Elmer Mateus Gennaro

***ANÁLISE DA INSTABILIDADE
HIDRODINÂMICA DE UMA ESTEIRA
ASSIMÉTRICA***

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica. Área de concentração: Aeronaves.

Orientador: Prof. Dr. Marcello Augusto Faraco de Medeiros

São Carlos

2008

*Ao meus pais, irmãos e à minha noiva,
com Amor e Gratidão.*

Agradecimentos

A Deus, por conceder-me bençãos imensuráveis além de encaminhar oportunidades e principalmente as pessoas que me apoiam e me incentivam.

Ao meus pais, pelo carinho, cuidado, compreensão, ensinamentos e o amor desprendido sem reservas.

Ao Professor Marcello Augusto Faraco de Medeiros, pela amizade, incentivos e orientações essenciais e necessárias para a realização deste trabalho.

Ao Professor Sávio Rodriguez, pelas discussões frutíferas necessárias para a realização deste trabalho.

À minha noiva, pelo amor, companheirismo e incentivo nos momentos de dificuldades.

Ao meus irmãos, pela amizade sempre presente na minha vida.

Aos amigos Alysson, Hernan, Homero, Igor, Prof. Márcio Mendonça e Ricardo, pela boa amizade e o apoio constante.

Aos amigos do LAE e LADINC, pela amizade e o apoio neste desafio.

À Escola de Engenharia de São Carlos, pela infra-estrutura concedida para a realização deste trabalho.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro concedido por um ano na forma de bolsa de estudo.

Conteúdo

Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	xv
Lista de Símbolos	xvii
Resumo	xxi
Abstract	xxiii
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	5
2 Revisão Bibliográfica	7
2.1 Princípios de análise de estabilidade linear	7
2.2 A equação de Orr-Sommerfeld	11
2.3 Camada de mistura	13
2.4 Esteiras	14
2.4.1 Esteira simétrica	17
2.4.2 Esteira assimétrica	18
3 Metodologia	25

3.1	Modelo Físico	25
3.2	Formulação Característica das Equações de Navier-Stokes	29
3.2.1	Condições Iniciais	35
3.3	Metodologia da solução numérica	36
3.3.1	Discretização espacial	36
3.3.2	Integração temporal	39
3.3.3	Filtro Numérico	41
3.3.4	Convergência de Malha	42
4	Análise da Instabilidade Hidrodinâmica Linear	45
4.1	Método de Resolução da Equação de Orr-Sommerfeld	45
4.2	Testes de convergência de malha e análise de influência do domínio	53
4.3	Verificação	55
5	Resultados	59
5.1	Resultados de simulação numérica direta	59
5.2	Resultados da teoria linear de instabilidade hidrodinâmica	72
5.3	Efeitos do número de Mach	80
5.4	Dinâmica da Vorticidade	84
5.5	Controvérsia	87
6	Considerações finais	93
6.1	Conclusões	93
6.2	Sugestões para futuros trabalhos	95

Referências	97
Apêndice A – Processo de Gram-Schmidt	101

Lista de Figuras

1	Esteira de vórtices de von Kármán laminar e turbulenta para diferentes números de Reynolds. (WILLIAMSON, 1996)	2
2	Eslate de uma aeronave em detalhe. Extraído de <i>www.jetsite.com.br</i>	3
3	Esteira de um eslate. Imagem gerada por <i>PIV</i> - (<i>Particle image velocimetry</i>) (NOGUEIRA; ACOSTA, 2005)	4
4	Conjunto de “ <i>risers</i> ” utilizados na exploração de petróleo. Extraído de <i>www.offshore-technology.com</i> em 04/02/2008.	5
5	Configurações de estabilidade: (a) estável , (b) neutro e (c) instável	8
6	Instabilidade convectiva e absoluta	10
7	Variação do coeficiente da base de sucção em função de número de Reynolds. Figura adaptada de Williamson (1996).	14
8	Variação do número de Strouhal em função de número de Reynolds. Figura adaptada de Williamson (1996).	15
9	Cilindro isolado em escoamento cisalhante: (a) axial e (b) planar	19
10	Número de Strouhal (St) versus parâmetro de cisalhamento (K) de Kiya, Tamura e Arie (1980)	21
11	Número de Strouhal (St) versus parâmetro de cisalhamento (K) de Kwon, Sung e Hyun (1992)	21

12	Número de Strouhal (St) versus parâmetro de cisalhamento (K) de Tamura, Kiya e Arie (1980)	22
13	Número de Strouhal (St) versus parâmetro de cisalhamento (K) de Yoshino e Hayashi (1984)	22
14	Número de Strouhal (St) versus parâmetro de cisalhamento (K) de Lei, Cheng e Kavanagh (2000)	23
15	Número de Strouhal (St) versus parâmetro de cisalhamento (K) de Sumner e Akosile (2003)	23
16	Número de Strouhal (St) versus parâmetro de cisalhamento (K) de Kang (2006)	23
17	Número de Strouhal (St) versus parâmetro de cisalhamento (K) de Vitola (2006)	23
18	Geometria da esteira assimétrica de um cilindro.	25
19	Modelo físico adotado: esteira paralela e periódica.	26
20	Variação do parâmetro λ no perfil simétrico de uma esteira gaussiana.	27
21	Definição geométrica de b	27
22	Perfil da camada de mistura.	28
23	Perfil de velocidade de uma esteira assimétrica para diferentes K	28
24	Termos em onda acústica de um domínio bidimensional	35
25	Malha sem estiramento na direção y	39
26	Malha com estiramento na direção y com $\tau = 3$	39
27	Teste de convergência de malha: Evolução temporal da amplitude para número de onda $\alpha = 0,8$, número de Reynolds $Re = 100$ e $Ma = 0,1$, para diferentes malhas.	43

28	Teste de convergência de malha: Taxa de amplificação temporal para número de onda $\alpha = 0,8$, número de Reynolds $Re = 100$ e $Ma = 0,1$, para diferentes malhas.	43
29	Esquema de integração para resolver a equação de Orr-Sommerfeld para um perfil assimétrico	52
30	Teste de convergência de malha: taxa de amplificação temporal para número de onda $\alpha = 0.70$ versus malha e domínio computacional para número de Reynolds $Re = 100$	54
31	Teste de verificação segundo a teoria de estabilidade linear. Evolução temporal da amplitude para $\alpha = 0,75$, $Re = 100$ e $K = 0,05$	56
32	Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 100$ e $\alpha = 0,30$	59
33	Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 100$ e $\alpha = 0.60$	60
34	Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 100$ e $\alpha = 0.90$	61
35	Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 100$ e $\alpha = 1.20$	61
36	Taxa de amplificação temporal versus número de onda α para diferentes valores do parâmetro de assimetria K em $Re = 100$	62
37	Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 500$ e $\alpha = 0.30$	63
38	Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 500$ e $\alpha = 0,60$	64
39	Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 500$ e $\alpha = 0,90$	65

40	Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 500$ e $\alpha = 1, 20$	65
41	Taxa de amplificação temporal versus número de onda α para diferentes valores do parâmetro de assimetria K em $Re = 500$	66
42	Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 1000$ e $\alpha = 0.30$	66
43	Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 1000$ e $\alpha = 0.60$	67
44	Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 1000$ e $\alpha = 0.90$	67
45	Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 1000$ e $\alpha = 1.20$	68
46	Taxa de amplificação temporal versus número de onda α para diferentes valores do parâmetro de assimetria K em $Re = 1000$	68
47	Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para $\alpha = 0, 3$ para diferentes valores de K e Re	69
48	Efeito do número de Reynolds na taxa de amplificação temporal para $K = 0, 00$	70
49	Efeito do número de Reynolds na taxa de amplificação temporal para $K = 0, 15$	71
50	Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes número de onda no caso simétrico para $Re = 10$	71
51	Comparação entre resultados numérico e teórico. Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 100$ e $\alpha = 0, 30$	72

52	Comparação entre resultados numérico e teórico. Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 100$ e $\alpha = 1, 20$	73
53	Comparação entre resultados numérico e teórico. Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 1000$ e $\alpha = 0,30$	73
54	Comparação entre resultados numérico e teórico. Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 1000$ e $\alpha = 0,60$	74
55	Comparação entre resultados numérico e teórico. Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 1000$ e $\alpha = 0,90$	74
56	Comparação entre resultados teóricos e numéricos da taxa de amplificação temporal versus número de onda para diferentes valores do parâmetro de assimetria K em $Re = 100$	75
57	Comparação entre resultados teóricos e numéricos da taxa de amplificação temporal versus número de onda para diferentes valores do parâmetro de assimetria K em $Re = 500$	76
58	Comparação entre resultados teóricos e numéricos da taxa de amplificação temporal versus número de onda para diferentes valores do parâmetro de assimetria K em $Re = 1000$	76
59	Efeito do número de Reynolds na taxa de amplificação temporal.	77
60	Variação do número de onda mais instável versus o parâmetro de assimetria K para $Re = 100, 500$ e 1000	78
61	Variação de ω_r correspondente ao número de onda mais instável versus o parâmetro de assimetria K para $Re = 100, 500$ e 1000	79

62	Varição da taxa de amplificação temporal correspondente ao número de onda mais instável com o parâmetro de assimetria versus K para $Re = 100, 500$ e 1000	79
63	Efeito do número de Mach na taxa de amplificação temporal para $Re = 1000$ e $K = 0$	80
64	Efeito do número de Mach na taxa de amplificação temporal para $Re = 1000$ e $K = 0,05$	81
65	Efeito do número de Mach na taxa de amplificação temporal para $Re = 1000$ e $K = 0,10$	81
66	Efeito do número de Mach na taxa de amplificação temporal para $Re = 1000$ e $K = 0,15$	82
67	Taxa de amplificação temporal versus número de onda α para diferentes valores de K . $Ma = 0,20$ e $Re = 1000$	82
68	Taxa de amplificação temporal versus número de onda α para diferentes valores de K . $Ma = 0,50$ e $Re = 1000$	83
69	Campo de pressão para $\alpha = 0,40$ e $Re = 1000$. A sequência corresponde aos tempos adimensionais $t = 90, 167, 174$ e 185	84
70	Contorno da componente de velocidade v do escoamento para $\alpha = 0,40$ e $Re = 1000$. A sequência corresponde aos tempos adimensionais $t = 90, 167, 174$ e 185	84
71	Contorno da componente da velocidade u do escoamento para $\alpha = 0,40$ e $Re = 1000$. A sequência corresponde aos tempos adimensionais $t = 90, 167, 174$ e 185	85
72	Contorno da entropia de uma esteira simétrica para $\alpha = 0,40$ e $Re = 1000$. A sequência corresponde aos tempos adimensionais $t = 90, 167, 174$ e 185	85

73	Contorno de vorticidade de uma esteira simétrica para $\alpha = 0.40$ e $Re = 1000$. A sequência corresponde aos tempos adimensionais $t = 90, 167, 174$ e 185.	85
74	Contorno de vorticidade de uma esteira com parâmetro de assimetria $K = 0.00$, $Re = 1000$ e $\alpha = 0,7865$	86
75	Contorno de vorticidade de uma esteira com parâmetro de assimetria $K = 0.10$, $Re = 1000$ e $\alpha = 0,7391$. A sequência corresponde aos tempos adimensionais $t = 90, 110, 125, 131, 141$ e 160.	86
76	Contorno de vorticidade de uma esteira com parâmetro de assimetria $K = 0.20$, $Re = 1000$ e $\alpha = 0,6659$. A sequência corresponde aos tempos adimensionais $t = 90, 110, 125, 131, 141$ e 160.	87
77	Coeficiente de arrasto para diferentes valores de K de Kang (2006), Kwon, Sung e Hyun (1992) Lei, Cheng e Kavanagh (2000) e Yoshino e Hayashi (1984)	88
78	Número de Strouhal versus parâmetro de assimetria K . Resultados encontrados na literatura.	89
79	Número de Strouhal versus parâmetro de cisalhamento. Resultados encontrados na literatura corrigidos pelo coeficiente de arrasto.	90
80	Comparação de St/St_0 versus o parâmetro de assimetria entre o presente trabalho e os já existentes corrigidos.	91
81	Comparação de St/St_0 versus o parâmetro de assimetria entre o presente trabalho e os já existentes corrigidos em escala.	91
82	Esquema geométrico do processo de ortogonalização	102

Lista de Tabelas

1	<i>Condições de escoamento dos trabalhos encontrados na literatura</i>	20
2	<i>Resultados do efeito do cisalhamento no número de Strouhal</i>	22
3	<i>Resultados dos parâmetros do modo sinuoso para $w_i = 0$</i>	55
4	<i>Resultados dos parâmetros do modo varicoso para $w_i = 0$</i>	55

Lista de Símbolos

A	Amplitude da perturbação.
c	Velocidade do som
c_p	Calor específico.
CFL	Condição de Courant-Friendrichs-Lewy.
C_D	Coefficiente de arrasto.
DNS	Simulação numérica direta. Abreviação em inglês por ser mais utilizada.
i	Unidade imaginária. ($i = \sqrt{-1}$).
K	Parâmetro de assimetria.
L_x, L_y	Tamanho do domínio na direção x e y , respectivamente.
Ma	Número de Mach.
p	Pressão.
Pr	número de Prandtl.
R	Constante de gás.
Re	Número de Reynolds
Re_D	Número de reynolds baseado no diâmetro
Re_ω	Número de reynolds baseado na esteira
St	Número de Strouhal

s	Entropia.
s_{ij}	Tensor de deformação.
t	Tempo adimensional.
T	Temperatura.
U	Perfil de velocidade do escoamento.
U_c	Velocidade na altura do centro do cilindro.
U_e	Perfil de velocidade da esteira simétrica.
U_{cm}	Perfil de velocidade da camada de mistura.
u, v	Componentes de velocidade nas direções longitudinal e normal ao escoamento.
$\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}$	Modos normais.
$\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}$	Autofunções complexas respectivas aos modos normais.
X^s, Y	Transporte de entropia.
X^v, Y^u	Transporte de vorticidade.
X^+, X^-, Y^+, Y^-	Ondas acústicas.
$2D$	Bidimensional.

Símbolos Gregos

α	Número de onda na direção longitudinal do escoamento. ($\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$).
α_r	Número de onda da perturbação.
α_i	Taxa de amplificação espacial. ($\omega = \omega_r + i\omega_i$).
ω	Frequência adimensional.

ω_r	Frequência da perturbação.
ω_i	Taxa de amplificação temporal.
ρ	Densidade.
μ	Viscosidade dinâmica.
ν	Viscosidade cinemática
γ	Razão de calor específico.
σ	Curvatura gaussiana.
τ_{ij}	Tensor das tensões viscosas.
ϕ	Tensor de dissipação.
Δ_t	Intervalo de tempo.

Resumo

Gennaro, E. M. (2008). Análise da instabilidade hidrodinâmica de uma esteira assimétrica. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

Em uma aeronave, dispositivos de hiper-sustentação à altos ângulos de ataque promovem a formação de esteiras. Tais esteiras influenciam o desempenho aerodinâmico. A esteira do eslate, por exemplo, afeta o ponto de transição do elemento principal da asa e é a fonte de ruído mais importante na estrutura do avião. Devido a geração de sustentação estas esteiras são assimétricas. Corpos imersos em escoamento cisalhante também produzem esteiras assimétricas, com importantes aplicações para a indústria petrolífera. Existem aspectos de tais escoamentos que precisam de investigação. Por exemplo, não há consenso sobre se pode ou não a assimetria suprimir desprendimento de vórtice ou como afeta o desprendimento da frequência. Na verdade, existe uma aparente discrepância entre os resultados encontrados na literatura. O objetivo do presente trabalho é contribuir para esta questão. A idéia foi investigar a influência da assimetria em um perfil de esteira bidimensional sob desenvolvimento temporal. O perfil da esteira assimétrica foi obtido por uma combinação entre um perfil de uma esteira gaussiana e um perfil tangente hiperbólico da camada de mistura. Foi desenvolvido uma análises bidimensional (2D) da teoria de estabilidade linear para o perfil. O trabalho também incluiu simulações numéricas diretas (DNS) bidimensionais da evolução da perturbação usando formulação característica das equações compressíveis de Navier-Stokes na forma não-conservativa. Os resultados mostraram que a assimetria reduz o frequência de desprendimento para a faixa investigada do parâmetro de assimetria $0 \leq K \leq 0,25$. Para pequenos valores deste parâmetro os resultados mostraram que a assimetria promove a estabilidade. Efeitos do número de Mach na esteira assimétrica também foram investigados. Os resultados mostraram que o aumento do Ma reduziu a máxima taxa de amplificação e a banda instável. Além disso, os resultados da literatura foram reconciliados, levando-se em conta a variação do coeficiente de arrasto com a assimetria. Portanto, uma possível explicação para a controvérsia foi oferecido.

Palavras chave: Esteira assimétrica. Desprendimento de vórtice. Escoamento cisalhante. Instabilidade Hidrodinâmica. Equação de Orr-Sommerfeld. DNS.

Abstract

Gennaro, E. M. (2008). Analysis of the hydrodynamic instability of an asymmetric wake. Dissertation (Master's Degree) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

In an aircraft, high-lift devices operating at high angle of attack promote the formation wakes. Such wakes influence the aerodynamic performance. The slat wake, for example, affects the transition point of the wing main element and is the most important source of noise in the airframe. Owing to the generation of lift these wakes are asymmetries. Bodies immersed in a shear flow also produce asymmetric wakes, with important applications to the oil industry. There are aspects of such flows that need investigation. For instance, there is no consensus about whether or not the asymmetry can suppress vortex shedding or how it affects the shedding frequency. Indeed there is an apparent discrepancy between results found in literature. The aim of the present work was to contribute to this issue. The idea was to investigate the influence of asymmetry on a two-dimensional wake profile under temporal development. The asymmetric wake profile was obtained by a combination between a gaussian wake profile and a hyperbolic tangent mixing layer profile. The bidimensional (2D) linear stability theory analysis of the profile was performed. The work also included 2D Direct Numerical Simulation (DNS) using the characteristic formulation of the compressible Navier-Stokes equations in non-conservative form. The results showed that the asymmetry reduces the shedding frequency for the range of $0 \leq K \leq 0,25$ investigated. For small values of the asymmetric parameter the results showed that the asymmetry promotes stability. Effects of the number of Mach in asymmetric wake also were investigated. The results showed that the increase of Ma reduced the maximum rate amplification and the band unstable. Moreover, the results from literature were reconciled by taking into account the variation of the drag coefficient with the asymmetry. Therefore, a possible explanation for the controversy was offered.

Keywords: Asymmetric wake. Vortex shedding. Shear flow. Hydrodynamic instability. Orr-Sommerfeld equation. DNS.

Introdução

Escoamentos ao redor de corpos rombudos têm sido assunto de pesquisa há muitos anos. Apesar disso, não se tem um entendimento completo dos fenômenos envolvidos com esses escoamentos, tais como a formação, a dinâmica e os mecanismos de supressão da esteira de vórtices, sem citar ainda a transição para a turbulência do escoamento. Os fenômenos são complexos, e para tanto, pesquisadores desenvolvem novas metodologias e, principalmente, utilizam simplificações na geometria. Com objetivo de simplificar os fenômenos físicos envolvidos no problema, o cilindro é o corpo rombudo mais utilizado. Fenômenos complexos como a esteira de von Kármán podem assim ser investigados estudando-se o escoamento ao redor de um cilindro. A figura 1 mostra o desenvolvimento da esteira de von Kármán para diferentes números de Reynolds e regimes de escoamento ao redor de um cilindro.

Nos escoamentos ao redor de corpos rombudos, quando o número de Reynolds ultrapassa um certo valor crítico, ocorre desprendimento de vórtices. Esses vórtices surgem devido à instabilidade hidrodinâmica na região da esteira próxima ao corpo. Esse desprendimento resulta ainda, em oscilações nas forças de arrasto e sustentação. Flutuações nessas forças são as principais causas de vibrações estruturais, interação fluido-estrutura e geração de som, podendo inclusive causar falhas estruturais. Em ambientes práticos da engenharia, o estudo do controle desse desprendimento de vórtices bem como o entendimento da dinâmica da esteira de vórtices são assuntos de grande interesse.

Figura 1: Esteira de vórtices de von Kármán laminar e turbulenta para diferentes números de Reynolds. (WILLIAMSON, 1996)

Em aeronaves, os dispositivos de hiper-sustentação, eslates e flapes, quando em operação à altos ângulos de ataque e deflexão, promovem a formação de esteiras. Devido à sua instabilidade hidrodinâmica, estas esteiras, em particular no caso de eslates, exercem grande influência no desempenho tanto aerodinâmico como aeroacústico destes dispositivos. O eslate de uma aeronave pode ser visto em detalhe na figura 2. Do ponto de vista aerodinâmico, a esteira de vórtices do eslate, que pode ser visto na figura 3, influencia sobremaneira o ponto de transição do elemento principal da asa. O processo como esta influência se manifesta ainda não é compreendido, entretanto, o ponto de transição é um importante parâmetro no projeto de configurações multi-elementos, tendo especial efeito na otimização das folgas entre os elementos. Devido à geração de sustentação, a esteira do eslate é assimétrica.

A assimetria exerce influência na instabilidade hidrodinâmica da esteira e na dinâmica dos vórtices formados. Essa influência da assimetria na instabilidade da esteira possui

Figura 2: Eslate de uma aeronave em detalhe. Extraído de www.jetsite.com.br

ainda outras aplicações importantes além da aeronáutica. Esteiras assimétricas também ocorrem em corpos imersos em um escoamento cisalhante. Um importante exemplo é o escoamento das correntes oceânicas ao redor dos trechos verticais de dutos de extração de petróleo em águas profundas, conhecidos como “*risers*”. Outros exemplos semelhantes são os trocadores de calor, linhas de transmissão, escoamentos ao redor de oleodutos, etc. A figura 4 mostra um exemplo da utilização desses “*risers*”.

A maior parte dos trabalhos disponível na literatura dedicados à esteira assimétrica estuda esteiras geradas pelo escoamento cisalhante ao redor de corpos. De fato, não se dedicam ao estudo apenas da esteira, mas de todo o escoamento, tanto à montante quanto à jusante do corpo. Entretanto, no caso da esteira o mecanismo de instabilidade hidrodinâmica primária depende, em primeira instância, do escoamento base. O corpo em si exerce

Figura 3: Esteira de um eslate. Imagem gerada por *PIV* - (*Particle image velocimetry*) (NOGUEIRA; ACOSTA, 2005)

uma influência secundária. Ele pode, por exemplo, promover novas instabilidades à números de Reynolds mais altos, ou alterar de forma não muito significativa a instabilidade primária.

Vários trabalhos se dedicam ao estudo do escoamento com cisalhamento, uniforme ou não ao redor de um cilindro. Desta forma, pode-se gerar experimentalmente ou computacionalmente uma esteira assimétrica e estudá-la. Entre os vários estudos, uma distinção pode ser feita: existem aqueles em que o cisalhamento é promovido pela presença de uma parede e outros em que o escoamento cisalhante é livre. No caso com parede, existem dois efeitos simultâneos: o cisalhamento e a presença de uma parede. Os vários trabalhos, em geral, reportam uma significativa influência do cisalhamento na instabilidade hidrodinâmica da esteira. Entretanto, não existe consenso se o cisalhamento promove a instabilidade ou a estabilidade da esteira. Além disso, não existe consenso se o número de Strouhal cresce ou decresce com o aumento da assimetria da esteira. De fato, existe uma controvérsia estabelecida a cerca deste tema.

Figura 4: Conjunto de “risers” utilizados na exploração de petróleo. Extraído de www.offshore-technology.com em 04/02/2008.

1.1 Objetivos

O objetivo principal desse trabalho é estudar a influência do cisalhamento na instabilidade da esteira assimétrica e analisar a dinâmica de vórtices da esteira, bem como colaborar para o esclarecimento da controvérsia a respeito dos efeitos do parâmetro de assimetria sobre o número de Strouhal.

A estratégia desse trabalho foi analisar exclusivamente a esteira assimétrica, isto é, sem o corpo. A esteira assimétrica foi representada pela adição de um escoamento cisalhante, no caso, um perfil tangente hiperbólico que imita uma camada de mistura, ao escoamento base da esteira, um perfil gaussiano. A análise foi desenvolvida de forma teórica, através

da solução das equações que governam a instabilidade hidrodinâmica deste escoamento, e computacional, através da simulação numérica direta das equações de Navier-Stokes bi-dimensionais.

A análise exclusiva da esteira, oferece grandes vantagens. Em primeiro lugar, não é necessário simular o corpo. Do ponto de vista de geração da malha, esta é, em geral, uma enorme vantagem. Além disso, a hipótese de escoamento paralelo foi forçada nas simulações. Isto foi feito através do cancelamento, para o escoamento base, dos efeitos viscosos na direção transversal ao escoamento. Deste modo, foi possível realizar uma análise temporal considerando o problema periódico na direção do escoamento. O ganho computacional foi enorme, pois permitiu o uso de um domínio computacional muito menor. Por fim, esta estratégia facilita a inicialização da simulação numérica. Quando se simula também o escoamento ao redor do corpo, o processo de inicialização é sempre demorado e ruidoso, pois é necessário aguardar que a partir de uma certa condição inicial, o escoamento se estabeleça ao redor do corpo. Neste processo, em geral surgem perturbações não controladas que disparam a instabilidade hidrodinâmica do escoamento e dificultam o estudo. Estes problemas se tornam ainda mais críticos nas proximidades do número de Reynolds crítico, Re_c . Na estratégia adotada neste estudo, o escoamento base é dado como condição inicial e sobre este se introduz uma perturbação controlada, da qual se pode medir a taxa de amplificação ou decaimento e assim verificar a instabilidade do escoamento.

A análise exclusiva da esteira oferece pelo menos uma desvantagem; que é a impossibilidade de analisar o efeito do corpo no fenômeno. Entretanto, esta desvantagem não impediu o alcance dos objetivos propostos.

Revisão Bibliográfica

2.1 Princípios de análise de estabilidade linear

Estes conceitos apresentados nesta seção, serão utilizados por todo o trabalho. Afim de uniformizar as definições, é apresentada uma descrição dos conceitos de estabilidade e de instabilidade.

Um ponto de equilíbrio ou ponto crítico de um sistema é estável se a resposta do sistema a uma perturbação diminui quando $t \rightarrow \infty$. Este conceito pode ser visto geometricamente na figura 5(a). Se o ponto de equilíbrio é perturbado e o mesmo nem cresce ou decresce, o ponto é chamado de neutro. Essa configuração pode ser visualizada na figura 5(b), o ponto é perturbado mas mesmo assim permanece na configuração inicial. Agora, se a resposta do sistema a uma pequena perturbação cresce a medida que $t \rightarrow \infty$, o ponto de equilíbrio é chamado de instável. A figura 5(c) representa uma configuração típica de instabilidade, isto é, a medida que o ponto de equilíbrio do sistema é perturbado, ele não retorna mais à configuração inicial. Existe outra forma de definir os conceitos de estabilidade usando os autovalores desse sistema; porém, a descrição informal dos conceitos é suficiente para a leitura desse trabalho.

Estabilidade também pode ser definida como a qualidade de ser imune à pequenas perturbações. As perturbações não devem ser, necessariamente, infinitesimalmente pequenas em amplitude, mas o conceito de amplificação está sempre implícito. No caso do conti-

Figura 5: Configurações de estabilidade: (a) estável , (b) neutro e (c) instável

num, o número de graus de liberdade é infinito e os problemas tornam-se mais difíceis. A idéia de torná-los problemas com número finito de graus de liberdade aparenta ser mais complexos. No entanto, a compreensão desse sistema é feita com o uso de aproximações lineares e por extensão, a teoria é desenvolvida como um sistema discreto.

A análise linear de instabilidade hidrodinâmica é feita geralmente através do método da decomposição em modos normais (MENDONÇA, 2003), a semelhança do que se faz para sistemas mecânicos sólidos. O objetivo é investigar a resposta do escoamento a perturbações infinitesimais. É uma técnica já estabelecida e os resultados são comprovados por experimentos e simulações computacionais numa vasta gama de tipos de escoamentos, incluindo os regimes subsônico, transônico e supersônico, escoamentos monofásicos e bifásicos, na presença de superfícies livre e paredes ou não, etc. Para os objetivos do projeto são necessários detalhes da solução que não se encontram publicados. Uma situação em que estes detalhes às vezes se fazem necessários é na verificação de códigos computacionais pela comparação com soluções da teoria linear de instabilidade hidrodinâmica.

A teoria linear de instabilidade hidrodinâmica é também a base para a teoria de instabilidade hidrodinâmica fracamente não linear (MEDEIROS, 2003). A teoria constitui uma correção à solução linear. O método considera que a solução geral é formada por uma expansão assintótica. O primeiro termo da série é a solução linear. A primeira correção, ou correção de primeira ordem, é a solução de uma equação linear e não homogênea, sendo que o termo não homogêneo é obtido a partir da solução linear. As correções de ordens superiores também vêm de equações lineares não homogêneas, nas quais o termo

não homogêneo é obtido a partir das soluções de ordem mais baixa. Claramente, a solução do problema linear é uma etapa do caso não linear.

Na teoria linear de instabilidade hidrodinâmica, o escoamento é decomposto em uma parte permanente, chamada escoamento base, e uma parte flutuante, a perturbação. O escoamento base é um dado do problema, a perturbação é a incógnita. Assumindo-se que a perturbação é infinitesimal, as equações de movimento para a perturbação podem ser linearizadas. É frequente a adoção da hipótese de que o escoamento base é paralelo, ou seja $V = (U(y), 0, 0)$, onde V é o vetor velocidade base, U é a componente longitudinal, e y é a direção perpendicular ao escoamento. Com esta hipótese as equações de movimento para a perturbação se tornam separáveis. Os coeficientes são constantes nas direções longitudinal e transversal e no tempo. Portanto, pode-se aplicar a transformada de Fourier nas direções x e z e a transformada de Laplace no tempo, no caso da análise ser tri-dimensional. Em outras palavras, a solução possui um caráter ondulatório. Deste processo resulta um sistema de equações diferenciais ordinárias na direção y , que constitui um problema de autovalor e autofunção. As soluções do sistema são os modos normais do escoamento. A autofunção fornece o formato da onda na direção y e o autovalor fornece a taxa de amplificação ou atenuação exponencial do modo. Se existe pelo menos um modo que se amplifica, o sistema é instável.

Nas circunstâncias acima apresentadas e em duas dimensões, os modos normais são dados por:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y, t) &= \hat{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} \\ \tilde{v}(x, y, t) &= \hat{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} \\ \tilde{p}(x, y, t) &= \hat{p}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)},\end{aligned}\tag{2.1}$$

sendo i a unidade imaginária e $\hat{u}(y)$, $\hat{v}(y)$ e $\hat{p}(y)$ as autofunções complexas para $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ e $\tilde{p}$, respectivamente. O número de onda é representado por $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ onde α_r é o número de onda da perturbação e α_i é a taxa de amplificação espacial. A frequência é representada por $\omega = \omega_r + i\omega_i$ onde ω_r é a frequência da perturbação e ω_i é a taxa de

amplificação temporal. A velocidade de grupo pode ser descrita como $c_g = \partial\omega/\partial\alpha$. É a velocidade de propagação da energia do envelope de modulação.

A análise da estabilidade é agora reduzida a um problema de autovalor da equação diferencial da perturbação da qual as equações (2.1) são soluções. Essa equação é conhecida por *equação de Orr-Sommerfeld*.

A partir da equação de Orr-Sommerfeld, a instabilidade linear pode ser descrita qualitativamente em termos físicos. Se a uma perturbação está localizada no espaço, então a perturbação se propaga da mesma maneira que um pacote de onda dos modos mais instáveis, viajando com sua velocidade de grupo e crescendo exponencialmente. A perturbação decai rapidamente à montante e à jusante de seu centro, a medida que viaja. Assim, para um observador se movendo com a velocidade de grupo, a perturbação cresce exponencialmente no tempo. Mas a perturbação medida em uma estação fixa x eventualmente decai rapidamente no tempo depois que a perturbação passou pelo centro. Esta instabilidade é chamada de *instabilidade convectiva*; porém, se a velocidade de grupo é zero, a instabilidade permanece estacionária, uma vez que cresce exponencialmente e é chamada de *instabilidade absoluta*.

Figura 6: Instabilidade convectiva e absoluta

A figura 6 ilustra essas idéias geometricamente. Pode-se ver ainda, na figura 6, que a característica distintiva de uma instabilidade absoluta é que ela se espalha para fora em ambas direções de uma só vez, pois quando a perturbação atinge um ponto, esta perturbação mantém-se crescente no tempo neste momento. A instabilidade convectiva, na outra mão, propaga-se ao longo do sistema, uma vez que cresce com o tempo a fim de que eventualmente a perturbação desapareça se uma situa-se em um determinado ponto.

Para *modos que crescem temporalmente*, assume-se α real e procura-se o autovalor complexo c_g ou ω para se determinar o crescimento temporal do modo como $e^{(i\alpha t)} = e^{i\omega t}$. Para *modos que crescem na direção x* , assume-se a frequência ω real e procura-se o autovalor complexo $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ (BETCHOV; CRIMINALE, 1966).

Consequentemente os modos espaciais e temporais comportam-se como

$$e^{i(\alpha x - \omega t)} = e^{(i\alpha_r x - \alpha_i x - i\omega_r t + \omega_i t)}$$

e então crescem ou decrescem exponencialmente com x e t , exceto para $\alpha_i = 0$ e $\omega_i = 0$. Eles também oscilam em x com comprimento de onda $2\pi/\alpha_r$.

De modo geral, deseja-se determinar como α e ω dependem do número de Reynolds e do perfil de velocidade base e esta relação, $f(Re, \alpha, \omega) = 0$, é denominada *relação de dispersão*. Um resumo de classificação de instabilidades pode ser visto a seguir:

- **Análise espacial**

$\alpha_i < 0 \implies$ amplitude crescente na direção $x \longrightarrow$ instável.

$\alpha_i > 0 \implies$ amplitude decrescente na direção $x \longrightarrow$ estável.

$\alpha_i = 0 \implies$ amplitude constante na direção $x \longrightarrow$ estabilidade neutra.

- **Análise temporal**

$\omega_i < 0 \implies$ amplitude decrescente no tempo $\longrightarrow$ estável.

$\omega_i > 0 \implies$ amplitude crescente no tempo $\longrightarrow$ instável.

$\omega_i = 0 \implies$ amplitude constante no tempo $\longrightarrow$ estabilidade neutra.

2.2 A equação de Orr-Sommerfeld

Uma série de artigos escritos em 1880 - 1890, Rayleigh, Kelvin e Osborne Reynolds estudaram escoamento em tubos, entre cilindro concêntricos e entre placas paralelas. Estes três pesquisadores, estabeleceram significativos resultados em escoamentos de fluidos. Os resultados são baseados em investigações experimentais e teóricas; algumas delas formuladas sem rigor matemático.

Desde 1880, Rayleigh investigou a equação invíscida para escoamento de um canal,

hoje conhecida como “equação de Rayleigh”

$$(D^2 - \alpha^2)\hat{v} - \frac{U''}{U - c}\hat{v} = 0. \quad (2.2)$$

onde $D = \frac{\partial}{\partial y}$, α o número de onda, $\hat{v}$ a autofunção complexa para a componente de velocidade perpendicular ao escoamento e U o escoamento base.

Rayleigh deduziu um teorema que mostra que para um escoamento invíscido incompressível, um ponto de inflexão no perfil de velocidade média do escoamento paralelo, é condição necessária para instabilidade.

Foi Reynolds quem abriu caminho para as investigações sobre a relação entre a viscosidade e a estabilidade. Ele estabelece condições de estabilidade para escoamento de *Couette* e *Poiseuille*, e são para estes escoamentos que Kelvin usa uma análise modal, assumindo perturbações periódicas na direção x, y e t , para estudar a equação de Orr-Sommerfeld.

William Orr esclarece muitas questões sobre a relação entre viscosidade e estabilidade enquanto aplica outras técnicas para resolver o problema. Orr justifica alguns resultados de Rayleigh e Reynolds, enquanto rejeita outros apresentando contra-exemplos. No caso invíscido, ele estende a análise modal, utilizada por Rayleigh, resolvendo para as perturbações em componentes de Fourier e aplica esta técnica para escoamentos viscosos.

Em um trabalho sobre a equação de Orr-Sommerfeld, Werner Heisenberg publica sua tese de doutorado em 1924 em soluções estáveis e turbulentas para equação viscosa. Em particular, conclui que a equação de Orr-Sommerfeld permite soluções instáveis. Estabelece ainda a ordem de grandeza do número de Reynolds crítico para o perfil de um escoamento de *Poiseuille* usando um método assintótico.

C.C. Lin em 1955, fez uma análise da estabilidade de escoamentos paralelos desde Heisenberg, reportando as condições necessária e suficiente para estabilidade de escoamentos paralelos invíscidos, e condições suficiente para estabilidade de escoamentos viscosos. Ele defende fortemente os modelos lineares, incluindo a equação de Orr-Sommerfeld, para análise da estabilidade hidrodinâmica, e afirma ainda, que “provas” que lançam mão da teoria não-linear estão incompletas. Ressalta o papel da viscosidade como causa da insta-

bilidade para baixos números de Reynolds e como fator estabilizante para altos números de Reynolds. Como Heisenbrg, usa o método assintótico. Entretanto, suas expansões assintóticas esclarecem alguns pontos obscuros do trabalho de Heisenberg.

2.3 Camada de mistura

Uma camada de mistura se desenvolve a partir da interface de duas correntes de diferentes velocidades. O perfil de velocidades assim formado possui um ponto de inflexão e pelo teorema de Rayleigh é instável à perturbações infinitesimais. Esta instabilidade é não viscosa e se denomina instabilidade de Kelvin-Helmholtz. Ela é responsável pela formação de estruturas de vorticidade orientadas no sentido lateral, como foi evidenciado em experiências de laboratório (BROWN; ROSHKO, 1974). Devido à concentração de vorticidade, à forma reconhecível e à imprevisibilidade quanto a sua localização no tempo e espaço, estas estruturas de vorticidade apresentam todas as características para serem consideradas como estruturas coerentes (LESIEUR, 1997).

Além dos turbilhões de Kelvin-Helmholtz (KH), numerosos trabalhos experimentais (BERNAL; ROSHKO, 1986; HUANG; HO, 1990) e numéricos (LIN; CORCOS, 1984; METCALFE et al., 1987) colocaram em evidência a existência de uma instabilidade secundária que causa, na zona de estagnação entre os turbilhões KH, intensos turbilhões longitudinais contra-rotativos. Os turbilhões longitudinais, denominados grampo de cabelo (*hairpins*), são facilmente identificáveis em um corte transversal pela forma em cogumelo. Neste ponto a assinatura destes vórtices longitudinais é semelhante àquela dos vórtices de Görtler. Nos escoamentos transicionais e turbulentos, os vórtices “primários” e “secundários” são responsáveis pela maior parcela da transferência de quantidade de movimento, massa e energia.

Em camadas de mistura compressíveis existem duas correntes com números de Mach característicos diferentes. Neste caso o parâmetro representativo é o denominado número de Mach convectivo (PAPAMOSCHOU; ROSHKO, 1988), que é uma combinação dos números de Mach das duas correntes. Experimentos mostram que este parâmetro caracteriza

corretamente o escoamento para $Ma < 0,6$. Estas experiências mostram também o efeito de diminuição da taxa de crescimento das perturbações com o aumento do número de Mach. Simulações de estabilidade linear de Sandham e Reynolds (1991) mostram que, para número de Mach convectivo superior a 0,6, é maior a amplificação dos modos oblíquos em relação aos modos bi-dimensionais.

2.4 Esteiras

O escoamento ao redor de corpos, em particular de corpos rombudos, gera uma esteira. Os corpos rombudos produzem um alto coeficiente de arrasto. Este escoamento tem chamado a atenção de pesquisadores e engenheiros há mais de 100 anos, gerando uma grande quantidade de trabalhos publicados sobre este assunto ainda inesgotado (BEARMAN, 1969, 1980; ROSHKO, 1993; BARKLEY; HENDERSON, 1996; WILLIAMSON, 1996; ZDRAVKOVICH, 1997, 2003). Vários estudos foram realizados sobre este escoamento, em geral utilizando esteiras de cilindros; porém, até o início da década de 90, grande parte do conhecimento acumulado era basicamente descritivo ou empírico (GERRARD, 1966; PERRY, 1982) e (MATHIS, 1987). Por exemplo, uma descrição de como se dá a formação da esteira de vórtices atrás de um cilindro circular isolado foi proposta inicialmente por Gerrard (1966) e posteriormente complementada por Perry (1982). Gerrard (1966) sugeriu que o vórtice que está se formando puxa a camada cisalhante do lado oposto do cilindro através da esteira; eventualmente cortando o fornecimento de vorticidade do vórtice que está se desenvolvendo (WILLIAMSON, 1996).

De fato, o escoamento na esteira de cilindros constitui um protótipo que ilustra o fenômeno em corpos de forma mais geral. Diferentes regimes de escoamento são observados. O regime laminar de esteira fechada e bidimensional é permanente e; sabe-se atualmente, que ocorre para número de Reynolds inferior a $Re_D = 47$, onde $Re_D = UD/\nu$. Neste regime observa-se a formação de uma zona de recirculação permanente com dois vórtices simétricos à jusante do cilindro.

A primeira instabilidade que origina um escoamento oscilatório ocorre para $Re_D = 47$,

Figura 7: Variação do coeficiente da base de sucção em função de número de Reynolds. Figura adaptada de Williamson (1996).

Figura 8: Variação do número de Strouhal em função de número de Reynolds. Figura adaptada de Williamson (1996).

a qual marca a transição do regime de esteira fechada para o de esteira periódica. O valor do número de Reynolds para o qual a transição ocorre, é definido como sendo o número de Reynolds crítico (Re_{Dc}). O valor no qual ocorre esta transição foi confirmado

analiticamente, usando análise de instabilidade linear global (THOMPSON; GAL, 2004), experimentalmente (MATHIS, 1987) e numericamente (JACKSON, 1987). Esta instabilidade dá origem ao desprendimento alternado de vórtices, formando a chamada esteira de vórtices de von Kármán. A instabilidade é do tipo não viscosa e está relacionada com o fato de o perfil de velocidade base ser inflexional. Esta primeira instabilidade se manifesta de forma bi-dimensional.

A medida que o número de Re aumenta, novas transições vão surgindo, as quais estão em geral associadas com descontinuidades no processo de geração e emissão de vórtices. Estas descontinuidades estão relacionadas com o surgimento de estruturas tridimensionais tais como; laços e pares de vórtices longitudinais, que são análogos às estruturas longitudinais encontradas em camadas de mistura (BERNAL; ROSHKO, 1986; WILLIAMSON, 1989, 1988).

A primeira descontinuidade ocorre para número de Reynolds entre 180 e 194. Essa descontinuidade foi associada por Williamson (1988) com a deformação transversal do vórtice primário da esteira de von Kármán durante o processo de desprendimento. Isto resulta na formação de laços de vórtices que são esticados para formarem pares de vórtices longitudinais. Estas estruturas consistem no que hoje é conhecido como instabilidade do modo A ou instabilidade de grande comprimento de onda (WILLIAMSON, 1988). Para valores do número de Reynolds maiores, $Re_D = 230 - 250$, observa-se uma segunda descontinuidade que determina a transição do regime de esteira longínqua para o de esteira próxima. Neste regime, observa-se a formação de pares de vórtices longitudinais de menor escala de comprimento transversal. Esta é a instabilidade do modo B ou instabilidade de pequeno comprimento de onda (WILLIAMSON, 1988).

A existência das instabilidades dos modos A e B foi comprovada por meio de análises de estabilidade global, realizada por Noack e Eckelmann (1994), e por análise de instabilidade de Floquet, realizada por Barkley e Henderson (1996). Além disso, estas instabilidades foram comprovadas experimentalmente por Williamson (1996) e através de simulações numéricas por Persillon e Braza (1998). A existência destas transições pode

ser observada analisando a variação do número de Strouhal ou do coeficiente de pressão da base (C_{pb}) em função do número de Reynolds. O número de Strouhal é definido por $St = fD/U$, onde f é a frequência de emissão de vórtices, D o diâmetro do cilindro e U a velocidade do escoamento. O coeficiente da base de sucção é definido como $-C_{pb} = (P_B - P_0 + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2)/\frac{1}{2}\rho U_\infty^2$, onde P_0 e P_B representam a média temporal da pressão nos pontos de estagnação e base do cilindro, respectivamente, e ρ a densidade do fluido. Existe uma forte correlação entre $-C_{pb}$ e o coeficiente de arrasto C_D . As figuras 7 e 8 resumizam os regimes de escoamentos apresentados por Williamson (1996) no trabalho em que revisou os resultados já existentes sobre escoamento ao redor de cilindro.

Roshko (1993) e Williamson (1996), revisaram os trabalhos existentes sobre escoamento ao redor de um cilindro isolado e mostraram que fatores tais como a rugosidade do cilindro, intensidade da turbulência do escoamento não perturbado, razão de bloqueio, razão de aspecto e as condições de extremidade do cilindro, afetam os números de Reynolds para os quais ocorrem as transições. Estes fatores são responsáveis pela dispersão dos resultados observados na literatura.

2.4.1 Esteira simétrica

O estudo da instabilidade bidimensional de uma esteira pode ser desenvolvido estudando-se o perfil da esteira. Schmid e Henningson (2001) apresentam-no como um problema físico clássico que demonstra o conceito de instabilidade absoluta. O problema começou a ser modelado sem viscosidade e com as hipóteses de escoamento incompressível e escoamento localmente paralelo; razão pelo qual era conveniente desenvolver o estudo usando somente o perfil. Essa última hipótese é a mais restritiva pois, implica que em cada seção atrás do cilindro, as propriedades da esteira precisam ser representadas localmente por propriedades de um escoamento paralelo. Neste contexto, pesquisadores testaram diferentes perfis de velocidade média.

Adotando hipóteses de escoamento incompressível, Betchov e Criminale (1966) propuseram um modelo de perfil médio para estudar a instabilidade absoluta de um jato

e uma esteira, supondo escoamento localmente paralelo. O perfil do jato era dado por $U(y) = \text{sech}^2 y$ e o perfil da esteira era da forma $U(y) = 1 - \text{sech}^2 y$. Os resultados do jato são válidos para esteira a menos de uma transformação de coordenadas. Os resultados foram inesperados, uma vez que, depois de traçarem a taxa amplificação espacial e temporal dos modos sinuoso e varicoso do jato simétrico e da esteira simétrica, mapearam o ponto de ramificação da singularidade, isto é, onde $\partial\omega/\partial\alpha = 0$. Desta forma, encontraram a frequência na qual ocorre o crescimento espacial chamada de frequência perigosa; $\omega = 0.55$. O número de Strouhal correspondente era $St = fD/U_0 = 0.18$, para diâmetro do cilindro, D . A ocorrência da singularidade, que não estava prevista, fez com que eles reavaliassem algumas hipóteses do problema; a saber, a viscosidade e os termos não lineares de U em x .

Seguindo a mesma metodologia de Betchov e Criminale (1966), Huerre e Monkewitz (1985) trataram desse problema considerando a viscosidade e adotaram um perfil de velocidade base, adimensional, da forma Gaussiana dado por $U(y) = 1 - \lambda e(-y^2 \ln 2)$. Na expressão o parâmetro λ representa o deficit de velocidade deste perfil que se ajusta ao perfil de velocidade base medido em várias distâncias do cilindro. Esta hipótese já havia sido sugerida por Betchov e Criminale (1966) para adequação do método. Eles resolveram a equação de Orr-Sommerfeld e mostraram que o Re crítico não depende de λ . Eles ainda encontraram $\alpha_c = 0.18$ e $\alpha_c = 0.42$ para os correspondentes Reynolds críticos $Re_{\omega_c} = 3.76$ e $Re_{\omega_c} = 53$ para os modos sinuoso e varicoso respectivamente; onde o $Re_{\omega_c} = \lambda b/\nu$ e $b = \frac{U_0 - U(b)}{U_0 - U(0)}$. Re_{ω_c} é um parâmetro que utiliza uma dimensão característica da esteira. Eles encontraram o tipo de instabilidade obtido por Betchov e Criminale (1966), a partir da localização da singularidade do ponto de ramificação no plano complexo de frequência angular; porém, adotando escoamento viscoso. Hultgren e Aggarwal (1987) apresentam famílias de esteiras que são absolutamente instáveis para $\lambda = 0.943$ e convectivamente instáveis se $\lambda < 0.943$.

Wazzan, Okamura e Keltener (1973) consideraram os efeitos não paralelos para calcular a curva neutra $Re \times$ número de onda e obtiveram a frequência crítica $\omega = 0.615$ e número de Reynolds Crítico $Re_{\omega_c} = 3.55$. Esses resultados concordam com os resultados

experimentais apresentados em (SATO; KURIKI, 1961).

2.4.2 Esteira assimétrica

Existem duas configurações básicas para um cilindro em escoamento cisalhante, a saber, escoamento cisalhante axial e planar. No escoamento cisalhante axial a velocidade varia ao longo do comprimento L . No escoamento cisalhante planar a velocidade varia ao longo do diâmetro D do cilindro. A figura 9 ilustra estes escoamentos.

Figura 9: Cilindro isolado em escoamento cisalhante: (a) axial e (b) planar

A configuração do escoamento axial é aplicável para o estudo de cabos submarinos e plataformas *offshore* imersas em correntes oceânicas. Estas e outras aplicações, têm motivado um número de experimentos e estudos numéricos sobre escoamento cisalhante axial ao redor de corpos rombudos. O caso do escoamento cisalhante planar, pouco estudado em relação ao axial, tem como aplicações o estudo de gasodutos submarinos imersos em corrente oceânica ou próximo ao leito, bem como grandes pontes imersas na camada limite atmosférica. Esse caso é o objeto de estudo desse trabalho.

Na literatura que trata deste assunto, o perfil de velocidade desse escoamento à montante do cilindro, em geral, é dado por

$$U(y) = U_c + Ay, \quad (2.3)$$

para um gradiente de velocidade constante, $A(= dU/dy)$. A coordenada normal ao esco-

amento é y , e o valor da velocidade na altura do centro do cilindro U_c . Para um cilindro de diâmetro, D , o número de Reynolds é baseado em U_c , isto é, $Re = U_c D / \nu$, onde ν é a viscosidade cinemática do fluido. O gradiente de velocidade do escoamento cisalhante uniforme é caracterizado pelo parâmetro de cisalhamento, $K = AD / U_c$.

O escoamento cisalhante planar uniforme ao redor de um cilindro tem sido investigado teoricamente, numericamente e experimentalmente. Zdravkovich (1997) revisou vários modelos teóricos para este escoamento. Estudos numéricos foram realizados por Tamura, Kiya e Arie (1980), Yoshino e Hayashi (1984) e Lei, Cheng e Kavanagh (2000). Trabalhos experimentais foram feitos por Kiya, Tamura e Arie (1980), Kwon, Sung e Hyun (1992), Sumner e Akosile (2003). A tabela 1 sumariza as principais características dos trabalhos encontrados na literatura, onde B representa a razão de bloqueio, Re número de Reynolds e K parâmetro de cisalhamento.

Estes trabalhos investigam essencialmente o efeito do cisalhamento e do número de Reynolds no desprendimento de vórtices e na magnitude das forças de sustentação e arrasto. Apesar de dos grandes avanços obtidos nessas investigações, alguns aspectos se apresentam como controversos. Lei, Cheng e Kavanagh (2000), Sumner e Akosile (2003) e Kang (2006), também apontam essa aparente discrepância entre os estudos de escoamento cisalhante uniforme que ainda permanecem para ser resolvidas. De forma mais detalhada, essas questões controversas são descritas a seguir.

Kiya, Tamura e Arie (1980), Kwon, Sung e Hyun (1992) e Tamura, Kiya e Arie (1980), reivindicam que a frequência de desprendimento de vórtices, f , ou o número de Strouhal, $St = fD / U_c$, cresce com o aumento do parâmetro de assimetrias, K , como pode ser visto nas figuras 10 a 12. Esse aumento é dependente do número de Reynolds. Nestes experimentos a variação do número de Reynolds foi obtida pela variação do diâmetro do cilindro.

Lei, Cheng e Kavanagh (2000), Sumner e Akosile (2003) e Kang (2006), ao contrário, reivindicam que a frequência do desprendimento se reduz com o aumento do cisalhamento. Os resultados apresentados por Sumner e Akosile (2003), correspondem a uma faixa de

Tabela 1: *Condições de escoamento dos trabalhos encontrados na literatura*

Referências	Método	Re	K	B (%)
Vitola (2006)	numérico	1800	0 – 0,20	
Kang (2006)	numérico	50 – 160	0 – 0,20	0,01 e 0,05
Sumner e Akosile (2003)	experimental	$4,0 \times 10^4 - 9,0 \times 10^4$	0,02 – 0,07	1,8 – 2,7
Lei, Cheng e Kavanagh (2000)	numérico	80 – 1000	0 – 0,25	12,5
Kwon, Sung e Hyun (1992)	experimental	600 – 1600	0 – 0,25	6,7 – 16
Tamura, Kiya e Arie (1980)	numérico	40 e 80	0 – 0,20	≈ 0
Kiya, Tamura e Arie (1980)	experimental	100 – 1000	0 – 0,25	2,7 – 17
Yoshino e Hayashi (1984)	numérico	80	0 – 0,20	≈ 0

apenas $0 \leq K \leq 0.07$ e mesmo assim apresentam um decaimento no número de Strouhal, como pode ser visto na figura 15. Enquanto Sumner e Akosile (2003) obtiveram seus resultados através de experimentos em túnel de vento, Lei, Cheng e Kavanagh (2000), Kang (2006) e Vitola (2006) utilizam simulações numéricas. As figuras 14 a 17 mostram os resultados da variação do número de Strouhal para o parâmetro de cisalhamento K em Lei, Cheng e Kavanagh (2000) e Kang (2006). Os resultados de Yoshino e Hayashi (1984) apresentados na figura 13, em certa medida concordam com Lei, Cheng e Kavanagh (2000), Sumner e Akosile (2003) e Kang (2006), mostrando um decaimento do número de Strouhal para valores de $K \leq 0.1$.

Tabela 2: *Resultados do efeito do cisalhamento no número de Strouhal*

Referências	Re	K	St
Vitola (2006)	1800	0 – 0,20	↓
Kang (2006)	50 – 160	0 – 0,20	↓
Sumner e Akosile (2003)	$4,0 \times 10^4 - 9,0 \times 10^4$	0,02 – 0,07	↓
Lei, Cheng e Kavanagh (2000)	80 – 1000	0 – 0,25	↓
Kwon, Sung e Hyun (1992)	600 – 1600	0 – 0,25	↑
Tamura, Kiya e Arie (1980)	40 e 80	0 – 0,20	↑
Kiya, Tamura e Arie (1980)	100 – 1000	0 – 0,25	↑
Yoshino e Hayashi (1984)	80	0 – 0,15	↑

Uma possível explicação é dada por Kang (2006) que aponta o efeito de bloqueio como responsável por promover essa aparente discrepância dos resultados. Como pode ser observado na tabela 2, os diversos trabalhos utilizam valores de bloqueio diferentes. Além disso, Kiya, Tamura e Arie (1980) e Kwon, Sung e Hyun (1992), alteravam o diâmetro do cilindro para variar o número de Reynolds restringindo a largura relativa do domínio do escoamento. Essa situação é apresentada por Kang (2006) como um problema, já que a razão de bloqueio não poderia permanecer constante à medida que o diâmetro

Figura 10: Número de Strouhal (St) versus parâmetro de cisalhamento (K) de Kiya, Tamura e Arie (1980)

Figura 11: Número de Strouhal (St) versus parâmetro de cisalhamento (K) de Kwon, Sung e Hyun (1992)

Figura 12: Número de Strouhal (St) versus parâmetro de cisalhamento (K) de Tamura, Kiya e Arie (1980)

Figura 13: Número de Strouhal (St) versus parâmetro de cisalhamento (K) de Yoshino e Hayashi (1984)

fosse alterado. Os resultados dos efeitos do cisalhamento no número de Strouhal, são sumarizados na tabela 2.

Também foi investigado por Kiya, Tamura e Arie (1980) os efeitos do cisalhamento na supressão no desprendimento de vórtices. Eles encontraram indicativos de supressão para valores altos do parâmetro de cisalhamento na faixa de número de Reynolds $43 \leq Re \leq 220$, o que não foi confirmado por Kwon, Sung e Hyun (1992), Lei, Cheng e Kavanagh (2000), Vitola (2006), Yoshino e Hayashi (1984), Sumner e Akosile (2003) e Kang (2006).

Figura 14: Número de Strouhal (St) versus parâmetro de cisalhamento (K) de Lei, Cheng e Kavanagh (2000)

Figura 15: Número de Strouhal (St) versus parâmetro de cisalhamento (K) de Sumner e Akosile (2003)

Figura 16: Número de Strouhal (St) versus parâmetro de cisalhamento (K) de Kang (2006)

Figura 17: Número de Strouhal (St) versus parâmetro de cisalhamento (K) de Vitola (2006)

Outros trabalhos de investigação dos efeitos do cisalhamento no escoamento base foram realizados utilizando-se de prismas. Nesse caso, os resultados apontam para um decaimento do número de Strouhal com o aumento do cisalhamento (SAHA; BISWAS; MURALIDHAR, 1999).

Metodologia

3.1 Modelo Físico

Um esquema da geometria da esteira de um escoamento cisalhante ao redor de um cilindro pode ser visto na figura 19.

Figura 18: Geometria da esteira assimétrica de um cilindro.

Uma simulação numérica com a presença do corpo, leva a um custo computacional enorme, já que esse custo está relacionado com o tamanho do domínio computacional. Lei, Cheng e Kavanagh (2000) por exemplo, utilizam um domínio computacional de $32D \times 20D$, onde D é o diâmetro do cilindro. A condição inicial, em geral, gera muito ruído. Esse ruído, muitas vezes, contraria a taxa de amplificação das perturbações infinitesimais.

A fim de investigar os efeitos da assimetria na esteira, foi proposto um modelo simpli-

ficado, a saber, uma esteira paralela e periódica longe do corpo. Deste modo foi possível realizar uma análise temporal considerando o escoamento periódico na direção do escoamento. O escoamento é uniforme em $y \rightarrow \pm\infty$, diferente do caso real que o escoamento é cisalhante nesta região. Para tanto, adotou-se um perfil para a esteira assimétrica composta por um perfil de esteira simétrica e um perfil de camada de mistura. Além disso, adotou-se ainda a hipótese de escoamento paralelo nas simulações. Nas simulações numéricas isto foi feito através do cancelamento, para o escoamento base, dos efeitos viscosos na direção transversal ao escoamento ao escoamento. Um esquema desse modelo pode ser visto na figura 19.

Figura 19: Modelo físico adotado: esteira paralela e periódica.

O perfil de uma esteira simétrica é dado por:

$$U_e(y) = 1 - \lambda \exp^{-y^2 \ln 2}, \quad (3.1)$$

onde λ representa o déficit de velocidade deste perfil e o índice e indica esteira. O efeito desse parâmetro pode ser visto na figura 20. Entretanto, adotou-se para este trabalho $\lambda = 1$.

Este perfil foi adimensionalizado pela velocidade do escoamento livre, ou seja, U_∞ e pelo parâmetro b que é definido de tal forma que $U_e(b) = (U_\infty + U_{ec})/2$. Como o eixo de simetria é o eixo y , adota-se $U_e(y = 0) = U_{ec}$. Dessa forma, o número de Reynolds baseado na esteira é definido como $Re_e = bU_\infty/\nu$. A definição de b pode ser visto geometricamente na figura 21.

Figura 20: Variação do parâmetro λ no perfil simétrico de uma esteira gaussiana.

Figura 21: Definição geométrica de b .

O perfil da camada de mistura é dado por:

$$U_{cm}(y) = U_{cm\infty} \tanh\left(\frac{2y}{\delta_{\omega_0}}\right), \quad (3.2)$$

onde o índice cm indica camada de mistura. O perfil está adimensionalizado pela espessura

Figura 22: Perfil da camada de mistura.

Figura 23: Perfil de velocidade de uma esteira assimétrica para diferentes K .

de vorticidade que é definida por

$$\delta_{\omega_0} = c \frac{M_1 - M_2}{|dU_{cm}/dy|_{max}},$$

onde

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = c(M_1 - M_2) [1 - \tanh(2y)],$$

sendo c a velocidade do som, M_1 e M_2 representam o escoamento médio temporal na parte superior ($y > 0$) e na parte inferior ($y < 0$), respectivamente.

O perfil composto pela esteira gaussiana e a tangente hiperbólica da camada de mistura pode assim ser escrito na forma

$$U(y) = 1 - \lambda \exp^{-y^2 \ln 2} + K \tanh(2y), \quad (3.3)$$

onde o parâmetro K se refere ao parâmetro de assimetria do perfil. Seu efeito pode ser visto na figura 23. O perfil assimétrico foi adimensionalizado da mesma forma que o perfil simétrico, porém, o valor de referência b a ser considerado é definido de tal forma que

$$U(b) = (U_{min} + U_{max})/2.$$

Assim, o número de Reynolds foi definido como $Re = bU/\nu$. Entretanto, existe uma relação entre o parâmetro b pela qual o perfil da esteira foi adimensionalizado e a espessura de vorticidade δ_ω . Pelo teorema de Rayleigh, este perfil de velocidade é considerado instável.

3.2 Formulação Característica das Equações de Navier-Stokes

Considerando escoamento compressível bidimensional, a equação da continuidade e as equações de quantidade de movimento na direção x e y , na forma não-conservativa, são escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = - \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right] - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt}$$

onde ρ é a densidade, p a pressão, u e v é a componente de velocidade nas direções x e y , respectivamente, e μ a viscosidade. O fluxo de calor devido a condutibilidade térmica

$$q_i = - \frac{1}{(\gamma - 1) M^2 Pr Re} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad (3.5)$$

onde γ é a razão do calor específico e T é a temperatura do escoamento. O número de Mach é dado por

$$M = \frac{U_\infty}{\sqrt{\gamma R T_\infty}}, \quad (3.6)$$

e o número de Prandtl definido por

$$Pr = \frac{c_p \mu_\infty}{k}, \quad (3.7)$$

onde k é o coeficiente de condutibilidade térmica e c_p é o calor específico.

Além disso, considera-se a equação do gás ideal como sendo

$$p = \rho R T. \quad (3.8)$$

onde R é uma constante para cada gás. A entalpia é definida como $h = u_{int} + p/\rho$, onde u_{int} é a energia interna. Assim, a equação de entalpia pode ser escrita, usando (3.8), como

$$h = u_{int} + R T. \quad (3.9)$$

Como h é uma função apenas de T , sendo c_p o calor específico,

$$h = c_p dT. \quad (3.10)$$

Diferenciando a equação (3.8)

$$dp = d\rho R T + \rho R dT \quad (3.11)$$

e usando s como entropia e as equações (3.9) e (3.10) pode-se escrever:

$$dh = c_p dT = T ds + \frac{dp}{\rho}. \quad (3.12)$$

Substituindo (dT) e T das equações (3.11) e (3.8) em (3.12), obtém-se:

$$c_p \left(\frac{dp}{\rho R} - \frac{p d\rho}{\rho^2 R} \right) = \frac{p}{\rho R} ds + \frac{dp}{\rho}. \quad (3.13)$$

Usando que $(R = c_p - c_v)$ e $\left(\gamma = \frac{c_p}{c_v}\right)$, pode-se escrever:

$$dp \frac{1}{\gamma - 1} = \frac{p}{R} ds + \frac{\gamma RT}{\gamma - 1} d\rho. \quad (3.14)$$

Agora, usando $(c^2 = \gamma RT)$, obtém-se a equação

$$d\rho = \frac{dp}{c^2} - \frac{p}{c^2 c_v} ds. \quad (3.15)$$

Para realizar as simulações numéricas diretas, usou-se as equações (3.4) na formulação característica, proposta por Sesterhenn (2001),

Usando-se os conceitos de termodinâmica, deduz-se a equação de quantidade de movimento unidimensional, na formulação característica, com o objetivo de demonstrar o desenvolvimento desta formulação. Considera-se as equações de Euler unidimensionais, que são dadas por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (3.16)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \quad (3.18)$$

Usando a equação do gás ideal e aplicando o operador (3.15) nas equações (3.16) - (3.18) fica

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{p}{c_v} \left(\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.19)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \quad (3.21)$$

Dividindo a equação (3.19) por (ρc) e somando ou subtraindo a equação (3.20) multiplicada por $1/\rho$ pode-se reescrever as equações (3.19) a (3.21), respectivamente:

$$\left(\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) + (u + c) \left(\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{c}{c_p} \left(\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.22)$$

$$\left(\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) + (u - c) \left(\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{c}{c_p} \left(\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \quad (3.24)$$

Usando a equação (3.12), a definição da velocidade do som e sua forma diferencial $\left(\delta T = \frac{2c}{\gamma R} \delta c \right)$, escreve-se $\left(\frac{\delta p}{\rho c} \pm \delta u \right)$ da seguinte forma:

$$\frac{\delta p}{\rho c} \pm \delta u = \frac{2}{(\gamma - 1)} \delta c \pm \delta u - \frac{c}{\gamma R} \delta s.$$

Agora, usando a definição de variável de Riemann $\left(\mathfrak{R}^\pm = \frac{2}{(\gamma-1)}c \pm u \right)$ escreve-se a equação

$$\frac{\delta p}{\rho c} \pm \delta u = \delta \mathfrak{R}^\pm - \frac{c}{\gamma R} \delta s. \quad (3.25)$$

Para o caso de escoamento em que $(\delta s \equiv 0)$; usando (3.25), escreve-se as equações (3.22) e (3.23) em função das variáveis de Riemann:

$$\frac{\partial \mathfrak{R}^\pm}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial \mathfrak{R}^\pm}{\partial x} = 0. \quad (3.26)$$

As equações (3.26) mostram que as variáveis de Riemann $(\mathfrak{R}^\pm)$ são conservadas ao longo das características $\left(\frac{\partial x}{\partial t} = (u \pm c) \right)$ no espaço e tempo. Devido a esta conservação, para escoamentos em que $(\delta s \equiv 0)$ as variáveis de Riemann são invariantes. Definindo $X^\pm$:

$$X^\pm = (u \pm c) \frac{\partial \mathfrak{R}^\pm}{\partial x} = (u \pm c) \left(\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} \pm \frac{\partial u}{\partial x} \right); \quad (3.27)$$

$X^\pm$ representa a taxa de variação no tempo $(\mathfrak{R}^\pm)$.

O sistema se simplifica diagonalizando-se as equações (3.22) a (3.24) adicionando e subtraindo $c/2$ vezes a equação (3.23), reescreve-se a equação (3.22) como:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho c}{2} \left[(u + c) \left(\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + (u - c) \left(\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] - \frac{p}{c_v} \left(\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0. \quad (3.28)$$

Analogamente, adicionando e subtraindo $c/2$ vezes a equação (3.22), reescreve-se a equação (3.23) como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[(u + c) \left(\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - (u - c) \left(\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] = 0.$$

Definindo o transporte de entropia como

$$X^s = u \frac{\partial s}{\partial x} \quad (3.29)$$

e usando as equações (3.28) e (3.2), escreve-se as equações unidimensionais de Euler:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho c}{2} [X^+ + X^-] - \frac{p}{c_v} \left(\frac{\partial s}{\partial t} + X^s \right) = 0 \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} [X^+ - X^-] = 0 \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + X^s = 0. \quad (3.32)$$

Nota-se que algebricamente não existe diferença entre as equações (3.30), (3.31) e (3.32) das equações (3.16), (3.17) e (3.18). Entretanto, com o novo conjunto de equações, permite-se introduzir condições de contorno não-reflexivas em y . Estas condições não reflexivas também são chamadas de condições anecóicas.

Usando-se as idéias apresentadas para as equações unidimensionais de Euler, as equações de Navier-Stokes bi-dimensionais na formulação característica podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\rho c}{2} [(X^+ + X^-) + (Y^+ + Y^-)] + \frac{p}{c_v} \left(\frac{\partial s}{\partial t} + X^s + Y^s \right) \\
\frac{\partial u}{\partial t} &= -\left[\frac{1}{2} (X^+ - X^-) + Y^u \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{1j}}{\partial x_j} \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= -\left[X^v + \frac{1}{2} (Y^+ - Y^-) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{2j}}{\partial x_j} \\
\frac{\partial s}{\partial t} &= -(X^s + Y^s) + \frac{R}{p} \left(-\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \phi \right).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

onde os termos são definidos como: ondas acústicas

$$X^+ = (u + c) \left(\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right); \quad X^- = (u - c) \left(\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right); \tag{3.34}$$

$$Y^+ = (v + c) \left(\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right); \quad Y^- = (v - c) \left(\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right); \tag{3.35}$$

transporte de entropia

$$X^s = u \frac{\partial s}{\partial x}, \tag{3.36}$$

$$Y^s = v \frac{\partial s}{\partial y}, \tag{3.37}$$

transporte de vorticidade

$$X^v = u \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{3.38}$$

$$Y^u = v \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{3.39}$$

tensor das tensões viscosas

$$\tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} (\nabla \vec{V}) \delta_{ij} \right], \tag{3.40}$$

fluxo de calor

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}, \tag{3.41}$$

tensor de dissipação

$$\phi = \tau_{ij} s_{ij}, \tag{3.42}$$

onde s_{ij} é o tensor de deformação definido como

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.43)$$

A figura 24 mostra o esquema dos termos de ondas acústicas para a formulação característica bidimensional.

Figura 24: Termos em onda acústica de um domínio bidimensional

Usando o esquema apresentado na figura 24, as condições de contorno não-reflexivas na direção y são dadas por

$$Y^- = 0 \text{ em } y_{max} \quad (3.44)$$

$$Y^+ = 0 \text{ em } y_{min} \quad (3.45)$$

além da condição de periodicidade na direção x .

3.2.1 Condições Iniciais

A condição inicial empregada foi o perfil composto pela gaussiana da esteira simétrica combinado a um perfil tangente hiperbólico da camada de mistura. Entretanto, o perfil base recebe uma perturbação simétrica em v e antissimétrica em u ; a saber:

$$\tilde{u}(x, y) = A \sin(\alpha x) \cdot 2\sigma y e^{-\sigma y^2} / \alpha \quad (3.46)$$

$$\tilde{v}(x, y) = A \cos(\alpha x) \cdot e^{-\sigma y^2} \quad (3.47)$$

Para as simulações apresentadas neste trabalho, a amplitude A da perturbação inicial

foi da ordem de 10^{-8} e a curvatura gaussiana, $\sigma = 1$. Além disto, a velocidade do som de referência foi de $c = 340,21m/s$, número de Mach $Ma = 0,1$, a constante de gás $R = 287m^2/s^2$, a razão de calor específico $\gamma = 1,4$, número de Prandtl $Pr = 1,0$ e o domínio em x periódico de tamanho $L_x = 2\pi/\alpha$.

3.3 Metodologia da solução numérica

3.3.1 Discretização espacial

O código computacional inicialmente desenvolvido por Germanos e Medeiros (2005), adota um esquema de diferenças finitas compactas de 6ª ordem para resolver as derivadas espaciais das equações de Navier-Stokes, Lele (1992). O método usa expansão em séries de Taylor para o cálculo aproximado das derivadas. A vantagem do esquema compacto em relação aos esquemas não compactos é o menor erro de truncamento com aproximações de mesma ordem de precisão (GERMANOS; MEDEIROS, 2005).

Para o cálculo da primeira e segunda derivadas, usou-se um esquema centrado com um *estencil* de 3 e 5 pontos, do lado esquerdo e direito das equações, respectivamente. O esquema compacto de 6ª ordem adotado para o cálculo da primeira e segunda derivadas nos pontos do interior do domínio foi

$$f'_{i-1} + 3f'_i + f'_{i+1} = \frac{(-f_{i-2} - 28f_{i-1} + 28f_{i+1} + f_{i+2})}{12h} + O(h^6) \quad (3.48)$$

$$2f''_{i-1} + 11f''_i + 2f''_{i+1} = \frac{(3f_{i-2} + 48f_{i-1} - 102f_{i+1} + 48f_{i+2} + 3f_{i+2})}{4h^2} + O(h^6) \quad (3.49)$$

onde h é o espaçamento da malha.

O modelo físico adotado neste trabalho sugere o estudo da esteira periódica, o que permite o uso de um domínio computacional periódico na direção x , e assim, um esquema para solução de matrizes tri-diagonais cíclicas pôde ser utilizado.

A fim de facilitar a notação, fez-se as seguintes substituições: o índice $(i - 1)$ por $(n - 1)$ e o índice $(i - 2)$ pelo índice $(n - 2)$ para o cálculo de x_1 . O índice $(i - 2)$ pelo índice $(n - 1)$ para o cálculo de x_2 . O índice $(i + 2)$ pelo índice (2) para o cálculo de

x_{n-1} e, por fim, o índice $(i + 1)$ pelo índice (2) e o índice $(i + 2)$ para o ponto $x = x_n$ nas equações (3.48), (3.49). Escreve-se o sistema de equações de diferenças para a primeira derivada, da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & & & & & 1 \\ 1 & 3 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1 & 3 & 1 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & 1 & 3 & 1 \\ & & & & & & 1 & 3 \\ 1 & & & & & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \vdots \\ f'_i \\ \vdots \\ f'_{n-1} \\ f'_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12h_x} \begin{pmatrix} -f_{n-2} - 28f_{n-1} + 28f_2 + f_3 \\ -f_{n-1} - 28f_1 + 28f_3 + f_4 \\ \vdots \\ -f_{i-2} - 28f_{i-1} + 28f_{i+1} + f_{i+2} \\ \vdots \\ -f_{n-3} - 28f_{n-2} + 28f_n + f_2 \\ -f_{n-2} - 28f_{n-1} + 28f_2 + f_3 \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

O sistema de equações de diferenças para a segunda derivada, da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix}
 11 & 2 & & & & & 2 \\
 & 2 & 11 & 2 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & 2 & 11 & 2 & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & & & & 2 & 11 & 2 \\
 & & & & & & 2 & 11
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1'' \\ f_2'' \\ \vdots \\ f_i'' \\ \vdots \\ f''_{v_{n-1}} \\ f_n'' \end{pmatrix} = \quad (3.51)$$

$$\frac{1}{h_x^2} \begin{pmatrix} 3f_{n-2} + 48f_{n-1} - 102f_1 + 48f_2 + 3f_3 \\ 3f_{n-1} + 48f_1 - 102f_2 + 48f_3 + 3f_4 \\ \vdots \\ 3f_{i-2} + 48f_{i-1} - 102f_i + 48f_{i+1} + 3f_{i+2} \\ \vdots \\ 3f_{n-3} + 48f_{n-2} - 102f_{n-1} + 48f_n + 3f_2 \\ 3f_{n-2} + 48f_{n-1} - 102f_n + 48f_2 + 3f_3 \end{pmatrix}$$

Além disso, visando alta resolução na região de grande vorticidade e um custo computacional otimizado, empregou-se uma malha com estiramento. O estiramento de malha usado foi proposto por Anderson (1990)

$$y_p = B + \frac{1}{\tau} \sinh^{-1} \left[\left(\frac{y_c}{y_{centro}} - 1 \right) \sinh(\tau B) \right], \quad (3.52)$$

onde

$$B = \frac{1}{2\tau} \ln \left[\frac{1 + (e^\tau - 1)y_{centro}/h}{1 + (e^{-\tau} - 1)y_{centro}/h} \right].$$

Na equação 3.52, y_c é o valor da coordenada computacional, y_{centro} o valor de y do domínio físico, h a altura do domínio e τ o parâmetro de estiramento.

Utilizou-se estiramento de malha na direção y . Assim, o cálculo das derivadas, nesta direção, são realizados usando-se métricas. Exemplos de malhas sem e com estiramento podem ser visto nas figuras 25 e 26.

Figura 25: Malha sem estiramento na direção y .

Figura 26: Malha com estiramento na direção y com $\tau = 3$.

Para direção y onde a malha é estirada neste trabalho, o esquema de cálculo da derivada espacial primeiramente computa a derivada de uma função em uma malha com $\delta y_c = \frac{1}{n-1}$ sendo n o número de pontos e δy_c o espaçamento da malha computacional. No passo seguinte, multiplicou-se pela métrica para o cálculo do valor da derivada no domínio físico. Utilizando-se de métricas obtém-se primeira e segunda derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y_p} &= \frac{\partial u}{\partial y_c} \underbrace{\frac{\partial y_c}{\partial y_p}}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y_p^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y_c^2} \underbrace{\left(\frac{\partial y_c}{\partial y_p} \right)^2} + \frac{\partial u}{\partial y_c} \underbrace{\frac{\partial^2 y_c}{\partial y_p^2}}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

O valor das derivadas foram obtidos numericamente segundo os esquemas apresentados anteriormente nesta seção.

3.3.2 Integração temporal

Utilizou-se um método de Runge-Kutta de 4ª ordem para a integração. É um dos métodos mais utilizados pela sua simplicidade, além de ser suficientemente preciso para tratar dos problemas de maneira eficiente. Seu erro de truncamento local é proporcional a h^5 e, para um intervalo finito, o erro de truncamento global é no máximo uma constante vezes h^4 , sendo h o passo de integração. Uma desvantagem do método é as 4 funções a

serem computadas a cada passo.

Sua fórmula, basicamente, envolve uma média ponderada de valores da função em pontos diferentes no intervalo de tempo $t_n \leq t \leq t_{n+1}$, e é dada da seguinte forma:

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6} \right), \quad (3.54)$$

onde

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, y_n) \\ K_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_1\right) \\ K_3 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_2\right) \\ K_4 &= f\left(t_n + h, y_n + hK_3\right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Como pode-se notar, o método requer apenas o valor de y no ponto $x = x_n$ para encontrar y e y' no $x = x_{n+1}$, ou seja, não precisa do y_{n-1} , o que reduz o armazenamento e acesso à memória, o que pode ser visto como uma vantagem.

O método é condicionalmente estável. Dessa forma, restringe-se o método a um critério de estabilidade, que pode ser obtido através de uma análise de von Neumann.

Para este trabalho, adotou-se os seguintes critérios (bidimensionais):

- Critério de estabilidade para convecção ou condição de Courant-Friendrichs-Lewy (CFL)

$$\Delta t \leq CFL / \left(\frac{\frac{1}{M} + u_{max}}{dx} + \frac{\frac{1}{M} + v_{max}}{dy} \right); \quad (3.56)$$

- Critério de estabilidade para difusão

$$\Delta t \leq \frac{D_{vt}}{\frac{1}{Re} \left(\frac{1}{dx^2} + \frac{1}{dy^2} \right)}, \quad (3.57)$$

onde (u_{max}, v_{max}) são as máximas componentes de velocidade do escoamento e (dx, dy) são os intervalos de discretização espacial nas direções (x, y) respectivamente. Além disso, para este tabalho considerou-se $CFL = D_{vt} = 1, 0$.

Aplicando os critérios, determina-se o passo de tempo Δt que satisfaz aos dois critérios simultaneamente para uma malha computacional dada.

3.3.3 Filtro Numérico

Após o último passo de integração temporal, devido à presença de termos não lineares nas equações que descrevem o escoamento, aplicou-se um filtro numérico compacto. Estes termos não lineares, produzem dobramentos de frequências (“*aliasing*”) introduzindo perturbações de alta frequência nas variáveis, que podem estar acima da resolução da malha computacional.

Um filtro compacto de alta ordem de precisão, proposto por Lele (1992), foi utilizado para filtrar estas perturbações. O filtro foi aplicado, nas direções x e y , no último sub passo do método de Rung-Kutta. Através do filtro compacto de 6ª ordem, a distribuição das variáveis primitivas é recalculada por uma matriz pentadiagonal, descrita da seguinte forma:

onde os coeficientes do sistema são dados por:

3.3.4 Convergência de Malha

Esta seção descreve o que poderia ser uma das mais esquecidas questões que afetam a precisão, a saber; convergência de malha. Isto refere-se à quantidade de pontos, e consequentemente, a distância entre eles, necessários em um modelo para garantir que os

resultados de uma análise não sejam afetados pela alteração do tamanho da malha.

Realizou-se um teste de convergência de malha a fim de se obter uma malha em que os resultados ficasse independente da malha. As figuras 27 e 28 mostram os resultados deste teste realizado para as seguintes malhas: *Malha 1* - 16×32 , *Malha 2* - 32×64 , *Malha 3* - 64×128 , *Malha 4* - 128×256 , *Malha 5* - 256×512 . Pode-se observar claramente que a solução converge para um valor assintótico com o refinamento da malha, a partir dos cálculos realizados para *Malha 3*. Dessa forma, foi adotou-se uma malha bidimensional 64×128 .

Figura 27: Teste de convergência de malha: Evolução temporal da amplitude para número de onda $\alpha = 0,8$, número de Reynolds $Re = 100$ e $Ma = 0,1$, para diferentes malhas.

Figura 28: Teste de convergência de malha: Taxa de amplificação temporal para número de onda $\alpha = 0,8$, número de Reynolds $Re = 100$ e $Ma = 0,1$, para diferentes malhas.

As taxas de amplificação temporal apresentadas na figura 28 são obtidas pela inclinação da parte linear da evolução temporal apresentada na figura 27.

Análise da Instabilidade Hidrodinâmica Linear

4.1 Método de Resolução da Equação de Orr-Sommerfeld

Considerando o escoamento bi-dimensional e incompressível, as equações básicas, chamadas de equações de Navier-Stokes, são descritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.2)$$

com a equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4.3)$$

Nas equações (4.1) a (4.3), u denota a componente de velocidade adimensional na direção principal do escoamento (x), v a componente de velocidade na direção perpendicular ao escoamento principal (y), p pressão e ρ densidade do escoamento.

Assumindo que o escoamento base é localmente paralelo, portanto ele não depende da coordenada longitudinal e não possui componente na direção y . Decompondo as variáveis dependentes em uma parte base (média temporal) e uma perturbação infinitesimal, tem-se:

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= U(y) + \tilde{u}(x, y, t) \\
v(x, y, t) &= \tilde{v}(x, y, t) \\
p(x, y, t) &= P + \tilde{p}(x, y, t),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $U(y)$ representa o escoamento base e os termos indicados com tilde representam as flutuações das variáveis.

Substituindo as variáveis descritas pelas equações (4.4) nas equações (4.1), (4.2) e (4.3) no intuito de obtermos equações em função das perturbações. Assim, as equações de Navier-Stokes são reescritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right) \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0 \tag{4.7}$$

onde $U = U(y)$, $\tilde{u} = \tilde{u}(x, y, t)$ e $\tilde{v} = \tilde{v}(x, y, t)$.

Os termos dentro dos colchetes podem ser desprezados em (4.5) e (4.6), uma vez que os produtos entre as perturbações de amplitude muito pequena são desprezíveis. Assim, as equações (4.5), (4.6) (4.7) podem ser simplificadas e escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right) \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0. \tag{4.10}$$

Este processo é chamado de *linearização* porque as equações obtidas são equações lineares. Significa fisicamente que não existe interação entre os modos. Uma grande vantagem

dessas equações lineares é que, se existem duas soluções distintas para o problema, uma combinação linear destas soluções também é solução. Outra vantagem da linearização, é que no caso, o sistema de equações diferenciais parciais pode ser reduzido a um sistema de equações diferenciais ordinárias pela utilização de soluções da forma

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y, t) &= \hat{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} \\ \tilde{v}(x, y, t) &= \hat{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} \\ \tilde{p}(x, y, t) &= \hat{p}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)}.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Estas equações 4.11 indicam que as perturbações se propagam com frequência ω , número de onda α e amplitudes $\hat{u}(y)$, $\hat{v}(y)$ e $\hat{p}(y)$.

Substituindo as expressões (4.11), (4.11) e (4.12) nas equações (4.8), (4.9) e (4.10), para a equação da continuidade tem -se:

$$i\alpha\hat{u}(y) + \frac{d\hat{v}}{dy} = 0.\tag{4.12}$$

Para a equação de quantidade de movimento na direção x e y , tem-se:

$$-i\omega\hat{u} + i\alpha\hat{u}U + \hat{v}\frac{dU}{dy} = -i\alpha\hat{p} + \frac{1}{Re} \left((i\alpha)^2 + \frac{d^2\hat{u}}{dy^2} \right)\tag{4.13}$$

$$-i\omega\hat{v} + i\alpha U\hat{v} = -\frac{d\hat{p}}{dy} + \frac{1}{Re} \left((i\alpha)^2 U + \frac{d^2\hat{v}}{dy^2} \right).\tag{4.14}$$

Assim, as equações são reescritas em termos das autofunções da seguinte maneira:

$$i\alpha(U - c)\hat{u} + \hat{v}\frac{dU}{dy} + i\alpha\hat{p} = \frac{1}{Re} \left(\frac{d^2\hat{u}}{dy^2} - \alpha^2\hat{u} \right)\tag{4.15}$$

$$i\alpha(U - c)\hat{v} + \frac{d\hat{p}}{dy} = \frac{1}{Re} \left(\frac{d^2\hat{v}}{dy^2} - \alpha^2\hat{v} \right)\tag{4.16}$$

$$i\alpha\hat{u}(y) + \frac{d\hat{v}}{dy} = 0.\tag{4.17}$$

O sistema de equações diferenciais 4.15 - 4.17, pode ainda ser simplificado derivando a equação (4.15) em relação a y

$$i\alpha(U - c)\frac{d\hat{u}}{dy} + i\alpha\hat{u}\frac{dU}{dy} + \frac{d\hat{v}}{dy}\frac{dU}{dy} + \hat{v}\frac{d^2U}{dy^2} + i\alpha\frac{d\hat{p}}{dy} = \frac{1}{Re} \left(\frac{d^3\hat{u}}{dy^3} - \alpha^2\frac{d\hat{u}}{dy} \right),\tag{4.18}$$

multiplicando (4.16) por $i\alpha$

$$-\alpha^2(U - c)\hat{v} + i\alpha\frac{d\hat{p}}{dy} = \frac{1}{Re} \left(i\alpha\frac{d^2\hat{v}}{dy} - i\alpha^3\hat{v} \right) \quad (4.19)$$

e fazendo a diferença entre (4.18) e (4.19). Assim:

$$\begin{aligned} i\alpha(U - c)\frac{d\hat{u}}{dy} + i\alpha\hat{u}\frac{dU}{dy} + \frac{d\hat{v}}{dy}\frac{dU}{dy} + \hat{v}\frac{d^2U}{dy^2} + \alpha^2(U - c)\hat{v} \\ = \frac{1}{Re} \left(\frac{d^3\hat{u}}{dy^2} - \alpha^2\frac{d\hat{u}}{dy} + i\alpha^3\hat{v} - i\alpha\frac{d^2\hat{v}}{dy} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Substituindo a equação da continuidade em (4.20) tem-se:

$$\begin{aligned} i(U - c)\frac{d}{dy} \left(i\frac{d\hat{v}}{dy} \right) + \hat{v}\frac{d^2U}{dy^2} + \alpha^2(U - c)\hat{v} \\ = \frac{1}{Re} \left(\frac{d^3}{dy^3} \left(\frac{i}{\alpha}\frac{d\hat{v}}{dy} \right) - \alpha^2\frac{d}{dy} \left(\frac{i}{\alpha}\frac{d\hat{v}}{dy} \right) + i\alpha^3\hat{v} - i\alpha\frac{d^2\hat{v}}{dy^2} \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Obtém-se a conhecida *Equação de Orr-Sommerfeld* multiplicando (4.21) por (α) :

$$\hat{v}'''' - \alpha^2\hat{v}'' + \alpha^4\hat{v} - \alpha^2\hat{v} = i\alpha Re(U - c)(\hat{v}'' - \alpha^2\hat{v}) - i\alpha ReU''\hat{v}'' \quad (4.22)$$

onde $(\prime)$ representa a derivada em relação a y .

Note que se (4.11), (4.11) e (4.12) são soluções de (4.12), (4.13) e (4.14) então os complexos conjugados

$$\tilde{u}(x, y, t)^* = \hat{u}(y)^* e^{i(\alpha^*x - \omega^*t)} \quad (4.23)$$

$$\tilde{v}(x, y, t)^* = \hat{v}(y)^* e^{i(\alpha^*x - \omega^*t)} \quad (4.24)$$

$$\tilde{p}(x, y, t)^* = \hat{p}(y)^* e^{i(\alpha^*x - \omega^*t)} \quad (4.25)$$

de $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ e $\tilde{p}$ também são soluções do sistema. Para terem significado físico, a solução deve ser real e portanto são dadas por:

$$\frac{1}{2}(\tilde{u} + \tilde{u}^*), \quad (4.26)$$

$$\frac{1}{2}(\tilde{v} + \tilde{v}^*), \quad (4.27)$$

$$\frac{1}{2}(\tilde{p} + \tilde{p}^*). \quad (4.28)$$

As condições de contorno são dados por:

$$\hat{v}(y \rightarrow \pm\infty) = 0 \quad (4.29)$$

Uma vez que as condições de contorno são homogêneas, a equação de Orr-Sommerfeld resulta em um problema de autovalor.

Para a solução numérica da equação de Orr-Sommerfeld, é interessante analisar inicialmente a equação para $y \rightarrow \pm\infty$. Nesta região, $U = U_\infty$, definido em (3.3), é constante, e assim, $U' = U'' = 0$. Logo, (4.22) se reduz a:

$$\alpha(U_\infty - c)(\hat{v}'' - \alpha^2 \hat{v}) = \frac{-i}{Re}(\hat{v}'''' - 2\alpha^2 \hat{v}'' + \alpha^4 \hat{v}). \quad (4.30)$$

Multiplicando a equação (4.30) por iRe e aplicando a propriedade distributiva tem-se:

$$-i\alpha Re U_\infty \hat{v}'' + i\alpha Re U_\infty \alpha^2 \hat{v} + i\alpha c Re \hat{v}'' - i\alpha c Re \alpha^2 \hat{v} + \hat{v}'''' - 2\alpha^2 \hat{v}'' + \alpha^4 \hat{v} = 0. \quad (4.31)$$

Colocando os termos em evidência e considerando $\omega = \alpha c$ tem-se:

$$\hat{v}'''' + [-2\alpha^2 - iRe(\alpha U_\infty - \omega)] \hat{v}'' + [\alpha^4 + iRe\alpha^2(\alpha U_\infty - \omega)] \hat{v} = 0. \quad (4.32)$$

Assim, obtem-se uma equação diferencial ordinária de quarta ordem com coeficientes constantes, e portanto, a solução de (4.32) é dada por:

$$\hat{v} = C_1 e^{qy} \quad (4.33)$$

onde C_1 é constante.

Substituindo (4.33) em (4.32) obtém-se:

$$C_1 e^{qy} \left[q^4 - (2\alpha^2 + iRe(\alpha U_\infty - \omega)) q^2 + (\alpha^4 + iRe\alpha^2(\alpha U_\infty - \omega)) \right] = 0. \quad (4.34)$$

Assim, pode-se resolver uma equação de quarto grau em q , onde as raízes são da forma $q = \pm\alpha$ e $q = \pm\sqrt{\alpha^2 + iRe(\alpha U_\infty - \omega)}$.

Fazendo $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + iRe(\alpha U_\infty - \omega)}$, pode-se escrever:

$$\hat{v} = A_1 e^{-\alpha y} + A_2 e^{-\gamma y} + A_3 e^{\alpha y} + A_4 e^{\gamma y} \quad (4.35)$$

Pode-se ainda escrever a equação de Orr-Sommerfeld (4.22) como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem na forma:

$$\Phi' = N\Phi, \quad (4.36)$$

onde $\Phi = \begin{bmatrix} \hat{v}' \\ \hat{v}'' \\ \hat{v}''' \\ \hat{v}'''' \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -B_2 & 0 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}$.

Na matriz, $B_1 = -2\alpha^2 - iRe(\alpha U_\infty - \omega)$ e $B_2 = \alpha^4 + iRe\alpha^2(\alpha U_\infty - \omega)$ são constantes obtidas da equação (4.32), isto é, $\hat{v}'''' + B_1 \hat{v}'' + B_2 \hat{v} = 0$.

As condições de contorno, para $y \rightarrow \pm\infty$ são $u = v = 0$, isto é, $\hat{v}(\pm\infty) \rightarrow 0$. Assim, em $y \rightarrow +\infty$, esta condição implica em

$$\hat{v} = A_3 e^{\alpha y} + A_4 e^{\gamma y}.$$

Logo, $A_3 = A_4 = 0$ e portanto $\hat{v}_+ = \underbrace{A_1 e^{-\alpha y}}_{\hat{v}_{I+}} + \underbrace{A_2 e^{-\gamma y}}_{\hat{v}_{II+}}$, onde o índice + e - representam aonde a solução está sendo calculada, no caso, $y \rightarrow +\infty$ e $y \rightarrow -\infty$ respectivamente.

Em $y \rightarrow -\infty$, esta condição implica em

$$\hat{v} = A_1 e^{-\alpha y} + A_2 e^{-\gamma y}.$$

Logo, $A_1 = A_2 = 0$ e portanto, $\hat{v}_- = \underbrace{A_3 e^{\alpha y}}_{\hat{v}_{I-}} + \underbrace{A_4 e^{\gamma y}}_{\hat{v}_{II-}}$.

A solução necessariamente tem de ser contínua, uma vez que a equação diferencial ordinária é de quarta ordem. Dessa forma, em $y = 0 \Rightarrow \Phi_- = \Phi_+$, ou seja,

$$\begin{aligned}
A_1 \hat{v}_{I+} + A_2 \hat{v}_{II+} - A_3 \hat{v}_{I-} - A_4 \hat{v}_{II-} &= 0 \\
A_1 \hat{v}'_{I+} + A_2 \hat{v}'_{II+} - A_3 \hat{v}'_{I-} - A_4 \hat{v}'_{II-} &= 0 \\
A_1 \hat{v}''_{I+} + A_2 \hat{v}''_{II+} - A_3 \hat{v}''_{I-} - A_4 \hat{v}''_{II-} &= 0 \\
A_1 \hat{v}'''_{I+} + A_2 \hat{v}'''_{II+} - A_3 \hat{v}'''_{I-} - A_4 \hat{v}'''_{II-} &= 0
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Como o interesse está nas soluções não-triviais, isto será possível se, e somente, se,

$$\begin{vmatrix}
\hat{v}_{I+} & \hat{v}_{II+} & -\hat{v}_{I-} & -\hat{v}_{II-} \\
\hat{v}'_{I+} & \hat{v}'_{II+} & -\hat{v}'_{I-} & -\hat{v}'_{II-} \\
\hat{v}''_{I+} & \hat{v}''_{II+} & -\hat{v}''_{I-} & -\hat{v}''_{II-} \\
\hat{v}'''_{I+} & \hat{v}'''_{II+} & -\hat{v}'''_{I-} & -\hat{v}'''_{II-}
\end{vmatrix} = 0. \tag{4.38}$$

Dessa forma, a condição do determinante ser igual a zero garante as soluções não-triviais procuradas.

Observação: No caso da esteira simétrica, existem modos sinuoso e varicoso. Para o modo sinuoso, considera-se as derivadas ímpares do sistema (4.37) iguais à zero, e para o modo varicoso, considera-se a função e a derivada par do sistema (4.37) iguais a zero. No caso assimétrico, pode-se obter duas soluções correspondentes a este modos do caso simétrico.

Para o perfil base dado pela equação (3.3), a equação de Orr-Sommerfeld tem de ser resolvida através de métodos numéricos. Em especial, para número de Reynolds altos, a equação de Orr-Sommerfeld é uma equação rígida. Equações rígidas apresentam soluções que decaem a taxas muito distintas. No caso em questão, isto se dá devido aos autovalores se apresentarem em magnitudes bastante distintas, o que proporciona acentuada razão de rigidez. Nestas condições, é difícil obter numericamente soluções que sejam linearmente independentes. Além disso, a equação tem uma componente que cresce exponencialmente com y . Essa peculiaridade ocasiona a necessidade de se escolher um tamanho do passo de integração muito pequeno, visando a estabilidade e a precisão do método considerado, ou ainda, escolher um método pelo qual esse “problema” seja resolvido.

O método de solução dos problemas de equações rígidas utilizados neste trabalho foi

Figura 29: Esquema de integração para resolver a equação de Orr-Sommerfeld para um perfil assimétrico

o *processo de ortonormalização de Gram-Schmidt* que pode ser visto em maiores detalhes no apêndice A deste trabalho. Durante o processo de integração, este processo de ortonormalização garante a independência linear da solução.

Adicionalmente, solução não física da equação diferencial que cresce com y não foi descartada, mas quando se resolve numericamente o sistema de equações, qualquer erro de arredondamento e/ou truncamento pode ser interpretado como uma solução crescente, no caso indesejada. Quando isto ocorre, o erro pode ser amplificado exponencialmente.

Uma forma encontrada de se evitar este problema é integrar de y_{max} a $y = 0$ e y_{min} a $y = 0$, como pode ser visto na figura 29, ou seja, integra-se de forma que a solução desejada seja crescente na direção de integração, enquanto a solução indesejada é decrescente na região onde $U \approx$ constante.

Um código computacional foi desenvolvido para resolver a equação de Orr-Sommerfeld usando *Shooting Method*. Segue a descrição do procedimento computacional utilizado.

- 1) Seleciona-se valores para um par α e Re . Como a análise é temporal, Re e α são reais e busca-se valores complexos para ω . Entretanto, uma estimativa inicial deve

ser dado para ω . Para esta estimativa, busca-se valores na literatura e a partir daí, a solução encontrada serve de estimativa inicial para um dado par Re e α .

- 2) Integra-se a equação de Orr-Sommerfeld de y_{max} a $y = 0$ e y_{min} a $y = 0$ e, a cada ponto do perfil, ortonormaliza-se a solução usando-se o processo de Gram-Schmidt.
- 3) Aplica-se em $y = 0$ a condição de continuidade da solução calculando-se o determinante dado pela equação (4.38).
- 4) Como a estimativa inicial de ω provavelmente não será solução da equação de Orr-Sommerfeld para os valores selecionados de α e Re , melhora-se a estimativa de ω e integra-se a equação de Orr-Sommerfeld novamente.

Utilizou-se como método de integração da equação de Orr-Sommerfeld um esquema de diferenças finitas do tipo Runge-Kutta de quarta ordem. O método da secante foi utilizado para obter uma nova estimativa para ω a cada iteração. Não foram testados outros métodos para integração, tendo em vista que o método de Runge-Kutta é eficiente e de fácil implementação. O método da secante se mostrou eficiente na busca de uma solução para ω .

Formulou-se o problema de maneira que a análise se reduziu a um problema de autovalores, e para tanto, o cálculo de um determinante dado por (4.38) é inevitável. Esta é condição necessária para obtenção dos autovalores. Utilizou-se o método de decomposição LU. Este método, decompõe a matriz original em um produto de matrizes triangulares superior e inferior. Assim, o cálculo do determinante consiste no produto dos termos da diagonal principal.

4.2 Testes de convergência de malha e análise de influência do domínio

Esta subseção apresenta testes de convergência de malha. Refere-se à quantidade de pontos, e conseqüentemente, a distância entre eles, necessários em um modelo para garantir que os resultados de uma análise não sejam afetados pela malha.

Realizou-se um estudo de convergência de malha a fim de se obter uma malha que adequada. O cálculo foi realizado para as seguinte malhas: *Malha 1* - (162 pontos), *Malha 2* - (1062 pontos), *Malha 3* - (16002 pontos), *Malha 4* - (32002 pontos), *Malha 5* - (64002 pontos), *Malha 6* - (128002 pontos) e *Malha 7* - (256002 pontos) e domínio computacional: $L_y = 20, 28, 30$ e 32 . A figura 30 mostra esses resultados. Observa-se claramente que a solução converge para um valor assintótico com o refinamento da malha. Como pode se visto na figura 30, isto acontece a partir da *Malha 3*. Dessa forma, adotou-se uma malha com 16002 pontos para um domínio computacional $L_y = 30$.

Uma observação a ser feita é com respeito ao número de pontos contido na malha. Este número tem de ser um número par de tal forma que seja soma de dois número ímpares. Isto tem de ser feito a fim de garantir que $y = 0$ seja de fato o ponto central da malha computacional.

Figura 30: Teste de convergência de malha: taxa de amplificação temporal para número de onda $\alpha = 0.70$ versus malha e domínio computacional para número de Reynolds $Re = 100$.

4.3 Verificação

Esta abordagem de analisar a estabilidade hidrodinâmica para uma esteira paralela periódica assimétrica, não foi utilizada por outros autores, como pode ser visto na revisão bibliográfica. A literatura apresenta apenas estudos de instabilidade absoluta/conectiva para perfis de esteiras simétricas, dessa forma, encontrou-se dificuldade para verificar o código que resolve a equação de Orr-Sommerfeld. Este é um dos motivos pelos quais fez-se também simulações numérica diretas do fenômeno de estabilidade linear deste escoamento.

Hultgren e Aggarwal (1987) fazem uma análise espacial-temporal da esteira simétrica. Eles apresentam resultados para os parâmetros críticos dos dois modos, sinuoso e varicoso. No presente trabalho, realizou-se somente análise temporal, porém, foi possível comparar estes resultados, já que a curva neutra é a mesma. Os resultados estão nas tabelas (3) e (4). Hultgren e Aggarwal (1987) resolvem a equação de Orr-Sommerfeld usando também *Shooting Method*. Entretanto, a integração da equação de Orr-Sommerfeld é feita pelo método de Adams de quarta ordem implícito, porém, não descrevem o método que usaram para ortonormalizar as soluções.

Tabela 3: *Resultados dos parâmetros do modo sinuoso para $w_i = 0$*

Referência	Re	α	ω_r
(HULTGREN; AGGARWAL, 1987)	$Re = 3.76$	$\alpha = 0.18$	$\omega_r = 0.171$
Presente trabalho	$Re = 3.613$	$\alpha = 0.18$	$\omega_r = 0.1709$

Tabela 4: *Resultados dos parâmetros do modo varicoso para $w_i = 0$*

Referência	Re	α	ω_r
(HULTGREN; AGGARWAL, 1987)	$Re = 53$	$\alpha = 0.42$	$\omega_r = 0.13188$
Presente trabalho	$Re = 52.84$	$\alpha = 0.42$	$\omega_r = 0.1319$

Outros testes de verificação foram realizados. Como citado na revisão bibliográfica,

é comum lançar mão da teoria de estabilidade linear para verificação de código computacional. Assim, a fim de verificar a acuracidade do código desenvolvido, realizou-se uma comparação entre a taxa de amplificação temporal obtida pela equação de Orr-Sommerfeld e o código computacional que resolve as equações de Navier-Stokes na forma não conservativa, descrito no capítulo 3.

A figura 31 apresenta uma verificação dos resultados obtidos pela solução da equação de Orr-Sommerfeld. Esta verificação foi realizada segundo a teoria de estabilidade linear. Assim, plotou-se a curva prevista pela teoria de estabilidade linear e a evolução temporal da amplitude do modo fundamental. Esta evolução temporal da amplitude foi obtida computacionalmente através da simulação numérica direta das equações de Navier-Stokes. As fases de crescimento exponencial e saturação dos vórtices podem ser visualizadas na figura 31. A taxa de amplificação temporal obtida pela simulação numérica é $w_i = 0,14004$

Figura 31: Teste de verificação segundo a teoria de estabilidade linear. Evolução temporal da amplitude para $\alpha = 0,75$, $Re = 100$ e $K = 0,05$.

e a teoria de estabilidade linear prevê uma taxa de amplificação temporal de $w_i = 0,14005$, uma diferença inferior a 0,015%. Nota-se pelos testes de verificação uma boa convergência entre os resultados.

Estes testes de verificação foi realizado para outros casos e obteve-se a mesma convergência nos resultados, entretanto os mesmo não foram apresentados neste documento, evitando assim repetições.

Resultados

5.1 Resultados de simulação numérica direta

O desenvolvimento temporal da amplitude do modo fundamental, perturbado para diferentes níveis de assimetria da esteira, são apresentados na figura 32. Os resultados

Figura 32: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 100$ e $\alpha = 0, 30$.

são para $Re = 100$ e número de onda $\alpha = 0,3$ obtidos através da simulação numérica direta. A escala semi-logarítmica indica que, de fato, após um pequeno transiente inicial, o desenvolvimento apresenta um crescimento exponencial, conhecido como regime linear de instabilidade hidrodinâmica. O fato de o código ter reproduzido este comportamento, para amplitudes pequenas de perturbação, demonstra a alta precisão do código.

O transiente inicial é decorrente da perturbação introduzida que não satisfaz a teoria linear. Existe portanto um transiente em que a perturbação inicial evolui para aquela que corresponde à instabilidade linear. Claramente a figura mostra que no regime linear, para estas condições, a assimetria promove um aumento na taxa de amplificação temporal da perturbação. Ainda segundo a figura 32, o período de transiente inicial se reduz com a assimetria. Este comportamento foi inesperado pois a perturbação introduzida possui um formato semelhante ao previsto pela teoria linear para o caso simétrico.

As figuras 33 a 35 apresentam resultados semelhantes para $Re = 100$ e $\alpha = 0,6; 0,9$ e 1,2.

Figura 33: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 100$ e $\alpha = 0.60$.

Figura 34: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 100$ e $\alpha = 0.90$.

Figura 35: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 100$ e $\alpha = 1.20$.

Todas as evoluções mostradas apresentam um transiente inicial e após este transiente, exibem um crescimento exponencial. No regime linear para $\alpha = 0,9$ e $1,2$, ocorre uma inversão do efeito da assimetria em relação ao caso $\alpha = 0,3$ e $0,6$. Para estes números de onda a assimetria promove redução da taxa de amplificação. Ainda, para valores mais altos de K e $\alpha = 0,9$ e $1,2$, a taxa de amplificação passa por um máximo antes de alcançar o regime linear. De qualquer modo, o transiente inicial não é muito relevante para o estado final e não é investigado em maiores detalhes neste trabalho.

As figuras 32 a 35 permitem obter o valor da taxa de amplificação das perturbações. Esta taxa é a inclinação da reta de uma curva em escala semi-logarítmica. A figura 32 ilustra como esta taxa foi obtida. Assim, os resultados dos diferentes gráficos podem ser sumarizados em um único gráfico mostrando a variação da taxa de amplificação com o número de onda α , para diferentes valores do parâmetro de assimetria.

Figura 36: Taxa de amplificação temporal versus número de onda α para diferentes valores do parâmetro de assimetria K em $Re = 100$.

A figura 36 mostra para a faixa de de parâmetros K estudada e $Re = 100$, a máxima

taxa de amplificação ocorre para $\alpha = 0,6$. Além disso, sugere a existência de uma banda instável entre $\alpha = 0$ e $1,6$. Para $\alpha \geq 0,8$ a figura indica uma redução da taxa de amplificação com K , e o contrário se observa para $\alpha \leq 0,6$. A figura sugere que a inversão de comportamento ocorre nas proximidades do número de onda mais instável. A amplitude do modo foi obtido fazendo-se a Transformada de Fourier na direção x da componente v de velocidade em $y = 0$, e tomando-se o módulo do coeficiente complexo de Fourier para este modo. A amplitude inicial foi da ordem de 10^{-6} em relação ao escoamento livre. Testes foram realizados para comprovar que nesta amplitude o sistema operava no regime linear.

Figura 37: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 500$ e $\alpha = 0.30$.

As figuras 37 a 40 42 a 45 mostram, para $Re = 500$ e 1000 , resultados semelhantes aos das figuras 32 a 35. Após o transiente inicial segue-se em crescimento exponencial. Como na figura 36, as figuras 41 e 46 resumam os resultados para $Re = 500$ e 1000 respectivamente. Destas figuras verifica-se que o efeito da assimetria é semelhante para os diferentes números de Reynolds, isto é, para $\alpha \leq 0,6$ a assimetria promove aumento

da taxa de amplificação, enquanto para $\alpha \geq 0,8$ ela promove a redução.

Figura 38: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 500$ e $\alpha = 0,60$.

A pouca resolução dos gráficos não permite observar claramente o efeito do número de Reynolds e do parâmetro de assimetria K , tanto no número de onda mais instável como na banda instável. De forma geral, os resultados indicam que a máxima amplificação ocorre para $\alpha \approx 0,6$ e a banda instável situa-se entre $\alpha \approx 0$ e $\alpha \approx 1,6$. Para investigar estes aspectos em detalhes, foi empregada a teoria linear de instabilidade hidrodinâmica, que permite obter a taxa de amplificação do regime linear a um certo custo computacional inferior ao de simulação numérica direta.

As figuras 36, 41 e 46 mostram onde que o aumento do número de Reynolds promove aumento da taxa de amplificação, o que é esperado já que para estes perfis a viscosidade tem um efeito estabilizante. Entretanto, estes resultados são melhores explorados na figuras 48 a 49.

A figura 47 mostra a evolução temporal da amplitude do modo fundamental para

Figura 39: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 500$ e $\alpha = 0, 90$.

Figura 40: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 500$ e $\alpha = 1, 20$.

Figura 41: Taxa de amplificação temporal versus número de onda α para diferentes valores do parâmetro de assimetria K em $Re = 500$.

Figura 42: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 1000$ e $\alpha = 0.30$.

Figura 43: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 1000$ e $\alpha = 0.60$.

Figura 44: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 1000$ e $\alpha = 0.90$.

Figura 45: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 1000$ e $\alpha = 1.20$.

Figura 46: Taxa de amplificação temporal versus número de onda α para diferentes valores do parâmetro de assimetria K em $Re = 1000$.

Figura 47: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para $\alpha = 0,3$ para diferentes valores de K e Re .

diferentes valores de K e Re . Observa-se que para os valores de K apresentados, o aumento de Re claramente conduz a uma maior taxa de amplificação.

Estes resultados são confirmados e sumarizados nas figuras 48 e 49. Tanto para o caso simétrico como para $K = 0,15$, o aumento do Re aumenta a taxa de amplificação e a amplifica a banda instável de α . Além disso, as figuras indicam para $Re = 1000$ os valores já estão muito próximos do caso assintótico para $Re \rightarrow \infty$.

Na figura 50 pode ser visto a evolução temporal da amplitude do modo fundamental de uma esteira simétrica para $Re = 10$. Observa-se nessa figura, para estas condições o escoamento torna-se estável para $\alpha \leq 0.90$ e instável para $\alpha \geq 0.90$. Pode-se notar ainda um transiente inicial até a região linear de instabilidade hidrodinâmica. Claramente a figura, mostra para os números de ondas mais estáveis, uma menor região de transiente inicial. Além disso, a figura é mais uma comprovação de que diminuindo o número de Reynolds a banda instável também diminui. Nota-se por este resultado apresentado na figura 50, uma boa performance do código computacional em simular numericamente casos

em que as taxas de amplificação são negativas.

Figura 48: Efeito do número de Reynolds na taxa de amplificação temporal para $K = 0,00$.

Figura 49: Efeito do número de Reynolds na taxa de amplificação temporal para $K = 0,15$.

Figura 50: Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes número de onda no caso simétrico para $Re = 10$.

5.2 Resultados da teoria linear de instabilidade hidrodinâmica

Comparações entre o desenvolvimento temporal da amplitude do modo fundamental e a previsão da teoria de estabilidade linear, para números de onda $\alpha = 0,30$ e $\alpha = 1,20$, ambos para $Re = 100$, são apresentados nas figuras 51 e 52. As figuras 53 a 55 apresentam resultados semelhantes para $Re = 1000$ e $\alpha = 0,30, 0,60$ e $\alpha = 0,90$. As figuras mostram a excelente concordância entre os resultados teóricos e numéricos, o que permitiu usar a teoria para investigar os efeitos da assimetria na esteira, especialmente, investigar o comportamento do número de onda de máxima amplificação com K , além do efeitos do número de Reynolds.

Figura 51: Comparação entre resultados numérico e teórico. Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 100$ e $\alpha = 0,30$.

Figura 52: Comparação entre resultados numérico e teórico. Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 100$ e $\alpha = 1, 20$.

Figura 53: Comparação entre resultados numérico e teórico. Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 1000$ e $\alpha = 0.30$.

Figura 54: Comparação entre resultados numérico e teórico. Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 1000$ e $\alpha = 0,60$.

Figura 55: Comparação entre resultados numérico e teórico. Evolução temporal da amplitude do modo fundamental para diferentes valores do parâmetro de assimetria K . $Re = 1000$ e $\alpha = 0,90$.

Comparações entre resultados teóricos e numéricos da taxa de amplificação temporal para diferentes valores do parâmetro de assimetria K e $Re = 100, 500$ e 1000 , são apresentados nas figuras 56 a 58.

Figura 56: Comparação entre resultados teóricos e numéricos da taxa de amplificação temporal versus número de onda para diferentes valores do parâmetro de assimetria K em $Re = 100$.

Os resultados teóricos foram obtidos a um custo mais baixo computacional em relação às simulações numéricas diretas, o que permitiu alta resolução dos gráficos. Dessa forma, foi possível identificar o número de onda que mais amplifica com K e com o número de Reynolds. Os resultados indicam para o caso simétrico, que a máxima amplificação ocorre para $\alpha \approx 0,753$ em $Re = 100$ e $\alpha \approx 0,7865$ em $Re = 1000$. Para o caso de uma esteira com $K = 0,20$, a máxima amplificação ocorre para $\alpha \approx 0,657$ em $Re = 100$ e $\alpha \approx 0,6659$ em $Re = 1000$. De forma geral, os resultados indicam que o número de onda que tem a máxima amplificação diminui com K e o número de Reynolds. A banda instável diminui para pequenos K depois aumenta para valores de K maiores. Entretanto, a banda instável aumenta com o número de Reynolds. As figuras 56 a 58 mostram ainda o efeito estabilizante da assimetria para baixos valores de K . Além disso, uma mudança

Figura 57: Comparação entre resultados teóricos e numéricos da taxa de amplificação temporal versus número de onda para diferentes valores do parâmetro de assimetria K em $Re = 500$.

Figura 58: Comparação entre resultados teóricos e numéricos da taxa de amplificação temporal versus número de onda para diferentes valores do parâmetro de assimetria K em $Re = 1000$.

de comportamento na taxa de amplificação ocorre para valores de α próximo a máxima taxa, isto é, para valores menores de que o α que mais amplifica, a taxa de amplificação temporal aumenta com K , invertendo esta tendência para valores maiores que o α que mais amplifica. Observa-se ainda nas figuras 56 a 58 um comportamento interessante para altos valores de K , não investigada neste trabalho, de um outro máximo local de amplificação. Isto em várias situações indica o surgimento de um outro modo.

Figura 59: Efeito do número de Reynolds na taxa de amplificação temporal.

O efeito que o número de Reynolds tem na taxa de amplificação temporal é mais claro a partir dos resultados teóricos apresentados na figura 59. A figura mostra um aumento na taxa de amplificação com o número de Reynolds.

A figura 60 mostra que o parâmetro de assimetria reduz o número de onda de máxima amplificação. Essa redução ocorre com o aumento de Re , e aponta para uma inversão para K ainda maiores, fato não investigado neste trabalho. Além disso, promove uma redução em ω_r , resultado apresentado na figura 61. Nota-se ainda uma inversão de tendência para altos valores K , isto é, ocorre uma redução em ω_r com Re para altos valores de K enquanto para baixos valores, ocorre o contrário.

A figura 62 mostra a variação da máxima taxa de amplificação temporal com Re e K . Observa-se que as curvas exibem um mínimo que varia com o número de Reynolds. Os resultados indicam para uma estabilização, devido à redução na taxa de amplificação para pequenos valores de K . Para altos valores de K , os resultados indicam uma desestabilização. Entretanto, a faixa de K que indica estabilização é maior.

A boa concordância numérica e teórica dos resultados confirmam a qualidade das simulações e a validade da teoria.

Figura 60: Variação do número de onda mais instável versus o parâmetro de assimetria K para $Re = 100, 500$ e 1000 .

Figura 61: Variação de ω_r correspondente ao número de onda mais instável versus o parâmetro de assimetria K para $Re = 100, 500$ e 1000 .

Figura 62: Variação da taxa de amplificação temporal correspondente ao número de onda mais instável com o parâmetro de assimetria versus K para $Re = 100, 500$ e 1000 .

5.3 Efeitos do número de Mach

Como um dos interesses deste trabalho é a aplicação aeronáutica, foi analisado a influência do número de Mach. Isto foi realizado apenas numericamente pois a teoria desenvolvida neste trabalho foi para incompressível. Como se observa em outros escoamentos, o número de Mach tem um efeito estabilizante. Este efeito pode ser visualizado nas figuras 63 a 66. No caso simétrico apresentado na figura 63, o número de Mach reduz a banda instável, especialmente o limite superior, e a máxima taxa de amplificação. Para o caso assimétrico apresentado nas figuras 64 a 66, ocorre também uma redução da banda instável e na máxima taxa de amplificação, porém, a redução na banda é pequena. Além disso, os resultados apresentados nas figuras 67 e 68 mostram um efeito mais estabilizante para números de ondas grande.

Figura 63: Efeito do número de Mach na taxa de amplificação temporal para $Re = 1000$ e $K = 0$.

Figura 64: Efeito do número de Mach na taxa de amplificação temporal para $Re = 1000$ e $K = 0,05$.

Figura 65: Efeito do número de Mach na taxa de amplificação temporal para $Re = 1000$ e $K = 0.10$.

Figura 66: Efeito do número de Mach na taxa de amplificação temporal para $Re = 1000$ e $K = 0, 15$.

Figura 67: Taxa de amplificação temporal versus número de onda α para diferentes valores de K . $Ma = 0, 20$ e $Re = 1000$.

Figura 68: Taxa de amplificação temporal versus número de onda α para diferentes valores de K . $Ma = 0,50$ e $Re = 1000$.

5.4 Dinâmica da Vorticidade

Outro aspecto importante a ser analisado é a dinâmica dos vórtices da esteira. Isto é importante para aeroacústica por causa do emparelhamento dos vórtices.

Um desenvolvimento do campo de pressão, da componente de velocidade perpendicular ao escoamento v , da componente de velocidade do escoamento u , do contorno de entropia e do campo de vorticidade podem ser visto nas figuras 69 a 72. As figuras apresentam o desenvolvimento linear e não linear do modo fundamental.

Nas figuras 74 a 76 são apresentados os campos de vorticidade para $K = 0, 0, 0, 10$ e $0, 20$, $Re = 1000$ e para máximo número de onda respectivamente. As figuras indicam uma deformação na esteira com o aumento do parâmetro de assimetria. Observa-se ainda um estiramento dos vórtices e uma mudança na posição dos vórtices aumentando a assimetria deles com o aumento do parâmetro de assimetria advinda da deformação no vórtice menor provocado pelo aumento do parâmetro de assimetria. Estas alterações na dinâmica nos vórtices da esteira talvez tenha implicações no processo de geração de ruído.

Figura 69: Campo de pressão para $\alpha = 0, 40$ e $Re = 1000$. A sequência corresponde aos tempos adimensionais $t = 90, 167, 174$ e 185 .

Figura 70: Contorno da componente de velocidade v do escoamento para $\alpha = 0, 40$ e $Re = 1000$. A sequência corresponde aos tempos adimensionais $t = 90, 167, 174$ e 185 .

Figura 71: Contorno da componente da velocidade u do escoamento para $\alpha = 0,40$ e $Re = 1000$. A sequência corresponde aos tempos adimensionais $t = 90, 167, 174$ e 185 .

Figura 72: Contorno da entropia de uma esteira simétrica para $\alpha = 0,40$ e $Re = 1000$. A sequência corresponde aos tempos adimensionais $t = 90, 167, 174$ e 185 .

Figura 73: Contorno de vorticidade de uma esteira simétrica para $\alpha = 0,40$ e $Re = 1000$. A sequência corresponde aos tempos adimensionais $t = 90, 167, 174$ e 185 .

Figura 74: Contorno de vorticidade de uma esteira com parâmetro de assimetria $K = 0.00$, $Re = 1000$ e $\alpha = 0,7865$.

Figura 75: Contorno de vorticidade de uma esteira com parâmetro de assimetria $K = 0.10$, $Re = 1000$ e $\alpha = 0,7391$. A sequência corresponde aos tempos adimensionais $t = 90, 110, 125, 131, 141$ e 160 .

Figura 76: Contorno de vorticidade de uma esteira com parâmetro de assimetria $K = 0.20$, $Re = 1000$ e $\alpha = 0,6659$. A sequência corresponde aos tempos adimensionais $t = 90, 110, 125, 131, 141$ e 160 .

5.5 Controvérsia

Concluiu-se pelos resultados numéricos e teóricos que na esteira distante do corpo a assimetria para pequenos parâmetros promove uma redução da taxa de amplificação, o que sugere redução no número de Strouhal no escoamento ao redor do cilindro. Entretanto, diante de tão clara controvérsia é possível que a divergência não seja devido a erros nos experimentos e nas simulações. Talvez esta controvérsia apresentada na tabela 2, aonde resultados referentes ao efeito do parâmetro de assimetria no número de Strouhal divergem entre os diferentes trabalhos, possa ser explicada por algum fenômeno físico e os resultados possam ser reconciliados. Esta seção apresenta uma tentativa nesta direção.

O *coeficiente de arrasto*, C_D , é definido como

$$C_D = F_D / \frac{1}{2} \rho V^2 L,$$

onde F_D é a força de arrasto, V a velocidade e L é a medida de referência, que no caso, é o diâmetro do cilindro. Nota-se claramente que o coeficiente de arrasto é proporcional a

dimensão da esteira, já que a esteira do cilindro corresponde ao déficit de momento que é o arrasto.

Observa-se pouca discrepância nos resultados da literatura para os efeitos de cisalhamento no coeficiente de arrasto. A figura 77 apresenta resultados que mostram um decaimento no coeficiente de arrasto para K de Kang (2006), Kwon, Sung e Hyun (1992), Lei, Cheng e Kavanagh (2000) e Yoshino e Hayashi (1984).

Figura 77: Coeficiente de arrasto para diferentes valores de K de Kang (2006), Kwon, Sung e Hyun (1992) Lei, Cheng e Kavanagh (2000) e Yoshino e Hayashi (1984)

Esta redução no coeficiente de arrasto, representa uma redução na escala característica da esteira. Além disso, esta variação na escala da esteira promove uma variação no diâmetro efetivo, que implica numa variação do número de Strouhal, já que o número de Strouhal é definido por $St = fD/U$, sendo D o diâmetro do cilindro. É importante observar que na teoria desenvolvida neste trabalho, bem como nas simulações numéricas, a escala da esteira é sempre constante, fato fundamental para esta análise. Tendo em

vista que os trabalhos existentes sobre este fenômeno não analisam a esteira propriamente dita, é interessante investigar os efeitos de uma correção no cálculo do número de Strouhal considerando a redução do coeficiente de arrasto que corresponderia a redução no diâmetro efetivo do cilindro.

Na figura 78 são mostrados os resultados originais obtidos pelos autores que investigaram esse fenômeno.

Figura 78: Número de Strouhal versus parâmetro de assimetria K . Resultados encontrados na literatura.

A idéia é corrigir os resultados originais pelo diâmetro efetivo obtido a partir do coeficiente de arrasto, isto é,

$$St_{ef} = \frac{StD}{D_{ef}}, \quad (5.1)$$

onde $\frac{D}{D_{ef}} = \frac{C_{D0}}{C_D}$ onde o índice “*ef*” se refere à medida efetiva, sendo C_{D0} e C_D os coeficientes de arrasto referente ao caso simétrico e assimétrico, respectivamente. A figura 79 apresenta estes resultados corrigidos. Observa-se entre os trabalhos claramente uma tendência comum, exceto para os resultados de Yoshino e Hayashi (1984) e Tamura, Kiya e Arie (1980). Isto pode estar relacionado com o fato de que estes dois trabalhos

investigam números de Reynolds muito baixos. Entretanto, há que se notar que para estes trabalhos, não existe uma tendência muito clara quanto ao efeito da assimetria. Dessa forma, considerando os resultados corrigidos e as observações feitas aos dois trabalhos em que manteve-se a mesma tendência, pode-se dar como resolvida a controvérsia. Será que a teoria desenvolvida neste trabalho concorda prova este resultado?

Figura 79: Número de Strouhal versus parâmetro de cisalhamento. Resultados encontrados na literatura corrigidos pelo coeficiente de arrasto.

Considerando que o número de Strouhal é proporcional à frequência, por definição, e então proporcional a ω_r , normalizou-se os resultados obtidos pela teoria de ω_r por ω_{r0} , onde o índice “0” indica o caso simétrico, além disso, os números de Strouhal corrigidos apresentados na figura 79 foram normalizados pelo St_0 . Essa comparação entre os resultados apresentados neste trabalho com os trabalhos já existentes são vistos na figura 80. Poucos resultados apresentados na figura 80 que não convergem também não mostram nenhuma tendência, reforçando a dúvida sobre o porque estes resultados não seguem a tendência. Talvez o número de Reynolds pode ser uma possível explicação para isto.

Uma visualização melhor obtida em outra escala pode ser visto na figura 81. Observa-se na figura 81 um espalhamento entre os dados, que para uma previsão de engenharia pode ser considerado pequeno. Nota-se que a teoria desenvolvida faz uma boa previsão em nível de engenharia. Este espalhamento entre os dados pode ser por causa do número

Figura 80: Comparação de St/St_0 versus o parâmetro de assimetria entre o presente trabalho e os já existentes corrigidos.

Figura 81: Comparação de St/St_0 versus o parâmetro de assimetria entre o presente trabalho e os já existentes corrigidos em escala.

de Reynolds, ou do bloqueio, ou da turbulência nos túneis de vento ou de água, ou mesmo as incertezas nos dados experimentais ou numéricos. Note que de fato existe uma variação de ω_r/ω_{r_0} com o Re previsto pela teoria, mas os resultados da literatura não demonstram uma clara tendência com o número de Reynolds.

Considerações finais

6.1 Conclusões

Os objetivos principais desse trabalho foi estudar a influência do cisalhamento na instabilidade da esteira assimétrica, analisar a influência do número de Mach, a dinâmica de vórtices da esteira, bem como colaborar para o esclarecimento da controvérsia. Esta controvérsia vem do fato da divergência dos resultados quanto aos efeitos da assimetria na esteira encontrados na literatura. A estratégia adotada neste trabalho foi analisar exclusivamente a esteira assimétrica. A esteira assimétrica foi representada pela adição de perfil tangente hiperbólico, que imita uma camada de mistura, ao escoamento base da esteira, um perfil gaussiano. Houve a preocupação de manter a dimensão característica da esteira a fim de evitar mudanças no número de Reynolds. A análise foi desenvolvida de forma teórica, através da solução das equações que governam a instabilidade hidrodinâmica deste escoamento, e computacional, através da simulação numérica direta das equações bi-dimensionais de Navier-Stokes. Os resultados teóricos apresentaram excelente concordância com os resultados numéricos, o que permitiu usar a teoria para investigar os efeitos da assimetria na esteira.

Os resultados mostram que o parâmetro de assimetria promove uma redução em ω_r correspondente a máxima taxa de amplificação. Considerando que o número de Strouhal é proporcional à frequência, e portanto, proporcional a ω_r , os resultados indicam uma

redução no número de Strouhal na faixa de K investigada, isto é, $0 \leq K \leq 0,25$.

As curvas da variação da máxima taxa de amplificação temporal com Re e K exibem um mínimo local. Este mínimo varia com o número de Reynolds. Estes resultados indicam, para pequenos valores de K , uma estabilização devido à redução na taxa de amplificação, e para altos valores de K , os resultados indicam uma desestabilização. A faixa de K que indica estabilização aumenta com o número de Reynolds.

Na faixa de K investigada, os resultados indicam ainda uma redução expressiva no número de onda que tem a máxima amplificação com o aumento de K , e uma redução menor com o número de Reynolds. Além disso, a banda instável diminui para pequenos valores de K e aumenta para valores de K maiores.

Uma investigação do efeito do número de Mach foi realizada e os resultados apontam, para um aumento do número de Mach, uma redução na máxima taxa de amplificação e na banda instável, especialmente o limite superior.

Observa-se um comportamento interessante para altos valores de K , não investigada neste trabalho, um outro máximo local de amplificação. Isto em várias situações indica o surgimento de um outro modo, inclusive com o aumento do número de Mach.

Efeitos do parâmetro de assimetria na dinâmica dos vórtices da esteira foram investigados e os resultados indicam uma deformação na esteira com o aumento do parâmetro de assimetria. Observa-se um estiramento dos vórtices e uma mudança na posição dos vórtices. Ocorre uma assimetria nos vórtices com o aumento do parâmetro de assimetria advinda da deformação no vórtice menor, provocado pelo aumento do parâmetro de assimetria. Estas alterações na dinâmica nos vórtices da esteira talvez tenha implicações no processo de geração de ruído.

A literatura apresenta resultados para os efeitos da assimetria no coeficiente de arrasto. Estes resultados apontam para uma redução com o aumento do parâmetro de assimetria. Surgiu a idéia de corrigir os resultados originais, para os efeitos da assimetria no número de Strouhal, pelo diâmetro efetivo obtido a partir do coeficiente de arrasto, pois uma variação no coeficiente de arrasto implica numa variação da escala da esteira, e portanto, uma

variação do diâmetro efetivo. Uma metodologia foi empregada para corrigir estes dados considerando essa variação no diâmetro efetivo para recalcular o número de Strouhal. Para os resultados corrigidos, observou-se uma única tendência para a maioria dos trabalhos, indicando redução do número de Strouhal com o aumento de K . Esta análise parece reconciliar os resultados apresentados na literatura. Além disso, comparou-se os resultados corrigidos da literatura, normalizados pelo número de Strouhal do caso simétrico, com os resultados teóricos do presente trabalho, normalizados pelo ω_r também do caso simétrico. Observou-se um certo espalhamento nos dados experimentais mas em bom nível para aplicações de engenharia. Os resultados teóricos passam pelo meio desse espalhamento, concordando assim com os resultados da literatura, bom indicativo para o uso da teoria para previsões futuras.

6.2 Sugestões para futuros trabalhos

Como sugestões para trabalhos futuros, podem ser citados as seguintes propostas:

- Investigar os efeitos de razão de bloqueio e os efeito da proximidade com uma parede.
- Desenvolver a teoria compressível para investigar os efeitos da assimetria numa esteira.
- Investigar o segundo ponto de máximo das taxas de amplificação obtidas nas simulações numéricas.
- Fazer uma análise global, investigando a interação da separação da camada limite do cilindro com o escoamento cisalhante da região de separação e a esteira.
- Investigar a influência da assimetria na emissão e directividade acústica da esteira.

Referências

- ANDERSON, J. D. *Computational Fluid Dynamics*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1990.
- BARKLEY, D.; HENDERSON, R. Three dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. *J. Fluid Mech*, v. 322, p. 215–241, 1996.
- BEARMAN, P. W. On vortex shedding from a circular cylinder in the critical Reynolds number regime. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, v. 37, p. 577–585, 1969.
- BEARMAN, P. W. Bluff body flows applicable to vehicle aerodynamics. *J. Fluids Engineering*, v. 102, n. 3, p. 265–274, 1980.
- BERNAL, L.; ROSHKO, A. Streamwise vortex structure in plane mixing layer. *J. Fluid Mech.*, p. 499–525, 1986.
- BETCHOV, R.; CRIMINALE, J. W. O. Spatial instability of the inviscid jet and wake. *Physics of fluids*, v. 9, n. 2, p. 359–362, 1966.
- BROWN, G.; ROSHKO, A. On density effects and large structure in turbulent mixing layers. *J. Fluid Mech.*, v. 64, p. 775–816, 1974.
- GERMANOS, R.; MEDEIROS, M. Development of a code for a direct numerical simulation of compressible shear flow instabilities. In: *18th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2005*. Ouro Preto/MG: [s.n.], 2005.
- GERRARD, J. H. The mechanics of the vortex formation region of vortices behind bluff bodies - part 1. *J. Fluid Mech*, v. 25, p. 401–413, 1966.
- HUANG, L.; HO, C. Small-scale transition in a plane mixing layer. *J. Fluid Mech.*, v. 210, p. 475–500, 1990.
- HUERRE, P.; MONKEWITZ, P. A. Absolute and convective instabilities in free shear layers. *J. Fluid Mech.*, v. 159, p. 151–168, 1985.
- HULTGREN, L. S.; AGGARWAL, A. K. Absolute instability of the gaussian wake profile. *Physics of fluids*, v. 30, n. 11, p. 3383–3387, 1987.
- JACKSON, C. A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies. *J. Fluid Mech.*, v. 182, p. 23–45, 1987.
- KANG, S. Uniform-shear flow over a circular cylinder at low Reynolds numbers. *Journal of fluid and Structures*, v. 22, p. 541–555, 2006.

- KIYA, M.; TAMURA, H.; ARIE, M. Vortex shedding from a circular cylinder in moderate Reynolds number shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 141, p. 721–735, 1980.
- KWON, T. S.; SUNG, H. J.; HYUN, J. M. Experimental investigation of uniform-shear flow past a circular cylinder. *ASME Journal of Fluids Engineering*, v. 114, p. 457–460, 1992.
- LEI, C.; CHENG, L.; KAVANAGH, K. A finite difference solution of the shear flow over a circular cylinder. *Ocean Engineering*, v. 27, p. 271–290, 2000.
- LELE, S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comp. Phys.*, v. 103, p. 16–42, 1992.
- LESIEUR, M. *Turbulence in Fluids*. third. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- LIN, S.; CORCOS, G. The mixing layer: deterministic models of a turbulent flow. Part 3: the effect of plane strain on the dynamics of streamwise vortices. *J. Fluid Mech.*, v. 141, p. 139–178, 1984.
- MATHIS, C. e. a. Bérnard-von Kármán instability: transition and forced regimes. *J. Fluid Mech.*, v. 182, p. 1–22, 1987.
- MEDEIROS, M. A. F. Instabilidade hidrodinâmica não linear. In: Silveira Neto, A.; MANSUR, S. S. (Ed.). *Turbulência*. [S.l.]: ABCM, 2003. v. 2, p. 305–355.
- MENDONÇA, M. T. Estabilidade de escoamentos laminares: teoria linear. In: Silveira Neto, A.; MANSUR, S. S. (Ed.). *Turbulência*. [S.l.]: ABCM, 2003. v. 2, p. 245–304.
- METCALFE, R.; ORZAG, S.; BRACHET, M.; MENON, S.; RILEY, J. Secondary instability of a temporally growing mixing layer. *J. Fluid Mech.*, v. 44, p. 207–243, 1987.
- NOGUEIRA, J.; ACOSTA, A. Limits on the resolution of correlation PIV iterative methods. Practical implementation and design of weighting functions. *Exp. Fluids*, v. 39, p. 314 – 321, 2005.
- PAPAMOSCHOU, D.; ROSHKO, A. The compressible turbulent shear layer: an experimental study. *J. Fluid Mech.*, v. 197, p. 453–477, 1988.
- PERRY, A. E. *Hot-wire Anemometry*. [S.l.]: Clarendon Press, Oxford, 1982.
- PERSILLON, H.; BRAZA, M. Physical analysis of the transition to turbulence in the wake of a circular cylinder by three dimensional Navier-Stokes simulation. *J. Fluid Mech.*, v. 365, p. 23–88, 1998.
- ROSHKO, A. Perspectives on bluff body aerodynamics. *J. Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 49, p. 79–100, 1993.
- SAHA, A. K.; BISWAS, G.; MURALIDHAR, K. Influence of inlet shear on structure of wake behind a square cylinder. *Journal of Engineering Mechanics*, p. 359 – 363, 1999.
- SANDHAM, N. D.; REYNOLDS, W. C. Three-dimensional simulations of large eddies in the compressible mixing layer. *J. Fluid Mech.*, v. 224, p. 133–158, 1991.

- SATO, H.; KURIKI, K. The mechanism of transition in the wake of a thin flat plate placed parallel to a uniform flow. *J. Fluid Mech.*, v. 11, p. 321–352, 1961.
- SCHMID, P. J.; HENNINGSON, D. S. *Stability and transition in shear flows*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2001.
- SESTERHENN, J. A characteristic-type formulation of the Navier-Stokes equations for high order upwind schemes. *Computers and Fluids*, v. 30, p. 37–67, 2001.
- SUMNER, D.; AKOSILE, O. O. On uniform planar shear flow around a circular cylinder at subcritical Reynolds number. *Journal of Fluids and Structures*, v. 18, p. 441–454, 2003.
- TAMURA, H.; KIYA, M.; ARIE, M. Numerical study on viscous shear flow past a circular cylinder. *Bulletin of the JSME*, v. 23, p. 1952–1958, 1980.
- THOMPSON, M.; GAL, P. L. The Stuart-Landau model applied to wake transition revisited. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, v. 23, p. 219–228, 2004.
- VITOLA, M. A. *Influência de um contorno plano sobre o desprendimento de vórtices ao redor de um cilindro circular*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2006.
- WAZZAN, A. R.; OKAMURA, T. T.; KELTENER, G. Spatial stability of incompressible two-dimensional gaussian wake in steady viscous flow. *Physics of fluids*, v. 16, n. 8, p. 1368–1370, 1973.
- WILLIAMSON, C. H. K. The existence of two stages in the transition to three-dimensionality of a cylinder wake. *Physics of Fluids*, v. 31, p. 3165–3168, 1988.
- WILLIAMSON, C. H. K. Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 206, p. 579–628, 1989.
- WILLIAMSON, C. H. K. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, v. 28, p. 477–539, 1996.
- YOSHINO, F.; HAYASHI, T. Numerical solution of flow around a rotating circular cylinder in uniform shear flow. *Bulletin of the JSME*, v. 27, p. 1850–1857, 1984.
- ZDRAVKOVICH, M. *Flow Around Circular Cylinder - Volume 1: Fundamentals*. [S.l.]: Oxford University Press Inc, 1997. 672 p.
- ZDRAVKOVICH, M. M. *Flow Around Circular Cylinder - Volume 2: Applications*. [S.l.]: Oxford University Press Inc, 2003. 589 p.

APÊNDICE A - PROCESSO DE GRAM-SCHMIDT

A partir de uma base qualquer de um espaço vetorial existe um processo para se obter uma base ortonormal. Definir uma base base ortonormal se faz necessário para o desenvolvimento deste processo.

Definição A.1 *Seja $V = \mathbb{R}^3$ um espaço vetorial com produto interno " $\langle, \rangle$ ".*

Uma base $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ é ortonormal se for ortogonal e cada vetor for unitário, isto é,

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Observe que obtendo-se uma base ortonormal $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, os coeficientes x_i de um vetor $\vec{w} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3$ são dados por

$$x_i = \frac{\langle \vec{w}, \vec{v}_i \rangle}{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle} = \langle \vec{w}, \vec{v}_i \rangle$$

A seguir é descrito o processo de ortonormalização propriamente dito para uma base $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Seja $\vec{v}'_1 = \vec{v}_1$. Precisa-se encontrar a partir de $\vec{v}_2$ um novo vetor $\vec{v}'_2$ ortogonal a $\vec{v}'_1$, isto é, $\langle \vec{v}'_2, \vec{v}'_1 \rangle = 0$. Para isto, tomamos $\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - c\vec{v}'_1$, onde c é um número escolhido de modo que $\langle \vec{v}'_2, \vec{v}'_1 \rangle = 0$, isto é, $\langle \vec{v}_2 - c\vec{v}'_1, \vec{v}'_1 \rangle = 0$. Isto significa que $c = \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{v}'_1 \rangle}{\langle \vec{v}'_1, \vec{v}'_1 \rangle}$

Assim,

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1$$

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{v}'_1 \rangle}{\langle \vec{v}'_1, \vec{v}'_1 \rangle} \vec{v}'_1$$

Pode-se notar que $\vec{v}'_2$ foi obtido de $\vec{v}_2$, subtraindo-se deste a projeção do vetor $\vec{v}_2$ na direção de $\vec{v}'_1$, e que $\vec{v}'_1$ e $\vec{v}'_2$ são vetores ortogonais não nulos. Resta somente normalizá-los,

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}'_1}{\|\vec{v}'_1\|} \quad \text{e} \quad \vec{u}_2 = \frac{\vec{v}'_2}{\|\vec{v}'_2\|}$$

obtendo assim uma base $\beta' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

Um esquema geométrico deste processo pode ser visto na figura (82). Procurando

Figura 82: Esquema geométrico do processo de ortogonalização

agora um vetor $\vec{v}'_3$ que seja ortogonal ao mesmo tempo a $\vec{v}'_1$ e $\vec{v}'_2$. Por analogia, estabelece-se que $\vec{v}'_3 = \vec{v}_3 - m\vec{v}'_2 - k\vec{v}'_1$ e determinam-se os valores de m e k tais que $\langle \vec{v}'_3, \vec{v}'_2 \rangle = 0$ e $\langle \vec{v}'_3, \vec{v}'_1 \rangle = 0$. A partir dessas duas condições, temos:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}'_3, \vec{v}'_1 \rangle = 0 &\iff \langle \vec{v}_3 - m\vec{v}'_2 - k\vec{v}'_1, \vec{v}'_1 \rangle = 0 \\ &\iff \langle \vec{v}_3, \vec{v}'_1 \rangle - m \langle \vec{v}'_2, \vec{v}'_1 \rangle - k \langle \vec{v}'_1, \vec{v}'_1 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Assim, como $\langle \vec{v}'_2, \vec{v}'_1 \rangle = 0$ se, e somente se

$$k = \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{v}'_1 \rangle}{\langle \vec{v}'_1, \vec{v}'_1 \rangle},$$

da mesma forma, $\langle \vec{v}'_3, \vec{v}'_2 \rangle = 0$ se, e somente se

$$m = \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{v}'_2 \rangle}{\langle \vec{v}'_2, \vec{v}'_2 \rangle}$$

e portanto,

$$\vec{v}'_3 = \vec{v}_3 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{v}'_2 \rangle}{\langle \vec{v}'_2, \vec{v}'_2 \rangle} \vec{v}'_2 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{v}'_1 \rangle}{\langle \vec{v}'_1, \vec{v}'_1 \rangle} \vec{v}'_1.$$

Obtém-se uma base ortonormal normalizando os vetores. Este procedimento é conhecido como *processo de ortogonalização de Gram-Schmidt*.