UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

GIOVANI SACCHETTO DANIEL

Dano em Materiais Compósitos: SAFECom
(Sistema de Análise de Fadiga de Estruturas em Compósito)

São Carlos
2011

GIOVANI SACCHETTO DANIEL

**Dano em Materiais Compósitos: SAFECom
(Sistema de Análise de Fadiga de Estruturas em Compósito)**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.
Área de concentração: Aeronaves.

Orientador: Prof. Assoc. Volnei Tita

São Carlos
2011

ESTE EXEMPLAR TRATA-SE
DA VERSÃO CORRIGIDA. A
VERSÃO ORIGINAL
ENCONTRA-SE DISPONÍVEL
JUNTO AO DEPARTAMENTO
DE ENGENHARIA MECÂNICA
DA EESC-USP

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

D184d Daniel, Giovani Sacchetto.
Dano em materiais compósitos : SAFECom : sistema de análise de fadiga de estruturas em compósito. / Giovani Sacchetto Daniel ; orientador Volnei Tita. São Carlos, 2011.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Área de Concentração em Aeronaves) - Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2011.

1. Estruturas aeronáuticas. 2. Dano em material compósito. 3. Tolerância ao dano. 4. Resistência residual. 5. Fadiga de materiais compósitos. 6. Análise computacional. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **GIOVANI SACCHETTO DANIEL**

Título da dissertação: **“Dano em materiais compósitos: SAFECom (Sistema de Análise de Fadiga de Estruturas em Compósito)”**.

Data da defesa: 09/12/2011

Comissão Julgadora:

Prof. Associado **Volnei Tita**
(**Orientador**)
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Edson Cocchieri Botelho**
(Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”/campus Guaratinguetá)

Prof. Dr. **Antônio Marcos Gonçalves de Lima**
(Universidade Federal de Uberlândia/UFU)

Resultado:

Aprovado

Aprovado

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica:
Prof. Associado **Marcelo Areias Trindade**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Paulo Cesar Lima Segantine**

DEDICATÓRIA

A minha amada mãe, pelo seu amor e pelos seus exemplos de retidão, coragem e trabalho.

A minha amada esposa Ana Beatriz pela compreensão, pela paciência e pelo apoio constante.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Volnei Tita, pelo grande conhecimento transmitido, pelo profissionalismo, pelo apoio constante e pela forma invariavelmente fraterna, humana e justa com que trata e auxilia a todos os seus orientados.

Aos dedicados professores da USP São Carlos e a Secretaria de Pós Graduação da Engenharia Mecânica, sem o concurso dos quais este trabalho não seria possível.

A Deus.

RESUMO

DANIEL, G. S. Dano em Materiais Compósitos: SAFECom (Sistema de Análise de Fadiga de Estruturas em Compósito). 2011 183 p. Dissertação (Mestrado) Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos 2011.

O presente trabalho, inicialmente, apresenta uma revisão a cerca de vários métodos de análise de fadiga e tolerância ao dano em materiais compósitos e, em particular, o conceito de elemento crítico e o método da resistência residual é estudado e aplicado à análise de materiais compósitos poliméricos, reforçados por fibras contínuas, sob cargas cíclicas. Casos de laminados com concentradores de tensão são também abordados, principalmente, devido ao crescente emprego de materiais compósitos. Diante do contexto apresentado, o presente trabalho buscou desenvolver uma ferramenta computacional, que fosse capaz de prever de forma consistente tanto a vida em fadiga de estruturas em material compósito como a resistência residual dessas estruturas sob a ação de carregamentos cíclicos. Dessa forma, um modelo baseado na resistência residual, que envolve integração numérica, é implementado em um programa computacional denominado SAFECom (Sistema de Análise de Fadiga de Estruturas em Compósito), o qual é aplicado a alguns estudos de casos. O SAFECom foi, então, avaliado, comparando resultados obtidos com dados da literatura. Verifica-se uma boa convergência entre os resultados nessa fase de avaliação. Por fim, são listadas possibilidades de aprimoramento do programa, que podem torná-lo aplicável a outros estudos de casos não abordados no presente trabalho, além da avaliação do mesmo através de ensaios experimentais.

Palavras chave: estruturas aeronáuticas, dano em material compósito, tolerância ao dano, resistência residual, fadiga de materiais compósitos, análise computacional.

ABSTRACT

DANIEL, G. S. Damage in Composite Materials: SAFECom (System of Analysis of Fatigue for Composites). 2011 183 p. Dissertation (Master Degree) - School of Engineering of São Carlos, São Paulo University, São Carlos 2011.

This work firstly presents an overview about various methods of analysis of fatigue and damage tolerance of composite materials and, in particular, the concept of critical element and the method of residual strength are studied and applied to the analysis of polymer composites reinforced by continuous fibers under cyclic loading. Cases of laminates with stress concentrators are also addressed, mainly due to increasing use of composite materials. In this context, this work aimed to develop a computational tool that was able to consistently predict both the fatigue life of structures in composite material and the residual strength of these structures under the action of cyclic loads. Thus, a model based on residual strength, which involves numerical integration, is implemented in a computer program called SAFECom (System of Analysis of Fatigue for Composites), which is applied to some case studies. The SAFECom is evaluated by comparing results obtained from literature data. There is a good convergence between the results of this assessment. Finally, possibilities for improvement are listed on the program that can make it applicable to other case studies, which were not covered in this study, in addition to its evaluation by experimental tests.

Keywords: aeronautic structures, composite, fatigue, damage tolerance, residual strength, fatigue of composite materials, critical element.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1-1 Esquema para cálculo de durabilidade	2
Figura 2.1-1 Representação esquemática das isotérmicas de Xiao (1999).....	15
Figura 2.1-2 Diagrama de resistências constantes	15
Figura 2.1-3 Curvas mestras para taxa de carregamento constante e para fadiga....	17
Figura 2.1-4 Curva mestra de <i>creep</i>	17
Figura 2.2-1 Módulo de fadiga	20
Figura 2.3-1 Corpo de prova com delaminação artificial inicial.....	34
Figura 3.1-1 Interpretação da função de falha na análise de tolerância ao dano em compósitos	59
Figura 3.2-1 Resist. Resid./Resist. Inic. em função da Fração da Vida.....	60
Figura 3.2-2 Resit. residual sob tração e compressão durante carregamento de fadiga em função da fração da vida: (a) laminado de fibra de carbono e resina epóxi (0/90/+45/-45) _s ; (b) laminado fibra de carbono e resina epóxi (0/90/+45/-45/0) _s (adaptado de Reifsnider e Case, 2002).....	61
Figura 3.2-3 Comportamento típico de laminados poliméricos com fibras contínuas sob cargas cíclicas (adaptado de Reifsnider e Case, 2002).....	62
Figura 3.3-1 Micro-trincas na matriz (adaptado de Reifsnider e Case, 2002)	64
Figura 3.3-2 Trincas na matriz em um laminado cross-ply e a mudança na rigidez global durante um carregamento uniaxial quase-estático (adaptado de Reifsnider e Case, 2002).....	65
Figura 3.4-1 Curvas tensão-deformação para um laminado <i>cross-ply</i> – a) Ensaaios sob controle de deformação; b) Ensaaios sob controle de carga. (adaptado de Reifsnider e Case, 2002)	66
Figura 3.4-2 Laminado sob carregamento quase-estático monotônico	67
Figura 3.5-1 Modos de dano em laminados reforçados por fibras	71
Figura 3.6-1 Tendência típica da taxa de acúmulo de dano em laminados compósitos controlados pelas fibras durante carregamento de fadiga.....	74
Figura 3.6-2 – A Resistência Residual como Medida do Dano.....	74
Figura 3.7-1 Micro-estados dos danos discretos (adaptado de Nash, 1974)	76
Figura 3.8-1 Resposta da resistência residual (equação 3.8-2).....	85

Figura 3.8-2 Efeito do valor de j na resistência residual (adaptado de Reifsnider e Case, 2002)	87
Figura 3.8-3 Influência de uma sobre-carga na Resistência Residual	88
Figura 3.9-1 Fluxograma da metodologia da resistência residual	89
Figura 3.10-1 Elemento crítico para um laminado com furo central – dimensão característica “b”	91
Figura 3.10-2 Furo elíptico numa placa anisotrópica infinita sob tensão uniaxial.....	93
Figura 3.10-3 Comparação entre as tensões obtidas via SAFECom e via MEF	95
Figura 4.1-1 Aplicação de dois carregamentos em bloco no elemento crítico	99
Figura 4.1-2 Evolução do dano no Elemento Crítico submetido a um carregamento em blocos.....	99
Figura 4.1-3 Cálculo do pseudo número de ciclos	100
Figura 4.2-1 Amplitude do carregamento em blocos	103
Figura 4.2-2 Evolução de F_a no elemento crítico.....	104
Figura 4.2-3 Discretização de F_a para o Elemento Crítico	104
Figura 4.2-4 Cálculo de $F_r(n)$	105
Figura 4.2-5 Definições para o diagrama F_a e F_r x número de ciclos.....	105
Figura 5.1-1 Resultados para a vida em fadiga do Caso 1	111
Figura 5.2-1 Resultados para a vida em fadiga do Caso 2	113
Figura 5.3-1 Resultados para a vida em fadiga para o Caso 3.....	116
Figura 5.4-1 Tensão global σ_x nas vizinhanças do furo	118
Figura 5.4-2 Tensão global σ_y nas vizinhanças do furo	118
Figura 5.4-3 Deformação global ϵ_x nas vizinhanças do furo	119
Figura 5.4-4 Deformação global ϵ_y nas vizinhanças do furo	119
Figura 5.4-5 Tensões nas vizinhanças do furo nas lâminas críticas.....	120
Figura 5.4-6 Curva de fadiga do laminado do Caso 4.....	121
Figura 5.5-1 Relaxação da distribuição de tensão em função da “ <i>elipsidade</i> ” do furo	122
Figura 5.5-2 Variação da “ <i>elipsidade</i> ” em função dos ciclos de fadiga (Case,2002)	123
Figura 5.5-3 Tensão global σ_x nas vizinhanças do furo	125
Figura 5.5-4 Tensão global σ_y nas vizinhanças do furo	125
Figura 5.5-5 Deformação global ϵ_x nas vizinhanças do furo	126

Figura 5.5-6 Deformação global ϵ_y nas vizinhanças do furo.....	126
Figura 5.5-7 Tensões nas vizinhanças do furo nas lâminas críticas.....	127
Figura 5.5-8 Curva de fadiga do laminado.....	128
Figura A1-1 Sub-rotina Scan	148
Figura A2-1 Sub-rotina TensaoCirc	149
Figura A3-1 Sub-rotina Lamina	150
Figura A4-1 Sub-rotina AzimutalStress	152
Figura A5-1 Sub-rotina StressDist	153
Figura A6-1 Sub-rotina Polinomio	154
Figura A7-1 Sub-rotina ComprC.....	155
Figura A8-1 Sub-rotina AnaliseFadiga	157
Figura A9-1 Sub-rotina "elipsidade"	159
Figura A10-1 Sub-rotina Stiff	160
Figura A11-1 Sub-rotina Roots	161

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.4-1 – Tensões Residuais Térmicas.....	68
Tabela 3.4-2 - Tensões induzidas pela carga axial $N_x = 174000 \text{ N/m}$	69
Tabela 3.5-1 Rigidezes dos sublaminados para o caso de delaminação	72
Tabela 3.7-1 Ocupação dos estados quânticos de energia dos danos.....	78
(adaptado de Reifsnider e Case, 2002)	78
A Tabela 3.10-1 compara os resultados para a tensão de pico σ_{1M} , fator de concentração de tensão K e o comprimento característico “b”, obtidos pelo programa SAFECom, via MEF e os resultados da literatura. Sendo que o laminado analisado possui empilhamento igual a $[10/\pm 10]_S$	95
Tabela 3.10-1 Resultados para tensão e distância característica: literatura x SAFECom x MEF.....	95
Tabela 5.1-1 Dados para o estudo de Caso 1	110
Tabela 5.2-1 Dados para o estudo de Caso 2	112
Tabela 5.3-1 Dados para o estudo de caso 3.....	114
Tabela 5.3-2 Constantes da curva de fadiga do compósito unidirecional.....	115
Tabela 5.3-3 Amplitudes x número de ciclos calculados	115
Tabela 5.4-1 Dados para o estudo de caso 4.....	117
Tabela 5.4-2 Comparação das funções de falha para o laminado.....	120
Tabela 5.4-3 Amplitudes x número de ciclos	121
Tabela 5.5-1 Dados para o estudo de Caso 5.....	124
Tabela 5.5-2 Amplitudes x número de ciclos	128

LISTA DE SÍMBOLOS

Fa	Função de falha no elemento crítico
Fr	Resistência residual normalizada do elemento crítico
σ_{ij}	Tensor de tensões para um dado ponto
X_{ij}	Resistência do material no ponto
E_1	Módulo de elasticidade da lâmina na direção das fibras
E_2	Módulo de elasticidade da lâmina na direção transversal às fibras
G_{12}	Módulo de cisalhamento da lâmina
ν_{12}	Coefficiente de Poisson da lâmina
X_t	Resistência da lâmina à tração na direção das fibras
X_c	Resistência da lâmina à compressão na direção das fibras
Y_t	Resistência da lâmina à tração na direção transversa às fibras
Y_c	Resistência da lâmina à compressão na direção transversal às fibras
S, SS	Resistência da lâmina ao cisalhamento
X_n	Resistência do laminado com furo central
α_{11}, α_1	Coefficiente de expansão térmica da lâmina na direção das fibras
α_{22}, α_2	Coefficiente de expansão térmica da lâmina na direção transversal às fibras
E_x	Módulo de elasticidade do laminado na direção x global
E_y	Módulo de elasticidade do laminado na direção y global
G_{xy}	Módulo de cisalhamento do laminado
ν_{xy}, ν_{yx}	Coefficientes de Poisson do laminado
N_x, N_y, N_{xy}	Forças por unidade de comprimento nas direções x, y e xy aplicadas no laminado
$\hat{t}$	Variável de tempo característico
Ψ	Continuidade do material
τ	Variável de tempo
j	Parâmetro de forma empregado na integral da resistência residual
b	Comprimento característico empregado no critério de falha da tensão média para laminados com um furo central
$\sigma_1(r,0)$	Distribuição da tensão na direção das fibras nas vizinhanças do furo nas camadas críticas

$\overline{\sigma_1}$	Média das tensões atuantes na direção das fibras ao longo do comprimento característico
X_L	Resistência longitudinal do laminado sem descontinuidade
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	Tensões normais globais na direção x, y e tensão de cisalhamento respectivamente
P	Tensão axial remota na direção x global na solução complexa de Lekhnitskii
μ_1, μ_2	Parâmetros complexos de 1ª ordem na solução de Lekhnitskii
$\phi_1(Z_1), \phi_2(Z_2)$	Funções de tensão utilizadas na solução de Lekhnitskii
i	$\sqrt{-1}$
a_{ij}	Coeficientes da equação característica na solução de Lekhnitskii
ζ_1, ζ_2	Componentes dos parâmetros complexos de 2ª ordem na solução de Lekhnitskii
$z_1, z_2, \overline{\alpha_1}, \overline{\beta_1}$	Variáveis complexas na solução de Lekhnitskii
x, y	Coordenadas cartesianas do laminado
a, b	Semi eixos maior e menor do furo elíptico empregados na solução de Lekhnitskii
φ	Ângulo azimutal de um ponto na elipse a partir do eixo x utilizado na solução de Lekhnitskii
$\Delta\tau$	Intervalo de tempo na equação integral da resistência residual
ΔFr	Variação da resistência residual no intervalo de tempo $\Delta\tau$
n_2^0	Pseudo número de ciclos utilizado na equação integral da resistência residual
τ_2^0	Pseudo tempo generalizado
n	Número de ciclos de carregamento de fadiga
Δn	Número de ciclos total do intervalo de análise
n_0, n_f	Número de ciclos inicial e final do intervalo de análise
K	Número de subintervalos contidos em Δn
δn	Número de ciclos de um subintervalo de Δn
λ	Identificador de um subintervalo δn
N_1, N_2	Número de ciclos inicial e final de um subintervalo δn
$\hat{F}_a$	Função de falha média no subintervalo δn

$\hat{N}$	Número de ciclos característico no subintervalo δn
f	Frequência do carregamento aplicado
$R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$	Razão de tensões

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO, JUSTIFICATIVAS E OBJETIVOS	1
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1	Modelos de curvas S-N.....	6
2.2	Modelos fenomenológicos.....	19
2.3	Modelos de Dano Progressivo	32
2.4	Uma Análise Sobre os Tipos de Modelos.....	57
3	O MÉTODO DA EVOLUÇÃO DA RESISTÊNCIA RESIDUAL GLOBAL	59
3.1	A Resistência Residual como Parâmetro de Dano.....	59
3.2	Respostas de Compósitos a Cargas Cíclicas.....	60
3.3	Modos de dano e Falha Progressiva.....	63
3.4	Elemento Crítico	65
3.5	Variações da Função de Falha Local - Modos de Dano	70
3.6	Resistência Residual Sob Cargas Cíclicas	73
3.7	Modelo para a Resistência Residual.....	75
3.8	Características da Equação Integral da Resistência	84
3.9	Resumo do Método da Resistência Residual	88
3.10	Campos de Tensão não Uniforme – Concentradores de Tensão.....	90
4	IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO DE EVOLUÇÃO DA RESISTÊNCIA	99
4.1	Solução da Integral da Resistência Residual.....	99
4.2	Implementação Computacional	102
5	ESTUDOS DE CASO: RESULTADOS E DISCUSSÕES	109
5.1	Caso 1 - Laminado sem entalhe (Reifsnider e Case, 2002).....	110
5.2	Caso 2 – Laminado com micro-trincas (Reifsnider e Case, 2002)	112
5.3	Caso 3 - Laminado sem entalhe (Curtis, 1986).....	114
5.4	Caso 4 – Laminado com entalhe circular sob compressão.....	116
5.5	Caso 5 – Laminado com entalhe circular sob tração (Vure,1993)	121

6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS PARA TRABALHOS FUTUROS.....	129
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	131
	ANEXO A.....	147
A.1	Rotina Scan	148
A.2	Rotina TensãoCirc.....	149
A.3	Rotina Lamina	150
A.4	Rotina AzimutalStress	152
A.5	Rotina StressDist.....	153
A.6	Rotina Polinomio.....	154
A.7	Rotina CompriC	155
A.8	Rotina AnaliseFadiga	156
A.9	Rotina Ellipticity	159
A.10	Rotina Stiff	160
A.11	Rotina Roots	161

CAPÍTULO 1

1 Introdução, Justificativas e Objetivos

Não é novidade que o uso de materiais compósitos está em ascensão, principalmente, em se tratando de materiais constituídos pela combinação de resina polimérica como matriz (por exemplo: resina epóxi) e fibras longas como reforços (por exemplo: fibra de carbono). A extensão de seu uso está aumentando em muitas aplicações desde a engenharia aeroespacial até a infra-estrutura para energia alternativa. Dezesesseis anos atrás, o Boeing 777 foi fabricado com compósitos compreendendo cerca de 10% do seu peso estrutural (WEST, 2009). Isto incluiu o piso da cabine e grande parte da cauda. Em 2010, foi lançado o *state-of-the-art* em estrutura aeronáutica fabricado em material compósito, ou seja, o Boeing 787. Tal aeronave utiliza compósitos avançados em 50% da sua estrutura. Isso irá incluir 100% do revestimento, segmentos inteiros da fuselagem, a empenagem e a asa (BALDWIN, 2005) (RAKOW; PETTINGER, 2006). A General Motors noticiou recentemente que parte de sua estratégia futura para o projeto de veículos, produção e globalização inclui a ampliação do uso de materiais compósitos (LEGAULT, 2008). Além da indústria da mobilidade, destaca-se, também, a indústria de energia. A instalação de novas plantas de energia deverá continuar crescendo a uma taxa média de 13,8% ao ano nos próximos cinco anos. A encomenda de novas turbinas eólicas irá gerar um aumento da demanda da indústria de compósitos a uma taxa de crescimento anual de 18% em 2013 (REUTERS, 2009).

Com o uso crescente de materiais compósitos, cresce também a necessidade de compreender seu comportamento e vida em serviço. Muitas destas aplicações incluem a aplicação de ciclos de carga repetitivos, exigindo assim, a capacidade de se compreender e avaliar o fenômeno de fadiga em estruturas de materiais compósitos. No entanto, devido à complexidade desses fenômenos, esse entendimento tem-se configurado como um enorme desafio para o engenheiro de projeto em muitos casos.

Com base na literatura, sabe-se que a fadiga estrutural é um processo de acúmulo de dano e subsequente falha de um componente sob um carregamento cíclico (repetitivo), cujos valores de tensão máxima aplicados estão abaixo da resistência de ruptura do material (DOWLING, 1999). Este é um assunto já extensamente investigado e conhecido para materiais homogêneos e isotrópicos como, por exemplo, os metais. Todavia, os materiais compósitos exibem modos de falha complexos sob cargas estáticas ou sob cargas cíclicas (fadiga) devido à sua natureza heterogênea e anisotrópica. A falha por fadiga em compósitos é acompanhada por diferentes modos de dano que se multiplicam ao longo de um dado volume de material ao contrário do que acontece em materiais isotrópicos como os metais.

Nesses materiais, em geral, ocorre a nucleação e a propagação de trincas, que evoluem de forma contínua em regiões localizadas e razoavelmente previsíveis do material. No entanto, o mesmo não ocorre em materiais compósitos, sendo que os modos de dano e falha progressiva nesses serão discutidos na seção 3.3 deste trabalho.

Em geral, o comportamento em fadiga dos compósitos pode ser melhor que os dos metais e, apresentar, assim, vida mais longa para a mesma tensão no caso de carregamentos cíclicos que envolvam apenas tração. Entretanto, a resistência à fadiga dos compósitos é pior para carregamentos de compressão, uma vez que as propriedades mecânicas tanto para compressão como para cisalhamento desses materiais são dominados pela matriz. Além disso, tem-se que os danos por fadiga em materiais compósitos são causados pela combinação de vários mecanismos que resultam na redução da rigidez e da resistência mecânica. Sendo que o referido processo de danificação varia com as propriedades do material, sequência e ângulo de laminação e tipo de carregamento.

Portanto, métodos de análise e cálculo da durabilidade e tolerância ao dano de materiais compósitos requerem estimativas precisas de estados locais de tensões e das propriedades dos materiais de cada constituinte, bem como do modo de interação entre eles, como sugere o esquema da Figura 1-1.

Figura 1.1-1 Esquema para cálculo de durabilidade

Para a estimativa dos estados locais de tensão, existe um número razoável de soluções analíticas e numéricas bem desenvolvidas. Por outro lado, o processo de degradação do estado dos materiais envolvidos, bem como sua quantificação são pouco compreendidos. Essas mudanças no comportamento mecânico do material ocorrem devido ao acúmulo de vários modos de dano causados pela aplicação de cargas mecânicas cíclicas e pelas condições ambientais (temperatura, umidade, ambiente corrosivo, etc). O conhecimento e a quantificação do processo de degradação da rigidez e da resistência mecânica dos compósitos governados pelo comportamento das fibras são fundamentais para o desenvolvimento de laminados leves, com alta resistência e durabilidade e, que sejam capazes de operar em condições ambientais diversas com alto desempenho.

Justifica-se assim, o entendimento e a quantificação da degradação das rigidezes e resistências principais do material. Sendo, portanto, necessário descrever de forma precisa as mudanças nos valores dos estados locais de tensão, os quais variam devido à redistribuição causada pelo processo de danificação ao longo da vida da estrutura.

Com base nas observações supracitadas, tem-se que o objetivo geral do presente trabalho consiste em desenvolver uma ferramenta computacional, que seja capaz de prever de forma consistente tanto a vida em fadiga de estruturas em material compósito como a resistência residual dessas estruturas sob a ação de carregamentos cíclicos.

Devido à magnitude do objetivo geral apresentado, tem-se que o mesmo foi subdividido nos seguintes objetivos específicos:

1. Realizar uma revisão bibliográfica sobre estudos que abordem problemas de fadiga em estruturas de material compósito desde os primeiros trabalhos publicados até os mais recentes;
2. Realizar um estudo aprofundado sobre modelos matemáticos para a previsão de vida em fadiga (durabilidade) e resistência residual de estruturas em material compósito;
3. Selecionar um modelo matemático dentre os vários modelos estudados, tomando como base alguns critérios, tais como versatilidade e aplicabilidade prática;
4. Implementar computacionalmente em linguagem VBA (*Visual Basic for Applications*), o modelo selecionado, gerando assim, uma ferramenta computacional;
5. Avaliar as limitações e potencialidades da ferramenta computacional desenvolvida;
7. Apontar perspectivas futuras para o aprimoramento da ferramenta computacional implementada.

Dessa forma o presente trabalho visa contribuir para a previsão do comportamento em fadiga de laminados compósitos reforçados por fibras contínuas, através do emprego de simulações computacionais. Sendo que o mesmo está organizado através dos seguintes capítulos:

- Capítulo 1: Constitui-se de uma contextualização e motivação para o presente trabalho ao ressaltar a importância dos materiais compósitos na atualidade e as diferenças fundamentais entre o estudo da fadiga e degradação de materiais compósitos e de materiais homogêneos e isotrópicos.
- Capítulo 2: Apresenta uma extensa revisão bibliográfica sobre o assunto de dano e fadiga em materiais compósitos. A pesquisa abrange desde os primeiros trabalhos relevantes já conduzidos sobre o assunto até alguns trabalhos mais recentes. A literatura pesquisada apresenta uma gama de problemas relacionados à fadiga de

materiais compósitos, na qual inúmeros tipos de abordagens foram empregados para solucionar tais problemas.

- Capítulo 3: Este capítulo versa sobre os fundamentos teóricos do método da evolução da resistência residual como medida do dano, sendo que tal abordagem foi selecionada para o desenvolvimento da ferramenta computacional desenvolvida neste trabalho, denominada SAFECom. Os principais mecanismos físicos de dano (“modos de dano”) são, também, apresentados e discutidos.
- Capítulo 4: Este capítulo apresenta os detalhes de como a metodologia da resistência residual foi implementada no código computacional SAFECom.
- Capítulo 5: Estudos de caso (da literatura) são descritos, conduzidos e discutidos nesse capítulo, visando avaliar as potencialidades e limitações do programa.
- Capítulo 6: Para finalizar o presente texto, as principais conclusões e perspectivas futuras sobre o trabalho são apresentadas. Reafirmando assim, aspectos relacionados à calibração, implementação e limitações das análises computacionais. Além disso, é enfatizada a necessidade de um bom trabalho experimental para que as análises computacionais sejam avaliadas de forma mais consistente.

CAPÍTULO 2

2 Revisão Bibliográfica

Nas últimas décadas, extensos trabalhos de pesquisa têm sido implementados no campo da fadiga e tolerância ao dano de materiais compósitos reforçados por fibras. Nesse período, uma gama de modelos com tal finalidade foi proposta, avaliada experimentalmente e comparada. Uma consistente revisão sobre o assunto pode ser encontrada em Degrieck e Paepegem (2001).

Em se tratando de tipos de modelos, Sendeckyj (1990) abordou os principais modelos e metodologias existentes para a análise de fadiga em materiais compósitos. Sendo que os mesmos podem ser classificados em três categorias:

(I) Modelos de curvas S-N

Estes modelos não consideram os mecanismos físicos reais de degradação do sistema material. As aproximações baseiam-se em curvas S-N ou diagramas de *Goodman* associados a algum tipo de critério de falha por fadiga para materiais compósitos.

(II) Modelos fenomenológicos

Os modelos fenomenológicos também não carregam informações sobre os mecanismos de dano. São dois os tipos desses modelos: os de *degradação da rigidez* e os de *degradação da resistência residual*.

(III) Modelos de dano progressivo

Estes modelos buscam considerar os mecanismos reais do acúmulo de dano. Utilizam uma ou mais variável de dano relacionada a grandezas mensuráveis, como, por exemplo, a densidade de trincas transversais da matriz, dimensões de uma delaminação, efeitos viscoelásticos, fratura de fibras, etc.

Em se tratando das dificuldades e limitações na modelagem, tem-se que Fong (1982) apresentou duas razões técnicas, que dificultam e encarecem a modelagem do dano por fadiga nos materiais compósitos:

- O fato de que complexos mecanismos de dano existem desde o nível atômico, passando pelos níveis de subgrão, grão, nível micromecânico e chegando até o nível da lâmina e da estrutura.
- A Impossibilidade de reproduzir duas ou mais lâminas com estruturas micromecânicas e propriedades idênticas.

Fong (1982) apontou, ainda, alguns erros geralmente cometidos no desenvolvimento de modelos matemáticos para previsão da durabilidade de compósitos, por exemplo, generalizações equivocadas, falta de rigor na aquisição/análise de dados e simplificações excessivas.

Daniel e Charewicz (1986) e Barnard, Butter e Curtis (1985) mostraram que o mecanismo de dano de um laminado modifica-se em função de diferentes faixas de amplitude cíclica aplicada, o que introduz sérias dificuldades na análise quando o material é submetido a espectros de carga com amplitude variável.

Hwang e Han (1986a) evidenciaram que o crescimento do dano é diferente para diferentes sequências de carregamento (em blocos, por exemplo), ou seja, o histórico de carga é importante. A resistência residual e a vida em fadiga (durabilidade) diminuem de forma mais acentuada quando os blocos de uma sequência de carregamento são pequenos, Farrow (1989). Tal fenômeno é conhecido como “Efeito de Ciclo Misto” e sua consequência é que, para um mesmo número de ciclos, um mesmo laminado apresentará resistência residual e vida média inferior quando sujeito à sequência com blocos menores.

Ellyin e Kujawski (1992) investigaram o efeito da frequência na fadiga de laminados de fibra de vidro e concluíram que ocorre uma influência considerável deste parâmetro, especialmente para laminados menos resistentes e menos rígidos, ou seja, com a resposta controlada pela matriz. Isto é devido à geração de calor interna e à sensibilidade da matriz à taxa de carregamento.

Vários esforços têm sido feito para estender os modelos de carga uniaxial e de amplitude constante a fim de considerar condições de tensão multiaxial, carregamento em bloco e espectral, assim como o efeito da frequência.

A seguir, será apresentado um texto abordando de forma mais detalhada os Modelos de curvas S-N, os Modelos Fenomenológicos e os Modelos de Dano Progressivo. Deve-se ressaltar que no presente trabalho, buscou-se apresentar fielmente a formulação e a simbologia utilizada pelos pesquisadores citados.

2.1 Modelos de Curvas S-N

Estas análises demandam grande trabalho experimental e não consideram os mecanismos de acúmulo de dano real, mas somente calcula o número de ciclos em que a falha ocorrerá. Ademais, utilizam informações de curvas S-N ou de diagramas de *Goodman* juntamente com determinados critérios de falha por fadiga, os quais determinam a vida em fadiga do compósito. Segundo Sendeckyj (1981), algumas orientações devem ser seguidas:

- A curva S-N deve ser descrita por uma equação determinística.

- A resistência estática de um compósito deve ser unicamente relacionada à sua vida e à sua resistência residual ao término do ensaio de fadiga.
- Os resultados dos ensaios de resistência estática do compósito devem ser descritos por uma distribuição estatística de *Weibull* de dois parâmetros.

Hashin e Rotem (1973) foram um dos primeiros a desenvolverem critérios de falha por fadiga em compósitos. Eles consideraram dois modos de falha distintos, para os quais os critérios de falha são:

$$\sigma_A = \sigma_A^u, \quad \text{para a falha das fibras} \quad (2.1-1a)$$

$$\left(\frac{\sigma_T}{\sigma_T^u} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau^u} \right)^2 = 1, \quad \text{para a falha da matriz} \quad (2.1-1b)$$

onde:

σ_A : amplitude de tensão na direção das fibras (do compósito)

σ_T : amplitude de tensão transversal às fibras

τ : amplitude de tensão de cisalhamento

σ_A^u : resistência à tração na direção das fibras.

σ_T^u : resistência transversal às fibras.

τ^u : resistência ao cisalhamento.

As resistências “últimas” são funções da amplitude, σ_A , do número de ciclos, N, e da razão de tensões, R. Por meio de três ensaios em laboratório sob carga uniaxial, determina-se as seguintes curvas S-N:

$$\begin{aligned} \sigma_A^u &= f(\sigma_A, R, N) \\ \sigma_T^u &= g(\sigma_T, R, N) \\ \tau^u &= h(\tau, R, N) \end{aligned} \quad (2.1-2)$$

Este critério é aplicável somente para laminados de camadas orientadas em uma única direção. Além disso, requisita-se distinguir os dois modos de falha ao longo do ensaio de fadiga, ou seja, falha da fibra ou falha da matriz.

Posteriormente, Ellyin e El-Kadi (1990) demonstraram que a densidade de energia de deformação pode ser usada em um critério de falha através da seguinte equação:

$$\Delta W^t = \kappa N_f^\alpha \quad (2.1-3)$$

onde:

ΔW^t : energia total absorvida durante o carregamento cíclico até N_f^f .

N_f : número de ciclos para a falha.

Os parâmetros κ e α são funções da orientação das fibras. A expressão (2.1-3) foi deduzida apenas para estado plano de tensão em regime elástico. Para incluir cisalhamento interlaminar e a distribuição de tensão ao longo da espessura, outra expressão precisaria ser derivada.

No ano seguinte, Reifsnider e Gao (1991) estabeleceram um critério de falha por fadiga baseado no *campo de tensão média em um meio heterogêneo (fibra e matriz)*. Dessa forma, tem-se um critério micro-mecânico que, por sua vez, utiliza informações das propriedades dos constituintes e da sua interface. O critério assemelha-se ao critério de Hashin e Roten (1973), com a diferença de que as tensões médias são usadas no lugar das amplitudes:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{11}^f \rangle &= X^f \\ \left(\frac{\langle \sigma_{22}^m \rangle}{X^m} \right)^2 + \left(\frac{\langle \sigma_{12}^m \rangle}{S^m} \right)^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.1-4a)$$

onde:

$\langle \sigma_{ij}^m \rangle$ e $\langle \sigma_{ij}^f \rangle$: componentes das tensões médias na matriz e na fibra, respectivamente, obtidas pelo método de Mori-Tanaka e dadas por:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}^f \rangle &= H_{ijrs} [cH_{mnrs} + (1-c)I_{mnrs}]^{-1} \sigma_{mn}^o \\ \langle \sigma_{ij}^m \rangle &= [cH_{rsij} + (1-c)I_{rsij}]^{-1} \sigma_{rs}^o \\ H_{ijrs} &= C_{ijkl}^f [I_{cwkl} + S_{cwpq} (C_{pqhv}^m)^{-1} (C_{hvkl}^f - C_{hvkl}^m)]^{-1} C_{cwrs}^{-1} \end{aligned} \quad (2.1-4b)$$

onde:

c: fração volumétrica das fases (fibras)

C_{ijkl} : componentes do tensor constitutivo

I_{ijkl} : tensor unitário

S_{ijkl} : tensor de Eshelby (ESHELBY, 1957)

σ_{mn}^o : tensão na ausência de heterogeneidades

X^m e X^f : funções de falha por fadiga sob tração para a matriz (sem reforço) e para a fibra, respectivamente.

S^m : função de falha por fadiga da matriz sob cisalhamento.

Assim como no modelo de Ellyin e El-Kadi (1990), três ensaios em laboratório determinam as seguintes curvas S-N:

$$\begin{aligned} X^m &= f(\langle \sigma_{22}^m \rangle, n, N) \\ S^m &= g(\langle \sigma_{12}^m \rangle, n, N) \\ X^f &= f(\langle \sigma_{11}^f \rangle, n, N) \end{aligned} \quad (2.1-5)$$

onde n é a frequência do carregamento cíclico. Uma das grandes vantagens desse modelo é que as tensões médias, nesse caso, são capazes de considerar o efeito de imperfeições na interface fibra-matriz.

Em 1993, Lawrence (1993) utilizou um critério de falha macroscópico baseado no critério de falha de Tsai-Hill, que possui a seguinte forma:

$$\frac{3}{2(F+G+H)} [F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{zx}^2 + 2N\sigma_{xy}^2] = \bar{\sigma}^2 \quad (2.1-6)$$

onde:

F, G, H , são funções das tensões admissíveis e das atuantes nas direções x, y e z , respectivamente.

L, M e N são funções das tensões de cisalhamento admissíveis e das atuantes nos planos $y-z$, $z-x$ e $x-y$, respectivamente.

σ^2 : tensão equivalente em termos de X, Y e Z .

a_1 : primeiro fator biaxial.

a_2 : segundo fator biaxial.

R : razão de tensões

Θ : ângulo de laminação

As tensões admissíveis, denominadas pelos pesquisadores como: X, Y, Z, Q, R e S são todas funções de N_f e, as correspondentes curvas S-N necessitam ser geradas antes do emprego do critério. Vale destacar que a inclusão das tensões residuais na análise, também, mostrou uma melhora nos resultados obtidos pelos pesquisadores.

Fawaz e Ellyin (1994) propuseram uma relação semi-logarítmica entre a tensão cíclica aplicada S e o número de ciclos para falha, N_f , considerando laminados uni e bidirecionais.

$$\begin{aligned} S &= m \log(N) + b \\ S_r &= m_r \log(N) + b_r \end{aligned} \quad (2.1-7)$$

onde a segunda equação é associada a uma curva bem conhecida e as grandezas m , b , m_r e b_r são parâmetros do material.

As relações entre m , b , m_r e b_r , são dadas por :

$$\begin{aligned} m &= f(a_1, a_2, \theta) \cdot g(R) \cdot m_r \\ b &= f(a_1, a_2, \theta) \cdot b_r \\ a_1 &= \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad a_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x} \end{aligned} \quad (2.1-8)$$

O modelo pode ser generalizado da seguinte forma:

$$S(a_1, a_2, \Theta, R, N) = f(a_1, a_2, \Theta) \cdot [g(R) m_r \log(N) + b_r] \quad (2.1-9)$$

Sendo assim, busca-se calcular m e b através das funções f e g para usá-los na equação geral $S - \log(N)$ para quaisquer valores de a , Θ e R . Esta análise mostrou-se bastante precisa quando aplicada a resultados experimentais da literatura, porém a escolha da curva conhecida pode influenciar fortemente nos resultados.

Harris (1985) e Adam et al. (1994) realizaram uma extensiva pesquisa em fadiga de materiais compósitos. Eles propuseram uma formulação denominada “Modelo de Vida Constante Normalizado”, o qual é capaz de gerar várias combinações de tensão média e amplitude que resultam em um mesmo número de ciclos para a falha. Tal modelo é dado por:

$$\begin{aligned} a &= f \cdot (1 - m)^u \cdot (c + m)^v \\ a &= \frac{\sigma_{alt}}{\sigma_t} \quad m = \frac{\sigma_m}{\sigma_t} \quad c = \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \end{aligned} \quad (2.1-10)$$

onde:

f, u, v : funções lineares de $\log N_f$, com f constante.

σ_t : resistência à tração

a : tensão cíclica normalizada

m : tensão média normalizada

c : resistência à compressão normalizada

A curva “a” tem a forma de um “sino”, sendo que as funções u e v controlam a forma do lado esquerdo e direito do sino, os quais não são necessariamente iguais, pois u e v podem diferir entre si. O resultado dessa análise é uma família de curvas de fadiga para vida constante, e os detalhes da análise são apresentados em Harris (1985).

Beheshty e Harris (1998) e Beheshty et al. (1999) provaram que o modelo de vida constante supracitado pode ser aplicado também à análise de dano por impacto em laminados. Nesse caso, o quadrante esquerdo do “sino” (predominantemente sob compressão) é substancialmente modificado após o impacto, em virtude da redução que este causa na resistência à compressão do material. O lado direito da curva é muito menos afetado. Ainda em Beheshty et al. (1999), os autores concluíram que “ f ” não é constante como postulou-se inicialmente, mas varia em função de “ c ”. Eles sugerem uma relação exponencial inversa para essa dependência, com duas constantes funções de N_f .

Andersons e Korsgaard (1997) observaram que a falha por *creep* (fluência) acelerava quando compósitos de fibra de vidro e matriz de resina poliéster (empregados em hélices de turbinas eólicas) eram submetidos a cargas cíclicas. Eles usaram a fração da vida, n/N_f , como a medida do parâmetro de dano “ D ”. O efeito do dano por fadiga na resposta viscoelástica foi modelada por uma “Tensão Efetiva Dependente do Dano”, como segue:

$$\sigma_e = \sigma \cdot (1 + C \cdot D)$$

$$D = \frac{N}{N_f} \quad (2.1-11)$$

onde:

σ : tensão aplicada

D : fração da vida

C : constante dependente da razão de tensões e do nível de tensão aplicada.

N_f : número de ciclos para a falha

N : número de ciclos aplicados

Com base no modelo em questão, as relações viscoelásticas lineares podem ser escritas, então, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \frac{\sigma_{ef}(t)}{E} + \int_0^t K(t-\tau) \cdot \sigma_{ef}(\tau) d\tau \\ K(t-\tau) &= \sum_i \frac{a_i}{b_i} \exp\left(-\frac{t-\tau}{b_i}\right)\end{aligned}\quad (2.1-12)$$

onde:

a_i e b_i : parâmetros do ensaio de *creep* (com $R=1$) sob reduzidos níveis de tensão.

t : tempo

τ : variável de integração (tempo)

E : módulo de elasticidade.

É importante notar que a resistência à fadiga tende a convergir para a resistência à ruptura por *creep* (fluência) à medida que a tensão média aumenta, ao invés de convergir para a resistência estática à tração, como geralmente é assumida na construção de diagramas de *Goodman*.

Jen e Lee (1998a) e Jen e Lee (1998b) estenderam o critério de falha de Tsai-Hill para um Critério de falha por fadiga generalizado:

$$M_{11}^2 \left(\frac{\sigma_{xx}}{\bar{\sigma}_{11}} \right)^2 + M_{22}^2 \left(\frac{\sigma_{xx}}{\bar{\sigma}_{22}} \right)^2 - M_{11} M_{22} \left(\frac{\sigma_{xx}}{\bar{\sigma}_{11}} \right) + M_{12}^2 \left(\frac{\sigma_{xx}}{\bar{\sigma}_{12}} \right)^2 = 1 \quad (2.1-13)$$

onde todas as componentes de tensões atuantes no plano (numeradores) foram expressas em termos de σ_{xx} a partir das relações de transformação de tensão global (sistema do laminado) e local (sistema da lâmina), das expressões das razões de tensões (R_{xx} , R_{yy} e R_{xy}) e das razões:

$$\alpha = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} \quad \beta = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} \quad (2.1-14)$$

As resistências à fadiga $\bar{\sigma}_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) são funções do número de ciclos N , frequência f e razão de tensões R_{ij} , e devem ser experimentalmente determinadas como proposto na literatura (Jen Lee, 1998a). Esta teoria foi aplicada a laminados quase isotrópicos de fibra de

carbono com matriz de PEEK. Todavia, a qualidade dos resultados obtidos para laminados $[\pm 45^\circ]_{4S}$ indica que refinamentos adicionais são necessários.

Philippidis e Vassilopoulos (1999) sugeriram um critério de falha por fadiga multiaxial bastante similar ao bem conhecido critério de falha de Tsai-Wu para cargas estáticas:

$$F_{ij}\sigma_i\sigma_j + F_i\sigma_i - 1 \leq 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1-15)$$

onde F_{ij} e F_i passam a ser funções do número de ciclos N , da razão de tensões R , e da frequência de carregamento f . As resistências estáticas X_t , X_c , Y_t , Y_c e S para o cálculo dos componentes do tensor F_{ij} e F_i são substituídas pelas curvas S-N do material nas mesmas direções e condições. Embora cinco curvas S-N sejam necessárias para a análise, este número pode ser reduzido a três, assumindo-se que $X_t = X_c$ e $Y_t = Y_c$.

Os autores compararam seus resultados com os resultados obtidos pelo critério de Fawaz e Ellyin (1994) mencionado anteriormente e, concluíram que aquele critério é bastante sensível à escolha da curva S-N de referência e que os valores estimados para N_f em tração-tração de corpos de prova cilíndricos não eram precisos. O modelo de Philippidis e Vassilopoulos produziu valores aceitáveis para todos os dados analisados. Todavia, o critério depende das propriedades do laminado e isto implica na necessidade de uma nova série de ensaios cada vez que se altera a sequência de laminação.

Plumtree e Cheng (1999) mostraram que o parâmetro de Smith-Watson-Topper (SWT) é válido para a fadiga multiaxial de metais. O parâmetro tem as mesmas dimensões que a densidade de energia de deformação, sendo definida como:

$$W = \sigma_{MAX} \cdot \Delta \epsilon_t \quad (2.1-16)$$

onde σ_{MAX} é a tensão máxima e $\Delta \epsilon_t$ é a variação total da deformação de tração (conhecida como *strain range*). Visando utilizar essa abordagem, Plumtree e Cheng sugeriram uma definição similar para compósitos com camadas unidirecionais empilhadas em direções diferentes de 0° :

$$\Delta W^* = \sigma_{22}^{MAX} \cdot \Delta \epsilon_{22} + \tau_{12}^{MAX} \cdot \frac{\Delta \gamma_{12}}{2} \quad (2.1-17)$$

onde o parâmetro de fadiga ΔW^* contempla: o modo de abertura normal às fibras (σ_{22}) e o modo de cisalhamento paralelo às mesmas (τ_{12}). Um ajuste linear entre ΔW^* e o número de

inversões $2N_f$ em escala logarítmica foi estabelecido para compósitos unidirecionais (resina epóxi reforçada por fibra de vidro tipo E) nas direções diferentes de 0° . Vale ressaltar que este ajuste foi empregado para estimar a vida em fadiga para outros ângulos de carregamento diferentes de 0° .

Bond (1999) desenvolveu uma metodologia semi-empírica para o cálculo da vida em fadiga sob carregamento de amplitude variável em compósitos com reforço de fibra de vidro. A curva S-N foi escrita da seguinte forma:

$$\sigma_{MAX} = b \cdot \log(N) + c \quad (2.1-18)$$

onde b e c são polinômios de quarta ordem em função de R'' , de tal forma que:

$$b = b(R'') \quad c = c(R'') \quad (2.1-19)$$

A relação entre R'' e R depende do modo de carregamento. Para o regime de tração-tração por exemplo, no diagrama de *Goodman*, R pertence ao intervalo $0 < R < 1$, ao passo que R'' é dado por:

$$R'' = 4 + R \quad (2.1-20)$$

todavia, o autor não evidenciou como as relações entre R'' e R são estabelecidas.

Xiao (1999) modelou o efeito da frequência do carregamento para compósitos termoplásticos de PEEK com reforço de fibra de carbono. Estimativas para a vida em fadiga com frequências de 5 Hz e 10 Hz foram conduzidas, tendo por base a curva S-N para frequência de 1 Hz. Essa curva de referência foi representada da seguinte forma:

$$p = p_0 + \frac{1 - p_0}{(1 + \tau N)^n} \quad T_{ref} = 40^\circ C \quad (2.1-21)$$

$$p = \frac{\sigma}{\sigma_u} \quad p_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_u} \quad (2.1-22)$$

onde:

σ_u : resistência estática “última” (tensão de ruptura)

σ_0 : limite de fadiga

τ, n : constantes empíricas, determinadas experimentalmente.

Como a temperatura máxima durante os ensaios a 1Hz ficou em torno de 39°C em média, foi adotado o valor de 40° para a temperatura de referência, T_0 . O pesquisador assumiu, então, que as curvas S-N isotérmicas para temperaturas acima de 40°C (temperatura elevada devido ao aquecimento por histerese causado pelas frequências de carregamentos mais altas) podiam ser estimadas através da translação da curva de referência com base nos fatores a_T e b_T . Este processo é esquematicamente mostrado na Figura 2.1-1.

Figura 2.1-1 Representação esquemática das isotérmicas de Xiao (1999)

Com as tensões de fadiga constantes $\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n$, e os ciclos de vida correspondentes N_i , é possível gerar um “diagrama de resistências constantes” como mostra a figura 2.1-2.

Figura 2.1-2 Diagrama de resistências constantes

A variação de temperatura devido ao aquecimento interno, ΔT , é calculada a partir da taxa de aquecimento, que é calculada com base na área do laço histerético do processo térmico. Isso permite determinar uma correlação entre a temperatura e a frequência. Finalmente, essa temperatura pode ser empregada no diagrama de resistências constantes para se ter, então, a estimativa de vida. Foram feitas estimativas para a vida em fadiga em laminados AS4 / PEEK com empilhamento de $[\pm 45^\circ]_{4S}$ sob frequências de 5 Hz e 10 Hz. Sendo que para o caso de 10 Hz, o valor medido foi consideravelmente menor do que o calculado. Isto possivelmente foi causado pelo atraso na transferência de calor do caso real.

Miyano et al. (1994) e Miayano et al. (2000) desenvolveram um modelo para cálculo da vida em fadiga de compósitos reforçados por fibra de carbono unidirecionais sob cargas de tração cíclicas. O método baseia-se em quatro hipóteses:

- I) Os mecanismos de falha para taxa de carregamento com deformação constante, *creep* e falha por fadiga são idênticos;
- II) As resistências dependentes do tempo e da temperatura podem ser combinadas pelo princípio da superposição;
- III) O acúmulo do dano pode ser representado por uma relação linear em função de um carregamento mecânico monotônico;
- IV) A resistência à fadiga pode ser descrita como uma função linear da razão de tensão.

Para a aplicação do método proposto, os pesquisadores estabeleceram os seguintes passos:

Passo 1: Através de ensaios em laboratório, foi determinada uma curva para a resistência estática sob carregamentos de deformação constante, para temperaturas de 50°C a 150°C. Outras curvas foram determinadas para a resistência à fadiga, com frequências de 0,02 Hz a 2,0 Hz. Estas curvas estão associadas às hipóteses I e II, e são esquematicamente mostradas na figura 2.1-3, onde t representa o tempo e N , o número de ciclos.

Figura 2.1-3 Curvas mestras para taxa de carregamento constante e para fadiga

Ainda nesta fase, uma curva para a resistência ao *creep* (figura 2.1-4) foi obtida através das curvas $\epsilon \times t$ e da suposta relação linear de dano (hipótese I e II):

$$\sigma_c = b + m \cdot \epsilon_u(t) \quad (2.1-23)$$

Figura 2.1-4 Curva mestra de *creep*

Passo 2: Foi suposto que a resistência ao *creep* é igual a resistência à fadiga para $R=1$ sob uma frequência qualquer f . Dessa forma, o tempo de falha por *creep* t_c é igual ao tempo de falha por fadiga t_f , dado por:

$$t_f = N / f \quad (2.1-24)$$

Passo 3: Assumiu-se que a resistência à fadiga varia linearmente com a razão de tensão R (hipótese IV). A resistência à fadiga é determinada então em função de uma combinação arbitrária de f , R e T , dada por:

$$\sigma(t_f; f, R, T) = \sigma_{f:1}(t_f; f, T) \cdot R + \sigma_{f:0}(t_f; f, T) \cdot (1 - R) \quad (2.1-25)$$

onde:

$\sigma_{f:1}(t_f; f, T)$: resistência ao *creep*

$\sigma_{f:0}(t_f; f, T)$: resistência à fadiga para $R=0$

O modelo foi aplicado para anéis de compósito (resina epóxi e fibra de carbono). Os resultados obtidos diferem dos experimentais para temperaturas acima da temperatura de transição vítrea, T_g . Essa propriedade é determinada através de técnicas bem específicas, como, por exemplo, a DSC (*Differential Scanning Calorimetry*) e a TMA (*Thermo-Mechanical Analysis*).

Epaarachchi e Clausen (2000) propuseram uma equação empírica para fadiga, dada por:

$$\frac{d\sigma}{dt} = -a \sigma_{MAX} (1 - R)^\gamma t^{-k} \quad (2.1-26)$$

onde:

a e K : constantes empíricas

$\gamma = 1,6$: valor proveniente de considerações de taxa de propagação de trincas.

σ_{MAX} : nível de tensão aplicado

R : razão de tensões

t : medida de tempo

A equação pode ser rearranjada da seguinte forma:

$$\left(\frac{\sigma_{ult}}{\sigma_{MAX}} - 1 \right) \frac{1}{(1 - R)^\gamma} f^\beta = \alpha (N^\beta - 1) \quad (2.1-27)$$

onde:

$\gamma = 1,6$

Nf : número de ciclos para a falha

f : frequência de carregamento

α, β : constantes empíricas.

O modelo foi aplicado para dados obtidos da literatura, considerando compósitos de resina epóxi reforçada por fibra de vidro, bem como para compósitos de polipropileno reforçado por fibra de vidro.

Mu, Wan e Zhao (2011), partindo da hipótese da equivalência dos estados de dano medidos pela degradação da rigidez e da resistência residual, construíram um modelo baseado em duas equações de dano por fadiga, as quais são relacionadas entre si. Uma equação representa o dano em termos da degradação da rigidez, D_E e a outra, da resistência residual, D_S :

$$D_E = 1 - \frac{1 - \left(\frac{n}{N_f}\right)^{1/a_E}}{1 + q_E \left(\frac{n}{N_f}\right)^{1/b_E}} \quad D_S = 1 - \frac{1 - \left(\frac{n}{N_f}\right)^{1/a_S}}{1 + q_S \left(\frac{n}{N_f}\right)^{1/b_S}} \quad D_S = (D_E)^{m(n/N_f)} \quad (2.1-28)$$

onde q_S , q_E , a_E , a_S , b_E e b_S são constantes do material relacionadas com o nível de tensão e com a razão de tensões. Resultados dos modelos foram comparados com dados experimentais, demonstrando ótima precisão. Visto que D_E e D_S estão relacionados, o uso desses modelos permite que se economizem muitos corpos de prova e tempo de ensaios destinados a caracterização da degradação da rigidez e da resistência residual de laminados compósitos sob cargas cíclicas de diferentes níveis de carga e razões de tensão.

2.2 Modelos Fenomenológicos

2.2.1 Modelos para “rigidez” residual

Inicialmente, deve-se ressaltar que no presente texto, o termo rigidez será muitas vezes empregado no lugar do termo módulo de elasticidade. Todavia, é conhecido que a rigidez, na verdade, depende tanto das propriedades do material como das propriedades geométricas da estrutura. Portanto, o leitor deverá ficar atento a esta questão de terminologia.

A variável D é freqüentemente usada para descrever a perda da “rigidez” elástica. Assim, no caso unidimensional, D é definida como:

$$D = 1 - \frac{E}{E_0} \quad 0 \leq D \leq 1 \quad (2.2-1)$$

onde E_0 é o módulo elástico na ausência de dano. Apesar de D ser freqüentemente entendida como uma variável de dano, os modelos são classificados como *modelos fenomenológicos* e

não como *modelos de dano progressivo*, visto que a taxa de crescimento do dano dD/dN é expressa em termos de propriedades macroscopicamente observáveis, enquanto, nos modelos de dano progressivo, a taxa de crescimento do dano é baseada nos mecanismos reais de degradação do material.

Hwang e Han (1986a) e Hwang e Han (1986b) introduziram o conceito do módulo de fadiga F , que é definido como a inclinação da curva $\sigma \times \varepsilon$ em um ciclo específico, conforme ilustrado na figura 2.2-1.

Figura 2.2-1 Módulo de fadiga

Na figura 2.2-1, n_i representa o i -ésimo número de ciclo. A taxa de degradação do módulo de fadiga é assumida como uma função exponencial de n_i dada por:

$$\frac{dF}{dN} = -A c n^{c-1} \quad (2.2-2)$$

onde A e c são constantes do material. É assumido também que a tensão aplicada σ_a varia linearmente com a deformação para qualquer ciclo de carga:

$$\sigma_a = F(n_i) \varepsilon(n_i) \quad (2.2-3)$$

Rearranjando e integrando as equações supracitadas, bem como introduzindo um critério de falha de deformação máxima, a vida em fadiga pode ser calculada da seguinte forma:

$$N = [B(1-r)]^{\frac{1}{c}} \quad (2.2-4)$$

onde $r = \sigma_a / \sigma_u$. Tal termo é conhecido como tensão cíclica normalizada ao passo que B e c são constantes do material.

Hwang e Han (1986a) propuseram três modelos de dano cumulativo baseados no módulo de fadiga $F(n)$ e na deformação resultante. Dentre esses, somente um mostrou melhor concordância com resultados experimentais. Tal modelo de dano é dado por:

$$D = \frac{r}{1-r} \left[\frac{F_0}{F(n)} - 1 \right] \quad (2.2-5)$$

Assim, a falha ocorrerá quando:

$$D = \sum_{i=1}^{i=m} \Delta D_i = 1 \quad (2.2-6)$$

sendo ΔD_i o dano total acumulado ao longo dos ciclos de fadiga para um dado nível de tensão r_i . Na equação (2.2-6), m é o número de sequências de carregamento até a falha final.

Kam, Chu e Tsai (1998) e Kam, Tsai e Chu (1997) empregaram os modelos de dano cumulativo propostos por Hwang e Ham (1986) para avaliar a confiabilidade em fadiga de laminados de fibras de carbono com resina epóxi sob espectro de tensões uniaxiais, utilizando o método β -modificado.

Fatemi e Yang (1998) publicaram um trabalho de revisão bibliográfica acerca dos modelos de dano cumulativo para materiais homogêneos (mais especificamente, metais e suas ligas). Nesta revisão, os autores fazem uma rápida referência a alguns modelos de Mecânica do Dano no meio contínuo, que podem ser aplicados também na análise de materiais heterogêneos, como compósitos reforçados por fibras.

Sidoroff e Subagio (1987) sugeriram outro modelo para a taxa de crescimento de dano dado por:

$$\frac{dD}{dN} = \begin{cases} \frac{A(\Delta \varepsilon)^c}{(1-D)^b} & \text{em tração} \\ 0 & \text{em compressão} \end{cases} \quad (2.2-7)$$

onde a variável D é dada por $1-E/E_0$. A , b e c são três constantes matemáticas a serem identificadas por ensaios experimentais e $\Delta\epsilon$ é a amplitude de deformação aplicada.

O modelo foi aplicado a resultados de ensaios de flexão em três pontos em compósitos unidirecionais sob carregamento de amplitude constante. Os resultados mostraram que o modelo necessita de refinamentos, principalmente quanto às dispersões estatísticas relativas à heterogeneidade do material.

Van Paepegen e Degrieck (2000b) e Van Paepegen e Degrieck (2001) implementaram o modelo de Sidoroff e Subagio (1987) em um código comercial de elementos finitos. O programa foi usado para simular o comportamento em fadiga de compósitos de tecido de fibra de vidro com resina epóxi carregados como viga em balanço sob controle de deslocamento. A distribuição do dano ao longo das amostras e, a consequente redistribuição de tensão com o aumento da ciclagem foram calculados com excelente precisão. O modelo de Sidoroff e Subagio (1987) foi adotado por outros pesquisadores, mas sempre em termos de amplitude de tensão ao invés da deformação.

Vieillelve et al. (1997) definiram a taxa de crescimento do dano da seguinte forma:

$$\frac{dD}{dN} = K_d \frac{\sigma^m}{(1-D)^n} \quad (2.2-8)$$

onde σ é a tensão local aplicada, m e n são parâmetros constantes e K_d depende da dispersão dos resultados. Em regime de compressão, dD/dN foi assumido como zero. Tal modelo foi aplicado a ensaios de flexão em três pontos.

Kawai (1999) modificou o modelo anterior para fadiga de laminados unidirecionais de fibra de carbono com carregamento não alinhado com as fibras:

$$\frac{d\omega}{dN} = \frac{K(\sigma_{MAX}^*)^n}{(1-\omega)^k} \quad (2.2-9)$$

onde K , n e k são constantes do material; ω é a variável de dano e, σ_{MAX}^* é uma tensão efetiva adimensional correspondente à uma tensão máxima de fadiga, que é definida como:

$$\sigma_{MAX}^* = \text{Max} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}}{X}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{X^2}\right) + \left(\frac{\sigma_{22}}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2} \right\} \quad (2.2-10)$$

onde X , Y e S são os valores de resistência à tração em x e y e ao cisalhamento no plano xy , respectivamente.

Whitworth (1987) propôs um modelo de “rigidez” residual para compósitos de fibra de carbono com resina epóxi dado por:

$$\left(\frac{E(N^*)}{E(0)} \right)^a = 1 - H \cdot \left(1 - \frac{S}{R(0)} \right)^a N^* \quad (2.2-11)$$

onde:

$N^*=n/N$: fração da vida em fadiga para o número atual de ciclos n

N : vida em fadiga relativa às condições atuantes durante o ciclo n

$R(0)$: resistência estática

$E(0)$: módulo elástico inicial

a e H : parâmetros independentes do nível de tensão aplicado

S : nível de tensão aplicada.

Esse modelo foi usado posteriormente pelo mesmo pesquisador, Whitworth (1990), para definir um modelo de dano cumulativo no qual a função de dano foi obtida como:

$$D = \left[\frac{H \cdot (1 - \bar{S})^a}{1 - \bar{S}^a} \right] \cdot \frac{n}{N} \quad (2.2-12)$$

onde:

$\bar{S} = S/R(0)$: variação total da tensão aplicada normalizada

a e H : parâmetros.

Quando $D=0$, nenhum ciclo de carga foi aplicado e $E=E(0)$. Quando $D=1$, a rigidez residual é igual a rigidez de falha, E_f .

Essa equação de dano foi estendida para o cálculo da vida residual de compósitos submetidos a cargas de amplitude variável. Para tanto, Whitworth usou o conceito de número de ciclos equivalentes, sendo necessário assumir que o comportamento da amostra é independente do histórico do carregamento. Os resultados obtidos foram comparados com resultados experimentais para dois níveis de tensão cíclica e, mostrou-se bastante razoável, porém para um número limitado de dados disponíveis. O autor concluiu que verificações adicionais são necessárias.

Posteriormente, Whitworth (1998) propôs um novo modelo:

$$\frac{dE^*(n)}{dn} = \frac{-a}{(n+1)[E^*(n)]^{m-1}} \quad (2.2-13)$$

onde:

$E^*(n)=E(n)/E(N)$: é a razão da “rigidez” no ciclo n para a rigidez de falha
 a e m : parâmetros dependentes da tensão aplicada e frequência do carregamento, entre outros.

Introduzindo um critério de falha baseado em deformação, $E(n)$ pode ser escrita em termos da resistência estática à tração, S_u . Uma distribuição estatística para a rigidez residual pode ser, então, obtida assumindo-se que a resistência estática seja dada por uma distribuição de *Weibull* de dois parâmetros.

Yang et al. (1990) desenvolveram um modelo de rigidez residual para laminados de compósitos, com base na seguinte equação:

$$\frac{dE(n)}{dn} = -E(0) \cdot Q \cdot v \cdot n^{v-1} \quad (2.2-14)$$

onde Q e v são parâmetros que se relacionam matematicamente de forma linear. Dados experimentais mostraram que v pode ser escrito como uma função linear do nível de tensão aplicado. Também foi modelada uma distribuição estatística para a rigidez residual. Os pesquisadores observaram que este modelo não era diretamente aplicável a laminados de compósitos com resposta governada pela matriz (mais flexíveis e menos resistentes), cujas curvas tensão-deformação não são lineares.

Yang et al. (1992) estenderam o modelo anterior para laminados de compósitos cujo comportamento mecânico é dominado pela matriz. Para tanto, houve a substituição do módulo $E(n)$ pelo módulo de fadiga $F(n)$. Através da resposta não linear da curva tensão-deformação, foi derivada uma relação envolvendo o módulo de fadiga $F(0)$ e a rigidez inicial $E(0)$. O modelo foi aplicado à análise do comportamento em fadiga de laminados de fibra de carbono e resina epóxi com empilhamento $[\pm 45^\circ]_{2S}$.

Lee et al. (1996) empregaram o modelo representado pela equação (2.2-14) para calcular a rigidez de falha (“rigidez crítica”) e a durabilidade (Vida em Fadiga) de laminados de compósitos submetidos a espectros de carga. Um critério empírico para a deformação de falha $\varepsilon(N)$ foi proposto. Testes experimentais foram conduzidos para um laminado de grafite

epóxi [0°/90°±45°]_{2s} para avaliar o modelo. Deve-se destacar que os resultados do modelo quando comparados aos experimentos mostraram-se bastante satisfatórios.

Hansen (1997,1999) desenvolveu um modelo de dano por fadiga pós-impacto para laminados de tecido submetidos a ciclos de tração-tração, dado por:

$$\beta = A \int_0^N \left(\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_0} \right)^n dN \quad \beta \leq \beta_{\lim} \quad (2.2-15)$$

onde:

N : número de ciclos

ε_e : nível de deformação efetiva

ε_0 : nível de deformação de referência

A, n : constantes

A variável de dano β , é relacionada às propriedades elásticas:

$$E = E_0 \cdot (1 - \beta) \quad \nu = \nu_0 \cdot (1 - \beta) \quad (2.2-16)$$

O valor de $\beta_{\lim}$ foi estimado pelos autores com base em observações experimentais na redução de E . Considerando uma redução de 20% de E , bem como utilizando a equação (2.2-16), o valor de $\beta_{\lim}$ foi estimado como 0,2.

Experimentos mostraram que o comportamento do compósito estudado sob tração foi alterado pelo dano causado por um impacto de baixa energia no caso de fadiga de alto ciclo (níveis reduzidos e moderados de tensão). No caso da fadiga de baixo ciclo, não houve alteração no desempenho.

Brondsted et al. (1997a,1997b) desenvolveram um modelo de redução da rigidez para compósitos reforçados por fibras de vidro. As estimativas foram baseadas na observação experimental de materiais usados em turbinas eólicas submetidos a carregamentos de amplitude constante, em bloco ou espectral. Sendo que a degradação da rigidez é dada por:

$$\frac{d(E/E_1)}{dN} = -K \left(\frac{\sigma}{E_0} \right)^n \quad (2.2-17)$$

onde:

E : módulo cíclico após N ciclos

E_1 : módulo cíclico inicial

E_0 : módulo estático

σ : tensão máxima

K : constante

A expressão (2.2-17) é baseada numa relação, observada pelos pesquisadores, entre a rigidez e o número de ciclos no segundo estágio da curva de degradação da rigidez (como será mostrado na curva “Rigidez Global” da figura 3.2-3):

$$\frac{E}{E_1} = A \cdot N + B \quad (2.2-18)$$

onde assume-se uma dependência exponencial da tensão em relação ao parâmetro A . Considerando a mudança de rigidez independente do histórico de carregamento, o modelo pode ser utilizado para o cálculo da durabilidade em condições de amplitude variável.

Mais recentemente, com base na degradação da rigidez por fadiga, um modelo fenomenológico de dano em laminados compósitos foi apresentado por Wu e Yao (2010). Uma série de resultados numéricos para o dano e para a vida residual obtidos com o modelo foi comparada com resultados experimentais, incluindo casos com amplitude variável. Os resultados calculados para o dano foi corretamente previsto, inclusive seu comportamento não linear. Da mesma forma, resultados para a vida residual dos vários casos analisados mostraram-se bastante precisos.

2.2.2 Modelos para Resistência Residual

São dois os tipos de modelos de resistência residual:

1. Modelos de falha abrupta (“sudden death”)
2. Modelos de degradação progressiva (“wearout”).

Os modelos de falha abrupta são indicados para representar o comportamento de compósitos submetidos a altos níveis de tensão (fadiga de baixo ciclo). Nessas condições, a resistência residual, inicialmente, muda pouco, porém sofre reduções drásticas a partir de um certo número de ciclos de carga. Esses modelos são especialmente adequados para análise de compósitos unidirecionais de alta resistência (CHOU; CROMAN, 1978, 1979).

Quando laminados são submetidos a reduzidos níveis de tensão (fadiga de alto ciclo), a degradação da resistência residual ocorre mais gradualmente. Nestes casos, os modelos de

degradação progressiva representam melhor a resistência residual em função do número de ciclos.

De acordo com Degrieck e Paepegem (2001), até 2001, a maioria dos pesquisadores não fornecia resultados experimentais para resistência residual em ambos os regimes, de baixo e alto ciclo, mas somente para um deles. Portanto, em muitos casos de modelos apresentados na literatura, não se podia afirmar se o modelo era aplicável ou não para fadiga de baixo e/ou de alto ciclo.

Halpin et al. (1973) foram os primeiros a propor um modelo de degradação progressiva. Neste modelo, assume-se que a resistência residual $R(n)$, é uma função que decresce monotonicamente com o número de ciclos, n , e que essa variação pode ser aproximada por uma equação exponencial como se segue.

$$\frac{dR(n)}{dn} = -\frac{A(\sigma)}{m[R(n)]^{m-1}} \quad (2.2-19)$$

onde $A(\sigma)$ é uma função da tensão cíclica máxima σ e m é uma constante.

Este procedimento foi adotado por vários pesquisadores tais como: Hahn e Kim (1975); Chou e Croman (1978); Hahmand e Kim (1976); Chou e Croman (1979); Yang (1978). Vale ressaltar que posteriormente, a pesquisa de Kedward e Beaumont (1992) apresentou uma visão geral do uso dos modelos de degradação progressiva em metodologias de certificação aeronáutica.

Yang e Jones (1981) propuseram outro modelo para a curva de resistência residual, dada por:

$$R^v(n) = R^v(0) - \frac{R^v(0) - \sigma^v}{R^c(0) - \sigma^c} KS^b n \quad (2.2-20)$$

onde:

R: resistência residual

N: número de ciclos

n : tensão cíclica máxima

v : constante

$C = \alpha/\alpha_f$

α : parâmetro de forma da resistência última

α_f : parâmetro de forma da resistência à fadiga

K e b: constantes

S: variação total da tensão cíclica (“Stress range”).

Yang e Jones também derivaram expressões para a distribuição estatística da vida em fadiga e da resistência residual para dois níveis de tensão e para um carregamento espectral. Eles utilizaram distribuições de *Weibull* de 3 parâmetros para a vida e de 2 parâmetros para a resistência residual. Usando estas expressões, os efeitos de diferentes sequências de carregamento puderam ser investigados.

Daniel e Charewicz (1986) estudaram o acúmulo de dano em laminados de fibra de carbono com resina epóxi sob tração cíclica. Para tal estudo, empregaram um modelo baseado na resistência residual normalizada:

$$\left[\frac{1-f_r}{1-s} \right] = g\left(\frac{n}{N} \right) \quad (2.2-21)$$

onde:

$$f_r = \frac{F_r}{F_0} : \text{resistência residual normalizada}$$

$$S = \frac{\sigma_a}{F_0} : \text{tensão cíclica normalizada}$$

N: número de ciclos para falha sob σ_a

$$g\left(\frac{n}{N} \right) : \text{função do número de ciclos normalizado}$$

Deve-se destacar que a função g não foi determinada no artigo. Os autores mencionaram que o modelo não é satisfatório, porque o mesmo é completamente dependente de uma curva de resistência residual bem definida. Porém, a determinação experimental dessa curva é difícil e apresenta muita dispersão nas medições.

Adicionalmente, Daniel e Charewicz (1986) assumiram que o dano por fadiga é função unicamente da resistência residual, de tal forma que um corpo de prova submetido a M_1 ciclos sob uma tensão σ_1 desenvolveria o mesmo dano, que um segundo corpo de prova submetido a M_2 ciclos sob uma tensão σ_2 ; caso eles apresentassem a mesma resistência residual F_r após os ensaios. Essa definição permite a determinação de curvas de dano equivalente no plano (σ, n) . Sendo assim, a vida residual pode ser estimada a partir dessas curvas.

De acordo com Rotem (1986, 1991), a resistência estática inicial é mantida até quase a falha final por fadiga. Ele definiu uma resistência inicial, S_0 , no primeiro ciclo, maior que a resistência estática real. Rotem equacionou a curva $S-N$ sob tração-tração para laminados de fibra de carbono com resina epóxi da seguinte forma:

$$s = 1 + K \log(N) \quad (2.2-22)$$

onde:

$$s = S_i/S_0$$

S_i : resistência à fadiga para amplitude constante

S_0 : resistência inicial

A expressão (2.2-22) permite que se determine a vida residual após um certo número de ciclos, através de uma curva similar à curva $S-N$, porém com inclinação diferente, passando por S_0 . Tal curva foi chamada de *linha de dano*. Assim, uma família de *linhas de dano* é dada por:

$$s = 1 + K \log(N) \quad k < K \quad (2.2-23)$$

Schaff e Davidson (1997a, 1997b) realizaram uma extensa pesquisa experimental e teórica, apresentando um modelo de degradação progressiva para o cálculo da resistência residual e da vida de estruturas de compósitos submetidas a *espectros* de carga. O referido modelo é dado por:

$$R(n) = R_0 - (R_0 - S_p) \left(\frac{n}{N} \right)^\nu \quad (2.2-24)$$

onde R é a resistência residual, S_p é a tensão cíclica máxima e ν é um parâmetro. Destaca-se que o valor de ν poderia variar da seguinte forma: 1(um) para uma degradação linear; muito maior do que 1(um) para o comportamento de falha abrupta; menor do que 1(um) para situações de decréscimo inicial rápido da resistência residual. Esta análise foi aplicada primeiro para 2 níveis de carregamento de fadiga, (S_1, n_1) e (S_2, n_2) . Visto que o decréscimo na resistência residual durante os n_2 ciclos sob o valor de tensão S_2 depende do número de ciclos n_1 sob o valor de tensão S_1 , a contribuição desses últimos precisa ser, então, considerada. Para tanto, é definido um *número efetivo de ciclos* (ou *pseudo-número de ciclos*) n_{eff} , de forma que (S_1, n_1) produza a mesma redução na resistência causada por (S_2, n_{eff}) . Os

autores investigaram, também, a importância do *efeito de ciclo misto* (*cycle mix effect*) e concluíram que blocos pequenos de ciclos de tensões elevadas em laminados produzem maiores reduções na vida média, quando comparados com blocos mais longos, mesmo quando o número total de ciclos aplicados é igual. Para tal conclusão, os pesquisadores utilizaram resultados experimentais de um espectro padrão randomicamente ordenado, que simula o histórico de carga de aeronaves de combate. Neste espectro, os segmentos de amplitude constante são compostos de apenas alguns poucos ciclos. O efeito é considerado através da aplicação de um “*cycle mix factor*”, que é empregado somente quando o nível da tensão média aumenta de um segmento para o próximo. Os resultados do modelo demonstraram uma boa correlação com vários resultados experimentais.

Caprino e D’Amore (1998) realizaram ensaios de flexão cíclica sob quatro pontos em um compósito termoplástico com fibras contínuas. Os pesquisadores assumiram que a resistência residual diminuía continuamente de acordo com a seguinte expressão:

$$\frac{d\sigma_n}{dn} = -a_0 \cdot \Delta\sigma \cdot n^{-b} \quad (2.2-25)$$

onde:

σ_n : resistência residual após n ciclos

$\Delta\sigma = \sigma_{MAX} - \sigma_{MIN}$: variação de tensão, que inclui o efeito da razão de tensões, R

a_0 e b : constantes

Caprino e D’Amore (1998) salientaram que um modelo confiável deve ser capaz de considerar tanto a influência da tensão média (através de diferentes R) como os regimes de fadiga de baixo e de alto ciclo. De fato, os pesquisadores notaram que houve uma transição do modo de falha de escoamento da matriz por cisalhamento para o de propagação das trincas na matriz, quando se alterou do regime de baixo ciclo (altas tensões) para o de alto ciclo (tensões baixas).

Caprino et al. (1998) mostraram que quanto maior a sensibilidade de um material à amplitude de carregamento, menor a sua sensibilidade ao número de ciclos. Isso implica que, ao tentar comparar materiais diferentes com base nas suas respostas em fadiga de baixo e de alto ciclo não se chegará necessariamente às mesmas conclusões.

Caprino e Giorleo (1999) aplicaram o modelo desenvolvido para previsão da resistência residual de compósitos de fibra de vidro com resina epóxi submetidos a um ensaio de fadiga sob flexão em 4 pontos.

Posteriormente, Caprino (2000) usou o modelo de resistência residual na análise de compósitos reforçados por fibras de carbono com resina epóxi sob carga de tração-tração. Concluiu que o modelo pode estimar a vida em fadiga, porém as resistências residuais médias experimentais não convergem para os resultados do modelo.

Whitworth (2000) empregou o seu modelo de rigidez residual para avaliar a degradação da resistência residual, sendo que a rigidez de falha $E(N)$ foi obtida com base num critério de falha por deformação:

$$\frac{S}{S_1} = c_1 \left[\frac{E(N)}{E(0)} \right]^{c_2} \quad (2.2-26)$$

onde:

S : nível de tensão aplicado

S_u : resistência “última”

$E(0)$: rigidez inicial

$E(n)$: rigidez de falha

c_1, c_2 : parâmetros de não linearidade

A resistência residual pode ser escrita como:

$$S_r^\gamma = S_u^\gamma - \frac{n}{N} (S_u^\gamma - S^\gamma) \quad (2.2-27)$$

onde:

S_r : resistência residual

γ : parâmetro

Finalmente, a vida em fadiga pôde ser expressa em termos de S_u e S , utilizando a evolução da rigidez dada na equação (2.2-13).

Yao e Himmel (2000) assumiram que o comportamento da resistência residual de compósitos poliméricos reforçados por fibras sob carga de tração pode ser descrito pela seguinte função:

$$R(i) = R(0) - [R(0) - S] \frac{\sin(\beta x) \cdot \cos(\beta - \alpha)}{\sin(\beta) \cdot \cos(\beta x - \alpha)} \quad (2.2-28)$$

onde:

$R(i)$: resistência residual no i -ésimo ciclo de carga ($i = 1^\circ$ ciclo, 2° ciclo, etc.)

$R(0)$: resistência estática

S : nível de tensão aplicado

$$x = \frac{i}{N_f}$$

α e β : parâmetros a serem determinados experimentalmente.

Por outro lado, para corpos de prova que falham por compressão, a evolução da resistência é dada por:

$$R(i) = R(0) - [R(0) - S] \left(\frac{i}{N_f} \right)^v \quad (2.2-29)$$

onde v é um parâmetro de degradação da resistência que depende da razão de tensões e da tensão cíclica máxima. Neste estudo, a resistência residual também é considerada como sendo a única medida do dano acumulado. O modelo proposto foi aplicado para prever resultados de ensaios de carregamento em blocos em laminados de fibra de vidro com resina epóxi, bem como de fibra de carbono com resina epóxi. Uma boa concordância foi observada entre os resultados teóricos e experimentais.

2.3 Modelos de Dano Progressivo

Os modelos de dano progressivo diferem dos modelos de curvas S-N e dos fenomenológicos no sentido de que introduzem uma ou mais variáveis de dano que descrevem fisicamente o processo de danificação do material, com base nos mecanismos reais de iniciação e propagação de diferentes modos de dano. Estes modelos subdividem-se em duas classes:

1. Modelos de *propagação do dano*
2. Modelos de *degradação da resistência* ou da *rigidez*.

Os modelos de *propagação do dano* descrevem o crescimento de um modo de dano, como por exemplo, o número médio de trinca na matriz por unidade de comprimento ou a extensão de uma área delaminada.

Por outro lado, os modelos de *degradação* da resistência ou da rigidez correlacionam o crescimento do dano com a resistência ou rigidez residual.

2.3.1 Modelos de Propagação do Dano

Esses modelos são propostos visando prever a propagação de um tipo de dano específico, tais como trincas na matriz e delaminação. Muitos desses modelos fazem uso de ensaios de corpos de prova com entalhes destinados a iniciar um modo específico de dano num local bem conhecido.

Owen e Bishop (1974) foram um dos primeiros pesquisadores a investigar um grande número de compósitos reforçados por fibras de vidro. O objetivo do trabalho foi prever a iniciação de dano em furos centrais de corpos de prova submetidos a cargas estáticas e cíclicas. Eles observaram que o tamanho dos corpos de prova pode exercer uma grande influência nos valores das cargas ou do número de ciclos necessários para iniciar o dano e causar a falha final. Notaram que corpos de prova 10 vezes maiores apresentaram dano e/ou falha final com solicitações entre 48% e 73% das cargas dos corpos de prova menores. Corpos de prova com furo central contendo um “*split*” (macro trinca na matriz, alinhada com as fibras das camadas 0°) de cada lado foram submetidos à fadiga. Devido à dificuldade de se controlar os comprimentos dessas trincas durante os ensaios, eles relacionaram o seu comprimento com a flexibilidade do corpo de prova. Os pesquisadores concluíram que a equação de Paris poderia ser empregada para prever a taxa de propagação de trincas nos materiais investigados.

Biner e Yuhas (1989) estudaram a propagação de trincas pequenas causadas por fadiga em amostras de compósitos de tecido de fibra de vidro e resina epóxi, contendo entalhes (concentradores de tensão). Após os estudos, ficou demonstrado que a iniciação e a taxa de propagação das trincas pequenas originadas em entalhes podem ser descritas precisamente por um fator de intensidade de tensão efetivo ΔK_{eff} .

Bergmann e Prinz (1989) e Prinz (1990) propuseram um modelo específico para a propagação de delaminações:

$$\frac{dA_i}{dN} = \hat{c} \cdot f(G_{it}) n \quad (2.3-1)$$

onde:

A_i : Área delaminada

G_{it} : Amplitude máxima da taxa de energia liberada

$\hat{c}$, n : constantes determinadas experimentalmente.

Foram conduzidos ensaios de fadiga para laminados de fibras de carbono com resina epóxi com empilhamento $[0_2 / +45 / 0_2 / -45 / 0 / 90]_s$ possuindo um furo central. Além disso, foram analisados laminados unidirecionais com empilhamento de $[\theta_n / \theta_m]_s$. Nestes últimos, um descolamento inicial simulando uma delaminação foi gerado durante o processo de fabricação, como mostrado esquematicamente na figura 2.3-1.

Figura 2.3-1 Corpo de prova com delaminação artificial inicial

Além da propagação, avaliou-se a falha por flambagem da seção delaminada, determinando-se assim uma carga crítica de flambagem, F_c .

Dahlen e Springer (1994) apresentaram um modelo semi-empírico para a estimativa da propagação de delaminações em laminados de fibra de carbono com resina epóxi sob cargas cíclicas, incluindo os modos de abertura e de cisalhamento (Modos I e II) combinados. Assumiu-se que o Modo III (cisalhamento fora do plano) não contribuía significativamente para a propagação e, que os efeitos viscoelásticos e térmicos podiam ser desprezados. Com base nas hipóteses anteriores e, através de grupos adimensionais das variáveis envolvidas, bem como de uma equação similar à equação de Paris, a propagação da trinca foi descrita da seguinte forma:

$$\Delta a \frac{\sigma_f^2}{E_y G_{crit}} = A \left(U \frac{G_{max}}{G_{crit}} \right)^b \quad (2.3-2)$$

onde:

Δa : crescimento da delaminação normal à circunferência da delaminação existente

σ_f : resistência da lâmina

E_y : módulo elástico transversal da lâmina

G_{crit} : Taxa crítica de energia liberada incluindo os Modos I e II

A , b : Parâmetros dependentes do material e da contribuição relativa entre os Modos I e II

U : Função de G_{max} / G_{crit} e de G_{min} / G_{max}

G_{max} : taxa máxima de liberação da energia total durante o ciclo em análise

A forma de U é função da inversão ou não no sinal do cisalhamento, pois a delaminação aumenta em taxas diferentes para casos em que ocorre, ou não, tal tipo de fenômeno. Deve-se destacar que os pesquisadores investigaram três tipos de ensaios:

- Delaminação em Modo I e II sob cargas estáticas
- Modo I e Modo II sob cargas cíclicas
- Modos I e II combinados, sob cargas cíclicas.

Xiao e Bathias (1994a, 1994b) estudaram laminados de tecido de fibra de vidro com resina epóxi, sendo que alguns continham entalhe e outros não. Os laminados foram, também, projetados propositalmente desbalanceados, com grande tendência ao empenamento. Embora os pesquisadores não tenham proposto um modelo de dano progressivo, os mesmos introduziram o conceito de “*fatores de fadiga*”, que são muito úteis na comparação de dados experimentais. Os resultados mostraram que tanto laminados com entalhes, quanto os sem entalhes, exibem o mesmo *fator de fadiga*, ou seja, a mesma razão entre a resistência a fadiga (“endurance”) e a resistência estática a tração. Para as três sequências de laminação analisadas, os pesquisadores demonstraram que as razões das suas resistências à fadiga são respectivamente iguais às razões entre as suas resistências estáticas. Os autores observaram, também, que a sequência de laminação influenciou a vida em fadiga, pois quando as lâminas a 90° estavam restringidas por lâminas a 0°, os danos das camadas a 90° não podiam cruzar a interface facilmente. Consequentemente, os caminhos do dano ficavam muito sinuosos.

Feng et al. (1997) estudaram compósitos de fibra de carbono e desenvolveram um método para o cálculo da evolução da distribuição de trincas na matriz devido à fadiga. Observações experimentais permitiram concluir que a propagação das trincas para o Modo I pode ser descrita por uma equação de Paris modificada, ou seja:

$$\frac{dA}{dN} = D \cdot G_{max}^n \quad (2.3-3)$$

onde:

A : Área de dano devido às trincas

N : Número de ciclos

G_{max} : Taxa máxima de energia de deformação liberada no ciclo

D, n : Constantes do material.

Através de análises por elementos finitos, calculou-se o valor de G_{max} sucessivamente para simular o crescimento do dano. Esse procedimento permitiu estabelecer a relação matemática entre A e G_{max} . Assim, quando a deformação da fibra se iguala ou excede o nível de deformação de ruptura devido à redistribuição interna de carga, causada pelo aumento da área de dano A , a falha por fadiga deverá ocorrer. Dessa forma, é possível determinar N_f e A para a falha. A área de dano foi estimada para uma viga “I” com entalhe, submetida à carga de flexão em quatro pontos, e para um corpo de prova submetido à carga de tração – tração, estando em boa concordância com as observações experimentais.

Hénaff-Gardin et al. (1997, 2000) estudaram a distribuição progressiva de trincas na matriz de laminados $0^\circ/90^\circ$. A equação de propagação foi estabelecida da seguinte forma:

$$\frac{dS}{dN} = A \left(\frac{G_I}{G_{max}} \right)^n \quad (2.3-4)$$

onde:

S : Superfície da trinca formada

G_I : Taxa da energia de deformação liberada para a densidade de trincas instantânea

G_{max} : Taxa da energia de deformação liberada quando a primeira trinca é iniciada.

A, n : Constantes determinadas por meio de medições experimentais da densidade de trincas.

Portanto, quando G_{max} é menor que G_{IC} , a primeira trinca se inicia somente após um acúmulo de micro-danos causados pelos primeiros ciclos de fadiga. Nesse caso, um modelo fenomenológico foi usado para se estimar o número de ciclos necessário para iniciar as trincas transversais.

Gamby et al. (1997), juntamente com o grupo de pesquisa do trabalho anterior, estudaram como as trincas na matriz se iniciam numa borda livre e, então, se propagam para o centro das amostras, usando três diferentes sequências de laminação: $[0_2/+45/-45/0_2]_S$,

$[+45_2/-45_2]_S$ e $[0_4/45_2]_S$. Os pesquisadores notaram que o primeiro modo de dano consistia em trincas na matriz para as camadas a $\pm 45^\circ$. A densidade de trincas em cada camada pareceu ser aproximadamente constante ao longo da direção da carga aplicada, dependendo somente da distância de borda e do número de ciclos, N .

Bartley-Cho et al. (1998) pesquisaram o comportamento de trincas em camadas de laminados quase-isotrópicos de fibra de carbono com resina epóxi sob carga cíclica de tração-tração e tração-compressão, com amplitudes constantes. Para avaliar o efeito da sequência de aplicação das cargas, foram conduzidos, também, ensaios com carregamentos em blocos. Dessa forma, os pesquisadores desenvolveram uma metodologia para a análise das trincas nas camadas dos compósitos estudados. Tal análise é sumarizada da seguinte forma:

- 1) Para uma dada tensão no laminado, σ_{lam} , os correspondentes tensores nas camadas são determinados. Considerando dois laminados diferentes: $[0/\pm 45/90]_{S3}$ e $[0/\pm 45/90]_{S4}$, observou-se que as trincas se iniciaram primeiro nas camadas a 90° e posteriormente nas camadas a -45° e, devido à rigidez da camada a 0° próxima à camada a $+45^\circ$, esta foi a última a apresentar trincas.

Uma função de falha foi então proposta para relacionar o tensor de tensões na lâmina com o número de ciclos para o qual ocorre a iniciação de trincas na matriz:

$$f = \frac{\sigma_{yy}^2}{YY'} + \left(\frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'} \right) \sigma_{yy} + \left(\frac{\sigma_{xy}}{S} \right)^2 = 0.981N^{-0.134} \quad (2.3-5)$$

onde:

f : depende do número de ciclos segundo uma relação experimental.

Y : resistência transversal à tração

Y' : resistência transversal à compressão

S : resistência ao cisalhamento

- 2) Calcula-se o número de ciclos N_i para a iniciação das trincas nas camadas a 90° através da equação (2.3-5).

- 3) Com o aumento do número de ciclos superiores a N_i , a densidade de trincas aumentará. Essa densidade é, então, calculada por uma curva ajustada para medidas da densidade média de trincas:

$$\rho_{crack} = \rho_{\infty} \left[1 - \exp \left(-b \cdot \log \frac{N}{N_i} \right) \right] \quad (2.3-6)$$

onde:

b : constante

ρ_{∞} : densidade de saturação de trincas

As funções para ρ_{crack} foram ajustadas para diferentes níveis de tensão para as camadas a 90° , -45° e $+45^\circ$. Observou-se que quanto maior o nível de tensão, maior é ρ_{∞} , contrariando a freqüente afirmação de que a densidade de saturação independe do histórico de carga.

- 4) A redistribuição de tensões para as outras camadas devido às trincas nas camadas a 90° é calculada da seguinte forma:

Calcula-se a rigidez efetiva das camadas trincadas, dada por:

$$C_{ij} = C_{ij}^0 \exp \left(-\alpha_{ij} \rho_{crack}^{t_{ply}} \right) \quad (2.3-7)$$

onde:

α_{ij} : constantes de redução da rigidez, experimentalmente determinadas

t_{ply} : espessura da camada

Uma vez determinadas C_{ij} , novos tensores podem ser calculados nas camadas a -45° , pela Teoria Clássica de Laminados, os quais representam a redistribuição interna da carga.

- 5) Usando as informações acima, os tensores de tensão nas camadas a 45° são calculados e, a função de falha (2.3-5) é avaliada para cada número de ciclo $N > N_i$, até que ocorra a iniciação de trincas, indicando falha das camadas a 90° e a -45° .

Esta metodologia foi empregada, também, em experimentos com carregamentos em blocos. Neste caso verificou-se a influência da sequência dos blocos, causando uma maior formação de trincas para a sequência crescente em relação à sequência decrescente. Esse efeito não foi reproduzido pelo modelo para tração nem para compressão, em virtude do mesmo ser independente do histórico de carregamento.

Bucinell (1998) desenvolveu um modelo estocástico para a propagação de delaminações nas bordas de laminados de compósitos. Os ensaios foram realizados com amostras fabricadas de carbono epóxi AS4/3501-6, com a sequência de laminação de $[\pm 45/90/0]_S$, nos quais as delaminações se iniciavam sempre na interface entre as camadas a 45° e a 90° .

O modelo de propagação proposto baseou-se nos princípios da Mecânica da Fratura e é dado por:

$$\frac{da}{dN} = \alpha \left[\frac{G(\sigma_m, a)}{G_c} \right]^\rho \quad (2.3-8)$$

onde:

a : largura da delaminação

N : número de ciclos

σ_m : tensão aplicada

G : taxa de energia de deformação liberada

G_c : taxa de energia de deformação liberada crítica

α, ρ : parâmetros determinados com base na curva experimental $a \times N$, para diferentes níveis de σ_m .

De acordo com os resultados obtidos, investigações adicionais são necessárias para a análise de delaminações em laminados com geometrias diferentes daquelas tratadas no estudo.

Schön (2000) propôs um método simplificado para análise de propagação de delaminações em laminados reforçados por fibras. O referido método considera que o crescimento da delaminação pode ser descrito pela equação de Paris, sendo assim:

$$\frac{da}{dN} = D(\Delta G)^n \quad (2.3-9)$$

onde:

a : comprimento da delaminação

ΔG : variação da taxa de energia liberada ($G_{\max} - G_{\min}$)

D, n : constantes

Deve-se destacar que o método proposto pelo pesquisador foi aplicado da seguinte forma:

- (1) Para evitar equívocos na comparação de propagações em amostras sob tração e compressão com amostras em balanço e/ou flexão, define-se um parâmetro Q , dado por :

$$\begin{aligned} Q &= R \quad \text{quando} \quad -1 \leq R \leq 1 \\ Q &= 1/R \quad \text{quando} \quad |R| > 1 \end{aligned} \quad (2.3-10)$$

onde R é a razão de tensões.

- (2) Para o carregamento da trinca sob Modo II, é possível considerar tanto o cisalhamento reverso como o cisalhamento em uma única direção (valores de $Q < 0$). Nesse caso, ao invés de ΔG , utiliza-se uma grandeza similar, que é ΔG_r :

$$\begin{aligned} \Delta G_r &= G_{\max} - G_{\min} \quad \text{qdo} \quad Q > 0 \\ \Delta G_r &= G_{\max} + G_{\min} \quad \text{qdo} \quad Q < 0 \end{aligned} \quad (2.3-11)$$

- (3) Para a determinação de D e n , são definidas duas condições:

$$\begin{aligned} \left(\frac{da}{dN} \right) &= \left(\frac{da}{dN} \right)_{th} \quad \text{qdo} \quad \Delta G_r = \Delta G_{r,th} \\ \left(\frac{da}{dN} \right) &= \left(\frac{da}{dN} \right)_c \quad \text{qdo} \quad G_{\max} = G_{\max,c} \end{aligned} \quad (2.3-12)$$

onde:

$\Delta G_{r,th}$: taxa de energia liberada *threshold* (valor abaixo do qual não há propagação). Este valor é experimentalmente determinado e é independente do valor de Q e do modo de R .

$G_{\max,C}$: taxa máxima de energia liberada, proveniente de ensaios quase-estáticos.

2.3.2 Modelos de degradação da resistência ou da rigidez

Esta subclasse de modelos de dano progressivo busca relacionar a resistência ou a rigidez do laminado com as variáveis de dano. As equações para as taxas de propagação do dano são geralmente obtidas da Mecânica do Dano, da Termodinâmica, dos critérios de falha micro-mecânicos ou das características específicas do dano, tais como a área delaminada, espaçamento médio das trincas na matriz, etc.

Highsmith e Reifsnider (1982) estabeleceram o modelo conhecido como *Shear-Lag*, que é um dos primeiros métodos para o cálculo da redução da rigidez devido às trincas na matriz. Através de uma cuidadosa observação de réplicas de padrões de trincas em amostras de vários materiais compósitos, os pesquisadores observaram que deformações causadas por cisalhamento só ocorriam em finas regiões que envolvem a interface entre quaisquer duas camadas. Além disso, observaram que essas regiões eram ricas em resina e, conseqüentemente, possuíam menor rigidez em resposta às cargas de cisalhamento em comparação com a região central da lâmina. As trincas transversais se estendiam até essas regiões, mas não conseguiam se propagar através delas e, assim, receberam o nome de *Camadas de Cisalhamento*. Concluiu-se, portanto, que as camadas de cisalhamento são as responsáveis pela transferência da carga de tração das camadas intactas para as trincadas. Tendo por base essas observações, pode-se escrever um sistema de equações diferenciais de segunda ordem para os deslocamentos, de tal forma que o problema principal é a determinação da espessura da camada de cisalhamento.

Posteriormente ao trabalho supracitado, outras pesquisas foram desenvolvidas através de Modelos, que faziam o cálculo da degradação da rigidez devido às trincas na matriz, baseados em Cálculo Variacional, Método dos Elementos Finitos e outras técnicas. Dentre os trabalhos publicados, destacam-se: Nuismer e Tan (1988); Brillaud e El Mahi (1991); El Mahi et al. (1995); Joffe e Varna (1999); Pradhan et al. (1999); Smith e Ogin (1999), bem como Kashtalyan e Soutis (2000)

Reifsnider (1986) propôs uma filosofia de modelagem cujo objetivo foi a análise do problema de degradação da resistência residual quando vários modos de dano estão presentes e interagem entre si. Dessa forma, o pesquisador argumentou que a análise física de todos os modos de dano e de todas as suas interações no processo micro-mecânico da degradação de um laminado é computacionalmente inviável. Por outro lado, a homogeneização das propriedades constitutivas e o uso do efeito médio de todos os eventos de dano resultam na perda de informações críticas (importantes). Para contornar esta questão, o pesquisador propôs empregar o conceito de Volume Elementar Representativo (VER), o qual foi dividido em elementos críticos e subcríticos. Nos elementos subcríticos, modela-se a iniciação e a propagação do dano, enquanto, nos elementos críticos, os campos

de tensões são calculados e monitorados. Tais campos serão responsáveis pela falha do laminado ou compósito. Detalhes que não são relevantes para a determinação desses campos de tensões são agrupados em representações de meios contínuos do elemento crítico no VER.

Reifsnider (1986) propôs, então, que a redução da resistência fosse calculada pela seguinte formulação integral:

$$\frac{S_L^r}{S_{Lu}^i} = \left[\frac{(F_e / F_L)^i}{F_e(\tau) / F_L(\tau)} \right]_{rv} \cdot \left[1 - \int_0^{\tau_1} (1 - F_e(\tau)) k(t)^{k-1} d\tau \right] \quad (2.3-13)$$

O lado esquerdo da equação é a resistência residual normalizada pela resistência inicial “última” para o modo de falha em questão. O primeiro fator do lado direito é a razão entre a concentração de tensão inicial e a concentração de tensão inicial num VER, onde F é uma função de falha generalizada. O subscrito “e” indica que o valor de F é avaliado no elemento crítico. O subscrito “L” indica que o valor de F é tomado numa posição remota no laminado, ou seja, distante do local em que ocorrerá a falha. Todas as quantidades na integral são avaliadas no elemento crítico. A função de falha é função do tempo, visto que as tensões no elemento crítico aumentam à medida que o dano evolui nos elementos subcríticos.

Cabe ressaltar que posteriormente, a metodologia supracitada foi empregada, também, por outros pesquisadores, tais como: Diao et al. (1995); Subramaniam et al. (1995) e Halverson et al. (1997).

Talreja (1986,1990) apresentou um modelo de dano contínuo em que as variáveis de dano internas são representadas por vetores e tensores. A resposta mecânica do sistema é determinada através de relações entre o dano e a rigidez, as quais são derivadas de princípios termodinâmicos e do estudo das variáveis internas. O autor considera dois modos de dano: dano intralaminar (trincas na matriz) e interlaminar (delaminação). As propriedades globais de rigidez são afetadas pelos modos de dano individualmente, ou seja, assume-se que nenhum dos modos de dano interage entre si. Os efeitos de cada modo de dano são considerados separadamente em um dado instante e combinados posteriormente. Cada modo de dano é caracterizado por um tensor D_{ij} , definido como:

$$D_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n \left[\int_S a n_i n_j dS \right]_k \quad (2.3-14)$$

onde:

V : volume do VER

S : área da superfície da trinca

a : componente normal do vetor associado à superfície da trinca

n_i, n_j : vetores normais das superfícies

n : número de elementos de dano para um dado modo de dano (por exemplo, trincas transversais num laminado $0^\circ/90^\circ$)

Considera-se, ainda, as seguinte relações:

$$\begin{aligned}\phi &= \phi(\varepsilon_{ij}, D_{ij}^{(\alpha)}) \\ \sigma_{ij} &= \rho \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ \dot{D}_{ij}^{(\beta)} &= \dot{D}_{ij}^{(\beta)} \left[\varepsilon_{kl}, D_{mn}^{(\alpha)} \right]\end{aligned}\tag{2.3-15}$$

onde:

ϕ : energia específica de Helmholtz

σ_{ij} : tensor de tensões

ε_{ij} : tensor de deformações linearizado

ρ : densidade do material

α, β : parâmetros dependentes do modo de dano

Posteriormente, Talreja (1992) calculou a variação do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson para laminados de fibra de vidro com resina epóxi e fibra de carbono com resina epóxi.

Bonora et al. (1993) desenvolveram um modelo empírico para o cálculo da degradação das propriedades mecânicas de um laminado compósito devido à presença de trincas transversais na matriz. As equações constitutivas foram baseadas no modelo de dano de Talreja (1986,1990). A variável de dano D é obtida como o produto de três parâmetros, que estão relacionados com a densidade, o comprimento e a largura das trincas.

Allen et al. (1987a,1987b,1990) adotaram abordagens fenomenológicas e micro-mecânicas para obter as relações constitutivas para uma lâmina em nível meso-mecânico. Tais relações são dadas por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + I_{ijkl}^\eta \alpha_{kl}^\eta\tag{2.3-16}$$

onde:

α_{kl}^η : variável interna de estado para o modo de dano η na lâmina, similar à definição usada por Talreja (1986, 1990)

I_{ijkl}^η : tensor de dano

Cada modo de dano é representado por um tensor de 2ª ordem, que é o produto tensorial entre o vetor de deslocamento da face da trinca u_i e o vetor normal da face, n_j :

$$\alpha_{ij}^\eta = \frac{1}{V_L} \int_{S_c^\eta} u_i^c \otimes n_j^c dS \quad (2.3-17)$$

onde:

α_{ij}^η : variável interna de estado (tensor de 2ª ordem)

S_c^η : área da superfície da trinca

V_L : VER local (obs: todas as tensões, deformações e variáveis internas de estado são valores médios e calculados com base no Volume Elementar Representativo).

No caso das trincas na matriz, a lei de evolução do dano (devido a um carregamento cíclico) em cada lâmina é dada por:

$$d\alpha_{ij}^M = \frac{d\alpha_{ij}^M}{dS} k_1 G^n dN \quad (2.3-18)$$

onde:

k_1, n : propriedades do material

S : área das trincas na matriz

G : taxa de energia liberada dependente do dano na lâmina.

Os autores sugeriram uma equação similar para a evolução do dano para delaminação em laminados $0^\circ/90^\circ$ (*cross-ply*).

Lee, Allen e Harris (1989) aplicaram a teoria supracitada para a mudança da rigidez em laminados de fibra de vidro com resina epóxi, bem como para laminados de fibra de carbono com resina epóxi contendo trincas na matriz.

Coats e Harris (1995) usaram a mesma técnica descrita (emprego das variáveis internas de estado) para estudar a fadiga de laminados de fibra de carbono sob carga cíclica de tração-tração.

Ogin, Smith, e Beaumont (1985) mostraram que a redução da rigidez de laminados reforçados por fibra de vidro empilhados a $[0/90]_s$ pode ser expressa pela seguinte expressão:

$$E = E_0(1 - C D) \quad (2.3-19)$$

onde:

$D = 1/2s$: densidade média de trincas, sendo $2s$ o espaçamento médio das trincas

C : constante do modelo

Os pesquisadores postularam, então, que a taxa de propagação das trincas seria uma função exponencial da energia elástica armazenada entre duas trincas contidas em camadas transversais. Combinando este postulado com a equação (2.3-19), a degradação da rigidez devido às trincas nas camadas transversais pode ser expressa como:

$$-\frac{1}{E_0} \frac{dE}{dN} = A \left[\frac{\sigma_{\max}^2}{E_0^2 (1 - E/E_0)} \right]^n \quad (2.3-20)$$

onde:

$\sigma_{\max}$: nível de tensão cíclica

A, n : constantes do modelo.

Beaumont (1987,1990) usou a equação (2.3-20) e obteve curvas S-N por um critério de falha por deformação crítica, o qual produz um valor crítico D_f para a variável de dano D . Portanto, quando o modo de dano predominante é delaminação, o pesquisador definiu D como:

$$D = \frac{A}{A_0} = 2,857 \left(1 - \frac{E}{E_0} \right) \quad (2.3-21)$$

onde:

A : área real delaminada

A_0 : área total da interface entre as camadas

Dessa forma, a taxa de crescimento do dano aplicada a um laminado de fibras de carbono quase isotrópico passou a ser dada por:

$$\left(\frac{dD}{dN}\right)_{R=0.1} = 9,2 \cdot 10^5 \left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma_{TS}}\right)^{6.4} \quad (2.3-22)$$

onde:

R : razão de tensões

$\Delta\sigma$: variação total da tensão cíclica

σ_{TS} : resistência estática sob tração

No caso de ocorrência de trincas na matriz, um critério de falha por deformação máxima foi usado para a obtenção de D_f .

Carswell (1988) introduziu um modelo de dano para laminados unidirecionais, no qual a variável de dano D era função do comprimento das trincas na matriz do laminado. O modelo foi escrito como:

$$\frac{dD}{dN} = p \cdot \sigma_c \cdot \frac{D^2}{N} \quad (2.3-23)$$

onde:

p : constante

σ_c : amplitude da tensão cíclica

D : variável de dano relacionada com a rigidez pela relação (2.3-19) de Ogin et al. (1985)

Beaumont e Spearing (1990), bem como Spearing et al. (1992a,1992b) realizaram um estudo extenso do comportamento em fadiga de laminados *cross-ply* de fibra de carbono com resina epóxi com presença de entalhes, sob tração cíclica. Os modos de dano dominante observados foram: *splitting* (trincas na matriz paralelas às fibras) nas camadas 0° ; regiões de delaminação nas interfaces $90^\circ/0^\circ$, cujas dimensões se relacionavam com o comprimento dos *splits*; trincas transversais nas camadas a 90° . O padrão de dano idealizado pode ser

caracterizado pelo comprimento do *split* “ l ” (trinca paralela às fibras), e do ângulo de laminação α .

Com base na equação de propagação de trincas por fadiga para materiais isotrópicos, a taxa de crescimento do *split* foi definida como:

$$\frac{dl}{dN} = \lambda_3 \left[\frac{\Delta G}{G_c} \right]^{m/2} \quad (2.3-24)$$

onde:

λ_3 , m : constantes

ΔG : variação da taxa de energia liberada (ou absorvida) na propagação

G_c : resistência ao crescimento da trinca (tenacidade à fratura)

Para um incremento “ δl ” do *split*, a energia absorvida para a formação das novas superfícies da trinca é δE_{ab} :

$$\delta E_{ab} = G_s \cdot t \cdot \delta l + G_d (l \operatorname{tg} \alpha) \delta l \quad (2.3-25)$$

onde:

G_s : energia absorvida por unidade de área do *split*

G_d : energia absorvida por unidade de área de delaminação.

t : espessura das camadas a 0°

α : ângulo de delaminação na ponta do *split*

Parte da energia global é dissipada quando o *split* aumenta, causando um aumento correspondente na flexibilidade δC da amostra:

$$\delta E_r = \frac{1}{2} P^2 \cdot \delta C \quad (2.3-26)$$

onde P é a carga aplicada.

No caso limite, $E_r = E_{ab}$, de tal forma que:

$$\frac{P^2}{2t} \frac{\partial C}{\partial l} = G_s + G_d \frac{l \cdot \tan \alpha}{t} \quad (2.3-27)$$

o que equivale a igualdade $G = G_c$, onde G é a taxa de energia de deformação liberada e G_c é a tenacidade à fratura efetiva do laminado. Verifica-se, assim, que para o cálculo da expressão (2.3-27), a derivada parcial $\partial C / \partial l$ deve ser conhecida. Esse termo é calculado via MEF (Método dos Elementos Finitos) devido à dificuldade de determiná-lo analiticamente. Uma vez estabelecidas as relações anteriores, a taxa de propagação do *split*, dl / dN , pode ser determinada. Empregando um critério de falha de tração uniaxial aplicada às camadas a 0° , a resistência residual após um determinado número de ciclos de fadiga foi quantificada no trabalho apresentado por Spearing e Beaumont (1992b). A degradação da rigidez é modelada com base em relações experimentais dada entre o espaçamento das trincas nas camadas transversais e os módulos de elasticidade longitudinais e de cisalhamento, como demonstrou Spearing et al. (1992b).

Caron e Ehlacher (1997) propuseram um modelo para micro-trincas na matriz devido à fadiga em laminados *cross-ply*. Eles assumiram que cada camada a 90° poderia ser considerada como um conjunto de seções preferenciais para formação de trincas. A resistência das seções seguiria uma distribuição estatística. Em adição, consideraram que as trincas propagariam segundo a equação de Paris e, que a resistência residual poderia ser descrita por:

$$\frac{dR_e}{dN} = -C \cdot R_e^{3-\eta} \cdot \Delta S^\eta \quad (2.3-28)$$

onde:

R_e : resistência residual

C, η : constantes da equação de Paris

ΔS : variação total de tensão remota.

Dessa forma, a vida residual pode ser estimada pela equação (2.3-28). Em seguida, inicia-se um processo iterativo, no qual as tensões em que cada seção é calculada e comparada com R_e em cada ciclo. Se uma seção falha (ruptura completa da seção), as tensões são redistribuídas e a vida residual de cada seção é avaliada. Visando validar os resultados do modelo, os autores verificaram a densidade de trincas através de ensaios de fadiga em tração-tração para laminados $[0_2/90_2]_S$ de fibra de carbono com resina epóxi.

Porém, não foram conduzidos experimentos para validar a equação de degradação da resistência (2.3-28).

Ladevèze (1990, 1992) desenvolveu um modelo baseado na Mecânica do Dano, que foi inicialmente aplicado para cargas estáticas e, posteriormente, estendido para cargas cíclicas. O pesquisador baseou-se na hipótese de que laminados compósitos podem ser descritos em nível meso-mecânico, considerando-os como um empilhamento de camadas homogêneas (com espessura) conectadas por superfícies mecânicas, que representam as interfaces. Consequentemente, a energia de deformação para o material contínuo danificado, em estado plano de tensões, foi escrita da seguinte forma:

$$E_D = \frac{1}{2} \left[\frac{\langle \sigma_{11} \rangle_+^2}{E_1^0} + \frac{\varphi(\langle -\sigma_{11} \rangle_+)}{E_1^0} - \left(\frac{v_{12}^0}{E_1^0} + \frac{v_{21}^0}{E_2^0} \right) \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2^0} + \frac{\langle -\sigma_{22} \rangle_+}{(1-d') E_2^0} + \frac{\sigma_{12}^2}{(1-d) G_{12}^0} \right] \quad (2.3-29)$$

onde

1,2,3: representam as direções alinhada, transversal e normal às fibras respectivamente.

d, d': variáveis internas de estado (escalares), constantes na espessura.

$\langle \rangle_+$: denota a parte positiva da grandeza

φ : função do material, a qual deve satisfazer a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 E_D}{\partial^2 \sigma_{11}} = \frac{1}{E_1^c} \quad (2.3-30)$$

onde E_1^c é o módulo de compressão na direção da fibra (direção 1). Além disso, tem-se que as Forças Termodinâmicas (Y) associadas com a dissipação de energia são expressas em termos da Energia Livre, ψ :

$$\begin{aligned} Y_d &= -\rho \frac{\partial \langle \langle \psi \rangle \rangle}{\partial d} \Big|_{\bar{\sigma}=cte} = \frac{1}{2} \frac{\langle \langle \sigma_{12}^2 \rangle \rangle}{G_{12}^0 (1-d)^2} \\ Y_{d'} &= -\rho \frac{\partial \langle \langle \psi \rangle \rangle}{\partial d'} \Big|_{\bar{\sigma}=cte} = \frac{1}{2} \frac{\langle \langle \sigma_{22} \rangle_+^2 \rangle}{E_{22}^0 (1-d')^2} \end{aligned} \quad (2.2-31)$$

onde:

ρ : densidade do material

$\langle\langle \rangle\rangle$: denota o valor médio na espessura

$\tilde{\sigma}$: denota a tensão efetiva selecionada.

A tensão efetiva define o acoplamento entre o estado de tensão clássico e o estado de tensões na presença do dano, quando se tem deformações inelásticas. Para laminados, essas tensões podem ser escritas como:

$$\tilde{\sigma}_{12} = \frac{\sigma_{12}}{(1-d')} \quad \tilde{\sigma}_{22} = \frac{\sigma_{22}}{(1-d)} \quad \tilde{\sigma}_{11} = \sigma_{11} \quad (2.3-32)$$

Por fim, as equações para a evolução do dano são estabelecidas em termos de Y_d e $Y_{d'}$.

Uma filosofia similar foi aplicada para modelar a deterioração da interface (superfície mecânica), que é o meio da transferência de carga e deformação entre as camadas. Nesse caso, a degradação é descrita por três variáveis de dano. Maiores informações sobre esse modelo podem ser encontradas em Allix e Ladevèze (1992), Allix et al. (1998) e Allix e Corigliano (1999). Deve-se destacar, que estes modelos baseados na Mecânica do Dano foram aplicados para a análise do comportamento estático de compósitos tridimensionais (3D carbono/carbono) e laminados de fibra de carbono com resina epóxi. Os autores concluíram que análises e comparações adicionais são necessárias para validar os referidos modelos.

Sedrakian et al. (1997, 2000) desenvolveram um modelo de dano por fadiga baseado no modelo de Ladevèze. Três variáveis de dano são associadas à fratura de fibras, trincas transversais na matriz e falha da interface fibra/matriz. Determinou-se, assim, a energia de deformação e as Forças Termodinâmicas Y_{11} , Y_{22} e Y_{12} , sendo que a energia livre passou a ser definida como:

$$\varphi = \frac{\alpha_{11}}{1+\beta_{11}} Y_{11}^{\beta_{11}} + \frac{\alpha_{22}}{1+\beta_{22}} Y_{22}^{\beta_{22}} + \frac{\alpha_{12}}{1+\beta_{12}} Y_{12}^{\beta_{12}} \quad (2.3-33)$$

Os parâmetros α_i e β_i são funções da razão de tensão R , da frequência f e do nível de tensão. As equações para a evolução do dano são expressas, então, por:

$$\frac{d(d_{ij})}{dN} = \frac{\partial \varphi}{\partial Y_{ij}} \quad (2.3-34)$$

A teoria foi aplicada em ensaios de flexão sob 3 pontos, que foram modelados via MEF. Dois estudos de casos foram investigados: vigas curtas (relação comprimento/espessura pequena) e vigas longas (relação comprimento/espessura elevada). Sendo que nas primeiras, predominam as deformações de cisalhamento transversal e nas últimas, a resposta em flexão.

Thionnet e Renard (1994, 1997, 1999) desenvolvem uma teoria similar a de Ladevèze, com o fim de prever o comportamento das trincas transversais em fadiga. As trincas foram modeladas para o nível meso-mecânico e descritas por uma variável escalar, $\alpha_t = e/L$, onde e é a espessura da camada trincada e L é o espaçamento das trincas. Novamente, o Potencial Termodinâmico ψ é formulado, assim como as Forças Termodinâmicas. Adota-se um critério de iniciação da trinca na matriz que é função dessas forças. Dessa forma, a densidade de trincas foi calculada para laminados de fibra de carbono com resina epóxi submetidos a carregamentos de fadiga sob dois níveis de tensão.

Liu e Lessard (1994) usaram uma variável global de dano D , a qual é igual a $C_m \cdot D_m$ ou $C_d \cdot D_d$, dependendo do modo de dano dominante: trincas na matriz ou delaminação. D_m é função da densidade de trincas e D_d é função da área delaminada, enquanto C_m e C_d são constantes dependentes das propriedades do material e da sequência de laminação.

A taxa de propagação da variável de dano global D é dada por:

$$\frac{dD}{dN} = \frac{A(\sigma_{\max})^C}{B \cdot D^{B-1}} \quad (2.3-35)$$

onde:

$$D = 1 - E/E_0$$

A, B e C: constantes não conhecidas

$\sigma_{\max}$: Tensão máxima de fadiga.

Segundo os pesquisadores, quatro critérios para o cálculo da vida em fadiga sob tração-tração podem ser usados para um projeto “fail-safe” (falha segura): 1) Trinca na matriz; 2) Tamanho máximo de delaminação; 3) Rigidez mínima; 4) Resistência residual.

Nos casos dos critérios da trinca na matriz e do tamanho (extensão) da delaminação, valores máximos para a densidade de trincas ou para as dimensões da delaminação devem ser especificados. Nos casos dos critérios da rigidez mínima e da resistência residual, assume-se ainda que, laminados em geral, contendo camadas a 0°, exibem curvas S-N que podem ser descritas por relações do seguinte tipo:

$$K \cdot N_f \cdot \sigma_{\max}^b = 1 \quad (2.3-36)$$

onde:

K, b : Constantes

N_f : Vida em fadiga para $\sigma_{\max}$ (tração-tração)

Shokrieh (1996) e Shokrieh e Lessard (1997a, 1997b, 1998, 2000a, 2000b) propuseram uma abordagem a qual denominaram de “Modelo Generalizado da Degradação das Propriedades do Material” para laminados unidirecionais. Em termos gerais, o modelo proposto pelos pesquisadores deve seguir três passos, que consistem em:

1. Definição de critérios polinomiais de falha por fadiga (para cada modo de dano);
2. Estabelecimento de curvas mestras para a resistência e rigidez residual;
3. Emprego dos diagramas de vida constante normalizados (Harris, 1985) para considerar o efeito da tensão média.

Dessa forma, a seguir, detalha-se os passos básicos para o emprego do modelo proposto supracitado.

PASSO 1: Determinação dos critérios de falha por fadiga para sete modos de dano:

- Tração das fibras
- Compressão das fibras
- Cisalhamento da interface fibra-matriz
- Tração da matriz
- Compressão da matriz
- “Tração normal” (tração na direção z)
- “Compressão normal” (compressão na direção z)

Por exemplo, para a falha da fibra por tração cíclica de uma lâmina unidirecional sob um estado multiaxial de tensões, o critério usado é dado por:

$$\left(\frac{\sigma_{xx}}{X_t(n, \sigma, \kappa)} \right)^2 + \left(\frac{\frac{\sigma_{xy}^2}{2E_{xy}(n, \sigma, \kappa)} + \frac{3}{4}\delta\sigma_{xy}^4}{\frac{S_{xy}^2(n, \sigma, \kappa)}{2E_{xy}(n, \sigma, \kappa)} + \frac{3}{4}\delta S_{xy}^4(n, \sigma, \kappa)} \right) + \left(\frac{\frac{\sigma_{xz}^2}{2E_{xz}(n, \sigma, \kappa)} + \frac{3}{4}\delta\sigma_{xz}^4}{\frac{S_{xz}^2(n, \sigma, \kappa)}{2E_{xz}(n, \sigma, \kappa)} + \frac{3}{4}\delta S_{xz}^4(n, \sigma, \kappa)} \right) = g_{F^+}^2 \quad (2.3-37)$$

onde:

n : Número de ciclos

κ : Razão de tensões (R)

δ : Parâmetro de não linearidade do material

$X_t(n, \sigma, \kappa)$: resistência residual de fadiga por tração longitudinal, sob carga cíclica longitudinal

$S_{xy}(n, \sigma, \kappa)$: resistência residual de fadiga por cisalhamento no plano, sob cisalhamento cíclico puro no plano

$E_{xy}(n, \sigma, \kappa)$: rigidez residual ao cisalhamento, sob cisalhamento cíclico puro no plano.

$S_{xz}(n, \sigma, \kappa)$: resistência residual de fadiga por cisalhamento transversal, sob cisalhamento transversal cíclico puro

$E_{xz}(n, \sigma, \kappa)$: rigidez residual ao cisalhamento transversal, sob cisalhamento transversal cíclico puro.

No critério de falha representado pela equação (2.3-37), tem-se que a falha por fadiga ocorrerá quando $g_F^+ > 1$.

Ao final do PASSO 1, para cada modo de dano verificado, as propriedades relacionadas a esse modo são reduzidas drasticamente, ou seja, são igualadas a zero. Tal regra é conhecida como “regra da degradação abrupta das propriedades”.

PASSO 2 : Usando técnicas de normalização e algumas operações algébricas, os autores sintetizaram diferentes modelos de resistência residual de vários pesquisadores, obtendo uma única curva mestra, a qual pode ser expressa por:

$$R(n, \sigma, \kappa) = \left[1 - \left(\frac{\log(n) - \log(0.25)}{\log(N_f) - \log(0.25)} \right)^\beta \right]^{1/\alpha} (R_s - \sigma) + \sigma \quad (2.3-38)$$

onde:

R : resistência após n ciclos

N_f : número de ciclos para a falha

R_s : resistência estática

κ : razão de tensões

σ : tensão aplicada

α, β : parâmetros independentes da tensão

Vale ressaltar que uma curva mestra similar foi também obtida para a rigidez residual.

PASSO 3: Por fim, a vida em fadiga de uma camada unidirecional submetida a um estado de tensões (e tensões médias) qualquer é calculada, usando o modelo de vida constantes normalizado por Harris (1985):

$$a = f \cdot \left[(1 - q)(c + q) \right]^{A + B \log(N_f)} \quad (2.3-39)$$

onde:

A, B e f : parâmetros de ajuste das curvas

N_f : número de ciclos para a falha

$a = \sigma_{alt} / \sigma_t$: tensão cíclica normalizada

$q = \sigma_m / \sigma_t$: tensão média normalizada

$c = \sigma_c / \sigma_t$: resistência a compressão normalizada

σ_t : resistência estática normalizada

Combinando os modelos (2.3-38) e (2.3-39) com o critério de falha (2.3-37), pode-se calcular o número de ciclos para a falha associado a cada estado de tensões, bem como as rigidezes e as resistências residuais da lâmina unidirecional. O modelo foi aplicado para uma análise da progressão do dano por fadiga em junções parafusadas de laminados unidirecionais de fibra de carbono com resina epóxi.

Diao, Lessard e Shokrieh (1999) modificaram o modelo determinístico anterior para um modelo estatístico de fadiga multiaxial de camadas unidirecionais.

Case (1996), bem como Reifsnider e Case (2002) apresentaram importantes refinamentos do modelo proposto anteriormente por Reifsnider (1986, 1987). Sendo assim, uma nova versão da equação integral da resistência residual foi, então, escrita como:

$$Fr(t_1) = 1 - \int_0^{t_1} \left[1 - Fa \left(\frac{\sigma_{ij}(t)}{X_{ij}(t)} \right) \right] j \left(\frac{ft}{N(t)} \right)^{j-1} d \left(\frac{ft}{N(t)} \right) \quad (2.3-40)$$

onde:

$N = f \cdot t$: número de ciclos

f : frequência

t : tempo característico

Fr : resistência residual global normalizada

Fa : função de falha no elemento crítico

$N(t)$: vida instantânea do elemento crítico

$\sigma_{ij}(t)$: estado de tensões instantâneo no elemento crítico.

$X_{ij}(t)$: resistência quase estática instantânea no elemento crítico.

j : parâmetro do material

A equação (2.3-40) (e outras formas em que ela se apresenta) é um modelo matemático para a evolução da resistência residual e possui a capacidade de se adequar a qualquer problema no qual se disponha de modelos de dano progressivo como os discutidos anteriormente. Como exposto, estes modelos específicos relacionam o crescimento de um modo de dano com a rigidez ou com a resistência residual. A mudança na rigidez pode ser empregada na atualização de $\sigma_{ij}(t)$ de (2.3-40), enquanto a degradação da resistência é considerada diretamente por $X_{ij}(t)$. Além disso, a metodologia permite computar a resistência e a vida residual do material compósito submetido a uma combinação de efeitos mecânicos, térmicos, químicos e/ou elétricos. O modelo pode ser utilizado tanto para solicitações de amplitude constante quanto para carregamento em blocos. Por fim, de acordo com Reifsnider e Case (2002), este modelo foi usado com sucesso em várias aplicações industriais.

Wróbel et al. (2009) demonstraram a possibilidade prática de simular a degradação por fadiga e térmica através de modelos numéricos via MEF. Os autores utilizaram um programa em C++ em conjunto com o Patran/Nastran para simular a degradação da resistência e da rigidez de laminados compósitos poliméricos reforçados por fibras. Para tal, o crescimento de

dano foi simulado, retirando-se elementos do modelo bifásico de acordo com distribuições de probabilidades para representar a nucleação e crescimento das descontinuidades no material. Além de simularem a degradação do material, o modelo proposto determinou velocidades de propagação ultrassônicas, através da espessura do laminado degradado, simulando assim uma inspeção não destrutiva do material. Resultados bastante promissores foram apresentados.

Uma cuidadosa análise de laminados compósitos submetidos a carregamentos multiaxiais foi apresentada por Quaresimin, Susmel e Talreja (2009). Os autores analisaram vários dados experimentais, bem como avaliaram o desempenho dos principais critérios para vida em fadiga multiaxial existentes. Após o referido estudo, os pesquisadores concluíram que os modelos apreciados possuíam limitações consideráveis, além de demonstrarem baixa precisão. Como uma alternativa, os autores conduziram uma análise detalhada dos mecanismos reais de dano e, com base nessas observações, propuseram caminhos a serem seguidos para o desenvolvimento de uma metodologia precisa e confiável para a previsão da vida em fadiga de laminados compósitos sob cargas multiaxiais.

Post, Case e Lesko (2008) apresentaram uma avaliação e discussão do estado da arte de pesquisas experimentais, bem como de modelos de fadiga e resistência residual para compósitos poliméricos reforçados por fibras submetidos a cargas de amplitude variável. A precisão dos modelos foi avaliada para quatro materiais distintos, para os quais muitos resultados experimentais estavam disponíveis. Os modelos foram usados para calcular a vida em fadiga de laminados, que foram experimentalmente submetidos a espectros de fadiga. Os resultados mostraram que a regra de Palmgren-Miner não é conservadora para todos os casos analisados. Uma melhor precisão foi obtida empregando um modelo simples de resistência residual como proposta por Broutman e Sahu (1972). Os pesquisadores observaram que modelos de resistência residual mais complexos fornecem resultados melhores em determinados casos.

Huang, Nie e Chan (2011) desenvolveram uma solução exata para os campos de tensões locais em laminados $[0^{\circ}_m/90^{\circ}_n]$ com trincas na matriz. Tensões de cisalhamento interlaminares foram determinadas por expansões em séries senoidais para diferentes laminados e, utilizadas no cálculo da degradação da rigidez e do coeficiente de Poisson desses materiais. Adicionalmente, os campos de tensões interlaminares possibilitaram o cálculo preciso de estados característicos de dano e, efeitos de borda relacionados com a iniciação de falha por delaminação.

Reifsnider e Majumdar (2011) utilizaram uma nova técnica experimental chamada “espectroscopia de impedância elétrica” (FAZZINO; REIFSNIDER, 2008) para estudar a iniciação e a propagação de uma trinca dominante, que levará um determinado laminado à sua falha final sob carregamentos de fadiga ou quase-estáticos. O objetivo do estudo foi obter

interpretações e quantificações precisas da evolução do dano em materiais com grandes deformações antes da ruptura.

2.4 Uma Análise sobre os Tipos de Modelos

MODELOS DE CURVAS S-N

A principal desvantagem dos modelos de curvas S-N é a necessidade da grande quantidade de ensaios exigida na sua utilização, pois sempre que se modifica o material, a sequência de laminação e/ou as condições de carga, são necessários novos ensaios. Além disso, tais modelos são de difícil adaptação à análise de fadiga multiaxial. Por outro lado, a maioria destas aproximações é eficiente e não exige informações detalhadas sobre os mecanismos reais de acúmulo de dano.

MODELOS FENOMENOLÓGICOS

Os modelos fenomenológicos de resistência residual fornecem uma medida física bastante intuitiva do dano acumulado, porém possui a desvantagem de que os ensaios para a determinação da resistência são sempre destrutivos. A destruição dos corpos de prova torna consideravelmente difícil a inspeção e comparação do estado de dano entre dois ou mais corpos de prova avaliados.

Quando componentes estruturais em escala real são submetidos às cargas de serviço, os modelos fenomenológicos de rigidez residual podem ser mais adequados, visto que a rigidez pode ser medida em ensaios não destrutivos e a sua dispersão estatística é bem menor do que a da resistência residual (HASHIN, 1985).

Outra vantagem dos modelos de resistência residual é o fato de possuírem um critério de falha fisicamente consistente, pois o material irá falhar quando a resistência residual atingir um valor crítico especificado (HARRIS, 1985).

MODELOS DE DANO PROGRESSIVO

Conforme Talreja (2000), uma metodologia confiável e economicamente viável para a análise de fadiga em compósitos requer um modelo físico para prever a evolução do dano. Ainda, segundo Degrieck e Paepegem (2001), os modelos de dano progressivo seriam os mais promissores, uma vez que estes são capazes de quantificar a progressão do dano na estrutura de compósito. Ademais, na literatura, há uma série de contribuições visando

determinar de forma experimental, computacional e/ou híbrida a vida em fadiga de estruturas fabricadas a partir de material compósito. Sendo que os referidos trabalhos possuem potencialidades e limitações.

Diante do que foi exposto, dentre as inúmeras contribuições científicas, optou-se no presente trabalho em basear-se na abordagem sugerida por Reifsnider (1986), Case (1996) e Reifsnider e Case (2002). Tal escolha, deve-se ao fato que a referida abordagem utiliza um modelo matemático de dano cumulativo bastante versátil para a representação da resistência residual global de laminados. Essa representação pode ser explicitada em termos de informações micro-mecânicas (fibra, matriz e interface) ou meso-mecânicas (lâmina homogeneizada). A formulação geral do modelo pode ser particularizada para qualquer tipo de problema envolvendo campos de tensão uniforme ou não-uniforme, desde que se conheça o modo de falha, a função de falha, o processo de acúmulo de dano e o efeito deste sobre a distribuição das tensões envolvidas. A metodologia pode ser aplicada para o cálculo de fadiga de laminados sob tensões uniformes ou contendo regiões com concentração de tensão como, por exemplo, descontinuidades, juntas coladas ou unidas mecanicamente, desde que se disponha das informações necessárias. Em sendo assim, o Capítulo 3 irá mostrar de forma mais detalhada toda a abordagem proposta por Reifsnider (1986), Case (1996) e Reifsnider e Case (2002).

CAPÍTULO 3

3 O Método da Evolução da Resistência Residual Global

3.1 A Resistência Residual como Parâmetro de Dano

Os critérios de falha podem ser expressos com o auxílio de certas funções e, então, utilizados para descrever o acúmulo de dano ao longo da vida de materiais compósitos submetidos a carregamentos cíclicos sob diferentes condições ambientais. Estas funções podem ser escritas da seguinte forma:

$$Fa = Fa\left(\frac{\sigma_{ij}}{X_{ij}}\right) \quad (3.1-1)$$

onde σ_{ij} representa o estado de tensão e X_{ij} o valor da resistência na direção e sentido de σ_{ij} . Sendo que no contexto atual, essa função é interpretada da seguinte forma:

1. Para um dado *modo de falha*, σ_{ij} e X_{ij} são os estados de tensão atuantes numa região do material e os valores da resistência do material, respectivamente. Deve-se destacar que σ_{ij} e X_{ij} são parâmetros locais.
2. Uma função como (3.1-1) é definida para *um dado modo de falha específico*. Cada modo de falha terá uma função de falha diferente, possivelmente uma forma diferente e certamente um valor diferente para os mesmos casos de carga e condições aplicadas.
3. σ_{ij} e X_{ij} são adotados como funções do histórico das condições aplicadas (cargas e condições ambientais) e do tempo.

Figura 3.1-1 Interpretação da função de falha na análise de tolerância ao dano em compósitos

Os estados de tensão atuantes e os valores da resistência do material, σ_{ij} e X_{ij} , podem ser definidos em diferentes níveis de “condições locais”, como por exemplo, macro, micro ou meso-mecânicos. A princípio, busca-se abordar o problema na menor escala dimensional suficiente, visando capturar o mecanismo real de falha. Sendo que, na falta de dados, recorre-se às escalas maiores.

Funções do tipo (3.1-1) aplicadas em modelos meso-mecânicos (modelo da lâmina) fornecem resultados mais precisos e reais do que a abordagem da placa anisotrópica equivalente (modelo macro-mecânico), pois tal modelo macroscópico não considera a redistribuição interna de tensões devido ao acúmulo de dano. Aplicando-se (3.1-1) em modelos micro-mecânicos, é possível otimizar o projeto em função da geometria e das propriedades dos constituintes (fibra, matriz e interface). Os modelos micro-mecânicos são também mais precisos e mais realísticos para a determinação da resistência de muitos materiais frágeis, que são geralmente empregados na indústria. Com relação a “ Fa ”, a sua forma deve ser apropriada ao modo de falha em questão. Ademais, Fa pode ser vista como a medida da evolução do *dano*, que será definido como *um dado processo capaz de causar mudança no valor da resistência do material*.

3.2 Respostas de Compósitos a Cargas Cíclicas

A figura 3.2-1 mostra a resposta de dois diferentes laminados reforçados por fibras sob um dado carregamento mecânico cíclico. Os laminados são de fibra de vidro e epóxi (BROUTMAN; SAHU, 1972) e de fibra de carbono e PEEK (REIFSNIDER; CASE, 2002).

Figura 3.2-1 Resist. Resid./Resist. Inic. em função da Fração da Vida (adaptado de Reifsnider e Case, 2002)

Com base na figura 3.2-1, verificam-se dois importantes aspectos no comportamento dos compósitos analisados:

- I – Inicialmente ocorre uma redução na resistência residual (acúmulo inicial de dano). Em seguida, observa-se uma redução relativamente menor ao longo de grande fase da vida, até que em certo ponto ocorre uma diminuição abrupta que leva à falha do laminado ("sudden death").
- II – As maiores reduções na resistência residual (ou os maiores acúmulos de dano) ocorreram para as menores tensões. Em outras palavras, sob tensões menos severas, os compósitos conseguem acumular mais dano e ter uma vida maior. Esta é exatamente a condição geralmente desejada nas aplicações de engenharia, ou seja, vida longa em serviço sob tensões relativamente reduzidas, mesmo que haja grande acúmulo de dano. Portanto, este é o comportamento a ser modelado.

A figura 3.2-2 mostra a resposta de laminados de fibra de carbono e resina epóxi cujos corpos de prova continham um furo central, ou seja, um estado de tensão não-uniforme devido à presença de um concentrador de tensão.

Figura 3.2-2 Resit. residual sob tração e compressão durante carregamento de fadiga em função da fração da vida: (a) laminado de fibra de carbono e resina epóxi (0/90/+45/-45)_s; (b) laminado fibra de carbono e resina epóxi (0/90/+45/-45/0)_s (adaptado de Reifsnider e Case, 2002)

Nos casos apresentados pela figura 3.2-2, a comparação entre as respostas sob elevadas e reduzidas tensões é mais complexa. Para tensões elevadas, nota-se um “aumento” da resistência residual no início da vida e uma posterior redução até o fim. O carregamento é completamente reverso e a amostra falha por compressão, visto que a resistência à tração não é decrementada além da resistência inicial.

A resistência à compressão comporta-se como no caso sem concentrador de tensão. O aumento inicial deve-se à relaxação na região de concentração de tensão local próxima ao furo. Com a aplicação dos ciclos adicionais, a resistência é reduzida devido ao acúmulo de dano e rompimento de outras ligações no material. Para reduzidas tensões, observa-se que a resistência à tração aumenta e não mais retorna ao valor inicial, ao passo que a tensão compressiva (que determina a falha) apresenta um incremento inicial e, depois diminui monotonicamente.

Esses detalhes são típicos para vários laminados e podem ser compreendidos estudando-se os micro-mecanismos de desenvolvimento (evolução) do dano localmente. A figura 3.2-3 mostra o comportamento típico dos três principais aspectos fenomenológicos a serem considerados na análise da resposta de compósitos a cargas cíclicas: a mudança da resistência residual, em função das condições aplicadas; a evolução da rigidez global, que pode ser um aspecto dominante no mecanismo de durabilidade; o desenvolvimento do dano em termos da evolução do estado de tensões (função de falha, F_a). Estes três aspectos serão as bases para o desenvolvimento do modelo de dano proposto neste trabalho.

Figura 3.2-3 Comportamento típico de laminados poliméricos com fibras contínuas sob cargas cíclicas (adaptado de Reifsnider e Case, 2002)

3.3 Modos de dano e Falha Progressiva

Ao contrário dos materiais homogêneos, os materiais compósitos muito raramente sofrem degradação da resistência devido à propagação de uma única trinca. Nesses materiais, ocorre a iniciação, o desenvolvimento (a evolução) e a interação de vários modos de dano que se acumulam até ocasionar a falha da estrutura. Esses modos de dano são distribuídos por todo o volume do material carregado, sendo mais comumente observados os seguintes modos:

- Micro-trincas na matriz (intralaminar);
- Delaminação (interlaminar);
- Descolamento fibra-matriz (intralaminar);
- Fratura de fibras (intralaminar).

Vários tipos e mecanismos de dano são analisados e apresentados nos trabalhos de Horton e Whitehead (1988), bem como em Reifsnider (1982, 1991). Outros processos de degradação que podem ser dominantes na vida de uma estrutura fabricada em material compósito são:

- Transportes de massa em nível atômico ou molecular;
- Atividade química (corrosão ou reação entre os constituintes) que pode levar à formação de novos componentes ou a dissociação dos existentes.

Além disso, eventos termodinâmicos podem ser ativados por energias introduzidas por deformação ou por altas temperaturas, produzindo efeitos fenomenológicos tais como:

- *creep* (fluência);
- ruptura por *creep*;
- fadiga termomecânica.

Os modos de dano combinam-se, acumulam-se e interagem entre si, causando mudanças nos valores de resistência local do material e nos campos de tensões. Tais mudanças produzem incrementos na função de falha local para um dado modo de falha (Fa), até que a mesma atinja um valor tal que definirá a falha global da estrutura.

Um modo de dano muito comum em compósitos é o de micro-trincas, frequentemente na matriz. As trincas na matriz são densamente distribuídas no volume do material. A densidade de trincas numa região pode ser precisamente determinada pelas propriedades mecânicas das lâminas, sua geometria e pela sequência de laminação (CASE; REIFSNIDER, 2002). Estes parâmetros influenciam os campos de tensão oriundos das trincas e estes interagem entre si.

Em geral, uma quantidade moderada de micro-trincas produz pouco ou nenhum efeito na resistência de uma lâmina ou laminado, porém outras propriedades podem ser afetadas, prejudicando seu desempenho. Dentre essas propriedades, a rigidez pode ser significativamente alterada pela formação de micro-trincas, como sugere a figura 3.3-1.

Figura 3.3-1 Micro-trincas na matriz (adaptado de Reifsnider e Case, 2002)

Na figura 3.3-1, a tensão na direção das fibras é relaxada e reduzida à zero nas regiões das trincas, nas lâminas a 90°. A tensão atuante passa então a ser suportada somente pelas lâminas a 0°. Devido a essa carga adicional na direção das fibras, o laminado se deformará mais. Macroscopicamente, este evento resultará em um menor módulo de elasticidade do laminado (rigidez do laminado). Porém, ao ser descarregado, o laminado assumirá a forma original devido à restauração imposta pelas fibras a 0°, que ainda estão intactas.

Figura 3.3-2 Trincas na matriz em um laminado cross-ply e a mudança na rigidez global durante um carregamento uniaxial quase-estático (adaptado de Reifsnider e Case, 2002)

A figura 3.3-2 ilustra o efeito das trincas na matriz num laminado contendo camadas a 0° e 90° sob carga uniaxial quase-estática. Com o aumento da carga, ocorre a formação de micro-trincas, principalmente em matrizes frágeis como as dos compósitos poliméricos e cerâmicos. Sob cargas cíclicas, matrizes dúcteis também desenvolvem estes micro danos, inclusive compósitos de matriz metálica.

Verifica-se que as trincas se formam gradativamente e, que existe uma tensão a partir da qual se dá o início das trincas, causando diminuição da rigidez global do laminado (mudança na curva $\sigma \times \epsilon$). A mudança na rigidez ocorre ao longo de uma faixa finita de tensão. Localmente, a nucleação e a propagação das trincas estão associadas às variações locais da resistência e da geometria da matriz nos compósitos. Deve-se ressaltar que a densidade de trincas atinge um nível de saturação em função do carregamento, a partir do qual a rigidez se estabiliza.

3.4 Elemento Crítico

A figura 3.4-1 mostra esquematicamente as curvas tensão-deformação num laminado com as lâminas orientadas a $0^\circ/90^\circ$ (*cross ply*), considerando um ensaio sob controle de deformação e sob controle de carga. Nesta análise, admi-se que as trincas se formem todas de uma vez e que as camadas se deformam igualmente. Além disso, considera-se que as

trincas ocorrem somente nas lâminas a 90° . Nessas condições, no momento da nucleação das trincas, ocorre uma queda abrupta na tensão para o ensaio sob controle de deformação, assim como um aumento brusco na deformação de engenharia do laminado para o ensaio sob controle de carga. Essas mudanças refletem a perda das rigidezes das camadas a 90° e a consequente redistribuição de tensão para as camadas a 0° . Após tais eventos, a rigidez do laminado prossegue menor (menor inclinação) e a tensão suportada pelas camadas a 0° aumenta mais rapidamente quando comparada com a tensão no laminado.

Figura 3.4-1 Curvas tensão-deformação para um laminado *cross-ply* – a) Ensaios sob controle de deformação; b) Ensaios sob controle de carga. (adaptado de Reifsnider e Case, 2002)

Da análise da figura 3.4-1, podem-se extrair três importantes observações:

- 1 - Durante o processo de falha que controla a resistência de um material compósito, pode-se identificar a existência de *Elementos Subcríticos* do material, localmente. A falha desses elementos não implica na falha do laminado, causando, no entanto, redistribuição de tensões localmente. Por outro lado, identificam-se também *Elementos Críticos* do sistema, cuja falha acarretará na falha do laminado globalmente (REIFSNIDER; STINCHCOMB, 1986). Assim, a falha do Elemento Crítico ocorre por último para uma dada sequência de eventos, que define o processo de falha.
- 2 - A redistribuição de tensões devido à falha dos elementos subcríticos afeta internamente os campos de tensões nos elementos críticos.
- 3 - Conceitos de funções de falha podem ser aplicados localmente onde os eventos físicos, que definem o processo de falha ocorrem, a fim de se

estimar a resistência (residual) do material ou da estrutura após tais eventos.

Para ilustrar essas observações, apresenta-se um exemplo simples a seguir, no qual um laminado é submetido a um carregamento quase-estático monotônico (Figura 3.4-2). Neste exemplo, busca-se estimar a resistência, X_T , de um laminado sob carga quase-estática considerando a formação de micro-trincas com o aumento da carga. Tal laminado possui empilhamento de $[0/50/-50]_s$ e a espessura da lâmina t igual a 0,125 mm. Além disso, a temperatura do processo de cura é de 190°C, ao passo que o resfriamento foi realizado sob temperatura ambiente igual a 25°C.

Propriedades das lâminas:

$E1 = E_t = 39 \text{ GP}$	$E2 = 4.8 \text{ GPa}$	$\nu_{12} = 0.3$	$G_{12} = 6.0 \text{ GPa}$	
$X_t = 1130 \text{ MPa}$	$X_c = 620 \text{ MPa}$	$Y_t = 90 \text{ MPa}$	$Y_c = 600 \text{ MPa}$	$S = 83 \text{ MPa}$
$\varepsilon_{1t} = 28000$	$\varepsilon_{1c} = 15897$	$\varepsilon_{2t} = 18750$	$\varepsilon_{2c} = 125000$	$\varepsilon_{12} = 3833$
$\alpha_{11} = -1.8\text{E-}6/^{\circ}\text{C}$	$\alpha_{22} = 27\text{E-}6/^{\circ}\text{C}$			

Figura 3.4-2 Laminado sob carregamento quase-estático monotônico

Para o cálculo da resistência sob tração na direção das fibras X_T , emprega-se três passos:

PASSO 1- Identificação dos elementos subcríticos.

Para tal identificação, faz-se o cálculo das tensões residuais térmicas geradas no processo de cura e resfriamento, através da seguinte equação:

$$[N^T] = \int \bar{Q} \alpha \Delta T dz \quad [\sigma]_k = [\bar{Q}]_k [\varepsilon - \alpha \Delta T]_k \quad (3.4-1)$$

onde:

k = número da camada

$[N^T]$ = vetor das forças normais

$\bar{Q}$ = rigidez da lâmina

α = coeficientes de dilatação térmica da lâmina

ΔT = diferença entre a temperatura de referência e a de operação

z = ordenada do plano médio da lâmina no laminado (normal ao plano da lâmina)

$[\sigma]_k$ = vetor das tensões na lâmina k

$[\bar{Q}]_k$ = matriz de rigidez da lâmina k

$[\varepsilon]_k$ = vetor de deformações da lâmina k

Tabela 3.4-1 – Tensões Residuais Térmicas

Tensão (MPa)	0°	50°	-50°
σ_1	-10	-22.8	-22.8
σ_2	17.8	18.9	18.9
σ_{12}	0	-0.34	0.34

Aplicando as propriedades da lâmina na equação 3.4-1, bem como, as amplitudes térmicas devido ao processo, obtêm-se as tensões para cada camada do laminado. Nota-se que as maiores tensões de tração ocorrem na direção perpendicular às fibras nas camadas a +/-50°. Apesar disso, a falha dessas camadas não causará a falha final do laminado, mas sim uma redistribuição interna de tensões. Portanto, as mesmas constituem o elemento subcrítico.

PASSO 2 – Determinação do carregamento para gerar falha nos elementos subcríticos.

Para tal, faz-se o cálculo da carga N_x necessária para a falha da matriz das camadas a +/- 50°, empregando, por exemplo, o Critério da Máxima Tensão. Assim, procedendo, obtêm-se N_x igual a 174000 N/m. (falha da 1ª camada). Sendo que nesta condição de carga, as tensões atuantes são mostradas na tabela 3.4-2.

Tabela 3.4-2 - Tensões induzidas pela carga axial $N_x = 174000 \text{ N/m}$

Tensão (MPa)	0°	50°	-50°
σ_1	403	89.9	89.9
σ_2	19.1	47.1	47.1
σ_{12}	0	-83	83

Observa-se que, para este laminado e esta configuração de carga, a matriz falha por cisalhamento ao invés de falhar por tração. Trincas serão produzidas na direção paralela às das fibras, diminuindo a capacidade dessas camadas de sustentarem tensões na direção perpendicular às fibras, em outras palavras, as rigidezes E_2 e G_{12} das camadas a $\pm 50^\circ$ sofrem uma degradação. Para fins de simplificação, neste exemplo, será considerado que, após N_x atingir o valor discutido acima, as rigidezes degradadas passam a ser: $E_2 = G_{12} = 1.0 \text{ GPa}$. Com essa mudança, ocorrerá uma redistribuição das tensões para as camadas a 0° e as propriedades globais (equivalentes) do laminado passam a ser (em GPa):

$$E_x = 13.1 \text{ (21.9)} \quad E_y = 7.07 \text{ (14.8)} \quad \nu_{xy} = 0.683 \text{ (0.27)} \quad G_{xy} = 6.75 \quad (3.4-2)$$

onde os valores entre parênteses correspondem aos valores das propriedades antes da falha da matriz das camadas a $\pm 50^\circ$.

O coeficiente de dilatação térmica na direção 2 das lâminas a $\pm 50^\circ$, α_2 , também deve sofrer redução devido à formação das trincas na matriz. Isso causará a relaxação das tensões residuais térmicas. Considerando, neste exemplo, que, após a falha, α_2 será nulo, as resultantes térmicas serão (em N/m):

$$N_x^T = 4.49 \text{ (-3.84)} \quad N_y^T = 0.748 \text{ (-8.14)} \quad N_{xy}^T = 0 \text{ (0)} \quad (3.4-3)$$

PASSO 3 - Falha do Elemento Crítico ou falha da última camada (camadas a 0°)

Neste nível de carregamento, as propriedades das lâminas a $\pm 50^\circ$ estão degradadas. Se a carga continua a ser incrementada até que a tensão nas camadas a 0° (direção das fibras), se iguale à resistência da lâmina, $X_T = 1130 \text{ MPa}$, a condição de falha é estabelecida e a carga atuante será a resistência última (de ruptura) desse laminado. Assim sendo, a falha

das lâminas a 0° definirá a falha do laminado, pois estas constituem o Elemento Crítico. Usando a Teoria Clássica de Laminados, encontra-se N_x igual a 282 N/mm. Calculando-se essa resistência sem considerar a redistribuição de tensões para as camadas a 0° devido às trincas nas camadas $\pm 50^\circ$, seria encontrado um valor muito maior (N_x igual a 488 N/mm).

O método de degradação das propriedades locais (empregado no exemplo anterior) à medida que ocorre acúmulo de dano no laminado sob carregamento quase-estático é bem conhecido e largamente utilizado devido à sua simplicidade. Todavia, o mesmo é limitado quanto a uma representação física mais adequada para abordar o processo de dano progressivo de um material compósito. Apesar disso, tal técnica é um ótimo ponto de partida para o desenvolvimento de uma abordagem mais geral baseada nas observações 1, 2 e 3 apresentadas anteriormente.

O raciocínio contido na análise do exemplo anterior pode ser ampliado, introduzindo outros modos de dano, além das micro-trincas na matriz. Somado a isto, pode-se considerar que tais modos de dano vão acumulando com o tempo durante o qual o laminado é submetido a cargas cíclicas, altas temperaturas e/ou ar com misturas químicas. Dessa forma, as três observações podem ser extrapoladas da seguinte maneira:

- 1 - Cuidadosas investigações experimentais, geralmente, permitem identificar o Elemento Crítico de um material compósito submetido a cargas cíclicas sob determinadas condições ambientais. A falha do Elemento Crítico define a falha global da estrutura (no exemplo dado, eram as camadas a 0°). Vale ressaltar que diferentes modos de falha podem definir diferentes Elementos Críticos (REIFSNIDER, 1991, 1992), (REIFSNIDER; STINCHCOMB, 1986).
- 2 - Além da matriz, outros Elementos Subcríticos podem falhar causando a redistribuição das tensões para os Elementos Críticos. Esses elementos podem ser abordados em nível meso-mecânico (lâmina) ou em nível micro-mecânico (constituintes: fibra, matriz e/ou interface).
- 3 - O processo de redistribuição de tensões pode ser determinado por análise mecânica. Consequentemente, a resistência residual do Elemento Crítico pode ser calculada por meio de funções de falha adequadas aplicadas ao Elemento Crítico, em nível local.

3.5 Variações da Função de Falha Local - Modos de Dano

No exemplo anterior da seção 3.4, analisou-se o aumento da tensão σ_{11} nas camadas a 0° em função das trincas na matriz das camadas $\pm 50^\circ$. Considerando-se as lâminas a 0° como sendo o Elemento Crítico, σ_{11} é a tensão σ_{ij} a ser aplicada na função de falha local:

$$Fa = Fa \left(\frac{\sigma_{ij}}{X_{ij}} \right) \quad (3.5-1)$$

Muitos outros modos de dano além das trincas na matriz podem sobrecarregar o estado de tensões no Elemento Crítico, como mostra a figura 3.5-1. Sendo que os mesmos serão detalhados a seguir.

Figura 3.5-1 Modos de dano em laminados reforçados por fibras

Trincas na Matriz - Modos A e C

Na figura 3.5-1, a letra A indica o modo de falha considerado no exemplo dado. Além dessas trincas, que ocorrem nas lâminas não alinhadas a 0° , trincas nas lâminas a 0° também são geradas. Isso se deve à restrição imposta pelas fibras das lâminas não-alinhadas e ao efeito de Poisson nas camadas alinhadas. Tais danos diminuem a rigidez ao cisalhamento da camada, bem como sua rigidez transversal.

Delaminação – Modo B

As mudanças na rigidez e a redistribuição de tensões causadas por delaminação podem ser consideravelmente grandes. A tabela 3.5-1 mostra as rigidezes de um laminado quase-isotrópico $[0/+45/-45/90]_s$ de fibras de carbono e matriz epóxi. A tabela mostra também as propriedades de diferentes sub-laminados que poderiam se formar devido a delaminações totais das camadas. As rigidezes foram calculadas pela Teoria Clássica de Laminados.

Tabela 3.5-1 Rigidezes dos sublaminados para o caso de delaminação

Propriedade do laminado (MPa)	[0] (lamina)	N[±45] _s	[0, ±45] _s	[0, ±45, 90] _s
E_x	143,30	14,47	58,56	54,43
E_y	10,00	14,47	24,80	54,43
G_{xy}	4,13	37,00	26,00	20,60
ν_{xy}	0,310	0,813	0,760	0,322

Caso o laminado $[0/+45/-45/90]_s$ ao sofrer delaminação, forme dois sub-laminados $[0/+/-45]$ e $[90]_s$ e, junto às suas extremidades seja aplicada uma carga uniaxial, tem-se que a rigidez do conjunto estimada será dada por:

$$E_x([0, \pm 45 // 90]_s) = 0.75(E_x([0, \pm 45])) + 0.25(E_x([90])) \quad (3.5-2)$$

Com base na equação 3.5-2, nota-se que 75% do conjunto é formado pelos dois laminados $[0, \pm 45]$ e 25% pelo laminado $[90]_s$. Esse cálculo simplificado fornece uma rigidez global equivalente na direção do carregamento (E_x) igual a 46,44 MPa. Dessa forma, ocorre uma redução de aproximadamente 15% em relação à rigidez do laminado intacto (54,43 MPa). Essas mudanças na rigidez são causadas pelo aumento das frações das cargas globais que são suportadas pelo Elemento Crítico. Caso o Elemento Crítico seja representado pelas fibras das camadas a 0° , a delaminação implicará no aumento do valor σ_{ij} em (3.5-1), o que causará uma diminuição na resistência estática global do laminado, assim como no caso de trincas na matriz.

Degradação Química – Modo D

Se, por exemplo, ocorrer uma degradação química causada pela exposição de fibras a um dado meio, tem-se que isto pode resultar na diminuição dos seus diâmetros. Dessa forma, as rigidezes das fibras e do compósito como um todo podem ser afetadas, bem como os campos de tensões locais e a resistência global.

Descolamento Fibra/Matriz – Modo E

O descolamento entre a fibra e a matriz ou o comportamento inelástico entre elas (um comportamento típico nas vizinhanças de uma trinca na fibra), também, causa mudanças na rigidez e redistribuição de tensões.

Enfim, muitos eventos de danos locais podem causar redistribuição de tensões que levará ao aumento da tensão na função de falha do Elemento Crítico. Deve-se destacar principalmente, que a *tensão local no Elemento Crítico e, portanto, na Função de Falha relacionada à resistência global do sistema, sofrerá alteração à medida que os danos evoluírem com o tempo e/ou com os ciclos de carregamento.*

Além das tensões, os valores das resistências principais também causam mudanças na função de falha do Elemento Crítico. Os valores de resistências X_{ij} serão aplicados em nível local. Altas temperaturas e/ou ambientes quimicamente agressivos podem produzir reduções graduais nos valores das resistências X_{ij} .

Em resumo, tanto um aumento da tensão local como uma diminuição da resistência intrínseca do material pode acarretar em aumento (ou eventual diminuição) na função de falha do Elemento Crítico e, essas variações são funções dos carregamentos aplicados e das condições ambientais.

3.6 Resistência Residual Sob Cargas Cíclicas

A fim de se desenvolver o conceito de resistência residual de materiais compósitos, deve-se considerar, a princípio, o modo de falha por fratura, ou seja, a separação do elemento em duas ou mais partes. Como já mencionado, os laminados compósitos reforçados por fibras falham devido ao acúmulo de diferentes modos de dano num processo progressivo, que reduz a sua rigidez e a sua resistência mecânica, definindo assim a vida e a resistência residual do material ou do elemento estrutural quando submetido a cargas cíclicas. A metodologia a ser apresentada no presente trabalho tem, portanto, por objetivo, o cálculo e a previsão da resistência residual, bem como da vida desses materiais compósitos quando há um acúmulo (estatístico) de modos de dano e/ou quando há interação entre esses modos.

A figura 3.6-1 mostra a tendência geral observada para a função de falha local numa situação como a descrita anteriormente. Nota-se que, inicialmente, ocorre a iniciação dos danos, os quais, para compósitos cujo comportamento é governado pelas fibras, constituem-se geralmente de trincas na matriz e fraturas de fibras. Em seguida e, durante o maior período da vida, ocorre o acúmulo e crescimento dos danos. Por fim, predomina a interação dos mesmos, induzindo altas concentrações de tensões locais, que levam à falha global do material. Este processo é distribuído através de todo o volume de material compósito. Considera-se que, na média, todos os elementos materiais iguais, que têm os mesmos carregamentos e históricos ambientais, desenvolvem o mesmo estado de dano.

Figura 3.6-1 Tendência típica da taxa de acúmulo de dano em laminados compósitos controlados pelas fibras durante carregamento de fadiga

Adotando-se a proposta de Reifsnider (1995), a resistência residual de um material compósito após certo período em serviço passa a ser o parâmetro que fornece a medida indireta do dano acumulado naquele período. Na figura 3.6-2, entende-se que o dano produzido durante n_1 ciclos sob o nível de tensão Fa_1 é equivalente ao dano produzido durante os n_2 ciclos sob o nível de tensão Fa_2 , visto que tanto para n_1 , quanto para n_2 , o valor da resistência residual é o mesmo.

Fr_1 = curva da resistência residual para a tensão alternada Fa_1

Fr_2 = curva da resistência residual para a tensão alternada Fa_2

Fa_1, Fa_2 = amplitude ou tensão máxima normalizada, $\frac{\sigma_{aij}}{X_{ij}}$; correspondem à função de falha do elemento Crítico.

Figura 3.6-2 – A Resistência Residual como Medida do Dano (adaptado de Reifsnider e Case, 2002)

Os resultados mais importantes desta definição são as suas consequentes regras de acúmulo de dano. Da figura 3.6-2, nota-se que a resistência residual é uma função do tempo τ e do nível de tensão Fa :

$$Fr = Fr(Fa, \tau) \quad (3.6-1)$$

A “vida” em fadiga do laminado sob o nível de tensão cíclica Fa será o valor de τ para o qual Fr é igual a Fa , sendo Fr a resistência residual normalizada pela resistência estática do Elemento Crítico. Repetindo-se a análise para diferentes valores de Fa , é possível obter a curva de fadiga para o laminado em questão. Além da vida, a resistência residual pode ser calculada em qualquer instante ao longo do tempo de serviço da estrutura. Teoricamente, este procedimento pode ser aplicável tanto para amplitudes constantes como para amplitudes variáveis (por exemplo: carregamento em blocos).

3.7 Modelo para a Resistência Residual

Os processos de formação dos micro-danos nos materiais compósitos são processos espontâneos e dissipativos. O acúmulo de dano é um processo irreversível que ocorre sob determinadas velocidades ou taxas. Fenômenos dessa natureza são geralmente bem descritos e interpretados pelo uso da *Teoria Cinética*. Como exemplo, tem-se a velocidade das reações químicas, a solidificação de líquidos super-resfriados e a propagação de trincas em materiais. No caso particular do modelo adotado neste trabalho, a *Teoria Cinética dos Sólidos* é usada em conjunto com alguns princípios da *Mecânica Estatística* para descrever as taxas de iniciação e acúmulo de dano. Sendo assim, torna-se possível investigar como essas taxas podem ser usadas para desenvolver equações de estado de um volume material onde ocorrem iniciação e acúmulo de eventos de danos discretos ao longo do tempo. Como mencionado anteriormente, esses eventos podem ser desde a formação de micro-trincas, descolamentos, separação de constituintes até a fratura de fibras. Em contraste com a sólida literatura já disponível no campo da *Teoria Cinética dos Sólidos* aplicada à micro-mecânica de materiais metálicos, a sua aplicação aos materiais compósitos era ainda incipiente, como afirmou Reifsnider e Case (2002) no final do século XX.

3.7.1 Equação Integral da Resistência Residual

A formulação integral da resistência residual é obtida a partir de considerações sobre o acúmulo de eventos de danos discretos como descrito em Reifsnider e Case (2002).

Define-se como eventos de dano discreto, ou seja, “observáveis”, as formações espontâneas como por exemplo: a fratura de uma ou várias fibras, a formação de micro-trincas na matriz, etc.

Neste contexto, as seguintes considerações são adotadas:

- O processo em questão (uma carga de fadiga, por exemplo) fornece energia ao material a uma quantidade constante por unidade de tempo;
- A cada evento de dano está associada uma quantidade discreta de energia “ $n \cdot e$ ” necessária para a sua formação, onde “ e ” representa um “quantum” de energia e “ n ” é um número inteiro positivo;
- Os eventos de dano podem trocar energia entre si através do meio contínuo elástico onde os mesmos estão contidos.

Reifsnider e Case (2002) quantificaram a distribuição da energia envolvida nos eventos de danos discretos a partir de considerações da Mecânica Quântica e da Mecânica Estatística. Para tanto, um exemplo simples é mostrado a seguir e, então, generalizado para o caso limite de um grande número de eventos.

Seja um sistema com quatro eventos de dano possíveis ($N=4$) e com energias possíveis iguais a “zero”, “ e ”, “ $2e$ ”, “ $3e$ ” ou “ $4e$ ”. A energia fornecida por unidade de tempo é constante e igual a “ $3e$ ”. Posteriormente, será assumido que $e \rightarrow \text{zero}$ quando $N \rightarrow \infty$ a fim de se obter variáveis contínuas para a taxa de acúmulo de dano.

As possibilidades para a divisão e absorção da energia disponível (“ $3e$ ”) entre os possíveis estados de dano são mostradas na tabela 3.7-1. Embora o trabalho de Reifsnider et. al (2000) não evidencie detalhes sobre a obtenção das probabilidades calculadas, a pesquisa permitiu verificar que o número de duplicatas (número de micro-estados em cada configuração possível) e o número total de micro-estados, podem ser determinados considerando as possibilidades mostradas na figura 3.7-1.

Figura 3.7-1 Micro-estados dos danos discretos (adaptado de Nash, 1974)

O número de micro-estados possíveis (duplicatas) em cada divisão (ou configuração) é dado por:

$$W_i = \frac{N!}{(n_a!) \cdot (n_b!)} \quad (3.7-1)$$

onde N é o número de danos localizados e n_a é o número de danos ocupando um mesmo nível de energia “a” na divisão (ou configuração) “i”, n_b é o número de danos ocupando um mesmo nível de energia “b” na divisão “i”, etc.

No caso em questão, a probabilidade de ocorrência de um dado estado de dano, em termos da sua energia E_i , pode ser determinado através de algumas considerações, que serão apresentadas.

Na “divisão possível” de energia 1 da Figura 3.7-1, três quanta (“3e”) serão absorvidos por apenas um dos 4 danos, o que implica que os outros 3 ficarão no nível de energia “0” (não serão formados). O número de micro-estados possíveis é, então, dado por:

$$W_1 = \frac{N!}{n_a!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4 \quad (3.7-2)$$

Na divisão de energia 2, “2e” serão absorvidos por um dos danos e um segundo dano absorverá “e”. Neste caso, os 2 danos restantes terão energia igual a “zero” e o número de micro-estados possíveis será igual a:

$$W_2 = \frac{N!}{n_a!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 12 \quad (3.7-3)$$

Na divisão 3, “3e” serão distribuídos igualmente para três dos danos envolvidos e, um quarto dano ficará com energia “zero”. O número de micro-estados possíveis é dado por:

$$W_3 = \frac{N!}{n_a!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4 \quad (3.7-4)$$

Por fim, o número total de micro-estados é dado pela seguinte soma:

$$W = \sum_{i=1}^3 W_i = 4 + 12 + 4 = 20 \quad (3.7-5)$$

A probabilidade da ocorrência de um evento de dano com energia “ $n \cdot e$ ” será o número de eventos favoráveis dividido pelo número total de eventos possíveis. Por exemplo, a probabilidade de danos ocuparem o nível de energia E_1 igual a “0” será de:

$$P(0) = \frac{4 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{20} = \frac{40}{20} \quad (3.7-6)$$

que pode ser escrito como:

$$P(E_1) = \frac{W_1 \cdot n_{11} + W_2 \cdot n_{21} + W_3 \cdot n_{31}}{W} \quad (3.7-7)$$

onde n_{ji} é o número de danos na divisão j e ocupando o nível de energia i . Generalizando, tem-se que:

$$P(E_i) = \frac{\sum_{j=1}^3 W_j \cdot n_{ji}}{W} \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (3.7-8)$$

Efetuada os cálculos para E_2 igual a “e”, E_3 igual a “2e”, E_4 igual a “3e” e E_5 igual a “4e”, obtêm-se as probabilidades desses eventos mostradas na tabela 3.7-1.

Tabela 3.7-1 Ocupação dos estados quânticos de energia dos danos
(adaptado de Reifsnider e Case, 2002)

Eventos	0	e	2e	3e	4e	Número de duplicatas	Probabilidade do estado
Divisões da energia							
1	3			1		4	4/20
2	2	1	1			12	12/20
3	1	3				4	4/20
Probabilidade do evento	40/20	24/20	12/20	4/20	0/20	20 (total)	

Com base num gráfico das probabilidades $P(E_i)$ em função do estado ocupado E_i , obtém-se uma curva que se ajusta perfeitamente à distribuição de Boltzmann, que é dada pela seguinte forma:

$$P(e) = A \exp\left(-\frac{e}{e_{av}}\right) \quad (3.7-9)$$

Na equação (3.7-9), e_{av} é a energia média de todos os eventos de dano. Considera-se, ainda, que $n \rightarrow \infty$. Portanto, os níveis de energia E_i , inicialmente assumidos como discretos, passaram a ser vistos como uma grandeza contínua, representada por “e”.

3.7.2 Dano e Continuidade do Material

A continuidade, Ψ , é um conceito associado à mecânica do dano. Ψ assume o valor unitário quando o material está isento de dano e, “zero” quando este está completamente danificado (KACHANOV, 1986).

Um aspecto essencial do modelo em discussão é a interpretação da continuidade como sendo a *probabilidade normalizada de vida do material*, ou em outras palavras, a continuidade representa o estado do material em função da energia absorvida pelo mesmo na formação do dano. Dessa forma, Ψ pode ser escrita como proposto por Reifsnider e Case (2002), ou seja:

$$\Psi = A \exp\left(-\frac{e}{e_{av}}\right) \quad (3.7-10)$$

A equação (3.7-10) representa a probabilidade de “sobrevivência” do material em função do nível de energia ocupado pelos estados de dano, “e”. Com isto, tem-se então, os seguintes postulados:

Postulado 1: *A energia ocupada, “e”, é proporcional ao tempo total t, durante o qual ocorreu a sua transferência a uma taxa constante. Nessas condições, a continuidade do material pode ser representada por:*

$$\Psi = A \exp[-\eta \tau^j] \quad \text{onde} \quad \tau = \frac{t}{\hat{t}} \quad (3.7-11)$$

onde $\eta = e / e_{av}$; t é uma variável de tempo; j é um parâmetro do material; $\hat{t}$ é um tempo característico (ou médio) associado com o processo de danificação e τ é uma variável de tempo generalizado.

Tempos característicos em processos de dano são discutidos por Christensen (1981) e Miyano et al. (1994). Tais tempos podem ser, por exemplo, a *vida até a ruptura por creep (fluência)*, a *vida em fadiga* ou uma *vida devido à corrosão sob tensão*, dependendo do contexto. Calculando o logaritmo natural e a variação de (3.7-11), obtém-se a taxa de variação do estado do material devido ao acúmulo de dano em função do tempo generalizado:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\eta \Psi j \tau^{j-1} \quad (3.7-12)$$

Postulado 2: *A continuidade do material pode ser também definida como*

$$\Psi = 1 - Fa \quad (3.7-13)$$

onde Fa é um critério de falha para um modo de falha específico. Em geral, Fa tem a forma sugerida por Hill (1948), ou seja, é uma função das componentes de tensão (local) divididas pelas componentes das resistências do material correspondente:

$$Fa = Fa \left(\frac{\sigma_{ij}}{X_{ij}} \right) \quad (3.7-14)$$

Embora a continuidade seja certamente uma função mais complexa de Fa como em (3.7-13), esta primeira aproximação é correta ao considerar a situação limite. Quando a carga aplicada é nula ($Fa = 0$), a probabilidade de vida é igual a unidade ($\Psi = 1$), ao passo que, quando Fa é igual a 1, a probabilidade de vida é zero ($\Psi = 0$), e a fratura é iminente.

A variação total da continuidade, $\Delta \Psi$, do sistema (do material compósito) ao longo do tempo de absorção de energia (formação estatística de dano) pode ser determinada re-arranjando e integrando a equação de taxa (3.7-12):

$$\int_{\Psi_0}^{\Psi_i} d\Psi = -j \int_0^{\tau_i} \eta \Psi(\tau) \tau^{j-1} d\tau \quad (3.7-15)$$

$$\Psi_i - \Psi_0 = -j \int_0^{\tau_i} \eta \Psi(\tau) \tau^{j-1} d\tau = \Delta\Psi \quad (3.7-16)$$

Do Postulado 2 e tomando $\eta = 1$, para uma primeira aproximação, tem-se:

$$\Delta\Psi = (1 - Fa_i) - (1 - Fa_0) = -\Delta Fa = -\int_0^{\tau_i} [1 - Fa(\tau)] j \tau^{j-1} d\tau \quad (3.7-17)$$

Postulado 3: A resistência residual normalizada do sistema material pode ser definida por:

$$Fr = 1 - \Delta Fa \quad (3.7-18)$$

Subentende-se que a mudança na função de falha ΔFa está sendo induzida pelo processo de dano progressivo, o qual induz a variação da razão $\sigma_{ij}(\tau) / X_{ij}(\tau)$, ou seja:

$$\Delta Fa = \Delta Fa \left(\frac{\sigma_{ij}(\tau)}{X_{ij}(\tau)} \right) \quad (3.7-19)$$

A definição (3.7-18) implica que, na condição de falha, a resistência residual é igual a carga aplicada, portanto, Fr é igual a Fa .

De (3.7-17) e (3.7-18), obtém-se a equação do modelo para a degradação da resistência residual em função do tempo generalizado:

$$Fr = 1 - \int_0^{\tau_i} [1 - Fa(\tau)] j \tau^{j-1} d\tau, \text{ onde } Fa = Fa \left(\frac{\sigma_{ij}(\tau)}{X_{ij}(\tau)} \right) \quad (3.7-20)$$

Com base na equação (3.7-20), tem-se os seguintes comentários:

- I. Para os casos em que $Fa(\tau)$ é constante, a equação (3.7-20) pode ser integrada analiticamente, cuja solução é dada por

$$Fr = 1 - (1 - Fa) \tau^j \quad (3.7-21)$$

- II. Várias situações em que $Fa(\tau)$ é contínua foram descritas com grande sucesso por (3.7-20) (REIFSNIDER; CASE, 2002).
- III. Para casos mais gerais de carregamentos (tais como carregamentos em blocos) em que $Fa(\tau)$ é descontínua, é necessária uma aproximação numérica para a integração de (3.7-20). Essa abordagem será desenvolvida no Capítulo 4 deste trabalho.
- IV. Uma vez determinada tanto a curva para a resistência residual $Fr(\tau)$ como para a tensão normalizada $Fa(\tau)$, constata-se que a vida do sistema τ_f (com relação a um determinado modo de falha) será o ponto no qual essas curvas se cruzam, ou seja, a vida é determinada pela condição natural de que na falha $Fr(\tau) = Fa(\tau)$.

Com base em Reifsnider, Case e Iyengar (1996), a forma básica da equação da evolução da resistência residual, equação (3.7-20), foi usada com êxito em muitos problemas de aplicação industrial. Problemas estes em que o tempo, a temperatura e o carregamento mecânico cíclico são variáveis explícitas dos processos de danificação dos materiais compósitos poliméricos reforçados por fibras (REIFSNIDER, 1991a) (REIFSNIDER, 1991b), (REIFSNIDER, 1992, 1997) (REIFSNIDER; STINCHCOMB, 1986).

Caso a fadiga seja o processo dominante sobre a resistência residual, o tempo característico seja assumido como a vida em fadiga até a falha para N ciclos e a falha seja controlada pelas fibras, é possível expressar a vida em fadiga em termos da tensão na direção das fibras das camadas mais solicitadas através da seguinte equação unidimensional:

$$\frac{\sigma_f(\tau)}{X_t(\tau)} = A + B\{\log[N(\tau)]\}^p \quad (3.7-22)$$

onde σ_f é a tensão na direção das fibras, que pode variar ao longo do tempo devido à redistribuição causada pelas trincas na matriz das outras camadas, delaminações e demais mecanismos de dano. O denominador X_t é a resistência da lâmina sob tração unidirecional, que pode diminuir com o tempo devido à oxidação ou fratura das fibras. As variáveis A , B e p são constantes do material.

Considerando a frequência do carregamento cíclico dada por f , o número de ciclos de carga n é dado por $n = f \cdot t$, e a equação da resistência residual (3.7-20) pode ser reescrita como:

$$Fr(t_1) = 1 - \int_0^{t_1} \left[1 - Fa \left(\frac{\sigma_{ij}(t)}{X_{ij}(t)} \right) \right]^j \left(\frac{ft}{N(t)} \right)^{j-1} d \left(\frac{ft}{N(t)} \right) \quad (3.7-23)$$

Na equação (3.7-23), todas as variáveis devem ser avaliadas localmente, no Elemento Crítico. Será demonstrado que essa forma para Fr é capaz de combinar efeitos dependentes do tempo, como *creep* (fluência), *ruptura por creep*, *redistribuição de tensão viscoelástica* e *corrosão*, bem como efeitos dependentes do número de ciclos de carga aplicados, como *fadiga* e *carregamento termomecânico*.

O problema, então, consiste em calcular os parâmetros associados às equações (3.7-20) e (3.7-23). As mudanças nas rigidezes locais alterarão os valores das componentes do tensor de rigidez utilizadas para calcular os campos de tensões locais no Elemento Crítico. Caso seja possível determinar as taxas de variação das diferentes rigidezes, as tensões locais poderão ser corretamente calculadas como funções dos ciclos e do tempo na equação (3.7-23). De fato, pode-se calcular as tensões baseadas na representação de diferentes níveis microestruturais do material compósito. Caso sejam utilizadas informações de mudanças de rigidez no nível da lâmina, pode-se aplicar a Teoria Clássica de Laminados. No entanto, caso se disponha de informações da evolução das rigidezes no nível dos constituintes (como fluência viscoelástica da matriz), pode-se utilizar a micro-mecânica para calcular a redistribuição da tensão local de forma direta.

Assim, como para a redistribuição de tensões, as resistências principais (locais) podem ser calculadas a fim de serem empregadas como parâmetros de entrada em (3.7-20) e (3.7-23). Seja em nível da lâmina ou em nível micro-mecânico em termos das propriedades do material, geometria e arranjo geométrico dos constituintes e suas regiões de interface. Esta última abordagem possui várias vantagens, pois muitos processos que controlam comportamentos como *creep*, *ruptura por creep* e *degradação por fadiga* são funções altamente não-lineares das condições aplicadas e de seu histórico. Um desafio crucial para qualquer modelo que visa representar a resistência residual é o de ser capaz de combinar corretamente os efeitos de todos os fenômenos citados acima quando esses ocorrem simultaneamente. Modelos micro-mecânicos possuem a vantagem de que mudanças nas propriedades e no arranjo geométrico dos constituintes e das regiões de interface aparecem explicitamente. Dessa forma, nos modelos micro-mecânicos, as resistências principais X_{ij} e os estados de tensão local são funções do tempo (ou ciclos) nas equações (3.7-13) a (3.7-23). Isso permite que seus efeitos coletivos sejam somados incrementalmente, integrando-se

desde o tempo t igual a zero até o tempo t de avaliação t_1 . Assim, a física e a mecânica envolvidas na equação (3.7-12) são corretamente combinadas.

3.8 Características da Equação Integral da Resistência

Através de alguns exemplos simples, pode-se investigar o comportamento fundamental da equação integral da resistência residual. A fim de facilitar a explanação, as seguintes considerações são adotadas:

- 1) A fadiga é o processo determinante na mudança da resistência do material;
- 2) O tempo característico pode ser representado por uma vida em fadiga, N , em ciclos;
- 3) O carregamento aplicado no corpo de prova será uniaxial e produzirá uma tensão uniforme na seção transversal do mesmo;
- 4) O comportamento em fadiga da lâmina unidirecional pode ser descrito pela seguinte equação:

$$\frac{S}{X} = A + B(\log N)^p \quad (3.8-1)$$

onde S é a amplitude da tensão axial aplicada; A , B e p são constantes do material; X é a resistência última (de ruptura) do material na direção do carregamento e, N é a vida em fadiga do corpo de prova.

A equação (3.8-1) é escolhida por ajustar-se bem às curvas de fadiga de compósitos para os quais existem boas caracterizações experimentais em fadiga, como por exemplo, os resultados obtidos para lâminas unidirecionais de APC-2, por Picasso e Priolo (1988). O APC2 é constituído de uma matriz de PEEK (poli-éter-éter-cetona) reforçada por fibras de carbono AS-4. A equação (3.8-1) relaciona a vida em fadiga do material compósito unidirecional com a carga normalizada aplicada. O mecanismo de falha envolvido é o aumento do número de fibras fraturadas com o aumento do número de ciclos de carga aplicados. O número de ciclos de carga é dado por n igual a " $f \cdot t$ ", onde t é o tempo e f é a frequência da carga cíclica. Assim, a equação integral pode ser escrita como:

$$Fr(t_1) = 1 - \int_0^{t_1} \left(1 - \frac{S}{X(t)} \right) j \left(\frac{ft}{N(t)} \right)^{j-1} d \left(\frac{ft}{N(t)} \right) \quad (3.8-2)$$

onde foi introduzida a resistência intrínseca do material unidirecional, $X(t)$, a fim de discutir os modos de falha como ruptura por fluência. Fazendo X igual a $X(t)$ na equação (3.8-1), tem-se que:

$$N(t) = 10^{\{[S/X(t)-A]/B\}^{1/p}} \quad (3.8.3)$$

Considerando alguns valores, tais como: $X=100$; $A=1$; $B=-0.06$; $p=1$, $S=70$ (*amplitude = 70% da carga última do material*); $f = 1.388$ Hz, tem-se que nessas condições, a figura 3.8-1 mostra as respostas da equação (3.8-2) para três casos diferentes, que serão discutidos a seguir em forma de exemplos.

Figura 3.8-1 Resposta da resistência residual (equação 3.8-2)

Exemplo 1

Este exemplo considera o caso mais simples, no qual somente a carga mecânica cíclica (fadiga) está presente. Nesse caso, X permanece constante e com base na eq. (3.8-3), obtém-se uma vida de 100.000 ciclos (ou 20 horas) para o material. Considerando j igual a 1 e que todas as demais variáveis independentes do tempo são constantes na equação (3.8-2), esta pode ser integrada e deverá fornecer o mesmo resultado que a equação (3.8-3) para a vida em fadiga. Portanto, integrando (3.8-2) numericamente, obtém-se a curva B da figura 3.8-1. Nota-se que a “vida” obtida pela redução da resistência residual a 70% da resistência última (ou seja, a tensão atuante) é de 20 horas, como ocorreu para a equação (3.8-3).

Exemplo 2

Neste caso, somente a ruptura por *creep* é considerada, ou seja, somente a degradação da resistência intrínseca do Elemento Crítico com o tempo. Além disso, uma frequência muito menor é assumida para o carregamento, $f = 0.0025$ Hz. Isso equivale a propor que somente alguns poucos ciclos de carga mecânica (fadiga) serão aplicados durante 20 horas. Assume-se que a resistência em função do tempo seja dada por:

$$X(t) = 100(1 - 0.015t) \quad (3.8-4)$$

Dessa forma, a resistência inicial de 100 é reduzida a 70 devido aos efeitos da ruptura por *creep* em 20 horas. Nessas condições, aplicando esses dados nas equações (3.8-2) e (3.8-3) obtém-se a curva A da figura 3.8-1. Verifica-se que a forma da curva A é afetada por outras variáveis como será exposto a seguir, mas o resultado do cálculo da vida fornecido pela integral mostra-se consistente.

Exemplo 3

A equação (3.8-2) é capaz de combinar vários efeitos de dano de uma forma consistente com a física e a mecânica envolvidas no processo de falha do material compósito. Combinando apenas os dois casos anteriores (fadiga e ruptura por fluência), obtém-se a curva C da figura 3.8-1. Nota-se que o efeito combinado é mais severo do que os efeitos isolados. Comparações com dados experimentais existentes sugerem que este comportamento é realmente observado.

Vale ressaltar que nos cálculos acima, tem-se que um parâmetro foi fundamental para se prever a vida. Tal parâmetro é conhecido como “j” e será tratado mais detalhadamente a seguir.

O parâmetro j

O valor do parâmetro j (do material) é determinado pela natureza da relação de dependência para com o tempo da equação da taxa que controla a vida do Elemento Crítico, neste caso dada por:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \Psi j \tau^{j-1} \quad (3.8.5)$$

A determinação de j , independentemente de comparações com resultados experimentais para resistências residuais, é difícil e é tema de pesquisas atuais e futuras. Especificamente, j define como a taxa de degradação da resistência muda com o tempo, como mostrado na figura 3.8-2. Para $j > 1$, a resistência diminui sob uma taxa cada vez maior até o colapso da estrutura. Esse comportamento é comumente observado em materiais compósitos e em materiais frágeis. Se $j < 1$, a taxa de degradação é elevada no início e diminui com o tempo, como mostra a figura 3.8-2. Este acúmulo de dano inicial é especialmente observado na fadiga uniaxial de certos compósitos unidirecionais.

Deve-se salientar que as equações de resistência, a forma da equação da taxa e a integral resultante são tidas como um postulado e não são únicas. Outras formas podem ser escolhidas a partir de observações criteriosas da física do problema.

Além do parâmetro j , as sobrecargas também influenciam severamente no cálculo da vida. Em sendo assim, tal assunto será abordado com mais profundidade a seguir.

Figura 3.8-2 Efeito do valor de j na resistência residual (adaptado de Reifsnider e Case, 2002)

Resposta a Sobrecargas

Uma vez que a resistência Fr é controlada diretamente pelo acúmulo de dano, uma consequência natural esperada numa eventual ocorrência de sobrecarga (“picos” de carga), seria uma mudança correspondente em Fr . Na figura 3.8-3, constata-se que a equação integral para Fr é capaz de evidenciar esse fenômeno de forma consistente. Na figura 3.8-3, uma carga cíclica constante é aplicada com uma tensão máxima de 70% da resistência última do material. Quando ocorre uma súbita aplicação de aproximadamente 72,5%, verifica-se uma redução da resistência residual pela presença de um degrau mostrado na curva.

Figura 3.8-3 Influência de uma sobre-carga na Resistência Residual
(adaptado de Reifsnider e Case, 2002)

Diminuição e Aumento da Resistência Residual

Com relação à variação da resistência residual, deve-se ponderar que apesar dos exemplos anteriores mostrarem sempre uma diminuição da resistência residual global, conceitualmente a mesma pode aumentar durante alguma fase da vida do material compósito, especialmente em elementos estruturais com entalhes (concentradores de tensão). Nessas situações, algumas modificações são introduzidas nos modelos após algumas observações experimentais simples.

3.9 Resumo do Método da Resistência Residual

A figura 3.9-1 mostra um fluxograma geral para a aplicação da metodologia da resistência residual visando o cálculo da vida e da resistência residual.

Figura 3.9-1 Fluxograma da metodologia da resistência residual (adaptado de Reifsnider e Case, 2002)

Com base na figura 3.9-1, verifica-se que o fluxograma de aplicação da metodologia é constituído basicamente por 4 etapas fundamentais:

1. Identificação e caracterização, em laboratório, do modo (ou modos) de falha a ser analisado: este passo é de crucial importância para o sucesso do modelo. Muitos materiais compósitos de engenharia são projetados e fabricados para que os danos e modos de falha sejam controlados pelas fibras (processo de falha governado pelas fibras). No entanto, em algumas situações, a matriz pode governar a falha ou vários outros modos de falha podem existir. Os modos de falha podem ser, entre outros, a fratura (separação em duas partes ou mais), a perda de rigidez ou, então, a deformação por fluência. O critério de falha a ser considerado deve estar vinculado ao modo de falha. *O elemento crítico será o material contido no volume cuja falha definirá a falha de todo o sistema (falha global).*
2. Especificação do Elemento Crítico em função do modo de falha: numa abordagem micro-mecânica, tanto um número crítico de fratura de fibras em tração como uma região submetida à micro-flambagem em compressão podem ser considerados elementos críticos. Numa abordagem meso-mecânica (nível da lâmina), o Elemento Crítico pode ser representado pelas camadas com ângulos próximos em relação a uma direção principal de carregamento.
3. Determinação dos elementos subcríticos e modos de dano que controlam e influenciam as condições locais do Elemento Crítico: frequentemente incluem as

regiões com micro-trincas na matriz, delaminações, descolamentos, separação ou movimentos relativos entre os constituintes.

4. Obtenção das taxas de variação dos estados de tensão e do estado do material em função dos processos que governam o dano e a degradação: experimentalmente, esta é a parte mais desafiante do problema. Cada processo deve ser investigado isoladamente e a sua equação de taxa é determinada em função de diversas variáveis. Seguem alguns exemplos de taxas a serem determinadas:

- Aumento da densidade de trincas na matriz em função do número de ciclos;
- Degradação da resistência das fibras em função do nível de oxigênio e da temperatura (degradação do material devido à oxidação);
- Difusão anisotrópica de um elemento ambiental corrosivo.

Constata-se assim, que a etapa 4 é difícil em qualquer tipo de abordagem do problema de fadiga e tolerância ao dano em compósitos. Dessa forma, quando não se dispõe de dados suficientes, pode ser necessário considerar algumas *representações fenomenológicas*, que correlacionam dados existentes ou, em último caso, a utilização de postulados para a forma das equações de taxa.

Por fim, resumidamente, tem-se que as Etapas 1 e 2 definem o Elemento Crítico. A Etapa 3 permite identificar os Elementos Subcríticos e entender como ocorre a transferência de tensão para (ou do) Elemento Crítico à medida que aumentam os danos nos Elementos Subcríticos. A Etapa 4 refere-se à determinação das tensões relevantes no Elemento Crítico. Tal etapa pode ser muito influenciada pela presença de concentradores de tensão. Em sendo assim, na próxima seção, discutir-se-ão aspectos relacionados com a determinação de campos de tensão não uniforme devido à presença de concentradores de tensão.

3.10 Campos de Tensão não Uniforme – Concentradores de Tensão

Em casos nos quais o campo de tensão no Elemento Crítico é não uniforme devido à presença de descontinuidades ou outros detalhes, é necessário que se defina muito bem qual é o modo de falha próximo ao detalhe, bem como é a distribuição das tensões nesta região e como esta pode variar com o tempo (ou ciclos de carregamento de fadiga).

No presente trabalho será abordado o caso de um elemento crítico associado a placas laminadas com um furo circular ou elíptico central. Deve-se entender que, embora a filosofia seja aqui aplicada somente para este caso, a mesma pode ser utilizada para qualquer outra situação de concentradores de tensão em que se conheça a distribuição de tensões, o modo e a função de falha da região, como por exemplo: uma trinca passante, uma junta colada ou uma junta unida por fixadores.

No caso de uma placa laminada com um furo central ou com uma trinca passante, as funções de falha podem ser baseadas no critério semi-empírico de resistência da tensão média (WHITNEY; NUISMER, 1974). A seguir, o problema da placa com um furo elíptico é detalhadamente analisado e posteriormente dois estudos de casos numéricos serão apresentados e discutidos no Capítulo 5. O problema da placa com uma trinca passante, bem como referências sobre o assunto serão discutidos brevemente.

Seguindo o fluxograma da Figura 3.9-1, para o caso da placa com furo central, tem-se que o Elemento Crítico (Etapas 1 e 2) é definido por estudos de resistência de laminados compósitos com furos. Conforme discutido em Case (1996), o Elemento Crítico será uma região (“zona de processo”) definida por uma dimensão característica do material designada por “b”, como na figura 3.10-1.

A figura 3.10-1 representa a(s) lâmina(s) mais carregada(s) do laminado. O Elemento Crítico pode ser visto como o volume total compreendido pelas duas faixas destacadas na figura 3.10-1(a), considerando todas as lâminas que se encontram no mesmo estado de tensão e tem a mesma orientação, por exemplo, todas as lâminas a 0° . Se o eixo X coincide com a direção das fibras, a figura 3.10-1(b) representa a distribuição da tensão σ_1 na direção 1 da lâmina, nas vizinhanças do furo.

Figura 3.10-1 Elemento crítico para um laminado com furo central – dimensão característica “b”

De acordo com o critério de falha da tensão média (WHITNEY; NUISMER, 1974) para uma lâmina (CASE, 1996), o laminado irá falhar por ruptura quando a tensão média $\bar{\sigma}_1$ for igual a resistência do laminado sem furo, X_L . Sendo que a tensão média é definida por:

$$\overline{\sigma_1} = \frac{1}{b} \int_R^{R+b} \sigma_1(y,0) dx \quad (3.10-1)$$

Então, na iminência da falha, tem-se:

$$X_L = \frac{1}{b} \int_R^{R+b} \sigma_1(y,0) dx \quad (3.10-2)$$

A função de falha desse Elemento Crítico será definida por:

$$Fa = \frac{\overline{\sigma_1}}{X_L} = \frac{1}{X_L \cdot b} \int_R^{R+b} \sigma_1(y,0) dx \quad (3.10-3)$$

Pressupõe-se que a resistência do laminado sem furo X_L , é obtida por ensaios experimentais. A distância característica b é uma propriedade do laminado, que pode ser obtida a partir de ensaios e/ou pela equação (3.10-2). A distribuição de tensão $\sigma_1(y,0)$ pode ser determinada de forma analítica ou numericamente via Método dos Elementos Finitos (MEF).

No presente trabalho, essa distribuição foi obtida pelo método empregado por Case (1996) e Reifsnider (2002) e, posteriormente, calibrada com um modelo de elementos finitos. Nos trabalhos citados, os autores utilizaram a solução analítica de Lekhnitskii (1981) para distribuições de tensões próximas a furos elípticos em placas anisotrópicas. Sendo que tal solução é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= P + 2\text{Re}[\mu_1^2 \phi_1'(Z_1) + \mu_2^2 \phi_2'(Z_2)] \\ \sigma_y &= 2\text{Re}[\phi_1'(Z_1) + \phi_2'(Z_2)] \\ \sigma_{xy} &= 2\text{Re}[\mu_1 \phi_1'(Z_1) + \mu_2 \phi_2'(Z_2)] \end{aligned} \quad (3.10-4)$$

onde

$$\mu_1 = \alpha + \beta i$$

$\mu_2 = \gamma + \delta i$ são raízes complexas da seguinte equação característica:

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (3.10-5)$$

Na equação (3.10-5), os termos a_{ij} são os componentes da matriz de flexibilidade do laminado, obtida pela Teoria Clássica de Laminados.

Figura 3.10-2 Furo elíptico numa placa anisotrópica infinita sob tensão uniaxial

Para carga uniaxial como na figura 3.10-2, as funções de tensão são dadas por:

$$\phi_1(z_1) = \frac{\bar{\beta}_1 - \mu_2 \bar{a}_1}{\mu_1 - \mu_2} \cdot \frac{1}{\zeta_1} \quad \phi_2(z_2) = -\frac{\bar{\beta}_1 - \mu_1 \bar{a}_1}{\mu_1 - \mu_2} \cdot \frac{1}{\zeta_2} \quad (3.10-6)$$

$$\zeta_1 = \frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - a^2 - \mu_1^2 b^2}}{a - i\mu_1 b} \quad \zeta_2 = \frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 - a^2 - \mu_2^2 b^2}}{a - i\mu_2 b} \quad (3.10-7)$$

$$z_1 = x + \mu_1 y \quad z_2 = x + \mu_2 y \quad (3.10-8)$$

$$\bar{\alpha}_1 = -\frac{p \sin \varphi}{2} (a \sin \varphi - ib \cos \varphi) \quad \bar{\beta}_1 = \frac{p \cos \varphi}{2} (a \sin \varphi - ib \cos \varphi) \quad (3.10-9)$$

Na figura 3.10-2 e na equação 3.10-9, o ângulo entre a tensão remota atuante $\sigma_x^0 = P$ e o eixo x do furo elíptico, φ , é zero.

A formulação de (3.10-4) a (3.10-9) foi implementada nas sub-rotinas *StressDist* (vide Anexos) e, portanto, fazem parte da ferramenta computacional desenvolvida neste trabalho. O cálculo das raízes complexas da equação (3.10-5) também foi implementado numa sub-rotina conhecida como *Roots* (vide Anexos). Assim, não somente essas sub-rotinas, mas também um conjunto de outras sub-rotinas, que estão melhor detalhadas nos Anexos, constitui a ferramenta computacional completa. Ferramenta esta designada como SAFECOM (Sistema de Análise de Fadiga de Estruturas em Compósito).

Portanto, dado um laminado com um furo elíptico e submetido a uma tensão remota $\sigma_x^0 = P$ como evidenciado na figura 3.10-2, para se determinar a função de falha do mesmo,

é necessário identificar a camada (ou camadas) crítica, na qual $\sigma_1(y,0)$ está atuando. Para tanto, a sub-rotina *Scan* foi projetada para identificar, entre todas as camadas, as mais solicitadas, ou seja, as que apresentam a maior tensão de pico $\sigma_{1 \max}$. Essa sub-rotina utiliza a seguinte solução de Lekhnitskii para as tensões na borda do furo:

$$\sigma_{\vartheta} = p \frac{a^2}{l^2} \sin^2 \vartheta + \frac{pb}{l^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-\vartheta i} [(\mu_1 + \mu_2) a^3 \sin^3 \vartheta + (2 - \mu_1 \mu_2) a^2 b \sin^2 \vartheta \cos \vartheta + b^3 \cos^3 \vartheta]}{(a \sin \vartheta - \mu_1 b \cos \vartheta)(a \sin \vartheta - \mu_2 b \cos \vartheta)} \right\} \quad (3.10-10)$$

onde ϑ é o ângulo azimutal em relação ao eixo x.

Após o cálculo das tensões globais, ou seja, das tensões obtidas para o laminado através da equação (3.10-4) ou da equação (3.10-10), o campo de tensão $\sigma_1(y,0)$ ou σ_{1M}^a nas lâminas é calculado com base numa transformação tensorial aplicada às tensões globais.

Para fins de verificação da implementação das equações (3.10-4) a (3.10-10), analisou-se um problema da literatura (EL ZEIN; REIFSNIDER, 1990) empregando as sub-rotinas, bem como um modelo solucionado via Método dos Elementos Finitos (MEF). Em sendo assim, foi analisado o mesmo corpo de prova proposto por El Zein e Reifsnider (1990). A figura 3.10-3 mostra a comparação entre os resultados de tensão obtidos através das sub-rotinas, ou seja, através da solução de Lekhnitskii comparada à solução via MEF obtida com auxílio do programa comercial Nastran. Nota-se, assim, uma divergência a partir de uma distância de 8,2 mm da borda do furo, que pode ser explicada com base no grau de refinamento da malha utilizada, bem como no tipo de função de forma do elemento empregado nas análises via MEF.

Figura 3.10-3 Comparação entre as tensões obtidas via SAFECom e via MEF

A Tabela 3.10-1 compara os resultados para a tensão de pico σ_{1M} ^a, fator de concentração de tensão K e o comprimento característico “b”, obtidos pelo programa SAFECom, via MEF e os resultados da literatura. Sendo que o laminado analisado possui empilhamento igual a $[10/\pm 10]_S$.

Tabela 3.10-1 Resultados para tensão e distância característica: literatura x SAFECom x MEF

El Zein and Reifsnider (1990)			FEM			SAFECom		
σ_1 máx cam. 0°	K camadas 0°	b	σ_1 máx cam. 0°	K camadas	b	σ_1 máx cam. 0°	K camadas	b
4927	6.04	1.91	4928	6.04	1.930	4922	6.03	1.904

Diferenças em relação a Literatura			
	σ_1 máx cam. 0°	K camadas 0°	b
FEM	0.03%	0.00%	1.31%
SAFECom	-0.09%	-0.09%	-0.05%

Com base na tabela 3.10-1, verifica-se uma convergência entre os resultados apresentados para a distribuição de tensão $\sigma_1(y,0)$ e o comprimento característico b . Dessa forma, conclui-se que a função de falha determinada pela equação (3.10-3) é consistente. Isto pode ser confirmado, pois para o problema analisado, no qual busca-se determinar a resistência do corpo de prova com o furo circular central, a função de falha calculada para a tensão de falha do laminado, ou seja, *Xn igual a P que é igual a 815,65 MPa*, resultando em *Fa* igual a 1,06.

Deve-se ressaltar que o problema de um laminado com uma trinca passante pode ser analisado de forma semelhante ao problema do laminado com furo elíptico. Uma expressão para a distribuição de tensão axial na ponta da trinca em um material ortotrópico foi obtida em termos dos fatores de intensidade de tensão para os Modos I e II, bem como das flexibilidades do laminado (SIH, PARIS, IRWIN, 1965). Além disso, Lekhnitskii (1968) desenvolveu uma expressão para a tensão axial na região da trinca como um caso limite da solução para um furo elíptico. Portanto, com referência à Figura 3.10-1, a tensão na direção X pode ser obtida por:

$$\overline{\sigma_x} = \frac{\overline{\sigma_o} y}{\sqrt{y^2 + a^2}} \quad (3.10-11)$$

onde $\overline{\sigma_o}$ é a tensão remota.

Nos casos em que o laminado com um concentrador de tensão é submetido a cargas cíclicas predominantemente de tração, um aspecto adicional deve ser considerado. Trata-se do acúmulo acentuado de dano, que ocorre na “zona de processo”, deve ser considerado na análise, uma vez que o mesmo causa relaxamentos da tensão nesta região à medida que os ciclos de carga são aplicados (vide figura 5.5-1 na seção 5.5). A relaxação da distribuição das tensões em função do número de ciclos não é totalmente compreendida, pois a observação e interpretação direta de todos os eventos de dano presente em uma situação prática é quase impossível. Alternativamente, Case (1996), bem como Case e Reifsnider (2002) empregaram o conceito de “*elipsidade efetiva*” para considerar o efeito coletivo dos vários modos de dano. A “*elipsidade*” é definida por b/a , sendo “*b*” o semi eixo maior e “*a*”, o semi eixo menor da elipse (vide figura 5.5-1 na seção 5.5). Nas referências supracitadas, a curva da “*elipsidade*” para um furo inicialmente circular é determinada medindo-se as distribuições das deformações em ensaios pilotos para determinados grupos de materiais e, então, utilizada para todas as outras condições. Diante disso, essas questões serão mais bem exploradas no

Capítulo 5. Todavia, anteriormente, no Capítulo 4, será feita uma descrição de como o modelo de evolução da resistência deve ser implementado.

CAPÍTULO 4

4 Implementação do Modelo de Evolução da Resistência

4.1 Solução da Integral da Resistência Residual

A fim de desenvolver o método de solução da equação integral da resistência residual para funções de falha descontínuas, será considerado um carregamento em blocos como descrito em Case (1996).

A figura 4.1-1 mostra dois níveis de carregamentos que são aplicados consecutivamente em um elemento crítico, sendo o *nível 1* aplicado no intervalo de tempo $[0, \tau_1]$ e o *nível 2*, durante o tempo $[\tau_1, \tau_1 + \Delta\tau]$. Essa situação pode ser generalizada para quaisquer pares de blocos, como sugerido na figura 4.1-2.

Figura 4.1-1 Aplicação de dois carregamentos em bloco no elemento crítico

Figura 4.1-2 Evolução do dano no Elemento Crítico submetido a um carregamento em blocos

A curva de resistência residual poder ser obtida calculando-se sucessivamente o dano $\Delta Fr(Fa_{i+1}, \Delta\tau)$ acumulado durante cada intervalo de tempo $\Delta\tau$ e subtraindo-o do valor anterior (conhecido) da resistência, $Fr(Fa_i, \tau_i)$. Assim, a curva pode ser representada por:

$$Fr(\tau, Fa) = 1 - \sum_{i=1}^{N_{blo\cos}} \Delta Fr_i(Fa_i, \tau_i) \quad (4.1-1)$$

Substituindo a equação (3.7-18) na equação (3.7-15) e integrando no intervalo $[\tau_1, \tau_2]$, obtém-se:

$$\Psi_2 - \Psi_1 = Fr_2 - Fr_1 = \Delta Fr = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} (1 - Fa) j \tau^{j-1} d\tau \quad (4.1-2)$$

Figura 4.1-3 Cálculo do pseudo número de ciclos

Os dois blocos arbitrários com tempos finais τ_i e τ_{i+1} na figura 4.1-2 estão representados na figura 4.1-3. Nessas figuras, considera-se o caso específico de carga de fadiga, de forma que a variável de tempo e o tempo característico passam a ser números de ciclos de fadiga.

A função de falha mede a amplitude de tensão aplicada normalizada pela resistência estática, enquanto a resistência residual mede a resistência residual normalizada pela resistência estática:

$$t = n \quad \hat{t} = N \quad \tau = \frac{n}{N} \quad Fa = \frac{S_a}{S_{ult}} \quad Fr = \frac{S_r}{S_{ult}} \quad (4.1-3)$$

O primeiro diagrama da figura 4.1-3 ilustra a aplicação de dois blocos de carregamento mecânico cíclico no Elemento Crítico, a partir de n igual a “0”. São aplicados n_1 ciclos de tensão de valor máximo F_a^1 e, em seguida, Δn ciclos sob o nível máximo F_a^2 . O segundo diagrama mostra, graficamente, as evoluções de $Fr(n)$ e $Fa(n)$. Caso o Elemento Crítico fosse submetido somente à aplicação de F_a^1 , a resistência residual se degradaria segundo a curva F_r^1 até N_1 ciclos (vida característica para F_a^1). Nesse ponto ($n=N_1$), o valor de $Fr(n)$ se igualaria ao valor de F_a^1 , significando a falha por ruptura. Analogamente, a curva F_r^2 representa o histórico da degradação da resistência residual para o nível de tensão F_a^2 , sendo a vida característica dada por N_2 . Quando são aplicados n_1 ciclos sob o nível F_a^1 e em seguida Δn ciclos sob o nível F_a^2 , a resistência residual passa a se comportar de acordo com a curva F_r^2 da figura 4.1-3. A mudança do nível de tensão e do histórico de degradação é representada pela seta horizontal no sentido esquerdo da figura 4.1-3.

A mudança na resistência residual após o incremento Δn (ou $\Delta \tau$) será função da resistência residual no início do incremento, $Fr(Fa_i, \tau_i)$ (doravante Fr_1), e do próprio número de ciclos, Δn . A fim de obter ΔFr em função dessas grandezas, define-se o “pseudo tempo generalizado”, τ_0^2 , como sendo o tempo (ou número de ciclos) necessário para que Fr atinja o mesmo valor, Fr_1 , porém sob o nível mais alto de tensão, F_a^2 , como mostrado na figura 4.1-3. Isso equivale a:

$$F_r(\tau_1, F_a^1) = F_r(\tau_0^2, F_a^2) \quad (4.1-4a)$$

Então, da equação (3.7-21), tem-se que:

$$Fr = 1 - (1 - Fa_1) \tau_1^j = 1 - (1 - Fa_2) (\tau_2^0) \quad (4.1-4b)$$

onde:

$$\tau_2^0 = \left(\frac{1 - Fr_1}{1 - Fa_2} \right)^{\frac{1}{j}} \quad (4.1-5)$$

Considerando o caso específico de fadiga, tem-se que:

$$n_2^0 = N_2 \tau_2^0 = \left(\frac{1 - Fr_1}{1 - Fa_2} \right)^{\frac{1}{j}} N_2 \quad (4.1-6)$$

A mudança ΔFr no intervalo Δn pode, então, ser calculada integrando a equação (4.1-2) no intervalo $(n_1, n_1 + \Delta n)$, o que, em termos de dano, é equivalente a integrá-la no intervalo $(n_2^0, n_2^0 + \Delta n)$. Efetuando essa operação, obtém-se:

$$\Delta Fr = -(1 - Fa_2) \left\{ \left[\frac{n_2^0 + \Delta n}{N_2} \right]^j - \left(\frac{n_2^0}{N_2} \right)^j \right\} \quad (4.1-7)$$

4.2 Implementação Computacional

Apesar dos trabalhos de Case (1996), Reifsnider et. al (2000) e Reifsnider e Case (2002) apresentarem uma ótima explanação teórica acerca da metodologia da resistência residual, os mesmos não detalham sobre como a equação (3.7-20) é integrada e utilizada em um caso prático de cálculo. Sendo assim, foi necessário estabelecer uma estratégia de integração no programa SAFECom. Esses procedimentos são avaliados e comparados com resultados da literatura, como será evidenciado no Capítulo 5.

4.2.1 Cálculo da Função de Falha, $Fa(n)$

De forma geral, as variações da função de falha (ou tensão normalizada) $Fa(n)$ no Elemento Crítico são causadas pelos seguintes fatores:

- ✓ Redistribuição interna de tensões devido ao acúmulo de dano nos Elementos Subcríticos;
- ✓ Diminuição das resistências principais do Elemento Crítico, X_{ij}
- ✓ Variações da amplitude da carga externa aplicada, como em espectros de carga e carregamentos em bloco.

Os dois primeiros processos são as manifestações mecânicas macroscópicas da mudança que ocorre no estado do material ao longo do tempo generalizado. A tensão normalizada pode mudar devido a somente um dos três efeitos supracitados, assim como a qualquer combinação dos mesmos. Então, um algoritmo para a determinação da resistência residual e da vida do material compósito deve ser capaz de contabilizar essa combinação geral de efeitos. Uma estratégia para se calcular a curva $Fa(n)$ pode ser sumarizada no seguinte procedimento:

Passo 1: Obter o carregamento externo global, $\sigma_a(n)$, que pode ser constante ou em blocos (Figura 4.2-1).

Figura 4.2-1 Amplitude do carregamento em blocos

Passo 2: Calcular a curva $Fa(n)$ no Elemento Crítico devido às mudanças no estado do material e a carga aplicada (Figura 4.2-2).

Figura 4.2-2 Evolução de F_a no elemento crítico

Passo 3: Discretizar $F_a(n)$ para o Elemento Crítico, de forma a se obter sua aproximação em blocos, nos mesmos pontos da carga aplicada (Figura 4.2-3).

Figura 4.2-3 Discretização de F_a para o Elemento Crítico

4.2.2 Cálculo da Curva de Resistência, $Fr(n)$

Uma vez conhecida a forma discreta de $F_a(n)$, a curva de resistência pode ser determinada pela aplicação direta do método descrito no Capítulo 4 (item 4.1), conforme ilustrado na figura 4.2-4.

Figura 4.2-4 Cálculo de $Fr(n)$

Na Figura 4.2-4, cada novo ponto $Fr(n)$ é determinado por:

$$Fr(n_i) = Fr(n_{i-1}) - \Delta Fr(n_i) \quad (4.2-1)$$

O processo acima é repetido de forma iterativa, refinando-se a solução a cada nova iteração através da diminuição do intervalo δn até que se atinja a convergência desejada.

Seja Δn um intervalo qualquer de número de ciclos de fadiga (ou um intervalo qualquer de tempo), dividindo esse intervalo em um número inteiro positivo K de subintervalos igualmente espaçados (n_{i-1}, n_i) , com comprimento δn , e numerando estes últimos por meio de um parâmetro λ inteiro positivo, tem-se a situação mostrada na figura 4.2-5.

Figura 4.2-5 Definições para o diagrama Fa e Fr x número de ciclos

Com base nas figuras 4.2-4 e 4.2-5, e nas equações (4.1-6) e (4.1-7), deve-se definir e calcular os seguintes parâmetros:

n_0, n_f : número de ciclos inicial e final do intervalo de análise; no caso particular da figura 4.2-5, $n_0 = 0$

$\Delta n = n_f - n_0$: intervalo de análise; no caso da figura 4.2-5, $\Delta n = n_f$.

λ : identificador do subintervalo; número real e inteiro, tal que $1 \leq \lambda \leq K$

K : número de subintervalos (subdivisões de Δn)

$\delta n = \frac{\Delta n}{K}$: comprimento do subintervalo λ

$N_1 = n_{i-1}$ e $N_2 = n_i$: limite inicial e final do subintervalo λ , respectivamente:

$$\begin{aligned} N1 &= [n_0 + (\lambda - 1)]\delta n \\ N2 &= n_0 + \lambda\delta n \end{aligned} \quad (4.2-2)$$

Fa_1, Fa_2 : tensão normalizada inicial e final do subintervalo λ , respectivamente.

Fr_1 : resistência residual inicial do subintervalo λ

$\hat{Fa}$: tensão normalizada média no subintervalo λ :

$$\hat{Fa} = \frac{Fa_1 + Fa_2}{2} \quad (4.2-3)$$

$\hat{N}$: vida característica para $\hat{Fa}$. Em geral, dada por:

$$\hat{N} = 10^{\left(\frac{\hat{Fa} - A_n}{B_n} \right)^{\frac{1}{P_n}}} \quad (4.2-4)$$

ΔFr_2 : mudança na resistência residual durante o subintervalo λ , que é dada por:

$$\Delta Fr_2 = (1 - \hat{Fa}) \left[\left(\frac{n_2^0 + \delta n}{\hat{N}} \right)^j - \left(\frac{n_2^0}{\hat{N}} \right)^j \right] \quad (4.2-5)$$

$$n_2^0 = \left(\frac{1 - Fr_1}{1 - \hat{F}a} \right)^{\frac{1}{j}} \hat{N} \quad (4.2-6)$$

Fr_2 : resistência residual final do subintervalo λ , que é obtida por:

$$Fr_2 = Fr_1 - \Delta Fr_2 \quad (4.2-7)$$

Refinando o intervalo δn e repetindo os cálculos iterativamente, ocorrerá que:

$$Fr(n) \rightarrow Fr(n)_{\text{exato}} \quad \text{qdo} \quad \delta n \rightarrow 0 \quad (4.2-8)$$

CAPÍTULO 5

5 Estudos de Caso: Resultados e Discussões

Neste Capítulo, o programa SAFECom é aplicado e, os resultados obtidos são comparados com resultados da literatura. Deve-se ressaltar que o programa SAFECom foi implementado em linguagem VBA (*Visual Basic for Applications*) e suas sub-rotinas estão detalhadas no Anexo.

Nas discussões que se seguem, a seguinte convenção é adotada para o significado das variáveis:

E_1	Módulo de elasticidade da lâmina na direção das fibras
E_2	Módulo de elasticidade da lâmina na direção transversal às fibras
G_{12}	Módulo de cisalhamento da lâmina
ν_{12}	Coeficiente de Poisson da lâmina
X_t	Resistência da lâmina à tração na direção das fibras
X_c	Resistência da lâmina à compressão na direção das fibras
Y_t	Resistência da lâmina à tração na direção transversal às fibras
Y_c	Resistência da lâmina à compressão na direção transversal às fibras
S, SS	Resistência da lâmina ao cisalhamento
X_n	Resistência do laminado com furo central sob carga axial
α_1	Coeficiente de expansão térmica da lâmina na direção das fibras
α_2	Coeficiente de expansão térmica da lâmina na direção transversal às fibras
f	Frequência
$R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$	Razão de tensões
N, n	Número de ciclos de fadiga
$F_a, F_{a_{avg}}$	Funções de falha
Fr	Resistência residual do Elemento Crítico
σ_a, S_a	Amplitude de tensão axial global aplicada no laminado
σ_1	Tensão na direção principal 1 da lâmina
Δ	Diferença entre a vida calculada pelo presente trabalho e a vida das referências da literatura indicadas nas tabelas
S_x, S_y	Tensões na placa anisotrópica equivalente nas direções x e y calculadas nas vizinhanças do furo
S_{ult}	Resistência última do laminado sob carga uniaxial
S_a / S_{ult}	Tensão global normalizada axial aplicada no laminado
r	Eixo azimutal

- b Comprimento característico do critério de falha para um laminado com um furo central.

5.1 Caso 1 - Laminado sem entalhe (Reifsnider e Case, 2002)

Este estudo de caso considera a falha por fadiga de um laminado polimérico sem descontinuidade e está detalhado em Reifsnider e Case (2002). Além disso, a redistribuição de tensões internas não é considerada, portanto, é o caso mais simples possível de utilização da equação da resistência residual. A tabela 5.1-1 traz todos os dados utilizados na solução do referido estudo de caso.

Tabela 5.1-1 Dados para o estudo de Caso 1

DADOS	
Material da lâmina unidirecional	Carbono/epoxi (Não especificado)
Espessura da lâmina	0,25 mm
Raio do furo	-
Equação de fadiga da lâmina	$N = 10^{(Fa - 1) / -0.06}$
Sequência de laminação	[45,0,-45,90] _s
Temperatura de cura	300°C
Temperatura de operação	120°C
Modo de falha	Ruptura das camadas 0° (elemento crítico) causada pela tração na direção das fibras
Elemento crítico	Volume de material compreendido pelas camadas 0°
Função de falha	$Fa = \sigma_1 / Xt$
Comprimento caract. b	-
Amplitude de tensão	600 MPa
R	-1.0
f	1 Hz
E_1	140 GPa
E_2	7.0 GPa
G_{12}	5.5 GPa
ν_{12}	0.25
X_t	2070 MPa
X_c	1240 MPa
Y_t	55 MPa
Y_c	180 MPa
SS	180 MPa
α_1	$0.12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
α_2	$35 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
X_n	-
Degradação do módulo E_2	-
Degradação do módulo G_2	-
Variação da elipsidade	-

5.1.1 Resultados do Estudo de Caso 1

O gráfico da figura 5.1-1 mostra a evolução do dano no material em função do número de ciclos de carga mecânica aplicados. De acordo com o conceito da metodologia desenvolvida neste trabalho, o dano é medido pela resistência residual normalizada no Elemento Crítico, Fr. Fisicamente, a degradação de Fr, neste caso, se deve ao aumento progressivo do número de fibras fraturadas. A falha por fadiga ocorrerá quando Fr reduzir-se ao nível da tensão máxima normalizada atuando no Elemento Crítico, ou seja, $Fa = \sigma_1 / X_t$ que, neste caso é constante como pode-se constatar no gráfico (figura 5.1-1).

Observando as tabelas da figura 5.1-1, pode-se notar que o número de ciclos calculados pelo código SAFECOM é de 23343 ciclos ante 23550 ciclos obtidos por Reifsnider e Case (2002). Portanto, verifica-se uma diferença de apenas 0,88% entre os resultados.

S. Case (2002)			Presente Trabalho			
σ_a (MPa)	Fa	N	σ_a (MPa)	Fa _{avg}	N	Δ
600	0.7377	23550	600	0.7377	23343	-0.88%

Figura 5.1-1 Resultados para a vida em fadiga do Caso 1

5.2 Caso 2 – Laminado com micro-trincas (Reifsnider e Case, 2002)

Este estudo de caso considera o mesmo laminado e carregamento do Caso 1 (REIFSNIDER; CASE, 2002), porém a falha por fadiga leva em consideração a redistribuição de tensões internas causada pela propagação das micro-trincas na matriz das lâminas com ângulos diferentes de 0°.

Tabela 5.2-1 Dados para o estudo de Caso 2

DADOS	
Material da lâmina unidirecional	Carbono/epoxi (Não especificado)
Espessura da lâmina	0,25 mm
Raio do furo	-
Equação de fadiga da lâmina	$N = 10^{(Fa - 1) / -0.06}$
Sequência de laminação	[45,0,-45,90] _S
Temperatura de cura	300°C
Temperatura de operação	120°C
Modo de falha	Ruptura das camadas 0°(elemento crítico) causada pela tração na direção das fibras
Elemento crítico	Volume de material compreendido pelas camadas 0°
Função de falha	$Fa = \sigma_1 / X_t$
Comprimento caract. b	-
Amplitude de tensão	600 MPa
R	-1.0
f	1 Hz
E_1	140 GPa
E_2	7.0 GPa
G_{12}	5.5 GPa
ν_{12}	0.25
X_t	2070 MPa
X_c	1240 MPa
Y_t	55 MPa
Y_c	180 MPa
SS	180 MPa
α_1	$0.12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
α_2	$35 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
X_n	-
Degradação do módulo E_2	$E_2(n) = E_2^o - E_2^o \left(\frac{n}{23550} \right)$
Degradação do módulo G_{12}	$G_{12}(n) = G_{12}^o - G_{12}^o \left(\frac{n}{23550} \right)$
Variação da elipsidade	-

O efeito das micro-trincas é contabilizado pela degradação de E_2 e G_{12} . Como uma primeira aproximação para E_2 e G_{12} foram usadas as funções indicadas na tabela 5.2-1.

5.2.1 Resultados do Estudo de Caso 2

O gráfico da figura 5.2-1 mostra a evolução não linear do dano representado pelo decaimento da resistência do Elemento Crítico (camadas 0°). Neste caso, ocorrem dois modos de dano: o aumento progressivo do número de fibras fraturadas e a nucleação e crescimento da densidade de micro-trincas na matriz das camadas com ângulos diferentes de 0° . Essas micro-trincas implicam na diminuição das rigidezes E_2 e G_{12} dessas camadas, o que induz uma transferência de tensão para o Elemento Crítico. Este efeito pode ser visto no crescimento gradual da tensão normalizada (ou função de falha), F_a , no gráfico da figura 5.2-1. Conquanto, o efeito das micro-trincas na matriz tenha sido considerado pelo uso de uma relação simples, deve-se ressaltar que modelos mais sofisticados podem ser utilizados, desde que sejam bem definidos para o material em questão.

S. Case [2002]			Presente trabalho			
σ_a (MPa)	Fa	N	σ_a (MPa)	Fa	N	Δ
600	-	10320	600	-	10480	1,55%

Figura 5.2-1 Resultados para a vida em fadiga do Caso 2

Nas tabelas da figura 5.2-1, observa-se uma vida calculada pelo SAFECom de 10480 ciclos frente a 10320 ciclos obtidos por Reifsnider e Case (2002). Portanto, verifica-se uma diferença de apenas 1,55% entre os resultados.

5.3 Caso 3 - Laminado sem entalhe (Curtis, 1986)

Como no Caso 1, este estudo considera os resultados de falha por fadiga de um laminado polimérico sem descontinuidade, os quais foram obtidos por Curtis (1986). A redistribuição de tensões internas não é considerada.

Tabela 5.3-1 Dados para o estudo de caso 3

DADOS	
Material da lâmina unidirecional	AS-4 / PEEK
Espessura da lâmina	0,125 mm
Raio do furo	-
Equação de fadiga da lâmina	$N = 10^{(Fa - An) / Bn}$
Sequência de laminação	$[0,90]_s$
Temperatura de cura	não considerada
Temperatura de operação	não considerada
Modo de falha	Ruptura das camadas 0° (elemento crítico) causada pela tração na direção das fibras
Elemento crítico	Volume de material compreendido pelas camadas 0°
Função de falha	$Fa = \sigma_1 / Xt$
Amplitude de tensão	ver tabelas de $\sigma_a \times N$
R	-1,0
f	não informada
E_1	134 GPa
E_2	8.9 GPa
G_{12}	5.1 GPa
ν_{12}	0.35
X_t	2090 MPa
X_c	1215 MPa
Y_t	80 MPa
Y_c	280 MPa
SS	80 MPa
α_1	$0.63 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
α_2	$29 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
X_n	-
Degradação do módulo E_2	-
Degradação do módulo G_{12}	-
Variação da elipsidade	-

A equação de fadiga da lâmina unidirecional é dada pela equação indicada na tabela 5.3-1. As constantes A_n e B_n são dadas por Picasso e Priolo (1988) e são mostradas na tabela 5.3-2.

Tabela 5.3-2 Constantes da curva de fadiga do compósito unidirecional

Fa	A_n	B_n
$\geq 0,626$	1,3126	-0,1818
$< 0,626$	0,7866	-0,0425

5.3.1 Resultados do Estudo de Caso 3

Neste caso, vidas em fadiga foram calculadas para os treze níveis de tensões axiais globais mostrados na série de dados da coluna “Presente Trabalho” da tabela 5.3-3. O mecanismo de dano dominante é o aumento progressivo de fibras fraturadas. Para cada nível de tensão axial aplicado, um par de curvas Fr e Fa foi obtido, similarmente ao gráfico da figura 5.1-1. Em cada caso, então, a vida em fadiga foi obtida como o ponto de cruzamento das curvas, ou seja, o valor de n para o qual $Fr = Fa$. Pode-se observar, no gráfico da figura 5.3-1, uma ótima concordância entre os valores das vidas calculadas pelo SAFECOM e os valores da literatura.

Tabela 5.3-3 Amplitudes x número de ciclos calculados

Curtis (1986)		S. Case (2002)		Presente trabalho	
N	σ_a (MPa)	σ_a (MPa)	N	σ_a (MPa)	N_{Calc}
2861	769	889	651	893	640
3770	744	850	1021	824	1399
2861	739	796	1905	769	2628
2584	716	728	4113	742	3557
3356	715	694	5999	714	4905
2301	713	672	18082	707	5307
5040	713	642	76114	697	6025
10146000	707	602	509850	651	55992
3825	651	573	2307700	598	728912
8137	651	543	9855900	594	896892
2622	598			549	7914434
16335	595			532	18141733
1701300	594			513	46128579
10000000	532				
10000000	513

Figura 5.3-1 Resultados para a vida em fadiga para o Caso 3

5.4 Caso 4 – Laminado com entalhe circular sob compressão

Esta análise considera a falha por fadiga de um laminado com um furo circular central conforme os dados obtidos por Simonds e Stinchcomb (1989). O Elemento Crítico e a função de falha são determinados de acordo com o Capítulo 3. A falha ocorre por compressão na zona de processo definida pelo comprimento característico b . Este parâmetro é calculado a partir da carga estática de falha obtida por ensaios experimentais. Portanto, X_n é igual a 289,6 MPa. Na simulação realizada, foram utilizados 30 pontos e encontrou-se b igual a 4,76mm, ao passo que b é igual a 4,52 mm, segundo dados da literatura.

Tabela 5.4-1 Dados para o estudo de caso 4

DADOS	
Material da lâmina unidirecional	AS-4 / PEEK
Espessura da lâmina	0,125 mm
Raio do furo	4,7625 mm
Equação de fadiga da lâmina	$N = 10^{(Fa - An) / Bn}$
Sequência de laminação	[(0,+45, 90, -45) _s] 4
Temperatura de cura	não considerada
Temperatura de operação	não considerada
Modo de falha	Ruptura por compressão na região do comprimento característico
Elemento crítico	Volume de material compreendido pelas camadas 0°
Função de falha	$Fa = \sigma_{1av}(r) / X_C$
Amplitude de tensão	ver tabelas de $\sigma_a \times N$
R	-1,0
f	não informada
E_1	134 GPa
E_2	8.9 GPa
G_{12}	5.1 GPa
ν_{12}	0.35
X_t	2090 MPa
X_c	1215 MPa
Y_t	80 MPa
Y_c	280 MPa
SS	80 MPa
α_1	$0.63 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
α_2	$29 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
X_n	- 289.6 MPa
Degradação do módulo E_2	-
Degradação do módulo G_{12}	-
Variação da elipsidade	-

5.4.1 Resultados do Estudo de Caso 4

As figuras de 5.4-1 a 5.4-4 mostram as distribuições dos componentes de tensão e deformação normais nas vizinhanças de um furo de raio 4,76 mm alocado em uma placa anisotrópica equivalente. Vale ressaltar que as distribuições foram calculadas pela solução analítica de Lekhnitskii. A figura 5.4-5 mostra a distribuição de tensões nas lâminas críticas.

Figura 5.4-1 Tensão global σ_x nas vizinhanças do furo

Figura 5.4-2 Tensão global σ_y nas vizinhanças do furo

Figura 5.4-3 Deformação global ϵ_x nas vizinhanças do furo

Figura 5.4-4 Deformação global ϵ_y nas vizinhanças do furo

A figura 5.4-5 mostra a distribuição de tensões nas lâminas críticas. Essas distribuições correspondem ao estado de tensão induzido quando se aplica a carga axial de falha do

laminado possuindo um entalhe circular (Xn) e são utilizadas no cálculo do comprimento característico b e na função de falha no Elemento Crítico, F_a .

Figura 5.4-5 Tensões nas vizinhanças do furo nas lâminas críticas

Neste caso, devido à presença do concentrador de tensão na forma de um furo circular central, a função de falha no Elemento Crítico exige que uma análise detalhada das tensões nas vizinhanças do furo seja conduzida, como explicado na seção 3.10. A tabela 5.4-2 mostra os valores das funções de falha obtidas.

Tabela 5.4-2 Comparação das funções de falha para o laminado

σ_a (MPa)	-275	-260	-245	-230	-215	-200	-185	-170	-155	-140
Fa (Case, 2002)	0.9496	0.8978	0.8460	0.7942	0.7424	0.6906	0.6388	0.5870	0.5352	0.4834
Fa (Presente trab.)	0.9485	0.8968	0.8450	0.7933	0.7415	0.6898	0.6381	0.5863	0.5346	0.4829
Diferença	0.12%	0.12%	0.12%	0.12%	0.12%	0.11%	0.11%	0.11%	0.11%	0.11%

Vidas em fadiga foram calculadas para 10 diferentes níveis de carga axial e os resultados são apresentados na tabela 5.4-3. Para cada nível de tensão aplicada, obteve-se um diagrama de F_a e F_r similar aos das figuras 5.1-1 e 5.2-1, e a vida foi obtida como o valor de “n” no ponto de cruzamento dessas grandezas. Conforme observado na tabela 5.4-3 e figura 5.4-6, os resultados obtidos pelo SAFECom mostram-se em ótima concordância com os valores da literatura, com uma variação máxima de 0.81%.

Tabela 5.4-3 Amplitudes x número de ciclos

σ_a (MPa)	N_{Calc}	N_{Case}	Δ
-275	99	99	0,00%
-260	190	191	-0,52%
-245	366	369	-0,81%
-230	706	711	-0,70%
-215	1360	1369	-0,66%
-200	2622	2639	-0,66%
-185	5052	5085	-0,64%
-170	49358	49700	-0,69%
-155	816728	822300	-0,68%
-140	13514401	13610000	-0,70%

Figura 5.4-6 Curva de fadiga do laminado do Caso 4

5.5 Caso 5 – Laminado com entalhe circular sob tração (Vure,1993)

Este estudo de caso considera os dados de fadiga de Vure (1993), que investigou o comportamento de um laminado com um furo central sob carga cíclica apenas de tração.

Nesse caso, o acúmulo de dano nas proximidades do furo é acelerado. Assim, antes que ocorra a falha, tal fenômeno implicará numa relaxação da distribuição de tensão nas proximidades do furo em função do aumento do número de ciclos de carga aplicados. Case e Reifsnider (2002) avaliam esse dano baseando-se no conceito de “*elipsidade*” efetiva,

explicado no Capítulo 4. Com o aumento do número de ciclos, o furo inicialmente circular tende a assumir um formato oval (figura 5.5-1). Essa variação geométrica é, então, considerada na análise de tensão após cada ciclo aplicado.

Figura 5.5-1 Relaxação da distribuição de tensão em função da “*elipsidade*” do furo

Os autores estabeleceram funções semi-empíricas para a descrição da “*elipsidade*”. Um exemplo de tal função é a forma a seguir:

$$\frac{b}{a} = A + B \exp[-D(Fa)^p n] \quad (5.5-1)$$

onde n é o número de ciclos de carregamento e os parâmetros A , B , D , p precisam ser determinados a partir de um ensaio piloto em laboratório. Os autores não dão maiores detalhes sobre a determinação desses parâmetros e, seus valores não são apresentados em nenhum caso estudado.

Portanto, durante a presente análise, dispunha-se apenas de um gráfico de b/a versus o número de ciclos (figura 5.5-2). Assim, os pontos desse gráfico foram, então, utilizados para se estimar a “*elipsidade*” (b/a) para esse estudo de caso.

Figura 5.5-2 Variação da “*elipsidade*” em função dos ciclos de fadiga (Case,2002)

Devido ao fato do gráfico disponível (Figura 5.5-2) conter somente pontos até n igual a 20000 ciclos, a análise foi conduzida para valores máximos de n até próximos a este ponto.

Dadas às dificuldades citadas acima, este estudo de caso tem por objetivo apenas ilustrar a aplicação do método. Entende-se que numa análise mais rigorosa, uma função e os seus parâmetros, como por exemplo, a equação (5.5-1) deve ser identificada em laboratório através de ensaios pilotos. Dessa forma, tem-se que possíveis funções que descrevam com precisão a degradação do módulo de elasticidade usando a solução dos campos de tensões nas vizinhanças do furo possam ser avaliadas.

Tabela 5.5-1 Dados para o estudo de Caso 5

DADOS	
Material da lâmina unidirecional	AS-4 / PEEK
Espessura da lâmina	0,125 mm
Raio do furo	3,175 mm
Equação de fadiga da lâmina	$N = 10^{(Fa - An) / Bn}$
Sequência de laminação	$[45, 0, -45, 90]_s$
Temperatura de referência	25 °C
Temperatura de operação	25 °C
Modo de falha	Ruptura por tração na região do comprimento característico
Elemento crítico	Volume de material compreendido pelas camadas 0°
Função de falha	$Fa = \sigma_{1\ av}(r) / X_T$
Comprimento caract. b	2,153 mm
Amplitude de tensão	ver tabelas de $\sigma_a \times N$
R	0.1
f	não informada
E_1	134 GPa
E_2	8.9 GPa
G_{12}	5.1 GPa
ν_{12}	0.35
X_t	2090 MPa
X_c	1215 MPa
Y_t	80 MPa
Y_c	280 MPa
SS	80 MPa
α_1	$0.63 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
α_2	$29 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
X_n	451 MPa
Degradação do módulo E_2	-
Degradação do módulo G_{12}	-
Variação da elipsidade	Curva ajustada aos Pontos do gráfico da figura 5.5-2

5.5.1 Resultados do Estudo de Caso 5

Analogamente ao estudo de Caso 4, as figuras de 5.5-3 a 5.5-6 mostram as distribuições dos componentes de tensão e deformação normais na placa anisotrópica equivalente calculadas pela solução analítica de Lekhnitskii nas vizinhanças de um furo com raio igual a 3,18 mm.

Figura 5.5-3 Tensão global σ_x nas vizinhanças do furo

Figura 5.5-4 Tensão global σ_y nas vizinhanças do furo

Figura 5.5-5 Deformação global ϵ_x nas vizinhanças do furo

Figura 5.5-6 Deformação global ϵ_y nas vizinhanças do furo

A figura 5.5-7 mostra a distribuição de tensões nas lâminas críticas. Essas distribuições correspondem ao estado de tensão induzido, quando se aplica a carga axial de falha do laminado possuindo um entalhe circular (X_n) e, são utilizadas no cálculo do comprimento característico b e na função de falha no Elemento Crítico, F_a .

Figura 5.5-7 Tensões nas vizinhanças do furo nas lâminas críticas

A tabela 5.5-2 mostra os resultados para a vida em fadiga calculada para 5 diferentes níveis de tensão e a figura 5.5-8 mostra a tendência dos pontos calculados. Pode-se observar que ocorre uma boa concordância entre os valores calculados pelo SAFECom e pelos valores da literatura. Contudo, em função da reduzida quantidade de dados disponíveis relativos ao fenômeno de relaxação das tensões nas vizinhanças do furo, como discutido anteriormente, conclui-se que futuras investigações e melhorarias a esse respeito são necessárias.

Tabela 5.5-2 Amplitudes x número de ciclos

Presente Trabalho				S. Case [1]		
σ_a (MPa)	F_{avg}	N_{Calc}	Δ	σ_a (MPa)	F_a	N
406	0.8992	400	-2.89%	406	0.8992	412
361	0.8011	1516	2.12%	361	0.8011	1485
318	0.7043	5084	-3.34%	318	0.7043	5260
304	0.6734	18544	-	293	0.6493	85954
330	0.7310	3592	-	267	0.5916	1974200
				249	0.5513	16045000

Figura 5.5-8 Curva de fadiga do laminado

CAPÍTULO 6

6 Conclusões e Perspectivas para Trabalhos Futuros

Uma revisão bibliográfica detalhada dos principais trabalhos e métodos utilizados para a análise de dano e fadiga em materiais compósitos foi apresentada.

Dentre os trabalhos pesquisados, selecionou-se o realizado por Case (1996), bem como Reifsnider e Case (2002) para um estudo mais aprofundado. A metodologia proposta por eles baseia-se no conceito de Elemento Crítico e na resistência residual como medida do dano, e foi escolhida por apresentar grande versatilidade de adaptação a vários tipos de problemas de degradação de laminados compósitos e, também, por apresentar histórico de aplicações práticas de sucesso na indústria.

Um código computacional totalmente original, SAFECOM, foi desenvolvido com o objetivo inicial de implementar a metodologia básica da análise de dano pela resistência residual do elemento crítico. Este programa emprega a equação integral da resistência residual para casos de laminados poliméricos reforçados por fibras submetidos a cargas mecânicas cíclicas de amplitude constante para a determinação de vida em fadiga. Com relação a concentradores de tensão, foi implementado o problema de um laminado com um furo elíptico central. A fim de avaliar a funcionalidade do mesmo, estudos de casos foram conduzidos e comparados com dados da literatura. A grande maioria dos casos investigados mostraram uma excelente concordância entre os resultados obtidos pelo SAFECOM com os apresentados pela literatura. Porém, para um único caso, tem-se que informações adicionais e eventuais investigações experimentais são necessárias para aprimorar e perfazer verificações adicionais dessa funcionalidade do programa.

Portanto, com base nos resultados obtidos para os estudos de caso, conclui-se que o programa SAFECOM é uma ferramenta computacional extremamente estratégica para a previsão de vida de estruturas fabricadas em material compósito polimérico. Além disso, tem-se que o mesmo foi validado para alguns estudos de caso, necessitando ainda ser avaliado para outros casos.

Uma vantagem muito atrativa do SAFECOM é que o mesmo permite que outros tipos de problemas importantes possam ser facilmente avaliados. Para tal, basta acrescentar as sub-rotinas necessárias. Portanto, ao conhecer, para um dado problema, o Elemento Crítico, seu modo de falha, a função de falha e os mecanismos que podem causar aumento (ou diminuição) do seu valor, é possível desenvolver soluções para a análise de fadiga de um laminado com uma trinca passante, de uma junta colada ou unida mecanicamente, por exemplo.

Como discutido também, outros efeitos de degradação podem ser incorporados no SAFECom. Alguns exemplos são: delaminação (O'BRIEN, 1991); fluência (AKLONIS; MACKNIGHT, 1983), envelhecimento físico (GATES; FELDMAN, 1994) e carregamento em blocos.

Por fim, como perspectiva de trabalhos futuros, torna-se estratégico avaliar o SAFECom com resultados experimentais laboratoriais. Para tal, são necessárias investigações e ensaios, que permitam identificar com precisão:

- ✓ O Elemento Crítico, cuja falha representará a falha final do laminado estudado;
- ✓ O modo de falha do elemento crítico nas condições aplicadas;
- ✓ A função matemática que descreverá a falha;
- ✓ Os modos de dano e o mecanismo pelo qual os mesmos promovem as variações de tensão no Elemento Crítico e, portanto, na sua função de falha. Alguns exemplos são as micro-trincas na matriz, delaminação e relaxação de tensões, que podem causar mudanças nas distribuições de tensões do Elemento Crítico em função do tempo, dos ciclos de carregamento e das condições ambientais.

CAPÍTULO 7

7 Referências Bibliográficas

ADAM, T.; GATHERCOLE, N.; REITER, H.; HARRIS, B. *Life prediction for fatigue of T800/5245 carbon-fibre composites: I. Constant amplitude loading*, Int. J. Fatigue 16, 523–532, 1994.

ADAM, T.; GATHERCOLE, N.; REITER, H.; HARRIS, B. *Life prediction for fatigue of T800/5245 carbon-fibre composites: II. Variable amplitude loading*. Int. J. Fatigue 16, 533–547, 1994.

AKLONIS, J.J.; MACKNIGHT, W.J. *Introduction to Polymer Viscoelasticity*, 2nd ed., John Wiley, New York, 1983.

ALLEN, D.H.; HARRIS, C.E.; GROVES, S.E. *A thermomechanical constitutive theory for elastic composites with distributed damage-I. Theoretical development*, Int. J. Solids Struct. 23, 1301–1318, 1987a.

ALLEN, D.H.; HARRIS, C.E.; GROVES, S.E. *A thermomechanical constitutive theory for elastic composites with distributed damage- II. Application to matrix cracking in laminated composites*, Int. J. Solids Struct. 23, 1319–1338, 1987b.

ALLEN, D.H.; HIGHSMITH, A.L.; LO, D.C. *A continuum damage mechanics model for life prediction of laminated composites*. In: Cardon AH and Verchery G (eds), *Durability of polymer based composite systems for structural applications*, Proc of Int Colloquium, 27–31 Aug 1990, Brussels, Belgium, Elsevier, 119–128, 1990.

ALLIX, O.; CORIGLIANO, A. *Geometrical and interfacial nonlinearities in the analysis of delamination in composites*, Int. J. Solids Struct. 36, 2189–2216, 1999.

ALLIX, O.; LADEVÈZE, P. *Interlaminar interface modeling for the prediction of delamination*, Compos. Struct. 22, 235–242, 1992.

ALLIX, O.; LEVEQUE, D.; PERRET, L. *Identification and forecast of delamination in composite laminates by an interlaminar interface model*, Compos. Sci. Technol. 58, 671–678, 1998

ANDERSONS, J.; KORSGAARD, J. *The effect of stress ratio on durability and damage accumulation in GRP at uniaxial loading*. In: Degallaix S, Bathias C, Fougères R (eds), *Int Conf on Fatigue of Composites*. Proc, 3–5 June 1997, Paris, France, La Société Française de Metallurgie et de Matériaux, 315–322 1997.

BALDWIN, H. 787 Dreamliner™ Unmatched Economics, Performance and Passenger Appeal. Aviation Week & Space Technology Market Supplement. 14 March 2005.

RAKOW, J.; PETTINGER, A. *Failure Analysis of Composite Structures in Aircraft Accidents*. Proceedings of the ISASI 2006 Annual Air Safety Seminar. September 2006. p. 2.

BARNARD, P.M.; BUTLER, R.J.; CURTIS, P.T. *Fatigue scatter of UD glass epóxi, a fact or fiction?* In: Marshall IH (ed), Composite Structures 3, Proc of 3rd Int Conf on Composite Structures (ICCS-3), 9–11 September 1985, Scotland, Elsevier, 69–82, 1985.

BARTLEY-CHO, J.; LIM, S.G.; HAHN, H.T.; SHYPRYKEVICH, P. *Damage accumulation in quasi-isotropic graphite/epóxi laminates under constant-amplitude fatigue and block loading*, Compos. Sci. Technol. 58, 1535–1547, 1998.

BEAUMONT, P.W.R. *The fatigue damage mechanics of composite laminates*. In: Wang A.S.D. and Haritos G.K. (eds), Damage Mechanics in Composites. Presented at the Winter Annual Meeting of the ASME, 13–18 Dec 1987, Boston MA, ASME, 53–63.

BEAUMONT, P.W.R. *The mechanics of fatigue damage in structural composite materials*. In: Fuller J, Gruninger G, Schulte K, Bun-sell AR, Massiah A (eds), Developments in the science and technology of composite materials. Proc of 4th European Conf on Composite Materials (ECCM/4), 25–28 Sept. 1990, Stuttgart, Elsevier Appl Sci, 195–205.

BEAUMONT, P.W.R.; SPEARING, S.M. *Development of fatigue damage mechanics for application to the design of structural composite components*. In: Vautrin A and Sol H (eds), Mechanical identification of composites. Proc of the European Mechanics Colloquium 269, 3–6 Dec 1990, Saint-Etienne, France, Elsevier, 311–326.

BEHESHTY, M.H.; HARRIS, B. *A constant-life model of fatigue behavior for carbon-fibre composites: the effect of impact damage*, Compos. Sci. Technol. 58, 9–18, 1998.

BEHESHTY, M.H.; HARRIS, B.; ADAM, T. *An empirical fatigue life model for high-performance fibre composites with and without impact damage*, Composites, Part A 30, 971–987, 1999.

BERGMANN, H.W.; PRINZ, R. *Fatigue life estimation of graphite/epóxi laminates under consideration of delamination growth*, Int. J. Numer. Methods Eng. 27, 323–341, 1989.

BINER, S.B.; YUHAS, V.C. *Growth of short fatigue cracks at notches in woven fiber glass reinforced polymeric composites*, J. Eng. Mater. Technol. 111, 363–367, 1989.

BOND, I.P. *Fatigue life prediction for GRP subjected to variable amplitude loading*, Composites, Part A 30, 961–970, 1999.

BONORA, N.; LA BARBERA, A.; MARCHETTI, M.; MILELLA, P. *Experimental verification and theoretical simulation of fracture behaviors of composite materials*, Compos. Struct. 23, 87–97, 1993.

BRILLAUD, J.; EI MAHI, A. *Numerical simulation of the influence of stacking sequence on transverse ply cracking in composite laminates*, Compos. Struct. 17, 23–35, 1991.

BRONDSTED, P.; ANDERSEN, S.I.; LILHOLT, H. *Fatigue damage accumulation and lifetime prediction of GFRP materials under block loading and stochastic loading*. In: Andersen SI, Brøndsted P, Lilholt H, Lystrup Aa, Rheinlander JT, Sorensen BF, Toftegaard H (eds), Polymeric Composites-Expanding the Limits. Proc of 18th Riso Int Symp on Materials Science, 1–5 Sept 1997, Roskilde, Denmark, Riso Int Lab, 269–278, 1997a.

BRONDSTED, P.; LILHOLT, H.; ANDERSEN, S.I. *Fatigue damage prediction by measurements of the stiffness degradation in polymer matrix composites*. In: Degallaix S, Bathias C, Fougères R (eds), International Conference on fatigue of composites. Proc, 3–5 June 1997b, Paris, France, La Société Française de Metallurgie et de Matériaux, 370–377, 1997.

BUCINELL, R.G. *Development of a stochastic free edge delamination model for laminated composite materials subjected to constant amplitude fatigue loading*, J. Compos. Mater. 32, 1138–1156, 1998.

BROUTMAN, L.J.; SAHU S. *A new theory to predict cumulative fatigue damage in fiberglass reinforced plastics*, Composite Materials: Testing and Design (2nd Conference), ASTM STP497, 170–188, 1972.

CAPRINO, G. *Predicting fatigue life of composite laminates subjected to tension-tension fatigue*, J. Compos. Mater. 34, 1334–1355, 2000.

CAPRINO, G.; D'AMORE, A. *Flexural fatigue behavior of random continuous-fibre-reinforced thermoplastic composites*, Compos. Sci. Technol. 58, 957–965, 1998.

CAPRINO, G.; GIORLEO, G. *Fatigue lifetime of glass fabric/ epóxi composites*, Composites, Part A 30, 299–304, 1999.

CAPRINO, G.; D'AMORE, A.; FACCIOLO, F. *Fatigue sensitivity of random glass fibre reinforced plastics*, J. Compos. Mater. 32, 1203–1220, 1998.

CARON, J.F.; EHRLACHER, A. *Modeling of fatigue microcracking kinetics in crossply and experimental validation*. In: Degallaix S, Bathias C, Fougères R (eds.), Int Conf on Fatigue of Composites. Proc, 3–5 June 1997, Paris, France, La Société Française de Metallurgie et de Matériaux, 378–385, 1997.

CARSWELL, W.S. *Damage mechanics and composite behavior*, Compos. Struct. 10, 335–342, 1988.

CASE, W.S. *Mechanics of Fiber-Controlled Behavior in Polymeric Composite Materials*. DPh Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1996.

CHOU, P.C.; CROMAN, R. *Residual Strength in Fatigue Based on the Strength-Life Equal Rank Assumption*, J. Compos. Mater. 12, 177–194, 1978.

CHOU, P.C.; CROMAN, R. *Degradation and sudden-death models of fatigue of graphite/epoxy composites*. In: Tsai SW (ed), *Composite materials: Testing and design* (5th Conf) ASTM STP 674, Philadelphia, Am Soc for Testing and Materials, 431–454, 1979.

COATS, T.W.; HARRIS, C.E. *Experimental verification of a progressive damage model for IM7/5260 laminates subjected to tension-tension fatigue*, J. Compos. Mater. 29, 280–305, 1995.

CHRISTENSEN, R.M. *Lifetime Predictions for Polymers and Composites under Constant Load*, J. Rheol., 25, No. 5, pp. 517–528, 1981.

DAHLEN, C.; SPRINGER, G.S. *Delamination growth in composites under cyclic loads*, J. Compos. Mater. 28, 732–781, 1994.

DANIEL, I.M.; CHAREWICZ, A. *Fatigue damage mechanisms and residual properties of graphite/epoxy laminates*, Eng. Fract. Mech., 25, 793–808, 1986.

DEGRIECK, J.; PAEPEGEM, W.V. *Fatigue damage modeling of fibre-reinforced composite materials: Review*, ASME, Appl Mech Rev, 54, no 4, 2001.

DIAO, X.; LESSARD, L.B.; SHOKRIEH, M.M. *Statistical model for multiaxial fatigue behavior of unidirectional plies*, Compos. Sci. Technol. 59, 2025–2035, 1999.

DIAO, X.; YE L.; MAI, Y.W. *A statistical model of residual strength and fatigue life of composite laminates*, Compos. Sci. Technol. 54, 329–336, 1995.

DOWLING, N.E. *Mechanical Behaviour of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue*. Prentice Hall, 2nd ed., 1999.

EI MAHI, A.; BERTHELOT, J.M.; BRILLAUD, J. *Stiffness reduction and energy release rate of cross-ply laminates during fatigue tests*, Compos. Struct. 30, 123–130, 1995.

ELLYIN, F.; EL-KADI, H. *A fatigue failure criterion for fiber reinforced composite laminae*, Compos. Struct. 15, 61–74, 1990.

ELLYIN, F.; KUJAWSKI, D. *Fatigue testing and life prediction of fibreglass-reinforced composites*. In: Neale KW and Labossiere P (eds), 1st Int Conf on Advanced Composite Materials in Bridges and Structures (ACMBS-I), 1992, Sherbrooke, Quebec, Canada, Canadian Soc for Civil Eng, 111–118, 1992.

EL-ZEIN, M.S.; REIFSNIDER, K.L. *The Strength Prediction of Composite Laminates Containing a Circular Hole*, ASTM, 24-30, 1990.

ESHELBY, J.D.; The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. Proc Royal Society, London A 241, 376-396, 1957.

EPAARACHCHI, J.A.; CLAUSEN, P.D. *A new approach to a fatigue damage model for glass-fibre reinforced plastic composites*. In: Hui D (ed), Proc of 7th Int Conf on Composites Engineering (ICCE/7), Denver CO, 2–8 July 2000, 211–212, 2000.

FARROW, I.R. *Damage accumulation and degradation of composite laminates under aircraft service loading: assessment and prediction*. Volumes I and II. Cranfield Inst of Tech, PhD thesis, 1989.

FATEMI, A.; YANG, L. *Cumulative fatigue damage and life prediction theories: A survey of the state of the art for homogeneous materials*, Int. J. Fatigue 20, 9–34, 1998.

FAZZINO, P; REIFSNIDER, K.L. *Electrochemical impedance spectroscopy detection of damage in out of plane fatigued fiber reinforced composite materials*. Appl. Compos. Mater., 15, 127-138 (2008).

FAWAZ, Z.; ELLYIN, F. *Fatigue failure model for fibre-reinforced materials under general loading conditions*, J. Compos. Mater. 28, 1432–1451, 1994.

FENG, X.; GILCHRIST, M.D.; KINLOCH, A.J.; MATTHEWS, F.L. *Development of a method for predicting the fatigue life of CFRP components*. In: Degallaix S, Bathias C, Fougere R (eds), Int Conf on Fatigue of Composites. Proc, 3–5 June 1997, Paris, France, La Societe Française de Metallurgie et de Matériaux, 407–414, 1997.

FONG, J.T. *What is fatigue damage?* In: Reifsnider, KL, Damage in composite materials. ASTM STP 775. Am Soc for Testing and Materials, 243–266, 1982.

GAMBY, D.; HENAFF-GARDIN, C.; LAFARIE-FRENOT, M.C.; TAHIRI, V.; THEVENET, D. *A model for damage growth in aeronautical composite laminates subjected to tensile fatigue loading*. In: Degallaix S, Bathias C, Fougères R (eds.), Int Conf on Fatigue of Composites. Proceedings, 3–5 June 1997, Paris, France, La Société Française de Metallurgie et de Matériaux, 386–392, 1997.

GATES, T. S.; FELDMAN, M. *The effects of physical aging at elevated temperatures on the viscoelastic creep of IM7/K3B*, submitted for publication in ASTM STP Composite Materials: Testing and Design, eds. R. Deo and C. Saff, 1994.

HAHN, H.T.; KIM, R.Y. *Proof testing of composite materials*, J. Compos. Mater. 9, 297–311, 1975.

HAHN, H.T.; KIM, R.Y. *Fatigue behavior of composite laminates*, J. Compos. Mater. 10, 156–180, 1976.

HALPIN, J.C.; JERINA, K.L.; JOHNSON, T.A. *Characterization of composites for the purpose of reliability evaluation*. In: Analysis of the test methods for high modulus fibers and composites. ASTM STP 521, 5–64, 1973.

HALVERSON, H.G.; CURTIN, W.A.; REIFSNIDER, K.L. *Fatigue life of individual composite specimens based on intrinsic fatigue behavior*, Int. J. Fatigue 19, 369–377, 1997.

HANSEN, U. *Damage development in woven fabric composites during tension-tension fatigue*. In: Andersen SI, Brøndsted P, Lilholt H, Lystrup Aa, Rheinlander JT, Sørensen BF, Toftegaard H (eds), Polymeric Composites-Expanding the Limits. Proc of 18th Riso "Int Symp on Materials Science, 1–5 Sept 1997, Roskilde, Denmark, Riso Int Lab, 345–351.

HANSEN, U. *Damage development in woven fabric composites during tension-tension fatigue*, J. Compos. Mater. 33, 614–639, 1999.

HARRIS, B. *Fatigue behavior of polymer-based composites life prediction methods*. AIB-Vinçotte Leerstoel, 2 maart 1995, Belgium, Nationaal Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek, p 28, 1985.

HASHIN, Z. *Cumulative damage theory for composite materials: residual life and residual strength methods*, Compos. Sci. Technol. 23, 1–19, 1985.

HASHIN, Z.; ROTEM, A. *A fatigue criterion for fibre reinforced composite materials*, J. Compos. Mater. 7, 448–464, 1973.

HENAFF-GARDIN, C.; LAFARIE-FRENOT, M.C.; GOUPILLAUD, I. *Prediction of cracking evolution under uniaxial fatigue loading in crossply composite laminates*. In: Degallaix S, Bathias C, Fougères R (eds), Int Conf on Fatigue of Composites: Proc, 3–5 June 1997, Paris, France, La Société Française de Metallurgie et de Matériaux, 189–196, 1997.

HENAFF-GARDIN, C.; LAFARIE-FRENOT, M.C.; GOUPILLAUD, I. *The use of a characteristic damage variable in the study of transverse cracking development under fatigue loading in cross-ply laminates*. In: Proc of 2nd Int Conf on Fatigue of Composites. 4–7 June 2000, Williamsburg, 7.4–7.5, 2000.

HIGHSMITH, A.L.; REIFSNIDER, K.L. *Stiffness-reduction mechanisms in composite laminates*. In: Reifsnider KL (ed), *Damage in composite materials*. ASTM STP 775. Am Soc for Testing and Materials, 103–117, 1982.

HILL, R. *A Theory of Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals*, Proc. Roy. Soc., Series 14, 193, 281–297, 1948.

HORTON, P. E.; WHITEHEAD, R. *Damage Tolerance of Composites*, Vol. I and II, AFWAL, TR-87-3030, Air Force Wright Aeronautical Laboratories, Akron, OH, 1988.

HUANG, Z.Q.; NIE, G.H.; CHAN, C.K. *An exact solution for stresses in cracked composite laminates and evaluation of the characteristic damage state*. Composites Part B: Engineering 42, 1008–1014, 2011.

HWANG, W.; HAN, K.S. *Cumulative damage models and multi-stress fatigue life prediction*, J. Compos. Mater., 20, 125–153, 1986a.

HWANG, W.; HAN, K.S. *Fatigue of composites – Fatigue modulus concept and life prediction*, J. Compos. Mater. 20, 154–165, 1986b.

JEN, M.H.R.; LEE, C.H. *Strength and life in thermoplastic composite laminates under static and fatigue loads. Part I: Experimental*, Int. J. Fatigue 20, 605–615, 1998a.

JEN, M.H.R.; LEE, C.H. *Strength and life in thermoplastic composite laminates under static and fatigue loads. Part II: Formulation*, Int. J. Fatigue 20, 617–629, 1998b.

JOFFE, R.; VARNA, J. *Analytical modeling of stiffness reduction in symmetric and balanced laminates due to cracks in 90° layers*, Compos. Sci. Technol. 59, 1641–1652, 1999.

KACHANOV L.M. *Introduction to Continuum Damage Mechanics*, Martinus Nijhoff, Boston, 1986.

KAM, T.Y.; CHU, K.H.; TSAI, S.Y. *Fatigue reliability evaluation for composite laminates via a direct numerical integration technique*, Int. J. Solids Struct. 35, 1411–1423, 1998.

KAM, T.Y.; TSAI S.Y.; CHU, K.H. *Fatigue reliability analysis of composite laminates under spectrum stress*, Int. J. Solids Struct. 34, 1441–1461, 1997.

KASHTALYAN, M.; SOUTIS, C. *Stiffness degradation in cross-ply laminates damaged by transverse cracking and splitting*, Composites, Part A 31, 335–351, 2000.

KAWAI, M. *Damage mechanics model for off-axis fatigue behavior of unidirectional carbon fiber-reinforced composites at room and high temperatures*. In: Massard T and Vautrin A (eds), Proc of 12th Int Conf on Composite Materials (ICCM-12). Paris, France, 5–9 July 1999, 322

KEDWARD, K.T.; BEAUMONT, P.W.R. *The treatment of fatigue and damage accumulation in composite design*, Int. J. Fatigue 14, 283–294, 1992.

LADEVÈZE, P. *A damage approach for composite structures: theory and identification*. In: Vautrin A and Sol H (eds.), *Mechanical identification of composites*. Proc of European Mechanics Colloquium 269, 3–6 Dec 1990, St-Etienne, France, Elsevier, 44–57, 1990.

LADEVÈZE, P. *A damage computational method for composite structures*, Comput. Struct. 44, 79–87, 1992.

LAWRENCE, WU C.M. *Thermal and mechanical fatigue analysis of CFRP laminates*, Compos. Struct. 25, 339–344, 1993.

LEE, J.W.; ALLEN, D.H.; HARRIS, C.E. *Internal state variable approach for predicting stiffness reductions in fibrous laminated composites with matrix cracks*, J. Compos. Mater. 23, 1273–1291, 1989.

LEE, L.J.; FU, K.E.; YANG, J.N. *Prediction of fatigue damage and life for composite laminates under service loading spectra*, Compos. Sci. Technol. 56, 635–648, 1996.

LEGAUT, M. 2008 SPE Automotive Composites Conference and Exhibition. Composites Technology. 1 December 2008. 9 May 2009 < <http://www.compositesworld.com/articles/2008-spe-automotive-composites-conference-amp-exhibition.aspx>>, 2008

LEKHNITSKII, S. G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Mir Publishers, Moscow, 1981.

LEKHNITSKII, S. G. *Anisotropic Plates*, (translated from second Russian edition by S.W. Tsai and T. Cheron), Godon and Breach, Science Publishers, Inc., New York, 1968.

LIU, B.; LESSARD, L.B. *Fatigue and damage-tolerance analysis of composite laminates: stiffness loss, damage-modeling, life prediction*, Compos. Sci. Technol. 51, 43–51, 1994.

MIYANO, Y.; M.C. MURRAY, M.K.; ENYAMA, J.; NAKADA, M. *Loading rate and temperature dependence on flexural fatigue behavior of a satin woven CFRP laminate*, J. Compos. Mater. 28, 1250–1260, 1994.

MIYANO, Y.; NAKADA, M.; KUDOH, H.; MUKI, R. *Prediction of tensile fatigue life for unidirectional CFRP*, J. Compos. Mater. 34, 538–550, 2000.

MU, P. WAN, X.; ZHAO, M. *A New Pair of Cumulative Fatigue Damage Models for Composite Materials*. Advanced Materials Research (Volumes 160 - 162), Materials Science and Engineering Applications, 226-230, 2011.

NASH, L.K. *Elements of Statistical Thermodynamics*, 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Co. Inc., Reading, MA, 1974.

NUISMER, R.J.; TAN, S.C. *Constitutive relations of a cracked composite lamina*, J. Compos. Mater. 22, 306–321, 1988.

O'BRIEN, T.K. *Delamination of composite materials*, Fatigue of Composite Materials, Vol. 4 of Composite Materials Series, ed. K. L. Reifsnider, Elsevier, New York, 181-198, 1991.

OGIN, S.L.; SMITH, P.A.; BEAUMONT, P.W.R. *Matrix cracking and stiffness reduction during the fatigue of a (0/90)s GFRP laminate*, Compos. Sci. Technol. 22, 23–31, 1985.

OWEN, M.J.; BISHOP, P.T. *Prediction of static and fatigue damage and crack propagation in composite materials*. In: Advisory Group for Aerospace Research and Development (AGARD), Failure modes of composite materials with organic matrices and their consequences on design. AGARD Conf Proc No 163 (CP-163), 1.1-1.12, 1974.

PHILIPPIDIS, T.P.; VASSILOPOULOS, A.P. *Fatigue strength prediction under multiaxial stress*, J. Compos. Mater. 33, 1578–1599, 1999.

PLUMTREE, A.; CHENG, G.X. *A fatigue damage parameter for off-axis unidirectional fibre-reinforced composites*, Int. J. Fatigue 21, 849–856, 1999.

POST, N.L.; CASE, S.W.; LESKO, J.J. *Modeling the variable amplitude fatigue of composite materials: A review and evaluation of the state of the art for spectrum loading*. International Journal of Fatigue 30, 2064-2086, 2008.

PRADHAN, B.; VENU KUMAR, N.; RAO, N.S. *Stiffness degradation resulting from 90° ply cracking in angle-ply composite laminates*, Compos. Sci. Technol. 59, 1543–1552, 1999.

PRINZ, R. *Damage rates for interlaminar failure of fatigue CFRP laminates*. In: Fuller J, Gruninger G, Schulte K, Bunsell AR, Massiah A, (eds), *Developments in the science and technology of composite materials*. Proc of 4th European Conf on Composite Materials (ECCM/4), 25–28 Sept 1990, Stuttgart, Elsevier Appl Sci, 189–193.

PICASSO, B.; PRIOLO, P. *Damage assessment and life prediction for graphite-PEEK quasi-isotropic composites*, American Society of Mechanical Engineers, Pressure Vessels and Piping Division (Publication) PVP v 146. Published by ASME, New York, 183-188, 1988.

QUARESIMIN, M.; SUSMEL, L.; TALREJA, R. *Fatigue behaviour and life assessment of composite laminates under multiaxial loadings*. Fourth International Conference on Fatigue of Composites (ICFC4), International Journal of Fatigue 32, 2010, 2-16.

REIFSNIDER, K.L. *Damage in Composite Materials: Basic Mechanics, Accumulation, Tolerance and Characterization*, ASTM 775, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1982.

REIFSNIDER, K.L. *The critical element model: a modeling philosophy*, Eng. Fract. Mech. 25, 739–749, 1986.

REIFSNIDER, K.L.; STINCHCOMB, W.W. *A Critical Element Model of the Residual Strength and Life of Fatigue-Loaded Composite Coupons*, in *Composite materials: Fatigue and Fracture*, ASTM STP 907, H.T. Hahn, Ed., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1986.

REIFSNIDER, K.L. *Life prediction analysis: directions and divagations*. In: Matthews FL, Buskell NCR, Hodgkinson JM, Morton J (eds), 6th Int Conf on Composite Materials (ICCM-VI) and 2nd European Conf on Composite Materials (ECCM-II): Volume 4. Proc, 20–24 July 1987, London, UK, Elsevier, 4.1–4.31.

REIFSNIDER, K.L. *Fatigue of Composite Materials*, Elsevier Science, New York, 1991.

REIFSNIDER, K.L. *Performance Simulation of Polymer-Based Composite Systems*, in *Durability of Polymer-Based Composite Systems for Structural Applications*, A.H. Cardon and G. Verchery, Eds., Elsevier Applied Science, New York, 3-26, 1991a.

REIFSNIDER, K.L. *Fatigue of Composite Materials*, Elsevier Science, London, 1991b.

REIFSNIDER, K.L.; GAO, Z. *A micromechanics model for composites under fatigue loading*, Int. J. Fatigue 13, 149–156, 1991.

REIFSNIDER, K.L. *Use of Mechanistic Life Prediction Methods for the Design of Damage Tolerant Composite Material Systems*, in *Cyclic Deformation, Fracture and Nondestructive Evaluation of Advanced Materials*, ASTM STP 1157, M.R. MITCHELL and O. Buck, Eds., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 205-223, 1992.

REIFSNIDER, K.L. CASE, S.W.; IYENGAR, N. *Recent Advances in Composite Damage Mechanics*, Conference on Spacecraft Structures, European Space Agency, The Netherlands 1996.

REIFSNIDER, K.L. *Durability and Damage Tolerance: Testing, Simulation, and Other Virtual Realities*, in *Composite Materials: Testing and Design*, Vol. 13, ASTM STP 1242, S.J. HOOPER, Ed., American Society for Testing and Materials, 45-59, 1997.

REIFSNIDER, K.L. CASE, S.W. *Damage Tolerance and Durability of Material Systems*, Wiley & Sons, USA, 2002.

REIFSNIDER, K.L.; MAJUMDAR, P. *Material State Change Relationships to Fracture Path Development for Large-Strain Fatigue of Composite Materials*. *Mechanics of Composite Materials*, 47, No. 1, (Russian Original Vol. 47, No. 1, January-February, 2011), 2011.

REUTERS. *Future Material Needs for the Global Wind Energy Market*, 2008-2013. <http://www.reuters.com/article/pressRelease/idUS121554+11-Mar-2009+BW20090311>, 2009

ROTEM, A. *Fatigue and residual strength of composite laminates*, *Eng. Fract. Mech.* 25, 819–827, 1986.

ROTEM, A. *The fatigue behavior of composite laminates under various mean stresses*, *Compos. Struct.* 17, 113–126, 1991.

SCHAFF, J.R.; DAVIDSON, B.D. *Life prediction methodology for composite structures. Part I - Constant amplitude and two-stress level fatigue*, *J. Compos. Mater.* 31, 128–157, 1997a.

SCHAFF, J.R.; DAVIDSON, B.D. *Life prediction methodology for composite structures. Part II - Spectrum fatigue*, *J. Compos. Mater.* 31, 158–181, 1997b.

SCHON, J. *A model of fatigue delamination in composites*, *Compos. Sci. Technol.* 60, 553–558, 2000.

SEDRAKIAN, A.; BEN ZINEB, T.; BILLOET, J.L.; BOBET, V. *Fatigue behavior simulation of industrial composite parts*. In: *Proc of 2nd Int Conf on Fatigue of Composites*. 4–7 June 2000, Williamsburg, 4.5– 4.6, 2000.

SEDRAKIAN, A.; BEN ZINEB, T.; BILLOET, J.L.; SICOT, N.; LARDEUR, P. *A numerical model of fatigue behavior for composite plates: application to a three point bending test*. In: Degallaix S, Bathias C, Fougères R (eds), *Int Conf on fatigue of composites*. Proc, 3–5 June 1997, Paris, France, La Société Française de Metallurgie et de Matériaux, 415–423, 1997.

SENDECKYJ, G.P. *Fitting models to composite materials fatigue data*. In: Chamis CC (ed), *Test methods and design allowables for fibrous composites*. ASTM STP 734. Am Soc for Testing and Materials, 245–260, 1981.

SENDECKYJ, G.P. *Life prediction for resin-matrix composite materials*. In: Reifsnider KL (ed), *Fatigue of composite materials*. Composite Material Series 4. Elsevier, 431–483, 1990.

SHOKRIEH, M.M. *Progressive fatigue damage modeling of composite materials*. PhD thesis, McGill Univ, Montreal, Canada, 1996.

SHOKRIEH, M.M.; LESSARD, L.B. *Multiaxial fatigue behavior of unidirectional plies based on uniaxial fatigue experiments-I. Modeling*, Int. J. Fatigue 19, 201–207, 1997a.

SHOKRIEH, M.M.; LESSARD, L.B. *Multiaxial fatigue behavior of unidirectional plies based on uniaxial fatigue experiments-II. Experimental evaluation*, Int. J. Fatigue 19, 209–217, 1997b.

SHOKRIEH, M.M.; LESSARD, L.B. *Progressive fatigue damage modeling of composite materials, Part I: Modeling*, J. Compos. Mater. 34, 1056–1080, 2000a.

SHOKRIEH, M.M.; LESSARD, L.B. *Progressive fatigue damage modeling of composite materials, Part II: Material characterization and model verification*, J. Compos. Mater. 34, 1081–1116, 2000b.

SHOKRIEH, M.M.; LESSARD, L.B. *Residual fatigue life simulation of laminated composites*. In: Gawayed Y and Abd El Hady F (eds), *Proc of Int Conf on Advanced Composites (ICAC 98)*, 15–18 Dec 1998, Hurghada, Egypt, 79–86, 1998.

SIDOROFF, F.; SUBAGIO, B. *Fatigue damage modeling of composite materials from bending tests*. In: Matthews FL, Buskell NCR, Hodgkinson JM, Morton J (eds), *6th Int Conf on Composite Materials (ICCM-VI) & Second European Conf on Composite Materials (ECCM-II): Volume 4*. Proc, 20-24 July 1987, London, UK, Elsevier, 4.32–4.39, 1987.

SIH, G.C.; PARIS, P.C.; IRWIN, G.R. *On cracks in Rectilinearly Anisotropic Bodies*, Int. J. Fracture mech., 1, pp. 189-203, 1965.

SIMONDS, R.A.; STINCHCOMB, W.W. *Response of Notched AS4/PEEK Laminates to Tension/Compression Loading*, *Advances in Thermoplastic Matrix Composite Materials*, ASTM STP 1044, G.M. Newas, Ed., ASTM, Philadelphia, 133-145, 1989.

SMITH, P.A.; OGIN, S.L. *On transverse matrix cracking in cross-ply laminates loaded in simple bending*, *Composites, Part A* 30, 1003–1008, 1999.

SPEARING, S.M.; BEAUMONT, P.W.R. *Fatigue damage mechanics of composite materials. I: Experimental measurement of damage and post-fatigue properties*, Compos. Sci. Technol. 44, 159–168, 1992a.

SPEARING, S.M.; BEAUMONT, P.W.R. *Fatigue damage mechanics of composite materials. Part III: Prediction of post-fatigue strength*, Compos. Sci. Technol. 44, 299–307, 1992b.

SPEARING, S.M.; BEAUMONT, P.W.R.; ASHBY, M.F. *Fatigue damage mechanics of composite materials. II: A damage growth model*, Compos. Sci. Technol. 44, 169–177, 1992a.

SPEARING, S.M.; BEAUMONT, P.W.R.; SMITH, P.A. *Fatigue damage mechanics of composite materials. Part IV: Prediction of postfatigue stiffness*, Compos. Sci. Technol. 44, 309–317, 1992b.

SUBRAMANIAN, S.; REIFSNIDER, K.L.; STINCHCOMB, W.W. *A cumulative damage model to predict the fatigue life of composite laminates including the effect of a fibre-matrix interphase*, Int. J. Fatigue 17, 343–351, 1995.

TALREJA, R. *Stiffness properties of composite laminates with matrix cracking and interior delamination*, Eng. Fract. Mech. 25, 751–762, 1986.

TALREJA, R. *Damage mechanics of composite materials based on thermodynamics with internal variables*. In: Cardon AH and Verchery G (eds.), *Durability of polymer based composite systems for structural applications*. Proc of the Int Colloquium, 27–31 Aug 1990, Brussels, Belgium, Elsevier, 65–79, 1990.

TALREJA, R. *Fatigue damage evolution in composites-A new way forward in modeling*. In: Proc of 2nd Int Conf on Fatigue of Composites. 4–7 June 2000, Williamsburg, 9.1, 2000.

TALREJA, R.; YALVAC, S.; YATS, L.D.; WETTERS, D.G. *Transverse cracking and stiffness reduction in cross-ply laminates of different matrix toughness*, J. Compos. Mater. 26, 1644–1663, 1992.

THIONNET, A.; RENARD, J. *Laminated composites under fatigue loading: a damage development law for transverse cracking*, Compos. Sci. Technol. 52, 173–181, 1994.

THIONNET, A.; RENARD, J. *Modeling of the fatigue behavior of laminated composite structures*. In: Degallaix S, Bathias C, Fougères R (eds), *Int Conf on Fatigue of Composites*. Proc, 3–5 June 1997, Paris, France, La Société Française de Metallurgie et de Matériaux, 363–369.

THIONNET, A.; RENARD, J. *Modeling of fatigue behavior in composite laminates*. In: Massard T and Vautrin A (eds), Proc of 12th Int Conf on Composite Materials (ICCM-12). Paris, France, 5–9 July 1999, p. 363, 1999.

VAN PAEPEGEM, W.; DEGRIECK, J. *Numerical modeling of fatigue degradation of fibre-reinforced composite materials*. In: Topping BHV (ed), Proc of 5th Int Conf on Computational Structures Technology. Volume F: Computational Techniques for Materials, Composites and Composite Structures, Leuven, 6–8 Sept 2000, Civil Comp Press, 319–326, 2000b.

VAN PAEPEGEM, W.; DEGRIECK, J. *Experimental setup for and numerical modeling of bending fatigue experiments on plain woven glass/epóxi composites*, Compos. Struct. 51,1–8, 2001.

VIEILEVIGNE, S.; JEULIN, D.; RENARD, J.; SICOT, N. *Modeling of the fatigue behavior of a unidirectional glass epóxi composite submitted to fatigue loadings*. In: Degallaix S, Bathias C, Fougères R (eds), Int Conf on Fatigue of Composites. Proc, 3–5 June 1997, Paris, France, La Société Française de Metallurgie et de Matériaux, 424–430, 1997.

VURE, N.R.S. *Effect of Cooling Rate and Stacking Sequence on the Fatigue Behavior of Notched Quasi-Isotropic APC-2 Laminates*, M.S. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1993.

WEST, K. Boeing 777 Lights up with Plastics. Seattle Post-Intelligencer. 1 June 1993. 9 May 2009 < <http://www.seattlepi.com/archives/1993/9306010037.asp>>

WHITNEY, J.M.; NUISMER, R.J. *Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations*, Journal of Composite Materials, Volume 8, 1974) 253-265, 1974.

WHITWORTH, H.A. *Modeling stiffness reduction of graphite epóxi composite laminates*, J. Compos. Mater. 21, 362–372, 1987.

WHITWORTH, H.A. *Cumulative damage in composites*, J. Eng. Mater. Technol. 112, 358–361, 1990.

WHITWORTH, H.A. *A stiffness degradation model for composite laminates under fatigue loading*, Compos. Struct. 40, 95–101, 1998.

WHITWORTH, H.A. *Evaluation of the residual strength degradation in composite laminates under fatigue loading*, Compos. Struct. 48, 261–264, 2000.

WRÓBEL, G.; KACZMARCZYK, J.; STABIK, J.; ROJEK, M. *Numerical models of polymeric composite to simulate fatigue and ageing processes*. Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering 34/1 31-38, 2009.

WU, F.; YAO, W. *A fatigue damage model of composite materials*. Fourth International Conference on Fatigue of Composites (ICFC4), International Journal of Fatigue , 32, 2010, 134-138, 2010.

XIAO, J.; BATHIAS, C. *Fatigue behavior of unnotched and notched woven glass/epóxi laminates*, Compos. Sci. Technol. 50, 141–148, 1994a.

XIAO, J.; BATHIAS, C. *Fatigue damage and fracture mechanism of notched woven laminates*, J. Compos. Mater. 28, 1127–1139, 1994b.

XIAO, X.R. *Modeling of load frequency effect on fatigue life of thermoplastic composites*, J. Compos. Mater. 33, 1141–1158, 1999.

YANG, J.N.; JONES, D.L. *Load sequence effects on the fatigue of unnotched composite materials*. In: Lauraitis K.N. (ed), Fatigue of fibrous composite materials. ASTM STP 723. Philadelphia, Am Soc for Testing and Materials, 213–232, 1981.

YANG, J.N.; JONES, D.L.; YANG, S.H.; MESKINI, A. *A stiffness degradation model for graphite/epóxi laminates*, J. Compos. Mater. 24, 753–769, 1990.

YANG, J.N.; LEE, L.J.; SHEU, D.Y. *Modulus reduction and fatigue damage of matrix dominated composite laminates*, Compos. Struct. 21, 91–100, 1992.

YANG, J.N. *Fatigue and residual strength degradation for graphite/epóxi composites under tension-compression cyclic loadings*, J. Compos. Mater. 12, 19–39, 1978.

YAO, W.X.; HIMMEL, N. *A new cumulative fatigue damage model for fibre-reinforced plastics*, Compos. Sci. Technol. 60, 59–64, 2000.

ANEXO A

Fluxogramas computacionais

ANEXO A

Este anexo descreve as principais sequências de operações realizadas pela atual versão do SAFECom.

A.1 Rotina Scan

Esta rotina é utilizada na análise tipos 3 e 4, ou seja, para laminados com um furo circular central. A rotina *Scan* divide a circunferência do círculo em pontos discretos, calcula as tensões nesses pontos, identifica a camada e o ângulo de maior tensão e o valor desta última. Posteriormente, essas informações são utilizadas pela rotina *AzimutalStress* para estabelecer o eixo no qual o critério de falha será aplicado.

Figura A1-1 Sub-rotina Scan

A.2 Rotina TensãoCirc

Esta sub-rotina utiliza a formulação de Lekhnitiskii para calcular as tensões na borda da circunferência da placa anisotrópica equivalente. Em seguida, ela chama a sub-rotina *Lamina* para calcular as tensões na circunferência de cada camada.

Figura A2-1 Sub-rotina TensaoCirc

A.3 Rotina Lamina

Esta sub-rotina incorpora a Teoria Clássica de Laminados para calcular as rigidezes e as tensões num laminado compósito reforçado por fibras contínuas.

Figura A3-1 Sub-rotina Lamina

Figura A3-1 Sub-rotina Lamina (continuação)

A.4 Rotina AzimutalStress

A rotina *AzimutalStress* define os pontos discretos do eixo azimutal crítico e chama *StressDist*, *Polinomio* e *CompriC*. A rotina *StressDist* calcula as tensões no eixo azimutal crítico pela formulação de Lekhnitskii. A rotina *Polinomio* gera a curva contínua de tensão nas vizinhanças do furo e, a rotina *CompriC* calcula o comprimento característico a partir dos critérios de falha de um laminado com furo circular central.

Figura A4-1 Sub-rotina AzimutalStress

A.5 Rotina StressDist

A rotina *StressDist* calcula as tensões nos pontos discretos do eixo azimutal crítico pela formulação de Lekhnitskii.

Figura A5-1 Sub-rotina StressDist

A.6 Rotina Polinomio

A rotina *Polinomio* ajusta uma curva polinomial de grau 6 aos pontos discretos de tensão calculados nas vizinhanças do furo pela rotina *StressDist*.

Figura A6-1 Sub-rotina Polinomio

A.7 Rotina Compric

A rotina *Compric* estima o comprimento característico, b , a partir do critério de falha do laminado com furo circular central e da resistência do laminado com entalhe.

Figura A7-1 Sub-rotina Compric

A.8 Rotina AnaliseFadiga

Esta é a principal rotina do algoritmo, pois implementa o uso do modelo da resistência residual desenvolvido na seção 4, fornecendo a vida estimada do laminado sob as condições dadas.

Figura A8-1 Sub-rotina AnaliseFadiga

Figura A8-1 Sub-rotina AnaliseFadiga (continuação)

Figura A8-1 Sub-rotina AnaliseFadiga (continuação)

A.9 Rotina Ellipticity

Esta rotina visa estimar a “*elipsidade*” do furo a cada ciclo de carga aplicado, como explicado na seção 5.5.

Figura A9-1 Sub-rotina “*elipsidade*”

A.10 Rotina Stiff

Esta rotina visa estimar os valores das rigidezes transversais e de cisalhamento das lâminas de compósito com ângulo de laminação diferentes de 0° , E_2 e G_{12} . Essas grandezas são corrigidas após cada ciclo de carga para se considerar o acúmulo de micro-trincas na matriz. Após atualizar as rigidezes, as tensões nas camadas são também atualizadas.

Figura A10-1 Sub-rotina Stiff

A.11 Rotina Roots

Esta rotina calcula todas as raízes de um polinômio com coeficientes reais ou imaginários pelo Método de Laguerre.

Figura A11-1 Sub-rotina Roots