

Ricardo Alberto Coppola Germanos

***SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA EVOLUÇÃO
LINEAR E NÃO LINEAR EM UMA CAMADA
DE MISTURA COMPRESSÍVEL
TRIDIMENSIONAL***

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica. Área de concentração: Aeronaves.

Orientador: Prof. Dr. Marcello Augusto Faraco de Medeiros

São Carlos

2009

*Ao Nosso Senhor Jesus Cristo e a minha família,
com Amor e Gratidão.*

Agradecimentos

A Deus, Aquele que é digno de receber este título almejado, que pela Sua Infinita Misericórdia concedeu-me bençãos imensuráveis, além de encaminhar oportunidades e principalmente pessoas que me apoiaram e me incentivaram.

A começar pelo irmão e amigo Nil que me ensinou, com o seu exemplo de vida, lições de imensurável valor.

Ao meus pais, por me apoiar financeiramente, pelo carinho, cuidado, compreensão, ensinamentos e o amor desprendido sem reservas.

Ao Professor Marcello Augusto Faraco de Medeiros, pela amizade, incentivos e orientações essenciais e necessárias para a realização deste trabalho.

Ao Professor Leandro Franco de Souza, por toda a ajuda essencial para a realização e finalização deste trabalho.

Aos Professores Marcio Mendonça, Jorge Hugo Silvestrini e Hermann Fasel, por toda a colaboração dada para conclusão deste trabalho.

Aos amigos Alysson, Hernan, Igor, Elmer, Homero, pela boa amizade e o apoio constante.

A companheira Michele por ter me apoiado durante essa fase da minha vida.

Aos amigos do LAE, do grupo de pesquisa do Arizona, de minha cidade natal pela amizade e o apoio neste desafio.

À Escola de Engenharia de São Carlos, pela infra-estrutura concedida para a realização deste trabalho.

À FAPESP e a AFOSR, pelo apoio financeiro concedido na forma de bolsa de estudo.

Conteúdo

Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	xi
Lista de Símbolos	xiii
Resumo	xvii
Abstract	xix
1 Introdução	1
2 Revisão Bibliográfica	9
2.1 Teoria de Estabilidade Linear	10
2.2 Regime Não Linear e Instabilidade Secundária	11
2.3 Ondas moduladas	15
3 Formulação	17
3.1 Sistema de Equações	17
3.2 escoamento Base	21
3.3 Perturbação do escoamento	24
3.4 Condição de Contorno	26

4	Metodologia Numérica	29
4.1	Derivadas Espaciais	30
4.1.1	Aproximação da Primeira Derivada	32
4.1.2	Aproximação da Segunda Derivada	35
4.2	Derivadas Temporais	37
4.3	Filtro Numérico	39
4.4	Malha Não Uniforme	41
5	Verificação do Código	45
5.1	Verificação em Regime Linear	48
5.2	Instabilidade Não-Linear 2D	55
5.3	Instabilidade Não-Linear 3D	63
6	Resultados Numéricos	71
6.1	Teste de Convergência e Simulações Preliminares	74
6.2	Instabilidade Secundária 3D	77
6.3	Trens de Ondas Moduladas Lineares	82
6.4	Trens de Ondas Moduladas Não Lineares	91
7	Resumo e Conclusão	99
7.1	Verificação do Código	102
7.2	Instabilidade Secundária	105
7.3	Trens de Ondas Moduladas	107
	Referências	111

Lista de Figuras

1	Efeito do número de Mach convectivo na taxa de amplificação de perturbações na camada de mistura com perfil tangente hiperbólica a) taxa de amplificação temporal das perturbações na camada de mistura b) efeito da obliquidade na taxa de amplificação.	12
2	Perfil de Velocidade Inicial	22
3	Ilustração da malha com estiramento	42
4	Evolução da amplitude da perturbação de uma camada de mistura invíscida bidimensional através da análise de instabilidade temporal.	50
5	Taxa de amplificação de perturbações na camada de mistura não viscoso bidimensional.	51
6	Taxa de amplificação de perturbações em uma camada de mistura. Os resultados são para perturbação tridimensionais. Para cada número de Mach, o número de onda longitudinal usado foi aproximadamente aquela de máxima amplificação para o caso bidimensional. Assim, foi usado $\alpha_0 = 0,89$ para $M_c = 0,01$, $\alpha_0 = 0,82$ para $M_c = 0,4$ e $\alpha_0 = 0,52$ para $M_c = 0,8$	52
7	Evolução da amplitude a partir de um escoamento viscoso com número de Mach igual à 0,01, número de Reynolds de 160 e número de onda aproximadamente de 0,89.	54
8	Evolução da amplitude a partir de um escoamento viscoso com número de Mach igual à 0,01, número de Reynolds de 400 e número de onda aproximadamente de 0,89.	54

9	Evolução da amplitude a partir de um escoamento viscoso com número de Mach igual à 0,4, número de Reynolds de 500 e número de onda aproximadamente de 0,82.	54
10	Evolução da amplitude a partir de um escoamento viscoso com número de Mach igual à 0,4, número de Reynolds de 1600 e número de onda aproximadamente de 0,82.	54
11	Evolução linear e não linear de perturbações bi-dimensionais composta apenas pelo modo fundamental. O Mach convectivo selecionado foi de 0,4, enquanto que o número de Reynolds foi de 500. A sequência de figuras da esquerda para a direita corresponde aos tempos adimensionais de 10, 60, 78 e 88.	57
12	Evolução linear e não linear de perturbações bidimensionais compostas de um modo fundamental e um modo subharmônico. O Mach convectivo selecionado foi de 0,4, enquanto que o número de Reynolds foi de 500. A sequência de figuras da esquerda para a direita de cima para baixo corresponde aos tempos adimensionais de 28, 54, 64, 78, 84, 94, 104 e 244.	58
13	Evolução linear e não linear de perturbações bidimensionais compostas apenas pelo modo fundamental. O Mach convectivo selecionado foi de 0,4, enquanto que o número de Reynolds foi de 500. A sequência de figuras da esquerda para a direita corresponde aos tempos adimensionais de 176, 196, 206 e 216.	58
14	Evolução linear e não linear das perturbações apresentadas nas figuras 12 e 13. Trata-se de resultados de duas simulações diferentes colocadas na mesma figura. O modo fundamental corresponde ao da figura 12. O modo subharmônico excitado também corresponde à 12, enquanto que o do erro numérico é o da figura 13.	59

15	Evolução da amplitude da perturbação para um escoamento não viscoso com número de Mach igual à 0,4 e número de onda aproximadamente de 0,82.	60
16	Evolução da amplitude da perturbação para um escoamento não viscoso com número de Mach igual à 0,8 e número de onda aproximadamente de 0,52.	60
17	Evolução linear e não linear de perturbações bidimensionais compostas de um modo fundamental e de um subharmônico. O Mach convectivo selecionado foi de 0,6, enquanto que o número de Reynolds foi de 500. A sequência de figuras da esquerda para a direita e de cima para baixo corresponde aos tempos adimensionais de 54, 76, 80, 86, 90, 96, 126 e 256.	61
18	Evolução linear e não linear de perturbações bidimensionais compostas pelo modo fundamental e pelo seu subharmônico. O Mach convectivo selecionado foi de 0,8, enquanto que o número de Reynolds foi de 500. A sequência de figuras da esquerda para a direita de cima para baixo corresponde aos tempos adimensionais de 10, 100, 250, 270, 300, 330, 350 e 388.	62
19	Iso-superfície de pressão. Evolução linear e não linear do modo expansivo ($\phi = 0$) composta por uma onda bidimensional e um par de ondas oblíquas para $M_c = 0,4$ e $Re = 500$	66
20	Iso-superfície de pressão. Evolução linear e não linear do modo translativo ($\phi = \frac{\pi}{2}$) composta por uma onda bidimensional e um par de ondas oblíquas para $M_c = 0,4$ e $Re = 500$	66
21	Iso-superfície de pressão. Evolução linear e não linear do modo helicoidal ($\phi = \frac{\pi}{2}$) composta por uma onda bidimensional e um par de ondas oblíquas subharmônicas para $M_c = 0,4$ e $Re = 500$	66

22	Sequência de figuras de iso-superfície de pressão. Evolução linear e não linear do modo translativo ($\phi = \frac{\pi}{2}$) composta por uma onda bidimensional e um par de ondas oblíquas para $M_c = 0,8$ e $Re = 500$	69
23	Teste de convergência. a) perturbação bidimensional b) perturbação oblíqua.	74
24	Evolução da amplitude de um escoamento viscoso bidimensional para número de Reynolds igual à 5×10^2 através da análise de instabilidade linear temporal. As taxas de amplificação máximas adotadas para os respectivos Mach assumidos logo acima foram: $\alpha_0 \approx 0,89$ para $M_c = 0,01$; $\alpha_0 \approx 0,82$ para $M_c = 0,4$ e $\alpha_0 \approx 0,52$ para $M_c = 0,8$	75
25	Evolução da amplitude de um escoamento viscoso bidimensional para número de Reynolds igual à 1×10^3 através da análise de instabilidade linear temporal. As taxas de amplificação máximas adotadas para os respectivos Mach assumidos logo acima foram: $\alpha_0 \approx 0,89$ para $M_c = 0,01$; $\alpha_0 \approx 0,82$ para $M_c = 0,4$ e $\alpha_0 \approx 0,52$ para $M_c = 0,8$	75
26	Figura ilustrativa do procedimento adotado para disparar as ondas bi- e tri-dimensionais.	78
27	Taxas de amplificação das ondas oblíquas para $M_c = 0,1$ em função da razão do número de onda transversal e longitudinal. O tempo adimensional em que as ondas oblíquas foram disparadas foi: a) $t = 42$ e b) $t = 60$	80
28	Taxas de amplificação das ondas oblíquas para $M_c = 0,4$ em função da razão do número de onda transversal e longitudinal.	81
29	Taxas de amplificação das ondas oblíquas para $M_c = 0,8$ em função da razão do número de onda transversal e longitudinal.	81
30	Evolução linear de trens de ondas modulados para $M_c = 0,1$ e $Re = 500$. a) Amplitude dos modos oblíquos em função do tempo adimensional b) Taxa de amplificação dos modos no regime linear.	84

31	Evolução linear de trens de ondas modulados para $M_c = 0,8$ e $Re = 1000$. a) Amplitude dos modos oblíquos em função do tempo adimensional b) Taxa de amplificação dos modos na região A c) Taxa de amplificação dos modos oblíquos na região B (região de interação não linear).	85
32	Análise espectral da evolução linear da componente de velocidade normal para $M_c = 0,1$ e $Re=500$	87
33	Evolução linear da componente de velocidade normal para $M_c = 0,1$ e $Re=500$	87
34	Análise espectral da evolução linear da componente de velocidade trans- versal para $M_c = 0,1$ e $Re=500$	88
35	Evolução linear da componente de velocidade transversal para $M_c = 0,1$ e $Re=500$	88
36	Análise espectral da evolução linear da componente de velocidade normal para $M_c = 0,8$ e $Re=1000$	90
37	Evolução linear da componente de velocidade normal para $M_c = 0,8$ e $Re=1000$	90
38	Evolução linear e não Linear da amplitude de modos oblíquos de um trem de ondas fortemente modulado para $M_c = 0,1$ e $Re = 500$	94
39	Evolução linear e não Linear da amplitude de modos oblíquos de um trem de ondas fortemente modulado para $M_c = 0,8$ e $Re = 1000$	94
40	Evolução espectral de trens de onda fortemente modulado para $M_c = 0,1$ e $Re = 500$	95
41	Evolução não linear para $M_c = 0,1$ e $Re = 500$. Os tempos adimensionais apresentados nesta sequência corresponde 45, 47, 50, 55, 60 e 62.	95
42	Evolução espectral de trens de onda fortemente modulado para $M_c = 0,8$ e $Re = 1000$	96

43	Evolução não linear para $M_c = 0, 8$ e $Re = 1000$. Os tempos adimensionais apresentados nesta sequência corresponde 60, 70, 85, 90, 95 e 100.	96
44	Comparação do espectro em regime não linear para diferentes números de Mach convectivo.	97
45	Comparação da estrutura não linear para diferentes números de Mach convectivo.	97

Lista de Tabelas

1	Características do esquemas usados para a primeira derivada.	35
2	Característica dos esquemas usados para a segunda derivada.	37
3	Estêncil e erro de truncamento do filtro usado.	40

Lista de Símbolos

A_n	Amplitude da perturbação bi- ou tri-dimensional.
c_0	Velocidade do som
c_p	Calor específico a pressão constante.
c_v	Calor específico a volume constante.
CFL	Condição de Courant-Friendrichs-Lewy.
C_D	Coefficiente de arrasto.
dx, dy, dz	Intervalos de discretização espacial nas direções (x,y,z).
e	Energia interna.
E_T	Energia total.
f_i	Função discretizada.
f'_i	Derivada primeira da função discretizada.
f''_i	Derivada segunda da função discretizada.
F	Ponto de refinamento da malha.
G	Indicador do refinamento da malha.
h	Espaçamento da malha.
H	Altura do domínio físico.
IH	Instabilidade Hidrodinâmica.

k	Coeficiente de condutividade térmica.
L_x, L_y, L_z	Tamanho do domínio na direção (x, y, z) , respectivamente.
M	Número de Mach.
M_c	Número de Mach convectivo.
$M_{1,2}$	Número de Mach na parte superior e inferior do perfil de velocidade.
MDF	Método das diferenças finitas.
$MDFC$	Método das diferenças finitas compacto.
MVF	Método dos volumes finitos.
p	Pressão.
Pr	Número de Prandtl.
q_i	Componentes de fluxo de calor nas direções (x, y, z) .
R	Constante universal dos gases.
$RK4$	Runge-kutta de quarta ordem.
Re	Número de Reynolds.
SND	Simulação numérica direta.
SGE	Simulação de grandes escalas.
t	Tempo adimensional.
$t - 3D$	Tempo adimensional que os modos oblíquos são excitados.
T	Temperatura.
$\bar{T}(y)$	Perfil de temperatura inicial.
$\bar{u}(y)$	Perfil de velocidade inicial.

$U_{1,2}$	Escoamento médio temporal na parte superior e inferior do perfil de velocidade.
u_i	Componentes de velocidade nas direções longitudinal, normal e transversal ao escoamento.
x_i	Coordenadas cartesianas (x,y,z).
$2D$	Bi-dimensional.
$3D$	Tri-dimensional.

Símbolos Gregos

α_i	Número de onda na direção longitudinal do escoamento.
β_k	Número de onda na direção transversal do escoamento.
ω	Frequência adimensional.
ρ	Densidade.
μ	Viscosidade dinâmica.
γ	Razão de calor específico.
σ	Curvatura gaussiana.
τ_{ij}	Tensor das tensões viscosas.
ϕ	Diferença de fase entre a onda bidimensional e os pares de ondas oblíquas.
δ_{ω_0}	Referência de escala para a espessura da camada de mistura.

Resumo

Germanos, R. A. C. (2009). Simulação Numérica da Evolução Linear e Não Linear em uma Camada de Mistura Compressível Tridimensional. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

As aplicações aeroespaciais estão frequentemente associadas a escoamentos compressíveis com altíssimos números de Reynolds. No entanto, existem no contexto aeroespacial importantes aplicações que envolvem escoamentos compressíveis a Reynolds relativamente baixos. Entre eles se destacam o escoamento em pás de turbina a gás e ao redor de dispositivos de alta sustentação como eslates e flapes em grandes ângulos de ataque. Pode-se destacar também o processo de combustão supersônica que está intimamente ligado e é fortemente beneficiado pelo presente estudo. Nas aplicações aerodinâmicas em baixos números de Reynolds frequentemente uma parcela significativa do escoamento se apresenta no regime de transição para turbulência, ou nos estágios iniciais do escoamento turbulento. O objetivo do presente projeto é a simulação numérica direta de escoamentos compressíveis transitórios com desenvolvimento de um código para simulação em três dimensões de escoamentos alto subsônicos. O escoamento a ser estudado no projeto é a evolução linear e não linear de trens de onda e pacotes de onda em uma camada de mistura compressível. A solução das equações de Navier-Stokes é obtida através do método das diferenças finitas. As derivadas espaciais são resolvidas através de um método compacto de sexta ordem, enquanto que as derivadas temporais são resolvidas através do método de Runge-Kutta de quarta ordem. Os métodos de aproximação foram modificados para trabalhar com malhas não uniformes visando refinar a malha em pontos em que o fenômeno ocorre e, conseqüentemente, reduzir o custo computacional. A investigação numérica inicia-se com a análise da taxa de amplificação dos trens de ondas fortemente modulados em regime linear. Os resultados obtidos foram comparados favoravelmente com a teoria linear. Os testes foram estendidos para a análise não linear, e conseqüentemente, foi possível reproduzir os fenômenos clássicos de instabilidade hidrodinâmica através da evolução dos trens de ondas oblíquos.

Palavras chave: Instabilidade Hidrodinâmica. Camada de Mistura Compressível. Simulação Numérica Direta. Trens de Onda Moduladas. Aproximações de Alta Ordem.

Abstract

Germanos, R. A. C. (2009). Numerical Simulation of the Linear and Non-Linear Evolution in a Three-dimensional Compressible Mixing Layer. Theses (Doctor's Degree) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

Aerospace applications are frequently associated with compressible flows at relatively high Reynolds number. Nevertheless important applications involve compressible flows at relatively low Reynolds number in the aerospace context. Among them, the flow on gas turbine blades and high lift devices such as slats and flaps at high angle of attack are particularly important. Besides, progress in aerospace research is dependent on developing more efficient propulsion systems. In aerodynamic applications at low Reynolds number, often a substantial portion of the flow is in the transition regime, or in the initial stages of a turbulent flow. The objective of the present study is the Direct Numerical Simulation of three-dimensional transition of compressible flows in a mixing layer. Inspired on the worked devoted to modulated waves, the current work investigates the linear and non-linear temporal evolution of wavetrains in this phenomenon. The Navier-Stokes equations were solved with a sixth-order compact finite-difference schemes. The time integration was performed by a fourth-order Runge-Kutta scheme. Moreover, the methods to solve the spatial derivatives were modified to work with non-uniform grids. This technique was implemented with the objective to improve the resolution of the grid where the phenomenon occurs and to reduce the computational cost. The numerical investigation starts with an analysis of the growth rate of the wavetrains in linear regime to verify the numerical code. The results compared favourably with linear theory. Tests were also performed in the nonlinear regime to simulate the oblique wavetrains and it was possible to reproduce the classical hydrodynamic instability phenomena.

Keywords: Hydrodynamic Instability. Compressible Mixing Layer. Direct Numerical Simulation. Wavetrains. High-Order Schemes.

Introdução

O presente trabalho consistiu no desenvolvimento de um código para simulação tridimensional de fenômenos de instabilidade hidrodinâmica em escoamentos compressíveis alto subsônicos (Mach abaixo de 0,8). As aplicações aeroespaciais estão frequentemente associadas a escoamentos compressíveis com altíssimos números de Reynolds. No entanto, existem, no contexto aeroespacial, importantes aplicações que envolvem escoamentos compressíveis a números de Reynolds relativamente baixos. Este tipo de escoamento pode ser encontrado, dentre várias situações práticas, ao redor de perfis aerodinâmicos que possuem múltiplos elementos, como por exemplo, o escoamento em eslates e flapes acoplados a asa de uma aeronave (RUMSEY; YING, 2002). Na interação que existe entre dispositivos hypersustentadores e o elemento principal pode-se destacar a formação do fenômeno de camada de mistura - tipo de escoamento a ser investigado no presente projeto de pesquisa. Este escoamento pode se formar através da interação do escoamento a jusante do bordo de ataque no extradorso do elemento principal com o escoamento a baixo do intradorso do dispositivo de hypersustentação. Além disso, este fenômeno pode ser identificado na interação do escoamento de esteira de um dispositivo hypersustentador com o escoamento do perfil principal e até o escoamento ao redor de outros dispositivos acoplados a asa. Do ponto de vista prático, o interesse comum nestes exemplos citados acima é a investigação da influência do escoamento de um elemento no perfil principal ou mesmo em outro elemento. Por último, esse tipo de escoamento também pode ser encontrado em processos

de mistura que ocorrem em câmaras de combustão para sistemas de propulsão.

O presente estudo representa uma etapa de um projeto mais ambicioso que visa à investigação experimental e numérica de escoamentos transicionais supersônicos em geometrias complexas. A meta aqui é mais modesta e tem como principal objetivo simular em três dimensões o desenvolvimento do fenômeno de instabilidade temporal de camada de mistura. O tipo de escoamento a ser estudado foi à evolução linear e não linear de trens de onda plano tridimensionais fortemente modulados. Em geral há poucos trabalhos relacionando ao problema de camada de mistura com o uso de ondas moduladas.

Um dos objetivos de estudos desta evolução temporal é o estudo fenomenológico de um escoamento transicional mais realista. Este fenômeno se insere no tema de transição natural. Em situações práticas, este fenômeno de transição, em particular, a transição natural permanece até os dias atuais um dos desafios da mecânica dos fluidos. O processo de transição natural é normalmente iniciado por perturbações aleatórias não controladas que dão origem a um amplo espectro de ondas oblíquas. Nestas circunstâncias, as ondas oblíquas não são planas e monocromáticas, mas fortemente moduladas e tridimensionais. A expectativa é que o comportamento do escoamento observado nos cenários simplificados possa explicar pelo menos parcialmente o processo natural. No entanto, a relevância dos cenários simplificados para este caso mais geral ainda não foi revelada. Estudos da evolução de ondas irregulares em camada limite que imitam a transição natural mostram que o seu regime não linear é semelhante àquele que ocorre em pacotes de onda gerados por perturbações pulso provocadas por uma fonte puntual (SHAIKH, 1997; GASTER, 1978). Outros estudos (PELTZER; NITSCHKE, 2004; GOSTELOW, 2004) reportam a observação destes próprios pacotes de onda no processo de transição natural. Devido a isto, as perturbações pontuais têm sido usadas como um modelo para o estudo da transição natural (WANG; LELE; MOIN, 1996). Estudos semelhantes ainda não foram realizados para o fenômeno de camada de mistura.

A transição no fenômeno de camada de mistura está fortemente presente no cotidiano de todos os homens. É enorme a quantidade de áreas que estão diretamente ligadas a

este tipo de pesquisa. A indústria aeroespacial é uma das áreas que mais se beneficia com o estudo de processos de transição. As áreas em destaque que recebem este foco de pesquisa são as de projetos aerodinâmicos e de sistemas de propulsão. A pesquisa em aeroacústica que visa à redução de geração de ruídos de uma aeronave em vôo é um ótimo exemplo disto. Ainda neste contexto, o processo de mistura de comburente e oxidante no interior de uma câmara de combustão em motores aerotérmicos, pode se tornar eficiente o bastante para aumentar o rendimento do motor e reduzir os efeitos nefastos da poluição dos gases tóxicos liberados por automóveis e aviões. Na área ambiental muitos campos também são beneficiados com o estudo de processos de mistura. Uma das áreas de pesquisa que vem se tornando vital para a segurança pública é a prevenção de acidentes causados pelas alterações climáticas, os quais, em grande parte são devidos ao aquecimento global. É previsto que este tema será um dos mais preocupantes e abordados nas próximas décadas devido aos recentes fatos ocorridos. Outra preocupação dos ambientalistas é o desenvolvimento e aperfeiçoamento de modelos mais eficiente no controle de emissões de poluentes químicos. A indústria química que trabalha com mistura de componentes em processos químicos também se beneficia muito com este estudo. Com pode ser visto, compreender e controlar a física envolvida nestes fenômenos desperta muitos interesses práticos e alguns até vitais para a humanidade.

No contexto aeroespacial pode-se dizer que o presente estudo em corpos aerodinâmicos com múltiplos elementos tem impacto direto no avanço tecnológico no desempenho de veículos de transporte civil e militar. A indústria aeroespacial alcançou um avançado estágio no que tange ao projeto de modelos aerodinâmicos. Hoje se investe muito em aprimoramentos que parecem ínfimos diante do projeto total de uma aeronave. Entretanto, estes aprimoramentos podem ter um impacto significativo no desempenho de aeronaves. Um exemplo disso é o estudo de dispositivos de alta sustentação que visam, por exemplo, o aumento da carga de decolagem e, conseqüentemente, a redução do custo operacional de uma aeronave.

A pesquisa dedicada a estes dispositivos tem impacto direto no desempenho de aeronaves comerciais. Esta pesquisa é considerada um tópico estratégico para a indústria

aeronáutica nacional que tem investido grandes recursos materiais e humanos neste tema. Entre os trabalhos recentes existem vários que associam grandes centros de pesquisa que visam criar capacitação para realizar ensaios aerodinâmicos com especial atenção para ensaios de dispositivos de alta sustentação. Também existem projetos específicos para o desenvolvimento de códigos de simulação de escoamentos que incluíam o estudo numérico de dispositivos de alta sustentação utilizando em geral modelos de turbulência convencionais. A investigação experimental e numérica destes dispositivos é fundamental para o progresso da aviação em âmbito nacional, pois a indústria nacional ocupa um lugar em destaque no mercado mundial de jatos de médio porte.

A importância do problema de camada de mistura transicional em dispositivos hipersustentadores está ligada ao fato das características mostradas em regime laminar e turbulento serem muito diferentes. Em particular, o coeficiente de arrasto é muito maior em escoamentos turbulentos. Em uma asa, por exemplo, a posição do perfil principal e dos dispositivos hipersustentadores tem influência direta no coeficiente de arrasto. Desta forma, os procedimentos de projeto de aerofólios com múltiplos elementos devem incorporar modelos que permitam considerar a transição para escoamento turbulento. Para se obter um nível de precisão razoável no cálculo do coeficiente de arrasto é necessário estimar corretamente tanto o ponto onde tem início à transição quanto a sua extensão. Essas informações sobre a transição do escoamento para turbulento é que vão determinar as características do processo de mistura fluídico. Além disso, como já mencionado, sistemas de alta sustentação em geral possuem múltiplos elementos e a esteira de um elemento tem influência marcante sobre o escoamento no elemento seguinte. Uma mudança na posição de início e extensão da região de cisalhamento entre os elementos do perfil aerodinâmico podem afetar a circulação total sobre o sistema e, conseqüentemente a sustentação e o arrasto.

De fato, o coeficiente de arrasto aerodinâmico é um dos principais parâmetros da aeronave. Isto se deve ao fato de que o arrasto afeta vários itens de seu desempenho. Entre estes itens, o principal é provavelmente o consumo de combustível. Estima-se que em torno de 22% do custo operacional direto de uma aeronave de longo alcance corresponda

a gastos somente com combustíveis (RENEAUX, 2004). Logo, pode-se perceber claramente a importância do consumo de combustível e, conseqüentemente, do coeficiente de arrasto na competitividade de uma aeronave comercial. Um aumento no consumo de combustível pode afetar a autonomia da aeronave, o que restringe as rotas operáveis. Por outro lado, um aumento de consumo pode requerer um maior volume de combustível, o que afeta a máxima carga útil de decolagem. De acordo com Reneaux, em uma aeronave do tipo Airbus A320 estima-se que uma redução de 1% no arrasto corresponda a um aumento de 1,6 toneladas de carga útil de decolagem. Além disso, o arrasto também está frequentemente relacionado com o nível de ruído emitido pela aeronave. De acordo com as atuais regras dos órgãos que regulamentam o transporte aéreo mundial (FAR, 2006; ICAO, 2006) é possível notar uma crescente preocupação e uma maior restrição do nível de ruído emitido pelas aeronaves. Em vista da acirrada competição do setor, o domínio da tecnologia de redução de arrasto é, portanto, um fator importante para a indústria aeronáutica nacional, o qual confere especial atenção aos itens de desempenho acima relacionados.

Verifica-se aí um campo para grandes ganhos de desempenho. No entanto, requerimentos mais rigorosos na manufatura da superfície aerodinâmica elevam significativamente os custos de produção e manutenção, de modo que existe uma crescente dúvida acerca da utilidade da melhoria nos processos de manufatura e manutenção. Por outro lado, deve ser considerado que o aumento do arrasto não afeta apenas os custos relativos ao consumo de combustível. Autonomia e máxima carga útil de decolagem também são afetadas e o impacto destes itens de desempenho pode ser mais importante do que aquele do consumo de combustível. Em última análise, as dúvidas em relação aos ganhos e perdas relacionadas à transição e, conseqüentemente, o processo de mistura de fluidos, se devem em grande parte ao pouco conhecimento disponível sobre a forma como estes fenômenos ocorrem. Isto é atribuído à complexidade dos fenômenos envolvidos. De fato, existe uma grande gama de estudos a cerca destes fenômenos.

Outra área de pesquisa que se beneficia com o estudo do fenômeno de camada de mistura é a pesquisa dedicada ao desenvolvimento de sistemas de propulsão mais eficientes

que favorece diretamente o aperfeiçoamento de veículos capazes de realizar transportes em direção a órbita terrestre. Os cientistas que estão estudando os motores aerotérmicos conhecidos como Ramjet e Scramjet, almejam em um futuro não muito distante, um tipo de transporte, no qual, uma aeronave será impulsionada por Turbojets (motores que alcançam no máximo de 3,5 Machs) e quando chegar à velocidade correta, ele ativará o motor Scramjet (tecnologia Ramjet supersônica).

O interessante das tecnologias como as Ramjets e Scramjets, é que elas possibilitam um moderado uso de combustível perante a quantidade de energia gerada. É de comum conhecimento que este processo de mistura deve ser o mais eficiente possível. Este requerimento se torna mais importante no processo de combustão sabendo que estes tipos de motores utilizam pouco combustível para produzir a propulsão necessária. Portanto, o conhecimento e o domínio da física do fenômeno de camada de mistura fornece subsídios para a produção de motores mais eficientes através da redução do tempo de mistura entre comburente e oxidante. Em certa medida, pode-se afirmar que entre todas as aplicações mencionadas previamente, o processo de mistura destes motores aerotérmicos, é a área prática que mais se beneficia com a pesquisa do presente projeto.

Como pode ser visto existe uma gama de problemas em engenharia ainda inexplorados ou que precisem de maior dedicação para a compreensão do comportamento fenomenológico de um escoamento em suas mais variadas configurações e situações práticas. Para resolver isto, nas últimas décadas, a evolução da capacidade de processamento e armazenagem dos computadores viabilizou a solução numérica destes escoamentos complexos. De fato, hoje já estão disponíveis códigos computacionais comerciais poderosos, capazes de apresentar soluções para escoamentos transientes, turbulentos em geometrias complexas, envolvendo efeitos combinados de transferência de calor e massa, combustão e radiação.

A simulação numérica direta (SND) permite reproduzir com precisão os fenômenos físicos envolvidos. O estudo da camada de mistura requer que todas as escalas de tempo e espaço sejam corretamente representadas pelo método adotado. A vantagem deste método é a possibilidade de se chegar mais próximo dos últimos estágios da transição,

onde as interações não lineares são fortes, permitindo um estudo mais aprofundado dos processos que levam um escoamento à turbulência. As desvantagens do método utilizado são a restrição à simulação de escoamentos sobre geometrias simples e com baixo número de Reynolds. Estes métodos numéricos fornecem informações detalhadas a respeito dos processos físicos e da distribuição de velocidades, vorticidades e tensões turbulentas entre outras grandezas. Estas formas de simulação ainda não são de uso corrente na indústria nacional, mas a expectativa é de que isto venha a acontecer em médio prazo. De fato, as indústrias aeroespaciais americanas e européias já utilizam estes recursos em situações específicas. Este avanço na capacidade computacional foi uma resposta natural à demanda industrial e motivou o avanço dos métodos numéricos que já vinham sendo utilizados pelos pioneiros nesta área.

O presente trabalho é de natureza numérica respeitando a tendência das últimas décadas onde o aparecimento da dinâmica dos fluidos computacional teve grande contribuição para o entendimento da física dos fenômenos transicionais e turbulentos. Os estudos relatados no presente trabalho são dedicados à investigação de instabilidades hidrodinâmicas provocadas por trens de ondas tridimensionais fortemente moduladas em uma camada de mistura. Apesar disso, poucos trabalhos recentemente foram destinados ao estudo de ondas moduladas neste escoamento e, é neste sentido que o presente estudo foi inserido no tema de transição natural.

Revisão Bibliográfica

Neste capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica do problema de camada de mistura que corresponde a um fenômeno clássico de Instabilidade Hidrodinâmica (IH). A IH é bastante pesquisado e pode ser encontrado em inúmeras situações práticas dentro do escopo da engenharia, como por exemplo, aerodinâmica, combustão e engenharia ambiental.

Nos últimos trinta anos, o estudo de transição em camada de mistura se tornou um dos principais temas de pesquisa em IH. O aperfeiçoamento no conhecimento da física destes fenômenos é essencial para a proposição de modelos de transição para escoamentos turbulentos e processos que envolvam mistura de fluidos. Além do mais, o estudo deste tema conduz ao aprimoramento na predição de taxas de reações químicas e controle de emissão de poluentes, como por exemplo, óleos e gases. Progressos na área espacial também dependem do desenvolvimento de sistemas de propulsão mais eficazes. Ainda dentro da área espacial existe a proposta de se desenvolver sistemas de propulsão baseado em combustão supersônica. Em vários destes cenários, a compressibilidade é um fator chave.

Em geral, a camada de mistura pode se desenvolver a partir de duas correntes de diferentes velocidades. Devido a isto, o perfil de velocidade formado possui um ponto de inflexão e, portanto, o escoamento pode se tornar instável a qualquer perturbação introduzida nele (RAYLEIGH, 1880). Este fenômeno, conhecido com instabilidade de Kelvin-

Helmholtz é não viscoso e responsável pela formação de estruturas de vórtices alinhados na direção transversal do escoamento. Este comportamento foi observado em experimentos realizados por Birch e Eggers (1973) e Brown e Roshko (1974).

2.1 Teoria de Estabilidade Linear

Em escoamentos cisalhantes incompressíveis, o teorema de Squire (1933) diz que o menor número de Reynolds crítico ocorre para ondas bidimensionais. Este teorema é válido tanto para a simulação temporal quanto para espacial. Portanto, conclui-se que para investigar a instabilidade linear de escoamentos incompressíveis em geral é necessário considerar apenas perturbações bidimensionais, pois estas são as mais instáveis. Sandham e Reynolds (1989) mostram resultados obtidos com a teoria de instabilidade linear com os perfis tangente hiperbólico e de Blasius. Neste caso, a taxa de amplificação é mostrada para três diferentes razões de densidades. Os resultados obtidos com o perfil tangente hiperbólico para a camada de mistura foram comparados satisfatoriamente com os dados experimentais obtidos por Brown e Roshko (1974).

Já no escoamento compressível o parâmetro adimensional adotado é o chamado número de Mach convectivo (PAPAMOSCHOU; ROSHKO, 1988). Este parâmetro relacionado com a compressibilidade é calculado através da razão entre as velocidades máxima e mínima do perfil e as respectivas velocidades do som. Se a densidade é uniforme a velocidade do som não varia ao longo do perfil. Desta forma, o número de Mach convectivo pode ser simplificado e definido da seguinte forma

$$M_c = \frac{U_1 - U_2}{2c_0}, \quad (2.1)$$

onde U_1 e U_2 representam o escoamento médio temporal na parte superior e inferior respectivamente do perfil de velocidades e c_0 é a velocidade do som. No caso do uso de um perfil anti-simétrico esta equação ainda pode ser simplificada para o número de Mach convencional

$$M_c = M_1 = M. \quad (2.2)$$

Lessen, Fox e Zien (1965) e Blumen, Drazin e Billings (1975) apresentaram resultados teóricos para o fenômeno de camada de mistura em escoamentos cisalhantes compressíveis em regime subsônico. A conclusão nestes trabalhos foi que a taxa de amplificação de ondas bidimensionais é fortemente reduzida com o aumento do número de Mach convectivo. Para M_c menor que aproximadamente 0,6 a teoria mostra que, na região instável, as perturbações bidimensionais são mais amplificadas que as perturbações tridimensionais, conforme mostra a figura 1a. Estes resultados foram obtidos através da teoria com desenvolvimento temporal, mas são similares aos resultados encontrados por Gropengisser (1970) com a teoria espacial. Pela figura 1b pode-se observar que as perturbações tridimensionais tornam-se mais instáveis que as perturbações bidimensionais a partir de certo número de Mach convectivo. Aproximadamente para $0.6 < M_c < 1,0$ as perturbações tridimensionais são mais amplificadas que as perturbações bidimensionais conferindo um forte caráter tridimensional ao escoamento. Todavia, as perturbações bidimensionais ainda são amplificadas e podem influenciar o escoamento geral. Em regime supersônico, para $M_c > 1,0$, as perturbações bidimensionais têm uma taxa de amplificação muito pequena em relação às perturbações tridimensionais.

2.2 Regime Não Linear e Instabilidade Secundária

O estudo numérico de IH foi estendido para investigar a evolução de escoamentos governados pelo regime não linear. A teoria associada com estes efeitos é complexa e não será discutida em profundidade neste trabalho. Maiores detalhes sobre esta teoria pode ser encontrada em Bayly, Orszag e Herbert (1988). Este regime pode ser caracterizado como o estágio em que as perturbações alcançam ordens de magnitude significativas. Teorias e experimentos mostram que estas perturbações crescem e se saturam em um estágio conhecido como ciclo limite. Nesta etapa os resultados obtidos mostram a formação de estruturas de vórtices co-rotativos girando em conformidade com a vorticidade do

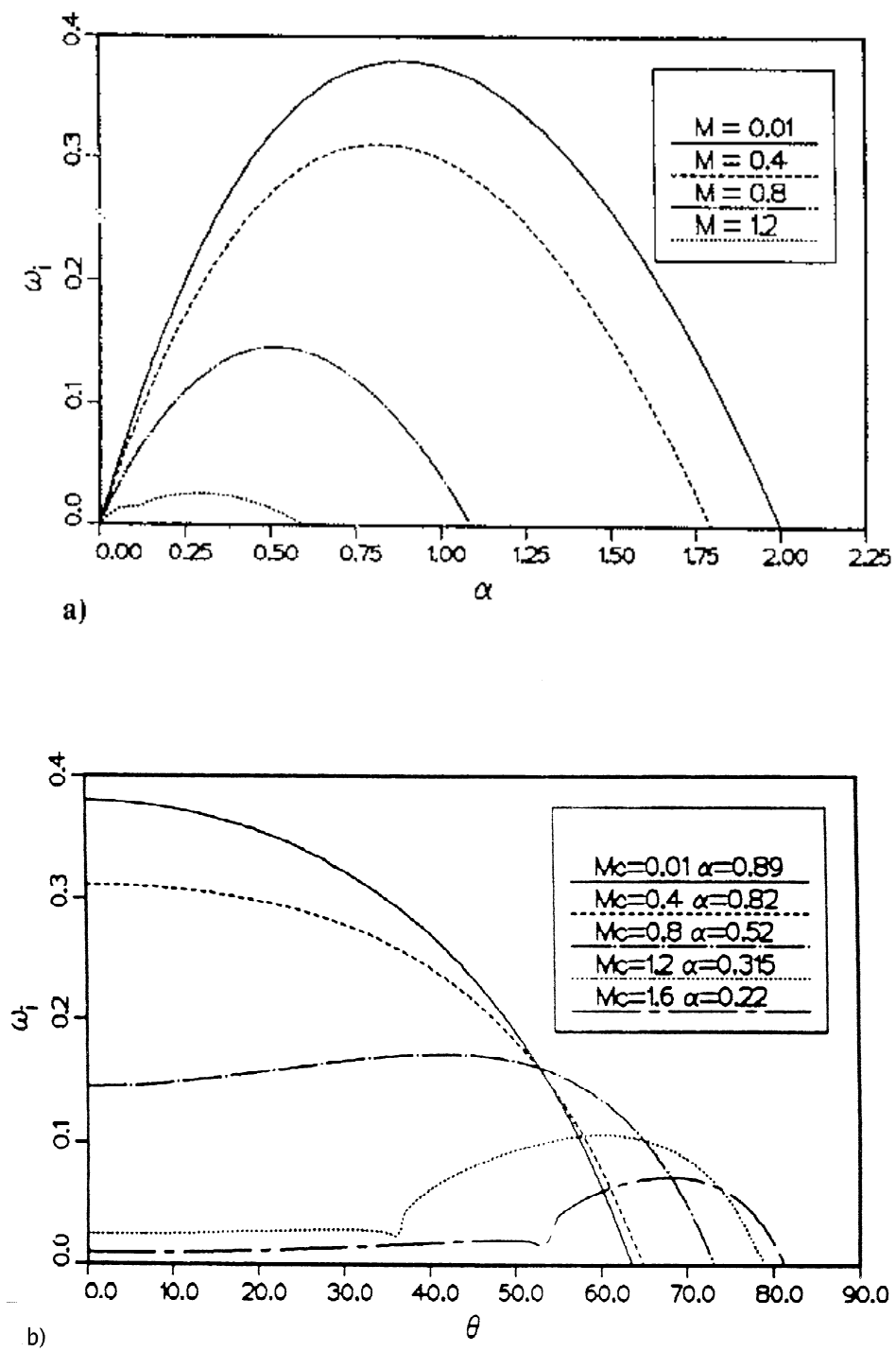


Figura 1: Efeito do número de Mach convectivo na taxa de amplificação de perturbações na camada de mistura com perfil tangente hiperbólica a) taxa de amplificação temporal das perturbações na camada de mistura b) efeito da obliquidade na taxa de amplificação.

escoamento base. Neste estágio o comprimento de onda pode ainda ser caracterizado pela evolução de instabilidades primárias. Ainda neste estágio a estrutura de vórtices pode sofrer os efeitos viscosos dissipando energia ou dar origem a novos tipos de escoamento devido à suscetibilidade do mesmo a outras perturbações. Estas outras instabilidades são chamadas de instabilidades secundárias. Um dos trabalhos pioneiros neste campo foi o de Pierrehumbert e Widnall (1982) que forneceu estudos teóricos sobre as taxas de amplificação de instabilidades em escoamentos incompressíveis no regime não linear.

A análise de instabilidade secundária para camada de mistura também foi dedicada ao estudo de instabilidades tridimensionais. Neste contexto, duas classes de instabilidades foram estudadas: a fundamental e a subharmônica. No caso fundamental, os modos expansivos (*bulging*) e translativo (*translative*) foram investigados com o objetivo de estudar o fenômeno de instabilidade secundária. O modo translativo (com diferença de fase entre a onda bidimensional e um par de ondas oblíquas) estudado por Pierrehumbert e Widnall (1982) e Sandham e Reynolds (1990) corresponde ao modo mais instável. O comprimento de onda do modo mais instável encontrado na teoria foi aproximadamente igual à distância entre os vórtices alinhados na direção longitudinal encontrados nos experimentos realizados por Bernal e Roshko (1986). Segundo Pierrehumbert e Widnall (1982) o modo mais instável corresponde ao comprimento de onda transversal de $\frac{2}{3}$ em relação ao comprimento de onda longitudinal.

Pierrehumbert e Widnall (1982) consideraram que os modos fundamentais oblíquos são responsáveis pela deformação inicial dos vórtices bidimensionais alinhados na direção longitudinal conduzindo o escoamento a formação de rolos oblíquos entrelaçados (*braids*). Todavia, estes rolos entrelaçados aparecem apenas nos estágios não lineares e não podem ser reproduzidos pela evolução de instabilidades primárias. Estudos voltados para a investigação de perturbações subharmônicas realizados por Pierrehumbert e Widnall (1982) mostram que em três dimensões outro tipo de instabilidade secundária, chamada de emparelhamento helicoidal, pode ocorrer. Ainda neste trabalho voltado a escoamentos incompressíveis foi mostrado que as ondas subharmônicas bidimensionais são as mais amplificadas, e correspondem ao emparelhamento bidimensional comumente observado em

experimentos. Ragab e Wu (1989) apresentaram estudos sobre instabilidade secundária em camada de mistura de escoamentos compressíveis. Neste trabalho foi observado que para $M_c = 0,4$, o emparelhamento helicoidal foi o modo mais amplificado em comparação ao emparelhamento bidimensional. Isto é uma forte indicação de que para altos M_c a tridimensionalidade é predominante do escoamento. A dominância das perturbações tridimensionais na simulação para Mach convectivo de 1,05 foi encontrada nas simulações não lineares (SANDHAM; REYNOLDS, 1990).

Além dos vórtices de Kelvin-Helmholtz, trabalhos experimentais apresentados por Bernal e Roshko (1986) e trabalhos numéricos publicados por Metcalfe et al. (1987) apontaram para a existência de uma instabilidade secundária que causa, na área de estagnação entre os vórtices Kelvin-Helmholtz, intensa concentração de vórtices contra-rotativos na direção transversal. Através de um corte na direção transversal do escoamento, estes vórtices, denominados grampos (*harpins*), são facilmente identificados na forma de cogumelos e são responsáveis pela maior parte de transferência de massa, quantidade de movimento e energia entre as correntes. De acordo com Lesieur (1997), devido à concentração de vorticidade, a forma definida e a não predição em relação à localização no tempo e espaço, estas estruturas de vórtices exibem todas as características de uma estrutura coerente.

Germanos (2005) apresenta trabalhos numéricos voltados à análise do efeito do número de Mach convectivo na instabilidade da camada de mistura temporal. Inicialmente, testes foram executados para avaliar a taxa de amplificação em regime linear. Estes resultados foram consistentes com a teoria. Além disso, foi possível verificar o código computacional através da reprodução de fenômenos clássicos em IH como a taxa de amplificação de perturbações introduzidas no escoamento base, a formação de estruturas de vórtices e, por último, o emparelhamento destes vórtices através da introdução de perturbações subharmônicas. Um resultado interessante foi que sem a introdução de perturbações subharmônicas o fenômeno de emparelhamento ocorre somente após um considerável tempo. A explicação para este comportamento é que o fenômeno foi disparado pelo erro de discretização. Também pôde ser concluído que devido ao tempo que a onda subharmônica levou para se tornar evidente no escoamento o erro de discretização pode ser considerado

pequeno. Baseado nestes resultados foi possível comprovar que com o aumento do número de Mach convectivo o escoamento reduz fortemente a taxa de amplificação das perturbações bidimensionais. Isto pode ser observado também avaliando o tempo adimensional em que o problema evoluiu.

2.3 Ondas moduladas

Os desenvolvimentos descritos nas seções anteriores levaram a um progresso significativo na compreensão do processo de transição do fenômeno de camada de mistura. Entretanto, o objetivo prático principal de entender e prever o processo de transição natural ainda não foi alcançado. De fato, as teorias e cenários não lineares mais estudados até hoje se restringem a situações em que um número muito limitado de ondas está envolvido. A instabilidade secundária estuda a evolução de uma onda bidimensional com a adição de perturbações, aleatórias ou não, com amplitude muito menor. Nas situações práticas, a transição não se origina de um cenário tão simplificado. Neste ambiente, um grande número de ondas bi- e tri-dimensionais está presente simultaneamente. Estas ondas cobrem uma faixa de frequências e comprimentos de onda, o que dá origem a ondas moduladas.

O estudo dos cenários com um número reduzido de ondas se justifica em grande medida pela tentativa de simplificação de um fenômeno reconhecidamente complexo. Entretanto existem outras justificativas para esta abordagem. Em vista do teorema de Squire (1933), frequentemente se considera que o resultado do regime linear pode ser bem representado por ondas bidimensionais. Além disso, alguns pesquisadores consideram que a faixa de ondas instáveis é muito estreita e que o resultado do regime linear pode ser bem modelado por uma única onda monocromática.

O que se pode dizer de antemão é que estas considerações de bidimensionalidade e monocromaticidade deixam de ser válidas em várias situações práticas em aeronáutica. Por exemplo, à medida que o número de Mach se eleva, as ondas mais instáveis deixam de ser bidimensionais. No regime supersônico, por exemplo, as ondas mais instáveis se

propagam em ângulos de 45° a 60° . Na faixa de operação de aeronaves comerciais as taxas de amplificação das ondas bidimensionais e oblíquas atingem seus valores mais próximos entre si violando as considerações acima.

Em vista destes fatos, alguns pesquisadores se dedicam ao estudo de cenários que envolvem um número maior de ondas moduladas. Entre estes cenários se destacam os trem de ondas emanantes de uma fonte puntual e os pacotes de ondas. Uma perturbação puntual no espaço e periódica no tempo excita uma ampla faixa de modos tridimensionais todos com a mesma frequência. A instabilidade hidrodinâmica seleciona os modos mais instáveis e o resultado é um trem de ondas tridimensional. O sistema apresenta então modulação na direção transversal e não se limita a ondas bidimensionais. De forma semelhante, uma perturbação pulso gerada por uma fonte puntual no espaço excita uma ampla faixa do espectro de frequência e de número de onda transversal. A instabilidade hidrodinâmica seleciona os modos mais instáveis e o resultado é um pacote de ondas tridimensional. Este sistema não é bidimensional nem monocromático e melhor imita o processo de transição natural.

O estudo de transição natural, em particular, na camada de mistura, foi muito pouco explorado nas últimas décadas. A maior parte dos trabalhos dedicados a investigação do fenômeno com o uso de ondas moduladas são voltados para a evolução linear e não linear de ondas Tollmien-Schlichting em uma camada limite. Como mencionado anteriormente, o presente projeto de pesquisa está associado há um projeto mais ambicioso que visa o estudo deste tipo de escoamento transicional. Todavia, a investigação numérica proposta nesta etapa se limita a simulação numérica de trens de ondas em uma camada de mistura temporal. O estudo deste fenômeno temporal representa um passo essencial para o avanço em direção aos estudos de escoamentos transicionais com desenvolvimento espacial almejados em longo prazo. A idéia final é analisar e reproduzir os comportamentos encontrados no fenômeno de camada limite e, como contribuição do trabalho, explorar o comportamento e fornecer resultados que expliquem a evolução de ondas moduladas no problema de camada de mistura.

Formulação

O desenvolvimento do fenômeno de instabilidade hidrodinâmica de camada de mistura foi investigado através da simulação numérica direta filtrada. A formulação adotada neste trabalho são as equações de Navier-Stokes escritas na forma conservativa de acordo com a nomenclatura adotada por Anderson, Tannehill e Pletcher (1984). Desta forma são garantidas a conservação integral de massa, quantidade de movimento e energia quando as equações são discretizadas. O escoamento estudado no presente projeto foi a evolução linear e não linear de trens de ondas oblíquos fortemente modulados através do fenômeno de camada de mistura.

3.1 Sistema de Equações

As equações completas de Navier-Stokes adimensionalizadas para um fluido compressível em um referencial cartesiano podem ser escritas na forma abaixo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial u_j(E_t + p)}{\partial x_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (3.3)$$

onde x_i são as coordenadas cartesianas (x, y, z) e t é o tempo. As variáveis primitivas (u_i, ρ, p) são respectivamente, as componentes de velocidade (u, v, w) , a densidade e a pressão. A energia total do escoamento E_t é dada por

$$E_t = \rho \left(e + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right). \quad (3.4)$$

O tensor de tensões viscosas τ_{ij} é definido por

$$\tau_{ij} = \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right). \quad (3.5)$$

O fluxo de calor devido à condutividade térmica, a partir da Lei de Fourier de condução de calor, é proporcional ao gradiente de temperatura local de acordo com a equação abaixo

$$q_i = -\frac{\mu}{(\gamma - 1)M^2 Pr Re} \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (3.6)$$

onde γ é a razão do calor específico, e T é a temperatura do escoamento. O número de Mach e o número de Reynolds são dados respectivamente por

$$M = \frac{U_\infty}{\sqrt{\gamma R T_\infty}}, \quad (3.7)$$

$$Re = \frac{\rho_\infty U_\infty \delta_{\omega_0}}{\mu_\infty}, \quad (3.8)$$

onde $(\rho_\infty, U_\infty, \delta_{\omega_0}, \mu_\infty)$ indicam os valores de referência para densidade, velocidade, espessura de vorticidade e viscosidade dinâmica, respectivamente. Por último, o número de Prandtl é definido por

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k}, \quad (3.9)$$

onde k é o coeficiente de condutividade térmica e c_p é o calor específico à pressão constante.

Além das equações de (3.1) a (3.9) é necessário a equação de estado para completar o sistema com o mesmo número de equações e incógnitas. A equação de estado adimensionalizada para um gás perfeito segue abaixo

$$p = (\gamma - 1)\rho e. \quad (3.10)$$

onde e é a energia interna definida por

$$e = \frac{T}{(\gamma^2 - \gamma)M^2}. \quad (3.11)$$

Além disso é necessário o cálculo da temperatura, que pode ser obtida também a partir de uma equação de estado

$$T = \frac{\gamma M^2 p}{\rho}, \quad (3.12)$$

Também foi considerado que a viscosidade varia com a temperatura através da Lei de Suntherland

$$\mu = T^{3/2} \frac{1 + C_2}{(T + C_2)}. \quad (3.13)$$

O número de Prandtl e o c_p são frequentemente usados para calcular o coeficiente de condutividade térmica uma vez conhecido o valor da viscosidade dinâmica. Este procedimento também foi adotado neste trabalho. Isto é justificável devido à razão de c_p/Pr , que aparece na equação (3.9) ser constante para uma ampla faixa de pressão e temperatura. Neste trabalho o número de Prandtl foi assumido $Pr = 1$.

As equações de conservação de 3.1 a 3.13 foram adimensionalizadas utilizando-se os seguintes parâmetros U_∞ , ρ_∞ , T_∞ e δ_{w_0} , como segue abaixo

$$\begin{aligned}
u_i &= \frac{u_i^*}{U_\infty}, & \rho &= \frac{\rho^*}{\rho_\infty}, & p &= \frac{p^*}{\rho_\infty U_\infty^2}, \\
T &= \frac{T^*}{T_\infty}, & t &= \frac{t^* U_\infty}{\delta_{\omega_0}}, & x_i &= \frac{x_i^*}{\delta_{\omega_0}}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

As variáveis primitivas do escoamento foram decompostas em uma parte média temporal e uma flutuação da seguinte forma

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= \bar{u}(y) + u'(x, y, z), \\
v(x, y, z, t) &= v'(x, y, z), \\
w(x, y, z, t) &= w'(x, y, z), \\
\rho(x, y, z, t) &= 1 + \rho'(x, y, z), \\
T(x, y, z, t) &= \bar{T}(y) + T'(x, y, z), \\
p(x, y, z, t) &= \frac{1}{\gamma M^2} + p'(x, y, z),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

onde os termos $\bar{u}(y)$ e $\bar{T}(y)$ representam o escoamento base para a componente de velocidade longitudinal e a temperatura, e os termos indicados com ($'$) representam as flutuações. Esta formulação acima corresponde a simulação direta das equações de conservação na sua forma completa.

Inicialmente o código trabalhou com a hipótese de escoamento isentrópico e adiabático. Portanto a equação dos gases perfeitos e a equação da energia podem ser substituídas por $\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{1}{M^2}$, onde p é a pressão, ρ é a densidade do escoamento e γ é a relação de calores específicos. As variáveis acima são apresentadas na sua forma adimensional. Uma revisão detalhada sobre escoamento isentrópico pode ser encontrada em Sullivan (1981). Os testes realizados no presente projeto mostraram que esta hipótese além de simplificar o problema também produziu resultados satisfatórios para certa faixa de número de Mach (tipicamente para Mach menor que 0,3). Maiores detalhes sobre os testes realizados para esta formulação isentrópica e adiabática podem ser encontrados no artigo dado por (GERMANOS; MEDEIROS; SOUZA, 2004b). Nestas circunstâncias a equação dos gases perfeitos

combinada com a equação de energia pode ser escrita na forma

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{1}{\gamma M^2} \quad (3.16)$$

onde $\gamma = c_p/c_v$ é a relação de calores específicos dados pelos coeficientes de pressão e volume constante respectivamente. Para a simulação de escoamento isentrópico, a viscosidade foi assumida constante. Com estas hipóteses os resultados numéricos foram significativamente satisfatórios quando comparados com os modelos fornecidos pelas teorias lineares associadas a cada problema em estudo. A única restrição ao uso desta hipótese foi a limitação de se trabalhar com escoamento para baixo número de Mach, pois, caso contrário, estas hipóteses levaram a um erro significativo em comparação com o modelo teórico.

3.2 Escoamento Base

O primeiro passo para a simulação de um fenômeno físico transiente é a determinação da condição inicial apropriada. Para a simulação de instabilidade hidrodinâmica a condição inicial é o escoamento base mais uma perturbação. Esta condição inicial está intimamente ligada com as características fenomenológicas do problema proposto.

Na primeira etapa do projeto foram realizados testes para verificar o código. Estes testes foram propostos com o objetivo de analisar a estabilidade numérica, verificar a implementação das Equações de Navier-Stokes e verificar a implementação de um refinamento de malha na direção normal dos escoamentos.

Primeiramente o perfil de velocidade adotado neste trabalho foi dado por Rayleigh (1880). Este perfil corresponde a uma função tangente hiperbólica que usa a média das velocidades nas extremidades do escoamento para calcular a variação da velocidade ao longo da coordenada y . Este perfil de velocidade é instável a pequenas perturbações. Rayleigh demonstra um teorema muito importante que indica se um determinado escoamento invíscido é susceptível ou não à instabilidade. Segundo o teorema, uma condição

necessária para que haja instabilidade no escoamento é que o perfil de velocidade tenha um ponto de inflexão. Isto significa que as perturbações introduzidas neste escoamento serão amplificadas. Sabe-se que na camada de mistura estas perturbações acabam por formar estruturas de vórtices na direção longitudinal do escoamento, chamados de vórtices de Kelvin-Helmholtz. Este escoamento resultante caracterizado pelas estruturas de vórtices também é instável a introdução de perturbações subharmônicas e leva ao pareamento destes vórtices. Este fenômeno de emparelhamento de vórtices é, portanto, decorrente de uma instabilidade secundária. Posteriormente, os termos dissipativos das equações de conservação de quantidade de movimento dissipam a energia deste vórtice.

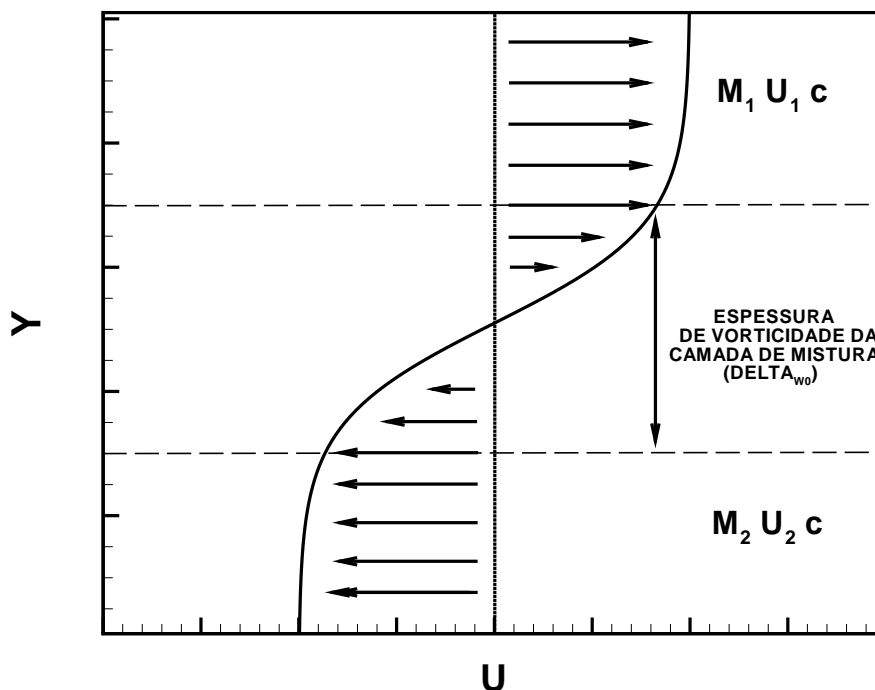


Figura 2: Perfil de Velocidade Inicial

A figura 2 mostra um perfil anti-simétrico com velocidade positiva na parte superior do escoamento ($y > 0$) e velocidade negativa na parte inferior do escoamento ($y < 0$). Ele representa o perfil de velocidade inicial usado neste trabalho e utiliza uma função tangente hiperbólico:

$$\bar{u}(y) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{M_2}{M_1} \right) + \left(1 - \frac{M_2}{M_1} \right) \tanh\left(\frac{2y}{\delta_{\omega_0}}\right) \right], \quad (3.17)$$

onde M_1 e M_2 representam os números de Mach do escoamento base fora da região cisalhante, na parte superior ($y > 0$) e na parte inferior ($y < 0$), respectivamente. A referência de escala utilizada foi a espessura de vorticidade da camada de mistura definida por

$$\delta_{\omega_0} = c_0 \frac{M_1 - M_2}{|d\bar{u}/dy|_{max}}, \quad (3.18)$$

onde c_0 representa a velocidade do som. A derivada na equação acima é dada por

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = c_0(M_1 - M_2) [1 - \tanh(2y)]. \quad (3.19)$$

Adotando-se o conceito de número de Mach convectivo proposto por Papamoschou e Roshko (1988) e assumindo que a densidade é constante ao longo do perfil de velocidade o parâmetro adimensional relativo à compressibilidade é definido como

$$M_c = \frac{M_1 - M_2}{2}. \quad (3.20)$$

O perfil de temperatura média inicial pode ser determinado pela solução da equação da energia para camada limite compressível (White (1974)) com o número de Prandtl unitário. Este perfil fica da seguinte forma

$$\begin{aligned} \bar{T}(y) = & \frac{1}{T_1} \left(\frac{T_2 M_1 - T_1 M_2}{M_1 - M_2} \right) - M^2 \frac{(\gamma - 1)}{2} \left[\bar{u}^2(y) + \frac{M_2}{M_1} - \bar{u}(y) \left(1 + \frac{M_2}{M_1} \right) \right] + \\ & \bar{u}(y) \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \left(\frac{M_1}{M_1 - M_2} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde T_1 e T_2 são as temperaturas do escoamento base fora da região cisalhante na parte

superior ($y > 0$) e na parte inferior ($y < 0$), respectivamente. De acordo com o perfil de velocidade anti-simétrico considerado e assumindo que as temperaturas do escoamento na parte superior e inferior do perfil de velocidade sejam iguais, a relação 3.21 fica reduzida para

$$\bar{T}(y) = 1 + M^2 \frac{\gamma - 1}{2} (1 - \bar{u}^2(y)). \quad (3.22)$$

Neste caso o número de Mach do escoamento na parte superior do perfil (M_1) é igual ao número de Mach convectivo (M_c). Este perfil é comumente usado nos estudos de camada de mistura (SANDHAM; REYNOLDS, 1989; SANDHAM, 1990; FORTUNÉ, 2000; COLLIER; GHESQUIERES, 2003; GERMANOS; SOUZA; MEDEIROS, 2007). A pressão do escoamento base foi assumida como $\bar{p} = 1/\gamma M_c^2$, enquanto que a densidade foi obtida pela equação 3.10.

3.3 Perturbação do Escoamento

Existem várias formas de introduzir perturbações no escoamento. Uma alternativa é permitir que o próprio erro numérico contido nas aproximações gere flutuações de velocidade. Uma desvantagem desta técnica é que o fenômeno leva um considerável tempo para evoluir. Esta formação de vórtices pode ser antecipada com a introdução de uma perturbação ao escoamento base. Este procedimento é bastante usado neste estudo. Por exemplo, Colonius, Lele e Moin (1997), que foram uns dos primeiros a simular o fenômeno de camada de mistura com desenvolvimento espacial, empregaram esta técnica. Michalke (1964) desenvolveu um modelo teórico para encontrar as taxas de amplificação e as auto-funções para o caso de camada de mistura. Para descrever as componentes de velocidade da perturbação foram usadas aproximações exponenciais. Estas funções são frequentemente usadas devido ao seu decaimento acentuado nas fronteiras do domínio. Além disso estas funções são facilmente derivadas analiticamente. Em vista do tratamento temporal utilizado foi adotada uma perturbação periódica em x. Desta forma a componente de

velocidade normal da perturbação adotada (v') foi

$$v' = [A_0 \cos(\alpha_0 x) + A_1 \cos(\alpha_1 x)] e^{(-\sigma y^2)}, \quad (3.23)$$

onde A_i é a amplitude, α_i representa o número de onda na direção longitudinal da perturbação e σ define a espessura da função gaussiana. Como os testes envolveram também o regime de instabilidade secundária, a perturbação contém dois modos. Os índices 0 e 1 correspondem ao modo fundamental e ao modo subharmônico da perturbação respectivamente.

Apesar do escoamento ser compressível, é possível considerar que a perturbação inicial é incompressível. Baseado na hipótese de escoamento incompressível o termo $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ da equação 3.1 pode ser considerado nulo e, conseqüentemente, a componente de velocidade longitudinal do escoamento perturbado (u') pôde ser calculada pela equação de continuidade da seguinte forma

$$u' = - \int \frac{\partial v'}{\partial y} dx. \quad (3.24)$$

Substituindo a equação 3.23 na equação acima tem-se a componente de velocidade longitudinal para a perturbação

$$u' = -2\sigma y e^{(-\sigma y^2)} \left[\frac{A_0 \sin(\alpha_0 x) \alpha_1 + A_1 \sin(\alpha_1 x) \alpha_0}{\alpha_0 \alpha_1} \right]. \quad (3.25)$$

As perturbações para a densidade, pressão e temperatura foram assumidas nulas.

A mesma hipótese pode ser usada para o caso de perturbação tridimensional. Desta forma estipula-se um valor para as componentes transversal e normal e calcula-se a componente longitudinal através da equação de massa. Todavia, a nomenclatura adotada aqui foi mais generalizada para trabalhar desde perturbações monocromáticas até ondas

fortemente moduladas.

$$\begin{aligned}
u' &= -e^{-\sigma y^2} \left[A_n \frac{\beta_k \cos(\alpha_i x + \beta_k z)}{\alpha_i} - A_n \frac{\beta_k \cos(\alpha_i x - \beta_k z)}{\alpha_i} \right] \\
&\quad + 2\sigma y e^{-\sigma y^2} \left[A_n \frac{\sin(\alpha_i x + \beta_k z)}{\alpha_i} + A_n \frac{\sin(\alpha_i x - \beta_k z)}{\alpha_i} \right] \\
&\quad + 2\sigma y e^{-\sigma y^2} \left[A_n \frac{\sin(\alpha_i x + \phi)}{\alpha_i} \right], \\
v' &= e^{-\sigma y^2} [A_n \cos(\alpha_i x + \beta_k z) + A_n \cos(\alpha_i x - \beta_k z)] \\
&\quad + e^{-\sigma y^2} [A_n \cos(\alpha_i x + \phi)], \\
w' &= e^{-\sigma y^2} [A_n \cos(\alpha_i x + \beta_k z) + A_n \cos(\alpha_i x - \beta_k z)], \tag{3.26}
\end{aligned}$$

onde A_n são as amplitudes definidas para cada onda, α_i são os números de onda longitudinais onde i varia de 0 (onda fundamental) até 1 (onda subharmônica) e β_k são os números de onda transversais onde k varia de 0 até N modos harmônicos. Por último, ϕ é a diferença de fase entre a onda bidimensional e os pares de ondas oblíquas.

3.4 Condição de Contorno

O aperfeiçoamento da modelagem das condições de contorno no infinito sempre atraiu considerável atenção da comunidade de pesquisadores e engenheiros interessados na simulação de escoamentos compressíveis transientes. A especificação apropriada das condições de contorno e sua implementação representam uma das tarefas mais importantes no desenvolvimento de um método numérico. O tratamento numérico das condições de contorno pode estar relacionado com o tipo de discretização utilizada para o cálculo numérico.

Devido ao fato de considerarmos à evolução temporal adotado do fenômeno de camada de mistura, condições de contornos de periodicidade foram usadas nas direções longitudinal e transversal. Além disso, foi necessário impor uma condição que simule o escoamento livre na direção normal do escoamento. Este tipo de condição requer que haja deslizamento através da componente de velocidade longitudinal e impermeabilidade através da componente de velocidade normal. Este tipo de condição de contorno é conhecida como

condição de deslizamento livre (*free-slip*) e pode ser definida da seguinte forma

$$\begin{aligned} v &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y}(u, w, \rho, p, E_t) &= 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

onde as variáveis primitivas (ρ , u_i , p e E_t) são respectivamente, a densidade, as componentes de velocidade (u, v, w), a pressão e a energia total do escoamento. Estas condições produzem resultados satisfatórios a uma distância suficientemente grande da camada de mistura. Também foi avaliado o uso de condições com decaimento exponencial na corrente livre (MEDEIROS; SILVESTRINI; MENDONÇA, 2000). Estritamente falando, esta técnica pode ser aplicada apenas para a simulação em regime linear. Entretanto, esta técnica tem sido utilizada mesmo em regime não-linear.

Outra preocupação relacionada a simulação numérica é implementar condições de contornos não reflexivas. Em geral, reflexões de ondas nos contornos podem introduzir erros não físicos na solução numérica e, portanto, estes erros precisam ser minimizado. Algumas técnicas foram sugeridas e avaliadas para a implementação da condição de contorno. Dentre elas, se destacam o uso de condições de contorno não-reflexivas apresentadas por Thompson (1987) que discretiza as equações de Navier-Stokes usando uma formulação conservativa. Sesterhenn (2001) estendeu o estudo para trabalhar com a formulação não conservativa. A formulação com a condição de contorno não-reflexiva de variáveis características do sistema de equações de conservação adimensionais é obtida a partir das equações de Euler para escoamentos isentrópicos, acrescentado as componentes transversais de ondas planas e os efeitos viscosos. Desta forma os termos que caracterizam as ondas acústicas se tornam explícitos nas equações de conservação e, conseqüentemente, é possível determinar se a onda se propagará ou não em direção ao contorno de saída ou em direção ao interior do domínio computacional. Estes métodos são bem eficientes mas os proponentes do presente trabalho julgaram que a implementação e a verificação do método custariam um considerável tempo do projeto e, portanto, esta implementação foi prorrogada para trabalhos futuros.

Alternativamente, para resolver o problema de reflexão foram adotadas malhas não uniformes (COLONIUS; LELE; MOIN, 1992, 1997; BOGEY; BAILLY; JUVE, 2000; ZHONG; A.; TATINENI, 2003). A idéia básica é criar um estiramento na malha para dissipar as componentes de velocidade em uma determinada direção. No caso da simulação temporal de camada de mistura foi possível gerar malhas com refinamento no interior do domínio computacional e, conseqüentemente, gerar regiões de estiramento em direção ao escoamento livre. A técnica de estiramento auxilia na dissipação de ondas acústicas que são geradas devido aos fenômenos de formação de vórtices e, posteriormente, de emparelhamento destes mesmos vórtices devido à instabilidade secundária. Portanto, essas ondas são amortecidas antes de alcançar o contorno da corrente livre evitando a reflexão destas ondas em direção ao interior do domínio. Maiores detalhes sobre as malhas não uniforme utilizadas serão mostrados nas próximas seções.

Em camada de misturas espaciais, além destas condições de contorno, outra técnica pode ser usada para reduzir o campo de velocidade no contorno de saída. Esta técnica é conhecida como zona de abafamento (KLOKER; RIST; FASEL, 1993; MEITZ; FASEL, 2000). Este método é muito efetivo para evitar reflexões de ondas nos contornos através de uma função rampa que reduz as componentes de velocidade à zero. A desvantagem deste método é que a função rampa deve ser suave, pois caso contrário, a própria zona de abafamento pode gerar reflexões de ondas. Sandberg e Sandham (2006) adicionam uma dissipação artificial no lado direito das equações de conservação. Neste caso a solução é forçada para a condição determinada no contorno de saída. Apesar de esta técnica produzir resultados satisfatórios, o termo dissipativo adicionado nas equações de conservação depende consideravelmente do tipo de escoamento e do tamanho da estrutura que alcançará a condição de saída.

Metodologia Numérica

Na última década houve um grande progresso na área da dinâmica de fluidos computacional. Desenvolvimentos da tecnologia de hardware, assim como algoritmos numéricos avançados, permitiram que tentativas fossem feitas em direção à análise e solução numérica de problemas de fluxos dinâmicos. Atualmente, a mecânica dos fluidos computacionais tem se tornado uma ciência pioneira explorando soluções tanto na área teórica que encontra como obstáculo a evolução de fenômenos em regime não linear, quanto na área experimental que requer muitas vezes a obtenção de equipamento de custo elevado. Estas técnicas já vêm sendo difundidas na indústria aeronáutica que já utilizam códigos comerciais que visam em grande parte o projeto inicial ou mesmo alterações em um projeto em desenvolvimento. As técnicas já implementadas ainda apresentam algumas desvantagens em relação à precisão, mas a pesquisa já avança na busca de alternativas que superem estas deficiências. O método adotado no presente projeto é um exemplo destes métodos pioneiros, mas pouco usados na indústria, que avançam para preencher as lacunas deixadas pelos métodos que já vem sendo aplicados na indústria.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um código para o cálculo numérico com alta ordem de precisão através de escoamentos transicionais como o fenômeno de camada de mistura. Este tipo de fenômeno varia no espaço e no tempo, e conseqüentemente, possuem larga variação de escalas de tempo e espaço que inclui pequenas escalas e envolve flutuações de pequenas amplitudes. Portanto, este tipo de escoamento exige alta precisão

na solução numérica. Esta necessidade de precisão pode ser alcançada pelo uso de métodos espectrais. Neste caso, a alta precisão dos resultados é o objetivo principal para a solução destes problemas. Resultados confiáveis de alta precisão resultam em análises concretas que podem ser aplicadas com maior segurança. O método espectral usa algoritmos rápidos para efetuar os processos que caso fossem resolvidos analiticamente demandariam muito tempo de solução e processamento. O uso deste método é limitado a domínios e condições de contornos simples. Por adaptar à função de condição inicial a uma série de senos, qualquer descontinuidade torna-se um problema bastante relevante e efeitos como o de Gibbs e imprecisão dos resultados podem contaminar a solução numérica.

Para superar estas dificuldades podemos utilizar representações numéricas alternativas. Um exemplo comum é o Método das Diferenças Finitas (MDF), também conhecidas como diferenças Hermitianas (KOPAL, 1961). Uma segunda alternativa seria trabalhar com a formulação Lagrangiana. Dentre os métodos que trabalham com esta formulação pode-se citar o Método dos Volumes Finitos (MVF). Kopal mostra em seu livro a utilização de interpolação Hermitiana e prova que a ordem de precisão obtida através desta formulação é muito superior à obtida através da forma Lagrangiana. Apesar de o MDF restringir-se às geometrias simples, este método também se justifica pela possibilidade do uso de condições de contornos mais gerais. Collatz (1966) na introdução de métodos Hermitianos, diz que o ganho em precisão por este método não é obtido com a inclusão de mais pontos, como ocorre em outros métodos, mas baseado no fato de que a derivação de cada equação individual de diferenças é satisfeita em diversos pontos ao mesmo tempo, ao invés de em um apenas. A grande desvantagem do MDF é que este método trabalha apenas com domínios estruturados, enquanto que o MVF pode trabalhar com geometrias mais complexas.

4.1 Derivadas Espaciais

No presente projeto de pesquisa foi adotado o Método das Diferenças Finitas Compactas (MDFC), que é um método derivado do MDF. Estas aproximações compactas

foram aqui adotadas para resolver as derivadas espaciais nas Equações de Navier-Stokes, continuidade e energia. Os esquemas compactos têm atraído recentemente considerável atenção na área de dinâmica dos fluidos, principalmente em áreas que estudam os fenômenos simulados no presente estudo. Este método, como o MDF, usa expansões em séries de Taylor para obter aproximações das derivadas de qualquer ordem.

Hirsch (1975) apresenta comparações entre métodos compactos e não compactos. Nesta análise, ambos os métodos comparados são métodos simétricos. Uma aproximação não compacta de 2ª ordem e uma aproximação compacta de 4ª ordem foram avaliadas em relação à precisão numérica. Um caso teste foi simulado utilizando as duas aproximações. Baseado nesta investigação conclui-se que para trabalhar com o método não compacto de 2ª ordem é necessário gerar uma malha computacional quatro vezes mais refinada que a malha utilizada na simulação com a aproximação compacta de 4ª ordem para gerar os resultados com a mesma precisão. Além disso, os resultados mostram que se pode economizar tempo computacional em até 20 vezes. Hirsch também confirma através da comparação de aproximações de mesma ordem de precisão que os métodos compactos possuem um erro de truncamento menor que os métodos não compactos. Germanos, Medeiros e Souza (2004a) estenderam o estudo e compararam métodos não compactos de 2ª e 4ª ordem com métodos compactos de 4ª e 6ª ordem. Neste estudo a velocidade de propagação de ondas acústicas foi investigada durante vinte períodos no tempo. Na comparação entre os métodos não compacto de 2ª ordem e compacto de 6ª ordem conclui-se que foi necessário trabalhar com uma malha dez vezes mais refinada para reproduzir a velocidade de propagação do som gerada com o método compacto de 6ª ordem. Mesmo com malhas um pouco menos refinadas, os resultados obtidos com o método compacto de 6ª ordem reproduziram com precisão a propagação acústica obtida analiticamente no período determinado.

Lele (1992) enfatiza a importância de usar métodos compactos de alta ordem e apresenta esquemas de derivadas para a primeira e segunda derivada de 2ª até 10ª ordem. Estes métodos compactos são resolvidos de forma implícita, isto é, as derivadas espaciais são resolvidas invertendo-se uma matriz banda. Para isto, existem algoritmos rápidos que

são extensivamente usados na comunidade de pesquisa. Strang (1988) apresenta métodos bastantes eficientes para resolver este tipo de sistema linear. Em geral, métodos implícitos são mais precisos que os métodos explícitos, pois o erro de truncamento não se acumula no avanço espacial no cálculo da derivada (KOPAL, 1961; COLLATZ, 1966). O esquema implícito ou compacto mais usado é um esquema simétrico de 6^a ordem de precisão mais conhecido como Padé. Devido à simetria deste esquema, o erro de dissipação é nulo. Devido a estes fatores, os esquemas compactos são extremamente atrativos se utilizados com um esquema explícito para avançar no tempo. Lele também propõe esquemas para serem aplicados nos pontos na fronteira e próximos às fronteiras.

Mahesh (1998) também apresenta MDFC de alta ordem, introduzindo um método que, usando a mesma aproximação, obtém-se mais precisão que o esquema Padé clássico. A desvantagem deste método é que a solução da primeira e segunda derivada são necessárias para resolver as derivadas.

Adam (1977) utilizou o método de Padé clássico e fez comparações utilizando diferentes condições de contorno. Os resultados mostraram que calculando as condições de contorno através do MDFC tornou o código mais estável, prevenindo qualquer instabilidade numérica proveniente do contorno.

Souza, Mendonça e Medeiros (2002) apresentam métodos compactos de alta ordem para estudar fenômenos de transição. Neste estudo a propagação de ondas Tollmien-Schlichting em escoamentos incompressíveis foi investigada. Estes métodos foram adotados para discretizar os pontos no interior do domínio computacional.

4.1.1 Aproximação da Primeira Derivada

Dado o valor da função em um conjunto de pontos, a aproximação por diferenças finitas para a derivada da função, é expressa como uma combinação linear dos valores conhecidos da função. Considerando uma malha espacial onde os pontos são indexados por i , a variável independente x_i nos pontos da malha é dada por

$$x_i = (i - 1)h \quad (4.1)$$

onde h é o espaçamento da malha. Para $0 \leq i \leq N$ o valor da função $f_i = f(x_i)$ é dado nos pontos x_i . Nos esquemas compactos, os valores da derivada f'_i possuem uma dependência com todos os valores dos nós da malha. Uma característica dos métodos compactos é que devido a esta dependência global entre os nós, os métodos se tornam mais sensíveis a erros numéricos.

Uma generalização para esquemas compactos e não compactos para a primeira derivada pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \kappa f'_{i-2} + \lambda f'_{i-1} + f'_i + \lambda f'_{i+1} + \kappa f'_{i+2} = \\ c \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6h} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde f'_i representa a aproximação de diferenças finitas para a derivada de primeira ordem no ponto i . A relação entre os coeficiente a , b , c , λ e κ é obtida por séries de Taylor, gerando esquemas de diferenças finitas de várias ordens de aproximação. Para $\lambda \neq 0$ ou $\kappa \neq 0$ obtém-se esquemas compactos, enquanto que para $\lambda = 0$ e $\kappa = 0$ recai-se nos esquemas não compactos, conforme mostra a relação 4.2. Nos métodos não compactos, as derivadas podem ser resolvidas de forma explícita, enquanto que os métodos compactos geram um sistema linear a ser resolvido para as derivadas nos pontos. Este sistema linear é pentadiagonal quando $\kappa \neq 0$ e tridiagonal quando $\kappa = 0$.

No presente trabalho o esquema de diferenças finitas compactos de 6^a ordem usado para todos os pontos do interior do domínio é dado por

$$f'_{i-1} + 3f'_i + f'_{i+1} = \frac{1}{12h}(-f_{i-2} - 28f_{i-1} + 28f_{i+1} + f_{i+2}) + O(h^6). \quad (4.3)$$

Como na direção x e z as condições de contorno adotadas são periódicas, esta equação é adequada mesmo para os pontos próximos a fronteira e na fronteira. É necessário apenas ajustar os índices nestes pontos, levando em conta o caráter periódico da solução. Na direção y foram adotadas condições de contorno de deslizamento livre e impermeabilidade. Para trabalhar com estas condições foi necessário adotar esquemas assimétricos nos pontos nas fronteiras e nos pontos próximos às fronteiras. Lele (1992) apresenta esquemas compactos assimétricos de 3ª ordem para os pontos na fronteira e esquemas compactos assimétricos de 4ª ordem para os pontos próximos às fronteiras. Souza, Mendonça e Medeiros (2002) mostram um esquema semelhante com ordem mais elevada. Nas fronteiras foi usada uma aproximação assimétrica de 5ª ordem, enquanto que nos pontos próximos à fronteira foi adotado uma aproximação assimétrica de 6ª ordem. Este último esquema foi aqui também testado demonstrando uma estabilidade numérica satisfatória.

Na simulação do fenômeno de camada de mistura pode ser usada um esquema alternativo que trabalha com apenas 2ª ordem no ponto da fronteira e próximo à fronteira. Testes foram realizados com estas aproximações e os resultados confirmam que a simulação numérica se mostrou mais estável durante a evolução temporal, e não houve perda de precisão significativa. Detalhes sobre estes testes podem ser encontrados no artigo elaborado por Germanos e Souza (2006). Vale enfatizar que estas aproximações são aqui usadas apenas na corrente livre a uma distância suficiente da região de cisalhamento. A aproximação do MDF de 2ª ordem assimétrica adotada neste trabalho para o ponto no contorno ($j = 1$) pode ser escrita da seguinte forma

$$f'_1 = \frac{1}{2h}(-3f_1 + 4f_2 - f_3) + O(h^2). \quad (4.4)$$

Para o ponto próximo ao contorno ($j = 2$), a aproximação de 2ª ordem simétrica é dada por

$$f'_2 = \frac{1}{2h}(-f_1 + f_3) + O(h^2). \quad (4.5)$$

Para os pontos opostos no domínio computacional, $i = N$ e $i = N - 1$, a mesma aproximação foi utilizada.

A tabela 1 nos mostra o erro de truncamento e o tamanho máximo do estêncil do lado direito e esquerdo dos esquemas adotados no presente trabalho

Esquemas	Estêncil		Erro de Truncamento
	Máx. L.E.E.	Máx. L.D.E.	
4.3	3	5	$\frac{1}{420}h^6 f^7$
4.4	1	3	$\frac{1}{3}h^2 f^4$
4.5	1	2	$-\frac{1}{6}h^2 f^4$

Tabela 1: Características do esquemas usados para a primeira derivada.

Para avaliar o efeito dos erros na obtenção das derivadas espaciais foram realizados alguns testes através da análise de Fourier. Esta análise corresponde a uma técnica clássica para comparar esquemas de diferenças finitas. Nesta análise é possível caracterizar o erro das diferentes aproximações adotadas (VICHNEVETSKY; BOWLES, 1982). Esta verificação pode ser útil para otimizar as aproximações de diferenças finitas. Nesta análise os resultados mostraram que os métodos compactos apresentam os resultados com maior precisão em relação aos métodos explícitos.

4.1.2 Aproximação da Segunda Derivada

As aproximações de diferenças finitas compactas para a segunda derivada são análogas as da primeira derivada. A segunda derivada pode ser calculada pela aplicação sucessiva da primeira derivada, por exemplo $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial u}{\partial x_i})$. Trabalhando com métodos espectrais a solução não apresenta erro se a segunda derivada for calculada desta forma. Todavia, na aplicação consecutiva da primeira derivada para os métodos compactos, os resultados mostram um significativo erro para altos números de onda. Isto pode ser explicado através da análise do número de onda modificado realizada por Lele (1992) onde se observa que o erro de dispersão cresce consideravelmente para altos números de onda. O erro é reduzido na aplicação direta do cálculo da segunda derivada.

Uma generalização para esquemas compactos e não compactos para segunda derivada pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} & \kappa f''_{i-2} + \lambda f''_{i-1} + f''_i + \lambda f''_{i+1} + \kappa f''_{i+2} = \\ & c \frac{f_{i+3} - 2f_i + f_{i-3}}{9h^2} + b \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{4h^2} + a \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2h^2}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde f''_i representa a aproximação de diferenças finitas para a segunda derivada no ponto i .

A aproximação do MDFC de 6ª ordem adotada neste trabalho foi a seguinte

$$2f''_{i-1} + 11f''_i + 2f''_{i+1} = \frac{1}{4h^2}(3f_{i-2} + 48f_{i-1} - 102f_i + 48f_{i+1} + 3f_{i+2}) + O(h^6). \quad (4.7)$$

Novamente, esta aproximação foi usada nos pontos no interior do domínio, assim como nos pontos de fronteira na direção x e z . Na direção y , similar a derivada primeira, foram usadas aproximações de 2ª ordem nos pontos na fronteira e próximos à fronteira. Para os pontos na fronteira ($j = 1$) e ($j = 2$) a aproximação foi dada por

$$f''_{1,2} = \frac{1}{h^2}(f_1 - 2f_2 + 3f_3) + O(h^2). \quad (4.8)$$

Para calcular a segunda derivada foi usado um esquema diferente nas fronteiras para satisfazer a condição de Neumann imposta pela condição de deslizamento livre. Na direção y para os pontos ($j = 1$) foi adotado o seguinte esquema explícito de 2ª ordem assimétrico

$$f''_1 = \frac{1}{h^2}(-7f_1 + 8f_2 - f_3) + \frac{3}{h}f'_1 + O(h^2), \quad (4.9)$$

Neste caso é necessário alterar apenas o calculo no ponto de fronteira. No ponto próximo, usou-se ainda a eq. 4.8. Nestes esquemas a primeira e segunda derivadas aparecem

na mesma equação e desta forma podemos satisfazer a condição de deslizamento livre assumindo que a derivada de primeira é igual à zero ($f'_1 = 0$). Para os pontos próximos a fronteira $j = 2$ foi usada a aproximação 4.8. A mesma aproximação foi usada para os pontos $j = N - 1$ e $j = N$.

A tabela 2 mostra o erro de truncamento e o tamanho máximo do estêncil do lado direito e esquerdo para os esquemas empregados neste trabalho.

Esquemas	Estêncil Máx. L.E.E.	Estêncil Máx. L.D.E.	Erro de Truncamento
4.7	3	5	$-\frac{23}{5040}h^6 f^8$
4.8	1	3	$-\frac{1}{2}h^2 f^4$
4.9	1	3	$-\frac{1}{2}h^2 f^4$

Tabela 2: Característica dos esquemas usados para a segunda derivada.

4.2 Derivadas Temporais

O método de Runge-Kutta de 4ª ordem (*RK4*) é um método de integração de equações diferenciais bastante preciso e muito popular para aplicações como a do presente projeto. Este método é obtido através de uma expansão de Taylor. A cada passo de integração o *RK4* recorre quatro vezes à equação diferencial tornando-se mais preciso que o método de Euler e Runge-Kutta de segunda ordem. A estabilidade deste método condicionada ao passo de integração e ao espaçamento de malha adotado. Isso significa que a estabilidade deste método está relacionado ao número de pontos por ciclo em uma onda senoidal. O meio mais fácil e ao mesmo tempo mais caro de se evitar a instabilidade do *RK4* é diminuir o passo de integração. É que este meio pode custar muito tempo computacional uma vez que pode aumentar consideravelmente o número de iterações realizadas.

A estabilidade do método é um dos requisitos de validade do código numérico. A escolha do passo de integração (dt) está intimamente ligada à estabilidade do método e é o parâmetro que exerce esse controle. Um método numérico pode ser classificado como absolutamente estável, incondicionalmente instável ou condicionalmente estável. No último caso, o método numérico fica restrito a um critério de estabilidade. Este critério de

estabilidade pode ser obtido, por exemplo, através da análise de Von Neumann aplicada às equações modelo. Os critérios usados neste trabalho foram:

- Critério de estabilidade para convecção

$$dt \leq \frac{CFL}{\left(\frac{\frac{1}{M}+u_{max}}{dx} + \frac{\frac{1}{M}+v_{max}}{dy} + \frac{\frac{1}{M}+w_{max}}{dz}\right)}; \quad (4.10)$$

- Critério de estabilidade para difusão

$$dt \leq \frac{1}{\frac{1}{Re} \left(\frac{1}{dx^2} + \frac{1}{dy^2} + \frac{1}{dz^2}\right)}; \quad (4.11)$$

onde M é o número de Mach e Re é o número de Reynolds, $(u_{max}, v_{max}, w_{max})$ são as componentes de velocidade máximas do escoamento e (dx, dy, dz) são os intervalos de discretização espacial nas direções (x, y, z) respectivamente.

A fórmula para o método de Euler pode ser definida da seguinte forma $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$, no qual avança a solução de x_n para $x_{n+1} \equiv x_n + h$. A fórmula é assimétrica e o método é de um passo. O método de Euler é pouco preciso. Métodos de múltiplos passos como o método do Ponto Médio (Runge-Kutta de 2ª ordem) e o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, oferecem uma precisão progressivamente melhor. O Método de Runge-Kutta de 4ª ordem para a equação $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$, gera uma aproximação y_{n+1} em $x_{n+1} = x_n + h$ usando a formula

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (4.12)$$

onde

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(x_n, y_n) \\ K_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ K_3 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\ K_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3). \end{aligned}$$

(4.13)

O erro local corresponde a ordem de (h^4) . Apesar de ser preciso o método de Runge-Kutta possui uma desvantagem de processar quatro vezes a derivada da função a cada passo de integração.

4.3 Filtro Numérico

A presença de termos não lineares nas equações de conservação produzem perturbações de alta frequência nas variáveis durante as simulações. Se a malha não possui resolução para resolver estas frequências é necessário filtrá-las. Para filtrar estas perturbações de alta frequência foram implementados filtros compactos de alta ordem de precisão. Lele (1992) apresenta métodos compactos de filtragem com diferentes ordens de precisão. Neste trabalho foi adotado um filtro compacto que segundo Lele apresentou o melhor desempenho em relação à eliminação de oscilações numéricas.

A filtragem foi aplicada no último sub-passo do método de Runge-Kutta. Esta filtragem de 4ª ordem de precisão consiste em recalcular a distribuição das variáveis primitivas. Este filtro foi aplicado nas direções x e z . Na direção y não foi necessário devido ao refinamento da malha. Este filtro é resolvido através de uma matriz pentadiagonal da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} 1 & \kappa & \lambda & & & & & & & \lambda & \kappa \\ \kappa & 1 & \kappa & \lambda & & & & & & & \lambda \\ \lambda & \kappa & 1 & \kappa & \lambda & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda & \kappa & 1 & \kappa & \lambda & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \lambda & \kappa & 1 & \kappa & \lambda & \\ \lambda & & & & & & \lambda & \kappa & 1 & \kappa & \\ \kappa & \lambda & & & & & & \lambda & \kappa & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{f}_1 \\ \widehat{f}_2 \\ \widehat{f}_3 \\ \vdots \\ \widehat{f}_i \\ \vdots \\ \widehat{f}_{N-2} \\ \widehat{f}_{N-1} \\ \widehat{f}_N \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{2}f_{N-3} + \frac{c}{2}f_{N-2} + \frac{b}{2}f_{N-1} + af_1 + \frac{b}{2}f_2 + \frac{c}{2}f_3 + \frac{d}{2}f_4 \\ \frac{d}{2}f_{N-2} + \frac{c}{2}f_{N-1} + \frac{b}{2}f_1 + af_2 + \frac{b}{2}f_3 + \frac{c}{2}f_4 + \frac{d}{2}f_5 \\ \frac{d}{2}f_{N-1} + \frac{c}{2}f_1 + \frac{b}{2}f_2 + af_3 + \frac{b}{2}f_4 + \frac{c}{2}f_5 + \frac{d}{2}f_6 \\ \vdots \\ \frac{d}{2}f_{i-3} + \frac{c}{2}f_{i-2} + \frac{b}{2}f_{i-1} + af_i + \frac{b}{2}f_{i+1} + \frac{c}{2}f_{i+2} + \frac{d}{2}f_{i+3} \\ \vdots \\ \frac{d}{2}f_{N-5} + \frac{c}{2}f_{N-4} + \frac{b}{2}f_{N-3} + af_{N-2} + \frac{b}{2}f_{N-1} + \frac{c}{2}f_1 + \frac{d}{2}f_2 \\ \frac{d}{2}f_{N-4} + \frac{c}{2}f_{N-3} + \frac{b}{2}f_{N-2} + af_{N-1} + \frac{b}{2}f_1 + \frac{c}{2}f_2 + \frac{d}{2}f_3 \\ \frac{d}{2}f_{N-3} + \frac{c}{2}f_{N-2} + \frac{b}{2}f_{N-1} + af_1 + \frac{b}{2}f_2 + \frac{c}{2}f_3 + \frac{d}{2}f_4 \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

onde os coeficientes do sistema são dados por

$$\begin{aligned} \kappa &= 0,6522474, & \lambda &= 0,1702929, & a &= 0,9891856, \\ b &= 1,3211800, & c &= 0,3333548, & d &= 0,001359850. \end{aligned} \quad (4.15)$$

O erro de truncamento e o estêncil do filtro usado são mostrados na tabela abaixo

Esquemas	Máx. L.E.E. Estêncil	Máx. L.D.E. Estêncil	Erro de Truncamento
4.14	5	7	$-\frac{1}{228}h^4f^4$

Tabela 3: Estêncil e erro de truncamento do filtro usado.

4.4 Malha Não Uniforme

Malhas com estiramento (*stretching*) são malhas do tipo algébricas. As malhas algébricas são simples, tendo como vantagem a rapidez com que essas malhas podem ser geradas. Para relacionar pontos do meio físico (x, y) ao meio computacional (ξ, η) são utilizadas equações algébricas que interpolam pontos nas fronteiras específicas para gerar os pontos do interior (HOFFMANN, 1993). Para problemas em que é necessário a análise em determinada região do escoamento, como o estudo em questão, pode-se utilizar de relações (x, y) e (ξ, η) com parâmetros ajustáveis de acordo com o requerido. No presente estudo, a equação que relaciona os domínios físico e computacional é dada por

$$y = F \left\{ 1 + \frac{\sinh[G(\eta - A)]}{\sinh(GA)} \right\} \quad (4.16)$$

e

$$A = \frac{1}{2G} \ln \left[\frac{1 + (e^G - 1)(F/H)}{1 + (e^{-G} - 1)(F/H)} \right], \quad (4.17)$$

onde F , G , H são parâmetros ajustáveis. O parâmetro F representa o ponto onde o refinamento da malha será maior e G indica o nível de refinamento da malha. O parâmetro H representa a altura do domínio físico. Para o estudo em questão, foi escolhido $G = 12$. Uma malha criada com estes parâmetros é mostrada na figura 4.16.

Bogey, Bailly e Juve (2000) recomendam que o estiramento da malha não exceda 1,8% para evitar problemas com as derivadas espaciais. Além disso, o estiramento usado na malha deve ser bem suave possível para as derivadas $\partial f / \partial \eta$ e $\partial^2 f / \partial \eta^2$ sejam calculadas sem perda de precisão. A solução numérica do escoamento exige o conhecimento da primeira e segunda derivada da equação de estiramento. A literatura fornece estas derivadas em função de valores de y como segue abaixo

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\sinh(GA)}{GF \sqrt{1 + [(y/F) - 1]^2 \sinh(GA)^2}} \quad (4.18)$$

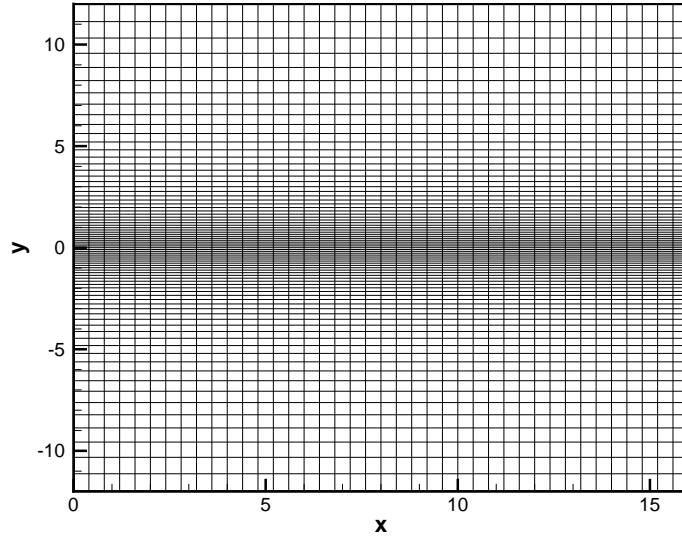


Figura 3: Ilustração da malha com estiramento

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = - \frac{\sinh(GA)^3 (y/F - 1)}{[GF^2 \sqrt{1 + [(y/F) - 1]^2 \sinh(GA)^2}]^{\frac{3}{2}}} \quad (4.19)$$

Usando a regra da cadeia

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (4.20)$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{1}{\partial \eta / \partial y} \quad (4.21)$$

O objetivo neste trabalho é usar uma malha não uniforme e calcular as derivadas da funções através de métodos compactos de alta ordem. Estes métodos podem ser generalizados da seguinte forma

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial \eta} \Big|_{j-1} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \Big|_j + \lambda \frac{\partial f}{\partial \eta} \Big|_{j+1} = a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\delta \eta} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{\delta \eta} \quad (4.22)$$

Substituindo a equação 4.21 na equação 4.22 temos a seguinte equação

$$\lambda \psi'_{j-1} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{j-1} + \psi'_j \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_j + \lambda \psi'_{j+1} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{j+1} = a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\delta \eta} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{\delta \eta} \quad (4.23)$$

onde $\psi'_j = \frac{1}{\partial \eta / \partial y}$.

O mesmo procedimento pode ser aplicado para a segunda derivada

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \quad (4.24)$$

ou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{1}{\psi'^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left[\frac{\psi''}{\psi'^2} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right] \quad (4.25)$$

Usando a relação $\frac{\psi''}{\psi'^2} \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\psi''}{\psi'^3} \frac{\partial f}{\partial y}$ e substituindo no termo entre colchetes da equação 4.25

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{1}{\psi'^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\psi''}{\psi'^3} \frac{\partial f}{\partial y} \quad (4.26)$$

Os métodos compactos para a segunda derivada podem ser generalizados como

$$\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \Big|_{j-1} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \Big|_j + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \Big|_{j+1} = a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\delta \eta} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{\delta \eta} \quad (4.27)$$

Portanto, aplicando a relação 4.26 na aproximação para a segunda derivada 4.27 tem-se um esquema tridiagonal da seguinte forma

$$\lambda \frac{1}{\psi'^2_{j-1}} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{j-1} + \frac{1}{\psi'^2_j} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_j + \lambda \frac{1}{\psi'^2_{j+1}} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{j+1} = a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\delta \eta} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{\delta \eta} + \frac{\psi''}{\psi'^3} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{j-1} + \frac{\psi''}{\psi'^3} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_j + \frac{\psi''}{\psi'^3} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{j+1}. \quad (4.28)$$

Verificação do Código

Os resultados apresentados neste tese correspondem a uma seleção dos testes mais importantes realizados com o presente código através do fenômeno de instabilidade hidrodinâmica de camada de mistura. A simulação do problema de camada de mistura possibilitou a verificação dos recursos numéricos implementados. De acordo com pesquisadores que se dedicaram ao estudo de verificação e validação de códigos computacionais (OBERKAMPF; TRUCANO, 2002; ROACHE, 1997), verificação está relacionada à implementação correta do modelo em um código computacional e a validação está relacionada à adequabilidade do modelo em representar o problema físico que se deseja estudar. De acordo com Roache, a verificação significa resolver corretamente as equações do modelo e a validação significa resolver as equações corretas que representam um problema físico.

Atualmente a literatura apresenta várias técnicas para verificar um código, e dentre estas, o uso das soluções analíticas é uma das ferramentas mais eficazes. O uso de tais soluções possibilita uma estimativa satisfatória da precisão com que os métodos numéricos estão gerando os resultados e, conseqüentemente, é possível garantir que o código foi implementado corretamente. Neste caso, a solução analítica é usada para testar a ordem das aproximações utilizadas para resolver as derivadas temporais e espaciais. Isto significa que a ordem fornecida pela solução numérica deve estar próxima da ordem estimada pelo erro numérico do método aplicado. Além de verificar a ordem do método, o uso das soluções analíticas possibilita avaliar se o método utilizado é estável durante a evolução

temporal e se o método é apropriado para o tipo de simulação.

Apesar das dificuldades de se desenvolver um modelo analítico apropriado para o problema estudado, o uso das soluções analíticas ainda é a melhor maneira de verificar um código. Em adicional às dificuldades impostas pelo desenvolvimento do modelo, as soluções analíticas na maioria dos casos só podem ser desenvolvidas através de equações linearizadas. Isto é uma grande desvantagem, pois na maior parte dos problemas relacionados à mecânica dos fluidos, os efeitos gerados pelos termos não lineares nas equações de conservação são necessários para o desenvolvimento do modelo apropriado para reproduzir a física do fenômeno. Uma alternativa que não necessita do uso destas soluções é o teste de verificação através de soluções manufaturas (ROACHE, 2002; ROY, 2005; SILVA; MEDEIROS; SOUZA, 2005). Estes testes vêm sendo frequentemente usados pelos atuais numericistas que estudam fenômenos em IH através da simulação numérica direta. Neste tipo de teste são introduzidos termos fontes nas equações de Navier-Stokes fazendo com que certas funções analíticas satisfaçam estas equações de conservação modificadas juntamente com as condições de contorno característica do problema. Isto significa que apesar do escoamento simulado ser irreal, é possível verificar a ordem de precisão do código. Outra técnica comumente usada é o teste de convergência de malha (ANDERSON; TANNERHILL; PLETCHER, 1984; HIRSCH, 1988). Esta técnica não necessita do uso da solução exata. Neste caso é gerada uma malha bem mais refinada que a malha a ser analisada e esta malha mais refinada é usada no lugar da solução analítica. Este método é bem eficiente para avaliar a ordem do erro numérico. Ainda neste contexto, Ferziger e Peric (1997) propõe uma análise onde usando três malhas de tamanhos diferentes é possível estimar a ordem do método sem precisar gerar uma malha bem refinada.

Medeiros, Silvestrini e Mendonça (2000) realizaram simulações numéricas diretas do problema de camada de mistura e o código foi submetido a uma análise da instabilidade de perturbações bidimensionais em regime linear e não linear. Nesta análise a taxa de amplificação das perturbações bidimensionais em regime linear foi comparada com a teoria linear. Além desta análise tradicional, o objetivo do trabalho era desenvolver uma forma de estimar o erro numérico em regime não linear. Para obter esta estimativa fo-

ram realizadas simulações do fenômeno comparando os casos sem e com a introdução de perturbações que disparassem o fenômeno de instabilidade secundária. É de comum conhecimento que em simulações numéricas o desenvolvimento das instabilidades pode ser disparado com a introdução de perturbações ou deixar que as perturbações sejam geradas pelo próprio erro numérico. Cabe ressaltar que a introdução de perturbações acelera o processo de crescimento de acordo com a amplitude selecionada. Baseado nesta técnica foi possível estimar a magnitude do erro de truncamento, pois é esperado que toda perturbação introduzida no escoamento cresça no tempo, e assim é possível quantificar o erro numérico.

Um dos primeiros testes realizados com o presente código foi à estimativa da ordem de precisão dos métodos numéricos através do problema de ondas acústicas lineares. Este problema é um caso simples de ser simulado pois trabalha com condições de contorno periódicas em todas as direções. Além do mais, a formulação é significativamente simplificada pois os termos não lineares das equações de advecção são desprezados devido às pequenas amplitudes assumidas para o campo de velocidades. Neste caso, apenas as derivadas espaciais foram investigadas devido às restrições de estabilidade impostas pelo método de integração temporal. O método de integração adotado neste trabalho é condicionalmente estável e, portanto, o critério de estabilidade dificulta o teste com as derivadas temporais. Maiores detalhes desta análise podem ser encontrados em Germanos (2004) e Germanos e Souza (2006). Apesar de este fenômeno ser um caso teste simples que requer poucos recursos numéricos, foi possível verificar a implementação das condições de contorno periódicas que foram usadas na direção transversal para o problema com desenvolvimento temporal e espacial e na direção longitudinal exclusivamente para o fenômeno temporal. Mesmo este fenômeno sendo de grande contribuição na implementação do código nos estágios iniciais, foi necessário simular um caso mais complexo. Para testar os métodos computacionais implementados foi necessário adotar um problema que submetesse o código a uma verificação da formulação das equações de Navier-Stokes, das condições de contornos não periódicas para se trabalhar com os contornos que reproduzam adequadamente o escoamento na corrente livre e, por último, dos métodos numéricos

utilizados para resolver as derivadas espaciais cruzadas. Para suprir estes requisitos um fenômeno clássico de IH conhecido como problema de camada de mistura temporal com condições de contorno livres foi adotado como caso teste. Neste contexto, a teoria de estabilidade linear vem se mostrando uma ferramenta eficaz na verificação de códigos numéricos.

5.1 Verificação em Regime Linear

Primeiramente foi simulada a evolução temporal do problema de camada de mistura com condições de contorno de deslizamento livre através das equações de Euler. O termo evolução temporal caracteriza que as perturbações dentro do escoamento crescem no tempo e não no espaço. Desta forma, os números de ondas longitudinal e transversal são variáveis reais. A taxa de amplificação das perturbações do escoamento é dada pela parte imaginária da frequência (ω_i).

Um importante aspecto considerado nestas simulações foi o tratamento dado para a difusão do escoamento na direção y . Esta difusão causa aumento da espessura da camada de mistura durante a simulação e, conseqüentemente, implica em variações no escoamento médio temporal. Desta forma, a variação do perfil de velocidade média pode afetar a taxa de amplificação, pois corresponde a uma mudança no número de Reynolds. A estratégia adotada para evitar o alargamento do perfil foi cancelar os termos de difusão vertical que correspondem à derivada de primeira ordem elevada ao quadrado do perfil $\mu \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2$, as derivadas de segunda do perfil $\mu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}$ e $u_i \mu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}$ e as derivadas de segunda do perfil de temperatura $\frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2}$. Para garantir que a difusão vertical foi eliminada corretamente foram simulados casos com o perfil de velocidade média sem a introdução das perturbações no escoamento. Os resultados obtidos com estes testes comprovaram que o perfil permanecia constante durante a evolução temporal do fenômeno.

Além disso, para realizar a análise do código em regime linear foi necessário garantir que a amplitude das perturbações introduzidas fosse pequena para não avançar rapidamente para o regime não linear. Também foi necessário trabalhar com um passo de

tempo pequeno para assegurar que o erro de discretização temporal não afetasse a solução numérica pois este tipo de teste exige muita precisão nos resultados. O erro de discretização temporal é proporcional à dt^4 devido ao método de integração adotado e, portanto, assumiu-se que o intervalo mínimo de discretização temporal satisfatório foi de 10^{-4} para garantir que o erro fosse desprezível. Isto significa que teoricamente o erro numérico gerado tem que ser da ordem de 10^{-16} . Já o erro de discretização espacial é proporcional à h^6 . Então considerando um intervalo de tempo de 10^{-3} , e baseado na ordem do erro numérico teórica assumido nas presentes simulações, espera-se que o erro de discretização espacial também fique desprezível. A adequação destes intervalos temporais e espaciais foi verificada através de testes de convergência de malha.

Baseado na teoria linear é esperado que as perturbações no início da simulação apresentem um crescimento exponencial no regime linear. Em geral é necessário selecionar ondas com amplitudes pequenas para que estas ondas não alcancem rapidamente o regime governado pela não linearidade. Um teste para verificar se as perturbações estão se comportando desta forma é disparar duas simulações com ondas de diferentes amplitudes e analisar o crescimento destas ondas. A figura 4 mostra este tipo de simulação onde a amplitude máxima do escoamento perturbado é mostrada em função do tempo adimensional. A coordenada vertical está em escala logarítmica. Neste caso foi adotada uma malha de 20×100 que corresponde ao números de pontos nas direções x e y respectivamente. Neste caso foi simulado apenas um período de onda ao longo da coordenada x , ou seja, tem-se 20 pontos por comprimento de onda. As amplitudes iniciais de onda das duas simulações executadas foram de 10^{-4} e 10^{-5} respectivamente. Apesar das simulações mostrarem que a saturação ocorreu em instantes diferentes devido a diferença de amplitudes iniciais, a amplitude em que as ondas bidimensionais saturaram foi aproximadamente a mesma. Isto é um indício que o código gerou resultados favoráveis com a teoria linear. Além disso, entre os tempos 10 e 40 observa-se que as linhas são paralelas, o que confere que neste estágio o regime é linear.

A figura 5 mostra resultados com a taxa de amplificação de perturbações bidimensionais em regime linear em função do número de onda para vários números de Mach

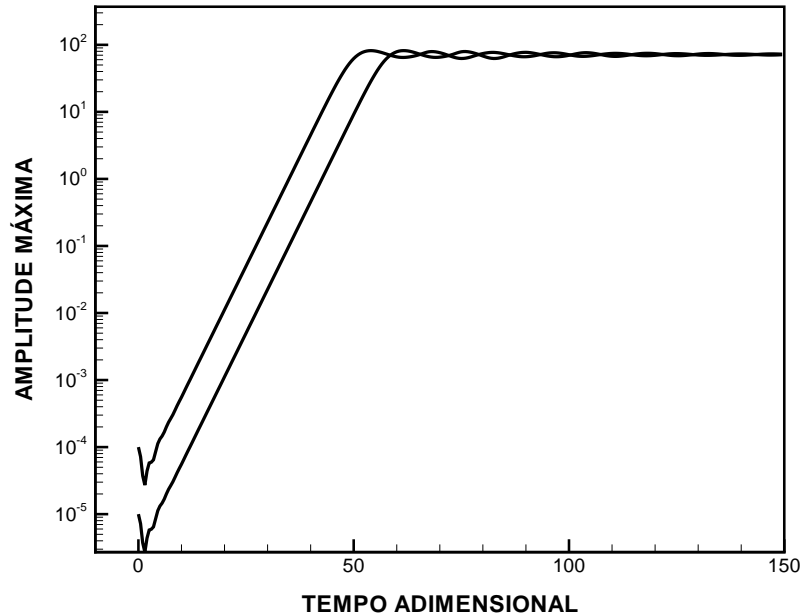


Figura 4: Evolução da amplitude da perturbação de uma camada de mistura invíscida bidimensional através da análise de instabilidade temporal.

convectivo. A malha adotada nesta simulação foi de 40×100 que corresponde ao números de pontos nas direções x e y respectivamente. A amplitude inicial de onda utilizada foi de 10^{-7} . Os resultados teóricos utilizados aqui foram extraídos dos gráficos fornecidos pela análise realizada por Sandham e Reynolds (1990) do desenvolvimento temporal do problema de camadas de mistura.

Nesta figura a linha tracejada-pontilhada representa os resultados computacionais que mostram a taxa de amplificação para M_c igual à 0,01. O símbolo de círculo corresponde aos resultados teóricos obtidos a partir da hipótese de escoamento incompressível ($M_c = 0,01$). É importante mencionar que a condição inicial foi obtida a partir das equações de conservação para um escoamento incompressível. Portanto, as simulações realizadas para M_c acima de 0,3 podem produzir um efeito transiente nos estágios iniciais da simulação. Na simulação de um escoamento compressível para M_c igual à 0,4 pôde ser observado que a taxa de amplificação máxima representada pelas linhas pontilhadas diminui aproximadamente para 0,3. Os resultados numéricos também são consistentes com a análise teórica que é representada pelo símbolo quadrado. Na curva para M_c igual à 0,8 representada pela linha tracejada, o decaimento da taxa de amplificação torna-se

mais visível aproximando-se de 42% do valor obtido para escoamento incompressível. O símbolo de diamante representa o resultado teórico para M_c igual à 0,8. Os resultados acima confirmam que a taxa de amplificação é significativamente reduzida com o aumento do Mach convectivo. Além disso, confirmam a correta implementação do código.

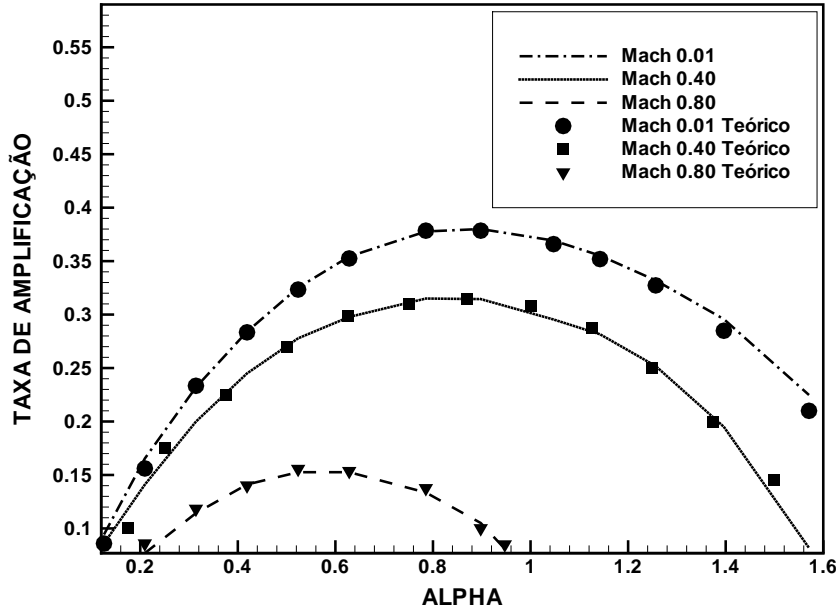


Figura 5: Taxa de amplificação de perturbações na camada de mistura não viscoso bidimensional.

Em seguida foram realizadas simulações de um escoamento compressível com a introdução de perturbações tridimensionais. A figura 6 mostra a taxa de amplificação destas perturbações em função do ângulo $\theta = \tan^{-1}(\beta/\alpha_0)$ para vários números de Mach convectivos. A malha adotada nesta simulação foi de $40 \times 100 \times 40$ que corresponde aos números de pontos nas direções x , y e z respectivamente. O número de onda selecionado para esta simulação foi de $\alpha_0 \approx 2\pi/7 \approx 0,89$ que corresponde ao número de onda com maior taxa de amplificação obtida nas simulações bidimensionais. A amplitude inicial de onda utilizada foi a mesma usada no caso anterior. Nesta figura a linha tracejada-pontilhada corresponde aos resultados numéricos que mostram a taxa de amplificação para M_c igual à 0,01. O símbolo de círculo representa os resultados teóricos para o mesmo Mach. Como podem ser observado na figura, estes resultados concordam com a teoria linear e confirmam que para M_c abaixo de 0,6 as ondas bidimensionais são as ondas mais instáveis.

Na simulação em regime compressível para M_c igual à 0,4 e $\alpha_0 \approx 2\pi/7.7 \approx 0,82$ pôde ser observado que a taxa de amplificação máxima das perturbações bidimensionais representada pelas linhas contínuas diminuiu. Todavia, para um ângulo θ maior que cerca de 50° a taxa de amplificação para $M_c = 0,4$ cresce em relação ao caso para $M_c = 0,01$. Apesar de ser um efeito pequeno, este comportamento já é um indício de que com o aumento do Mach convectivo as perturbações tridimensionais começam a se amplificar mais rápido que as bidimensionais.

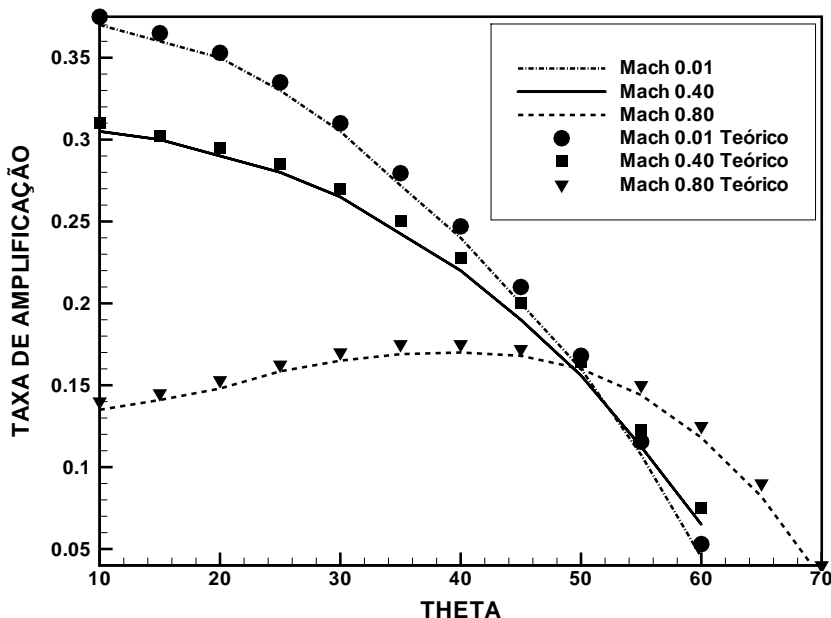


Figura 6: Taxa de amplificação de perturbações em uma camada de mistura. Os resultados são para perturbação tridimensionais. Para cada número de Mach, o número de onda longitudinal usado foi aproximadamente aquela de máxima amplificação para o caso bidimensional. Assim, foi usado $\alpha_0 = 0,89$ para $M_c = 0,01$, $\alpha_0 = 0,82$ para $M_c = 0,4$ e $\alpha_0 = 0,52$ para $M_c = 0,8$.

Na curva para M_c igual à 0,8 representada pela linha tracejada, as ondas oblíquas são as mais amplificadas, enquanto que o decaimento da taxa de amplificação das perturbações bidimensionais torna-se ainda mais visível. Nesta simulação o número de onda selecionado foi de $\alpha_0 \approx 2\pi/12 \approx 0,52$. Novamente o número de onda selecionado corresponde ao valor de maior amplificação de acordo com a teoria linear. Devido às simulações restringirem-se a um escoamento subsônico não foi possível observar um escoamento puramente tridimensional conforme prediz a teoria e, portanto, para este Mach as ondas bidimensionais ainda influenciam a característica do escoamento geral. Apesar desta restrição, os resultados

estão de acordo com a teoria e, pôde-se confirmar que às perturbações tridimensionais são fortemente amplificadas em relação às perturbações bidimensionais com o aumento do Mach. O símbolo de diamante representa o resultado teórico para escoamento compressível para M_c igual à 0,8.

Em geral, os resultados obtidos confirmam a correta implementação do código em três dimensões. Houve pequenas discrepâncias, em particular para altos Mach e altos θ . Entretanto, como os resultados eram convergentes na malha e se aproximam cada vez mais da solução teórica, a discrepância foi atribuída a falta de refinamento de malha.

Finalmente foram realizadas simulações diretas com as equações de Navier-Stokes. Neste caso não foi realizada uma varredura completa das taxas de crescimento pois em certa medida as simulações mais críticas são os casos não viscosos, pois a viscosidade sempre tende a estabilizar o código. Para este problema a amplitude inicial das perturbações foi de aproximadamente 10^{-6} . As figuras de 7 a 10 mostram a evolução da amplitude em função do tempo adimensionalizado. Novamente foi usada na coordenada vertical uma escala logarítmica. Os parâmetros dos resultados a seguir foram selecionados de acordo com os valores usados em outros trabalhos numéricos (SANDHAM; REYNOLDS, 1990; FORTUNÉ, 2000) com o objetivo de comparar a taxa de amplificação.

Nestas figuras tem-se uma região de amplificação exponencial que corresponde ao regime governado pela teoria linear. A figura 7 mostra a evolução da amplitude de um escoamento viscoso para M_c igual à 0,01 e Re igual à 160. A taxa de amplificação obtida nestas simulações foi aproximadamente de 0,33. Resultados numéricos reproduzidos por Fortuné (2000) mostram uma taxa de amplificação aproximadamente de 0,31. O mesmo comportamento pôde ser observado na figura 8 para número de Reynolds igual à 400. Neste gráfico a taxa de amplificação computacional é aproximadamente de 0,35, enquanto que a taxa de amplificação obtida por Fortuné é aproximadamente de 0,34.

A figura 9 apresenta a taxa de amplificação para M_c de 0,4 e Re de 500. A taxa de amplificação obtida nesta simulação foi de 0,30. Resultados numéricos obtidos por Sandham e Reynolds (1990) apresentam uma taxa aproximadamente de 0,28. A figura 10

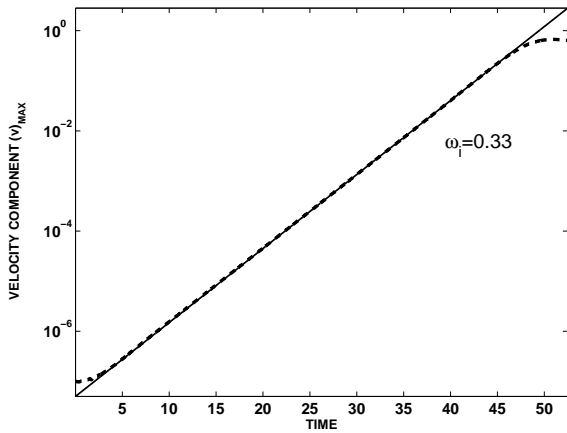


Figura 7: Evolução da amplitude a partir de um escoamento viscoso com número de Mach igual à 0,01, número de Reynolds de 160 e número de onda aproximadamente de 0,89.

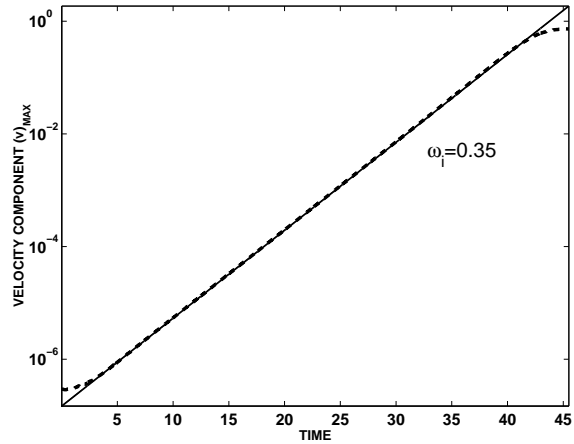


Figura 8: Evolução da amplitude a partir de um escoamento viscoso com número de Mach igual à 0,01, número de Reynolds de 400 e número de onda aproximadamente de 0,89.

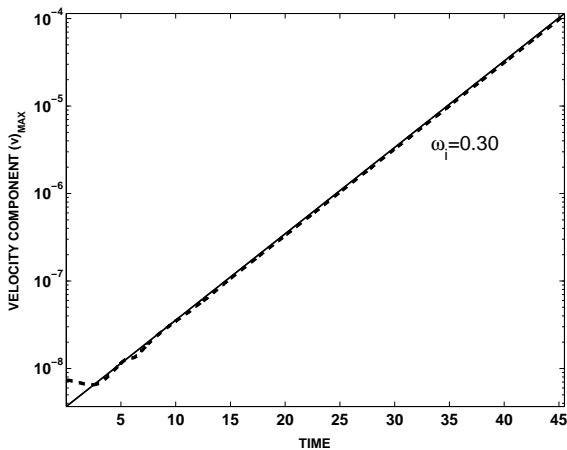


Figura 9: Evolução da amplitude a partir de um escoamento viscoso com número de Mach igual à 0,4, número de Reynolds de 500 e número de onda aproximadamente de 0,82.

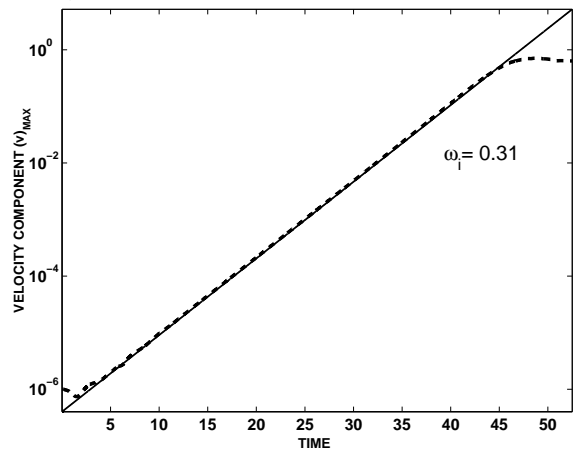


Figura 10: Evolução da amplitude a partir de um escoamento viscoso com número de Mach igual à 0,4, número de Reynolds de 1600 e número de onda aproximadamente de 0,82.

mostra as simulações para Re igual à 1600. Neste caso a taxa de crescimento encontrada foi aproximadamente de 0,31. Este resultado foi comparado favoravelmente com a teoria linear invíscida, o que é esperado pois se trata de um número de Reynolds relativamente alto. Portanto os resultados numéricos obtidos com a simulação das equações de Navier-Stokes foram comparadas com a teoria linear de IH de forma satisfatória. Isto é uma verificação que o presente código, que inclui a formulação das equações de conservação para escoamento compressível, os métodos compactos e as condições de contornos, foi implementado corretamente. A seguir as simulações foram estendidas para o regime não linear com as equações bidimensionais.

5.2 Instabilidade Não-Linear 2D

Nesta seção, as equações de Navier-Stokes compressíveis foram usadas para simular o problema de camada de mistura em regime não linear. Através da análise realizada em regime linear foi possível verificar que o presente código foi implementado corretamente, portanto, está análise foi estendida para o caso não linear onde as ondas bidimensionais pequenas introduzidas no escoamento já cresceram suficientemente para dar início a fenômenos não lineares em IH. Estes fenômenos foram extensivamente pesquisados por teóricos, experimentalistas e numericistas e, baseado nisto, existe resultados suficientes para o presente estudo.

Nestas simulações os recursos com o uso de malhas não uniformes foram reutilizados conforme as simulações anteriores. Além disso, a difusão vertical retirada na simulação do problema em regime linear foi incluída. A malha adotada nesta simulação foi de 100×80 que corresponde ao números de pontos nas direções x e y respectivamente. O espaçamento da malha na direção x é constante, enquanto que na direção normal foi adotada uma malha não uniforme. O espaçamento da malha na direção longitudinal foi de $dx \approx 0,16$. O espaçamento mínimo da malha na direção normal localizado no centro do domínio computacional foi $dy_{min} \approx 0,11$. Próximo às fronteiras o espaçamento selecionado foi $dy_{max} \approx 1,1$. Neste caso o espaçamento mínimo corresponde à 9% do

espaçamento máximo. Na região que se concentra a vorticidade foi adotada um célula computacional aproximadamente quadrada, ou seja, o espaçamento usado nas direções x e y são aproximadamente do mesmo tamanho. Isto pode evitar que as componentes de velocidade sejam distorcidas devido a uma malha inadequada que apresente grandes diferenças nas dimensões da célula computacional. No presente projeto foram realizadas simulações variando-se o número de Mach convectivo. O número de Reynolds (Re) assumido em todas as simulações foi de 500. O passo de integração temporal (dt) foi de 10^{-2} . No caso da simulação em regime não linear, a restrição em relação ao uso de pequenas amplitudes não é necessária e, desta forma, amplitudes com magnitude superiores às usadas no caso em regime linear foram adotadas.

Primeiramente foram realizadas simulações para M_c igual à 0,4. Neste caso foram introduzidas perturbações compostas apenas pelo modo fundamental com número de onda $\alpha_0 \approx 2\pi/7,7 \approx 0,82$. A amplitude inicial estipulada para este caso foi de 10^{-3} . Através da componente de vorticidade na direção transversal do escoamento, a sequência de figuras 11 mostra a evolução de perturbações bi-dimensionais em função do tempo adimensional (t). Inicialmente em regime linear a perturbação introduzida no escoamento possui uma amplitude muito pequena e, devido a isso, só é possível visualizar o escoamento base ($t = 10$). Ainda em regime linear a perturbação bidimensional evolui e começa a mostrar um comportamento sinusoidal ($t = 60$). A seguir o modo fundamental cresce e a formação de dois vórtices pode ser observada na direção longitudinal do escoamento ($t = 78$). Na última sequência, estes dois vórtices saturam devido aos efeitos viscosos ($t = 88$). Este fenômeno corresponde ao ciclo limite de oscilação. Estes estágios observados nesta sequência de figuras correspondem ao comportamento previsto pela teoria.

A sequência de figuras 12 mostra outra evolução para o mesmo Mach. O número de onda selecionado para a perturbação com modo fundamental foi aproximadamente de $\alpha_0 \approx 2\pi/7,7 \approx 0,82$. Além disso, foi introduzido uma perturbação com um modo subharmônico. As amplitudes iniciais selecionadas para estes casos foram de 10^{-3} para a perturbação com modo fundamental e 10^{-4} para a perturbação com modo subharmônico. Nos estágios iniciais a perturbação bidimensional apresenta o mesmo comportamento que

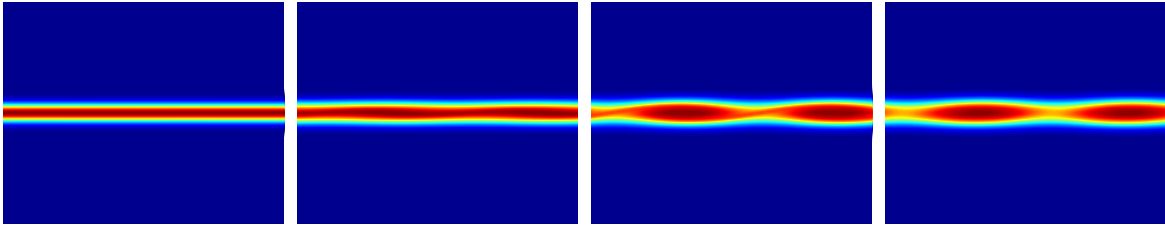


Figura 11: Evolução linear e não linear de perturbações bi-dimensionais composta apenas pelo modo fundamental. O Mach convectivo selecionado foi de 0,4, enquanto que o número de Reynolds foi de 500. A sequência de figuras da esquerda para a direita corresponde aos tempos adimensionais de 10, 60, 78 e 88.

no caso anterior com o crescimento do modo fundamental no escoamento base. Primeiramente ondas sinoidais começam a se formar ($t = 54$). As perturbações crescem e saturam formando estruturas de vórtices ($t = 64$). Este comportamento é atribuído apenas a evolução temporal do modo fundamental. O modo subharmônico ainda permanece pequeno e não influencia o escoamento base. Aparentemente os dois vórtices são idênticos. Isto é um bom indício de que as condições de contornos e as aproximações usadas na direção longitudinal e vertical foram implementadas corretamente. O modo subharmônico também cresce junto com o fundamental e após um determinado tempo os vórtices gerados pelo modo fundamental começam a girar um em torno do outro ($t = 78$). Este fenômeno é chamado de instabilidade secundária. Os vórtices então iniciam o processo de pareamento ($t = 84$). Em seguida, os estágios iniciais para a formação de um único vórtice podem ser observado ($t = 94$) e, por último, um único vórtice é formado ($t = 104$). Finalmente, os efeitos viscosos dissipam este vórtice ($t = 244$). Baseado nestes resultados pôde ser concluído que o código forneceu resultados satisfatórios de acordo com a literatura.

A figura 13 mostra um comportamento interessante em relação ao pareamento de vórtices. Neste caso não foram introduzidos modos subharmônicos no escoamento base para a reprodução do fenômeno de instabilidade secundária. Portanto, as perturbações que amplificaram após um longo tempo de simulação e geraram o pareamento foram erros introduzidos pelos métodos numéricos. Nestas figuras pode ser observado que o fenômeno de pareamento ocorreu no tempo adimensional aproximado de 216. Comparando com os resultados da simulação anterior (Fig. 12) pode-se notar que o mesmo comportamento

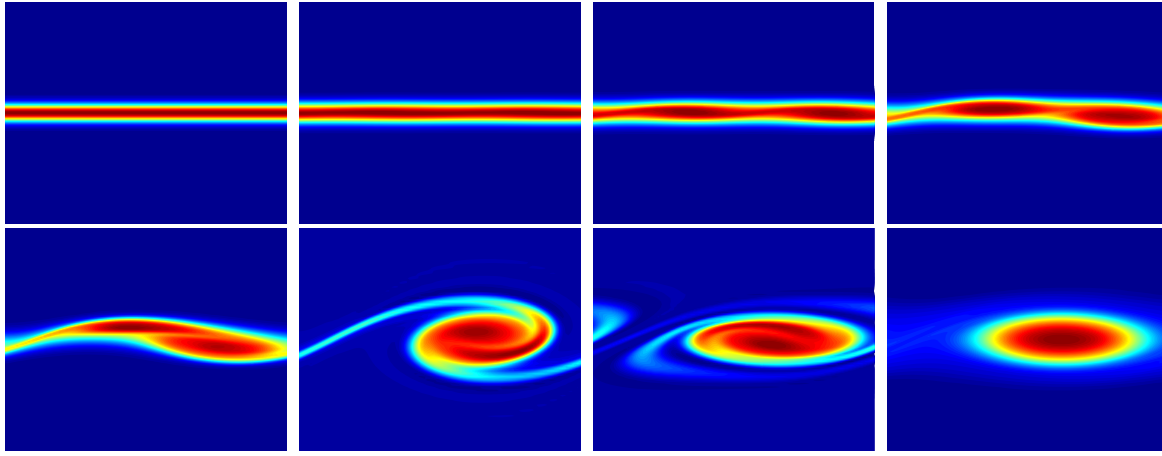


Figura 12: Evolução linear e não linear de perturbações bidimensionais compostas de um modo fundamental e um modo subharmônico. O Mach convectivo selecionado foi de 0,4, enquanto que o número de Reynolds foi de 500. A sequência de figuras da esquerda para a direita de cima para baixo corresponde aos tempos adimensionais de 28, 54, 64, 78, 84, 94, 104 e 244.

ocorreu no tempo adimensional próximo de 104. Isto indica que o erro gerado pelas aproximações numéricas foi pequeno.

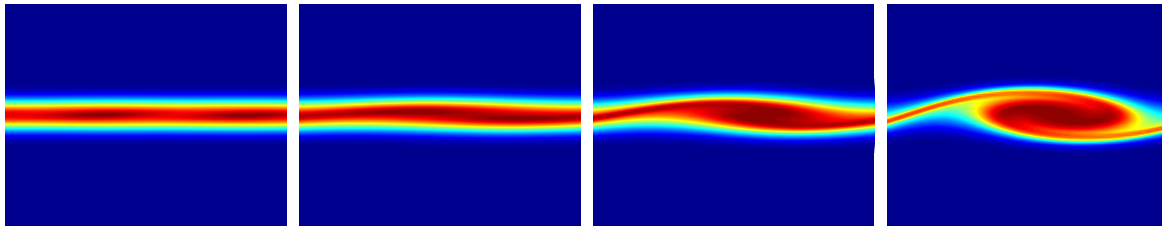


Figura 13: Evolução linear e não linear de perturbações bidimensionais compostas apenas pelo modo fundamental. O Mach convectivo selecionado foi de 0,4, enquanto que o número de Reynolds foi de 500. A sequência de figuras da esquerda para a direita corresponde aos tempos adimensionais de 176, 196, 206 e 216.

Este comportamento pode ser comprovado na figura 14. Nesta figura tem-se a amplitude da perturbação fundamental e subharmônica em função do tempo adimensional. Pode-se notar que o tempo em que a perturbação subharmônica excitada se equipara à amplitude do modo fundamental corresponde ao tempo adimensional próximo de 63, enquanto que para a perturbação subharmônica excitada pelo erro numérico isto ocorre no tempo de 200. Este tipo de teste demonstra que o erro numérico gerado pelo código é pequeno e, portanto, isto é um indício satisfatório de que o código gerou resultados corretos.

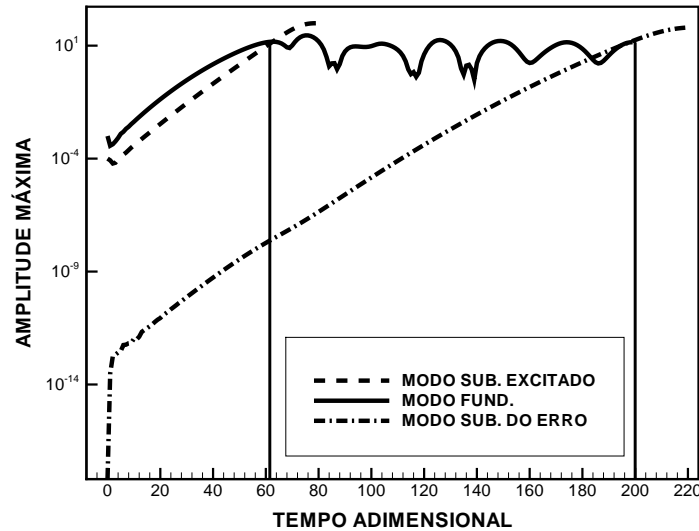


Figura 14: Evolução linear e não linear das perturbações apresentadas nas figuras 12 e 13. Trata-se de resultados de duas simulações diferentes colocadas na mesma figura. O modo fundamental corresponde ao da figura 12. O modo subharmônico excitado também corresponde à 12, enquanto que o do erro numérico é o da figura 13.

Inicialmente no presente projeto foi utilizada a hipótese de escoamento isentrópico. Esta hipótese simplifica consideravelmente a formulação adotada e, portanto, pode ser útil para simulação de escoamentos compressíveis. Além disso, devido à simplificação das equações de conservação, o processamento com a hipótese de escoamento isentrópico é aproximadamente 15% mais rápido que no caso com a formulação completa. A figura 15 mostra a evolução da amplitude da componente de velocidade normal da simulação de um escoamento não viscoso com e sem a hipótese de escoamento isentrópico. Neste caso foi acompanhado o crescimento de dois modos: o fundamental e o subharmônico. As linhas mostram os resultados com a utilização das equações de Euler, enquanto que os símbolos mostram as simulações para escoamento isentrópico. De acordo com a figura pode-se notar que os resultados com a hipótese de escoamento isentrópico estão bem próximos do resultados com as equações completas. Estes testes foram estendidos para M_c igual à 0,8. O resultado não foi tão satisfatório quanto para M_c igual à 0,4. Os resultados apresentados na figura 16 mostra uma considerável diferença nas curvas de evolução de amplitude. De fato é esperado que a variação de entropia aumente à medida que aumenta a compressibilidade do escoamento.

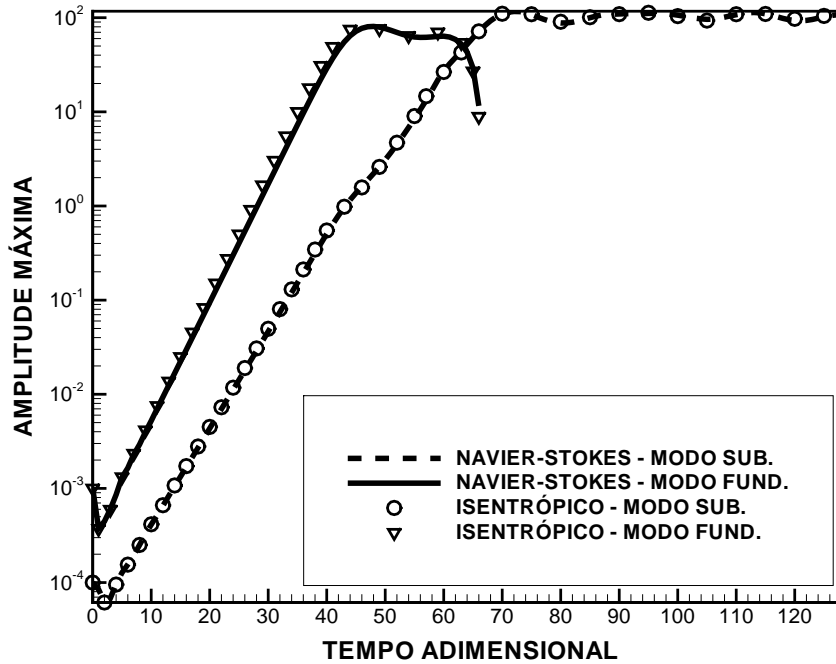


Figura 15: Evolução da amplitude da perturbação para um escoamento não viscoso com número de Mach igual à 0,4 e número de onda aproximadamente de 0,82.

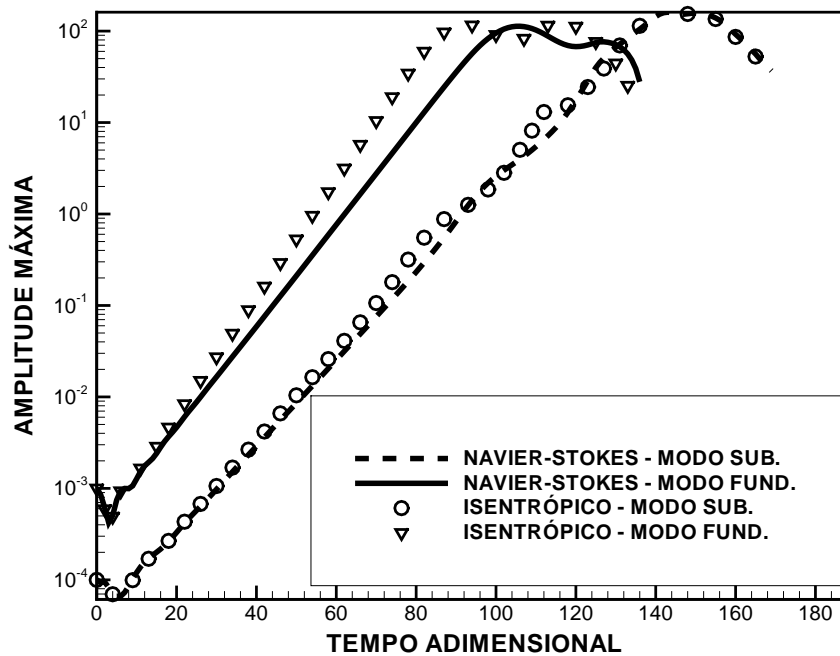


Figura 16: Evolução da amplitude da perturbação para um escoamento não viscoso com número de Mach igual à 0,8 e número de onda aproximadamente de 0,52.

Retornando para simulações apenas com as equações completas de Navier-Stokes, resultados simulados para M_c igual à 0,6 são mostrados na sequência de figuras 17. O número de onda selecionado foi aproximadamente de $\alpha_0 \approx 2\pi/7,4 \approx 0,85$. Nestas simulações foi incluído uma perturbação subharmônica. As amplitudes iniciais adotadas para estes casos foram de 10^{-3} (modo fundamental) e 10^{-5} (modo subharmônico). O objetivo de simular o fenômeno em regime compressível consiste em investigar os efeitos da compressibilidade no escoamento total composto pelo escoamento base e perturbações introduzidas. Para investigar o efeito da compressibilidade, os resultados obtidos para $M_c = 0,6$ foram comparados com os resultados mostrados na sequência de figuras 12 que corresponde ao resultados discutida anteriormente para $M_c = 0,4$. Cabe ressaltar que em ambas as simulações foi adotado $Re = 500$.

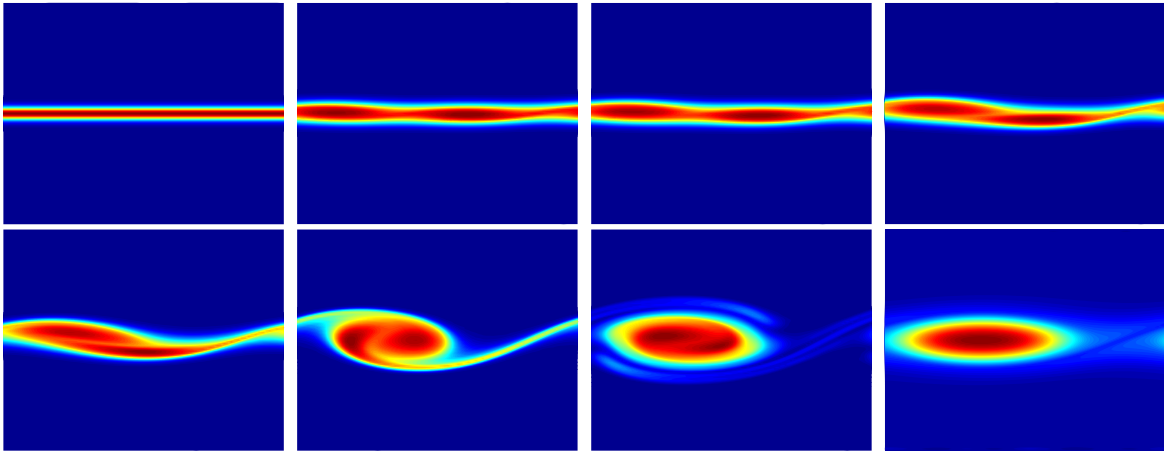


Figura 17: Evolução linear e não linear de perturbações bidimensionais compostas de um modo fundamental e de um subharmônico. O Mach convectivo selecionado foi de 0,6, enquanto que o número de Reynolds foi de 500. A sequência de figuras da esquerda para a direita e de cima para baixo corresponde aos tempos adimensionais de 54, 76, 80, 86, 90, 96, 126 e 256.

Na primeira figura para $M_c = 0,6$ as perturbações do modo fundamental ainda são pequenas e, portanto, não podem ser visualizados em conjunto com o escoamento base ($t = 54$). Através da comparação dos resultados com a simulação para $M_c = 0,4$ pode ser observado que para o mesmo tempo adimensional o escoamento já mostra um comportamento diferente onde o escoamento para $M_c = 0,4$ apresenta uma característica sinusoidal. Desta forma pode-se concluir que a perturbação introduzida no escoamento para $M_c = 0,4$ cresceu mais rápido que na simulação para $M_c = 0,6$. Seguindo com a

mesma análise, na simulação para $M_c = 0,6$, pode ser notado que a perturbação com o modo fundamental cresce ($t = 76$) e, em seguida, se torna visível a formação de estruturas de vórtices ($t = 80$). Na sequência para $M_c = 0,6$ os mesmos fenômenos ocorrem, mas em tempos adimensionais diferentes. Para $M_c = 0,4$ o modo fundamental se torna visível em torno de $t = 68$, enquanto que para $M_c = 0,6$, isto ocorre a cerca de $t = 76$. Baseado nesta análise pode-se concluir que a taxa de amplificação do modo fundamental diminuiu com o aumento do Mach convectivo conforme a teoria linear prediz.

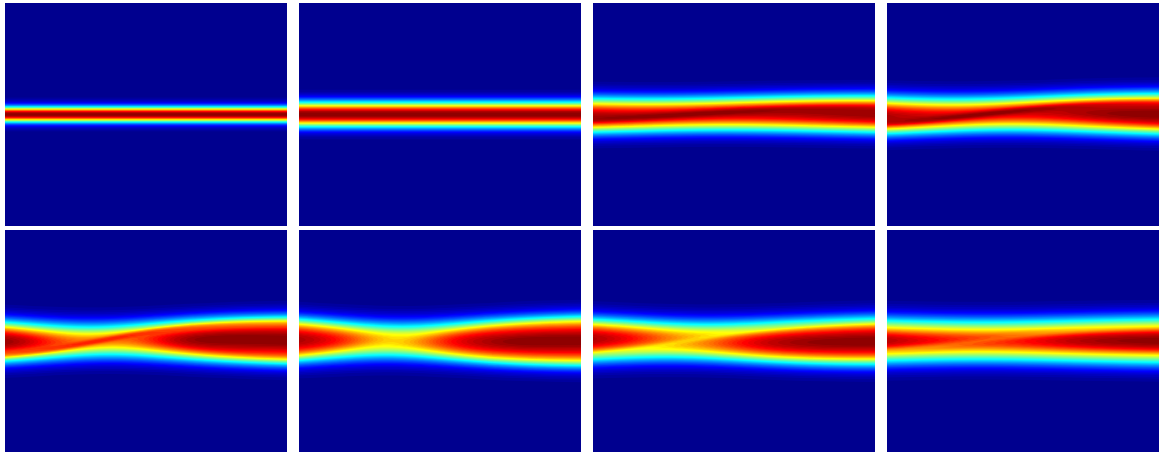


Figura 18: Evolução linear e não linear de perturbações bidimensionais compostas pelo modo fundamental e pelo seu subharmônico. O Mach convectivo selecionado foi de 0,8, enquanto que o número de Reynolds foi de 500. A sequência de figuras da esquerda para a direita de cima para baixo corresponde aos tempos adimensionais de 10, 100, 250, 270, 300, 330, 350 e 388.

Esta análise foi estendida para o caso a M_c igual à 0,8, figura 18. O número de onda selecionado para o modo fundamental foi $\alpha_0 = 2\pi/12 \approx 0,52$ e foi introduzido também o modo subharmônico. Como nos casos anteriores, foi adotado um número de onda próximo a taxa de amplificação máxima de acordo com a teoria linear. As amplitudes são as mesmas do caso anterior. Um interessante comportamento pode ser visualizado nestas sequências de figuras. Primeiramente pode ser visto que a taxa de amplificação das ondas bidimensionais são fortemente reduzidas com o aumento do Mach convectivo. De acordo com esta sequência o modo fundamental torna-se visível no tempo adimensional de 76. Este atraso correspondente a 50% do tempo onde ocorre o mesmo fenômeno para a simulação com M_c igual à 0,4. As figuras também mostram uma variação da estrutura formada pelos vórtices quando se aumenta o Mach convectivo. Os vórtices se tornam mais

alongados na direção longitudinal do escoamento.

5.3 Instabilidade Não-Linear 3D

Simulações do fenômeno de camada de mistura com desenvolvimento temporal foram realizadas através das equações de Navier-Stokes tridimensionais. Novamente, o objetivo foi verificar o código através da reprodução dos fenômenos clássicos de instabilidade hidrodinâmica em escoamentos subsônicos. Em particular, a investigação numérica apresentada nesta seção foi direcionada ao estudo de instabilidades secundárias caracterizadas pela formação de estruturas de vórtices tridimensionais.

Testes de convergência de malha foram feitos para avaliar uma malha apropriada para este tipo de simulação. Estes testes são essenciais para o tipo de simulação em questão, pois é de comum conhecimento que a simulação com as equações de conservação tridimensionais consome um considerável tempo de processamento devido às matrizes cúbicas utilizadas para armazenar as variáveis. Neste caso foi necessário fazer uma avaliação do número de pontos e da extensão do domínio computacional necessários para executar a simulação. Foi estudado o tamanho do domínio computacional na direção normal devido à implementação das condições de contorno do tipo escoamento livre. Primeiramente é necessário ressaltar que o limite do domínio computacional na direção normal ao escoamento deve ser suficientemente distante do interior do domínio para que a região de cisalhamento não influencie nos contornos de corrente livre. Além disso, o uso de estiramento de malha em direção a corrente livre foi um grande fator que influenciou na atenuação das ondas que se propagam em direção a corrente livre.

Através destes testes de verificação foi possível determinar qual modo oblíquo amplificava mais rápido. Baseados nestas taxas de amplificação foram realizadas simulações numéricas com o objetivo de reproduzir os fenômenos clássicos em instabilidade hidrodinâmica secundária da evolução de ondas bidimensionais e pares de ondas oblíquas em camada de mistura. O efeito da diferença de fase entre as ondas bi- e tri-dimensionais foi investigado com o objetivo de reproduzir os estudos realizados por Pierrehumbert e Wid-

nall (1982). Foram então realizadas simulações de escoamentos subsônicos com algumas combinações de ondas com o propósito de reproduzir os resultados dos modos expansivo (*bulging mode*) e translativo (*translative mode*) da instabilidade secundária fundamental. Estes modos foram excitados para diferentes fases ϕ mostrado na equação 3.26. De acordo com a terminologia usada por Pierrehumbert e Widnall (1982), o modo expansivo se desenvolve para $\phi = 0$, enquanto que o modo translativo é disparado para $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Nas presentes simulações não foi necessário trabalhar com tantos pontos na coordenada z pois foi adotado apenas um par de ondas oblíquas. Para $M_c = 0,4$, os números de ondas longitudinal e transversal foram iguais (SANDHAM; REYNOLDS, 1990). Devido a isto foi adotada uma malha que contivesse o mesmo número de pontos nas coordenadas (x, z) . Com a redução do número de pontos na direção transversal possibilitou-se incrementar a resolução na coordenada y . Portanto a malha adotada foi de $40 \times 60 \times 40$ que corresponde ao número de pontos nas direções (x, y, z) . O espaçamento usado na direção longitudinal foi de $dx \approx 0,18$ assim como na transversal. A malha não uniforme utilizada na direção normal varia de $dy_{min} \approx 0,19$ no interior do domínio até $dy_{max} \approx 1,91$ nas fronteiras. O comprimento de onda assumido na direção longitudinal foi $L_x = 7,5$, enquanto que na direção normal foi $L_y = 40$. Na direção transversal foi usado o mesmo comprimento que na direção longitudinal ($L_z = L_x$). O número de Reynolds selecionado foi de 5×10^2 . A amplitude inicial foi aproximadamente de 0,05 para a onda bidimensional e de 0,025 para o par de ondas oblíquas. O passo de integração temporal assumido foi de 10^{-2} . Este passo de integração foi adotado para a simulação de $M_c = 0,4$ de acordo com os testes de convergência realizados para avaliar a estabilidade do código. Outro importante aspecto foi que nas presentes simulações as ondas oblíquas foram disparadas no início da simulação juntamente com o escoamento base e as perturbações bidimensionais.

As figuras a seguir foram elaborados através do conceito de iso-superfícies. Neste caso, foi adotada como parâmetro de investigação, o campo de pressão que é comumente usado na visualização de estruturas de vórtices tridimensionais. Além disso, para tornar fácil a compreensão do fenômeno envolvido, algumas terminologias foram adotadas. Primeiramente as estruturas de vórtices formadas ao longo da coordenada z foram denominadas

rolos oblíquos devido à forma e movimento circular. Juntamente, as regiões com diâmetro máximo e mínimo caracterizadas pelo campo de pressão de altas e baixas magnitudes foram denominadas picos e vales.

A figura 19 mostra a superfície de pressão para o número de Mach convectivo igual à 0,4. Nesta figura é possível observar o fenômeno desenvolvido pela simulação caracterizada pela excitação do modo expansivo. De acordo com Pierrehumbert e Widnall este modo é fracamente amplificado. Neste caso a estrutura de vórtices na direção transversal tem um diâmetro que varia senoidalmente ao longo da coordenada z . Esta figura mostra que o diâmetro de máxima amplificação se concentra no ponto $\frac{\pi}{2}$ da coordenada z , enquanto que os pontos de mínima amplificação se encontram nos pontos próximos às fronteiras e no centro do domínio computacional. Neste caso tem-se que os rolos oblíquos sofrem constrição e alargamento ao longo da coordenada z . Também pôde ser observado que os picos e os vales de cada rolo oblíquo se concentram no mesmo ponto referente ao eixo longitudinal. Esta constrição no centro do domínio é responsável pela grandes oscilações de amplitude. Esta é a principal característica do desenvolvimento temporal do modo expansivo.

Em seguida a análise foi estendida para simular o mesmo fenômeno com a excitação do modo translativo conforme mostra a figura 20. Nesta simulação foi configurado que a perturbação bidimensional apresentaria uma diferença de fase de $\frac{\pi}{2}$ em relação ao par de ondas oblíquas. Diferente do modo expansivo, neste caso, o diâmetro da estrutura de vórtice não varia significativamente ao longo da coordenada z . Este modo é mais amplificado que o caso expansivo e o rolo oblíquo mostrado nesta figura oscilam em amplitude e posição ao longo da direção transversal. Nesta figura temos que o pico de um rolo oblíquo sempre se localiza alinhado a um vale do outro rolo e vice-versa caracterizando uma periodicidade com frequência fundamental na direção x .

Além das simulações executadas com os modos fundamentais foram realizadas simulações com perturbações subharmônicas. Diferente do caso anterior as perturbações oblíquas introduzidas foram selecionadas com número de ondas longitudinal subharmônicas em re-

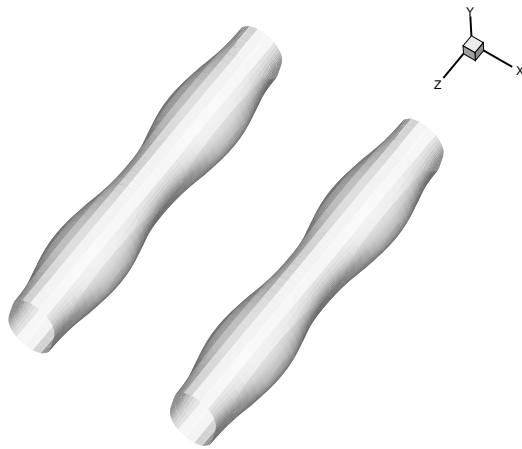


Figura 19: Iso-superfície de pressão. Evolução linear e não linear do modo expansivo ($\phi = 0$) composta por uma onda bidimensional e um par de ondas oblíquas para $M_c = 0,4$ e $Re = 500$.

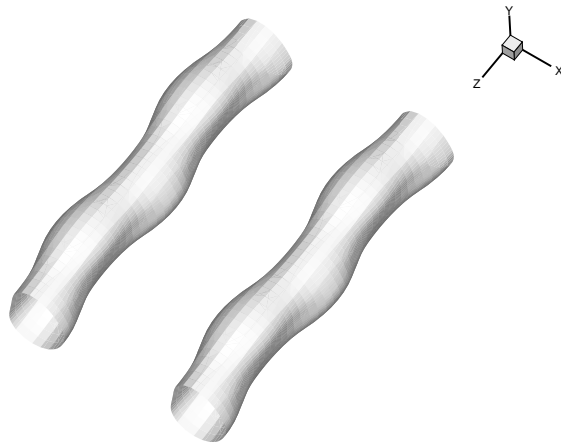


Figura 20: Iso-superfície de pressão. Evolução linear e não linear do modo translativo ($\phi = \frac{\pi}{2}$) composta por uma onda bidimensional e um par de ondas oblíquas para $M_c = 0,4$ e $Re = 500$.

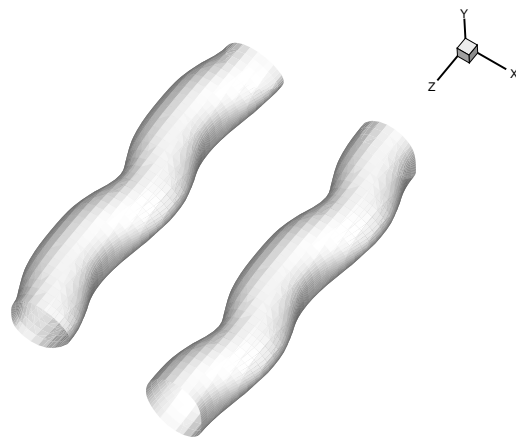


Figura 21: Iso-superfície de pressão. Evolução linear e não linear do modo helicoidal ($\phi = \frac{\pi}{2}$) composta por uma onda bidimensional e um par de ondas oblíquas subharmônicas para $M_c = 0,4$ e $Re = 500$.

lação ao número de onda longitudinal da perturbação bidimensional. As estruturas de vórtices formadas nestas simulações são denominadas modos helicoidais. A figura 21 mostra iso-superfícies de pressão para este tipo de escoamento. Nesta simulação a perturbação bidimensional apresenta uma diferença de fase de $\frac{\pi}{2}$ em relação ao par de ondas oblíquas. Esta figura mostra um comportamento semelhante ao caso com o desenvolvimento do modo translativo onde o rolo oblíquo oscila senoidalmente em amplitude e local ao longo da coordena z . A diferença se dá no segundo rolo oblíquo que apresenta um comportamento inverso ao caso com o modo translativo. A explicação para este comportamento pode ser sugerida através da perturbação subharmônica introduzida. No caso do modo translativo a mudança de fase ocorre nos dois períodos de ondas. No modo helicoidal, além do deslocamento tem-se a inversão do sinal devido ao modo subharmônico, apresentando dois rolos oblíquos anti-simétricos.

Uma última análise foi realizada para verificar o código. Neste caso escoamento tridimensional foi analisado para Mach convectivo de 0,8. O fenômeno evoluiu até a formação dos rolos oblíquos entrelaçados conhecidos como *braid*. Devido ao aumento da extensão do domínio na coordenada z para aproximar o número de onda transversal do valor de máxima amplificação de acordo com a teoria linear, foi necessário aumentar o número de pontos na direção longitudinal do escoamento. Aproximadamente a extensão foi duplicada e, conseqüentemente, o número de pontos por comprimento de onda em z também sofreu a mesma incrementação. Portanto, a malha adotada foi de $40 \times 100 \times 80$ que corresponde ao número de pontos nas direções (x, y, z) . O número de onda transversal adotado foi de $1/2$ do número de onda longitudinal, portanto, duplicou-se o número de pontos em z . Novamente, nesta simulação a perturbação bidimensional apresenta um diferença de fase de $\frac{\pi}{2}$ em relação ao par de ondas oblíquas. Isto caracteriza a reprodução do modo translativo. O espaçamento usado na direção longitudinal e transversal foi respectivamente de $dx \approx dz \approx 0,3$. A malha não uniforme utilizada na direção normal varia de $dy_{min} \approx 0,23$ no interior do domínio até $dy_{max} \approx 2,34$ nas fronteiras. O comprimento de onda assumido na direção longitudinal foi $L_x = 12$, enquanto que na direção transversal o comprimento selecionado no valor aproximado de $L_z \approx 24$. Devido aos efeitos compressíveis, foi aumen-

tado o domínio na direção normal para $L_y = 80$. Os outros parâmetros permaneceram iguais ao caso anterior.

Figura 22 mostra a simulação realizada para número de Mach convectivo igual à 0,8. No estágio onde os vórtices bidimensionais saturam é possível observar a formação dos rolos oblíquos. Nesta figura pode ser identificado uma região de pressão baixa no escoamento com forte rotação. Nestas regiões pode ser observado que os modos oblíquos crescem apresentando um comportamento senoidal. Em seguida o escoamento apresenta um desenvolvimento de filamentos longitudinais na região entre os dois rolos oblíquos co-rotativos. Estes filamentos apresentam entre si um movimento contra-rotativo. Outra característica destes filamentos é que eles se ligam no rolos oblíquos de forma diferente onde uma extremidade do filamento se localiza na parte superior do primeiro rolo, enquanto a outra extremidade se localiza a parte inferior do segundo rolo devido ao efeito de rotação. Estes filamentos tendem a crescer, caracterizando o primeiro estágio para a formação uma estrutura de vórtices entrelaçados (*braid*). Por último, o escoamento se mostra semelhante a uma rede de rolos no plano (x, z) . Novamente estes resultados concordam em forma qualitativa com outras simulações realizadas para circunstâncias semelhantes.

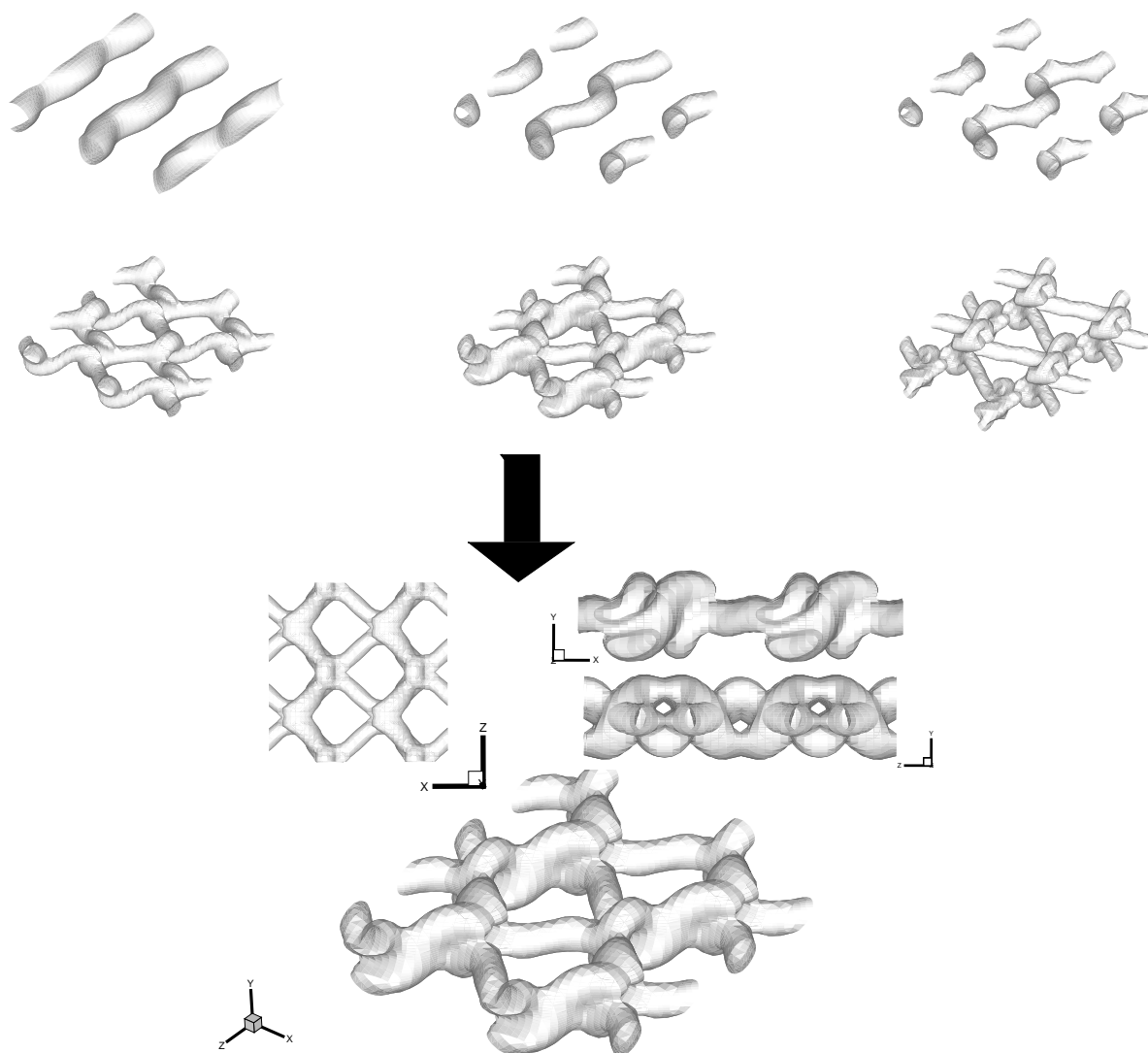


Figura 22: Sequência de figuras de iso-superfície de pressão. Evolução linear e não linear do modo translativo ($\phi = \frac{\pi}{2}$) composta por uma onda bidimensional e um par de ondas oblíquas para $M_c = 0,8$ e $Re = 500$.

Resultados Numéricos

Neste capítulo serão apresentados resultados numéricos obtidos com a simulação da camada de mistura com desenvolvimento temporal. A principal contribuição do presente trabalho consistiu em investigar o desenvolvimento temporal de instabilidades hidrodinâmicas com o uso de ondas fortemente moduladas. Isto significa que as instabilidades adotadas para perturbar o escoamento apresentaram uma faixa de frequências ampla como é o caso do escoamento real, ou seja, que ocorre na natureza. Este estudo é interessante e visa reproduzir o fenômeno de uma forma mais realista.

O termo desenvolvimento temporal refere-se à condição de contorno periódica adotada na direção longitudinal enquanto que na direção normal do escoamento foram especificadas condições de contorno que reproduzissem o escoamento livre. Cabe lembrar que na direção transversal do escoamento - foco desta investigação numérica - também foi adotada condição de contorno periódica. O presente trabalho de pesquisa corresponde a uma etapa de um projeto mais ambicioso que visa em longo prazo à investigação experimental e numérica de escoamentos transicionais supersônicos. A meta estipulada aqui é mais modesta e contempla a simulação numérica de escoamentos alto subsônicos, tipicamente para $M_c < 0,8$. O número de Reynolds utilizado foi relativamente baixo ($500 < Re < 1000$) para assegurar que o método numérico usado reproduzisse fielmente os resultados. Também foi adotado número de Prandtl unitário para manter compatibilidade com a solução analítica da equação de conservação de energia (WHITE, 1974) usada para obter o per-

fil de temperatura inicial. Este perfil de temperatura juntamente com o perfil tangente hiperbólico de velocidade é comumente usado nas simulações de fenômeno de camada de mistura (MICHALKE, 1964; SANDHAM; REYNOLDS, 1989, 1990; FORTUNÉ, 2000; COLLIER; GHESQUIERES, 2003).

Para simular este tipo de fenômeno, as equações de Navier-Stokes compressíveis na sua forma conservativa foram adotadas juntamente com as equações de continuidade e energia. O tipo de fenômeno a ser estudado foi a evolução linear e não linear de trens de ondas tridimensionais fortemente modulados em uma faixa de Mach onde os efeitos compressíveis já influenciavam significativamente o comportamento do escoamento. Este tipo de simulação possibilitou a comparação dos resultados numéricos com teorias desenvolvidas (PIERREHUMBERT; WIDNALL, 1982) e experimentos realizados (MEDEIROS, 2004) para escoamentos incompressíveis. Neste sentido, uma outra contribuição do presente trabalho foi avaliar a validade da teoria desenvolvida por Pierrehumbert e Widnall (1982).

No capítulo precedente, inúmeros testes de verificação foram realizados com a introdução de perturbações monocromáticas. Além de servir para testes, a expectativa é que os comportamentos observados nestes cenários simplificados possam explicar pelo menos parcialmente a evolução temporal do fenômeno em condições naturais. O estudo de cenários com um número reduzido de ondas se justifica em grande medida pela tentativa de simplificação de um fenômeno reconhecidamente complexo. O que se pode dizer de antemão é que estas considerações de bidimensionalidade e monocromaticidade deixam de ser válidas em várias situações práticas em aeronáutica. Por exemplo, à medida que o número de Mach se eleva, as ondas mais instáveis deixam de ser bidimensionais e passam a ser as ondas oblíquas. A evolução da camada de mistura em condições naturais (tipo de escoamento encontrado na natureza) é comparativamente pouco estudada em âmbito nacional e internacional. Este processo natural é normalmente iniciado por perturbações aleatórias não controladas que dão origem a um amplo espectro de ondas oblíquas ou não. Nestas circunstâncias, estas ondas não são planas e monocromáticas, mas fortemente moduladas e tridimensionais.

Dentro deste contexto, as presentes simulações também foram executadas para investigar o efeito do número de Mach no comportamento de ondas moduladas na direção transversal do escoamento. O objetivo principal destas simulações foi investigar o comportamento de trens de ondas oblíquas fortemente moduladas na direção transversal na evolução do regime linear e não linear. A taxa de amplificação destas ondas foi avaliada e comparada com resultados teóricos e numéricos encontrados na literatura (SANDHAM; REYNOLDS, 1989, 1990; PIERREHUMBERT; WIDNALL, 1982; FORTUNÉ, 2000; GERMANOS; MEDEIROS; SOUZA, 2004b). Além desta revisão bibliográfica, as simulações realizadas anteriormente com as ondas bi- e tri-dimensionais monocromáticas também foram utilizadas para analisar a evolução do mesmo fenômeno com a introdução de ondas moduladas.

Inicialmente foram realizados testes de convergência de malha para escolher uma malha apropriada para o tipo de simulação proposta no presente projeto. Por se tratar de simulações com domínios tridimensionais que exigem alta demanda de processamento, armazenamento de dados e alocação de memória este tipo de teste é de grande importância para assegurar a qualidade da resolução da malha sem comprometer a rapidez dos cálculos numéricos. Também foi necessário realizar alguns testes preliminares para avaliar o comportamento da instabilidade bidimensional em função do número de Mach e Reynolds. Estas informações foram essenciais para os estudos propostos a seguir.

A investigação numérica iniciou-se com a comparação dos resultados numéricos com a teoria proposta por Pierrehumbert e Widnall (1982). Neste caso o escoamento a ser investigado se restringiu a um escoamento incompressível, em acordo com a teoria proposta. Nestes estudos, a teoria linear de estabilidade também foi usada na análise. Por último, foram realizadas simulações com a evolução do regime linear e não linear de trens de ondas oblíquos através do fenômeno temporal de camada de mistura. Os resultados obtidos foram interessantes e mostraram-se bem próximos das informações encontrados na literatura e dos resultados com o uso de ondas monocromáticas.

6.1 Teste de Convergência e Simulações Preliminares

Testes de convergência de malha foram feitos para escolher uma malha apropriada para este tipo de simulação. Estes testes são essenciais para o tipo de simulação em questão, pois é de comum conhecimento que a simulação com as equações de conservação tridimensionais consome um considerável tempo de processamento devido às matrizes cúbicas utilizadas para armazenar as variáveis. Neste caso foi necessário fazer uma avaliação do número de pontos necessários para executar a simulação.

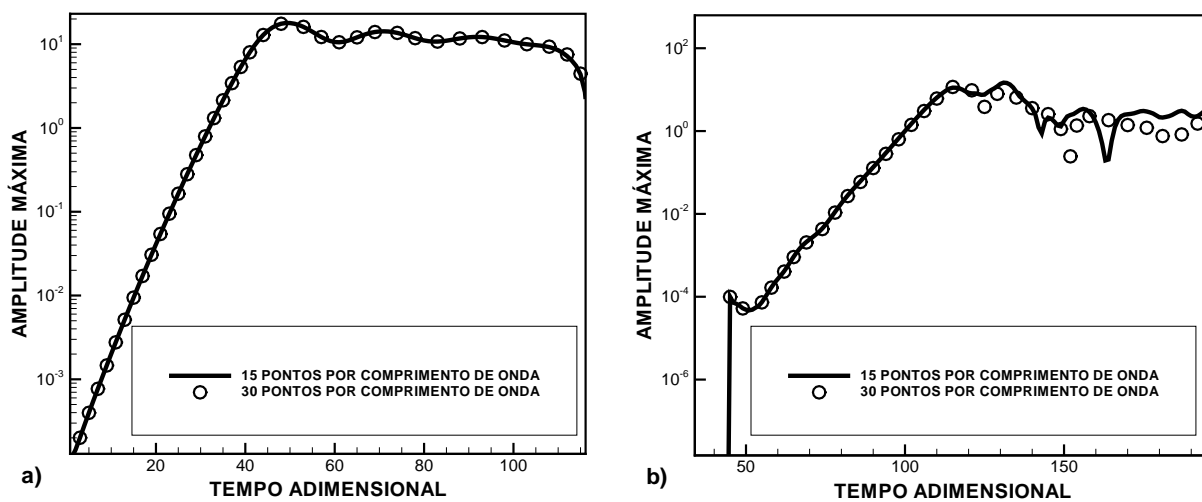


Figura 23: Teste de convergência. a) perturbação bidimensional b) perturbação oblíqua.

É importante enfatizar que a resolução adotada na coordenada z foi significativamente maior do que a adotada na coordenada x devido ao estudo da taxa de amplificação das ondas oblíquas. Neste caso foi assumido que a onda oblíqua com menor comprimento de onda teria o mesmo número de pontos por comprimento de onda usado para discretizar na direção x a perturbação bidimensional disparada no início da simulação. Nas simulações a seguir foram utilizadas malhas de tamanhos diferentes de acordo com o número de Mach simulado. Isto ocorreu devido a necessidade de simular a onda com a maior taxa de amplificação predita pela teoria linear. Com a variação do número de onda longitudinal temos uma variação na extensão do domínio computacional na direção longitudinal do escoamento para cada número de Mach.

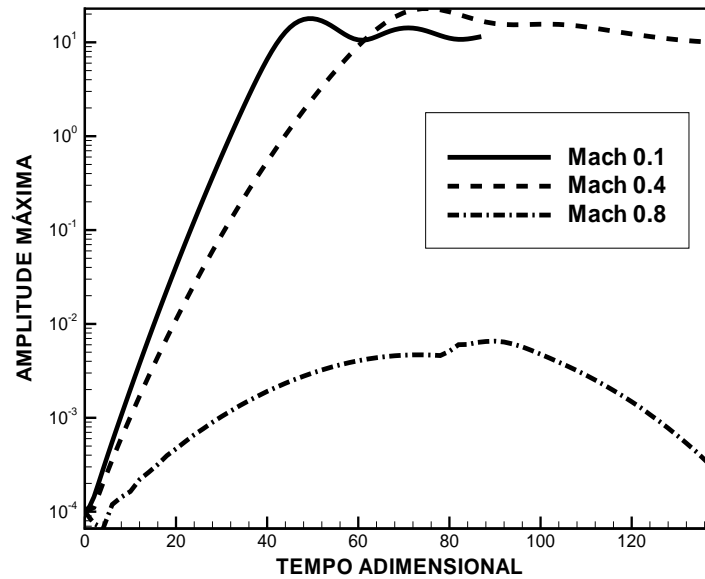


Figura 24: Evolução da amplitude de um escoamento viscoso bidimensional para número de Reynolds igual à 5×10^2 através da análise de instabilidade linear temporal. As taxas de amplificação máximas adotadas para os respectivos Mach assumidos logo acima foram: $\alpha_0 \approx 0,89$ para $M_c = 0,01$; $\alpha_0 \approx 0,82$ para $M_c = 0,4$ e $\alpha_0 \approx 0,52$ para $M_c = 0,8$.

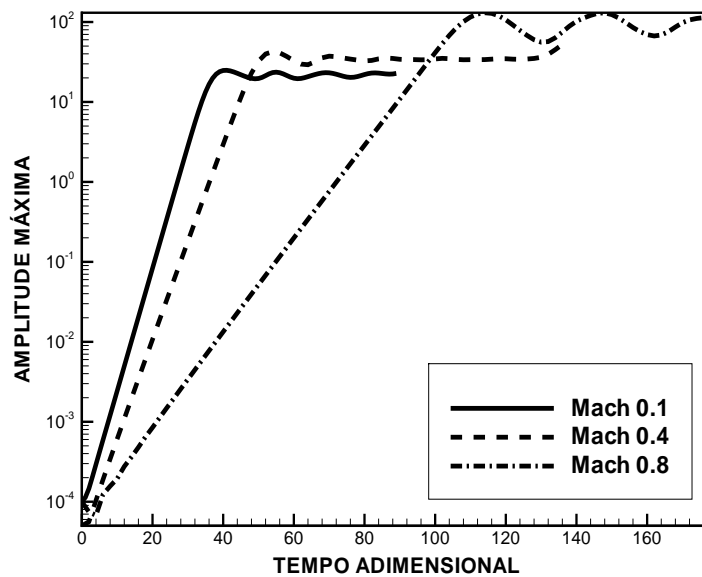


Figura 25: Evolução da amplitude de um escoamento viscoso bidimensional para número de Reynolds igual à 1×10^3 através da análise de instabilidade linear temporal. As taxas de amplificação máximas adotadas para os respectivos Mach assumidos logo acima foram: $\alpha_0 \approx 0,89$ para $M_c = 0,01$; $\alpha_0 \approx 0,82$ para $M_c = 0,4$ e $\alpha_0 \approx 0,52$ para $M_c = 0,8$.

Primeiramente, testes de convergência de malha foram realizados para assegurar que os resultados numéricos não fossem contaminados com uma malha inapropriada. A figura 23 mostra um exemplo dos testes realizados para verificar a quantidade de pontos necessária para simular um período de uma onda bidimensional (figura 23a) e um par de ondas oblíquas (figura 23b). Estas figuras mostram que a malha com 15 pontos por comprimento de onda tanto em x quanto em z é adequada para simular as perturbações bi- e tri-dimensionais. Mesmo no início da simulação - onde pode-se notar um efeito transiente devido à condição inicial assumida - os resultados convergem nos primeiros passos da evolução temporal e também com o aumento do número de pontos. Além disso, outros resultados realizados mostram que mesmo para 6 pontos por comprimento de onda é possível simular a evolução de uma onda senoidal.

Em seguida foram realizadas simulações com a evolução de apenas um modo bidimensional fundamental. Esta etapa consistiu em obter resultados preliminares sobre o comportamento desta onda em função do número de Reynolds. Estes resultados são importantes para revelar o ponto de saturação do escoamento e determinar se o escoamento é suscetível ou não às pequenas perturbações introduzidas no escoamento base. A figura 24 mostra resultados com a evolução de perturbações bidimensionais em função do tempo adimensional para número de Reynolds igual à 5×10^2 . Estas simulações mostram que mesmo para perturbações de amplitude muito pequena, o crescimento das ondas não segue uma curva exponencial. Isto é decorrente do alargamento da camada de mistura devido aos efeitos viscosos. Para altos Mach ($M_c = 0,8$) este efeito é tão significativo que as ondas decaem antes de atingir o nível de saturação. Para resolver isso foi necessário aumentar o número de Reynolds para 1×10^3 conforme mostra a figura 25. Nesta figura as perturbações bidimensionais para $M_c = 0,8$ não foram mais fortemente dissipadas pela viscosidade. É notório que a taxa de amplificação revela basicamente um crescimento exponencial e, portanto, as simulações foram executadas para este número Reynolds.

6.2 Instabilidade Secundária 3D

Modelos teóricos simplificados dedicados ao estudo de instabilidade secundária à perturbações tridimensionais em uma camada de mistura invíscida foram apresentados por Pierrehumbert e Widnall (1982). Este modelo teórico prediz que o modo oblíquo mais instável corresponde ao modo com número de onda transversal igual à 1,5 vezes o número de onda longitudinal. Uma contribuição do presente trabalho consistiu em simular o fenômeno de instabilidade secundária com a introdução de ondas oblíquas. A idéia foi comparar os resultados numéricos com a teoria fornecida por Pierrehumbert e Widnall (1982). A teoria se restringiu a um escoamento incompressível (tipicamente $M_c < 0,3$). O presente código simula este tipo de escoamento e, portanto, os resultados obtidos com o modelo teórico e as simulações numéricas realizadas no presente projeto puderam ser comparados.

A simulação é executada através da introdução do escoamento base juntamente com uma perturbação bidimensional inicial de pequena amplitude. Esta etapa é caracterizada pela amplificação das instabilidades fundamentais introduzidas no início da simulação. Em seguida foram introduzidos pares de ondas oblíquas opostas em um determinado tempo adimensional para disparar o fenômeno de instabilidade secundária tridimensional. Este tempo adimensional selecionado foi aproximadamente o tempo de saturação dos vórtices primários. O objetivo destas simulações foi verificar qual perturbação oblíqua apresentava maior taxa de amplificação. Primeiramente foram realizadas simulações para baixo número de Mach similar ao modelo teórico considerado. Nesta investigação numérica foi simulado um escoamento viscoso ($Re = 500$).

A figura 26 mostra de forma ilustrativa como as ondas bidimensionais e oblíquas foram introduzidas na simulação temporal. De acordo com esta figura pode-se observar que a onda bidimensional fundamental foi excitada no tempo adimensional de $t = 0$. Na figura 26, a indicação $t - 3D$ representa o tempo adimensional em que as ondas oblíquas serão excitadas. O tempo adimensional em que as ondas oblíquas foram disparadas depende de dois parâmetros: os números de Mach e Reynolds do escoamento. A taxa de amplificação

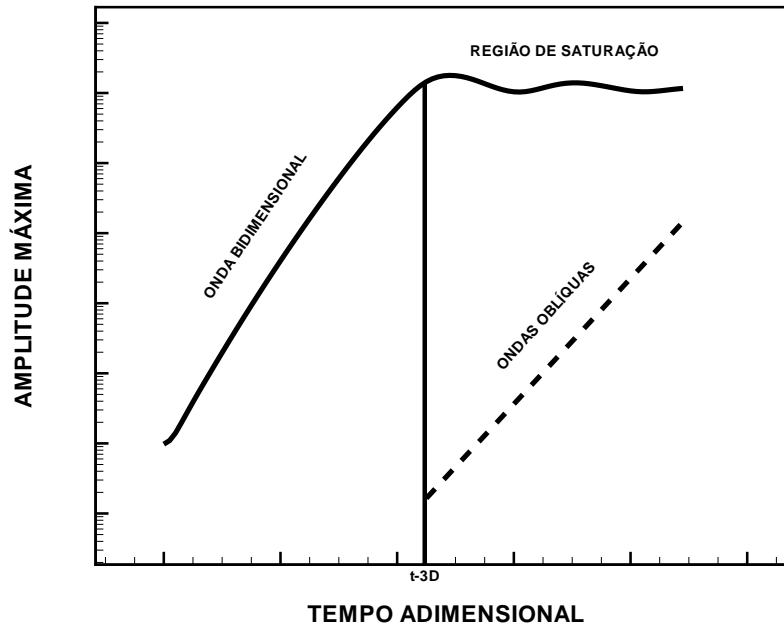


Figura 26: Figura ilustrativa do procedimento adotado para disparar as ondas bi- e tri-dimensionais.

das ondas oblíquas foi calculada com o auxílio de ferramentas numéricas que possibilitaram uma interpolação exponencial para obtenção da taxa de crescimento dos modos oblíquos.

A investigação numérica nesta etapa iniciou-se com o estudo da evolução de ondas planas para número de Mach convectivo igual à 0,1. O número de onda longitudinal selecionado foi de $\alpha_0 = 2\pi/7,4 \approx 0,84$. Este valor corresponde ao modo bidimensional com maior taxa de amplificação de acordo com a teoria linear. O número de onda transversal com maior comprimento de onda foi definido como um quarto do número de onda longitudinal. Nesta análise foi introduzido um novo parâmetro adimensional que corresponde à β/α_0 . Este parâmetro representa a razão do número de onda oblíquo pelo número de onda fundamental bidimensional. Nesta análise foram introduzidos 12 modos oblíquos harmônicos e, portanto, o maior modo oblíquo correspondia a $\beta/\alpha_0 = 3$.

A malha adotada foi de $15 \times 90 \times 180$ que corresponde à quantidade de pontos nas direções (x, y, z) respectivamente. Pode-se notar que dividindo o número de pontos na coordenada z pelo número de modos oblíquos introduzidos tem-se que o menor número de onda oblíquo foi discretizado com o mesmo número de pontos usado na coordenada x . Neste caso foram utilizados 15 pontos por comprimento de onda. Vale lembrar que

os testes de convergência mostraram que esta quantidade de pontos por comprimento de onda era suficiente para simular um período espacial. A idéia é que o modo oblíquo de maior número de onda tenha a mesma resolução que o modo fundamental bidimensional. Os espaçamentos usados nas direções longitudinal e transversal foram de $dx = 0,49$ e $dz = 0,18$ respectivamente. A malha não uniforme utilizada na direção normal varia de $dy_{min} = 0,13$ no centro do domínio até $dy_{max} = 1,29$ nas fronteiras. O comprimento de onda assumido na direção longitudinal foi $L_x = 7,35$, enquanto que na direção normal foi $L_y = 40$. Na direção transversal foi usado o comprimento de $4L_x$. A amplitude selecionada para o escoamento perturbado bi- e tri-dimensional foi aproximadamente de 10^{-4} . Devido ao baixo número de Mach e às restrições impostas pelas condições de estabilidade, o passo de integração temporal (dt) adotado foi aproximadamente de 5×10^{-3} . A condição CFL adotada foi de 0,8.

A figura 27 mostra a taxa de amplificação dos modos oblíquos em função da razão do número de onda transversal pelo número de onda longitudinal (β/α_0). Neste caso foram selecionados dois tempos adimensionais para excitar os modos oblíquos. A idéia era verificar se o tempo em que estes modos foram disparados pode afetar a taxa de amplificação e/ou a seleção em regime linear do modo mais amplificado. Na figura 27a o modo oblíquo foi disparado aproximadamente no tempo em que o escoamento satura, enquanto que na figura 27b este mesmo modo foi excitado após o início da saturação. Cada barra nesta figura representa a taxa de amplificação de cada modo oblíquo introduzido no escoamento. Pode-se observar que o modo que apresentou a maior taxa de amplificação corresponde à $\beta/\alpha_0 = 1,5$. Este valor está de acordo com o modelo teórico a ser testado. Todavia, apesar de haver um modo com maior taxa de amplificação, é notório que as taxas de crescimento são muito próximas umas das outras. Este comportamento também segue de acordo com o modelo. Mesmo simulando um escoamento viscoso e um Reynolds relativamente baixo os resultados numéricos confirmam o modelo teórico dado por Pierrehumbert e Widnall (1982) que é invíscido.

A figura 27b mostra resultados semelhantes. Neste caso apenas foi alterado o tempo adimensional em que os modos oblíquos foram disparados. No primeiro caso (figura 27a)

o modo foi disparado aproximadamente no início do processo de saturação. Na figura 27b os modos oblíquos foram disparados dentro do regime de saturação. Mesmo disparando as ondas oblíquas em tempos adimensionais diferentes o modo que mais cresceu foi o modo $\beta/\alpha_0 = 1,5$ conforme a teoria previa. Todavia as taxas variaram levemente.

Além destes resultados, outra contribuição do presente estudo consistiu em investigar o efeito da compressibilidade na evolução das instabilidades oblíquas. A figura 28 mostra o gráfico da taxa de amplificação para o número de Mach igual à 0,4 em função da razão do número de onda transversal pelo número de onda longitudinal. O número de onda longitudinal foi de $\alpha_0 = 2\pi/7.6 \approx 0,82$. Novamente o menor número de onda transversal foi de 1/4 do número de onda longitudinal. O passo adimensional de integração temporal pôde ser aumentado para 10^{-2} devido ao aumento do número de Mach. Nesta figura podemos notar que o modo oblíquo que cresceu mais rápido corresponde a $\beta/\alpha_0 = 1$. Baseado nestes resultados podemos notar que o número de onda transversal mais instável diminuiu com o aumento do número de Mach. Este comportamento é contrário ao encontrado na instabilidade primária que prediz que as ondas oblíquas são mais rapidamente amplificadas com o aumento do Mach convectivo.

Seguindo com a análise do efeito da compressibilidade, a figura 29 mostra a simulação para $M_c = 0,8$. Nestas simulações é esperado que os efeitos compressíveis influenciem bastante o escoamento. Nesta simulação o número de onda longitudinal foi estabelecido

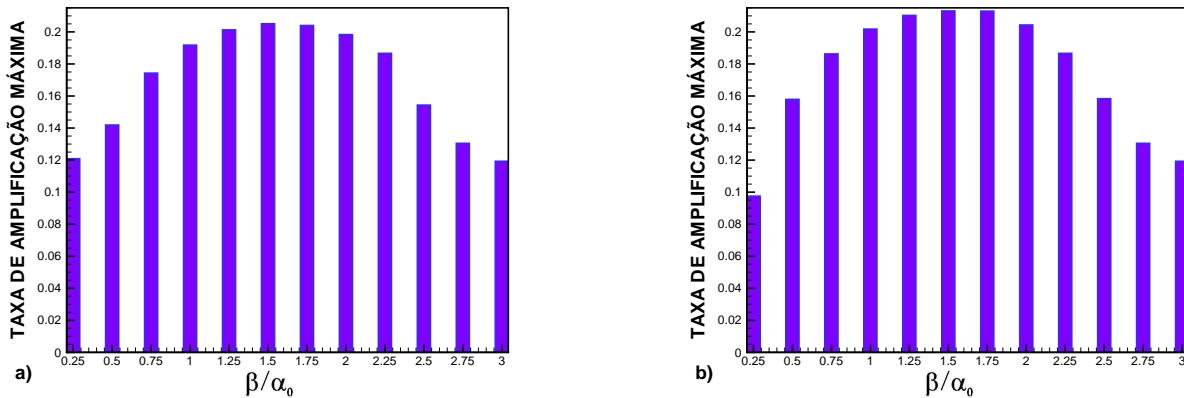


Figura 27: Taxas de amplificação das ondas oblíquas para $M_c = 0,1$ em função da razão do número de onda transversal e longitudinal. O tempo adimensional em que as ondas oblíquas foram disparadas foi: a) $t = 42$ e b) $t = 60$.

como $\alpha_0 = 2\pi/12 \approx 0,52$. Os parâmetros restantes foram definidos da mesma forma que na simulação anterior. Podemos observar que o modo oblíquo com maior taxa de amplificação foi o segundo modo que corresponde $\beta/\alpha_0 = 0,5$. Novamente a taxa de amplificação máxima diminuiu com o aumento do Mach convectivo.

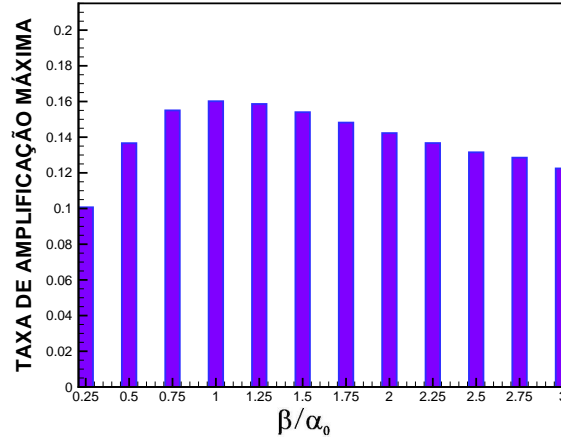


Figura 28: Taxas de amplificação das ondas oblíquas para $M_c = 0,4$ em função da razão do número de onda transversal e longitudinal.

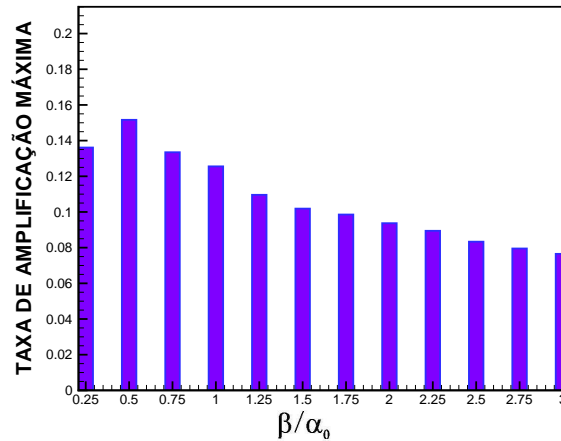


Figura 29: Taxas de amplificação das ondas oblíquas para $M_c = 0,8$ em função da razão do número de onda transversal e longitudinal.

Os resultados acima mostram que o número de onda transversal mais instável diminuiu com o aumento do número de Mach. Em contrapartida a instabilidade primária prediz que no escoamento à Mach convectivo entre 0,6 e 1,0 as ondas oblíquas são rapidamente mais amplificadas e, conseqüentemente, em condições naturais é esperado que o escoamento apresente uma estrutura tridimensional mais evidente que no caso incompressível. Portanto, baseado nos resultados apresentados na presente análise podemos concluir que

a taxa de amplificação no regime governado pela instabilidade secundária se comporta de forma inversa em relação a instabilidade primária.

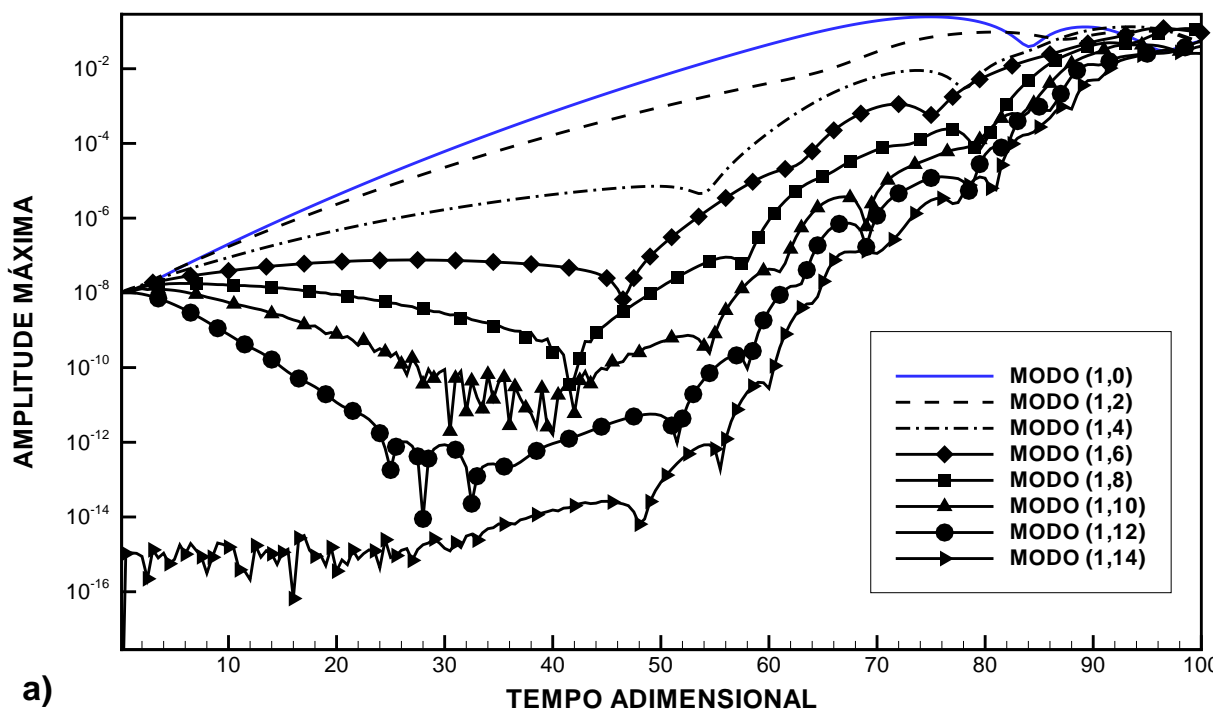
6.3 Trens de Ondas Moduladas Lineares

O objetivo da presente simulação foi investigar o efeito da modulação de ondas tridimensionais na evolução temporal da camada de mistura em regime linear. Neste estágio foram executadas simulações com a introdução de uma onda bidimensional e pares de ondas planas oblíquas. Diferente das simulações realizadas através do fenômeno de instabilidade secundária, na etapa presente, o escoamento perturbado foi excitado no início da simulação ($t = 0$) e não mais no ponto de saturação do escoamento. Antes dos testes propostos para o regime não linear, uma análise da evolução de ondas oblíquas moduladas foi realizada em regime linear. O objetivo principal foi assegurar que as perturbações introduzidas no escoamento cobriam a faixa de ondas oblíquas mais instáveis produzidas pela instabilidade primária. Neste caso, para as simulações em regime linear os números de Mach convectivos adotados foram de 0,1 e 0,8. Consequentemente estes valores foram selecionados para investigar o efeito da compressibilidade no escoamento. De acordo com a teoria linear de estabilidade, a taxa de amplificação de ondas bidimensionais deveria reduzir com o aumento do número de Mach do fluido, enquanto que a taxa de amplificação de ondas tridimensionais deveria aumentar com o mesmo efeito em relação ao caso bidimensional. Testes realizados com ondas bi- e tri-dimensionais monocromáticas foram feitos na seção de verificação do código e os resultados foram bastante favoráveis. Nesta etapa, simulações similares foram propostas. Todavia, ao invés de trabalhar com perturbações monocromáticas, a presente investigação foi focada na simulação do fenômeno de camada de mistura com a introdução de ondas planas oblíquas fortemente moduladas. A modulação decorre da utilização de um grande número de ondas oblíquas.

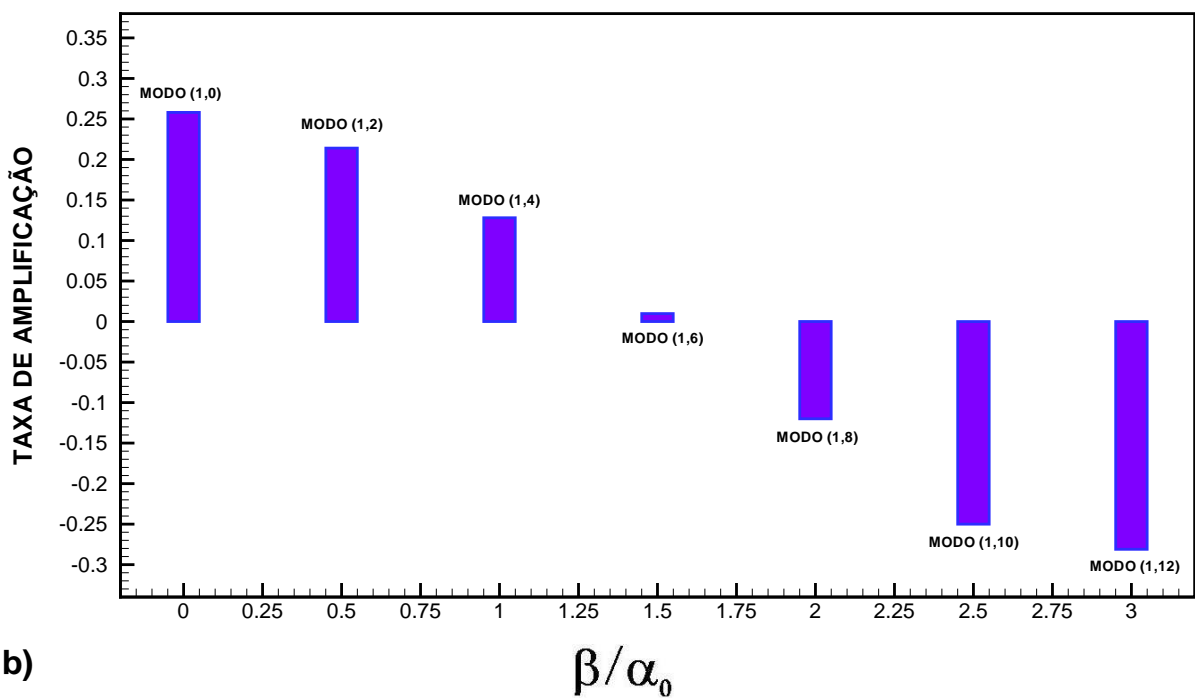
Mais uma vez foi adotada uma malha com grande número de pontos na direção transversal devido à proposta de investigar os trens de ondas oblíquos. Os parâmetros relacionados com a malha adotada e o número de Mach e Reynolds são similares às simulações

anteriores. A amplitude inicial foi aproximadamente de 1×10^{-8} para todas as ondas. O passo de integração temporal assumido foi de 5×10^{-3} . Além disso, foram adotados filtros numéricos nas direções longitudinal e transversal. Este passo de integração foi adotado para a simulação de $M_c = 0,1$ e $M_c = 0,8$ de acordo com os testes de convergência realizados para avaliar a estabilidade do código. Em paralelo foi adotada uma nomenclatura mais amigável para beneficiar a compreensão do leitor. Esta nomenclatura adotada foi do tipo modo (α_i, β_k) . Para simplificar mais, as variáveis α e β foram omitidas permanecendo apenas os índices i e k que representam a onda bi- e tri-dimensional respectivamente. Por exemplo, o modo (1,0) representa a onda bidimensional fundamental, enquanto que o modo (1,6) representa uma onda com $1\alpha_0$ e $6\beta_0$.

Primeiramente testes para baixo número de Mach convectivo (igual à 0,1) foram executados. A figura 30 mostra a evolução do fenômeno de camada de mistura com a introdução de uma onda bidimensional e ondas planas oblíquas. Na figura 30a tem-se a amplitude da componente de velocidade normal (v) destas ondas em função do tempo adimensional. A ordenada y foi mostrada em escala logarítmica. Na figura 30b são mostradas as taxas de amplificação de cada modo. Nesta figura pode ser observado que o modo que apresentou maior taxa de amplificação foi o modo (1,0) que corresponde a onda bidimensional (linha azul). Neste caso todos os modos oblíquos (linha preta) apresentaram taxa de amplificação inferior a taxa de crescimento da onda bidimensional. A partir do modo oblíquo (1,8) ou $(\beta/\alpha_0 = 2,0)$ pode-se notar que o escoamento se torna estável pois as amplitudes começam a decair. Este comportamento está de acordo com a teoria linear (SANDHAM; REYNOLDS, 1990) que mostra que para baixo número de Mach convectivo as ondas bidimensionais são as mais amplificadas. Também podemos comparar os presentes resultados com as simulações realizadas em regime linear com as ondas não moduladas (figura 6). Pode-se observar que o crescimento exponencial em regime linear através das simulações com ondas monocromáticas e moduladas estão em concordância. Isto era esperado, pois o escoamento ainda não foi influenciado pela interação de ondas não lineares. Provavelmente em regime não linear possa haver alguma diferença nos resultados obtidos para os dois casos simulados.

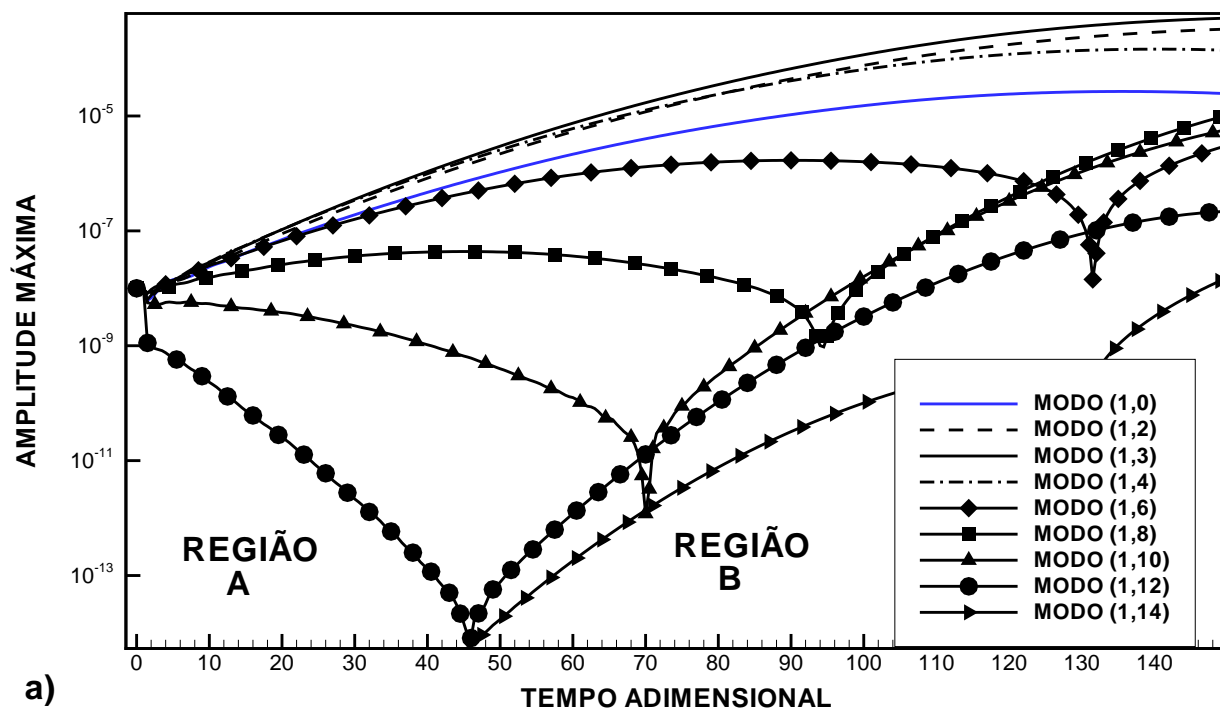


a)

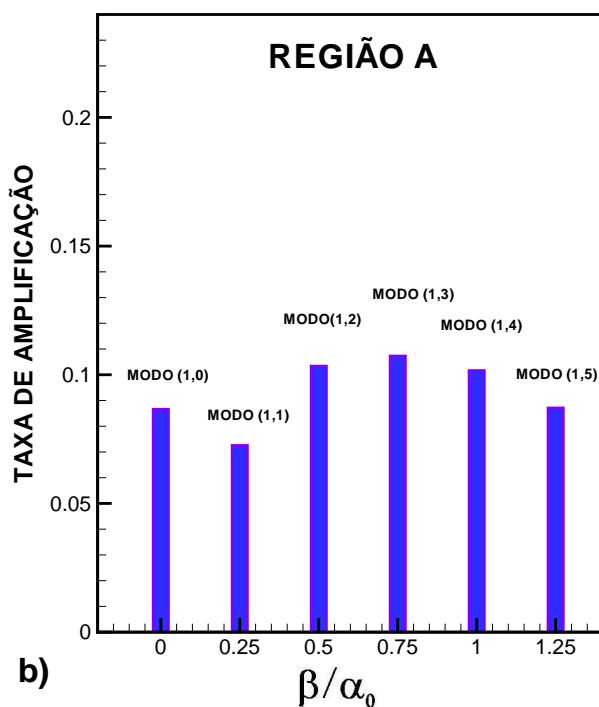


b)

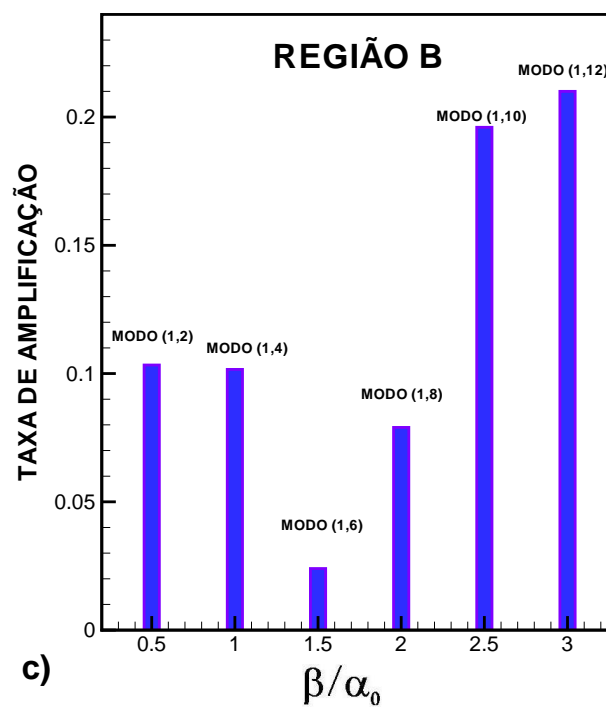
Figura 30: Evolução linear de trens de ondas modulados para $M_c = 0, 1$ e $Re = 500$. a) Amplitude dos modos oblíquos em função do tempo adimensional b) Taxa de amplificação dos modos no regime linear.



a)



b)



c)

Figura 31: Evolução linear de trens de ondas modulados para $M_c = 0,8$ e $Re = 1000$. a) Amplitude dos modos obliquos em função do tempo adimensional b) Taxa de amplificação dos modos na região A c) Taxa de amplificação dos modos obliquos na região B (região de interação não linear).

Em seguida aumentou-se o número de Mach para avaliar os efeitos de compressibilidade. A figura 31a mostra a evolução de trens de ondas oblíquos para número de Mach convectivo igual à 0,8. Para este Mach é esperado que os efeitos compressíveis sejam mais significantes conforme prediz a teoria linear. Nesta figura tem-se a evolução da amplitude da componente de velocidade normal (v) em função do tempo adimensional. Nas figuras seguintes, 31b e 31c, tem-se a taxa de amplificação referente a diferentes posições indicadas no tempo da figura 31a. Neste caso foram selecionadas duas regiões que correspondem ao crescimento linear dos modos oblíquos em função do tempo e em seguida da interação não linear que fornece uma taxa de amplificação bem mais elevada. O número de onda longitudinal assumido corresponde ao modo de maior taxa de amplificação de acordo a teoria linear para o número de Mach simulado. A amplitude da perturbação selecionada foi de 10^{-8} . Este valor assegura que o fenômeno se desenvolva em regime linear.

Ainda na figura 31a pode-se observar que os modos oblíquos mais elevados ($\beta/\alpha_0 > 2,0$) decaem logo que são excitados. Apesar de estes modos apresentarem uma amplitude bem pequena neste ponto, depois de um determinado estágio, estes modos linearmente estáveis começam a crescer novamente. Esta característica mostra um comportamento que é consistente mesmo para modos com pequenas amplitudes, e pode ser atribuída aos efeitos da interação não linear. Simulações realizadas para mostrar o comportamento de ondas oblíquas não moduladas (figura 6) confirmam os resultados obtidos neste estágio. Diferente do caso para baixo número de Mach, a taxa de amplificação aumenta com o número de onda transversal. De acordo com a figura 6 o ponto de máxima amplificação se localiza em $\beta/\alpha_0 = 0,78$. Nos resultados mostrados com ondas moduladas a taxa de amplificação máxima corresponde ao modo (1,3) ou $\beta/\alpha_0 = 0,75$. Mais uma vez os resultados com os dois casos simulados estão de acordo, além, é claro de estarem próximos das taxas de crescimento obtidas com a teoria linear.

A evolução do sistema de ondas ao longo da coordenada $y = 0$ (região central da camada de mistura) foi analisada através do espaço de Fourier e físico. As figuras de 32 a 35 mostram simulações realizadas para número de Mach igual à 0,1. Neste caso foram extraídos resultados da componente de velocidade normal (v) e transversal (w). Baseado

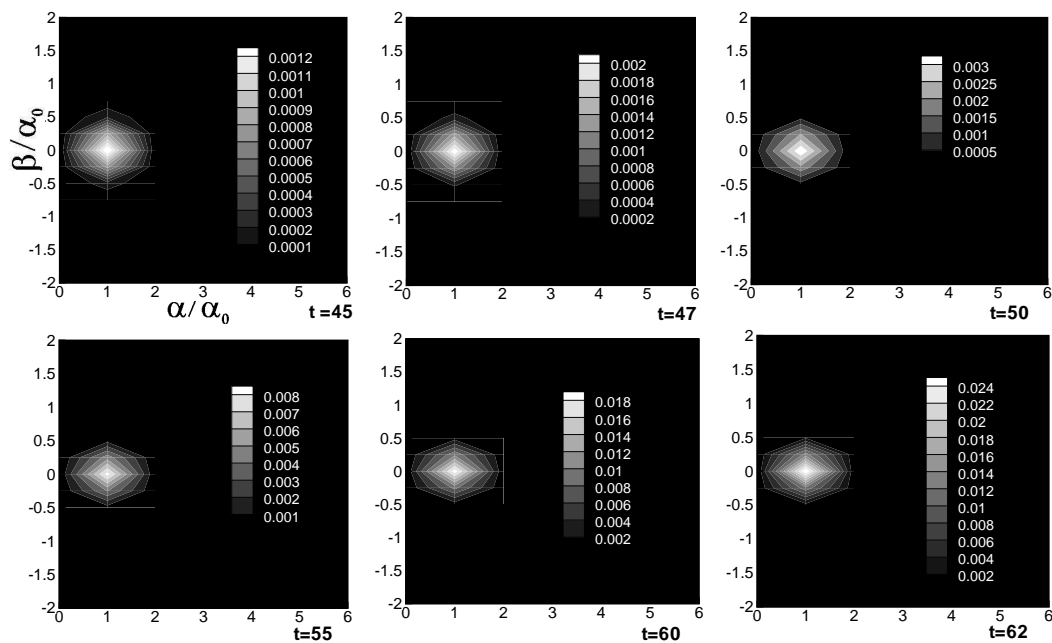


Figura 32: Análise espectral da evolução linear da componente de velocidade normal para $M_c = 0, 1$ e $Re=500$.

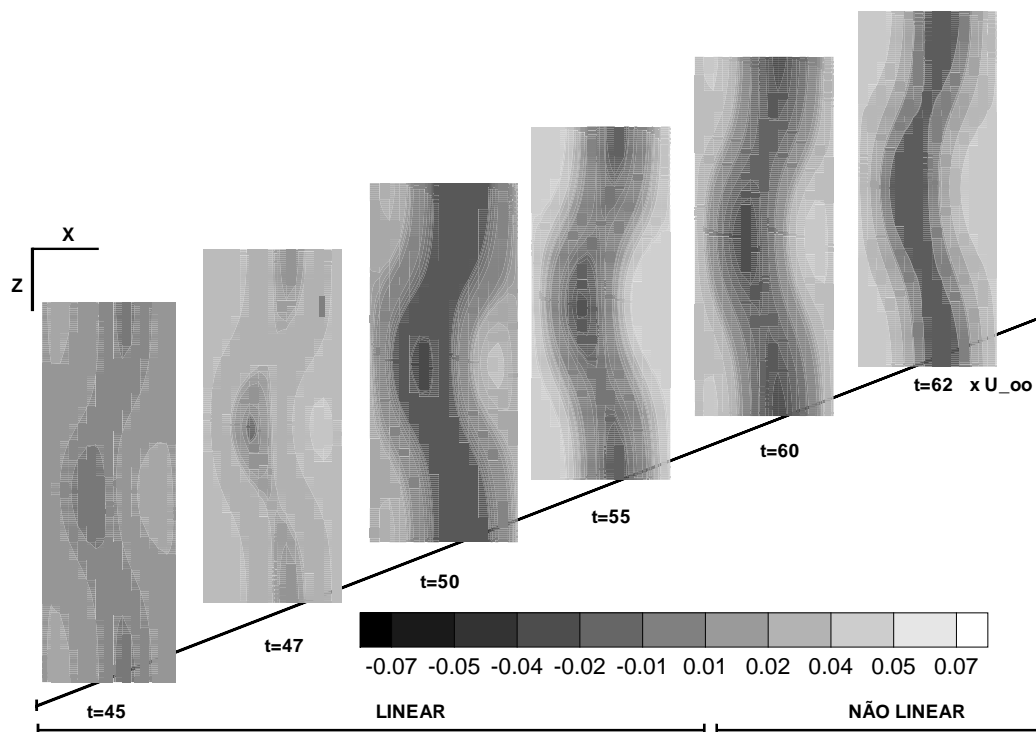


Figura 33: Evolução linear da componente de velocidade normal para $M_c = 0, 1$ e $Re=500$.

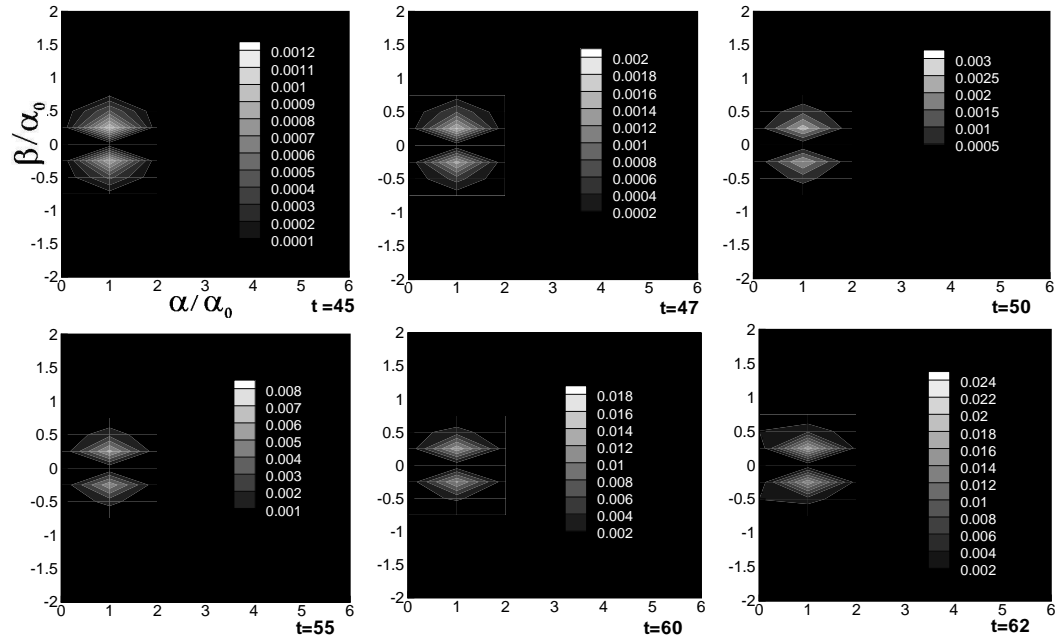


Figura 34: Análise espectral da evolução linear da componente de velocidade transversal para $M_c = 0,1$ e $Re=500$.

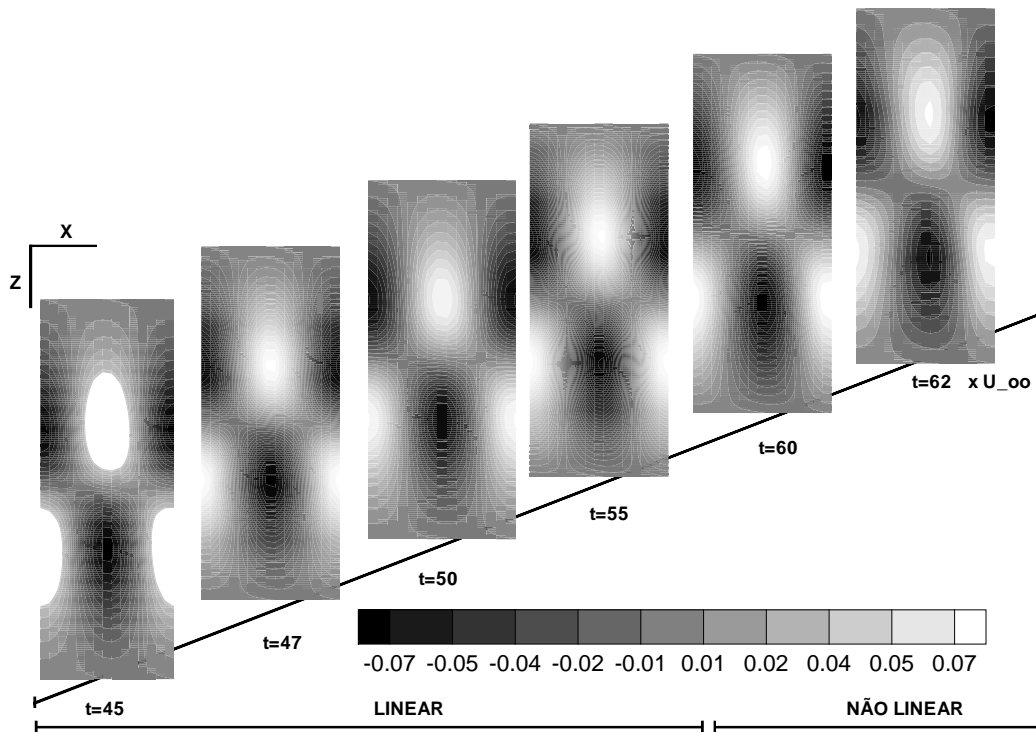


Figura 35: Evolução linear da componente de velocidade transversal para $M_c = 0,1$ e $Re=500$.

nos resultados obtidos com as duas componentes de velocidade a análise de Fourier mostra que a onda que manteve o crescimento predominante foi a onda fundamental bidimensional. Mesmo a figura 30 mostrando o crescimento de modos oblíquos mais elevados, eles não se tornaram predominantes no escoamento.

Em adicional, outro teste comparativo pôde ser realizado para escoamentos com baixo número de Mach. Segundo Medeiros (2004) o termo na equação de Navier-Stokes que apresenta maior magnitude e que será precursor das características iniciais do regime não linear corresponde a derivada $\frac{\partial}{\partial y}(v'w')$. Sabe-se que a componente vertical não apresenta o número de onda transversal e, portanto, este parâmetro é determinado pelo β_0 da componente transversal. Este comportamento pode ser confirmado através da figura 40 no tempo adimensional igual à 60. É notório que o número de onda transversal em regime linear é aproximadamente o mesmo número de onda transversal nos estágios iniciais da não linearidade. Desta maneira os resultados encontrados por Medeiros (2004) puderam ser comprovados nesta simulação. Realmente a derivada analisada fornece o comportamento inicial do regime não linear.

A mesma análise foi estendida para o caso com número de Mach igual à 0,8. O parâmetro usado nestas figuras foi apenas a componente de velocidade vertical (v). A figura 36 indica que o modo tridimensional começa a se destacar no escoamento, embora em regime linear a tridimensionalidade ainda não seja dominante. Este modo corresponde ao modo (1,3) ou $\beta/\alpha_0 = 0,75$. Aparentemente, este resultado não está de acordo com a teoria linear que prediz um número de onda transversal dominante mais elevado para este número de Mach de convectivo (figura 6). Todavia, é importante considerar que o sistema que envolve o perfil base se torna alargado devido aos efeitos viscosos e distorce a figura. No espaço físico (figura 37), o sistema mostra uma estrutura consistente com a característica tridimensional discutida anteriormente. A figura mostra uma estrutura simétrica e os resultados mostram uma assimetria desprezível a qual poderia ser resultante do erro de discretização. É importante enfatizar que estes resultados em regime linear podem ser usados na análise do regime não linear.

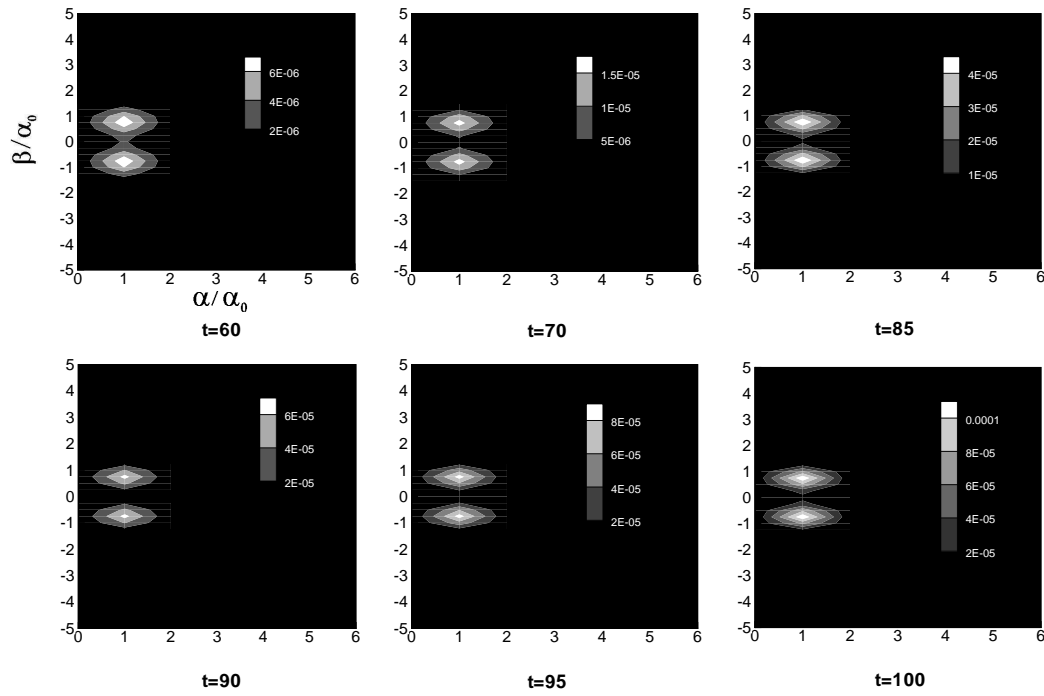


Figura 36: Análise espectral da evolução linear da componente de velocidade normal para $M_c = 0,8$ e $Re=1000$.

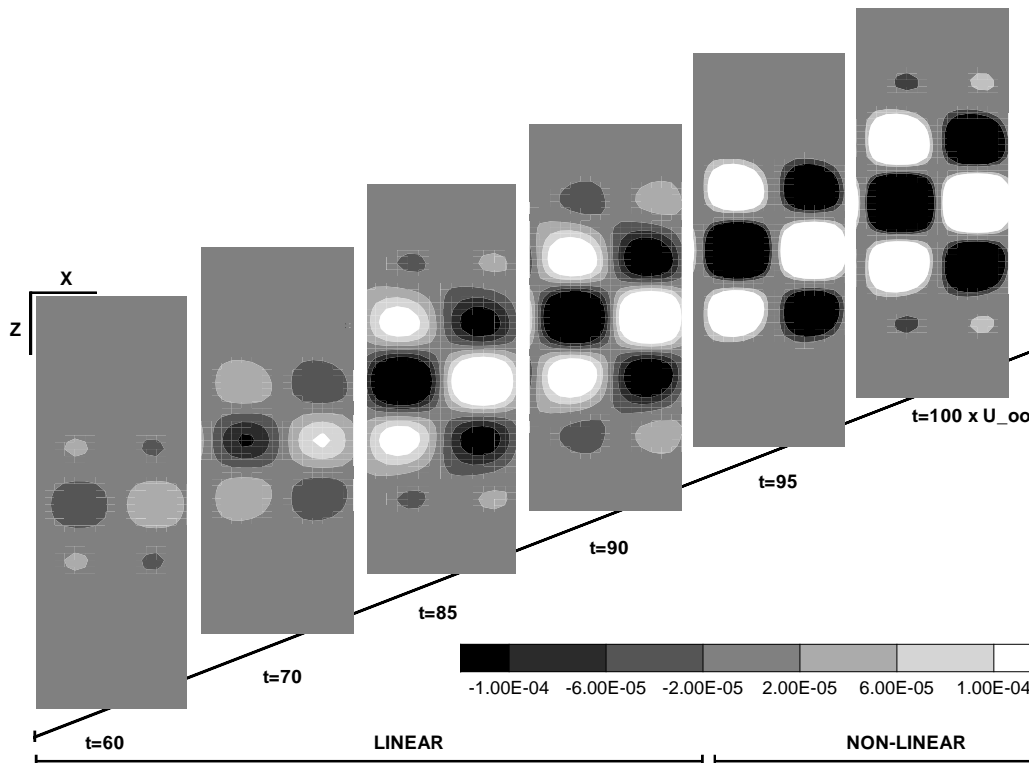


Figura 37: Evolução linear da componente de velocidade normal para $M_c = 0,8$ e $Re=1000$.

6.4 Trens de Ondas Moduladas Não Lineares

As simulações com o problema de camada de mistura foram estendidas para simular o fenômeno em regime não linear. Neste caso foram adotadas ondas com amplitudes maiores para reproduzir os efeitos não lineares. Nesta etapa final, foram simulados dois tipos de escoamento. Similar aos resultados previamente discutidos foram simulados escoamentos com número de Mach de 0,1 à 0,8. Mais uma vez o objetivo foi investigar a influência da compressibilidade dentro do contexto de ondas fortemente moduladas.

As figura 38 e 39 mostram a evolução dos modos oblíquos. Tem-se nestas figuras a amplitude da componente de velocidade normal em função do tempo adimensional para os modos bi- e tri-dimensionais. Mesmo aumentando a amplitude dos modos bi- e tri-dimensionais ainda é possível ver o crescimento exponencial em regime linear. Ainda neste regime a onda que apresenta maior taxa de amplificação é o modo (1,0). A interação não linear já começou a ter efeito logo nos tempos adimensionais em torno de 30. Neste período a taxa dos modos com β mais elevados começa a aumentar. As taxas destes modos cresceram significativamente superando a taxa do modo bidimensional (1,0) que em regime linear predominou no escoamento. Também é notório que a interação não linear influencia levemente os primeiros harmônicos que corresponde aos modos (1,1) e (1,2). Os efeitos da interação não linear começaram a afetar o escoamento a partir do modo (1,3) no tempo adimensional igual à 40. A partir da interação não linear o escoamento revela um novo modo predominante no escoamento. Neste caso não existe mais um crescimento exponencial, portanto, se torna difícil extrair as taxas de crescimento. De forma qualitativa pode-se eleger o modo (1,4) como o de maior taxa. A conclusão é que em regime linear o escoamento seleciona o modo bidimensional como o que mais cresce enquanto que no regime não linear todos os modos crescem com uma taxa de amplificação similar. Todavia em regime não linear o modo (1,4) cresceu mais que o modo bidimensional.

No caso da simulação para $M_c = 0,8$ pode-se notar um comportamento diferente (figura 39). Mais uma vez o parâmetro adotado foi a componente normal (v) ao longo

do tempo adimensional. Nestas figuras pode-se observar algumas similaridades com a análise anterior (figura 38). Apesar da figura 39 revelar o modo (1,3) como o harmônico oblíquo que mais cresceu nos estágios lineares, pode ser notado que novamente a interação não linear - que se inicia em $t \approx 42$ no modo (1,12) - forneceu um escoamento diferente onde este começa a selecionar como predominante os modos mais elevados. Diferente da simulação para $M_c = 0,1$ onde todos os modos mostram aproximadamente a mesma taxa de amplificação, aqui foi notório que os modos mais elevados (1,8), (1,10) e (1,12) foram os modos que mais amplificaram superando em amplitude a onda bidimensional e os modos menores como por exemplo o modo (1,3) - modo que amplificou mais rápido em regime linear. A conclusão é que em regime não linear a predileção por uma estrutura tridimensional é maior com o aumento do número de Mach do que em regime linear.

Novamente a análise através da decomposição em modos de Fourier e do plano físico xz na posição central do domínio ($y=0$) foi realizada. A figura 40 mostra o espectro de energia para $M_c = 0,1$. Nos estágios iniciais da sequência de figuras, o modo da onda bidimensional é o modo dominante no escoamento. Este comportamento está de acordo com a teoria linear. Ao invés disso, para $M_c = 0,8$ o modo dominante é um tridimensional (figura 42). A figura 41 mostra o espaço físico para $M_c = 0,1$. Nestas figuras podemos observar uma estrutura tridimensional curva. Também pode-se notar que essencialmente dentro do regime linear, os picos de máxima amplitude são observados fora do centro do domínio computacional na direção normal. Este comportamento também foi encontrado nos trabalhos de Medeiros (2004) e Mack (1984) dedicados ao estudo de camada limite laminar.

No regime não linear para $M_c = 0,8$ o comportamento se mostrou bem diferente com o aumento do número de Mach. Embora uma investigação mais minuciosa revele algumas similaridades. Nos estágios iniciais do regime não linear o escoamento é caracterizado por uma separação em dois ao longo da linha central do escoamento. Para $M_c = 0,8$ isto se torna claro pela comparação com as figuras 41 e 43. Com o desenvolvimento da não linearidade, a estrutura curva e as perturbações sofrem um tipo de alargamento em direção aos contornos. Resultados similares com o a separação em dois e o alargamento

foram encontrados no trabalho de Medeiros (2004) para camada limite. Além disso, é interessante notar o fato que para alto número de Mach subsônico a estrutura é significativamente mais confinada na direção transversal do escoamento e, conseqüentemente, mostra um comportamento mais oscilatório nesta direção.

A investigação do escoamento em regime não linear pode ser mais bem discutida através do uso do domínio espectral. A seqüência de figuras 40 mostra o espectro de energia para número de Mach igual à 0,1. Inicialmente pode-se observar que em regime não linear a banda do espectro de energia é alargada e, também pode ser notado, a formação de dois picos de energia de amplitude inferior localizados em número de ondas transversais diferentes de zero. Em seguida, estes picos do espectro de energia referentes aos números de ondas transversais maiores começam a crescer. Para $M_c = 0,8$, o regime não linear também produz picos espectrais para números de ondas elevados, bem maiores que os encontrados para $M_c = 0,1$. Neste caso, estes picos espectrais não podem ser atribuídos a instabilidade secundária estudada por Pierrehumbert e Widnall (1982) pois não possuem $\beta = 1,5\alpha_0$. Apesar dos números de ondas serem diferentes de um Mach para outro, o número de picos espectrais observados no estágios finais são os mesmos. Para $M_c = 0,8$ a banda de ondas primárias eventualmente decaie devido ao escoamento se tornar estável. Apesar disso, a não linearidade influencia bastante o escoamento produzindo harmônicos bidimensionais na direção longitudinal do escoamento. Estas características não foram constatadas nas simulações realizadas para $M_c = 0,1$.

O efeito do número de Mach foi mais bem investigado nesta etapa. Similar aos resultados apresentados previamente, o número de Reynolds e o número de onda longitudinal foram selecionados de acordo com o Mach simulado. Além disso, a extensão do domínio computacional na direção transversal também variou com o número de Mach. Em todos os casos estudados nesta etapa o menor número de onda transversal correspondia a 1/4 do número de onda longitudinal excitado. Os resultados com números de ondas transversais baixos não mostraram nenhum novo comportamento do escoamento. Estes resultados são mostrados nas figuras 44 e 45. Estas figuras mostram respectivamente o espaço espectral e físico do caso em questão. Em geral, os resultados indicam algumas similaridades entre os

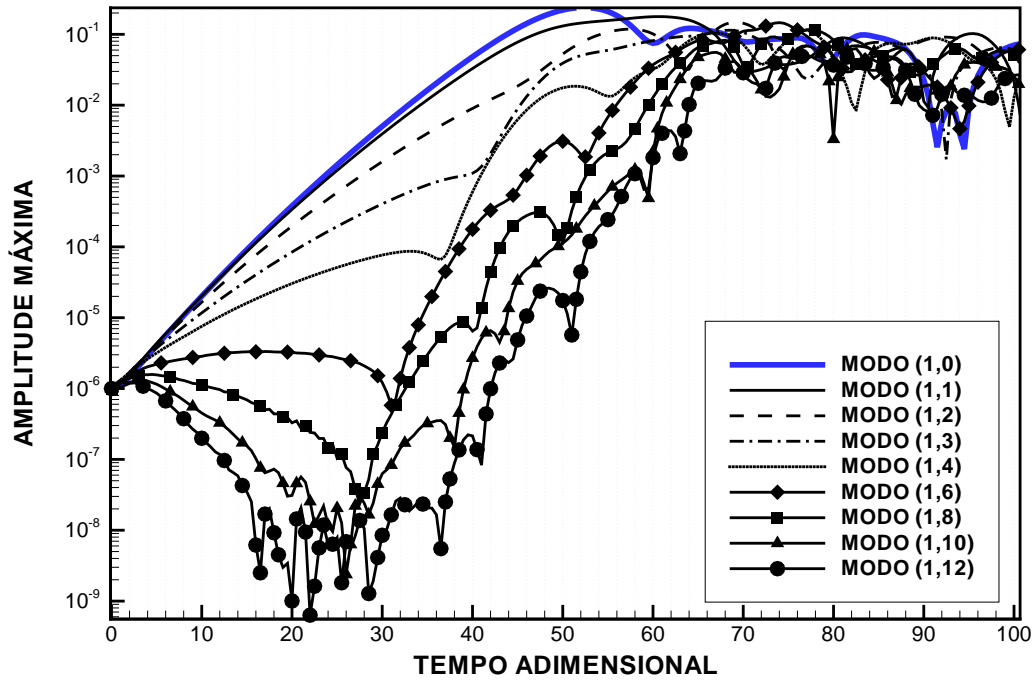


Figura 38: Evolução linear e não Linear da amplitude de modos oblíquos de um trem de ondas fortemente modulado para $M_c = 0,1$ e $Re = 500$.

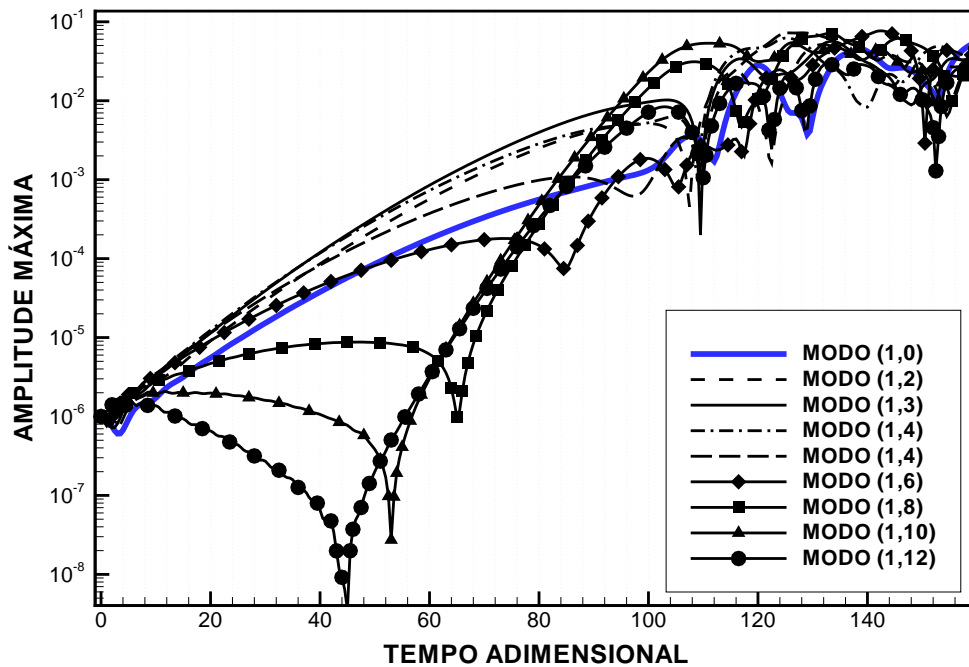


Figura 39: Evolução linear e não Linear da amplitude de modos oblíquos de um trem de ondas fortemente modulado para $M_c = 0,8$ e $Re = 1000$.

diferentes números de Mach selecionados para esta análise. Simulações com alto número de Mach revelaram a formação de números de ondas transversais altos. Todavia, esta

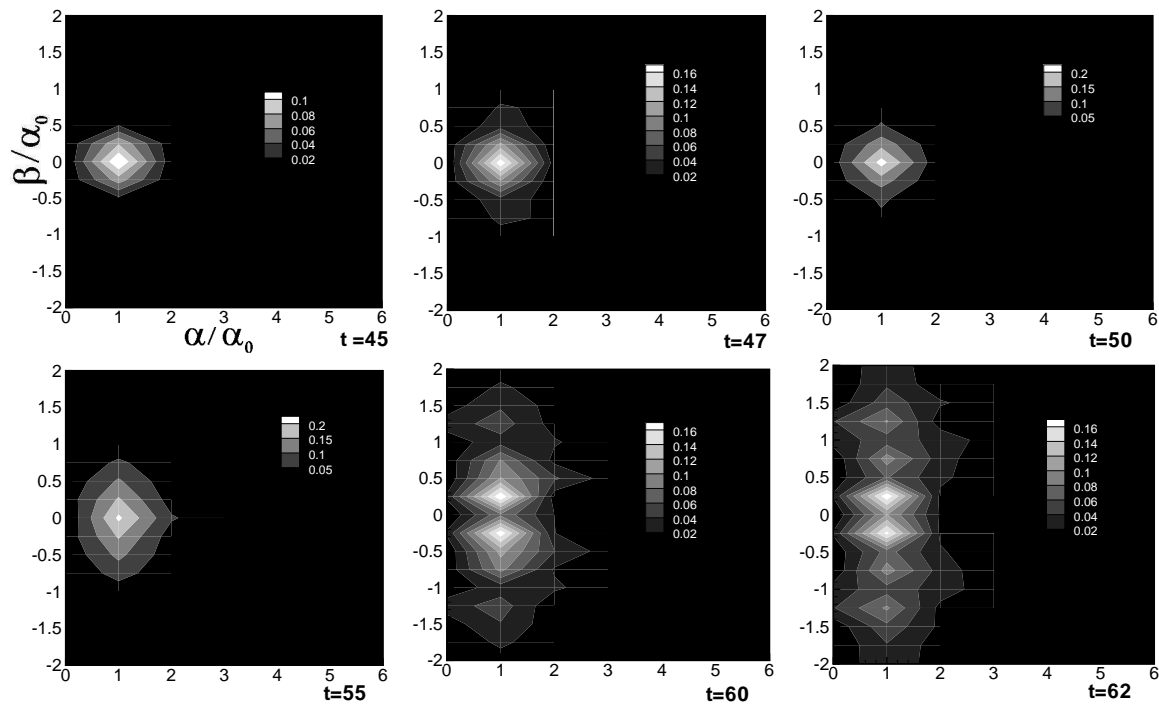


Figura 40: Evolução espectral de trens de onda fortemente modulado para $M_c = 0, 1$ e $Re = 500$.

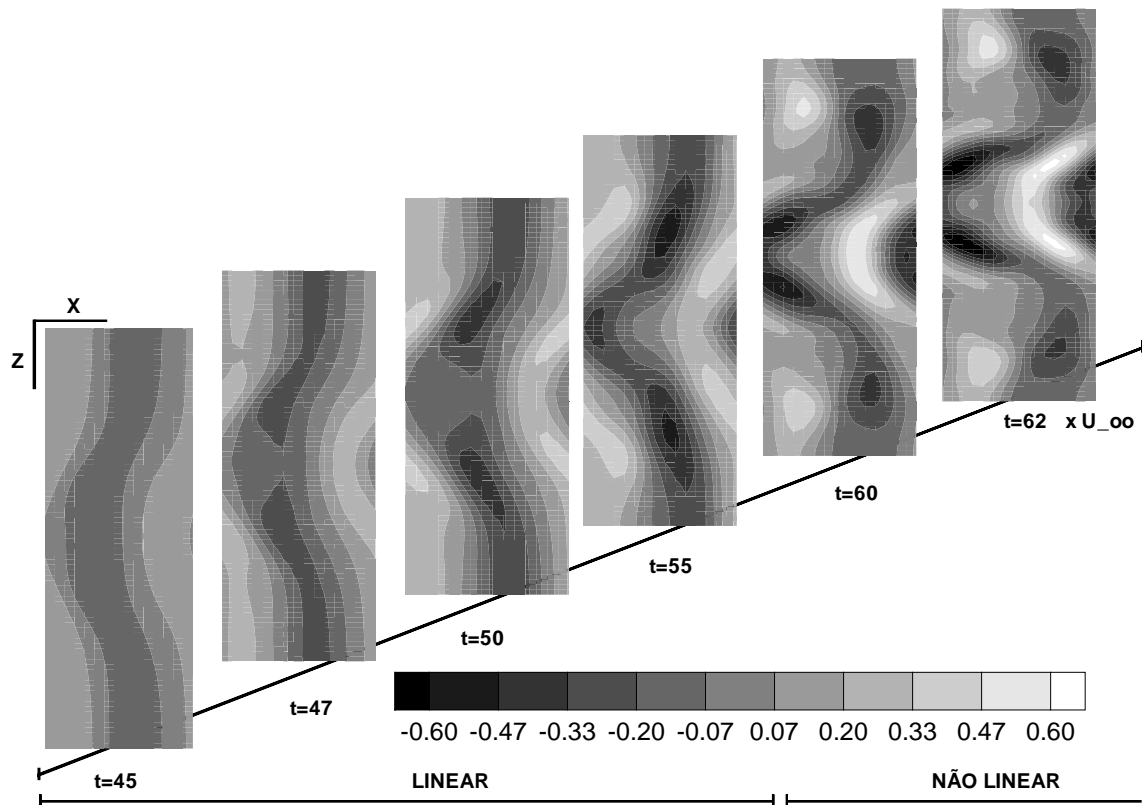


Figura 41: Evolução não linear para $M_c = 0, 1$ e $Re = 500$. Os tempos adimensionais apresentados nesta sequência corresponde 45, 47, 50, 55, 60 e 62.

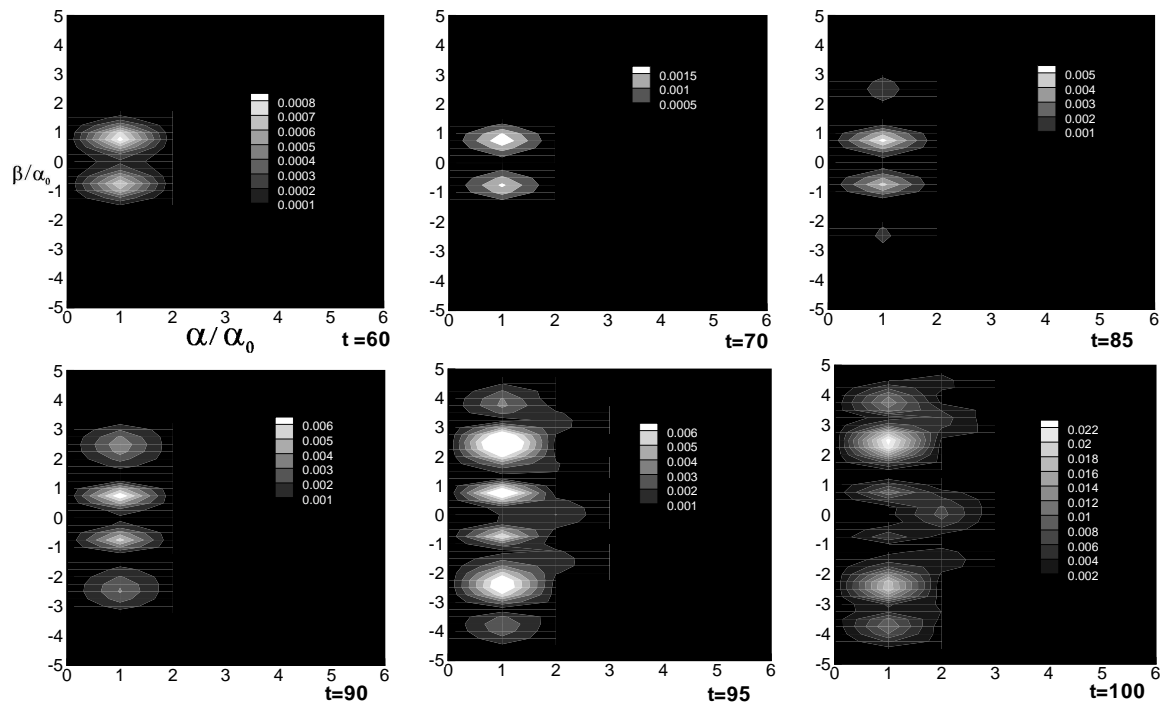


Figura 42: Evolução espectral de trens de onda fortemente modulado para $M_c = 0,8$ e $Re = 1000$.

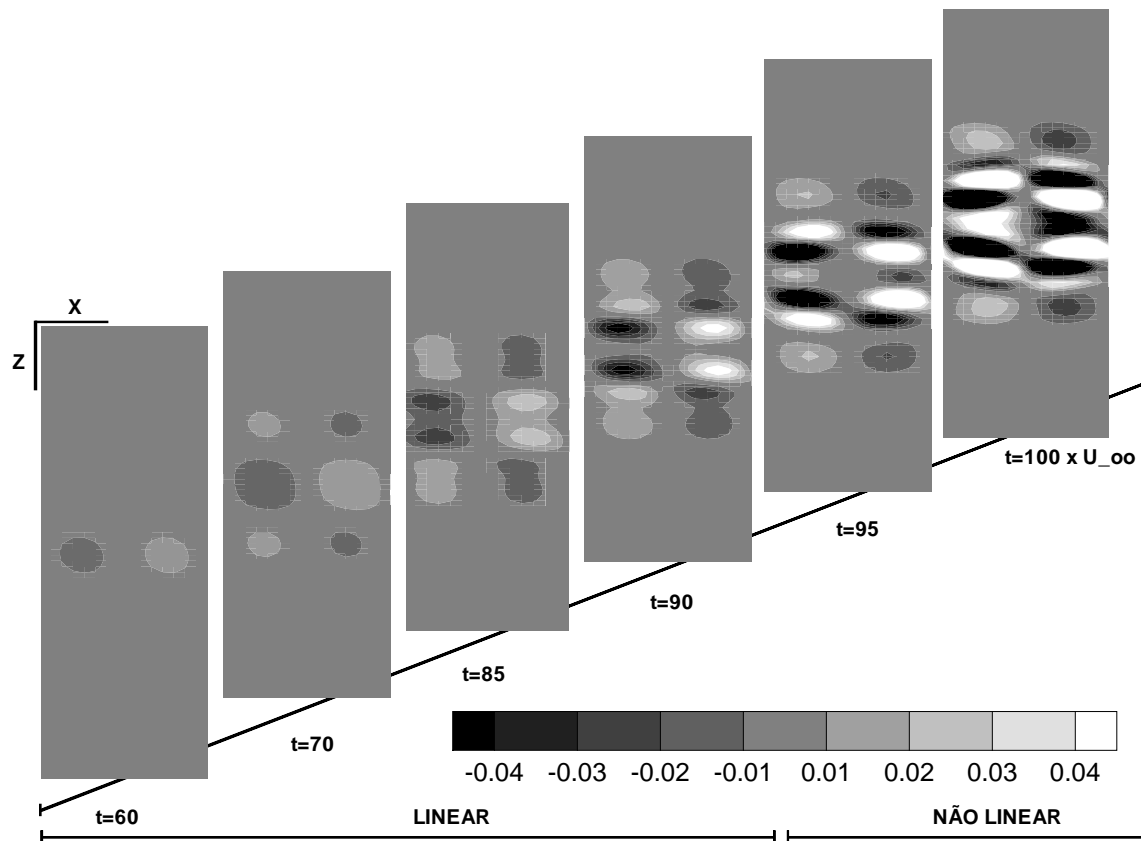


Figura 43: Evolução não linear para $M_c = 0,8$ e $Re = 1000$. Os tempos adimensionais apresentados nesta sequência corresponde 60, 70, 85, 90, 95 e 100.

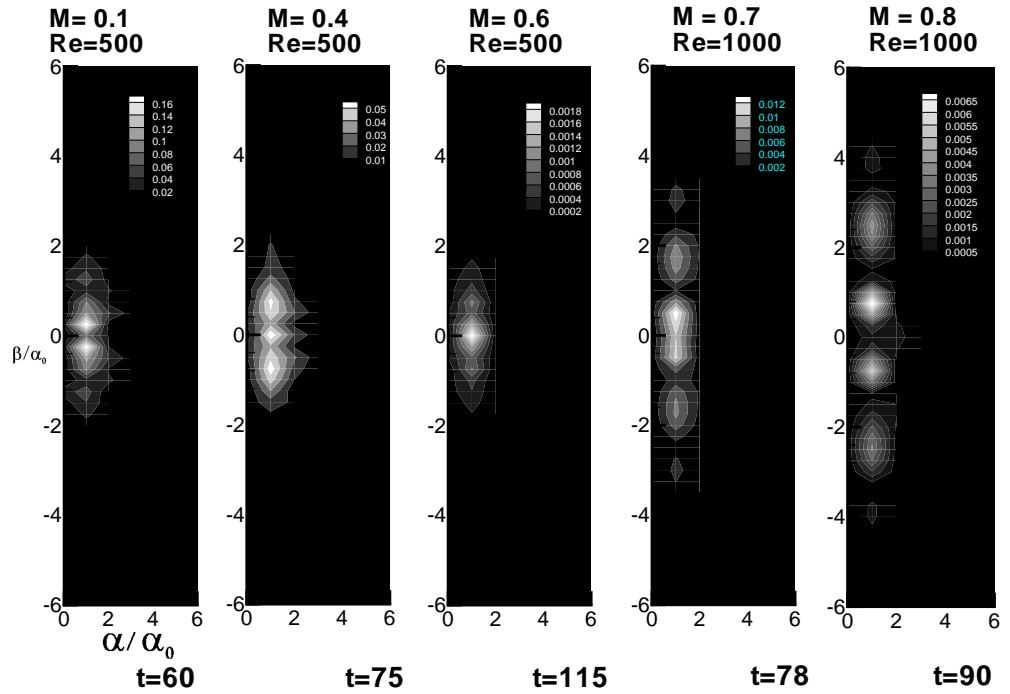


Figura 44: Comparação do espectro em regime não linear para diferentes números de Mach convectivo.

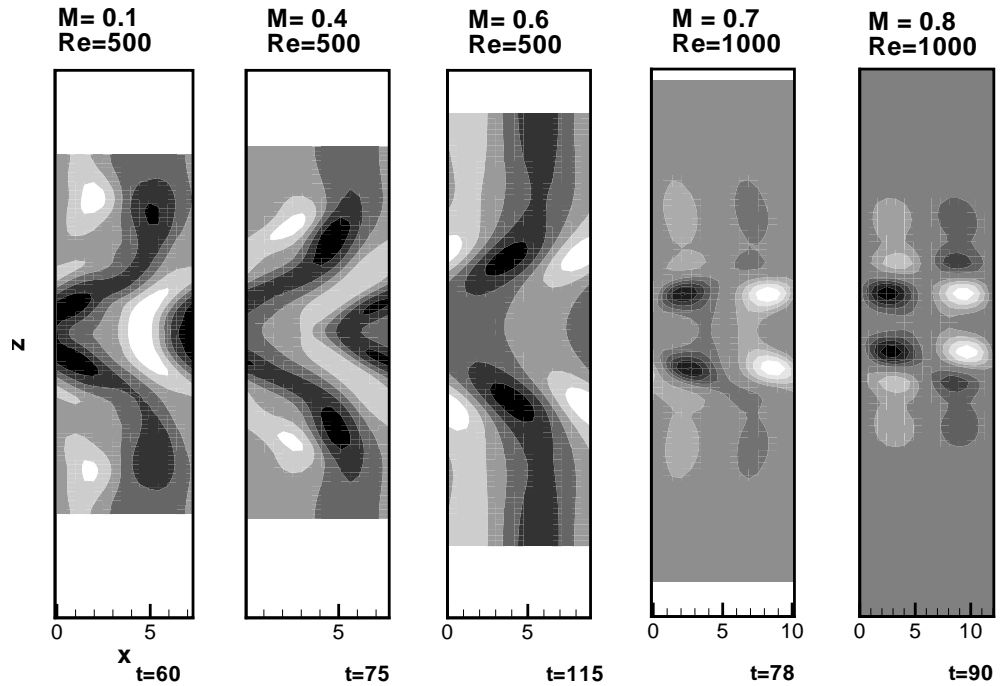


Figura 45: Comparação da estrutura não linear para diferentes números de Mach convectivo.

conclusão deve apenas considerar que este comportamento foi um reflexo da variação do número de Reynolds e do número de onda. Apesar de ser interessante simular este tipo de escoamento com estas variações do número de Reynolds e onda longitudinal, não ficou

claro qual seria a melhor aproximação para reproduzir este tipo de fenômeno. Apesar das dificuldades, estes resultados refletem o que poderia ser provavelmente o cenário para evolução não linear com baixo número de Reynolds.

Resumo e Conclusão

O presente trabalho numérico consistiu na simulação do fenômeno físico de instabilidade hidrodinâmica de camada de mistura com desenvolvimento temporal. O estudo proposto no presente trabalho contempla uma parte de um projeto mais ambicioso que visa estudar escoamentos transicionais com desenvolvimento espacial em geometrias relativamente complexas. No presente projeto de doutorado a pesquisa avançou em direção ao estudo fenomenológico de escoamentos altos subsônicos influenciados pelos efeitos de compressibilidade ($M < 0,8$). A idéia principal foi investigar a evolução linear e não linear de trens de ondas fortemente moduladas. A evolução deste fenômeno com a introdução de ondas moduladas é considerado o modelo mais próximo do fenômeno que ocorre em um cenário real. Em outras palavras, o escoamento perturbado na natureza apresenta uma variedade de ondas das mais diversas frequências. Este tipo de estudo é pouco realizado em âmbito nacional e mesmo a comunidade de pesquisa internacional carece de esforços direcionados nesta direção.

O problema de camada de mistura temporal se mostrou uma ferramenta eficaz na implementação inicial do código devido à algumas simplificações características do problema, como por exemplo, o uso de condições de contorno periódicas e a utilização de domínios computacionais relativamente simples. As equações usadas para modelar este fenômeno físico são as equações de Navier-Stokes compressíveis. As variáveis primitivas foram decompostas em um escoamento base e um escoamento perturbado. Para o escoamento

base a função tangente hiperbólica que usa a média das velocidades nas extremidades do escoamento para calcular a variação da velocidade ao longo da coordenada y foi selecionada. Este perfil de velocidade é instável a perturbações, pois apresenta um ponto de inflexão (RAYLEIGH, 1880). O perfil de temperatura média inicial pode ser determinado pela solução da equação da energia para camada limite compressível (White (1974)) com o número de Prandtl unitário. Já para as perturbações iniciais foram adotadas funções gaussianas que apresentam máxima amplitude no interior do domínio na coordenada y e tendem a zero em direção ao escoamento na corrente livre. Nas direções longitudinal e transversal as perturbações eram periódicas.

Foi necessário ainda adotar métodos numéricos para aproximar as derivadas temporais e espaciais nas equações. As derivadas temporais responsáveis pelo comportamento transiente do escoamento foram discretizadas através de um método de integração temporal do tipo Runge-Kutta. Apesar de ser um método condicionalmente estável, este tipo de método trabalha com quatro passos ao longo da integração temporal e gera resultados com quarta ordem de precisão. A discretização das derivadas espaciais foi gerada através do método das diferenças finitas. No presente trabalho foram adotados métodos compactos de alta ordem de precisão que são derivados do método das diferenças finitas clássico. Maiores detalhes podem ser encontrados na seção 4. Estas técnicas ainda são relativamente pouco difundidas na comunidade de engenharia aeroespacial no Brasil e a indústria nacional certamente necessitará de capacitação neste tema no futuro.

Para este estudo foram adotadas condições de contorno periódicas na direção longitudinal do escoamento para a simulação com desenvolvimento temporal. Condições periódicas também foram utilizadas na direção transversal do escoamento. Na coordenada y foi adotada uma condição de contorno do tipo deslizamento livre e impermeabilidade comumente conhecida na literatura como *free-slip*. Esta condição corresponde ao escoamento na região da corrente livre. A seção 3.4 fornece uma revisão detalhada sobre o tema. Nesta direção foram usados métodos de sexta ordem de precisão nos pontos no interior do domínio computacional e segunda ordem nos pontos próximos às fronteiras. Devido à região de cisalhamento ser distante do escoamento livre estas aproximações de baixa

ordem podem ser adotadas. Por último, juntamente com as aproximações usadas foram adotados filtro compactos para evitar altas frequências geradas na simulações (seção 4.3). Lele (1992) mostra que através de um técnica de resolução espectral de esquemas numéricos para filtros é possível especificar condições para a curva da função de transferência utilizada pelo filtro numérico apesar de ser um filtro de quarta ordem. Os coeficientes do filtro são calculados de acordo com a especificação mais precisa para a execução do filtro. Lele em seu artigo faz comparações entre os resultados com vários ordens de filtros e prova que entre os filtros testados, o filtro de quarta ordem é o mais preciso.

Além das especificações dos métodos e das condições de contorno foram adotados algumas outras técnicas computacionais para melhorar a qualidade dos resultados numéricos e ao mesmo tempo reduzir o custo computacional. Para isto, uma malha não uniforme foi adotada nas presentes simulações (SANDHAM; REYNOLDS, 1990; GAMET et al., 1999; FORTUNÉ, 2000; COLLIER; GHESQUIERES, 2003; ZHONG; A.; TATINENI, 2003). O objetivo principal foi trabalhar com uma resolução maior em regiões onde as variações do fenômeno ocorrem com maior intensidade. No caso da camada de mistura a região de cisalhamento se concentra no centro do domínio computacional na direção normal e, portanto, foi necessário melhorar a resolução no centro e gerar um estiramento em direção a corrente livre. Além do mais, existe a preocupação de implementar condições de contorno no domínio que evitem a reflexão de ondas, como por exemplo, as ondas acústicas. Este tipo de estiramento dissipa as ondas evitando que estas alcancem a corrente livre e sejam refletidas de volta para o interior contaminando os resultados numéricos com oscilações não físicas. Alguns cuidados foram necessários para se gerar este tipo de estiramento. Alguns testes foram realizados com esta ferramenta e foram publicados em Germanos e Medeiros (2006). Neste trabalho a taxa de amplificação de perturbações com a malha uniforme e não uniforme foram comparadas e os resultados mostram que a taxa de amplificação obtida numericamente melhorou com o uso de malhas não uniformes. Os resultados numéricos concordaram com os resultados teóricos. Ainda neste artigo algumas figuras mostram qualitativamente que ondas geradas na região de cisalhamento são fortemente suavizadas na região de estiramento.

7.1 Verificação do Código

Os principais testes com o fenômeno de camada de mistura foram realizados através da teoria linear e não linear de estabilidade hidrodinâmica. Neste caso o escoamento perturbado foi a evolução temporal de ondas bi- e tri-dimensionais monocromáticas. Testes alternativos foram realizados através de um problema mais simplificado como é o caso do problema de ondas acústicas lineares (GERMANOS; MEDEIROS; SOUZA, 2004a; GERMANOS; SOUZA, 2006). Este problema foi de grande contribuição nos estágios iniciais da implementação do presente código. Com estes testes foi possível verificar a ordem das derivadas espaciais geradas pelas aproximações compactas. A formulação das equações de Navier-Stokes também foi verificada e, por último, este problema propiciou a implementação e verificação das condições de contorno periódicas usadas nas direções longitudinal e transversal.

A teoria linear de instabilidade hidrodinâmica foi utilizada para verificar o presente código através do problema de camada de mistura. Nestas simulações o interesse de estudo foi a investigação do efeito da compressibilidade durante a evolução do fenômeno. De acordo com a teoria linear é esperado que a taxa de crescimento diminua em relação ao aumento do número de Mach convectivo (MICHALKE, 1964; LESSEN; FOX; ZIEN, 1965; BLUMEN; DRAZIN; BILLINGS, 1975; SANDHAM; REYNOLDS, 1989, 1990). Primeiramente estes resultados foram reproduzidos para verificar a implementação do código. Os resultados numéricos concordaram favoravelmente com a teoria linear. Apesar dos bons resultados obtidos com este tipo de teste, ainda foi necessário avaliar o código em regime não linear. Detalhes sobre a teoria não linear podem ser encontrados em (BAYLY; ORSZAG; HERBERT, 1988). Foi possível avaliar o código através da análise qualitativa de alguns fenômenos clássicos em instabilidade hidrodinâmica, como por exemplo, a formação dos vórtices de Kelvin-Helmholtz. Por se tratar de um escoamento suscetível a perturbações pequenas, testes foram executados com a introdução de perturbações onde, de acordo com a teoria, eram esperados certos comportamentos.

Nesta análise alguns fenômenos puderam ser investigados como o crescimento de per-

turbações introduzidas no escoamento até a formação de estruturas de vórtices (BIRCH; EGGERS, 1973; BROWN; ROSHKO, 1974). Por fim, foram realizadas simulações com a introdução de perturbações com modos subharmônicos com amplitude inferiores a perturbação do modo fundamental. O resultado disso foi que após um determinado tempo as perturbações subharmônicas começaram a crescer e se destacar no escoamento e devido ao comprimento de onda maior destas perturbações estes vórtices começam a girar um em torno do outro para iniciarem o processo de emparelhamento. Este fenômeno é uma instabilidade secundária da camada de mistura. Também foram realizadas simulações sem a introdução destes modos secundários. Embora os vórtices tenham emparelhado neste caso, teoricamente os vórtices não deveriam ter tido este comportamento, pois o modo subharmônico não foi excitado. Uma explanação para que o fenômeno ocorra mesmo sem a introdução deste modo é que o erro de truncamento também pode disparar este fenômeno. Neste caso o emparelhamento acontece com uma defasagem considerável de tempo em relação àquele em que houve a excitação do modo subharmônico. Isso foi um indício satisfatório de que o erro numérico gerado pelas aproximações era pequeno.

Um interessante teste foi realizado juntamente com as simulações anteriores. Nos estágios iniciais da implementação do presente código foi adotada a hipótese de escoamento isentrópico (Eq. 3.16). Neste caso, combinando a equação de energia com a equação de estado para este tipo de processo as equações de conservação são significativamente simplificadas. Isto foi de grande contribuição nos estágios iniciais da implementação do código, pois no início foi necessário simular fenômenos mais simplificados até alcançar os fenômenos transientes mais complexos que estão sendo simulados no presente momento. Ainda neste projeto os testes com esta hipótese foram mostrados na seção de verificação. Os resultados com a hipótese de escoamento isentrópico concordaram com a teoria linear para o número de Mach convectivo (M_c) até aproximadamente 0,4. Além disso, os estágios da evolução do problema de camada de mistura foram comparados para os mesmos tempos adimensionais em simulações com e sem a hipótese isentrópica. Desta forma, pôde ser concluído que em regime não linear também houve concordâncias para M_c até 0,4. Isto mostra que a hipótese de escoamento isentrópico pode ser usada para

baixo Mach. Aumentando o Mach convectivo os resultados mostram certa defasagem de tempo em relação a evolução do problema. Isto era esperado, pois com o aumento do Mach as variações de entropia do sistema tendem a aumentar também.

Novamente esta etapa de verificação foi estendida para considerar o fenômeno tridimensional. Cabe ressaltar que nesta etapa não foi utilizada a hipótese isentrópica. A formulação tridimensional já havia sido avaliada com o problema de ondas acústicas e com os testes realizados através da teoria linear tridimensional. Neste caso havia sido realizada uma varredura da taxa de amplificação para diferentes número de Mach convectivo e assim, foi possível comprovar a correta implementação do código em três dimensões. A limitação destes testes foi que apenas os termos lineares das equações de conservação foram investigados. Novamente foi necessário realizar testes para verificar os termos não lineares que correspondem aos termos convectivos das equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia. Devido à simulação tridimensional necessitar de grandes malhas computacionais, uma análise objetivando uma malha otimizada foi realizada. A meta foi escolher uma malha adequada para o problema que ao mesmo tempo não oferecesse um custo elevado. A perturbação introduzida foi uma onda bidimensional juntamente com um par de ondas oblíquas (instabilidades monocromáticas). Para reproduzir o fenômeno de instabilidade secundária mostrado por Pierrehumbert e Widnall (1982), Sandham e Reynolds (1990) foram realizadas simulações com o objetivo de investigar o efeito da diferença de fase entre as ondas bi- e tri-dimensionais.

Após esta análise e baseado nestes resultados foram executadas outras simulações com objetivo de reproduzir alguns fenômenos de instabilidade secundária excitados pelos modos fundamentais e subharmônicos. Conseqüentemente os resultados puderam ser comparados de forma qualitativa com os resultados apresentados por Pierrehumbert e Widnall (1982), Sandham e Reynolds (1990). Neste tipo de simulação pode ser investigado a evolução dos modos expansivos e translativos baseado na diferença de fase entre as ondas bi- e tri-dimensionais. Os resultados concordaram qualitativamente com os trabalhos teóricos e numéricos apresentados por (PIERREHUMBERT; WIDNALL, 1982; SANDHAM; REYNOLDS, 1990; FORTUNÉ, 2000; COLLIER; GHESQUIERES, 2003). Também foi possível reproduzir

e fenômeno com a excitação do modo helicoidal que corresponde à excitação do modo oblíquo subharmônico. Por último, o problema evoluiu até a formação de rolos oblíquos entrelaçados conhecidos na literatura como *braids*. Baseado nas comparações realizadas com a teoria linear e os resultados qualitativos visando a reprodução de alguns fenômenos clássicos em instabilidade hidrodinâmica não linear, o autor deste trabalho julga que o presente código foi submetido há uma quantidade satisfatória de testes que tornou possível o início da próxima etapa do projeto que consiste na simulação do fenômeno de camada de mistura através da utilização de trens de ondas oblíquos fortemente modulados.

7.2 Instabilidade Secundária

A investigação numérica apresentada anteriormente foi essencial para verificar o presente código. Estes testes garantiram que os resultados numéricos obtidos estavam de acordo com os trabalhos citados na revisão bibliográfica (Capítulo 2). Este tipo de teste é importante, pois no grupo, o presente projeto foi responsável pela migração de estudos voltados à fluidos incompressíveis para regimes onde a compressibilidade influencia significativamente o escoamento. Todavia o escoamento a ser simulado ficou restrito a velocidades subsônicas. Daqui em diante, os estudos apresentados foram originais e consistem em simular o fenômeno de instabilidades hidrodinâmicas de uma forma mais complexa. Ao invés de usar ondas monocromáticas na presente etapa as instabilidades utilizadas foram fortemente moduladas com o objetivo de simular um fenômeno mais realístico.

Inicialmente foram realizadas simulações com o fenômeno de camada de mistura para reproduzir o fenômeno de instabilidade secundária tridimensional e comparar os resultados com o modelo teórico fornecido por Pierrehumbert e Widnall (1982). A idéia era verificar o modelo fornecido por Pierrehumbert e Widnall (1982). As primeiras simulações foram realizadas para número de Mach baixo ($M = 0,1$). Neste caso os efeitos compressíveis podem ser considerados desprezíveis o que caracterizaria um escoamento incompressível. A simulação foi iniciada com a introdução de um modo fundamental bidimensional. De acordo com os resultados mostrados anteriormente, este modo tende a crescer e a saturar

na forma de vórtices co-rotativos. Em seguida foram introduzidos 12 modos oblíquos harmônicos no tempo de saturação destes vórtices originados pela instabilidade primária. Em geral o menor modo correspondia à $\beta/\alpha_0 = 0,25$, enquanto que modo mais elevado correspondia $\beta/\alpha_0 = 3,0$. A amplitude assumida foi pequena para garantir um crescimento linear no início da simulação. Baseado no número de Mach e Reynolds, resultados preliminares mostram o tempo adimensional em que o escoamento satura. Neste caso foi assumido um número de Reynolds relativamente baixo ($500 < Re < 1000$). Também foi assumido o número de Prandtl unitário para poder usar a solução da equação de energia na condição inicial (WHITE, 1974).

A partir deste estágio onde os modos oblíquos são excitados a taxa de amplificação destes modos puderam ser extraídas para avaliar qual modo amplifica mais rápido. Pierrehumbert e Widnall (1982) predizem que o modo mais instável corresponde ao comprimento de onda oblíquo de $\frac{2}{3}$ do comprimento de onda longitudinal. Portanto, foi possível comprovar a teoria de Pierrehumbert e Widnall (1982). Para reproduzir o fenômeno de instabilidade secundária tridimensional foram selecionados dois tempos diferentes para disparar os modos oblíquos. A idéia foi verificar o quanto a mudança no tempo de disparo das ondas oblíquas poderia afetar a taxa de amplificação dos modos e/ou mesmo o modo que amplificava mais rápido. Apesar das taxas variarem um pouco, como era previsto os resultados obtidos numericamente foram favoráveis com o modelo teórico em ambos os casos. Realmente foi encontrado que o modo que mais crescia correspondia ao modo (1,6) ou $\beta/\alpha_0 = 1,5$.

Simulações também foram realizadas aumentando o número de Mach e conclui-se que os modos que mais crescia com este aumento eram mais próximos do modo bidimensional. Para M_c igual à 0,4 o modo que mais cresceu foi o modo $\beta/\alpha_0 = 1$, enquanto que para M_c igual à 0,8 o modo que mais cresceu foi $\beta/\alpha_0 = 0,1$. Cabe ressaltar que este tipo de escoamento se comporta de forma contrária aos resultados mostrados com a teoria linear com ondas oblíquas excitadas juntos com as instabilidades primárias como é o caso da simulação com as ondas monocromáticas e os trens de ondas oblíquos. Além de verificar o código através do modelo teórico, as presentes simulações são reconhecidas como um

trabalho numérico original para escoamentos com baixo número de Mach. Além disso, as simulações também contribuíram com o estudo do fenômeno no que tange a investigação dos efeitos da compressibilidade neste tipo de escoamento.

7.3 Trens de Ondas Moduladas

Como meta final do presente projeto de pesquisa foram realizadas simulações de uma camada de mistura através da evolução linear e não linear de ondas oblíquas planas fortemente moduladas. O objetivo destas simulações foi reproduzir o fenômeno de uma forma mais realista. Diferente das simulações anteriores em que as perturbações tridimensionais são disparadas no momento de saturação do escoamento, nesta etapa as ondas oblíquas são excitadas no início da evolução temporal. A idéia principal foi investigar a influencia da compressibilidade na evolução das instabilidades hidrodinâmicas e, também o efeito de modulação utilizado com as ondas oblíquas.

A análise iniciou-se com simulações preliminares para avaliar a taxa de crescimento das perturbações bidimensionais primárias. Em seguida, foram executadas simulações com os trens de ondas em regime linear para estudar a faixa de ondas mais instáveis e, conseqüentemente, garantir que o código estava gerando resultados corretos. De acordo com a teoria linear a taxa de amplificação das ondas bidimensionais deve diminuir com o aumento o número de Mach convectivo, enquanto que, inversamente, as ondas oblíquas tendem a amplificar conferindo ao escoamento um forte caráter tridimensional. Apesar desta tridimensionalidade, a influência das ondas bidimensionais ainda é significativa. Este comportamento foi encontrado nos trabalhos de Sandham e Reynolds (1989, 1990).

Com o uso da teoria linear foi possível verificar os resultados numéricos obtidos com a evolução temporal de ondas moduladas. O comportamento do escoamento estava de acordo com a teoria. Pôde ser observado a predominância da bidimensionalidade em escoamentos para baixo número de Mach ($M_c < 0,30$), enquanto que com o aumento deste parâmetro as ondas oblíquas se tornaram dominantes conferindo ao escoamento uma estrutura tridimensional predominante. Além disso, esta análise forneceu subsídios

para explicar alguns comportamentos do escoamento nos estágios iniciais do regime não linear (MEDEIROS, 2004).

No regime não linear, o modelo proposto por Pierrehumbert e Widnall (1982) não reproduz corretamente as taxas de amplificação com o uso de ondas moduladas. A evolução dos trens de ondas para $M_c = 0,1$ ainda em regime não linear revelou resultados interessantes. Nesta investigação numérica pode ser observado a existência de uma predominância em relação a taxa de amplificação dos modos mais elevados após a interação não linear começar a influenciar o escoamento. Todavia, em comparação com as simulações para Machs mais elevados não existe um modo que apresenta uma taxa de crescimento que se destaca em relação aos outros modos. Apesar de haver um modo que apresentou uma taxa superior foi notório que todos os modos apresentam de forma qualitativa a mesma amplificação. Ao invés disso, na simulação para $M_c = 0,8$ pode ser notado que realmente os modos oblíquos maiores crescem com uma taxa bem superior ao modo bidimensional e os modos oblíquos mais elevados. Isto confirmou a predominância das ondas tridimensionais no escoamento para alto número de Mach.

Com esta análise do efeito do número de Mach pôde ser constatado que as taxas de amplificação obtidas com as ondas planas moduladas estão de acordo com os resultados anteriores simulados com o uso de ondas monocromáticas. Em paralelo, a extensão das perturbações oblíquas se torna cada vez mais confinada com o aumento do Mach. A origem do comportamento não linear não foi profundamente investigada, todavia, para $M_c = 0,1$, este fenômeno pode ser relacionado com a interação não linear discutida por Medeiros (2004) no contexto de ondas oblíquas fortemente moduladas na camada limite.

O efeito de modulação, nas direções longitudinal e transversal, não é frequentemente estudado por cientistas que trabalham com instabilidades hidrodinâmicas. De fato sob algumas circunstâncias, o escoamento é excitado por perturbações monocromáticas. O próprio filtro da instabilidade também ajuda a reduzir a modulação. Este é o caso do escoamento de separação em um degrau expensor bidimensional também classificado como fenômenos de camada de mistura. Todavia, sob outras circunstâncias, como é caso da se-

paração laminar da camada limite em uma asa bidimensional, ondas fortemente moduladas podem representar bem o modelo realístico. Inclusive, alguns experimentos, mostram que pacotes de ondas conduzem o escoamento a turbulência em alguns tipos de escoamento. Isto corresponde a motivação para o presente estudo numérico, que demonstra a importância do efeito da modulação na evolução de perturbações na camada de mistura. O tipo de modulação estudada foi relativamente restritiva, mas é esperado que estes resultados possam fornecer informações pertinentes para uma investigação de tipos mais genéricos de ondas moduladas.

Referências

- ADAM, Y. Highly accurate compact implicit methods and boundary conditions. *JCP*, v. 24, p. 10–22, 1977.
- ANDERSON, D. A.; TANNEHILL, J. C.; PLETCHER, R. H. *Computational Fluids Mechanics and Heat Transfer*. [S.l.]: Hemisphere Publishing Corporation, 1984. 591 p.
- BAYLY, B. J.; ORSZAG, S. A.; HERBERT, T. Instability mechanisms in shear-flow transition. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, v. 20, p. 487–526, 1988.
- BERNAL, L.; ROSHKO, A. Streamwise vortex structure in plane mixing layer. *J. Fluid Mech.*, p. 499–525, 1986.
- BIRCH, S. F.; EGGERS, J. M. A critical review of the experimental data for developed free turbulent shear layers. *NASA SP*, v. 321, p. 11–40, 1973.
- BLUMEN, W.; DRAZIN, P. G.; BILLINGS, D. F. Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. part 2. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 71, p. 305–316, 1975.
- BOGEY, C.; BAILLY, C.; JUVE, D. Numerical simulation of sound generated by vortex pairing in a mixing layer. *AIAA Journal*, v. 38, p. 2210–2218, 2000.
- BROWN, G.; ROSHKO, A. On density effects and large structure in turbulent mixing layers. *J. Fluid Mech.*, v. 64, p. 775–816, 1974.
- COLLATZ, L. *The numerical treatment of differential equations*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1966.
- COLLIER, J.; GHESQUIERES, C. *Computational of acoustic waves produced by two-dimensional mixing layers*. Tese (Doutorado) — Ecole Polytechnique FLM TU München, 2003.
- COLONIUS, T.; LELE, S. K.; MOIN, P. Boundary conditions for direct computational of aerodynamic sound generation. *AAIAJ*, v. 31, p. 1574–1582, 1992.
- COLONIUS, T.; LELE, S. K.; MOIN, P. Sound generation in a mixing layer. *J. Fluid Mech.*, v. 330, p. 375–409, 1997.
- FAR. 2006.
- FERZIGER, J. H.; PERIC, M. *Computational methods for fluid dynamics*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1997.

- FORTUNÉ, V. *Étude par Simulation Numérique Directe du rayonnement acoustique de couches de mélabge isothermes et anisothermes*. Tese (Doutorado) — Université de Poitiers, 2000.
- GAMET, L.; DUCROS, F.; NICOUD, F.; POINSOT, T. Compact finite difference schemes on non-uniform meshes. application to direct numerical simulations of compressible flows. *JFM*, v. 29, p. 159–191, 1999.
- GASTER, M. The physical process causing breakdown to turbulence. In: *12th Naval Hydrodynamics Symposium*. Washington: [s.n.], 1978.
- GERMANOS, R. A. C. *Simulação Numérica da Transição para Turbulência em uma Camada Limite Compressível sobre uma Placa Plana*. [S.l.], 2004.
- GERMANOS, R. A. C. *Simulação Numérica da Transição para Turbulência em uma Camada Limite Compressível sobre uma Placa Plana*. [S.l.], 2005.
- GERMANOS, R. A. C.; MEDEIROS, M. A. F. High-order non-uniform grid schemes for numerical investigation of compressible shear layers. In: *11th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*. Curitiba, Brazil: [s.n.], 2006.
- GERMANOS, R. A. C.; MEDEIROS, M. A. F.; SOUZA, L. F. Analysis of dispersion errors in acoustic wave simulations. In: *ENCIT*. Rio de Janeiro, Brazil: [s.n.], 2004.
- GERMANOS, R. A. C.; MEDEIROS, M. A. F.; SOUZA, L. F. Development of a computational code for studying compressible shear layer flow instabilities. In: *Proc. Conf. on IV school of transition and turbulence*. Porto Alegre, Brazil: [s.n.], 2004.
- GERMANOS, R. A. C.; SOUZA, L. F. Analysis of dispersion errors in acoustic wave simulations. *Thermal Engineering*, v. 5 - N 01, p. 47–53, 2006.
- GERMANOS, R. A. C.; SOUZA, L. F.; MEDEIROS, M. A. F. High-order non-uniform grid schemes for numerical investigation of the temporal instabilities of the compressible mixing layer. *JBSMS*, v. 100, p. 1–20, 2007.
- GOSTELOW, J. P. Effect of strong adverse pressure gradients and incident wakes on transition and calming. In: GOVINDARAJAN, R.; NARASIMHA, R. (Ed.). *IUTAM Symposium on Laminar-turbulent transition*. Bangalore - India: Springer-Verlag, 2004.
- GROPENGIESSER, H. Study on the stability of boundary layers and compressible fluids. *NASA TT*, F-12786, 1970.
- HIRSCH, C. *Higher order accurate difference solution of fluid mechanics problems by a compact differencing technique*. [S.l.]: JCP, 1975. 90–109 p.
- HIRSCH, C. *Numerical Computation of Internal and External Flows*. [S.l.]: Wiley, 1988.
- HOFFMANN, S. T. C. K. A. *Computational Fluid Dynamics for Engineers*. [S.l.]: Wichita, Kansas: Engineering Education System, 1993.
- ICAO. 2006.
- KLOKER, M.; RIST, R.; FASEL, H. Outflow boundary conditions for spatial Navier-Stokes simulations of boundary layer transition. *AIAA J.*, v. 31, p. 620–628, 1993.

- KOPAL, Z. *Numerical analysis*. second. [S.l.]: Chapman & Hall, 1961.
- LELE, S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comp. Phys.*, v. 103, p. 16–42, 1992.
- LESIEUR, M. *Turbulence in Fluids*. third. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- LESSEN, M.; FOX, J.; ZIEN, H. On the inviscid stability of the laminar mixing of two parallel streams of a compressible fluid. *JFM*, v. 23, p. 355–367, 1965.
- MACK, L. M. Boundary-layer linear stability theory. In: *Special course on stability and transition of laminar flow*. [S.l.]: AGARD Rep. No 709, 1984.
- MAHESH, K. A family of high order finite difference schemes with good spectral resolution. *J. Comp. Phys.*, v. 145, p. 332–358, 1998.
- MEDEIROS, M. A. F. The nonlinear evolution of a wavetrain emanating from a point source in a boundary layer. *J. Fluid Mech.*, v. 508, p. 287–317, 2004.
- MEDEIROS, M. A. F.; SILVESTRINI, J. H.; MENDONÇA, M. T. Using linear and non linear stability theory for evaluating code accuracy. In: *II school of transition and turbulence*. [S.l.: s.n.], 2000.
- MEITZ, H. L.; FASEL, H. A compact-difference scheme for the Navier-Stokes equations in vorticity-velocity formulation. *J. Comp. Phys.*, v. 157, p. 371–403, 2000.
- METCALFE, R.; ORZAG, S.; BRACHET, M.; MENON, S.; RILEY, J. Secondary instability of a temporally growing mixing layer. *J. Fluid Mech.*, v. 44, p. 207–243, 1987.
- MICHALKE, A. On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile. *J. Fluid Mech.*, v. 19, p. 543–566, 1964.
- OBERKAMPF, W. L.; TRUCANO, T. G. Verification and validation in computational fluid dynamics. *Prog. Aerospace Science*, v. 38, p. 209–272, 2002.
- PAPAMOSCHOU, D.; ROSHKO, A. The compressible turbulent shear layer: an experimental study. *J. Fluid Mech.*, v. 197, p. 453–477, 1988.
- PELTZER, I.; NITSCHKE, W. In-flight and wind tunnel measurements of natural transition and of controlled instabilities on a laminar flow airfoil. In: GOVINDARAJAN, R.; NARASIMHA, R. (Ed.). *IUTAM Symposium on Laminar-turbulent transition*. Bangalore - India: Springer-Verlag, 2004.
- PIERREHUMBERT, R.; WIDNALL, S. The two and three-dimensional instability of a spatially periodic shear layer. *J. Fluid Mech.*, v. 114, p. 59–82, 1982.
- RAGAB, S. A.; WU, J. L. Linear subharmonic instabilities of periodic compressible mixing layers. *AIAA*, v. 89-0039, 1989.
- RAYLEIGH, L. On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proc. London Math. Soc.*, v. 11, p. 57–70, 1880.
- RENEAUX, J. Overview on drag reduction technologies for civil transport aircraft. In: *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering - ECCOMAS*. Jyväskylä, Finland: [s.n.], 2004.

- ROACHE, P. J. Quantification of uncertainty in computational fluid dynamics. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, p. 126–160, 1997.
- ROACHE, P. J. Code verification by the method of manufactured solution. *JFE*, v. 124, p. 4–10, 2002.
- ROY, C. J. Review of code and solution verification procedures for computational simulations. *JCP*, v. 205, p. 131–156, 2005.
- RUMSEY, C. L.; YING, S. X. Prediction of high lift: review of present CFD capabilities. *Prog. Aero. Sciences*, v. 38, p. 145–180, 2002.
- SANDBERG, R. D.; SANDHAM, N. D. Nonreflecting zonal characteristic boundary condition for direct numerical simulation of aerodynamic sound. *AAIAJ*, v. 44, p. 402–405, 2006.
- SANDHAM, N. D. *A numerical investigation of the compressible mixing layer*. Tese (Doutorado) — Stanford University, 1990.
- SANDHAM, N. D.; REYNOLDS, W. Compressible mixing layer: Linear theory and direct simulation. *AAIAJ*, v. 28, p. 618–624, 1989.
- SANDHAM, N. D.; REYNOLDS, W. C. Three-dimensional simulations of large eddies in the compressible mixing layer. *JFM*, v. 224, p. 133–158, 1990.
- SESTERHENN, J. A characteristic-type formulation of the navier-stokes equations for high order upwind schemes. *Computers & Fluids*, v. 30, p. 37–67, 2001.
- SHAIKH, F. N. Investigation of transition to turbulence using white noise excitation and local analysis techniques. *J. Fluid Mech.*, v. 348, p. 29–83, 1997.
- SILVA, H. G.; MEDEIROS, M. A. F.; SOUZA, L. F. A verification test for a direct numerical simulation code that uses a high order discretization scheme. In: *18th International Congress of Mechanical Engineering*. Ouro Preto, Brazil: [s.n.], 2005.
- SOUZA, L. F.; MENDONÇA, M. T.; MEDEIROS, M. A. F. Assessment of different numerical schemes and grid refinement for hydrodynamic stability simulations. In: *ENCIT 2002*. Campinas - SP: [s.n.], 2002.
- SQUIRE, H. B. On the stability of three-dimensional distribution of viscous fluid between parallel walls. *Proc. Roy. Soc. London A*, v. 142, p. 621–628, 1933.
- STRANG, G. *Linear Algebra and its applications*. [S.l.]: Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, 1988.
- SULLIVAN, D. A. Historical review of real-fluid isentropic flow models. *J. Fluids. Eng.*, v. 103, 1981.
- THOMPSON, K. W. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *J. Comput. Phys.*, v. 68, p. 1–24, 1987.
- VICHNEVETSKY, R.; BOWLES, J. B. *Fourier Analysis of Numerical Approximations of Hyperbolic Equations*. [S.l.]: SIAM Philadelphia, 1982.

WANG, M.; LELE, S. K.; MOIN, P. Sound radiation during local laminar breakdown in a low-Mach-number boundary layer. *J. Fluid Mech.*, v. 319, p. 197–218, 1996.

WHITE, F. M. *Viscous Fluid Flow*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1974.

ZHONG, X.; A.; TATINENI, M. High-order non-uniform grid schemes for numerical simulation of hypersonic boundary-layer stability and transition. *JCP*, v. 190, p. 419–458, 2003.