivas com balanceamento de massa. Em meados da década de 60, segundo Cole et al. (2003), começou a crescer a expectativa de que em breve os sistemas de controle ativo estariam em uso.

Estudos de resposta aeroelástica mostraram que uma asa oscilando no fluxo possui certo fator de amortecimento aerodinâmico. Partindo de velocidade zero, com o aumento da velocidade o amortecimento aerodinâmico aumenta até certo valor, e depois cai chegando a zero o que define a velocidade crítica de *flutter*. Assim, acima da velocidade crítica o fenômeno é instável, aumentando a amplitude de oscilação (BISPLINGHOFF; ASHLEY, 2002).

O estudo deste fenômeno se dividiu em duas frentes. A primeira trabalha no domínio da frequência, onde o equacionamento, normalmente elaborado com um sentido físico, é escrito no domínio do tempo e passado ao domínio da frequência com o uso da variável de Laplace. O tratamento do *flutter* no domínio da frequência teve início com a formulação de Theodorsen (1935), para a seção típica. O *flutter* no domínio da frequência permite encontrar a velocidade crítica de *flutter* com relativa precisão, o que permite que se corrija com agilidade passivamente o modelo construtivo da aeronave possibilitando um aumento na velocidade crítica, e conseqüentemente no envelope de vôo. Existem ainda métodos híbridos, que se utilizam dos dois domínios, como é o caso do método usado por Silva (1994). O *flutter*, quando estudado no domínio do tempo, resulta na resposta aeroelástica da estrutura, ou seja, resultados de deformação e carregamento aerodinâmico ao longo do tempo. Esse tipo de análise possibilita o projeto de sistema de controle ativo para supressão de *flutter* e a inclusão de certas não linearidades no sistema. Strganac (1990) apresenta um trabalho investigativo sobre o comportamento aeroelástico no domínio do tempo utilizando-se do método de malha de vórtices não estacionária e do método de integração numérica da equação de movimento (o mesmo escolhido para este trabalho)

A solução do *flutter* no tempo deveria ser obtida simultaneamente para estrutura e aerodinâmica (PREIDIKMAN 1998). Contudo, complicações do ponto de vista matemático e numérico dificultam tal solução. Uma medida normalmente utilizada é determinar as propriedades estruturais separadamente, e acoplá-las às propriedades aerodinâmicas em cada passo de um processo iterativo para solução da equação que rege o sistema (BENINI, 2002). Para garantir esse acoplamento, o método clássico, que foi usado neste trabalho, é o de interpolação por *splines* de superfície, desenvolvido por Harder e Desmarais (1972). Smith et al. (2000) faz comparações entre diversos métodos de interpolação entre malhas estruturais e aerodinâmicas. Sua comparação se baseia na qualidade da interpolação, desvio, erro e

suavidade da superfície interpolada. Contudo, recomenda que verificações sejam feitas a respeito da influência que os diferentes métodos exercem sobre uma simulação aeroelástica. Atualmente já existem modelos matemáticos que solucionam simultaneamente a parte estrutural e aerodinâmica (SMITH et al., 2000).

Ainda que esses modelos mais complexos possibilitem a solução da equação de movimento com as modelagens aerodinâmicas e estruturais integradas no sistema, a inclusão de um sistema de controle para supressão de *flutter* dificulta o equacionamento matemático do sistema completo.

Os casos mais abordados atualmente sobre controle ativo fazem a supressão do *flutter* com o uso de superfícies de controle no bordo de fuga (DE MARQUI JR, 2004; VIPPERMAN et al., 1998) ou uso de estruturas inteligentes, em que atuadores, normalmente piezoelétricos atuam na estrutura contra-excitando o sistema (HEEG, 1993; LI et al., 2006; MAKIHARA et al., 2006; ROCHA et al., 2005).

A interação entre dinâmica estrutural, aerodinâmica (aeroelasticidade) e sistemas de controle de voo, recebeu o nome de aeroservoelasticidade. Até meados da década de 80, os computadores tinham apenas capacidade para solucionar problemas aeroelásticos subsônicos e supersônicos. Atualmente, com o uso de CFD, já são possíveis simulações aeroelásticas em regime transônico, que envolve aerodinâmica compressível e viscosa. Ainda assim, segundo Guillot e Friedmann (2000), a complexidade dos sistemas aeroservoelásticos no domínio do tempo tem limitado as simulações a casos viscosos com a consideração de pequenas perturbações. Casos potenciais podem ser mais completos. Por essa razão, ainda hoje, diversos estudos aeroservoelásticos no domínio do tempo ainda são realizados com base em escoamentos potenciais, como é o caso deste trabalho.

1.1.5 Sistema de controle ativo

O sistema de controle para supressão de *flutter* é feito através da leitura de alguma variável relacionada à dinâmica da asa, e realimentando esse valor no sistema através de algum sistema de atuação.

As técnicas mais comuns para projetos de controladores podem ser encontradas na bibliografia clássica, como Franklin et al. (2006) e Ogata (2003).

A Tabela 1.4 mostra em ordem cronológica o desenvolvimento de diversos sistemas baseados em controle por realimentação, e permite que se faça uma imagem da explosão ocorrida no século passado na evolução dos sistemas ativos de controle. Mukhopadhyay (2003) faz uma revisão histórica sobre os acontecimentos e pesquisas envolvendo resposta aeroelástica e controle.

Tabela 1.4 – Evolução cronológica dos sistemas de controle (FRANKLIN et al., 2006)

1600s	<i>Incubator</i>
1700s	<i>Flyball governor</i>
1800s	<i>Stability analysis of governor</i> <i>Routh stability</i>
1910	<i>Autopilot</i>
1920	<i>Feedback amplifier</i>
1930	<i>Nyquist stability</i> <i>Frequency response tools</i>
1940	<i>Optimal filtering</i> <i>Sample data systems</i> <i>Root locus</i>
1950	<i>Maximum principle</i> <i>Dynamic programming</i> <i>Numerical optimization</i>
1960	<i>Apollo digital autopilot</i> <i>Aircraft stability augmentation</i> <i>LQG design</i> <i>Inertial navigation</i> <i>Microprocessor</i>
1970	<i>Feedback control of automotive engines</i> <i>Aircraft auto-landing</i>
1980	<i>Computer-aided control design</i> <i>Internal model control</i>
1990	<i>GPS</i> <i>Unmanned aircraft</i> <i>High precision disk drive control</i>
2000	<i>Automotive stability augmentation systems</i> <i>Farm tractor auto-steering via GPS</i>

Na aeroservoelasticidade, os sistemas de controle vêm sendo usados para supressão de *flutter* e diminuição do comportamento oscilatório das estruturas aeronáuticas, aumentando a segurança da aeronave e o conforto dos passageiros. A supressão do *flutter* vem com o intuito de poder-se reduzir o peso estrutural dos componentes e maximizar a eficiência e manobrabilidade da aeronave (WASZAK; SRINATHKUMAR, 1995).

Grande parte das modelagens de sistemas de controle envolvem o equacionamento do sistema no espaço de estados. A teoria básica de projeto de controladores para sistemas lineares no espaço de estados pode ser encontrada em D’Azzo e Houpis (1988) e Franklin et al. (2006).

A abordagem no espaço de estados pode garantir tanto o projeto de controladores SISO (*single-input single-output* / única entrada e única saída) como MIMO (*multiple-input multiple-output* / múltiplas entradas e múltiplas saídas).

Sistemas de controle MIMO, permitem realimentar sinais de vários sensores, em mais de um sistema, como ailerons, *spoilers* e atuadores piezoelétricos integrados à estrutura. Esse tipo de sistema é extremamente complexo, mas já existem trabalhos com abordagens MIMO, como por exemplo nos trabalhos de Andrighettoni e Mantegazza (1998) e Waszak (2001).

Diversos trabalhos podem ser encontrados com modelagens não lineares, controles adaptativos, redes neurais e outros. Tudo é feito na tentativa de controlar os problemas aeroelásticos em casos subsônicos, transônicos e supersônicos com mais eficiência (BLOCK; STRGANAC, 1998; GUILLOT; FRIEDMANN, 2000; SCOTT; PADO, 2000; XING; SINGH, 2000).

Contudo, Waszak e Srinathkumar (1995) apresentam um trabalho experimental com uma metodologia bem mais simples, e conclui que leis de controle muito simples e sistemas SISO já são capazes de suprimir o *flutter* de maneira bastante eficiente. Um algoritmo

iterativo bastante simples para solucionar o caso da resposta no tempo de um sistema com supressão de *flutter* pode ser visto em Luton e Mook (1993).

1.2 Objetivo do trabalho

Perante a revisão bibliográfica apresentada e com o intuito de contribuir com o tema aerosservoelasticidade, este trabalho objetiva investigar o comportamento aeroelástico de uma asa flexível, bem como a alteração desse comportamento perante a variação de alguns parâmetros usando simulação numérica. A partir do modelo aeroelástico bem conhecido, pretende-se aplicar um sistema de controle onde o ângulo do comando de aileron recebe uma realimentação proporcional à pressão do ar em um determinado ponto da asa. A escolha da melhor localização da tomada de pressão e a determinação do melhor ganho possível do controlador podem ser vistos como objetivos secundários. O objetivo principal do trabalho é verificar a viabilidade desse procedimento, e abrir portas para estudos mais avançados com controladores mais complexos e eficientes.

2.1 Fundamentos

A proposta deste trabalho é dar continuidade ao trabalho de mestrado desenvolvido por Benini (2002), onde é feita uma análise aeroelástica de uma asa cuja dinâmica estrutural já foi estudada experimentalmente. Basicamente foram feitas algumas modificações com relação ao seu trabalho, sendo elas:

- verificação da influência do comprimento da esteira no resultado aeroelástico;
- verificação da influência do tipo de esteira (deformada ou plana) na solução dinâmica da asa oscilando;
- uso da teoria de perfis finos, para utilizar uma linha de *camber* que represente o perfil da asa;
- verificação da influência do refinamento da malha da asa nos resultados aeroelásticos;
- implementação de uma superfície de controle num certo trecho do bordo de fuga da asa, como é o caso de um aileron, que receberá um sinal realimentado de sensores sobre a asa com a intenção de suprimir o fenômeno do *flutter*.

Benini (2002) comparou os resultados do método que implementou com as soluções clássicas da literatura, como o da solução de Wagner para carregamento não estacionário, e da

solução de Theodorsen para uma seção típica oscilando (ambas obtidas de BISPLINGHOFF et al., 1996). Por essas comparações considerou-se o método satisfatório do ponto de vista dinâmico. Do ponto de vista numérico, Benini (2002) fez uma análise do comportamento da solução quando sujeita a uma entrada inicial degrau na velocidade do fluxo e para entradas degrau no ângulo de ataque da asa. Fez também a análise da influência do tamanho do intervalo de tempo de cada iteração. Dadas suas conclusões, seu exemplo será seguido, ou seja, serão usados intervalos de tempo compatíveis com os seus, e a perturbação será a entrada degrau da velocidade do fluxo no instante inicial (caso mais simples de ser implementado).

Para desenvolver toda a parte computacional fez-se uso da linguagem FORTRAN90 para as simulações aeroelásticas e obtenção da linha de *camber*, e MatLAB® para o método de interpolação por *splines* de superfícies e cálculo do melhor ganho do controlador (para um caso bidimensional comparativo). O Simulink® foi usado na verificação do ganho do controlador projetado segundo o equacionamento para uma seção típica. As propriedades de dinâmica estrutural (modos e frequências naturais) foram obtidas de software comercial de elementos finitos MSC NASTRAN/PATRAN®.

2.2 Estrutura do trabalho

Este trabalho está organizado por assuntos. Basicamente o que se faz é apresentar a parte do problema que envolve dinâmica estrutural (capítulo 3), e logo em seguida apresenta-se a asa estudada (capítulo 4). Mais adiante se trata da parte aerodinâmica (capítulo 5), tanto do ponto de vista bidimensional (obtenção da linha de *camber*, nos sub-itens 5.1.2 e 5.1.3) como tridimensional (solução do carregamento numa asa finita, no item 5.2).

Estas duas áreas são a base do método, mas trabalham totalmente separadas e de maneiras distintas. Assim, faz-se uma apresentação dos métodos usados para acoplar as duas áreas e finalmente resolver o problema dinâmico (capítulo 6).

Até este ponto o problema é apenas aeroelástico. Faz-se então uma discussão sobre o problema do ponto de vista de sistemas de controle até chegar a uma conclusão de como será feito o controlador, bem como de que forma esse controle será incluído no modelo computacional aeroelástico (capítulo 7).

O capítulo 8 vem, por fim, apresentar os resultados das simulações para os diversos casos, mostrando os testes com tipos de esteira, uso de *camber* na asa e a capacidade do sistema de controle. No capítulo 9 são mostradas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Equacionamento Dinâmico do Problema

A equação matricial que rege uma estrutura linear em movimento oscilatório livre, não excitado e não amortecido, é dada por Craig Jr. (1981) como a seguir:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = 0 \quad (3.1)$$

Onde: $[M]$ é a matriz de massa, $[K]$ a matriz de rigidez, $\{x\}$ o vetor das posições de cada ponto da estrutura e $\{\ddot{x}\}$ o das suas acelerações. $[M]$ e $[K]$ são matrizes quadradas de ordem n_{pe} .

Uma asa exposta a um escoamento aerodinâmico teria essa equação modificada, pelo aparecimento de um amortecimento aerodinâmico e forças de excitação.

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{F(t, x(t))\} \quad (3.2)$$

O aparecimento desse amortecimento aerodinâmico pode ser visto na Figura 8.22 mais adiante que mostra que com o aumento da velocidade do escoamento o amortecimento do sistema aumenta, desde que a velocidade ainda esteja longe da velocidade de *Flutter*.

Contudo, esse amortecimento que aparece na equação (3.2) é devido às forças aerodinâmicas aplicadas, de forma que ele pode ser englobado nas forças do lado direito, como na equação (3.3). Essas forças passam então a ser função também das velocidades dos pontos do modelo.

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{F(t, x(t), \dot{x}(t))\} \quad (3.3)$$

Por fim, a solução dessa equação apresenta duas grandes dificuldades: conhecer o vetor $\{F\}$ de forças externas e manipular os pontos que determinam a estrutura do modelo (número muito grande de pontos, o que aumenta muito a ordem do sistema).

O inconveniente da ordem do sistema pode ser facilmente corrigido assumindo que a posição dos pontos da estrutura é sempre função linear dos modos naturais. Essa manipulação da equação dinâmica em função dos pontos físicos para reescrevê-la em função dos modos naturais também é conhecida em muitos casos como desacoplamento do sistema, já que os modos naturais de qualquer estrutura são sempre linearmente independentes entre si.

Essa simplificação também foi utilizada por Benini (2002).

A demonstração dessa transformação é mostrada a seguir. Partindo-se da equação (3.3), e supondo-se que a solução do sistema seja uma oscilação harmônica de caráter senoidal, a solução seria dada por:

$$\{x(t)\} = \{\phi\} e^{i\omega t} \quad (3.4)$$

Onde $\{\phi\}$ é chamado vetor modal, por mostrar a geometria do modo, e ω é a frequência natural em rad/s.

Substituindo a solução proposta na equação (3.3) fica:

$$-[M]\{\phi\}\omega^2 e^{i\omega t} + [K]\{\phi\}e^{i\omega t} = 0 \quad (3.5)$$

$$([K] - \omega^2 [M])\{\phi\}e^{i\omega t} = 0 \quad (3.6)$$

$$([K] - \omega^2 [M])\{\phi\} = 0 \quad (3.7)$$

Como $e^{i\omega t}$ nunca será nulo, a equação (3.6) se resumirá na (3.7) a um problema de autovalor, cuja solução não trivial do sistema é encontrada quando:

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (3.8)$$

A solução dessa equação são as frequências naturais da estrutura. A cada frequência natural está associada um auto-vetor correspondente.

Fica claro que o número de modos e frequências naturais do sistema é o mesmo de graus de liberdade. Contudo, sabe-se que apenas os primeiros modos, aqueles de frequência mais baixa é que são importantes para descrever o movimento oscilatório do *flutter*. Pode-se reduzir então a ordem do sistema para algo entre 2 e 5. Pode-se assumir que 2 é o número mínimo, sendo um modo de flexão e um de torção (modos característicos do *flutter*). Existem ainda modos acoplados, como flexo-torção, que podem ser incluídos.

Agrupando os vetores modais em colunas formando uma matriz, tem-se a matriz modal $[\Phi]$, de n_{pe} linhas (número de pontos da estrutura) e n_m colunas (número de modos).

Fazendo a normalização da matriz modal utilizando-se a matriz de massa, pode-se fazer a transformação do sistema de acordo com as seguintes relações:

$$[\hat{\Phi}] = [\Phi][M]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

$$\{x(t)\} = [\hat{\Phi}] \{\eta(t)\} \quad (3.10)$$

$$\{\dot{x}(t)\} = [\hat{\Phi}] \{\dot{\eta}(t)\} \quad (3.11)$$

$$\{\ddot{x}(t)\} = [\hat{\Phi}] \{\ddot{\eta}(t)\} \quad (3.12)$$

Substituindo as equações (3.10), (3.11) e (3.12) na equação (3.3) fica:

$$[M][\hat{\Phi}]\{\ddot{\eta}(t)\} + [K][\hat{\Phi}]\{\eta(t)\} = \{F(t, x(t), \dot{x}(t))\} \quad (3.13)$$

Multiplicando à esquerda pela transposta de $[\hat{\Phi}]$ tem-se

$$[\hat{\Phi}]^T [M][\hat{\Phi}]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\hat{\Phi}]^T [K][\hat{\Phi}]\{\eta(t)\} = [\hat{\Phi}]^T \{F(t, x(t), \dot{x}(t))\} \quad (3.14)$$

Pela equação (3.9) a equação (3.14) se reduz a

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [\omega^2]\{\eta(t)\} = [\hat{\Phi}]^T \{F(t, x(t), \dot{x}(t))\} \quad (3.15)$$

Onde $[\omega^2]$ é uma matriz diagonal contendo as frequências naturais.

A equação (3.15) é que será resolvida numericamente para encontrar a resposta dinâmica do modelo no tempo. A partir dela pode-se notar que o sistema só não está desacoplado totalmente devido ao lado direito. Pode-se observar também que os únicos dados de entrada para o problema são as frequências naturais e as formas dos modos normalizadas segundo a equação (3.9). Esses modos normalizados bem como as frequências podem ser obtidos diretamente de softwares comerciais de elementos finitos.

O vetor de forças externas $\{F\}$ será calculado como explicado no capítulo 5 sobre aerodinâmica não-estacionária.

4.1 Geometria e Estrutura

A asa utilizada será a mesma simulada por Benini (2002). O interesse de estudar a mesma asa é de poder contar com resultados já obtidos e compará-los posteriormente com os resultados das respostas com controle ativo.

Sendo assim, será feita uma breve descrição da asa estudada por Benini (2002).

Essa asa foi projetada e construída pela Equipe EESC-USP de AeroDesign (2002), da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo no ano de 2000. As competições SAE Brasil AeroDesign são organizadas pela SAE Brasil (*Society of Automotive Engineers*) e têm como objetivo que os alunos de graduação projetem e construam aeronaves cargueiras rádio-controladas. Mais informações sobre a competição podem ser encontradas no *website* da SAE AERODESIGN® (2002).

Essa asa desenvolvida para a competição de 2000 tem 2,980m de envergadura e 0,22m de corda. O perfil utilizado foi o Selig S1223.

Figura 4.1 – Perfil Selig S1223 (NASG, 2006).

Figura 4.2 – Dimensões da asa.

A estrutura da asa é composta por duas longarinas (uma no extradorso e outra no intradorso) de carbono unidirecional (CarbonoUD) com três camadas na parte central, duas camadas na parte seguinte e uma camada nas pontas e sobre toda a superfície da asa por uma casca de tecido de kevlar bidirecional laminado a 45°. A longarina suporta principalmente os esforços de flexão enquanto a casca suporta os esforços de flexão e de torção. A alma é constituída de um isopor de alta densidade (Styrofoam®). A Figura 4.3 mostra um esquema explodido da estrutura da asa.

Figura 4.3 – Detalhamento da estrutura.

Tabela 4.1 – Propriedades dos materiais da asa (EQUIPE EESC-USP DE AERODESIGN, 2002).

Styrofoam		
Modulo de elasticidade	E	1.2×10^7 Pa
Coeficiente de Poisson	η	0.3
Módulo de elasticidade na torção	G	4.5×10^6 Pa
Densidade	ρ	32 kg/m^3
Fibra de Carbono Unidirecional		
Modulo de elasticidade 0°	E11	1.34×10^{11} Pa
Modulo de elasticidade 90°	E22	1.1×10^{10} Pa
Coeficiente de Poisson	η	0.26
Módulo de elasticidade na torção	G	5×10^9 Pa
Densidade	ρ	1570 kg/m^3
Tecido Bidirecional de Kevlar		
Modulo de elasticidade 0°	E11	3.1×10^{10} Pa
Modulo de elasticidade 90°	E22	3.1×10^{10} Pa
Módulo de elasticidade na torção	G	2×10^9 Pa
Densidade	ρ	1330 kg/m^3

4.2 Análise Modal – Elementos Finitos

No modelo computacional da asa em elementos finitos foram usados os materiais Styrofoam como isotrópico, CarbonoUD e Kevlar como ortotrópicos; e foram inseridas as propriedades da Tabela 4.1. O coeficiente de Poisson do Kevlar foi assumido igual ao do carbono, o que é uma aproximação razoavelmente boa.

Tabela 4.2 – Propriedades dos materiais laminados no modelo de elementos finitos.

Materiais Laminados Criados		
Nome no modelo	Camadas	Orientação da fibra em relação à envergadura
Laminado 1	Kevlar	$-45^\circ / +45^\circ$
Laminado 2	Kevlar	$-45^\circ / +45^\circ$
	CarbonoUD	0°
Laminado 3	Kevlar	$-45^\circ / +45^\circ$
	CarbonoUD	0°
	CarbonoUD	0°
Laminado 4	Kevlar	$-45^\circ / +45^\circ$
	CarbonoUD	0°
	CarbonoUD	0°
	CarbonoUD	0°

Os materiais compostos foram inseridos no modelo com a propriedade de materiais laminados, que correspondem às várias camadas de tecidos impregnados com resina epóxi sobre a superfície do Styrofoam. A Tabela 4.2 mostra a composição de camadas da asa e a associação dos materiais com a estrutura foi feita tal qual a Figura 4.4.

Figura 4.4 – Aplicação dos materiais.

Nas superfícies que representam a casca e as longarinas foram geradas malhas com elementos quadrados de quatro nós e seis graus de liberdade por nó. Nos sólidos que representam o Styrofoam® foram geradas malhas de elementos do tipo *Wedge* (prismas de base triangular), com seis nós e seis graus de liberdade por nó.

A solução encontrada para o modelo livre-livre da asa pôde ser comparada com um experimento já realizado anteriormente com a mesma asa (MARQUES et al., 2001) e apresentou frequências naturais mais altas que as do experimento (Tabela 4.3). Na busca pela falha da modelagem notou-se um grande erro na massa total da asa, que é um fator de extrema importância na determinação das frequências naturais. O Styrofoam, por ser uma espuma, é muito poroso e absorveu muita resina epóxi durante o processo de laminação. As camadas de tecidos laminados também ficaram mais grossas que o valor nominal pois a laminação foi manual, sem o uso de bolsas de vácuo, o que significa que mais resina foi usada na construção. Corrigindo-se as densidades dos materiais em função da estimativa de resina em excesso nos materiais compostos (estimativa obtida medindo-se a espessura final da peça construída), tem-se as novas densidades: Styrofoam: 40 kg/m^3 , Carbono: 3171 kg/m^3 , Kevlar: 2687 kg/m^3 .

O módulo de elasticidade do carbono também foi verificado, já que o maior erro de frequência natural ocorreu para o modo de flexão, cuja estrutura principal é a longarina. O erro estimado foi cerca de 21%, e foi atribuído ao processo manual de laminação, onde muitas bolhas de ar podem ter piorado essa propriedade mecânica do material.

Com essas correções, as simulações foram refeitas obtendo os seguintes resultados:

Figura 4.5 – 17,07 Hz – 1º Modo (1º modo de flexão vertical).

Figura 4.6 – 40,86 Hz – 2º Modo (1º modo de flexão frontal).

Figura 4.7 – 41,93 Hz – 3º Modo (2º modo de flexão vertical).

Figura 4.8 – 69,67 Hz – 4º Modo (1º modo de torção).

Comparando-se os resultados experimentais e computacionais (Tabela 4.3) percebe-se que a precisão do modelo é boa, apresentando um erro mais grave apenas no segundo modo de flexão. Contudo, sabe-se que o primeiro modo de torção e o primeiro modo de flexão são os modos mais importantes para o *flutter*, e estes estão bem representados.

Tabela 4.3 – Resultados.

	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo
Modelo antes das correções	24,61 Hz	56,14 Hz	58,58 Hz	92,54 Hz
Erro antes das correções	49,7%	-----	61,6%	29,9%
Modelo após correções	17,07 Hz	40,86 Hz	41,93 Hz	69,67 Hz
Erro após correções	3,8%	-----	15,7%	2,2%
Experimento	16,44 Hz	-----	36,25 Hz	71,25Hz

A partir desse modelo corrigido, uma nova análise modal foi realizada agora com a raiz da asa engastada. O engaste na raiz deve representar o caso de um possível ensaio em túnel de vento. No caso de uma aeronave completa, o peso e momento de inércia da asa normalmente são bem inferiores a todo o peso e momento de inércia concentrados na raiz (fuselagem). Sendo assim, uma aproximação do tipo engaste da raiz é aceitável. A fuselagem da aeronave cuja asa está sendo simulada tem uma massa cerca de treze vezes maior que a massa da asa confirmando a hipótese de engaste adotada.

Os resultados encontrados para a nova simulação estão mostrados na Tabela 4.4 e nas figuras a seguir. Todos os modos cujos deslocamentos acontecem quase exclusivamente no

plano da asa foram desprezados, por apresentarem pouca influência no fenômeno do *flutter*. Os modos de frequência muito elevada também foram descartados. O modo de maior frequência considerado foi o segundo modo de torção. Assim, tem-se o mesmo truncamento de modos usado por Benini (2002), para que se possam comparar os resultados.

Tabela 4.4 – Modos naturais encontrados para a asa engastada na raiz. Os modos marcados com “OK” foram usados nas simulações aeroelásticas. Os modos com movimentos quase exclusivos no plano da asa e os modos com frequência muito elevada foram descartados.

Modo	Frequência [Hz]	Descrição	
1°	11,256	1° modo de flexão vertical	OK
2°	28,281	1° modo de flexão frontal	----
3°	53,650	2° modo de flexão vertical acoplado com leve torção	OK
4°	71,973	1° modo de torção	OK
5°	125,24	3° modo de flexão vertical acoplado com leve torção	OK
6°	155,99	2° modo de flexão frontal acoplado com torção	----
7°	205,11	2° modo de torção	OK
8°	211,18	4° modo de flexão vertical acoplado com leve torção	----
9°	295,88	3° modo de torção acoplado com leve flexão vertical	----
10°	316,07	4° modo de torção	----

Figura 4.9 – 11,256 Hz – 1°Modo (1° modo de flexão vertical).

Figura 4.10 – 28,281 Hz – 2°Modo (1° modo de flexão frontal).

Figura 4.11 – 53,650 Hz – 3ºModo (2º modo de flexão vertical acoplado com leve torção).

Figura 4.12 – 71,973 Hz – 4ºModo (1º modo de torção).

Figura 4.13 – 125,24 Hz – 5ºModo (3º modo de flexão vertical acoplado com leve torção).

Figura 4.14 – 155,99 Hz – 6ºModo (2º modo de flexão frontal acoplado com torção).

Figura 4.15 – 205,11 Hz – 7ºModo (2º modo de torção).

Figura 4.16 – 211,18 Hz – 8ºModo (4º modo de flexão vertical acoplado com leve torção).

Figura 4.17 – 295,88 Hz – 9ºModo (3º modo de torção acoplado com leve flexão vertical).

Figura 4.18 – 316,07 Hz – 10ºModo (4º modo de torção).

5.1 Aerodinâmica bidimensional

5.1.1 Escoamentos elementares

O escoamento dos fluído é descrito matematicamente por três equacionamentos: a equação da continuidade, a equação de energia e a equação da quantidade de movimento. Para solucionar o caso mais completo, de um escoamento aerodinâmico viscoso e compressível, é necessário ainda fazer uso da equação dos gases ideais e a consideração de gás caloricamente perfeito.

A equação da continuidade é uma equação escalar que faz um balanço de massa, de tal forma que a taxa de variação da massa dentro de um volume de controle é igual à diferença entre a massa que está entrando e saindo.

A equação da energia também é escalar, e garante que a diferença da energia sendo introduzida e extraída do volume de controle é igual à taxa de variação da energia total nele contida. Essa equação não é usada no caso de escoamentos adiabáticos e incompressíveis (ANDERSON, 1991).

A equação da quantidade de movimento é vetorial (pode ser dividida em três equações, uma para cada direção do espaço) e determina que a variação da quantidade de movimento do fluido num volume de controle é relacionada às forças externas aplicadas sobre

ele. As equações da quantidade de movimento para fluidos viscosos são chamadas de “equações de Navier-Stokes” (ANDERSON, 1991). Contudo, em muitos casos, o escoamento pode ser considerado invíscido, o que simplifica muito as equações de Navier-Stokes, que passam a ser chamadas de “equações de Euler”.

Soluções de escoamentos viscosos (rotacionais), compressíveis e diabáticos são extremamente complexas, e suas soluções analíticas não são conhecidas. Para solucioná-las normalmente utilizam-se métodos computacionais, como é o caso do CFD (*Computational Fluid Dynamics*) (ANDERSON, 1995).

Os escoamentos invíscidos (irrotacionais), incompressíveis e adiabáticos (também chamados de escoamentos potenciais) permitem encontrar a solução apenas com o uso da equação da continuidade e das equações de Euler (que pode ser escrita na forma da Equação de Bernoulli). De fato, ambas são nada mais que a aplicação da 2ª lei de Newton aos fluidos. Ao utilizar como solução uma função que descreve um potencial de velocidades num escoamento invíscido e incompressível, encontra-se uma equação conhecida como equação de Laplace, de onde podem ser obtidas quatro soluções básicas: escoamento uniforme, fonte, sumidouro e vórtice. Posicionando uma fonte e um sumidouro a uma distância muito pequena, e fazendo essa distância tender a zero, encontra-se uma nova solução, que é o dipolo. O dipolo é também solução da equação por que é uma composição de duas soluções básicas, respeitando o princípio da superposição de soluções, onde a soma de soluções de uma equação diferencial linear é também solução da equação.

Procurando resolver o escoamento potencial para diversos casos, utilizam-se composições das soluções elementares. Como exemplo tem-se o escoamento ao redor de um cilindro girando representado pela soma de um dipolo, um vórtice e o escoamento uniforme. Analogamente, todos os casos resolvidos daqui para frente serão composições das soluções elementares.

O teorema de Kutta-Joukowski demonstra que a força de sustentação que aparece no caso do cilindro girando é proporcional à intensidade do vórtice usado para representar o giro (ANDERSON, 1991). A partir daí, analogamente demonstra-se a ligação entre a circulação e a sustentação de outros aerofólios.

5.1.2 Aerofólios finos

Para representar a asa simulada, é necessário que o escoamento simulado seja semelhante ao da asa real, e que os carregamentos gerados pelo modelo numérico para o perfil sejam iguais ao carregamento gerado pelo perfil real.

Como os esforços que são considerados para excitar o *flutter* são aqueles responsáveis pela flexão e torção na asa, apenas os coeficientes de sustentação e momento do perfil da asa devem ser obtidos numericamente.

Para isso, um algoritmo simples foi desenvolvido utilizando um método semelhante ao da malha de vórtices para representar o perfil por uma linha de *camber* com $n_c + 1$ vórtices ao longo da corda. A proposta aqui é encontrar uma linha de *camber* que consiga simular um perfil qualquer em uma dada condição de ângulo de ataque. Esses perfis de espessura nula são chamados aerofólios finos. O termo “linha de *camber*” usado neste trabalho, vem do inglês *camber line*, e muitas vezes é encontrado na literatura traduzido como “linha de curvatura”, “linha de arqueamento” ou “linha média”).

Como entrada para o problema tem-se um perfil com certo ângulo de ataque (α), coeficiente de sustentação (C_L) e coeficiente de momento de arfagem (C_M).

Essas variáveis vão definir a linha de *camber*.

Para simplificar o problema, a linha de *camber* foi proposta como uma composição de três senóides, como mostra a Figura 5.1.

Figura 5.1 – Simplificação da linha de *camber*.

Um primeiro seno começa valendo zero no bordo de ataque e completa $\frac{1}{4}$ de período valendo 1 numa posição determinada. O segundo é um cosseno e vale 1 nessa posição e -1 na próxima posição de referência, depois de $\frac{1}{2}$ período. O terceiro é um cosseno valendo 1 na segunda posição e completa $\frac{1}{4}$ de período terminando em zero no bordo de fuga. O trecho intermediário é corrigido na posição vertical para tangenciar as outras curvas.

A curva de *camber* para um perfil de corda unitária será dada por

$$z = h_1 \sin\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right) \quad \text{para } 0 \leq x < d_1 \quad (5.1)$$

$$z = \frac{h_1 - h_2}{2} \cos\left(\frac{\pi(x - d_1)}{d_2 - d_1}\right) + \frac{h_1 + h_2}{2} \quad \text{para } d_1 \leq x < d_2 \quad (5.2)$$

$$z = h_2 \cos\left(\frac{\pi(x - d_2)}{2(1 - d_1)}\right) \quad \text{para } d_2 \leq x \leq 1 \quad (5.3)$$

Onde d_1 e d_2 são as posições de máximo e/ou mínimo da linha de *camber*, e h_1 e h_2 são os valores do *camber* nas posições d_1 e d_2 respectivamente. Todas as constantes e variáveis são dadas em relação a uma corda unitária, ou seja, o valor real é obtido multiplicando-se a variável pela corda usada na asa.

O algoritmo para determinação da curva do *camber* é iterativo. Sua geometria no início das iterações é uma linha reta. Durante uma iteração são calculados os valores de sustentação e momento de arfagem para a linha de *camber* atualizada, permitindo fazer a seguinte correção na sua geometria:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{1_{i+1}} = h_{1_i} + \frac{1}{2} C_{damp} (C_{L_{desejado}} - C_{L_i}) \\ h_{2_{i+1}} = h_{2_i} + \frac{1}{2} C_{damp} (C_{L_{desejado}} - C_{L_i}) \end{array} \right. \quad (5.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{1_{i+1}} = h_{1_i} + \frac{1}{2} C_{damp} (C_{L_{desejado}} - C_{L_i}) \\ h_{2_{i+1}} = h_{2_i} + \frac{1}{2} C_{damp} (C_{L_{desejado}} - C_{L_i}) \end{array} \right. \quad (5.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{1_{i+1}} = h_{1_i} + \frac{1}{2} C_{damp} (C_{M_{desejado}} - C_{M_i}) \\ h_{2_{i+1}} = h_{2_i} - \frac{1}{2} C_{damp} (C_{M_{desejado}} - C_{M_i}) \end{array} \right. \quad (5.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{1_{i+1}} = h_{1_i} + \frac{1}{2} C_{damp} (C_{M_{desejado}} - C_{M_i}) \\ h_{2_{i+1}} = h_{2_i} - \frac{1}{2} C_{damp} (C_{M_{desejado}} - C_{M_i}) \end{array} \right. \quad (5.7)$$

Onde o índice i representa o passo da iteração, o índice *desejado* representa o valor imposto na entrada, e que a linha de *camber* a ser encontrada deve fornecer para o ângulo de ataque especificado inicialmente. O coeficiente C_{damp} é um coeficiente de amortecimento artificial das iterações usado para auxiliar a convergência, já que corrigir uma diferença de posição através de um delta de coeficiente aerodinâmico pode ser problemático por se tratar de grandezas diferentes. Por simplicidade o valor de C_{damp} foi mantido constante ao longo das iterações e foi usado um valor de 0,1. Esse valor foi encontrado por tentativa e erro, pois valores muito maiores que 0,1 causam divergência e valores muito menores que 0,1 exigem mais iterações para se atingir o mesmo resultado.

Figura 5.2 - Discretização de vórtices representando o perfil

O perfil é representado por $n_c + 1$ vórtices. Esses vórtices são os responsáveis pela sustentação, e a distribuição de intensidade nos vórtices vai resultar em diferentes momentos. O método para determinar a intensidade de cada vórtice é impor uma condição de contorno de

forma que as velocidades perpendiculares aos segmentos nos pontos de controle (pontos no centro da distância entre cada vórtice) sejam sempre nulas, como mostra a Figura 5.2.

Para calcular as velocidades induzidas pelos vórtices nos pontos de controle utiliza-se a lei de Biot-Savart para o caso de vórtices com comprimento infinito, como mostrado posteriormente no item 5.2.2, pela equação (5.23). A velocidade total num dado ponto de controle é a soma vetorial de todas as velocidades induzidas pelos vórtices com a velocidade do fluxo livre.

Para garantir que essa linha tenha o comportamento semelhante a um perfil, a distribuição de intensidades nos vórtices deve respeitar a condição de Kutta (ANERSON, 1991), ou seja, o último vórtice deve obrigatoriamente ter intensidade nula (KATZ; PLOTKIN, 2001).

Conhecido o perfil de uma dada asa, e sua representação através de linha de *camber* de vórtices, o modelo tridimensional da asa poderá ser criado.

Benini (2002) fez simulações da asa a 5° de ângulo de ataque sem utilizar essa modificação do *camber*, por isso havia uma diferença na intensidade da sustentação e do momento de arfagem da asa. Para representar o perfil Selig S1223 a 5° de ângulo de ataque, cujas propriedades são $C_L = 1,5094$, e $C_M = -0,29$ (UIUC, 2006), o perfil da linha de *camber* obtido com 8 painéis está mostrado na Figura 5.3.

Figura 5.3 - Linha de *camber* com 8 painéis para $\alpha = 5^\circ$, $C_L = 1,5094$ e $C_M = -0,29$

5.1.3 Coeficientes e propriedades do perfil

Algumas propriedades relacionadas à aerodinâmica não-estacionária relacionada ao perfil serão necessárias futuramente nos cálculos da ação de controle.

A modelagem descrita no item anterior, que descreve como obter uma curva de *camber* que se adapte às propriedades de C_L e C_M do perfil é agora alterada, de forma a se obter os valores de C_L e C_M para dois ângulos de ataque bem próximos, sendo o primeiro o ângulo de ataque da simulação, e o segundo é o primeiro acrescido de um pequeno valor.

A partir daí encontram-se as seguintes derivadas numericamente.

$$C_{L_\alpha} = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = \frac{C_L(\alpha + \Delta\alpha) - C_L(\alpha)}{\Delta\alpha} \quad (5.8)$$

$$C_{M_\alpha} = \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} = \frac{C_M(\alpha + \Delta\alpha) - C_M(\alpha)}{\Delta\alpha} \quad (5.9)$$

$$C_{L_0} = C_L(\alpha) - \frac{C_L(\alpha + \Delta\alpha) - C_L(\alpha)}{\Delta\alpha} \alpha \quad (5.10)$$

$$C_{M_0} = C_M(\alpha) - \frac{C_M(\alpha + \Delta\alpha) - C_M(\alpha)}{\Delta\alpha} \alpha \quad (5.11)$$

Para determinar a influência do comando tem-se:

$$C_{L_\delta} = \frac{\partial C_L}{\partial \delta} = \frac{C_L(\delta + \Delta\delta) - C_L(\delta)}{\Delta\delta} \quad (5.12)$$

$$C_{M_\delta} = \frac{\partial C_M}{\partial \delta} = \frac{C_M(\delta + \Delta\delta) - C_M(\delta)}{\Delta\delta} \quad (5.13)$$

Analogamente, pode-se encontrar a relação entre a força num dado ponto do perfil com a variação do ângulo de ataque do perfil (este valor será usado, futuramente, para representar a leitura do sensor de pressão do sistema de controle).

$$Y_\alpha = \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = \frac{Y(\alpha + \Delta\theta) - Y(\alpha)}{\Delta\alpha} \quad (5.14)$$

Figura 5.4 – Parâmetros geométricos usados na determinação de α

Para calcular as propriedades do perfil com relação a α , um termo relativo à velocidade dos pontos de controle para o perfil com rotação $\bar{\Omega}$ é adicionado ao equacionamento. Supondo um perfil girando em relação a um ponto, como na Figura 5.4, o ponto de controle terá uma velocidade $V_{painel_{rot}}$. Logo, a velocidade do ar que será acrescida à velocidade do escoamento livre (V_{∞}) é dada por $V_{ar_{rot}}$, que tem mesma direção e módulo de $V_{painel_{rot}}$ mas sentidos opostos. A velocidade total no ponto de controle é a soma de V_{∞} e $V_{ar_{rot}}$, e a componente que interfere no resultado é aquela que for normal ao painel, variando o valor do C_L e do C_M .

$$\vec{V}_{ar_{rot}} = -\vec{V}_{painel_{rot}} = -\bar{\Omega} \times \vec{R}_{pto\ controle} \quad (5.15)$$

$$\vec{V}_N = (\vec{V}_{\infty} + \vec{V}_{ar_{rot}}) \cdot \vec{N} \quad (5.16)$$

Assumindo que esses coeficientes possam ser calculados para dois valores de α próximos, as seguintes derivadas podem ser determinadas:

$$C_{L_{\alpha}} = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = \frac{C_L(\alpha + \Delta\alpha) - C_L(\alpha)}{\Delta\alpha} \quad (5.17)$$

$$C_{M_{\alpha}} = \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} = \frac{C_M(\alpha + \Delta\alpha) - C_M(\alpha)}{\Delta\alpha} \quad (5.18)$$

A variação na leitura do sensor é obtida simultaneamente.

$$Y_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial Y}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{Y(\dot{\alpha} + \Delta \dot{\alpha}) - Y(\dot{\alpha})}{\Delta \dot{\alpha}} \quad (5.19)$$

5.2 Aerodinâmica tri-dimensional não estacionária

5.2.1 Do conceito inicial ao método usado

Todo aerofólio citado anteriormente pode ser visto como uma asa infinita, ou seja, sem pontas. Isso faz com que o escoamento ao redor dessa asa possa ser analisado como um caso bidimensional. As chamadas asas finitas possuem pontas e o escoamento ao redor da asa é diferente do caso bi-dimensional. Para entender melhor o escoamento ao redor de asas finitas, toma-se por base um tipo de escoamento elementar tri-dimensional: a linha de vórtice. Segundo o teorema de Helmholtz (KATZ; PLOTKIN, 2001) toda linha de vórtice deve começar ou terminar em uma parede (ou início do volume de controle), ou se estender até o infinito. Ou ainda pode ser uma linha fechada. Helmholtz ainda enuncia que a intensidade do vórtice é constante ao longo de seu comprimento e do tempo.

No caso da asa, a sustentação deve surgir devido a uma linha de vórtice posicionada convenientemente na asa (derivação do teorema de Kutta-Joukowski). Pelas leis que regem o início e o fim dos vórtices, o vórtice que gera a sustentação não pode simplesmente acabar nas pontas da asa. A solução proposta é assumir que esses vórtices saem pelas pontas das asas e acompanham o fluxo até o infinito. Isso explica tanto a sustentação, como o aparecimento do vórtice de ponta da asa, que resulta no aparecimento do *downwash*, que é a velocidade induzida no escoamento atrás da asa e do arrasto induzido (D_i). A Figura 5.5 mostra um esquema dessa modelagem, que é conhecida como vórtice em ferradura.

Figura 5.5 - Vórtice em ferradura.

Figura 5.6 - O funcionamento da asa finita.

Contudo, representar a asa toda por um único vórtice em ferradura resulta num erro muito grande, pois o efeito das velocidades induzidas pelo vórtice de ponta sobre a asa não é bem considerado. Isso acontece pois a velocidade induzida por um vórtice num ponto é tanto maior quanto menor for a distância entre eles. Logo os ângulos de ataque efetivos ($\alpha_{efetivo}$) próximos à ponta da asa são alterados, como mostra a Figura 5.6. Isso vai resultar numa componente de força para trás, conhecida como arrasto induzido (D_i), ao mesmo tempo em que resulta numa menor sustentação ($|L_{3D}| < |L_{2D}|$). A teoria das faixas (ou método da linha de sustentação de Prandtl) divide a asa em diversas faixas, o que possibilita encontrar uma distribuição de carregamento e arrasto induzido ao longo da envergadura (variação discreta da intensidade dos vórtices de uma ferradura para outra), como mostra a Figura 5.7.

Figura 5.7 - Teoria das faixas. As espessuras dos vórtices representam sua intensidade.

Para garantir o momento correto de arfagem da asa, é necessário que haja uma variação da circulação ao longo da corda. Para isso, um método chamado de malha de vórtice (*vortex lattice method*) divide a asa ao longo da envergadura e da corda em diversos painéis. Cada painel está associado a um anel fechado de vórtice (respeitando as leis para extremidades de linhas de vórtice do teorema de Helmholtz). Por se tratar de um método simples e que permite a determinação do momento picador da asa, este será usado nas simulações aeroelásticas.

Figura 5.8 - Método da malha de vórtices.

5.2.2 A lei de Biot-Savart

A velocidade induzida por uma linha de vórtice em um dado ponto do espaço pode ser calculada através da lei de Biot-Savart, descrita pela equação (5.20) e representada na Figura 5.9.

$$d\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (5.20)$$

Onde $d\vec{V}$ é a velocidade induzida por um comprimento $d\vec{l}$ de vórtice com intensidade Γ num ponto localizado por um vetor $\vec{r}$ em relação a $d\vec{l}$.

Figura 5.9 - Lei de Biot-Savart (ANDERSON, 1991).

Integrando a velocidade induzida por um segmento de vórtice reto entre dois pontos em um ponto qualquer, como na Figura 5.10, a lei de Biot-Savart pode ser reescrita chegando-se à equação (5.21). A demonstração dessa equação modificada pode ser encontrada em Katz e Plotkin (2001).

Figura 5.10 - Simplificação da lei de Biot-Savart para segmentos retos de vórtice (KATZ; PLOTKIN, 1991).

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2) \hat{e} \quad (5.21)$$

Onde $\hat{e}$ é um vetor unitário perpendicular ao plano que contém $\vec{r}$ e o segmento de vórtice.

Quando esse é um segmento de reta finito, a equação (5.21) pode ser convertida na (5.22) (BENINI, 2002; KATZ; PLOTKIN, 1991), que depende apenas dos vetores que liga os extremos do segmento de vórtice ao ponto onde a velocidade é calculada.

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|^2} \left(\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} - \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} \right) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (5.22)$$

Para o caso de uma linha de vórtice infinita para os dois lados tem-se $\beta_1 = 0^\circ$ e $\beta_2 = 180^\circ$, transformando a equação (5.21) em:

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{2\pi h} \hat{e} \quad (5.23)$$

A equação (5.23) é usada para representar vórtices como aqueles das asas infinitas (item 5.1.2)

5.2.3 O método da malha de vórtices na superfície sustentadora

O método da malha de vórtices (*vortex lattice method*) consiste na divisão da asa em painéis. Cada painel é associado a um anel fechado de vórtice. Cada anel tem início a $\frac{1}{4}$ da corda do painel correspondente e termina em $\frac{1}{4}$ da corda do painel seguinte. Existe um ponto localizado a $\frac{3}{4}$ da corda do painel (ou seja, no centro do anel de vórtice) que é chamado ponto de controle. Nesse ponto é imposta uma condição de contorno de que a velocidade do fluxo perpendicular ao anel deve ser nula, garantindo assim que nos pontos de controle não existe fluxo atravessando a asa, como no caso indicado na Figura 5.2.

Como nesse método a superfície sustentadora não possui espessura, ele vai se adaptar muito bem à teoria de aerofólios finos, citada anteriormente no caso bidimensional (item 5.1.2).

Figura 5.11 - Posicionamento dos painéis, anéis de vórtices e pontos de controle ao longo da asa.

Para os cálculos, não é necessário que se conheçam as coordenadas dos painéis. Apenas as coordenadas dos vértices dos anéis e dos pontos de controle são importantes. Assim, a partir de agora, todas as figuras apresentadas estarão representando simplesmente os anéis de vórtice.

Atribuindo-se índices i para representar a coordenada do anel em relação à corda e j em relação à envergadura, a direção do vetor normal será calculada de acordo com Katz e Plotkin (1991) por:

$$\vec{N}_{i,j} = \frac{(\vec{P}_{i+1,j+1} - \vec{P}_{i,j}) \times (\vec{P}_{i,j+1} - \vec{P}_{i+1,j})}{|(\vec{P}_{i+1,j+1} - \vec{P}_{i,j}) \times (\vec{P}_{i,j+1} - \vec{P}_{i+1,j})|} \quad (5.24)$$

Onde $P_{i,j}$ é o ponto de menor índice do anel de índices i, j .

O sentido positivo para a circulação do anel também é dada por Katz e Plotkin (1991), e corresponde a um anel de vórtice induzindo velocidade no seu ponto de controle no sentido do extradorso para o intradorso.

5.2.4 O método da malha de vórtices na esteira

A esteira também é representada por uma sequência de anéis de vórtice, que vão sendo criados a cada iteração no tempo (KATZ; PLOTKIN, 2001). A cada iteração, a esteira é deslocada de forma que cada ponto de sua geometria se move de acordo com a equação (5.25). Depois desse deslocamento, a nova fileira de anéis é colocada entre o bordo de fuga e a fileira da esteira que estava encostada no bordo de fuga na iteração anterior. Essa nova fileira de anéis de vórtices deve ter a mesma intensidade que os anéis de vórtice ao longo do bordo de fuga. Essa imposição garante a condição de Kutta (KATZ; PLOTKIN, 2001), pois na linha do bordo de fuga a vorticidade vai-se anular.

$$\vec{W}_{j,t+\Delta t} = \vec{W}_{j,t} + \Delta t \cdot \vec{V}_{total} \quad (5.25)$$

Onde os vetores $\vec{W}$ indicam a posição dos pontos da esteira segundo as coordenadas ao longo da envergadura e do tempo, Δt é o intervalo de tempo da iteração e V_{total} é a velocidade do fluxo nesse ponto. Essa velocidade total corresponde a uma soma da velocidade do fluxo livre (V_{∞}) e das velocidades induzidas por todos os segmentos de vórtice do sistema.

Ao se deslocar no espaço, nas iterações, cada anel de vórtice conserva a sua intensidade.

Dois casos serão simulados para verificar a precisão dos resultados. O caso ideal seria considerar essa velocidade total como foi descrita, contudo, o cálculo das velocidades induzidas por todos os segmentos em todos os pontos da esteira toma muito tempo, já que a esteira tem muito mais pontos em sua geometria do que a asa tem pontos de controle. O segundo caso a ser simulado despreza as velocidades induzidas pelo sistema sobre os pontos da esteira. Espera-se que o resultado não seja muito alterado, e resulte num tempo computacional muito mais baixo. O caso completo é conhecido como esteira tridimensional (ou 3D por possuir o efeito de *roll-up*, em que as linhas de vórtice se enrolam umas ao redor

das outras devido ao vórtice de ponta de asa). O caso simplificado será chamado esteira plana, pois no regime estacionário a esteira será uma superfície que passa pelo bordo de fuga e segue na direção do fluxo. No caso não estacionário esse tipo de esteira vai registrar um histórico das posições do bordo de fuga da asa oscilando.

Outro grande problema das esteiras nesse tipo de simulação é, que por necessitar de incrementos de tempo muito baixos para o problema convergir (BENINI, 2002), a esteira acaba ficando com um número muito grande de elementos ao longo de seu comprimento. Contudo, após certa distância da asa, os elementos exercem uma influência desprezível sobre a mesma. Para evitar esse inconveniente de trabalhar com esteiras muito grandes, será verificado até que comprimento de esteira obtém-se um bom resultado na simulação. Esse comprimento da esteira será nada mais que um comprimento de corte, de forma que a esteira será representada por anéis de vórtice fechados até a penúltima fileira de anéis. A última fileira será considerada como vórtices de ferradura (Figura 5.8), respeitando o teorema de Helmholtz, pois a distância já será grande o suficiente para ser considerada infinita. Com esse método de corte na esteira pretende-se reduzir drasticamente seu número de elementos, já que em cada iteração, uma nova fileira de anéis é acrescentada logo após o bordo de fuga, e uma fileira de anéis antiga é retirada do final da esteira. Ou seja, o número total de elementos será fixo depois que a esteira atingir seu comprimento de corte.

5.2.5 Solução do sistema aerodinâmico

Encontrar a solução do sistema aerodinâmico corresponde a encontrar a intensidade de todos os anéis de vórtice, de forma que a soma de todas as velocidades induzidas pelos anéis da asa e da esteira em todos os pontos de controle da asa sejam nulas na direção normal a cada anel ($\vec{N}_i$).

Figura 5.12 - Velocidades num painel de vórtices.

No método da malha de vórtices, cada anel de vórtice do sistema induz uma velocidade no ponto de controle de outro vórtice da asa. Matematicamente fica:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_\infty + \vec{V}_{pc_i} + \sum_{j=1}^{n_a} \vec{V}_{a_{ij}} + \sum_{k=1}^{n_e} \vec{V}_{e_{ik}} \quad (5.26)$$

Onde $\vec{V}_i$ é a velocidade total induzida no ponto de controle do painel i , $\vec{V}_{pc_i}$ é a velocidade do ponto de controle i perpendicular ao plano da asa, resultado da oscilação da sua estrutura, $\vec{V}_{a_{ij}}$ é a velocidade induzida por cada anel j no ponto de controle i , $\vec{V}_{e_{ik}}$ é a velocidade induzida pelo anel de vórtice k da esteira no ponto de controle i , e n_a e n_e são respectivamente o número de anéis na asa e na esteira. $\vec{V}_{a_{ij}}$ e $\vec{V}_{e_{ik}}$ são calculadas usando a equação (5.21) quatro vezes, uma para cada segmento do anel.

A equação (5.21) pode ser separada em duas da seguinte forma:

$$\vec{V}_{a_{ij}} = \vec{V}_{ij} \Gamma_j \quad (5.27)$$

$$\vec{V}_{ij} = \sum_1^4 \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|^2} \left(\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} - \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} \right) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (5.28)$$

Onde $\vec{V}_{ij}$ será a somatória das velocidades induzidas no ponto de controle i pelos quatro segmentos de vórtice que formam o anel j e Γ_j é a intensidade do j -ésimo anel.

Multiplicando a equação (5.26) pelo vetor normal $\vec{N}_i$, e substituindo a equação (5.27), tem-se:

$$\vec{N}_i \cdot \vec{V}_i = \vec{N}_i \cdot \vec{V}_\infty + \vec{N}_i \cdot \vec{V}_{pc_i} + \vec{N}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n_a} \vec{V}_{ij} \Gamma_j \right) + \vec{N}_i \cdot \left(\sum_{k=1}^{n_e} \vec{V}_{e_{ik}} \right) \quad (5.29)$$

Impondo a condição $\vec{N}_i \cdot \vec{V}_i = 0$, que garante que o fluxo não atravessa a asa e rearranjando a equação (5.29), fica:

$$\sum_{j=1}^{n_a} \vec{N}_i \cdot \vec{V}_{ij} \Gamma_j = -\vec{N}_i \cdot \left(\vec{V}_\infty + \vec{V}_{pc_i} + \sum_{k=1}^{n_e} \vec{V}_{e_{ik}} \right) \quad (5.30)$$

Como essa equação deve ser satisfeita para todos os anéis i da asa, chega-se a um sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} \vec{N}_1 \vec{V}_{11} & \vec{N}_1 \vec{V}_{12} & \cdots & \vec{N}_1 \vec{V}_{1n_a} \\ \vec{N}_2 \vec{V}_{21} & \vec{N}_2 \vec{V}_{22} & \cdots & \vec{N}_2 \vec{V}_{2n_a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{N}_{n_a} \vec{V}_{n_a 1} & \vec{N}_{n_a} \vec{V}_{n_a 2} & \cdots & \vec{N}_{n_a} \vec{V}_{n_a n_a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_{n_a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\vec{N}_1 \left(\vec{V}_\infty + \vec{V}_{pc_1} + \sum_{k=1}^{n_e} \vec{V}_{e_{1k}} \right) \\ -\vec{N}_2 \left(\vec{V}_\infty + \vec{V}_{pc_2} + \sum_{k=1}^{n_e} \vec{V}_{e_{2k}} \right) \\ \vdots \\ -\vec{N}_{n_a} \left(\vec{V}_\infty + \vec{V}_{pc_{n_a}} + \sum_{k=1}^{n_e} \vec{V}_{e_{n_a k}} \right) \end{Bmatrix} \quad (5.31)$$

Para garantir a condição de Kutta (vorticidade nula no bordo de fuga), é necessário impor, em todas as iterações, que a primeira fileira de anéis da esteira tenha a mesma intensidade da fileira de anéis do bordo de fuga, como mostra a Figura 5.13.

Figura 5.13 - Condição de Kutta

Basta, então, substituir o valor n_e do sistema (5.31) pelo número de painéis da esteira sem considerar a primeira fileira logo após o bordo de fuga, e inicia-se a somatória a partir da segunda fileira. Para os anéis do bordo de fuga a equação (5.28) fica modificada como a seguir:

$$\vec{V}_{ij} = \sum_1^8 \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|^2} \left(\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} - \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} \right) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (5.32)$$

Onde i é o painel em cujo ponto de controle se calcula a velocidade induzida, j é um painel de bordo de fuga, e a somatória de 1 a 8 representa a influência dos 8 segmentos de vórtice, 4 do painel da asa e 4 do adjacente da esteira.

Ao utilizar esse novo valor de V_{ij} para os painéis do bordo de fuga no sistema (5.31), esta velocidade estará representando um mesmo valor de Γ_j para ambos os painéis da asa e da esteira, satisfazendo a condição de Kutta.

Resolvendo o sistema (5.31) levando-se em consideração a condição de Kutta (Figura 5.13 e equação (5.32)), encontra-se a intensidade de todos os anéis de vórtice da asa e da primeira fileira de anéis da esteira, imediatamente atrás do bordo de fuga no mesmo passo da iteração.

5.3 Carregamento aerodinâmico

Conhecer os valores de circulação na asa não basta. É necessário encontrar a sua relação com as forças atuantes sobre a asa e que deformarão a estrutura.

Figura 5.14 - Cilindro girando - teorema de Kutta-Joukowski (ANDERSON, 1991).

O teorema de Kutta-Joukowski pode ser demonstrado partindo das soluções elementares da equação de Laplace. A soma de um escoamento livre, com um dipolo e um vórtice resultam no escoamento semelhante ao redor de um cilindro girando. Integrando a pressão do ar ao redor do cilindro conclui-se que não existe arrasto de pressão (um falha intrínseca de modelos em fluxo potencial) e que a sustentação é dada por.

$$\vec{L} = \rho \vec{V}_{\infty} \times \vec{\Gamma} \quad (5.33)$$

O valor da sustentação na equação (5.33) é na verdade uma medida de sustentação por unidade de comprimento do vórtice. No caso do método da malha de vórtices, a sustentação deve ser calculada em cada painel, e é gerada pelo segmento que passa por $1/4$ da corda de cada painel. Com exceção dos painéis do bordo de ataque, onde a vorticidade do segmento que gera a sustentação é igual à vorticidade do anel, em todos os outros painéis a vorticidade do segmento que gera a sustentação será a diferença entre a vorticidade do anel correspondente e aquele que se encontra à sua frente. O comprimento desse segmento acaba por dimensionar a sustentação. A equação (5.33) corrigida para o caso de um segmento de vórtice fica:

$$\vec{L}_1 = \rho \Gamma (\vec{V}_\infty \times \vec{b}) \quad (5.34)$$

Onde $\vec{b}$ é o vetor que determina a envergadura do painel, de forma que seu sentido esteja de acordo com o sentido da circulação positiva do anel e Γ é a circulação total do segmento.

Figura 5.15 - Sustentação de um painel

A força determinada pela equação (5.34) corresponde à parte estacionária do carregamento. Existe ainda uma componente de força que resulta das alterações dinâmicas no escoamento. Essa componente pode ser obtida a partir da equação de Bernoulli para o caso não estacionário, deduzida em Katz e Plotkin (2001).

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \text{constante} \quad (5.35)$$

O tratamento dessa equação para o uso no método da malha de vórtices é bastante simples, e pode ser encontrado também no trabalho de Benini (2002).

Assumindo dois pontos do escoamento no extradorso (e) e intradorso (i) dos anéis de vórtice, pode-se escrever a equação (5.35) igualando a pressão em ambos os pontos.

$$p_e + \frac{1}{2} \rho V_e^2 + \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_e = p_i + \frac{1}{2} \rho V_i^2 + \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_i \quad (5.36)$$

$$p_i - p_e = \frac{1}{2} \rho (V_e^2 - V_i^2) + \rho \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_e - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_i \right] \quad (5.37)$$

$$p_i - p_e = \frac{1}{2} \rho (V_e^2 - V_i^2) + \rho \frac{\partial (\phi_e - \phi_i)}{\partial t} \quad (5.38)$$

O trecho da equação (5.38) dado por $\frac{1}{2} \rho (V_e^2 - V_i^2)$ corresponde à parte estacionária, que será obtida da equação (5.34). Pode-se então trabalhar apenas com a parte não estacionária.

Multiplicando ambos os lados da equação (5.38) pela área do painel (S_{pn}), tem-se a força no painel relativa à parte não estacionária.

$$S_{pn} (p_i - p_e)_{\text{não-estacionária}} = S_{pn} \rho \frac{\partial (\phi_e - \phi_i)}{\partial t} \quad (5.39)$$

$$L_2 = S_{pn} \rho \frac{\partial (\phi_e - \phi_i)}{\partial t} = S_{pn} \rho \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \quad (5.40)$$

$$L_2 = S_{pn} \rho \frac{\Gamma(IT) - \Gamma(IT-1)}{\Delta t} \quad (5.41)$$

Finalmente, a força total no painel será a soma de L_1 e L_2 , sendo esta ultima, na direção normal ao plano do painel. O valor da sustentação que será transmitido à estrutura deve ser um escalar, que representa a força de sustentação do painel perpendicular ao plano da asa. O valor da sustentação é dado então por:

$$L = \left[\rho \Gamma (\vec{V}_\infty \times \vec{b}) + S_{pn} \rho \frac{\Gamma(IT) - \Gamma(IT-1)}{\Delta t} \vec{N} \right] \cdot \vec{N}_{pla} \quad (5.42)$$

Onde $\vec{N}$ é o vetor normal ao painel, e $\vec{N}_{pla}$ é o vetor normal ao plano da asa.

6.1 Acoplamento Entre Aerodinâmica e Estrutura

6.1.1 Motivo do acoplamento

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [\omega^2]\{\eta(t)\} = [\hat{\Phi}]^T \{F(t, x(t), \dot{x}(t))\} \quad (3.15)$$

A equação (3.15), repetida acima, que representa a dinâmica do movimento oscilatório da asa, está escrita na forma modal. Contudo, o vetor do lado direito, contendo as forças externas à estrutura, é resultado do cálculo de forças aerodinâmicas. Essas forças são obtidas pelo método da malha de vórtices, cuja malha computacional não tem relação nenhuma com a equação (3.15), nem com a malha estrutural, usada no método dos elementos finitos.

A equação (3.15) mostra que se o vetor de forças estiver escrito na malha estrutural, a transformação das coordenadas estruturais para as coordenadas modais se dá pela matriz $[\hat{\Phi}]^T$. Sendo assim, para resolver esse problema, é necessário acoplar as malhas estruturais e aerodinâmicas. O método descrito a seguir foi também usado e descrito por Benini (2002), e será usado neste trabalho por ser um método já bastante consolidado.

Admitindo-se que existe um vetor $\{\bar{z}_e\}$, para um dado instante de tempo, contendo os deslocamentos de todos os nós da malha estrutural perpendicularmente ao plano da asa. Esse

vetor precisa transmitir a informação da deformação da estrutura para a malha aerodinâmica, para que a simulação no método da malha de vórtices seja feita com a malha deformada. Chamando de $\{\bar{z}_a\}$ o vetor com as posições dos nós dos anéis de vórtice da malha aerodinâmica, deve existir uma matriz de transformação de coordenadas $[G]$ tal que:

$$\{\bar{z}_a\} = [G]\{\bar{z}_e\} \quad (6.1)$$

Como a matriz modal $[\hat{\Phi}]^T$ é na verdade um conjunto de vetores contendo os deslocamentos dos nós da malha estrutural, ela será renomeada de $[\Phi_e]$, e permite calcular $[\Phi_a]$.

$$[\Phi_a] = [G][\Phi_e] \quad (6.2)$$

Como deve haver equivalência estrutural das forças representadas tanto na malha estrutural como na aerodinâmica, o trabalho virtual realizado nos dois casos deve ser igual:

$$\{\delta\bar{z}_a\}^T \{F_a\} = \{\delta\bar{z}_e\}^T [G]^T \{F_a\} = \{\delta\bar{z}_e\}^T \{F_e\} \quad (6.3)$$

Como os deslocamentos virtuais são arbitrários, da equação (6.3) obtém-se:

$$\{F_e\} = [G]^T \{F_a\} \quad (6.4)$$

Que modifica a equação (3.15) para:

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [\omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi_e]^T [G]^T \{F_a(t, x(t), \dot{x}(t))\} \quad (6.5)$$

Finalmente chega-se à equação que será resolvida numericamente:

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [\omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi_a]^T \{F_a(t, x(t), \dot{x}(t))\} \quad (6.6)$$

6.1.2 Interpolação por Splines de Superfície

A matriz $[\Phi_a]$ da equação (6.6), para que se possa aplicar o método da malha de vórtices, contém os modos descritos em função dos pontos de controle, onde as forças do anel são definidas. Logo, a dimensão de $[\Phi_a]$ deve ser o número de pontos de controle nas linhas pelo número de modos nas colunas. Para transmitir os deslocamentos para a malha aerodinâmica deve-se usar uma nova matriz, que contenha os modos escritos nas coordenadas dos vértices dos anéis. Sendo assim, a nova matriz teria dimensão e conjunto de pontos diferentes. Para representar cada uma dessas matrizes, chama-se $[\Phi_a]_{pc}$ a matriz com os modos escritos nos pontos de controle dos anéis, e $[\Phi_a]_{vt}$ a matriz com os modos escritos nos vértices dos anéis. As velocidades de deslocamentos dos pontos de controle, que são usados na aerodinâmica não estacionária (equação (5.26)) também são determinadas nos pontos de controle e são obtidas pelo mesmo método.

Resumindo tem-se, em cada passo da iteração:

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [\omega^2] \{\eta(t)\} = [\Phi_a]_{pc}^T \{F_a(t, x(t), \dot{x}(t))\} \quad (6.7)$$

$$\{\bar{z}_a\} = [\Phi_a]_{vt} \{\eta\} \quad (6.8)$$

$$\{\dot{\bar{z}}_a\} = [\Phi_a]_{pc} \{\dot{\eta}\} \quad (6.9)$$

Conhecendo a matriz modal para pontos da malha estrutural, obtém-se a matriz modal nas coordenadas da malha aerodinâmica (nos vértices e nos pontos de controle) através do método mais usual, que é o de interpolação por *Splines* de Superfície, desenvolvido por Harder e Desmarais (1972) e mostrado também por Benini (2002) e Silva (1994).

A interpolação por *Splines* de Superfície baseia-se na solução da equação da flexão de uma placa plana infinita. Sendo D a rigidez da placa, $\{w\}$ o vetor de deslocamentos, e $\{P\}$ o vetor de forças aplicadas, a equação da flexão é dada por

$$D\nabla^4\{w\}=\{P\} \quad (6.10)$$

Para uma força P aplicada na origem do sistema, a solução da equação (6.10) fica

$$w(r)=A+Br^2+\frac{P}{16\pi D}r^2\ln r^2 \quad (6.11)$$

onde r é uma coordenada polar dada por

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \quad (6.12)$$

e x_0 é a origem adotada neste caso.

Assumindo que uma deformação arbitrária na placa é resultado de uma somatória de deformações causadas por n forças em n pontos da malha estrutural, sendo que cada uma delas é considerada em relação a sua própria origem, a deformação pode ser descrita por

$$w(x,y)=\sum_{i=1}^n\left[A_i+B_ir_i^2+\frac{P_i}{16\pi D}r_i^2\ln r_i^2\right] \quad (6.13)$$

com

$$r_i^2=(x-x_i)^2+(y-y_i)^2 \quad (6.14)$$

A equação (6.13) pode ser simplificada da seguinte forma

$$w(x,y)=\sum_{i=1}^n\left\{A_i+B_i\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right]\right\}+\sum_{i=1}^n\left[\frac{P_i}{16\pi D}r_i^2\ln r_i^2\right] \quad (6.15)$$

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n \left\{ A_i + B_i \left[x^2 - 2xx_i + x_i^2 + y^2 - 2yx_i + y_i^2 \right] \right\} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{P_i}{16\pi D} r_i^2 \ln r_i^2 \right] \quad (6.16)$$

que desprezando os termos de segundo grau x^2 e y^2 (ou seja, truncando a somatória para obter futuramente um sistema linear) pode ser convertida em

$$w(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + \sum_{i=1}^n \left[\frac{P_i}{16\pi D} r_i^2 \ln r_i^2 \right] \quad (6.17)$$

que é a equação mais conhecida para interpolação por *splines* de superfície.

Alguns termos da equação (6.17) serão renomeados para simplificar o procedimento:

$$\frac{P_i}{16\pi D} = F_i \quad (6.18)$$

$$r_i^2 \ln r_i^2 = \kappa_i \quad (6.19)$$

Então

$$w(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + \sum_{i=1}^n F_i \kappa_i \quad (6.20)$$

Para encontrar os termos a_0 , a_1 , a_2 e os n termos F_i são necessárias $n+3$ equações. Essas equações serão as que garantem o equilíbrio estático da placa (equação (6.21)), as duas que garantem o equilíbrio de momento (equações (6.22) e (6.23)) e o conjunto da equação (6.20) resolvida para os mesmos n pontos em que se conhecem os deslocamentos w (equação (6.24)).

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \quad (6.21)$$

$$\sum_{i=1}^n F_i x_i = 0 \quad (6.22)$$

$$\sum_{i=1}^n F_i y_i = 0 \quad (6.23)$$

$$w_j = a_0 + a_1 x_j + a_2 y_j + \sum_{i=1}^n F_i \kappa_{ij} \quad (6.24)$$

onde

$$\kappa_{ij} = \left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right] \ln \left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right] \quad (6.25)$$

As equações de (6.21) a (6.24) formam um sistema linear, que pode ser escrito matricialmente da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 1 & x_1 & y_1 & \kappa_{11} & \kappa_{12} & \cdots & \kappa_{1n} \\ 1 & x_2 & y_2 & \kappa_{21} & \kappa_{22} & \cdots & \kappa_{2n} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & \kappa_{n1} & \kappa_{n2} & \cdots & \kappa_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (6.26)$$

O sistema (6.26) é resolvido para cada um dos modos naturais obtidos na simulação de elementos finitos. Conhecendo a geometria do modo já normalizado, segundo a equação (3.9), cada vetor modal é usado no lugar dos deslocamentos do sistema (6.26), e os diversos pontos x_i, y_i são os pontos em que esses modos foram escritos.

A partir da solução do sistema (6.26), conhecendo os parâmetros a_0, a_1, a_2 e F_i ($i=1,2,\dots,n$) para cada modo natural, pode-se calcular a equação (6.20) para quaisquer pontos x, y para os mesmos modos. A matriz $[\Phi_a]_{vt}$ é então obtida resolvendo para cada

modo a equação (6.20) para as posições dos vértices dos anéis no plano da asa. A matriz $[\Phi_a]_{pc}$ é obtida analogamente quando se calcula a equação (6.20) nos pontos de controle.

6.2 Método Preditor-Corretor

A equação (6.7), será resolvida iterativamente pois o vetor de forças aerodinâmicas, no seu lado direito, não pode ser descrito por funções analíticas conhecidas.

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [\omega^2] \{\eta(t)\} = [\Phi_a]_{pc}^T \{F_a(t, x(t), \dot{x}(t))\} \quad (6.7)$$

Sendo assim, será utilizado um método numérico para solucionar a equação diferencial. Foi escolhido o método preditor-corretor descrito por Lambert (1991), também usado no trabalho de Benini (2002).

Esse método é usado na integração numérica de equações diferenciais de primeira ordem. Assim, o sistema de n_m (número de modos naturais) equações de segunda ordem será convertido num sistema de $2n_m$ equações de primeira ordem. Basta fazer a seguinte transformação de variáveis

$$X_1 = \{\eta(t)\} \quad (6.27)$$

$$X_2 = \{\dot{\eta}(t)\} \quad (6.28)$$

Resultando num sistema composto por dois grupos de n_m equações.

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = [\Phi_a]_{pc}^T \{F_a(IT, x(IT), \dot{x}(IT))\} - [\omega^2] X_1 \end{cases} \quad (6.29)$$

No sistema acima, o tempo foi substituído simbolicamente pelo número da iteração, já que o incremento de tempo é constante ao longo da simulação, e pode ser substituído por

$$t = \Delta t \cdot IT \quad (6.30)$$

O sistema (6.29) pode ser escrito como um conjunto de equações onde a derivada primeira das variáveis é função das variáveis não derivadas.

$$\dot{X} = f(X) \quad (6.31)$$

Como o valor de $f(X)$ é conhecido a cada iteração, pode-se fazer

$$\dot{X}(IT) = f(IT) \quad (6.32)$$

onde f representa as funções do lado direito do sistema (6.29).

Finalmente, o método preditor-corretor de Lambert (1991) pode ser aplicado para integrar numericamente o sistema de equações diferenciais (6.32). Este método permite a solução do problema em intervalos de tempo inteiros e constantes. O grande problema no uso de métodos como o Runge-Kutta para este caso, é a necessidade de conhecer o valor da função f em intervalos intermediários da iteração (como $\Delta t/2$). Essa solução em intervalos intermediários torna a implementação numérica extremamente complicada, pois no processo iterativo, a posição da esteira é corrigida. Corrigir a posição da esteira para intervalos menores apenas para conhecer a solução naquele ponto, para voltá-la à posição original e finalmente obter sua posição na próxima iteração é um procedimento que tomaria muito tempo computacional, bem como muita memória física do computador para armazenar a informação da esteira em mais de uma posição.

Figura 6.1 – Diagrama do método preditor-corretor na forma PECLE

Seguindo o exemplo de Benini (2002), o método preditor-corretor será implementado na forma PECLE (LAMBERT, 1991), indicada no diagrama da Figura 6.1.

A família de métodos Adams-Bashforth será usada para as equações de previsão, e a família de métodos Adams-Moulton para as equações de correção (LAMBERT, 1991). A Tabela 6.1 mostra os valores utilizados. É importante observar que na iteração 2, existe apenas o passo preditor, que por simplicidade na implementação dos *loops* de iteração durante a programação do software, foi calculado como se fosse corretor, sem nada alterar no resultado. A Tabela 6.1 já mostra a iteração 2 da forma como foi implementada.

As equações para os passos de previsão (p) e correção (c) são respectivamente:

$$X_p(IT) = X(IT-1) + \frac{\Delta t}{A_p} [B_p f(IT-1) + C_p f(IT-2) + D_p f(IT-3) + E_p f(IT-4)] \quad (6.33)$$

$$X_c(IT) = X(IT-1) + \frac{\Delta t}{A_c} [B_c f(IT) + C_c f(IT-1) + D_c f(IT-2) + E_c f(IT-3)] \quad (6.34)$$

Onde os valores dos parâmetros constam na Tabela 6.1

Tabela 6.1 – Valores aplicáveis às equações (6.33) e (6.34).

IT	Previsão					Correção					W
	A_p	B_p	C_p	D_p	E_p	A_c	B_c	C_c	D_c	E_c	
2	----	----	----	----	----	1	1	0	0	0	0
3	2	3	-1	0	0	2	1	1	0	0	$-\frac{1}{6}$
4	12	23	-16	5	0	12	5	8	-1	0	$-\frac{1}{6}$
≥ 5	24	55	-59	37	-9	24	9	19	-5	1	$-\frac{1}{6}$

Sendo que o erro de truncamento local é dado por $X_c - X_p$. O valor do vetor X corrigido a cada iteração será dado então por:

$$X_c(IT) = X_c(IT) + W [X_c(IT) - X_p(IT)] \quad (6.35)$$

As primeiras n entradas do vetor X_c encontrado na equação (6.35) serão usados para calcular a malha aerodinâmica deformada (equação (6.8)), e as n entradas seguintes determinarão as velocidades de deslocamento dos pontos de controle (equação(6.9)).

O item 7.3.3 juntamente com o diagrama da Figura 7.8 mostram o procedimento completo para a solução do *flutter* com sistema de controle ativo, que será descrito no capítulo 7.

7.1 Introdução

A equação dinâmica já determinada para o problema é:

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [\omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi_a]_{pc}^T \{F_a(t, x(t), \dot{x}(t))\} \quad (6.7)$$

A partir dela pode-se notar que é extremamente difícil transformá-la num sistema em espaço de estados com uma matriz de controle definida, como é o caso de um sistema do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (7.1)$$

Quando a equação dinâmica é convertida num sistema de equações de primeira ordem, a matriz A resultaria de uma composição da matriz $[\omega^2]$ e da identidade. Já o lado direito da equação (6.7), acima, deveria ser convertido em Bu , onde u seria o ângulo de comando na superfície de controle. A dificuldade de encontrar B e u desacoplados, é que o comando será implementado numericamente como uma mudança no ângulo dos painéis correspondentes, de forma a alterar todo o vetor $\{F_a\}$. Além disso, provavelmente ainda resultaria numa matriz B com coeficientes variáveis no tempo.

Como o objetivo do trabalho é determinar as respostas no tempo para o sistema controlado, não será dada muita ênfase para um projeto otimizado de controlador no caso da asa finita e flexível. Uma solução mais simples foi adotada. O controlador será projetado a partir de uma análise com dois graus de liberdade para uma seção típica com controle.

7.2 Sistema de controle para o caso com dois graus de liberdade

Figura 7.1 - Modelo de flutter com dois graus de liberdade.

Supõe-se um sistema como na Figura 7.1, onde os graus de liberdade do movimento na vertical e da rotação de uma seção típica da asa estão associados respectivamente à flecha da flexão e ao ângulo de torção.

As forças de sustentação e momento picador serão aproximados como funções das variáveis α (ângulo de ataque), $\dot{\alpha}$ (taxa de variação no tempo do ângulo de ataque) e δ (ângulo da superfície de comando).

$$L = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 S \left[C_{L_0} + C_{L_{\alpha}} \alpha + C_{L_{\dot{\alpha}}} \dot{\alpha} + \gamma C_{L_{\delta}} \delta \right] \quad (7.2)$$

$$M = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 S c \left[C_{M_0} + C_{M_{\alpha}} \alpha + C_{M_{\dot{\alpha}}} \dot{\alpha} + \gamma C_{M_{\delta}} \delta \right] \quad (7.3)$$

Onde γ é a proporção da envergadura que possui comando.

O ângulo de ataque pode ser descrito como:

$$\alpha = \theta - \frac{\dot{z}}{V_\infty} \quad (7.4)$$

Substituindo a equação (7.4) em (7.2) e (7.3) fica:

$$L = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S \left[C_{L_0} + C_{L_\alpha} \theta - \frac{C_{L_\alpha}}{V_\infty} \dot{z} + C_{L_{\dot{\alpha}}} \dot{\theta} - \frac{C_{L_{\ddot{\alpha}}}}{V_\infty} \ddot{z} + \gamma C_{L_\delta} \delta \right] \quad (7.5)$$

$$M = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S c \left[C_{M_0} + C_{M_\alpha} \theta - \frac{C_{M_\alpha}}{V_\infty} \dot{z} + C_{M_{\dot{\alpha}}} \dot{\theta} - \frac{C_{M_{\ddot{\alpha}}}}{V_\infty} \ddot{z} + \gamma C_{M_\delta} \delta \right] \quad (7.6)$$

As equações que descrevem o movimento deste sistema, escritas em relação ao centro de gravidade (C.G.) são:

$$\sum \text{Forças Verticais} \Rightarrow L - Kz + Kx_e \theta = m\ddot{z} \quad (7.7)$$

$$\sum \text{Momentos} \Rightarrow M - Lx_c + Kx_e z - Kx_e^2 \theta - G\theta = I\ddot{\theta} \quad (7.8)$$

Sabendo que o modo natural relativo à flexão tem frequência ω_1 e forma ϕ_1 e o modo relativo à torção tem frequência ω_2 e forma ϕ_2 , normalizam-se as formas dos modos como a seguir:

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{m}} \quad (7.9)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{I}} \quad (7.10)$$

Faz-se agora a seguinte substituição de variáveis:

$$z = \phi_1 x_1 \quad (7.11)$$

$$\theta = \phi_2 x_2 \quad (7.12)$$

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad (7.13)$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \quad (7.14)$$

Aplicando a troca de variáveis nas equações (7.5) e (7.6), e multiplicando a equação (7.7) por ϕ_1 e a equação (7.8) por ϕ_2 tem-se:

$$q = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S \quad (7.15)$$

$$L = q C_{L_0} + q C_{L_\alpha} \phi_2 x_2 - q \frac{C_{L_\alpha}}{V_\infty} \phi_1 x_3 + q C_{L_{\dot{\alpha}}} \phi_2 x_4 - q \frac{C_{L_{\dot{\alpha}}}}{V_\infty} \phi_1 \dot{x}_3 + q \gamma C_{L_\delta} \delta \quad (7.16)$$

$$M = q c C_{M_0} + q c C_{M_\alpha} \phi_2 x_2 - q c \frac{C_{M_\alpha}}{V_\infty} \phi_1 x_3 + q c C_{M_{\dot{\alpha}}} \phi_2 x_4 - q c \frac{C_{M_{\dot{\alpha}}}}{V_\infty} \phi_1 \dot{x}_3 + q c \gamma C_{M_\delta} \delta \quad (7.17)$$

$$\dot{x}_3 = -\omega_1^2 x_1 + \omega_1^2 \frac{\phi_2}{\phi_1} x_e x_2 + \phi_1 L \quad (7.18)$$

$$\dot{x}_4 = \omega_1^2 \frac{\phi_2}{\phi_1} x_e x_1 - \omega_1^2 \frac{\phi_2^2}{\phi_1^2} x_e^2 x_2 - \omega_2^2 x_2 - \phi_2 x_c L + \phi_2 M \quad (7.19)$$

As equações (7.18) e (7.19) são escritas matricialmente como:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{31} \\ B_{41} \end{bmatrix} \{\delta\} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{31} \\ E_{41} \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Que será simplificada por

$$\dot{x} = Ax + B\delta + E \quad (7.21)$$

E cujos termos podem ser obtidos das equações de (7.15) a (7.19) e estão descritos a seguir.

$$A_{31} = -\frac{\omega_1^2}{1 + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S \phi_1^2 C_{L\dot{\alpha}}} \quad (7.22)$$

$$A_{32} = \frac{\omega_1^2 \frac{\phi_2}{\phi_1} x_e + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S \phi_1 \phi_2 C_{L\alpha}}{1 + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S \phi_1^2 C_{L\dot{\alpha}}} \quad (7.23)$$

$$A_{33} = \frac{-\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S \phi_1^2 C_{L\alpha}}{1 + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S \phi_1^2 C_{L\dot{\alpha}}} \quad (7.24)$$

$$A_{34} = \frac{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S \phi_1 \phi_2 C_{L\dot{\alpha}}}{1 + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S \phi_1^2 C_{L\dot{\alpha}}} \quad (7.25)$$

$$B_{31} = \frac{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S \gamma \phi_1 C_{L\delta}}{1 + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S \phi_1^2 C_{L\dot{\alpha}}} \quad (7.26)$$

$$E_{31} = \frac{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S \phi_1 C_{L_0}}{1 + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S \phi_1^2 C_{L\dot{\alpha}}} \quad (7.27)$$

$$A_{41} = \omega_1^2 \frac{\phi_2}{\phi_1} x_e + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S \phi_1 \phi_2 A_{31} (x_c C_{L\dot{\alpha}} - c C_{M\dot{\alpha}}) \quad (7.28)$$

$$A_{42} = -\omega_1^2 \frac{\phi_2^2}{\phi_1^2} x_e^2 - \omega_2^2 + \frac{1}{2} \rho V_\infty S \phi_2 \left[A_{32} \phi_1 (x_c C_{L\dot{\alpha}} - c C_{M\dot{\alpha}}) - V_\infty \phi_2 (x_c C_{L\alpha} - c C_{M\alpha}) \right] \quad (7.29)$$

$$A_{43} = \frac{1}{2} \rho V_\infty S \phi_1 \phi_2 \left[x_c C_{L\alpha} - c C_{M\alpha} + A_{33} (x_c C_{L\dot{\alpha}} - c C_{M\dot{\alpha}}) \right] \quad (7.30)$$

$$A_{44} = \frac{1}{2} \rho V_\infty S \phi_2 (A_{34} \phi_1 - V_\infty \phi_2) (x_c C_{L\dot{\alpha}} - c C_{M\dot{\alpha}}) \quad (7.31)$$

$$B_{41} = \frac{1}{2} \rho V_\infty S \phi_2 \left[B_{31} \phi_1 (x_c C_{L\dot{\alpha}} - c C_{M\dot{\alpha}}) - V_\infty \gamma (x_c C_{L\delta} - c C_{M\delta}) \right] \quad (7.32)$$

$$E_{41} = \frac{1}{2} \rho V_\infty S \phi_2 \left[E_{31} \phi_1 (x_c C_{L\dot{\alpha}} - c C_{M\dot{\alpha}}) - V_\infty (x_c C_{L_0} - c C_{M_0}) \right] \quad (7.33)$$

Considerando que as saídas do sistema sejam as leituras dos sinais por sensores de pressão em pontos da asa, o valor da medição (y) será dado por:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_\alpha & Y_{\dot{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_\alpha & Y_{\dot{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta - \frac{\dot{z}}{V_\infty} \\ \dot{\theta} - \frac{\ddot{z}}{V_\infty} \end{Bmatrix} \quad (7.34)$$

Que pode ser transformado em:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_\alpha & -\frac{Y_\alpha}{V_\infty} & Y_{\dot{\alpha}} & -\frac{Y_{\dot{\alpha}}}{V_\infty} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_2 Y_\alpha & -\frac{\phi_1 Y_\alpha}{V_\infty} & \phi_2 Y_{\dot{\alpha}} & -\frac{\phi_1 Y_{\dot{\alpha}}}{V_\infty} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} \quad (7.35)$$

Desprezando-se a influência da superfície de comando sobre a leitura do sensor, a partir da equação de $\dot{x}_3$ no sistema (7.20) tem-se

$$Y = [C_{11} \quad C_{12} \quad C_{13} \quad C_{14}] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + [H_{11}] \quad (7.36)$$

Que pode ser escrito simplesmente por:

$$Y = Cx + H \quad (7.37)$$

Onde os termos constantes são dados por:

$$C_{11} = \frac{\phi_1 Y_{\dot{\alpha}}}{V_{\infty}} A_{31} \quad (7.38)$$

$$C_{12} = \phi_2 Y_{\alpha} - \frac{\phi_1 Y_{\dot{\alpha}}}{V_{\infty}} A_{32} \quad (7.39)$$

$$C_{13} = -\frac{\phi_1 Y_{\alpha}}{V_{\infty}} - \frac{\phi_1 Y_{\dot{\alpha}}}{V_{\infty}} A_{33} \quad (7.40)$$

$$C_{14} Y = \phi_2 Y_{\dot{\alpha}} - \frac{\phi_1 Y_{\dot{\alpha}}}{V_{\infty}} A_{34} \quad (7.41)$$

$$H_{11} = -\frac{\phi_1 Y_{\dot{\alpha}}}{V_{\infty}} E_{31} \quad (7.42)$$

Na verdade, o vetor Y terá o mesmo número de linhas que o número de sensores. Para cada sensor serão calculadas as derivadas do tipo Y_{α} , $Y_{\dot{\alpha}}$. Para simplificar a demonstração, um caso com apenas um sensor será equacionado.

O sistema no espaço de estados poderá ser finalmente escrito como:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\delta + E \\ y = Cx + H \end{cases} \quad (7.43)$$

Resolver este problema seria equivalente a projetar um sistema de controle para uma planta do tipo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{7.46}$$

A maior parte da literatura (D'AZZO & HOUPIS, 1988; OGATA, 2003; FRANKLIN et al., 2006) aborda apenas plantas mais simples, como a da equação (7.1). Será realizado então, um método alternativo, com análises gráficas para encontrar a melhor matriz de ganho K_g .

Logo:

$$\delta = r_c + K_g C \dot{x}\tag{7.47}$$

Para considerar a malha fechada, substitui-se (7.47) em (7.43):

$$\dot{x} = Ax + Br_c + BK_g C \dot{x} + E\tag{7.48}$$

$$(I - BK_g C) \dot{x} = Ax + Br_c + E\tag{7.49}$$

$$\dot{x} = (I - BK_g C)^{-1} Ax + (I - BK_g C)^{-1} Br_c + (I - BK_g C)^{-1} E\tag{7.50}$$

Onde I é a matriz identidade.

A matriz dinâmica do problema com controle de malha fechada é dada por:

$$A_{cl} = (I - BK_g C)^{-1} A\tag{7.51}$$

Sabe-se que os autovalores de A_{cl} estarão relacionados com os modos do sistema.

Sendo assim, deve-se investigar os autovalores de A_{cl} procurando uma matriz linha K_g , de forma a obter um amortecimento máximo ou um que seja conveniente.

Os autovalores de A_{cl} serão calculados de acordo com o procedimento a seguir.

$$Q(\lambda) = |\lambda I - A_{cl}| = \left| \lambda I - (I - BK_g C)^{-1} A \right| = 0 \quad (7.52)$$

O amortecimento é dado em função das partes imaginária e real dos autovalores de acordo com:

$$\zeta = -\frac{real}{\sqrt{real^2 + imag^2}} \quad (7.53)$$

Para resolver a equação (7.52), pode-se seguir o seguinte procedimento, como proposto por D'Azzo e Houpis (1988) como método para projeto de controladores para plantas do tipo mostrado na equação (7.1):

1) substituir os valores numéricos de todos os termos das matrizes A , B e C .

2) Encontrar a equação característica $Q(\lambda) = 0$ em função dos termos variáveis (literais) da matriz K_g ;

3) Atribuir os autovalores desejados na variável λ e obter os valores de K_g . Quando casos como este acontece, em que apenas uma saída é realimentada para controlar vários autovalores, não é possível escolher todos os autovalores. Sendo assim, pode-se escolher um deles e encontrar o outro, e verificar se é satisfatório.

Um método alternativo é fazer uma análise semelhante ao método do lugar das raízes, onde se faz K_g variar e verifica-se o comportamento dos quatro autovalores. Na verdade, este método gráfico é mais simples por evitar inverter uma matriz com variáveis desconhecidas. Ao mesmo tempo ele permite uma rápida otimização do sistema, bastando escolher um ponto de interesse, como o de máximo amortecimento (se esse ponto existir!).

7.3 Sistema de controle para o caso da asa finita flexível

7.3.1 Introdução

No caso da asa flexível, o equacionamento da planta é desconhecido, mas assume-se que o modelo bidimensional descrito no item 7.2 represente um modelo completo como o apresentado pelo seguinte diagrama de blocos:

Figura 7.3 - Diagrama de blocos para o modelo completo.

A planta corresponde a toda a modelagem aerodinâmica e de dinâmica estrutural usada para calcular a resposta aeroelástica do sistema. A derivada $\frac{d}{dt}$ pode ser calculada, ao longo das simulações como a diferença de pressão entre duas iterações simultâneas dividida pelo intervalo de tempo de uma iteração. O método gráfico descrito no fim do item 7.2 pode ser usado também aqui com facilidade, para que se possa comparar os resultados entre o caso bi-dimensional e o da asa finita flexível.

7.3.2 Modelagem da superfície de comando

A superfície de comando é feita deslocando os painéis do bordo de fuga. Varia-se a posição dos pontos que compõem o comando perpendicularmente ao plano da asa.

Figura 7.4 - Deflexão do comando.

Sendo os sub-índices p indicativos do ponto que será corrigido, e d da posição da dobradiça do comando, a posição corrigida de um ponto qualquer pertencente ao comando é dado por:

$$z_{p_2} = z_{p_1} - (x_p - x_d) \operatorname{tg} \delta \quad (7.54)$$

Onde as variáveis podem ser vistas na Figura 7.4.

A equação (7.54) foi inicialmente aplicada apenas aos painéis do comando, contudo, pôde-se verificar que os pontos da esteira divergem quando o ângulo de comando é pequeno. Como a lei de Biot-Savart mostra que a velocidade induzida varia inversamente com a distância (equação (5.20)), dois segmentos de vórtice muito próximos tendem a induzir velocidade muito altas um no outro. Assim, quando se calcula a velocidade no primeiro ponto da esteira onde a parte móvel se separou da parte fixa, a parte fixa induz uma velocidade muito alta no ponto da esteira que sai da parte móvel e vice versa, como mostrado no exemplo da Figura 7.5. Para corrigir esse problema, os anéis onde as partes fixa e móvel se separam (Figura 7.6) são levemente corrigidos para um ponto médio de suas posições, como mostra a Figura 7.7. Assim, cessa o problema de divergência dos pontos da esteira quando o ângulo de comando é pequeno.

Figura 7.5 – Proximidades entre segmentos causando divergência entre os anéis da esteira.

Figura 7.6 - Vão entre partes móvel do comando e fixa do bordo de fuga da asa. A esteira deveria apresentar este comportamento.

Esse tipo de correção foi inspirada no trabalho de Bartels e Schuster (2000), que apesar de tê-la usado em método de solução da equação de Navier-Stokes tridimensional, também se mostrou bastante eficiente no método da malha de vórtices.

Figura 7.7 - Junção entre comando e asa corrigida. Os painéis corrigidos estão marcados em verde

O ângulo de comando é corrigido então, em cada passo da iteração, conforme a lei de comando dada pela equação (7.44). O valor de r_c nessa equação corresponde, por exemplo, a um comando de aileron que o piloto esteja impondo para rolar a aeronave. No caso deste trabalho, que analisa somente a capacidade de controle por realimentação, essa variável será mantida nula, de forma que a lei de controle se reduz a:

$$\delta = K_g \dot{Y} \quad (7.55)$$

7.3.3 Sistema completo para solução do *flutter* com controle ativo

O equacionamento para obter a resposta no tempo do sistema aeroelástico com controle ativo para supressão de *flutter* está completo. Um resumo do algoritmo usado pode ser visto no diagrama da Figura 7.8. O *loop* da iteração é executado até um número de iterações especificado juntamente com os parâmetros de entrada. Como o intervalo de tempo é constante ao longo da simulação, pode-se tomar por base o número de iterações sabendo aproximadamente o tempo total da simulação e o intervalo de tempo. O intervalo de tempo, assim como descrito por Benini (2002) influencia bastante a precisão dos resultados. Quando o intervalo de tempo é muito grande, a simulação atinge o tempo final escolhido rapidamente (menos esforço computacional), contudo, o erro na resposta é demasiadamente grande, e às vezes chega a divergir o resultado ou oscilar de maneira não harmônica. Quando o intervalo é pequeno o suficiente, a precisão da resposta já é maior, contudo o tempo computacional também aumenta. Benini (2002) assume que a resposta é satisfatoriamente precisa quando ao diminuir mais o intervalo de tempo das iterações, a variação nos resultados deixa de ser significativa para alterar as conclusões sobre o caráter da resposta aeroelástica. Esse mesmo critério foi adotado neste trabalho.

Pode-se fazer alguns breves comentários sobre os blocos da Figura 7.8:

Bloco 1 – Os dados de entrada são aqueles necessários para determinar a geometria do modelo aerodinâmico, tais como dados geométricos da planta da asa e da linha de *camber* (determinada como descrito no item 5.1.2) e a corda e área de referência para adimensionalização dos coeficientes aerodinâmicos. São também dados de entrada as condições da simulação tais como densidade do ar, velocidade do escoamento livre, ângulo de incidência do modelo, comprimento de corte da esteira (como descrito no item 5.2.4), número de iterações, tamanho do intervalo de tempo de cada iteração, posicionamento do(s) sensor(es) de pressão e ganho da realimentação.

Figura 7.8 – Diagrama de blocos representativo do algoritmo usado na simulação de resposta aeroelástica de um sistema malha fechada.

Bloco 2 – Os dados estruturais correspondem às frequências naturais dos modos naturais utilizados e matrizes modais nas coordenadas dos nós dos anéis de vórtice e nas coordenadas dos seus pontos de controle.

Bloco 3 – Rotina puramente geométrica, onde a posição de cada nó dos anéis é determinada para o caso inicial, ou seja, sem deslocamentos devido à deformação estrutural.

Bloco 4 – De acordo com o item 5.2.5, a primeira fileira de anéis da esteira, imediatamente atrás do bordo de fuga possui os valores de intensidade dos vórtices desconhecidos. Essas vorticidades serão encontradas como parte da solução do sistema aerodinâmico, para satisfazer a condição de Kutta. Sendo assim, para dar início à simulação é necessário que já exista a primeira fileira com vorticidades desconhecidas para que o sistema aerodinâmico tenha solução.

Passo preditor – As rotinas internas do passo preditor só são executadas a partir da terceira iteração, já que não existe um passo preditor de acordo com a Tabela 6.1 para iterações inferiores a 3.

Bloco 5 – Rotina que executa o passo preditor para resolver a equação dinâmica do problema (equação (6.33))

Bloco 6 – A solução da equação dinâmica fornece os deslocamentos nodais da malha aerodinâmica e as velocidades dos pontos de controle. Esses dados são usados para corrigir o posicionamento da malha.

Bloco 7 – Com a malha aerodinâmica atualizada, o sistema aerodinâmico é resolvido como descrito no item 5.2.5.

Bloco 8 – As vorticidades da malha da asa são convertidas em forças, obtendo um carregamento sobre toda a asa. Esse processo é detalhado no item 5.3.

Passo corretor – As rotinas internas deste passo são executadas desde a iteração 1, com exceção do bloco 9.

Bloco 9 – Rotina que executa o passo corretor para resolver a equação dinâmica do problema. Esse bloco não é executado na iteração 1, pois ele depende do conhecimento do carregamento, que na iteração 1 ainda não existe (pois o passo corretor não foi executado). Na

iteração 2, ele usa o carregamento obtido pelo próprio passo corretor na iteração 1. Nas outras iterações essa rotina é executada normalmente, executando o procedimento corretor de acordo com as equações (6.34), (6.35) e dados da Tabela 6.1 utilizando os carregamentos obtidos no passo preditor.

Bloco 10 – Atualização do ângulo da superfície de controle. Este bloco representa o fechamento da malha na Figura 7.3. Essa rotina normalmente é executada depois de algum tempo de simulação (como descrito no item 8.2), e deve ser executada no mínimo a partir da segunda iteração, pois como depende da derivada da sustentação no ponto do sensor, é necessário encontrar o carregamento daquele painel duas vezes para calcular a equação (7.56).

$$\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{Y(IT) - Y(IT-1)}{\Delta t} \quad (7.56)$$

Onde IT é o número da iteração e Δt é o intervalo de tempo correspondente a uma iteração.

Bloco 11 – Como foi descrito no item 5.2.4, em cada passo da iteração, uma nova fileira de anéis é acrescentada à esteira imediatamente atrás do bordo de fuga da asa, e uma fileira antiga é retirada do fim da esteira.

Bloco 12 – Quando a simulação atingiu o número de iterações desejado, uma rotina geométrica gera um arquivo de saída para visualização da malha da asa e da esteira em software de CAD.

Bloco 13 – A cada passo da iteração, os valores das componentes de cada modo natural no movimento da estrutura são escritos num arquivo de saída. Outros dados de interesse do usuário também são escritos por essa rotina, como por exemplo a sustentação total da asa e o ângulo da superfície de controle ao longo do tempo.

CAPÍTULO 8 | Resultados

8.1 Resultados preliminares

Algumas simulações foram feitas para verificar as limitações do método usado, e as possíveis simplificações que possam resultar em diminuição do tempo computacional das simulações. Os resultados comentados para estas simulações são mostrados a seguir.

8.1.1 Refinamento da malha da asa

Do modelo estrutural em elementos finitos, descrito no item 4.2, todos os nós presentes no intradorso da asa foram usados para a interpolação por splines de superfície (item 6.1.2). A malha aerodinâmica foi então testada para alguns refinamentos diferentes. Para todas as simulações executadas neste estudo das características do refinamento da malha foram usados os parâmetros listados na Tabela 8.1.

Tabela 8.1 – Condições das simulações para determinação do refinamento da malha da asa.

Perfil	Placa plana
Densidade do ar	1,225 kg/m ³
Velocidade do escoamento	100,0 m/s
Numero de iterações	3751
Intervalo de tempo de cada iteração	0,00008s
Tempo total da simulação	0,30000s
Ângulo de ataque	5,00°
Comprimento da esteira	1,00 m

Inicialmente a quantidade de painéis ao longo da envergadura foi verificada. Com 4 painéis ao longo da corda, o modelo foi simulado para 13 e 26 divisões ao longo da envergadura. Os resultados dos primeiros modos de flexão e torção podem ser vistos na Figura 8.1 e na Figura 8.2 respectivamente. Fica claro que a influência do refinamento ao longo da envergadura é quase desprezível, mesmo ao dobrar o número de elementos.

Para averiguar a importância do refinamento ao longo da corda, a envergadura ficou dividida em 13 painéis e a corda foi dividida em 4, 5, 6, 8 e 10 painéis. Os resultados para os modos de flexão e torção para todos os casos podem ser vistos na Figura 8.3 e na Figura 8.4. Pode-se notar que a divisão em apenas 4 painéis apresenta um resultado muito pobre. Os resultados para 8 e 10 divisões são bastante próximos, apresentando o mesmo comportamento e um pequeno erro na amplitude de oscilação. Contudo, a Figura 8.5 mostra o aumento do esforço computacional com relação ao aumento de painéis ao longo da corda. Sendo assim, a divisão em 8 painéis foi utilizada. Benini (2002) apresenta uma comparação de seu modelo (4 divisões ao longo da corda) com a solução analítica de Wagner apresentada em Bisplinghoff et al. (1996) para uma asa rígida em aceleração súbita obtendo ótimos resultados. Contudo, esse modelo não prevê a oscilação do perfil no sentido da arfagem. Essa oscilação demanda maior precisão na distribuição do carregamento ao longo da corda, e por isso mais painéis foram necessários para o caso da resposta aeroelástica.

Tendo escolhido 8 divisões ao longo da corda, uma nova simulação foi feita para verificar se um maior refinamento na corda pede um maior refinamento na envergadura. Novamente o refinamento da envergadura não mostrou nenhuma vantagem, como pode ser visto na Figura 8.6 e na Figura 8.7.

A malha selecionada para todas as simulações adiante terá 8 divisões ao longo da corda e 13 ao longo da envergadura.

Figura 8.1 – Comparação do comportamento do 1º modo de flexão para uma variação no refinamento da malha ao longo da envergadura.

Figura 8.2 – Comparação do comportamento do 1º modo de torção para uma variação no refinamento da malha ao longo da envergadura.

Figura 8.3 – Comparação do comportamento do 1º modo de flexão para uma variação no refinamento da malha ao longo da corda.

Figura 8.4 – Comparação do comportamento do 1º modo de torção para uma variação no refinamento da malha ao longo da corda.

Figura 8.5 – Variação do tempo computacional da simulação com o refinamento da malha na corda.

Figura 8.6 – Comparação do comportamento do 1º modo de flexão para uma variação no refinamento da malha ao longo da envergadura para malha já refinada na corda.

Figura 8.7 – Comparação do comportamento do 1º modo de torção para uma variação no refinamento da malha ao longo da envergadura para malha já refinada na corda.

8.1.2 Tamanho da esteira

No item 5.2.4 foi proposto estudar os efeitos da utilização de uma esteira de comprimento reduzido no modelo aeroelástico. Inicialmente, o modelo com esteira completa foi calculado para as condições da Tabela 8.2

Tabela 8.2 – Condições das simulações para determinação da influência do tamanho da esteira.

Perfil	Placa plana
Densidade do ar	1,225 kg/m ³
Velocidade do escoamento	75,0 m/s
Numero de iterações	3751
Intervalo de tempo de cada iteração	0,00008 s
Tempo total da simulação	0,30000 s
Ângulo de ataque	5,00°
Malha da asa (corda X envergadura)	4 x 8

A curva obtida como resultado apresenta resultado com oscilação harmônica em todos os modos. A oscilação harmônica apresenta uma variação de amplitude exponencial com o

tempo. Quando esse coeficiente do exponencial é positivo significa que o sistema está divergindo, ou seja, está ocorrendo o *flutter*. Quando valor do exponencial é negativo, a amplitude diminui com o tempo, ou seja, a velocidade está abaixo da velocidade crítica e o *flutter* não ocorre. Para o caso da simulação com a esteira completa, o valor obtido para esse exponencial no 1º modo de flexão foi de 3,3215, e a simulação levou 13,6 horas para ser concluída.

Para reduzir esse tempo computacional, foram verificados os resultados obtidos para o exponencial do 1º modo de flexão para diversos comprimentos de esteira, desde 0,5m até 6,0m. A variação desse exponencial com relação ao comprimento da esteira é mostrada na Figura 8.8. Uma análise comparativa é mostrada na Figura 8.9, considerando 100% o erro no caso da esteira de 0,5m conclui-se que uma esteira de 4,0m já é bastante precisa (cerca de 3% do erro da esteira de 0,5m). O tempo computacional para uma esteira de 4,0m ficou em 4,6 horas. Pode-se concluir então que é uma grande vantagem reduzir o comprimento da esteira. A Figura 8.10 mostra o tempo gasto em todas as simulações variando-se o comprimento da esteira. Todos os casos foram testados nas mesmas condições mostradas na Tabela 8.2.

Para fazer a verificação final dos resultados, pode-se comparar os primeiros modos de flexão e torção para a esteira completa e de 4,0m na Figura 8.11 e na Figura 8.12. A diferença entre os resultados é desprezível. Uma característica importante que pôde ser observada é que ajustando o comprimento da esteira através apenas do 1º modo de flexão, os demais modos acabaram ficando bem representados também.

Figura 8.8 – Comportamento do decaimento exponencial do 1º modo de flexão para variação no comprimento de corte da esteira.

Figura 8.9 – Erro no decaimento exponencial do 1º modo de flexão para variação no comprimento de corte da esteira.

Figura 8.10 – Variação do tempo computacional da simulação para variação no comprimento de corte da esteira.

Figura 8.11 – Comparação do primeiro modo de flexão para os casos de esteira completa e esteira de 4 metros.

Figura 8.12 – Comparação do primeiro modo de torção para os casos de esteira completa e esteira de 4 metros.

8.1.3 Tipo de esteira

Uma explicação sobre o tipo de esteira é dada no item 5.2.4. A esteira foi chamada de plana quando seu movimento é influenciado apenas pela velocidade do escoamento livre, e foi chamada 3D quando se deforma devido à velocidade do fluxo livre e das velocidades induzidas por todos os segmentos de vórtice do modelo (tanto da asa quanto da própria esteira).

Benini (2002) também fez uma análise do tipo de esteira comparando com a solução de Wagner apresentada em Bisplinghoff et al. (1996) para uma asa rígida em aceleração súbita. Da mesma forma que o estudo do refinamento da malha ao longo da corda (item 8.1.1) mostrou que o fato da solução do problema da asa rígida apresentar resultados próximo à

solução analítica de Wagner não implica em bons resultados no caso aeroelástico, optou-se por refazer os testes quanto ao tipo de esteira para o problema aeroelástico. A Figura 8.16 e a Figura 8.17 mostram que os resultados são praticamente idênticos para os dois tipos de esteira.

A esteira 3D, no entanto, necessita que as velocidades induzidas por todo o sistema sejam calculadas em todos os pontos da esteira. A esteira plana teve a solução encontrada em 2,2 horas enquanto que a esteira 3D foi calculada em 80,0 horas. Não existe ganho significativo de precisão para compensar o excessivo aumento no esforço computacional. A esteira 3D ganharia bastante importância, podendo até se tornar mandatória em casos onde seu real posicionamento tenha importância, como é o caso da esteira da asa excitando fenômenos aeroelásticos em outras superfícies.

Todas as simulações executadas adiante farão uso da esteira plana.

Ambas as simulações foram feitas com as condições da Tabela 8.3.

Tabela 8.3 – Condições das simulações para determinação da influência do tipo de esteira.

Perfil	Placa plana
Densidade do ar	1,225 kg/m ³
Velocidade do escoamento	75,0 m/s
Numero de iterações	1809
Intervalo de tempo de cada iteração	0,00008 s
Tempo total da simulação	0,144639 s
Ângulo de ataque	5,00°
Comprimento da esteira	4,00 m
Malha da asa (corda X envergadura)	8 x 13

Figura 8.13 – Esteira plana no instante da iteração 1809 (forma um plano em regime permanente e um histórico das posições do bordo de fuga em regime não estacionário).

Figura 8.14 – Esteira 3D no instante da iteração 109 (A esteira ainda não atingiu o comprimento de corte de 4,0 m, e por isso ainda exibe o vórtice inicial)

Figura 8.15 – Esteira 3D no instante da iteração 546 (A esteira ainda não atingiu o comprimento de corte de 4,0 m, e por isso ainda exibe o vórtice inicial).

Figura 8.16 – Comportamento do 1º modo de flexão para os casos de esteira plana e 3D.

Figura 8.17 – Comportamento do 1º modo de torção para os casos de esteira plana e 3D.

8.1.4 Influência do *camber*

Uma verificação da influência do *camber* do perfil foi feita. Para tanto, dois casos, um com perfil placa plana, e outro com o perfil mostrado na Figura 5.3, foram simulados segundo as condições da Tabela 8.4. Os resultados foram, também, comparados com o modelo de Benini (2002), com as considerações de seu trabalho.

Tabela 8.4 – Condições das simulações para determinação da influência do *camber*.

Densidade do ar	1,225 kg/m ³
Velocidade do escoamento	20,0 m/s e 75,0 m/s
Numero de iterações	Equação (8.2)
Intervalo de tempo de cada iteração	Equação (8.1)
Tempo total da simulação	0,30000 s
Ângulo de ataque	5,00°
Comprimento da esteira	4,00 m
Malha da asa (corda X envergadura)	8 x 13

Os resultados para o primeiro modo de flexão são mostrados na Figura 8.18 e na Figura 8.20. Os resultados para o primeiro modo de torção são mostrados na Figura 8.19 e na Figura 8.21. Pode-se notar que a grande diferença entre os casos é que eles oscilam em torno de valores diferentes. O valor da excitação inicial também muda, alterando as amplitudes de oscilação. Contudo, a frequência da oscilação praticamente não sofreu nenhuma alteração.

Em paralelo, nota-se que o erro do modelo de Benini (2002) em relação a este trabalho aumenta com a velocidade. Esse erro foi atribuído ao pouco refinamento usado na malha de Benini (2002), caso que já foi estudado e comentado no item 8.1.1. A 75 m/s a asa já está em *flutter*, enquanto que no modelo de Benini (2002) ainda apresenta um caráter amortecido na oscilação.

Figura 8.18 – Comportamento a 20 m/s do 1º modo de flexão para os casos de perfil placa plana e com *camber*, e resultado do modelo de Benini (2002).

Figura 8.19 – Comportamento a 20 m/s do 1º modo de torção para os casos de perfil placa plana e com *camber*, e resultado do modelo de Benini (2002).

Figura 8.20 – Comportamento a 75 m/s do 1º modo de flexão para os casos de perfil placa plana e com *camber*, e resultado do modelo de Benini (2002).

Figura 8.21 – Comportamento a 75 m/s do 1º modo de torção para os casos de perfil placa plana e com *camber*, e resultado do modelo de Benini (2002).

8.1.5 Velocidade de *flutter*

Para que se possa controlar uma asa em *flutter* é necessário antes determinar uma velocidade que esteja acima da velocidade crítica de *flutter*. Para isso simulações foram feitas variando-se a velocidade do fluxo para conhecer melhor o comportamento aeroelástico da asa. Em todas as simulações adotaram-se as seguintes condições:

Tabela 8.5 – Condições das simulações para determinação da velocidade de *flutter*.

Perfil	<i>Camber</i> da Figura 5.3
Densidade do ar	1,225 kg/m ³
Velocidade do escoamento	de 10,0 m/s a 85,0 m/s
Numero de iterações	Equação (8.2)
Intervalo de tempo de cada iteração	Equação (8.1)
Tempo total da simulação	0,30000 s
Ângulo de ataque	5,00°
Comprimento da esteira	4,00 m
Malha da asa (corda X envergadura)	8 x 13

O intervalo de tempo de cada iteração foi tal que o número de painéis na esteira fosse fixo e igual àquele obtido para a esteira de 4,0 m a 75,0 m/s de velocidade de escoamento. Sendo assim, os valores de intervalo de tempo podem ser dados por:

$$\Delta t = \frac{75 \cdot 0,00008}{V_{\infty}} \Rightarrow \Delta t = \frac{0,006}{V_{\infty}} \quad (8.1)$$

O número de iterações é escolhido de forma a manter o tempo total da simulação sempre em 0,30000s. O número de iterações foi obtido de acordo com:

$$N_{it} = \text{truncar} \left(\frac{0,30000}{\Delta t} \right) + 1 = \text{truncar} (50 V_{\infty}) + 1 \quad (8.2)$$

Como mostra a Figura 8.22, até aproximadamente 60,0m/s o valor do primeiros modo de flexão tende a valores maiores em regime estacionário. Isso é resultado do aumento de velocidade, que implica em aumento das deformações na asa. O amortecimento do sistema também aumenta com a velocidade, como era previsto. A 60,0 m/s, o modo de flexão já

começa a mostrar sinais de acoplamento com outros modos, numa frequência diferente. A Figura 8.23 mostra os resultados para velocidades maiores que 60,0 m/s. Nota-se que o valor médio de sustentação começa a diminuir, o que sugere que o ponto de equilíbrio da torção muda, representando além de problemas estruturais, uma perda de desempenho por impedir que a asa gerasse toda sustentação possível. Com aproximadamente 70,0 m/s a amplitude de oscilação permanece quase constante para o 1º modo de flexão mas ainda é decrescente no 1º modo de torção, o que significa que a velocidade crítica de *flutter* é próxima de 70,0 m/s. A 75,0 m/s a asa já está em *flutter*. A Figura 8.25 mostra o primeiro modo de torção para as velocidades até 60,0 m/s e a Figura 8.26 para as velocidades entre 60,0 m/s e 75 m/s. Foram simulados casos com velocidades ainda mais altas, até 85 m/s, cujos resultados estão mostrados na Figura 8.24 e na Figura 8.27.

O estudo e desenvolvimento do sistema de controle será feito a 75,0 m/s, embora os casos com velocidades mais altas também tenham sido verificados a título de comparação.

Figura 8.22 – Comportamento do 1º modo de flexão para velocidades até 60 m/s.

Figura 8.23 – Comportamento do 1º modo de flexão para velocidades entre 60 m/s e 75 m/s.

Figura 8.24 – Comportamento do 1º modo de flexão para velocidades entre 75 m/s e 85 m/s.

Figura 8.25 – Comportamento do 1º modo de torção para velocidades até 60 m/s.

Figura 8.26 – Comportamento do 1º modo de torção para velocidades entre 60 m/s e 75 m/s.

Figura 8.27 – Comportamento do 1º modo de torção para velocidades entre 75 m/s e 85 m/s.

8.2 Análises do sistema de controle

8.2.1 Controle da seção típica

A modelagem da seção típica permite encontrar facilmente o comportamento aeroelástico para diversas velocidades. Antes de trabalhar com o sistema de controle, uma análise do fator de amortecimento do sistema foi feita em função da velocidade do fluxo. Esse fator de amortecimento (equação (7.53)) é calculado a partir dos autovalores da matriz A do sistema no espaço de estados.

Theodorsen (1935) representa a asa através da seção localizada a 75% da semi-envergadura. Os resultados do método dos elementos finitos permitiram encontrar a flecha e a rotação desta seção para um dado carregamento. A partir daí encontrou-se as constantes elásticas das molas linear (K) e de torção (G). As frequências, e dados inerciais (massa e momento de inércia) dos modos também são conhecidos. As derivadas aerodinâmicas

encontradas para o perfil foram determinadas de acordo com o item 5.1.3. Aplicando todas estas informações ao modelo descrito no item 7.2 o resultado encontrado foi uma velocidade crítica de *flutter* de cerca de 350 m/s. Esse erro em relação à velocidade encontrada no item 8.1.5 (cerca de 70 m/s) é muito grande. Os parâmetros inerciais e elásticos influenciam diretamente dados como amplitude do movimento e frequência do modo. Sendo assim, conclui-se que o erro provavelmente se deve ao cálculo das forças aerodinâmicas. Dentre as derivadas aerodinâmicas do perfil, aquelas em relação ao ângulo de ataque e ao ângulo de comando podem ser encontradas com bastante precisão. Pôde-se constatar que o erro na previsão das derivadas em relação à taxa de variação do ângulo de ataque ($\dot{\alpha}$) exerce muita influência sobre a velocidade de *flutter*. Para adaptar o modelo bidimensional ao da asa finita, as derivadas em relação a $\dot{\alpha}$ foram corrigidas até que a velocidade de *flutter* ficasse em torno de 70m/s. A Figura 8.28 mostra a variação do fator de amortecimento em relação à velocidade. O ponto onde o amortecimento é nulo representa a velocidade crítica de *flutter*.

Posteriormente, ao aplicar uma realimentação com ganho K_g , verificou-se novamente a variação do fator de amortecimento para a nova matriz dinâmica do sistema (A_{cl}), calculada pela equação (7.51). A Figura 8.29 mostra os resultados para uma velocidade de 75m/s (a mesma já selecionada para as simulações de controle do modelo numérico da asa finita) e sensor posicionado no primeiro painel da corda, onde a diferença de pressão entre o intradorso e extradorso é máxima.

Pela Figura 8.29 pode-se notar que o amortecimento aumenta com o ganho, sendo que para valores de ganho entre 0,06 e 0,08, o amortecimento já é praticamente máximo. É bem possível que com o uso de mais de um sensor o sistema possa atingir amortecimentos maiores. Contudo, este método gráfico proposto para a escolha do ganho é muito trabalhoso quando o número de sensores aumenta. Conforme proposto inicialmente, casos com mais de uma saída não serão analisados neste trabalho.

Figura 8.28 – Variação do fator de amortecimento do modelo da seção típica não controlada em relação à velocidade.

Figura 8.29 - Variação do fator de amortecimento do modelo da seção típica controlada em relação ao ganho da realimentação (velocidade de 75m/s).

8.2.2 Controle da asa finita flexível

A asa finita também vai ser controlada com o uso de um único sensor e um ganho de realimentação. Contudo, duas variáveis podem ser trabalhadas: o ganho e a posição do sensor. Para concluir o melhor desses dois casos, diversas simulações foram feitas para os painéis 11, 13, 39 e 65, de acordo com a Figura 8.30. Todas as simulações foram feitas nas condições da Tabela 8.6

Tabela 8.6 – Condições das simulações de controle.

Perfil	<i>Camber</i> da Figura 5.3
Densidade do ar	1,225 kg/m ³
Velocidade do escoamento	75,0 m/s
Numero de iterações	3751
Intervalo de tempo de cada iteração	0,00008 s
Tempo total da simulação	0,30000 s
Instante em que o sistema de controle é ligado	0,0500 s
Ângulo de ataque	5,00°
Comprimento da esteira	4,00 m
Malha da asa (corda X envergadura)	8 x 13

Figura 8.30 – Posição dos sensores. Os sensores foram posicionados um por vez nos painéis destacados.

O painel 13 foi escolhido para dar início aos testes por ser o primeiro painel em relação à corda (posição onde a diferença de pressão entre intradorso e extradorso é máxima) e por ser o último da envergadura (onde a flexão e torção são máximas). Depois foi feito um estudo para o painel 39 e 65, posicionados mais distantes do bordo de ataque. Posteriormente o painel 11, mais distante da ponta da asa. A Figura 8.31 mostra os resultados encontrados para todas as simulações. O modelo aeroelástico determina a participação de cada modo no deslocamento da estrutura ao longo do tempo. A partir dessas curvas, aplicando-se a transformada de Fourier, pode-se encontrar a resposta do sistema no domínio da frequência.

Essas respostas apresentam um pico característico na frequência dominante do sistema. Esse pico é menor quanto maior for o amortecimento do sistema. Assim, com a intenção de quantificar o amortecimento do sistema, a intensidade desse pico foi utilizada. A influência do ganho foi estudada comparando-se a relação entre os picos das respostas no domínio da frequência dos resultados encontrados nos casos controlados com o caso não controlado (ganho nulo).

O comportamento geral do ganho pode ser verificado através das curvas dos painéis 13 e 39. O máximo valor de ganho mostrado para esses painéis é representado pelo último ponto da curva. O painel 13 confirma que a partir de um ganho de aproximadamente 0,067 o amortecimento praticamente não aumenta (mesmo resultado encontrado no item 8.2.1). As curvas dos painéis 13 e 39 mostram que para valores iguais de ganho, o amortecimento para painéis mais próximos do bordo de fuga é menor que aqueles para painéis próximos ao bordo de ataque.

Para os painéis 65 e 11, apenas o máximo valor máximo de ganho está mostrado na Figura 8.31. Os valores máximos de ganho simulados para os painéis 13 e 39 correspondem ao último ponto de suas respectivas curvas. De acordo com os resultados encontrados para o caso da seção típica, não deveria haver um valor máximo para o ganho. No entanto do ponto de vista numérico aparece um agravante. Para valores de ganho muito altos a variação do ângulo na superfície de comando altera a leitura de pressão nos painéis onde o sensor foi aplicado resultando num sistema onde o comando excita o sinal do sensor e o sistema diverge. A Figura 8.33 mostra o ângulo da superfície de comando ao longo do tempo, e exhibe alguns trechos de fortes ruídos no ângulo da superfície. Esse ruído é a causa da divergência. Esse problema poderia ser corrigido implementando-se algum filtro de frequência passa baixa, ou limitando-se a velocidade do atuador. Esse tipo de correção não foi aplicada pois os resultados obtidos até aqui (Figura 8.31 e Figura 8.32) mostram que o amortecimento máximo praticamente não varia se o ganho for aumentado mais ainda em relação a 0,067.

Figura 8.31 – Relação entre o pico da resposta na frequência do 1º modo de flexão para diversos ganhos e painéis onde o sensor foi posicionado. O pico de referência é o de ganho zero (aí a relação é unitária).

Figura 8.32 – Relação entre o pico da resposta na frequência do 1º modo de torção para diversos ganhos e painéis onde o sensor foi posicionado. O pico de referência é o de ganho zero (aí a relação é unitária).

Figura 8.33 – Ângulo da superfície de comando para o caso do sensor no painel 13 e ganho de 0,067.

Conforme descrito anteriormente, os picos apresentados nos gráficos de resposta no domínio da frequência são menores quanto maior for o amortecimento, permitindo que a comparação do amortecimento do sistema nas diversas simulações seja feita analisando-se o tamanho destes picos. Da Figura 8.34 até a Figura 8.37 são mostradas as repostas no domínio da frequência dos modos de flexão e torção com sensores nos painéis 13 e 39 para os casos não controlado e controlado com ganho máximo e o controlador ligado a partir do instante 0,05s. Para o painel 13 ainda foi feita uma análise para o ganho máximo (0,067) com o controlador ligado a partir do instante 0,0008s. O caso do controlador ligado a partir da primeira iteração não pôde ser resolvido pois implica em divergência logo no começo da solução do problema. Essa divergência foi atribuída aos picos de sustentação ocorridos nos instantes iniciais devido à parcela não-estacionária obtida pela equação (5.41), pois a vorticidade de todos os anéis é nula no instante inicial.

Figura 8.34 – Resposta do sistema no domínio da frequência para o 1º modo de flexão para sensor no painel 13.

Figura 8.35 – Resposta do sistema no domínio da frequência para o 1º modo de torção para sensor no painel 13.

Figura 8.36 – Resposta do sistema no domínio da frequência para o 1º modo de flexão para sensor no painel 39.

Figura 8.37 – Resposta do sistema no domínio da frequência para o 1º modo de torção para sensor no painel 39.

Para melhor visualizar o efeito do controlador no sistema, as respostas no tempo em termos dos modos de flexão e torção estão mostradas respectivamente na Figura 8.38 e Figura 8.39. Essas figuras podem ser consideradas o resultado final deste trabalho, mostrando a rápida convergência do sistema assim que o controlador é ligado.

Quando o controlador é ligado na décima iteração (0,0008s) o sistema se comporta muito bem. O modo de flexão mostra que a asa se movimenta até próximo à sua flecha de regime estacionário e praticamente não oscila. O modo de torção apresenta alguma oscilação resultante da entrada degrau da velocidade do fluxo. A entrada degrau é um conceito matemático que não será aplicado num modelo real. Pode-se supor, que para o caso de uma entrada mais suave da velocidade, como é o caso de uma entrada em rampa (ou o caso de uma curva que represente uma aeronave acelerando), o sistema apresentará um caráter oscilatório bem menor no período transiente, o que confirma a viabilidade desse tipo de controle de supressão de *flutter*.

Figura 8.38 – 1º modo de flexão ao longo do tempo para sensor no painel 13 e velocidade de 75 m/s.

Figura 8.39 – 1º modo de torção ao longo do tempo para sensor no painel 13 e velocidade de 75 m/s.

Figura 8.40 – Flecha na ponta da asa para sensor no painel 13 e velocidade de 75 m/s.

Figura 8.41 – Torção na ponta da asa para sensor no painel 13 e velocidade de 75 m/s.

Para o caso do controlador ligado a partir da décima iteração foram simulados também os casos de velocidade 80 m/s e 85 m/s. Nota-se que o ponto de equilíbrio da flexão diminui com o aumento de velocidade (Figura 8.42), indicando menos esforço de sustentação. Isso pode ser explicado devido ao aumento de torção (Figura 8.43). O ganho máximo usado também diminui com o aumento de velocidade. Essa diminuição foi necessária para corrigir os problemas de não-convergência devido aos ruídos no comando, que ficam mais intensos com o aumento de velocidade. Contudo, o valor do amortecimento continua na faixa que garante um amortecimento muito próximo do máximo (Figura 8.31 e Figura 8.32). Os resultados mostrados a seguir mostram a eficiência desse sistema de controle, que mesmo sendo extremamente simples, mostrou ser capaz de amortecer as oscilações da asa mesmo em condições de cerca de 15% acima da velocidade crítica. O sistema é capaz de amortecer o *flutter* até mesmo em velocidades mais altas, mas a torção da asa já é tão intensa que outros problemas (que não a instabilidade), se tornariam o problema principal.

Figura 8.42 – 1º modo de flexão ao longo do tempo para sensor no painel 13 e velocidade de 75 m/s a 85 m/s.

Figura 8.43 – 1º modo de torção ao longo do tempo para sensor no painel 13 e velocidade de 75 m/s a 85 m/s.

9.1 Conclusões

O modelo numérico para a solução de *flutter* de uma asa finita flexível desenvolvido por Benini (2002) foi refinado possibilitando uma evolução do conhecimento sobre o assunto. A influência do refinamento da malha da asa, do comprimento e tipo da esteira e da curvatura da linha de *camber* do perfil foram estudados em detalhe, para aprimorar a modelagem numérica da asa real. Pode-se notar uma mudança na velocidade de *flutter* encontrada por Benini (2002) para a mesma asa. Seu resultado foi de cerca de 90m/s para a velocidade crítica de *flutter*. Após as alterações desse trabalho, encontrou-se uma velocidade entre 70m/s e 75m/s. Constatou-se que a maior alteração da velocidade de *flutter* foi causada pela mudança da malha aerodinâmica. O uso de um maior número de painéis ao longo da corda permitiu maior precisão na determinação do carregamento ao longo da corda, e portando maior precisão nos esforços de torção da asa oscilando em arfagem.

Mais significativo que essa alteração na velocidade de *flutter* foi o tempo da simulação computacional, que foi reduzido drasticamente (sem grandes perdas de precisão) com o uso de um comprimento de corte na esteira. O tipo de esteira (plana ou 3D) também foi verificado, apesar de se ter chegado à mesma conclusão de Benini (2002). Essa verificação tem certo valor agregado, ao mostrar com mais precisão o posicionamento da esteira. Para casos de múltiplas superfícies aerodinâmicas, como numa aeronave completa, a posição da esteira talvez possa influenciar o *flutter* na empenagem.

Outro grande progresso foi o uso da linha de *camber* representando variação na posição de equilíbrio da asa. Apesar de este trabalho não estudar os problemas estruturais do *flutter*, em análises onde isso se torna importante, é realmente necessário que os esforços sejam aplicados na intensidade correta.

O objetivo principal do trabalho, de verificar a viabilidade do sistema de controle, foi atingido com sucesso. Pôde-se mostrar que um único sensor de pressão tem condições de controlar a asa de maneira satisfatória mesmo com uma lei de controle bem simples como é o caso de um ganho proporcional à derivada da pressão. O uso de mais sensores, filtros, e leis de controle mais complexas certamente permitirão refinar o projeto do controlador, e obter amortecimentos maiores que os obtidos neste trabalho.

O problema de divergência do comando devido à sua própria excitação na leitura do sensor não foi considerado um empecilho às conclusões que se pretendia chegar com este estudo.

Os bons resultados deste modelo colocam em desvantagem o estudo em dois graus de liberdade como da seção típica, que necessitou de correções e adaptações para garantir equivalência entre os dois métodos.

Os resultados gerais são considerados satisfatórios e coerentes entre si. Os valores da velocidade de *flutter* e do amortecimento máximo obtido com ganho de realimentação só poderão ser confirmados experimentalmente.

9.2 Sugestão para trabalhos futuros

Este trabalho foi uma evolução de um trabalho já executado anteriormente. Da mesma forma propõe-se, para dar continuidade a este trabalho, um estudo de controladores mais avançados, que fazem uso de filtros, leis de controle mais complexas que um simples ganho proporcional à derivada da pressão, e utilização de mais saídas, com a leitura de mais sensores em diferentes pontos da asa.

Outros trabalhos ainda podem ser realizados gerando algumas variantes deste. É o caso de:

- Aplicação de correções de compressibilidade para maior precisão dos resultados;
- Mudança do modelo aerodinâmico para que se possam simular casos supersônicos;
- Desenvolvimento de métodos para inclusão de não linearidades estruturais e/ou aerodinâmicas;
- Utilização de métodos aerodinâmicos viscosos e compressíveis para previsão de efeitos aeroelásticos em regime transônico;
- Alteração do modelo aeroelástico aqui desenvolvido para simulação de asas rotativas e hélices, tanto em vôo pairado como vôo normal;
- Estudo de *flutter* em asas de perfil variável (*morphing wing*) e aplicação de controle através da variação da linha de *camber*;
- Estudo das respostas aeroelásticas de aeronaves completas com e sem controle ativo para supressão de *flutter*;
- Estudo da influência da aeroelasticidade da aeronave completa nas suas características de dinâmica de vôo, e talvez até mesmo controle automático de vôo integrado a controle de supressão de *flutter*.

Ainda podem ser realizados estudos de caráter comparativo onde se faz:

- Estudo comparativo de diversos métodos de acoplamento entre malhas estruturais e aerodinâmicas
- Verificação experimental com um modelo flexível dos resultados obtidos numericamente neste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDERSON, J. D. (1991); **Fundamentals of aerodynamics**. 2^aed McGraw-Hill, Inc.
- ANDERSON, J. D. (1995); **Computational fluid dynamics: the basics with applications**. McGraw-Hill, Inc.
- ANDRIGHETTONI, M.; MANTEGAZZA, P. (1998); Multi-Input/Multi-Output Adaptative Active Flutter Suppression for a Wing Model. **Journal of Aircraft**; Vol. 35, nº 3, p.462-469.
- BANERJEE, J. R. (1999); Explicit frequency equation and mode shapes of a cantilever beam coupled in bending and torsion. **Journal of Sound and Vibration**. Vol. 224, nº 2, p.267-281.
- BARBONI, R.; GAUDENZI, P.; MANNINI, A. (1993); Paramenter-Transfer Finite Element Method for Structural Analysis. **AIAA Journal**; Vol. 31, nº 5, p.923-929.
- BARTELS, R. E.; Schuster, D. M. (2000); Comparison of Two Navier-Stokes Methods with Benchmark Active Control Technology Experiments. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**; Vol. 23, nº 6, p.1094-1099.
- BENINI, G. R. (2002). **Modelo Numérico para Simulação da Resposta Aeroelástica de Asas Fixas**. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H. (2002); **Principles of Aeroelasticity**. Dover Publications, Inc., Mineola – NY.
- BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H.; HALFMAN, R. L.(1996); **Aeroelasticity**. Dover Publications, Inc., Mineola – NY.
- BLOCK, J. J.; STRGANAC, T. W. (1998); Applied Active Control for Nonlinear Aeroelastic Structure. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**; Vol. 21, nº 6, p. 838-845.
- BUTLER, R.; BANERJEE, J. R. (1996); Optimum design of bending-torsion coupled beams with frequency or aeroelastic constraints. **Computers & Structures**, Vol. 60, nº 5, p.715-724.
- COLE, S. R.; NOLL, T. E.; PERRY, B. (2003); Transonic Dynamics Tunnel Aeroelastic Testing in Support of Aircraft Development. **Journal of Aircraft**; Vol. 40, nº 5, p.820-831.
- COLLAR, A R. (1946); The Expanding Domain of Aeroelasticity. **The Journal of the Royal Aeronautical Society**; Vol 50, p.613-636
- CRAIG JR., R. R. (1981). *Structural Dynamics: an Introduction to Computer Methods*. John Wiley & Sons, Inc.

- D'AZZO, J. J.; HOUPIS, C. H. (1988); **Linear Control System Analysis and Design: Conventional and Modern**. 3ªed McGraw-Hill, Inc.
- DE MARQUI JR., C. (2004); **Estudo Teórico e Experimental de um Controlador para Supressão de Flutter**. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Carlos.
- DOWELL, E. H. (1996); Eigenmode Analysis in Unsteady Aerodynamics: Reduced-Order Models. **AIAA Journal**; Vol. 34, nº 8, p.1578-1583.
- DOWELL, E. H.; CURTISS JR., H. C.; SCANLAN, R. H.; SISTO, F. (1978); **A modern course in aeroelasticity**. Sijthoff & Noordhoff International Publishers.
- DU, H.; HITCHINGS, D.; DAVIES, G. A. O. (1993); An aeroelasticity beam model for flexible multibody systems under large deflections. **Computers & Structures**, Vol. 48, nº 3, p.387-395.
- DUGUNDJI, J. (2003); Personal Perspective of Aeroelasticity During the Years 1953-1993. **Journal of Aircraft**; Vol. 40, nº 5, p809-812
- ECKSTROM, C. V.; SPAIN, C. V. (1982); Design considerations and experiences in the use of composite material for an aeroelastic research wing. **NASA-TM-83291**.
- EMPORIS Buildings (2006); disponível em: <http://www.emporis.com/en/wm/bu/?id=100765>. Acesso em: 07 dez. 2006.
- EQUIPE EESC-USP DE AERODESIGN (2002). **Technical Report – AeroDesign East 2002**. Titusville.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. (2006); **Feedback Control of Dynamic Systems**. 5ªed Pearson Education, Inc.
- FRIEDMANN, P. P. (1999); Renaissance of Aeroelasticity and Its Future. *Journal of Aircraft*; Vol. 36, nº 1, p.105-121.
- FUNG, Y. C (1993); **An introduction of the theory of aeroelasticity**. Dover Publications, Inc.
- GARRICK, I. E.; REED, W. H. (1981); Historical Development of Aircraft Flutter. **Journal of Aircraft**; Vol. 18, nº 11, p.897-912.
- GIESING, J. P. (1985); Basic principles and double-lattice applications in potential aerodynamics. In: MORINO, L., **Computational Methods in Potencial Aerodynamics**. Springer-Verlag, p.95-154.
- GUILLOT, D. M.; FRIEDMANN, P. P. (2000); Fundamental Aeroservoelastic Study Combining Unsteady Computational Fluid Mechanics with Adaptive Control. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**; Vol. 23, nº 6, p. 1117-1126.

- HARDER, R. L.; DESMARAIS, R. N. (1972); Interpolation Using Surface Splines. **Journal of Aircraft**; Vol. 9, nº 2, p.189-191.
- HEEG, J. (1993); Analytical and experimental investigation of flutter suppression by piezoelectric actuation. **NASA-TP-3241**.
- JEON, S. M.; CHO, M. H.; LEE, I. (1998); Aeroelastic analysis of composite rotor blades in hover. **Computers & Structures**, Vol. 66, nº 1, p.59-67.
- KATZ, J.; PLOTKIN, A. (2001); **Low-Speed Aerodynamics**. 2^{ed} Cambridge University Press.
- KIM, K. (1993); A review of Mass Matrices for eigenproblems. **Computers & Structures**; Vol 46, nº 6, p.1041-1048.
- KUNZ, D. L. (2005); Analysis of Proprotor Whirl Flutter: Review and Update. **Journal of Aircraft**; Vol. 42, nº 1, p.172-178.
- LAMBERT, J. D. (1991); **Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem**. John Wiley & Sons, Inc.
- LI, Q.; PHAIROH, T.; HUANG, J. K.; MEI, C. (2006); Adaptive Control of Nonlinear Free Vibrations of Composite Plates Using Piezoelectric Actuators. **AIAA Journal**; Vol. 44, nº 6, p.1169-1180
- LOREDO-SOUZA, A. M.; DAVENPORT, A. G. (1998); The effects of high winds on transmission lines. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**; Vol. 74-76, p.987-994.
- LUTON, J. A.; MOOK, D. T. (1993); Numerical Simulations of Flutter and its Suppression by Active Control. **AIAA Journal**; Vol. 31, nº 12, p.2312-2319.
- MABEY, D. G. (1999); Unsteady aerodynamics: retrospect and prospect. **The Aeronautical Journal**; Vol. 103, nº 1019, p.1-18.
- MAKIHARA, K.; ONADA, J.; MINESUGI, K. (2006); Behavior of Piezoelectric Transducer on Energy-Recycling Semiactive Vibration Suppression. **AIAA Journal**; Vol. 44, nº 2, p.411-413
- MARQUES, F. D.; VAROTO, P. S.; BENINI, G. R.; OLIVEIRA, L. P. R. (2001); An investigation on the modal characteristics of an aircraft wing structure. In: ESPÍNDOLA, J. J. et al. eds., **Dynamic Problems of Mechanics**. Rio de Janeiro. ABCM. p.465-469.
- MORAN, J. (1984); **An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics**. John Wiley & Sons, Inc.
- MUKHOPADHYAY, V. (2003); Historical Perspective on Analysis and Control of Aeroelastic Responses. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**; Vol. 26, nº 5, p.673-684.

- NASG (2006); disponível em: <<http://www.nasg.com/afdb/contour/s1223.dat>>. Acesso em: 13 nov. 2006.
- OGATA, K. (2003); **Engenharia de Controle Moderno**. 4^aed Pearson Education do Brasil.
- PATIL, M. J.; HODGES, D. H.; CESNIK, C. E. S. (2000); Nonlinear Aeroelastic Analysis of Complete Aircraft in Subsonic Flow. **Journal of Aircraft**; Vol. 37, nº 5, p.753-760.
- PITARRESI, J. M.; MANOLIS, G. D. (1991); The temporal finite element method in structural dynamics. **Computers & Structures**; Vol 41, nº 4, p.893-901.
- PITKÄRANTA, J. (2003); Mathematical and historical reflections on the lowest-order finite element models for thin structures. **Computers & Structures**; Vol 81, nº 8, p.895-909.
- PREIDIKMAN, S. (1998). **Numerical Simulations of Interactions Among Aerodynamics, Structural Dynamics, and Control Systems**. Dissertation (PHD) – Virginia Polytechnic Institute and State University.
- PREIDIKMAN, S.; MOOK, D. (2000); Time-Domain Simulations of Linear and Nonlinear Aeroelastic Behaviour. **Journal of Vibration and Control**; Vol 6, nº 8, p.1135-1175.
- RICCIARDELLI, F.; OCCHIUZZI, A.; CLEMENTE, P. (2000); Semi-active Tuned Mass damper control strategy for wind-excited structures. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**; Vol. 88, nº 01, p.57-74
- ROCHA, J.; MONIZ, P. A.; COSTA, A. P.; SULEMAN, A. (2005); On Active Aeroelastic Control of an Adaptive Wing Using Piezoelectric Actuators. **Journal of Aircraft**; Vol. 42, nº 1, p.278-281
- SAE AERODESIGN® (2002); disponível em: <<http://www.sae.org/students/aerodes.htm>>. Acesso em: abril de 2002.
- SCOTT, R. C.; PADO, L. E. (2000); Active Control of Wind-Tunnel Model aeroelastic Response Using Neural Networks. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**; Vol. 23 nº 6, p.1100-1108.
- SILVA, R. G. A. (1994); **Análise Aeroelástica no Espaço de Estados Aplicada a Aeronaves de Asa Fixa**. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Carlos.
- SMITH, I. M. (1988); **Programming the finite element method**. Chichester [West Sussex]; New York : Wiley
- SMITH, M. J.; HODGES, D. H.; CESNIK, C. E. S. (2000); Evaluation of Computational Algorithms Suitable for Fluid-Structures Interactions. **Journal of Aircraft**; Vol. 37, nº 2, p.282-294.

- SOVIERO, P. A. O.; BORTULUS, M. V. (1992); Generalized Vortex Lattice Method for Oscillating Lifting Surfaces in Subsonic Flow. **AIAA Journal**; Vol. 30, nº 11, p.2723-2729.
- STRGANAC, T. W.; MOOK, D. T. (1990); Numerical Model of Unsteady Subsonic Aeroelastic Behavior. **AIAA Journal**; Vol. 28, nº 5, p.903-909.
- THEODORSEN, T. (1935); General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter. **NACA Technical Report 496**.
- UIUC (2006); disponível em: <<http://www.ae.uiuc.edu/m-selig/pub/LSATs/vol1/S1223.LFT>>
Acesso em: 13 nov. 2006.
- VIPPERMAN, J. S.; CLARK, R. L.; CONNER, M.; DOWELL, E. H. (1998); Experimental Active Control of a Typical Section Using a Trailing-Edge Flap. **Journal of Aircraft**; Vol. 35, nº 2, p. 224-229.
- WASZAK, M. R. (2001); Robust Multivariable Flutter Suppression for Benchmark Active Control Technology Wind-Tunnel Model. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**; Vol. 24, nº 1, p.147-153.
- WASZAK, M. R.; SRINATHKUMAR, S. (1995); Flutter Suppression for the Active Flexible Wing: A Classical Design. **Journal of Aircraft**; Vol. 32, nº 1, p.61-67
- XING, W.; SINGH, S. N. (2000); Adaptive Output Feedback Control of a Nonlinear Aeroelastic Structure. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**; Vol. 23, nº 6, p. 1109-1116.
- YATES JR., E. C. (1985); Unsteady subsonic and supersonic flows – historical review; state of the art. In: MORINO, L., **Computational Methods in Potencial Aerodynamics**. Springer-Verlag, p.95-154.
- ZIENKIEWICZ, O. C. (2000); **The finite element method**. 5ªed. McGraw-Hill, Inc.