Marcelo Leite Ribeiro

**PROGRAMA PARA ANÁLISE DE
JUNTAS COLADAS:
COMPÓSITO/COMPÓSITO E
METAL/COMPÓSITO.**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Volnei Tita

São Carlos

2009

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTES
TRABALHOS, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO,
PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

R484p Ribeiro, Marcelo Leite
 Programa para análise de juntas coladas :
 compósito/comósito e metal/comósito / Marcelo Leite
 Ribeiro ; orientador Volnei Tita. -- São Carlos, 2009.

 Dissertação (Mestrado-Programa de Pós-Graduação em
 Engenharia Mecânica e Área de Concentração em Aeronaves -
 - Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de
 São Paulo, 2009.

 1. Juntas coladas. 2. Estruturas em material
 compósito. 3. Análise de tensões. 4. Programa de
 engenharia. 5. Análise via elementos finitos. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro MARCELO LEITE RIBEIRO

Dissertação defendida e julgada em 18/03/2009 perante a Comissão Julgadora:

Prof. Dr. **VOLNEI TITA (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

Dr. **RODRIGO BRESCIANI CANTO**
(Pós-Doutorando/FAPESP)

APROVADO

Prof. Dr. **JOSÉ BENAQUE RUBERT**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO

Prof. Associado **JONAS DE CARVALHO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica

Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**
Presidente da Comissão da Pós-Graduação da EESC

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho à minha esposa Ana e aos meus pais pelo apoio e incentivo à realização desse meu sonho.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof. Doutor Volnei Tita pela oportunidade, pelo apoio e pela amizade.

Ao Prof. Associado Reginaldo Teixeira Coelho pela licença do “software” Abaqus.

Aos funcionários do departamento de Engenharia de Materiais, Aeronáutica e Automotiva.

À EMBRAER por apoiar a realização das disciplinas necessárias ao mestrado.

À Smarttech pela licença para estudante do “software” ABAQUS[®], e pela ajuda.

À Technology Tolls & Services pela licença temporária do “software” ESAComp[®].

RESUMO

RIBEIRO, M. L. (2009). **Programa para análise de juntas coladas: compósito-compósito e metal-compósito**. 163p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

O presente trabalho consiste basicamente no desenvolvimento de um programa de engenharia denominado SAJ (Sistema de Análise de Juntas) capaz de realizar uma análise detalhada do comportamento de dois dos diversos tipos de juntas coladas existentes, a junta simples colada (“single lap joint”) e a junta dupla colada (“double lap joint”). Sendo que foram analisadas juntas coladas com aderentes de material compósito ou, então, compostas de aderentes de compósito e metal. O programa de engenharia desenvolvido possibilita o cálculo das tensões, dos esforços e dos deslocamentos nessas juntas. Para validar o referido programa, os resultados obtidos do mesmo foram confrontados com os resultados obtidos para condições semelhantes utilizando “softwares” comerciais de elementos finitos e de cálculo de juntas. Após a validação do programa, são apresentados alguns estudos de fatores que influenciam na resistência da junta colada, verificando a influência do comprimento de “overlap” (sobreposição), a rigidez do adesivo e a espessura da camada adesiva. Também é apresentada uma análise de falha dos aderentes de compósito evidenciando assim, as potencialidades e limitações desta ferramenta computacional para a área de desenvolvimento de produto.

Palavras-chave: juntas coladas; estruturas em material compósito; análise de tensões; programa de engenharia; análise via elementos finitos.

ABSTRACT

RIBEIRO, M. L. (2009). **Software for analyses of bonded joints: composite-composite and metal-composite**. 163p. Thesis (Master) – School Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2009.

This work consists on the development of software called SAJ which can analyze a bonded joint behavior in detail, not only for single lap joint, but also, for double lap joint. These joints could be made of composite/composite materials or metal/composite as adherents. The software developed can calculate the joints stresses, loads and displacements. The results obtained are compared to the results obtained using commercial software and the same problems proposed. After the validation of SAJ, some studies were performed in order to determine how some characteristics affect the joint stresses distribution as overlap length, adhesive elastic modulus, adhesive thickness and a failure analysis of composite adherents showing the potential and limitation of this computational tool for the product development area.

Keywords: bonded joints; composite structures; stress analyses; software; Finite Element Analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Fuselagem metálica reparada com compósito.....	23
Figura 2: Esquema de classificação para compósitos (Adaptada de Callister, 2007).....	27
Figura 3: Falha na matriz no sentido transversal ao sentido da carga (disponível na Internet em < http://www.composites.northwestern.edu/research/micromechanics/failmech.htm >, Acesso em 18 dez. 2008).....	29
Figura 4: Mecanismos de danificação / falha em laminados: (a) danificações intralaminares (Anderson, 1995); (b) falhas interlaminares (Tita, 2003).....	30
Figura 5: Falhas em um laminado de boro e epóxi com um furo. Os laminados possuem o mesmo “lay-up”, porém a seqüência de empilhamento é diferente. (disponível na Internet em < http://www.composites.northwestern.edu/research/micromechanics/failmech.htm >, Acesso em 18 dez. 2008).	31
Figura 6: Comportamento linear elástico.	32
Figura 7: Comportamento hiperelástico (a); Comportamento elasto-plástico (b). (Williams, 1973).....	33
Figura 8: Sinal de Entrada: tensão constante aplicada ao longo do tempo (a). Sinal de Saída: parcelas de deformação elástica, plástica e viscosa (fenômeno viscoelástico de fluência) (b). (adaptado de Costa, 2006).....	34
Figura 9: Detalhe da região colada de uma junta híbrida de compósito/alumínio (Myeong, et al, 2008).....	34
Figura 10: Esquema de resistência à temperatura para uma junta com dois tipos de adesivos. A linha central entre os dois adesivos representa a resistência da junta para os dois adesivos juntos conforme mostrado no esquema. (adaptado de Silva e Adams, 2006).	35
Figura 11: Discordância em um arranjo cristalino.....	36
Figura 12: Modos de falha de uma junta colada.....	36
Figura 13: Tipos de juntas coladas.	38
Figura 14: Esquema de esforços em uma junta simples colada.....	39
Figura 15: Estado triplo de tensões.....	41
Figura 16: Estado de tensão em uma lâmina de material compósito.....	47
Figura 17: Esforços atuantes.....	49

Figura 18: Aproximações cinemáticas de Kirchhoff.....	50
Figura 19: Diagrama para cálculo da matriz ABD.....	54
Figura 20: Modelo elástico linear.	57
Figura 21: Modelo viscoso.....	58
Figura 22: Modelo plástico.	58
Figura 23: Modelo elastoplástico.	59
Figura 24: Solução do problema de valor de contorno utilizando o “shooting method”. O eixo das abscissas representa o domínio do problema, e o das ordenadas representa os valores das soluções das equações diferenciais.	61
Figura 25: Fluxograma para análise linear elástica - SAJ	66
Figura 26: Esforços na junta colada (adaptado de Mortensen, 1998).	68
Figura 27: Equilíbrio em um elemento infinitesimal fora da região de interface com adesivo (adaptado de Mortensen, 1998).....	68
Figura 28: Condições de contorno para placa em flexão cilíndrica (adaptado de Mortensen, 1998).	69
Figura 29: Esforços atuantes na região de emenda (adaptado de Mortensen, 1998).	74
Figura 30: Junta dupla colada, esforços e divisão do domínio do problema (adaptado de Mortensen, 1998).	79
Figura 31: Diagrama de corpo livre para uma junta dupla na região colada (adaptado de Mortensen, 1998).	83
Figura 32: Fluxograma de validação da abordagem de análise proposta.....	86
Figura 33: Condições de contorno para a junta simples.	89
Figura 34: Condições de contorno para a junta dupla.....	90
Figura 35: Montagem das juntas, especificando os aderentes e adesivos e as direções dos deslocamentos.	90
Figura 36: Elemento hexaédrico com 20 nós e três graus de liberdade por nó (C3D20)...	91
Figura 37: Pontos de integração por camada em um laminado de três camadas.	92
Figura 38: Modelo da junta simples colada com elementos sólidos C3D20.	93
Figura 39: Detalhe das condições de contorno e esforços aplicados na junta simples.	93
Figura 40: Modelo da junta dupla colada utilizando elementos C3D20.....	94

Figura 41: Detalhes das condições de contorno e cargas aplicadas na junta dupla.	95
Figura 42: Esquema das condições de contorno e carregamento com força normal em uma junta simples analisada através do ESACOMP®	97
Figura 43: Esquema das condições de contorno e carregamento com força normal em uma junta dupla analisada através do ESACOMP®	97
Figura 44: Comparação de deslocamento w da junta colada simples entre os três modelos (caso 1).	99
Figura 45: Deslocamento w do modelo em elementos finitos com elementos sólidos para uma junta simples de compósito submetida sob um carregamento normal de 0,015 kN/mm (caso 1).	100
Figura 46: Comparação entre os resultados obtidos pelos diversos métodos para a tensão normal σ_z no adesivo (caso 1).	101
Figura 47: Comparação entre as tensões de cisalhamento τ_{zx} (caso 1).	102
Figura 48: Comparação entre as tensões τ_{zy} (caso 1).	102
Figura 49: Comparação entre os resultados para o deslocamento w da junta dupla colada compósito-compósito (caso 2).	104
Figura 50: Campo de deslocamentos da junta dupla colada compósito-compósito (caso 2).	105
Figura 51: Comparação entre os resultados de tensão normal, σ_z , na camada de adesivo para junta dupla compósito-compósito (caso 2).	106
Figura 52: Comparação entre os resultados de tensão de cisalhamento τ_{zx} na camada de adesivo para junta dupla compósito-compósito (caso 2).	107
Figura 53: Comparação entre os resultados de tensão de cisalhamento τ_{zy} na camada de adesivo para junta dupla compósito-compósito (caso 2).	108
Figura 54: Comparação entre os deslocamentos na direção normal (w) para junta dupla colada compósito-compósito (com laminado assimétrico) (caso extra).	110
Figura 55: Campo de deslocamentos do modelo da junta dupla em elementos finitos para junta dupla compósito-compósito (com laminado assimétrico) (caso extra).	111
Figura 56: Tensão normal, σ_z , no adesivo 1 da junta dupla colada para junta dupla compósito-compósito (com laminado assimétrico) (caso extra).	111
Figura 57: Tensão normal, σ_z , no adesivo 2 da junta colada para junta dupla compósito-compósito (com laminado assimétrico) (caso extra).	112

Figura 58: Tensão de cisalhamento τ_{zx} do adesivo 1 da junta para junta dupla compósito-compósito (com laminado assimétrico) (caso extra).....	113
Figura 59: Tensão de cisalhamento τ_{zx} do adesivo 2 da junta para junta dupla compósito-compósito (com laminado assimétrico) (caso extra).....	113
Figura 60: Tensão de cisalhamento τ_{zy} do adesivo 1 da junta para junta dupla compósito-compósito (com laminado assimétrico) (caso extra).....	114
Figura 61: Tensão de cisalhamento τ_{zy} do adesivo 2 da junta para junta dupla compósito-compósito (com laminado assimétrico) (caso extra).....	115
Figura 62: Comparação de resultados para o deslocamento w de uma junta híbrida simples colada (caso 3).	117
Figura 63: Campo de deslocamentos do Modelo em elementos finito da junta híbrida (caso 3).	118
Figura 64: Comparação das tensões normais, σ_z , na camada de adesivo (caso 3).	118
Figura 65: Comparação das tensões de cisalhamento τ_{zx} na camada de adesivo (caso 3).	119
Figura 66: Comparação das tensões de cisalhamento τ_{zy} na camada de adesivo (caso 3).	120
Figura 67: Comparação do deslocamento w entre o modelo proposto e os obtidos por “softwares” comerciais (caso 40).	122
Figura 68: Campo de deslocamentos da junta dupla híbrida colada (caso 4).	123
Figura 69: Comparação da tensão normal, σ_z , na camada de adesivo entre os modelos (caso 4).	123
Figura 70: Comparação da tensão de cisalhamento τ_{zx} no adesivo (caso 4).	124
Figura 71: Comparação da tensão de cisalhamento τ_{zy} no adesivo (caso 4).	125
Figura 72: Influência do “overlap” - Tensão τ_{zx} na camada de adesivo com variação do comprimento da região colada para junta simples.	127
Figura 73: Influência do “overlap” - Tensão normal σ_z na camada de adesivo para diversos comprimentos da região colada para junta simples.....	128
Figura 74: Influência do “overlap” - τ_{zx} na região do adesivo para diversos comprimentos da região colada para uma junta dupla híbrida.....	129

Figura 75: Influência do “overlap” - Tensão normal σ_z na camada de adesivo para diversos comprimentos da região colada para uma junta híbrida colada.....	130
Figura 76: Comparação entre os valores da tensão σ_z entre a junta simples e junta dupla para um “overlap” de 20mm, sendo apresentado somente metade do comprimento do “overlap”.....	131
Figura 77: Comparação entre os valores da tensão τ_{zx} entre a junta simples e dupla para um “overlap” de 20mm, sendo apresentado somente metade do comprimento do “overlap”.	131
Figura 78: Tensão normal, σ_z , na camada de adesivo para diferentes módulos de elasticidade para junta simples.	133
Figura 79: Influência do módulo de elasticidade do adesivo - Tensão de cisalhamento na camada de adesivo para diferentes módulos de elasticidade para junta simples.	134
Figura 80: Influência do módulo de elasticidade do adesivo -Tensão normal, σ_z , na camada de adesivo em uma junta dupla para adesivos com diferentes valores de módulo de elasticidade.	135
Figura 81: Influência do módulo de elasticidade do adesivo - Tensão de cisalhamento τ_{zx} na camada de adesivo em uma junta dupla para adesivos com diferentes valores de módulo de elasticidade.	135
Figura 82: Influência da espessura do adesivo - Tensão normal, σ_z , na camada de adesivo de uma junta simples considerando diversas espessuras da camada de adesivo.	137
Figura 83: Influência da espessura do adesivo - Tensão de cisalhamento τ_{zx} na camada de adesivo de uma junta simples considerando diversas espessuras da camada de adesivo.	138
Figura 84: Influência da espessura do adesivo - Tensão normal, σ_z , na camada de adesivo de uma junta dupla considerando diversas espessuras da camada de adesivo.....	139
Figura 85: Influência da espessura do adesivo - Tensão de cisalhamento τ_{zx} na camada de adesivo de uma junta dupla considerando diversas espessuras da camada de adesivo.	140
Figura 86: Análise de falhas de juntas compósito-compósito – Esquema apresentando as condições de contorno, numeração dos aderentes e carregamento.....	142

LISTA DE TABELAS

Tabela 1-1: Vantagens e desvantagens de uma junta colada (adaptado de Mortensen, 1998).	22
Tabela 3-1: Propriedades dos aderentes e adesivos, condições de contorno e carregamento dos testes realizados para validar o programa SAJ para junta simples.	88
Tabela 3-2: Propriedades dos aderentes e adesivos e condições de contorno e carregamento dos testes realizados para validar o programa SAJ para junta dupla.	89
Tabela 4-1: Resultados para análise de junta simples compósito-compósito (caso 1). ...	103
Tabela 4-2: Resultados para análise de junta dupla compósito-compósito (caso 2).	108
Tabela 4-3: Resultados para análise de junta dupla compósito-compósito (assimétrico) (caso extra).	115
Tabela 4-4: Resultados para análise de junta simples metal-compósito (valores para o compósito) (caso 3).	120
Tabela 4-5: Resultados para análise de junta simples metal-compósito (valores para o metal) (caso 3).	121
Tabela 4-6: Resultados para análise de junta dupla metal-compósito. Os resultados são para o lado do aderente de compósito (caso 4).	125
Tabela 4-7: Influência do “overlap” - condições de contorno e carregamentos para junta simples	127
Tabela 4-8: Valores das tensões na camada de adesivo para os diversos comprimentos de “overlap” para a junta simples (valores retirados da extremidade com 0mm de cota).	128
Tabela 4-9: Influência do “overlap” - condições de contorno e carregamentos para junta dupla.	129
Tabela 4-10: Valores das tensões na camada de adesivo para os diversos comprimentos de “overlap” para a junta dupla (valores retirados da extremidade em $x=0,0\text{mm}$).	130
Tabela 4-11: Influência do módulo de elasticidade do adesivo - propriedades elásticas do adesivo e dos aderentes.	132
Tabela 4-12: Valores das tensões na camada de adesivo para os diversos valores do módulo de elasticidade do adesivo para a junta simples (valores retirados da extremidade com 0mm de cota).	134

Tabela 4-13: Valores das tensões na camada de adesivo para os diversos módulos de elasticidade do adesivo para a junta dupla (valores retirados da extremidade em $x=0,0\text{mm}$).	136
Tabela 4-14: Valores das tensões na camada de adesivo para os diversos valores de espessura da camada de adesivo para a junta simples (valores retirados da extremidade com $0,0\text{mm}$ de cota).	138
Tabela 4-15: Valores das tensões na camada de adesivo para os diversos valores de espessura da camada de adesivo para a junta dupla (valores retirados da extremidade com $0,0\text{mm}$ de cota).	140
Tabela 4-16: Análise de falhas de juntas compósito-compósito - Propriedades elásticas do adesivo e dos aderentes e espessuras do adesivo e do aderente (dados do aderente obtidos de Tita (2003)).	141
Tabela 4-17: Análise de falhas de juntas compósito-compósito – Valores de resistência dos aderentes (dados do aderente obtidos de Tita (2003)).	141
Tabela 4-18: Análise de falhas de juntas compósito-compósito – Resultados.....	142

LISTA DE SÍMBOLOS

A_s = Área;

A_{ij} = Matriz que representa a rigidez de membrana;

B_{ij} = Matriz que representa o acoplamento entre a rigidez de membrana e de flexo/torção;

C_{ij} = Matriz de rigidez;

D_{ij} = Matriz que representa a rigidez de flexo/torção;

d_f = Diâmetro da fibra;

E = Módulo de elasticidade;

G = Módulo de elasticidade ao cisalhamento;

H = Módulo plástico tangente;

K_p = Rigidez da peça;

L = Comprimento da peça;

l = Comprimento da fibra;

l_c = Comprimento crítico da fibra;

M = Momento fletor ou de torção;

N = Força de membrana;

Q = Força cortante;

SAJ = Sistema de Análise de Juntas;

S_{12} = Resistência da fibra ao cisalhamento no plano 1-2;

S_{23} = Resistência da fibra ao cisalhamento no plano 2-3;

t_{ad} = Espessura da camada do adesivo;

t_{lam} = Espessura do aderente;

X_C = Resistência da lâmina sob compressão na direção da fibra;

X_T = Resistência da lâmina sob tração na direção da fibra;

Y_C = Resistência transversal da lâmina sob compressão;

Y_T = Resistência transversal da lâmina sob tração;

u = Deslocamento em x;

v = Deslocamento em y;

w = Deslocamento em z;

S_{ij} = Componente da matriz de flexibilidade;

α = Parâmetro de não linearidade;

σ_f = Resistência à tração de ruptura da fibra;

σ_{ij} = Componente do tensor das tensões;

σ = Tensão normal;

σ_{1_F} = Tensão na direção da fibra;

σ_{2_M} = Tensão na direção transversal às fibras;

σ_0 = Limite de escoamento;

σ_{rup} = Tensão limite de ruptura;

ε_{ij} = Componente do tensor das deformações;

ε = Deformação;

τ_f = Resistência ao cisalhamento da matriz ou da interface;

τ = Tensão de cisalhamento;

ν_i = Coeficiente de Poisson;

γ_{ij} = Deformação angular de engenharia;

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO, MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS.....	21
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	26
2.1. MECANISMOS DE FALHA EM JUNTAS COLADAS	26
2.1.1 Mecanismos de falha em compósitos laminados (aderente)	26
2.1.2 Comportamento mecânico de adesivos poliméricos	32
2.1.3 Comportamento mecânico de metais (aderente)	35
2.2. ABORDAGENS DE ANÁLISES DE JUNTAS COLADAS	37
2.2.1 Análise de falha de laminados	40
2.2.2 Análise de adesivos e metais.....	57
2.2.3 Análise de juntas coladas	59
3. PROPOSTA DE UMA ABORDAGEM DE ANÁLISE.....	66
3.1. PROCEDIMENTO DE ANÁLISE	66
3.2. EQUACIONAMENTO MATEMÁTICO.....	67
3.2.1 Equacionamento da junta simples colada	67
3.2.2 Equacionamento da junta dupla colada.....	79
3.3. METODOLOGIA DE VALIDAÇÃO DA PROPOSTA.....	86
3.3.1 Modelos do SAJ	86
3.3.2 Modelos em elementos finitos	91
3.3.3 Modelos do ESAComp®	95
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES	98
4.1. JUNTAS COMPÓSITO-COMPÓSITO	98
4.1.1 Junta simples compósito-compósito (caso 1).....	99
4.1.2 Junta dupla compósito-compósito (caso 2).....	104
4.2. JUNTAS METAL-COMPÓSITO (HÍBRIDAS).....	116
4.2.1 Junta simples híbrida (metal-compósito) (caso 3)	116

4.2.2 Junta dupla híbrida (metal-compósito) (caso 4)	121
4.3. ESTUDO DA INFLUÊNCIA DE PARÂMETROS	126
4.3.1 Influência do “overlap”	126
4.3.2 Influência do módulo de elasticidade do adesivo	132
4.3.3 Influência da espessura da camada de adesivo	136
4.4. ANÁLISE DE FALHAS DE JUNTAS COMPÓSITO-COMPÓSITO	140
5. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	144
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	147
APÊNDICES	155
ANEXOS.....	157

1. INTRODUÇÃO, MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS.

Durante as últimas duas décadas, foram realizadas várias pesquisas sobre materiais compósitos aplicados em estruturas aeronáuticas, devido à grande rigidez e resistência e ao baixo peso desse tipo de estrutura. Seu uso pode resultar em um aumento da “carga paga” sem comprometer requisitos de aeronavegabilidade. Várias dessas estruturas são fabricadas a partir de polímeros reforçados por fibra, sendo que esse material permite ser projetado, uma vez que as fibras podem ser orientadas de acordo com as características do carregamento que o mesmo deverá suportar. Entretanto, o comportamento mecânico de laminados de compósitos é bastante complexo, pois durante o processo de falha do laminado, vários fenômenos ocorrem simultaneamente. Dentre esses se destacam: ruptura da fibra; delaminações; trincas na matriz; deformações plásticas na matriz polimérica. Estes são alguns dos mecanismos de falha que podem ocorrer quando uma estrutura em compósito está submetida a certos esforços.

Atualmente, a quantidade de estruturas em compósitos tem aumentado de maneira significativa em praticamente todas as áreas, desde a construção civil, passando pela indústria petrolífera e, principalmente, a indústria aeronáutica, incluindo ainda a indústria dos equipamentos esportivos como bicicletas, esquis, etc. Vale ressaltar que em muitos casos essas estruturas de compósito podem ser combinadas com outros tipos de materiais, como metais. Uma vez que fabricar estruturas em uma peça única é em muitos casos impraticável, torna-se necessário dividir a estrutura em partes menores para serem manufaturadas e então, efetuar a montagem da estrutura unindo as peças que a constituem. Para realizar tal junção, pode-se utilizar as juntas mecânicas, por meio de parafusos e rebites ou, então, utilizadas juntas coladas, sendo que estas apresentam várias vantagens sobre as juntas mecânicas. Uma vantagem de grande importância para a indústria aeronáutica é que as juntas coladas possuem um melhor acabamento, ou seja, reduzem a perturbação do escoamento de ar que se traduz em menor arrasto. Outra vantagem relevante de uma junta colada é que ela possui uma maior vida em fadiga do que uma junta mecânica, que apresentam furos que concentram tensões. Além disso, a da junta colada possibilita unir materiais diferentes, mesmo que haja a possibilidade de ocorrer o processo de corrosão galvânica, pois a camada de adesivo pode atuar como um isolante entre as

partes. Uma das maiores vantagens é a distribuição mais uniforme do carregamento (Myeong-Su et al., 2008). A Tabela 1-1 apresenta um resumo das vantagens e desvantagens de uma junta colada.

Tabela 1-1: Vantagens e desvantagens de uma junta colada (adaptado de Mortensen, 1998).

Vantagens	Desvantagens
-Melhor eficiência na transferência de carga.	-Baixa resistência para cargas de "peeling".
-Melhor acabamento	-A preparação da área de aplicação do adesivo é crítica para a resistência da junta
-Melhor vedação	-Não é desmontável
-Melhor resistência em fadiga	-Não existem ensaios não destrutivos eficientes para garantir a qualidade da junta
-Melhor eficiência aerodinâmica	-Capacidade limitada de resistência à altas temperaturas

Por outro lado, para se projetar uma estrutura, é fundamental que se conheçam os limites de trabalho da junta. Entre as maneiras de auxiliar o engenheiro no processo de projeto estão as análises através de métodos numéricos ou por meio analítico, utilizando programas baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF), ou ainda algum “software” desenvolvido para calcular casos específicos, reduzindo o tempo de análise e o custo com a fabricação de amostras e ensaios, uma vez que para essa etapa do projeto seriam ensaiadas somente as juntas que apresentaram melhores desempenho na fase de desenvolvimento.

A análise de juntas coladas tem como parte principal a camada de adesivo que promove a união entre os aderentes (partes a serem unidas). Vários fatores influenciam a distribuição de tensão na camada de adesivo. Um deles é o comprimento da região colada (“overlap”), na qual quanto maior o tamanho do comprimento da região colada menor são os valores máximos, em módulo, da tensão normal e de cisalhamento na camada de adesivo (Kim; Kweon e Choi, 2008). Um adesivo menos rígido também resulta em valores menores de tensão atuantes na camada do mesmo (Thomsen, 2002). Outro parâmetro é a espessura da camada de adesivo, que para as mesmas propriedades mecânicas, um aumento da espessura da camada de adesivo resulta em menores tensões atuantes no mesmo (Myeong-Su et al., 2008). Outros fatores que

influenciam a resistência de juntas coladas estão relacionados com a fabricação, tais como acabamento superficial da região onde será aplicado o adesivo, onde um acabamento de baixa qualidade reduz significativamente a resistência da junta (MIL-HDBK-17-3E, 1998). A pressão aplicada na junta durante o processo de fabricação também afeta significativamente, sendo que um aumento de pressão resulta em uma resistência maior da junta, assim como no caso da pressão aplicada durante o processo de cura (Myeong-Su et al., 2008). A temperatura e o tempo de cura também influenciam nas propriedades elásticas do adesivo (Matsui, 1990).

Deve-se destacar que geralmente os adesivos são polímeros, e devido a essa natureza, a temperatura que estão submetidos influi em suas propriedades mecânicas (Abad et al, 1990) sendo que algumas destas são reduzidas com um aumento da temperatura, como no caso do módulo de elasticidade. Porém, nem todos os adesivos são afetados pela temperatura de maneira igual. Há adesivos com propriedades melhores para temperaturas mais elevadas, sendo que estes em temperaturas mais baixas são normalmente frágeis, e há os adesivos com boas propriedades em baixas temperaturas, possibilitando assim, a utilização de dois tipos diferentes de adesivos em uma mesma junta a fim de se obter um desempenho ótimo em um intervalo de temperaturas maior (Silva e Adams, 2006). Tem-se ainda que juntas de materiais dissimilares como metal e compósito podem resultar em valores elevados de tensão residual devido a diferenças nos coeficientes de expansão térmica (Rastogi, Soni e Nagar, 1998). Tal problema é muito crítico, principalmente, em se tratando da questão de reparo de estruturas metálicas primárias (exemplo: revestimento da fuselagem) através de “patches” em material compósito laminado (Figura 1).

Figura 1: Fuselagem metálica reparada com compósito

Devido a todos esses aspectos mencionados anteriormente, tem-se que a elaboração de um “software” capaz de realizar cálculos de juntas de forma detalhada, levando em conta efeitos de plastificação e danificação dos aderentes vem ao encontro da necessidade de se reduzir custos com ensaios em corpos de prova. Tal necessidade tem provocado o desenvolvimento de programas comerciais específicos para a análise de juntas coladas, como é o caso do ESA-Comp[®]. No entanto, esses programas possuem um custo relativamente elevado (€ 2.650,00 para licença permanente para 5 usuários) e muitas vezes são “pacotes fechados”, não permitindo, assim, a inserção de novos modelos constitutivos e/ou formulações. Portanto, torna-se também muito interessante a possibilidade de se controlar o código fonte do programa para qualquer tipo de junta com diferentes materiais, adesivos e/ou aderentes, bem como, condições de contorno, permitindo assim, a previsão do comportamento em serviço sob diversas condições.

Tudo isto motiva e justifica o desenvolvimento do presente trabalho, que tem como objetivo principal desenvolver um programa aberto em código MatLab[®], denominado SAJ (Sistema de Análise de Juntas), para análise de juntas coladas de compósito-compósito, bem como, de metal-compósito (híbridas). Dessa forma, o usuário não somente poderá utilizar os modelos constitutivos e formulações implementadas, como poderá programar e avaliar novos modelos e formulações, como foi realizado no presente trabalho.

Para se atingir os objetivos propostos, os resultados do SAJ serão confrontados com os resultados obtidos através de “softwares” comerciais de análise de compósitos, como o ESA-Comp[®], e com modelos de juntas elaborados utilizando o “software” de elementos finitos ABAQUS[®], sendo que ambos os “softwares” são utilizados com frequência por pesquisadores. Uma vez que o programa esteja validado, ainda serão estudados os efeitos de alguns parâmetros, tais como comprimento da região colada, espessura da camada de adesivo e módulo de elasticidade do adesivo, verificando como estes parâmetros influenciam no nível de tensão na junta, demonstrando as potencialidades e limitações da ferramenta computacional para a área de desenvolvimento de produto.

Para começar o desenvolvimento da referida ferramenta computacional, realizou-se uma revisão bibliográfica sobre juntas coladas e estruturas em material compósito no capítulo 2. Nesta revisão é feita uma breve descrição de materiais compósitos, metálicos e poliméricos,

apresentando suas características básicas. Após isso, são apresentados alguns critérios de análise para laminados e materiais metálicos. Neste capítulo também há uma revisão da Teoria Clássica dos Laminados, além de uma revisão dos trabalhos elaborados sobre juntas coladas. O capítulo 2 finaliza apresentando alguns métodos numéricos para a solução de problemas de valor de contorno.

O capítulo 3 apresenta o modelo matemático para o adesivo utilizado nas análises numéricas no SAJ. Logo em seguida é mostrado o desenvolvimento do equacionamento das juntas simples e dupla, detalhando como foram obtidos os sistemas de equações diferenciais para os dois tipos de juntas estudados. Ainda no capítulo 3, são apresentados os modelos em elementos finitos, explicando a sua elaboração e os tipos de elementos utilizados no “software” ABAQUS®. Logo após, há uma breve explicação de como são gerados os modelos utilizando o programa ESAComp®.

No capítulo 4 são apresentados os resultados das várias análises realizadas para as juntas simples e dupla com as diferentes combinações do comprimento de “overlap” (região colada), e a influência da rigidez do adesivo e da espessura do adesivo, tanto para juntas híbridas de metal/compósito como para juntas compósito/compósito. Também é apresentada uma análise de falha dos aderentes de compósito para a junta simples.

No capítulo 5 são apresentadas as conclusões obtidas das comparações entre os modelos de elementos finitos, ESAComp® e do SAJ. Também são apresentadas recomendações para o projeto de juntas coladas. Ainda neste capítulo são sugeridos futuros trabalhos na área de cálculos de juntas.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No presente capítulo, são apresentadas de forma sucinta as teorias e trabalhos publicados sobre juntas coladas. Primeiramente, é apresentada uma revisão de materiais compósitos, evidenciando suas principais características e mecanismos de falha. Depois são introduzidos conceitos importantes sobre o comportamento mecânico de adesivos e metais. Posteriormente, são também comentados os diversos tipos de juntas coladas.

2.1. MECANISMOS DE FALHA EM JUNTAS COLADAS

Neste item é apresentada uma introdução sobre os mecanismos de falha de juntas coladas, dando ênfase aos aderentes de compósito e ao adesivo, uma vez que estes possuem mecanismos de falha mais complexos.

2.1.1 MECANISMOS DE FALHA EM COMPÓSITOS LAMINADOS (ADERENTE)

Um compósito é um material multifase que combina as propriedades de cada material (fase), atingindo um desempenho melhor do que o desempenho individual de cada material (fase) que o constitui (Callister, 2007). Os materiais que formam o compósito podem ser classificados como aglomerante (matriz) e reforço (fase dispersa), sendo que para um compósito de alto desempenho (laminado estrutural) a matriz tem como função manter os reforços unidos, proteger as fibras e transmitir o carregamento para o reforço. Já este último confere rigidez ao laminado tem a função de suportar os carregamentos transmitidos pela matriz nas direções das fibras (Daniel e Ishai, 2006).

Os compósitos de duas fases podem ser classificados em três grandes categorias dependendo do tipo, da geometria e da orientação da fase de reforço. Assim, eles podem ser divididos em compósitos particulados, consistindo de partículas de diversos tamanhos e formas dis-

tribuídas aleatoriamente na matriz, reforçados por fibras, ou estruturais (Callister, 2007). A Figura 2 mostra um esquema de classificação para compósitos.

Figura 2: Esquema de classificação para compósitos (Adaptada de Callister, 2007).

Os compósitos reforçados por partículas são formados por partículas de diferentes tamanhos e formas dispersas de maneira aleatória na matriz (Daniel e Ishai, 2006). Os compósitos reforçados por fibras longas são os mais importantes do ponto de vista tecnológico e possuem altos valores de resistência mecânica e rigidez (Callister, 2007). As características mecânicas de um compósito reforçado por fibra não dependem somente das propriedades destas, mas também de como a carga é transmitida da matriz para a fibra (Callister, 2007), o que resulta na existência de um comprimento crítico da fibra. As orientações das fibras relativas a outras também influenciam de maneira significativa as propriedades dos compósitos reforçados por fibras. Em termos de orientação, as fibras podem ser alinhadas e contínuas, descontínuas e alinhadas e descontínuas e orientadas aleatoriamente (Callister, 2007). Existem diversos tipos de fibras como, por exemplo, fibra de vidro, aramida (kevlar[®]), carbono e grafite.

Por outro lado, os compósitos reforçados por fibras podem ser sub-classificados em categorias dependendo do tipo de matriz, podendo ser de matriz polimérica, metálica ou cerâmica (Daniel e Ishai, 2006). Como as matrizes cerâmicas são frágeis e normalmente a ductilidade é desejável em projetos aeronáuticos, em geral são utilizadas matrizes poliméricas e metálicas. A matriz ainda é responsável por diversas funções, como meio de união e como proteção das fibras tanto para danos mecânicos (exemplo: abrasão) como para danos químicos (exemplo:

corrosão). No entanto, além da matriz e do reforço, deve-se lembrar da interface reforço-matriz, pois embora de dimensões reduzidas, a interface influencia de maneira significativa os mecanismos de falha, resistência à fratura e o comportamento tensão-deformação até a falha do material (Daniel e Ishai, 2006).

Dentre os compósitos da Figura 2, têm-se que os compósitos estruturais são extensivamente utilizados na indústria aeronáutica, principalmente os laminados que serão abordados no presente trabalho. Uma particularidade desses materiais compósitos é que, modificando a orientação das fibras e escolhendo de forma correta a matriz, é possível projetar o material de acordo com os esforços aplicados, garantindo assim certo grau de anisotropia para a estrutura. Dessa forma, haverá um melhor desempenho da estrutura, maximizando a sua resistência e minimizando o peso. Características bem interessantes para aplicações aeronáuticas, na qual a redução de peso implica numa economia maior de combustível ou uma maior carga paga a ser transportada. Diante disso, a indústria aeronáutica, em especial, nos últimos anos, tem incorporado o emprego de materiais compósitos em estruturas primárias (painéis de revestimento de asas e fuselagens, longarinas de asas, cavernas de fuselagens, entre outros). No entanto, se por um lado a anisotropia permite projetar o material em função dos carregamentos, por outro a mesma anisotropia associada a outros fatores (por exemplo: a heterogeneidade) dificulta a previsão dos mecanismos de falha que ocorrerão na estrutura.

Em aspectos micromecânicos, a falha de um compósito pode dar-se na matriz, no reforço ou na região de interface entre ambos. Pode ocorrer a falha da matriz na direção transversal ao sentido de aplicação da carga para um compósito frágil, que possua uma interface forte entre matriz e reforço. Pode ainda ocorrer o descolamento da fibra com a matriz devido a uma interface fraca ou a um reforço com deformação final relativamente alta. Por fim, no caso de uma matriz dúctil e uma interface frágil há fraturas cônicas devido ao cisalhamento (Daniel e Ishai, 2006). A Figura 3 mostra a falha na matriz na direção transversal ao sentido da carga.

Figura 3: Falha na matriz no sentido transversal ao sentido da carga (disponível na Internet em <<http://www.composites.northwestern.edu/research/micromechanics/failmech.htm>>, Acesso em 18 dez. 2008)

Quando o laminado é submetido a esforços de compressão pode induzir falhas na fibra por microflambagem, ou cisalhamento. Já quando o compósito é submetido a uma tensão no sentido transversal ao das fibras, sendo que este é o carregamento mais crítico em uma lâmina unidirecional (Daniel e Ishai, 2006), esta lâmina falha na região de interface entre a fibra e a matriz devido à concentração de tensão local nessas regiões. Para o caso de carregamento de compressão no sentido transversal, a falha se dá de maneira semelhante ao caso de carregamento em tração.

Em suma, há dois tipos de fenômenos de falha característicos quando laminados de matriz polimérica reforçado por fibra são submetidos a um dado carregamento:

- Fenômenos Intralaminares: ocorrem dentro das lâminas e correspondem a danos da matriz, da fibra ou da interface fibra-matriz;
- Fenômenos Interlaminares: ocorrem entre as lâminas e correspondem especificamente ao fenômeno conhecido por delaminação, caracterizado pela separação de duas lâminas adjacentes.

Segundo Anderson (1995), os compósitos que possuem uma fraca interação fibra-matriz sofrerão a quebra da interface, proporcionando o descolamento entre a fibra e a matriz ("debonding") como mostra a Figura 4(a) (mecanismo (3)). Pode ainda ocorrer o rompimento da fibra, que produzirá assim o mecanismo de "Pull-Out" como evidencia a Figura 4(a) (meca-

nismo (1)). Tal mecanismo caracteriza-se pelo arrancamento da fibra de dentro da matriz, o que geralmente ocorre após a propagação de uma fissura. Antes da ocorrência do “Pull-Out” pode haver a formação do mecanismo de “Fiber Bridging” (mecanismo (2)), desde que o compósito possua fibras frágeis de alta resistência, matrizes dúcteis e interface forte. Sendo assim, a fissura se propaga pela matriz e a fibra forma uma ponte interligando as duas superfícies da matriz fraturada. Por outro lado, a fronteira da fissura dá origem a regiões com concentração de tensão até mesmo fora do plano de propagação. A região localizada à frente da fissura, que está se propagando, concentra altas tensões, podendo também levar à “Fratura da Fibra” (4) devido a sua alta fragilidade, ou à “Danificação da Matriz” (5) (Figura 4(a)).

(a)

(b)

Figura 4: Mecanismos de danificação / falha em laminados: (a) danificações intralaminares (Anderson, 1995); (b) falhas interlaminares (Tita, 2003)

Estudos demonstram que o mecanismo de falha dos compósitos laminados se assemelha ao dos metais no que diz respeito à evolução do processo. Ou seja, assim como nos metais, a falha nos materiais compósitos inicia-se por pequenos mecanismos (danos intralaminares) para depois então ocorrerem os mecanismos mais visíveis (falha interlaminar) (Anderson, 1995). Normalmente o processo de danificação inicia-se em lâminas que tenham orientação de fibra próxima a 90° em relação aos carregamentos. Após o aparecimento do primeiro dano, o carregamento na estrutura tende a ser redistribuído vindo a provocar o aparecimento de mais regiões danificadas na mesma lâmina ou em outras lâminas. Esse processo ocorre sucessivamente até que essas regiões danificadas se unam, formando uma fissura discreta. As fronteiras

das fissuras que se formaram numa determinada lâmina encontram lâminas adjacentes com ângulos de orientação diferente. Neste momento, as tensões de cisalhamento interlaminares crescem abruptamente e levam o laminado a iniciar o processo de delaminação (Figura 4(b)). Dessa forma, tem-se que o processo de falha de um laminado é complexo, ocorrendo de forma progressiva.

Além disso, a resistência de um laminado multidirecional depende de diversos fatores. As diferentes orientações de cada uma das lâminas, a rigidez, a resistência e os coeficientes de expansão higrotérmica afetam as características de resistência do laminado. A sequência de empilhamento das lâminas afeta as rigidezes de flexo/torção e de acoplamento de flexo/torção e membrana e, portanto as tensões e resistência do laminado. A Figura 5 apresenta o efeito da orientação das lâminas na falha de um laminado. E, por fim, o processo de fabricação também afeta a resistência do laminado (Daniel e Ishai, 2006).

Figura 5: Falhas em um laminado de boro e epóxi com um furo. Os laminados possuem o mesmo “lay-up”, porém a sequência de empilhamento é diferente. (disponível na Internet em <http://www.composites.northwestern.edu/research/micromechanics/failmech.htm>, Acesso em 18 dez. 2008).

No presente trabalho somente o comportamento elástico do laminado será abordado. No entanto, como o programa fonte é aberto, o usuário pode implementar um processo de análise progressiva de falha caso isto seja necessário.

2.1.2 COMPORTAMENTO MECÂNICO DE ADESIVOS POLIMÉRICOS

O comportamento mecânico dos materiais pode ser dividido em dois grandes grupos, um independente do tempo e outro dependente do tempo (Williams, 1973).

Figura 6: Comportamento linear elástico.

A Figura 6 apresenta o comportamento linear elástico do material, no qual este não apresenta nenhuma deformação permanente quando o carregamento é retirado, e quando carregado, assim como quando descarregado, o nível de deformação é atingido quase que instantaneamente, caracterizando um comportamento independente do tempo.

Para alguns materiais, a deformação aumenta de forma exponencial após atingir certo nível de tensão, apresentando um comportamento não-linear bastante acentuado, independente do tempo, e não apresentando deformações residuais. Materiais poliméricos submetidos a temperaturas acima da sua temperatura de transição vítrea comportam-se de maneira hipere-lástica (Williams, 1973). A Figura 7 (a) mostra o esquema de um comportamento hipere-lástico. Nota-se a ausência de um limite de escoamento e não há deformação permanente.

Figura 7: Comportamento hipereelástico (a); Comportamento elasto-plástico (b). (Williams, 1973).

Já um material elasto-plástico possui um comportamento conforme mostrado na Figura 7 (b). Pode-se observar que até o ponto A o material apresenta um comportamento linear e, após esse ponto, o comportamento é não-linear devido ao processo de escoamento do material, pois se for retirada a carga do material após o ponto A, este apresentará uma deformação permanente. Pode-se observar que, após plastificar, a curva de descarregamento é paralela à inclinação do regime elástico (Williams, 1973), desde que não haja danificação.

A Figura 8 mostra o comportamento viscoso de um material, que apresenta uma resposta de deformação em função do tempo para uma tensão aplicada. Portanto, um material visco-elástico terá uma resposta de deformação segundo uma dada entrada degrau de tensão conforme a Figura 8, apresentando assim, os seguintes fenômenos (Malvern, 1969):

- Fluência ou “creep”, fenômeno que se caracteriza por um acréscimo de deformação em função do tempo para uma tensão constante abaixo do seu ponto de escoamento;
- Relaxação, fenômeno que se caracteriza pela variação da tensão em função do tempo para uma deformação constante;

Tem-se que materiais poliméricos apresentam comportamento elástico associado ao viscoso, caracterizando um comportamento visco-elástico. No presente trabalho somente o comportamento elástico do adesivo será abordado. No entanto, como o programa fonte é aberto, o usuário pode implementar um processo de análise não-linear do adesivo caso isto seja necessário.

Figura 8: Sinal de Entrada: tensão constante aplicada ao longo do tempo (a). Sinal de Saída: parcelas de deformação elástica, plástica e viscosa (fenômeno viscoelástico de fluência) (b). (adaptado de Costa, 2006).

Sendo materiais poliméricos a maioria dos adesivos utilizados em juntas coladas, Meyong et al. (2008) realizaram um estudo paramétrico de alguns fatores, como pressão durante o processo de colagem, tamanho da área colada e espessura da camada adesiva, mostrando que numa junta híbrida (metal-compósito) normalmente o mecanismo de falha será a delaminação do compósito.

Figura 9: Detalhe da região colada de uma junta híbrida de compósito/alumínio (Myeong, et al, 2008).

Deve-se ressaltar ainda que em algumas aplicações pode ocorrer que a estrutura estará sujeita a uma grande variação de temperatura, como acontece em vôos supersônicos, onde a temperatura pode variar de -55°C à 200°C , e nesses casos, não há adesivos que apresentem boas propriedades mecânicas para toda essa amplitude térmica (Silva e Adams, 2006). Dessa

forma, pode-se empregar uma junta colada utilizando dois tipos diferentes de adesivo. A Figura 10 apresenta um esquema de junta com dois tipos diferentes de adesivo.

Figura 10: Esquema de resistência à temperatura para uma junta com dois tipos de adesivos. A linha central entre os dois adesivos representa a resistência da junta para os dois adesivos juntos conforme mostrado no esquema. (adaptado de Silva e Adams, 2006).

2.1.3 COMPORTAMENTO MECÂNICO DE METAIS (ADERENTE)

Fenômenos como plasticidade e encruamento de metais podem ser observados em ensaios uniaxiais de tensão-deformação de metais tanto submetidos a esforços de tração como submetidos a esforços de compressão. Estes fenômenos aparecem após o regime elástico, se caracterizando pelo surgimento de deformações permanentes (Proença, 2007).

Do ponto de vista da microestrutura, o mecanismo físico que gera a plastificação é a movimentação irreversível de discordâncias (Figura 11). Não havendo perdas de coesão e rupturas internas, o mecanismo associado ao encruamento é o acúmulo de discordâncias ocasionado por uma barreira física como vazios ou inclusões, produzindo concentração de tensão (Proença, 2007).

Figura 11: Discordância em um arranjo cristalino.

Por outro lado, Chen (1994) discute que o mecanismo de falha dos metais é caracterizado pelos escorregamentos ou deslocação dos cristais, resultando em deformações plásticas associadas às deformações por cisalhamento, não ocorrendo mudanças no volume, e os comportamentos em tensão e compressão são praticamente os mesmos.

No presente trabalho somente o comportamento elástico do metal será abordado. No entanto, como o programa fonte é aberto, o usuário pode implementar um processo de análise não-linear do metal caso isto seja necessário.

Por fim, tem-se que uma junta colada pode apresentar os modos de falha mostrados na Figura 12 como, por exemplo, a junta pode falhar devido à tensão de “peel”, a qual provoca um descolamento nas extremidades do “overlap”. Além disso, a junta pode ainda apresentar todos os micromecanismos previamente discutidos. Isto demonstra o quão complexo é o processo de análise de falha de uma junta colada do tipo compósito-compósito e metal-compósito.

Figura 12: Modos de falha de uma junta colada.

Todavia, o processo de análise de falha deve ser antecedido por um processo de análise de tensões. Para tal, diferentes tipos de abordagens são utilizados, como será relatado a seguir.

2.2. ABORDAGENS DE ANÁLISES DE JUNTAS COLADAS

O estudo de juntas coladas é abordado por diversos pesquisadores, tendo muitas vezes como escopo desse estudo, as características geométricas, a resistência das juntas e os modelos analíticos ou numéricos.

Para compreender as juntas coladas e as vantagens que essas possuem sobre as juntas mecânicas, é preciso verificar as juntas fabricadas com fixadores (prendedores) como rebites e parafusos. Para tal tarefa, Niu (1989) apresentou modelos de transferência de carga em juntas com prendedores, relacionando à diferença entre a rigidez da peça com a rigidez do prendedor. Em um conjunto de fixadores, a distribuição de cargas entre os mesmos não é igual, pois cada um transfere uma quantidade de carga diferente, sendo que o primeiro prendedor da cravação é o pino mais carregado. Quanto mais rígido é o prendedor em relação à rigidez da peça, maior a carga que o primeiro pino da cravação carrega, diminuindo para os demais pinos da cravação, voltando a aumentar para o último pino, pois este é o primeiro pino da cravação no sentido oposto. Niu (1989) sugere, então, usar no máximo de quatro (4) prendedores por linha de cravação, pois uma linha de cravação com mais prendedores não apresenta vantagens. Outro ponto discutido por Niu (1989) sobre transferência de cargas em juntas é o escalonamento das peças a serem unidas. Com o escalonamento das peças, a rigidez da mesma varia ($K_p = \frac{EA_s}{L}$, onde K_p é a rigidez da peça, L é o comprimento, A_s é a área da seção transversal e E é o módulo de elasticidade), podendo igualar-se a transferência de cargas para todos os prendedores da cravação. Vale ressaltar que os estudos realizados pelo referido pesquisador foram baseados em juntas mecânicas metal-metal.

Por outro lado, o uso de compósitos reforçados por fibras tem obtido grande aceitação por constituir uma excelente maneira de se obter elementos estruturais rígidos, fortes e leves, como discutido anteriormente. Entretanto, a transmissão de carga em elementos estruturais de

compósitos pode ser efetuada através de parafusos, rebites ou, principalmente, por adesivos. Sendo que a escolha do tipo de junta está associada com dificuldades consideráveis. Uma das razões é que estruturas de compósitos são laminadas e, portanto, apresentam pouca resistência para cisalhamento interlaminar e tensão normal, principalmente na presença de furos para a instalação de prendedores. Portanto na região da junta, seja mecânica ou colada, têm-se as partes mais críticas, sendo fortemente influenciadas pelo empilhamento do laminado. No entanto, como regra geral, as juntas coladas são melhores para transferência de carga do que uniões mecânicas, conforme discutido por Thomsen e Mortensen (2002).

Existem vários tipos de juntas coladas, podendo-se citar as juntas simples (“single lap joints”), juntas duplas (“double lap joints”), juntas em ângulo (“scarf joints”) e as “strap joints”. A Figura 13 apresenta os tipos de juntas.

Figura 13: Tipos de juntas coladas.

Os tipos mais comuns de juntas coladas já foram anteriormente estudados por diversos pesquisadores, como Hart e Smith (1987), que utilizaram diferentes tipos de abordagens para o mesmo assunto sendo que todos realizaram estudos paramétricos sobre o desempenho das juntas, porém estes modelos consideravam os laminados como materiais isotrópicos ou como sendo simétricos considerando somente rigidez para tração e flexão. Nesta abordagem, os laminados são considerados como sendo placas largas em flexão cilíndrica, ou seja, os campos de deslocamentos podem ser descritos como sendo função exclusiva dos deslocamentos no sentido longitudinal da junta. Portanto, o campo de deslocamento é:

$$u_0^i = u_0^i(x), v_0^i = v_0^i(x), w^i = w^i(x) \quad (1)$$

Em Hart e Smith (1987) foram estudados os efeitos do acoplamento induzido por laminados assimétricos e desbalanceados, a seqüência de empilhamento nos laminados e a influência de se modelar a junta como placas largas em flexão ao invés de barra. Ainda, nessa mesma referência, também é demonstrado por experimentos como o efeito de condições ambientais tais como umidade e temperatura afetam o laminado e o adesivo e, por conseqüência, a resistência da junta.

Deve-se ressaltar que as configurações mais tradicionais, principalmente as juntas simples, apresentam principalmente o momento secundário que gera tensões indesejadas na mesma. A Figura 14 mostra as tensões em uma junta sobreposta colada, onde se pode observar tensões normais devido ao momento causado pela aplicação da força normal N_{xx} , portanto, na região de junção atuam tensões normais e de cisalhamento.

Figura 14: Esquema de esforços em uma junta simples colada.

A determinação correta dos níveis de tensão que ocorrem nas juntas foi sempre um grande desafio para os pesquisadores. Métodos analíticos, como o desenvolvido por Hart e Smith (1987), sempre foram muito limitados, necessitando-se assim, o emprego de Métodos Numéricos. Um dos primeiros métodos numéricos para análise de juntas coladas foi também apresentado por Hart e Smith (1987). Além desse método, vários pesquisadores solucionaram o problema de juntas coladas empregando o Método dos Elementos Finitos como nos trabalhos apresentados por Charalambides, Kinloch e Matthews (1998); Goyal, Johnson, Goyal Vijay (2008). Por outro lado, Mortensen (1998) empregou de forma muito interessante o Método de Multi-Segmentos de Integração para solucionar o problema de análise de tensões em vários tipos de juntas. Vale ressaltar que posteriormente, este método será descrito em maiores detalhes, pois o mesmo constitui a base da solução utilizada pelo programa ESAComp[®].

Os métodos citados acima não vêm sendo utilizados somente para o estudo de juntas coladas do tipo compósito-compósito. Mais recentemente, estão sendo utilizados também para o estudo de juntas coladas híbridas, ou seja, metal-compósito. Por exemplo, Okafor et al (2005) elaboram um modelo em elementos finitos para estudar chapas de alumínio danificadas reparadas com um laminado Boro/epóxi colado. Para validar esse modelo, os pesquisadores realizaram experimentos com chapas de alumínio 2024-T3, com um corte simulando uma trinca que foi reparada com um laminado de compósito colado. Com esse estudo os pesquisadores mostraram que há uma redução significativa na tensão máxima da chapa de alumínio após a aplicação do reparo e que, principalmente, a região onde essa tensão ocorria mudou da região da trinca para a região próxima às bordas do reparo. Os pesquisadores ainda estudaram algumas influências geométricas na junta colada, como a influência do número de camadas do reparo. No entanto, para que este tipo de estudo possa ser realizado, recorre-se geralmente à Teoria Clássica de Laminados que será brevemente descrita a seguir.

2.2.1 ANÁLISE DE FALHA DE LAMINADOS

Para uma análise de juntas em que um dos aderentes é um compósito laminado recorre-se muitas vezes à Teoria Clássica de Laminados para se obter o estado de tensões e de deformações em cada lâmina.

Inicialmente, do estado triaxial de tensão, apresentado na Figura 15, tem-se o seguinte tensor de tensões:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Figura 15: Estado triplo de tensões.

Devido ao equilíbrio, tem-se:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \text{ e } \tau_{xz} = \tau_{zx} \text{ e } \tau_{yz} = \tau_{zy} . \quad (3)$$

Segue que o tensor é simétrico e pode ser representado por um vetor de 6 posições:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \text{ ou } \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \text{ ou } \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

De forma análoga tem-se que o tensor de deformação é dado por:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Devido à simetria do tensor, tem-se que:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix} \text{ ou } \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \text{ ou } \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \text{ ou } \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (6)$$

A equação constitutiva relaciona a tensão com a deformação do material. Para materiais anisotrópicos temos a Lei de Hooke generalizada, dada por:

$$\sigma_i = D_{ij} \varepsilon_j \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Pode-se demonstrar que o tensor C é simétrico ($C_{ij}=C_{ji}$). No caso de materiais ortotrópicos, estes podem ser representados por nove constantes elásticas. Esta característica pode ser mais facilmente observada escolhendo o eixo de simetria do sistema de referência paralelo aos planos principais do material.

Um material ortotrópico não apresenta acoplamento entre tensões normais e distorções angulares, e também não terá acoplamento entre tensão de cisalhamento e deformações normais. Com isso a matriz C fica:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (9)$$

A matriz de flexibilidade S é dada pelo inverso da matriz de rigidez C ($S=C^{-1}$). O que resulta em:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Utilizando as relações básicas da teoria da elasticidade, como $\varepsilon_1 = \frac{1}{E_{11}}(\sigma_1 - \nu_{12}(\sigma_2 + \sigma_3))$

e $\gamma_{ij} = \frac{1}{G_{ij}}\tau_{ij}$ e sabendo que por simetria $\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}$, pode-se obter os seguintes valores para os

coeficientes da matriz de flexibilidade:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_{11}} ; S_{21} = \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} ; S_{31} = \frac{-\nu_{13}}{E_{11}} \\ S_{12} &= \frac{-\nu_{21}}{E_{22}} ; S_{22} = \frac{1}{E_{22}} ; S_{32} = \frac{-\nu_{23}}{E_{22}} \\ S_{13} &= \frac{-\nu_{13}}{E_{33}} ; S_{23} = \frac{-\nu_{32}}{E_{33}} ; S_{33} = \frac{1}{E_{33}} \\ S_{44} &= \frac{1}{G_{23}} ; S_{55} = \frac{1}{G_{31}} ; S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (11)$$

Com a inversa da matriz de flexibilidade, tem-se a matriz C:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Onde:

$$C_{11} = \frac{E_{11}(1-\nu_{23}\nu_{32})}{\Delta}; C_{22} = \frac{E_{22}(1-\nu_{31}\nu_{13})}{\Delta}; C_{33} = \frac{E_{33}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\Delta}; C_{44} = G_{23}; C_{55} = G_{13}$$

$$C_{66} = G_{12}; C_{12} = \frac{E_{11}(\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})}{\Delta} = \frac{E_{22}(\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13})}{\Delta}$$

$$C_{13} = \frac{E_{11}(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})}{\Delta} = \frac{E_{22}(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})}{\Delta}; C_{23} = \frac{E_{22}(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})}{\Delta} = \frac{E_{33}(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})}{\Delta}$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{31}$$

Na maior parte das aplicações estruturais, materiais compósitos são utilizados na forma de finas lâminas carregadas no próprio plano. Uma lâmina fina e unidirecional pode ser considerada por estar num estado plano de tensões. Devido ao estado plano de tensões, tem-se que as componentes de tensão fora do plano podem ser consideradas iguais a zero. Tem-se, portanto:

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= 0 \\ \tau_{23} &= \tau_4 = 0 \\ \tau_{13} &= \tau_5 = 0\end{aligned}\tag{13}$$

Então, um material ortotrópico pode ser caracterizado por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}\tag{14}$$

Tem-se assim que:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 \\ \sigma_2 &= C_{21}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3 \\ 0 &= C_{31}\varepsilon_1 + C_{32}\varepsilon_2 + C_{33}\varepsilon_3 \\ \gamma_4 &= \gamma_5 = 0 \\ \tau_6 &= C_{66}\gamma_6\end{aligned}\tag{15}$$

Isolando o termo ε_3 das equações acima, têm-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \left(C_{11} - \frac{C_{13}C_{13}}{C_{33}} \right) \varepsilon_1 + \left(C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} \right) \varepsilon_2 = Q_{11}\varepsilon_1 + Q_{12}\varepsilon_2 \\ \sigma_2 &= \left(C_{12} - \frac{C_{23}C_{13}}{C_{33}} \right) \varepsilon_1 + \left(C_{22} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{33}} \right) \varepsilon_2 = Q_{12}\varepsilon_1 + Q_{22}\varepsilon_2 \\ \tau_6 &= C_{66}\gamma_6 = Q_{66}\gamma_6\end{aligned}\tag{16}$$

Dessa forma, pode-se considerar a matriz de rigidez reduzida mostrada abaixo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}\tag{17}$$

Na qual, em termos de constantes elásticas, tem-se:

$$\begin{aligned}Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_{11}^2}{E_{11} - \nu_{12}^2 E_{22}} \\ Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_{11}E_{22}}{E_{11} - \nu_{12}^2 E_{22}} \\ Q_{66} &= G_{12}\end{aligned}\tag{18}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_{11}E_{22}}{E_{11} - \nu_{12}^2 E_{22}}$$

$$\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = \frac{\nu_{21}}{E_{22}}$$

Normalmente o carregamento em uma lâmina não coincide com as suas direções principais, acarretando numa transformação do estado de tensão e de deformação dessa lâmina referenciadas nos seus eixos principais para eixos no qual o material sofre o carregamento.

Figura 16: Estado de tensão em uma lâmina de material compósito.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{Local} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{Global} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{Global} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{Local} \quad (19)$$

Sendo que a matriz de transformação é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ -\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) & (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & (m^2 - n^2) \end{bmatrix} \quad (20)$$

Onde: $m = \cos(\theta)$;

$n = \sin(\theta)$.

Analogamente para as deformações, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \frac{\gamma_6}{2} \end{bmatrix}_{Local} = [T] \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix}_{Global} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix}_{Global} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \frac{\gamma_6}{2} \end{bmatrix}_{Local} \quad (21)$$

Tem-se a relação constitutiva para o sistema global em função da matriz de rigidez reduzida. Sendo que daqui em diante σ_{xy} será tratado por τ_s e γ_{xy} por γ_s .

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 2Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & 2Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & 2Q_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_s}{2} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_6}{2} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_s}{2} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Das duas relações apresentadas acima, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} [T] \quad (24)$$

Da relação acima, pode-se obter a rigidez da lâmina em função dos eixos principais do laminado. Estas relações estão apresentadas abaixo:

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= m^4 Q_{11} + 2m^2 n^2 (Q_{12} + 2Q_{66}) + n^4 Q_{22} \\ Q_{yy} &= n^4 + 2n^2 m^2 (Q_{12} + 2Q_{66}) + m^4 Q_{22} \\ Q_{xy} &= n^2 m^2 (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) + (n^4 + m^4) Q_{12} \\ Q_{xs} &= nm^3 (Q_{11} - Q_{12}) + n^3 m (Q_{12} - Q_{22}) - 2mn(m^2 - n^2) Q_{66} \\ Q_{ys} &= n^3 m (Q_{11} - Q_{12}) + nm^3 (Q_{12} - Q_{22}) + 2mn(m^2 - n^2) Q_{66} \\ Q_{ss} &= n^2 m^2 (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) + (n^4 - m^4) Q_{66} \end{aligned} \quad (25)$$

Como se pode observar, a orientação das fibras irá influenciar nas propriedades elásticas e na matriz de rigidez do laminado.

Figura 17: Esforços atuantes.

A Figura 17 mostra os esforços atuantes em um laminado, estes esforços podem ser calculados por meio das tensões internas do laminado. Os esforços normais e cortantes são obtidos por meio da equação abaixo:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{zy} \end{bmatrix} dz \quad (26)$$

Já os momentos podem ser obtidos através da equação abaixo:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (27)$$

Para se obter a tensão interna do laminado, faz-se uso da Teoria Clássica dos Laminados, que tem as seguintes hipóteses:

- O laminado é considerado plano, e o plano médio que o divide ao meio está contido no plano xy;
- As lâminas estão perfeitamente aderidas entre si, não existindo deslocamento relativo entre elas, permitindo-se uma continuidade dos deslocamentos;

- A interface entre a lâmina é muito fina e não deformável por cisalhamento;
- Para os laminados finos é empregada a teoria das aproximações cinemáticas de Kirchhoff. ($\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_z = 0$ e $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_z \ll \sigma_{xy}, \sigma_y, \sigma_x$).

A aproximação cinemática de Kirchhoff não leva em conta as influências de σ_{xz} , σ_{yz} e σ_z , entretanto essas tensões possuem um papel relevante no estudo das delaminações.

Figura 18: Aproximações cinemáticas de Kirchhoff.

De acordo com a Figura 18, para um ponto genérico C, tem-se:

$$u_c = u_0 - z_c \beta \quad (28)$$

$$\beta = \frac{\partial W_0}{\partial x} \quad (29)$$

Os deslocamentos u e v nas direções x e y são dados por:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial W_0(x, y)}{\partial x} \quad (30)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial W_0(x, y)}{\partial y} \quad (31)$$

O deslocamento na direção z é dado por:

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (32)$$

As deformações no plano serão dadas por:

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \varepsilon_{x0} + zK_x \quad (33)$$

$$\varepsilon_y(x, y, z) = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \varepsilon_{y0} + zK_y \quad (34)$$

$$2\varepsilon_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 2\varepsilon_{xy0} + zK_{xy} \quad (35)$$

As aproximações de Kirchhoff resultam em deslocamentos e deformações lineares, portanto:

$$[\varepsilon]_{global} = [\varepsilon_0]_{global} + z[K]_{global} \quad (36)$$

Segue que a distribuição de tensão varia de camada para camada ao longo da espessura, portanto tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_k \quad (37)$$

Substituindo a relação 37 na equação acima, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{s0} \end{bmatrix}_k + z \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix}_k \quad (38)$$

Reescrevendo:

$$[\sigma]^k = [Q]^k [[\varepsilon_0] + z[K]] \quad (39)$$

Onde: $[\varepsilon_0]$ = deformação no plano médio do laminado;

$[K]$ = curvatura do laminado medido em relação ao plano médio;

O sobre-índice k indica a lâmina.

Substituindo, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{s0} \end{bmatrix} dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q] \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix} z dz \right\} \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{s0} \end{bmatrix} z dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q] \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix} z^2 dz \right\} \quad (41)$$

A matriz $[Q]$ permanece constante na lâmina uma vez que é função do ângulo de orientação das fibras, e a matriz $[Q]$ depende apenas das propriedades elásticas da lâmina. A deformação no plano médio do laminado $[\varepsilon_0]$ e a curvatura $[K]$ permanecem constantes para cada lâmina. Pode-se escrever as equações acima como:

$$[N] = [A][\varepsilon_0] + [B][K] \quad (42)$$

$$[M] = [B][\varepsilon_0] + [D][K] \quad (43)$$

Pode-se calcular os termos das matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$, utilizando a formulação apresentada abaixo:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (44)$$

Onde: A_{ij} é a matriz que representa a rigidez de membrana;

B_{ij} é a matriz que representa o acoplamento entre a rigidez de membrana e a flexão/torção;

D_{ij} é a matriz que representa a rigidez a flexão/torção.

Tem-se, portanto:

$$\begin{bmatrix} [N] \\ [M] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\varepsilon_0] \\ [K] \end{bmatrix} \quad (45)$$

Para se calcular a matriz ABBD, utiliza-se do diagrama mostrado na Figura 19.

Figura 19: Diagrama para cálculo da matriz ABD.

Após a análise de tensões e de deformações, segue-se então para a análise de falha. Vale ressaltar que numa análise estrutural de falha é necessário se conhecer os limites de resistência dos materiais utilizados. Para o caso de materiais compósitos, a falha ocorre devido à combinação de diversos mecanismos e que a mesma é ocasionada por um processo de acúmulos de danos (Souza, 2003), como discutido anteriormente. Durante a fase de projeto devido à dificuldade de se detalhar o processo de falha, torna-se importante a seleção apropriada de um critério de falha (Souza, 2003). Os critérios de falha, após uma análise das tensões na estrutura indicam se houve ou não dano na estrutura. Existem vários critérios de falha para materiais compósitos e uma classificação desses critérios é apresentada por Carvalho (1996) como sendo limites, interativos, híbridos, micromecânicos, mecanismos de fratura, mecanismos de dano e fenomenológicos. Após a análise de tensões que o compósito está submetido, é então calculado o nível de tensão que cada camada do laminado está sujeita. Sendo assim, é aplicado o critério de falha mais adequado, a fim de se verificar se ocorreu ou não a falha naquela determinada lâmina. Para se verificar a falha do laminado, junto com o critério de falha são aplicadas basicamente dois tipos de abordagem, o *FPF* (“First Ply Failure”) no qual se considera que o laminado falha assim que ocorre a primeira falha em uma de suas camadas, sendo esta uma abordagem bem conservadora, visto que, o laminado não falha se apenas uma de

suas camadas falhar. Há também a abordagem, *LPF* (“Last Ply Failure”), no qual se considera que a falha no laminado ocorre quando a última camada falhar.

Souza (2003) fez uma relação dos vários critérios de falha, tais como: Critério da Máxima Tensão e Máxima Deformação; Critério de Hill; Critério de Tsai-Hill; Critério de Tsai-Wu; Critério de Hashin; Critérios de Marin e Franklin-Marin; Critério de Norris; Critério de Cowin; Critério de Hoffman; Critério de Gol’Denblat e Kopnov; Critério de Ashkenazi; Critério de Fischer; Critério de Tennyson; Critério de Griffith-Baldwin, e finalmente, o Critério de Chang-Chang. No presente trabalho será adotado o critério de Chang-Chang que se baseia no critério de Hashin mencionado por Paris (2001) como sendo um dos critérios mais adequados para materiais compósitos (Tita, 2003). Segue assim, uma apresentação das equações do critério de Chang e Chang.

Modo de falha da fibra sob compressão ($\sigma_{1_f} < 0$):

$$\left(\frac{\sigma_{1_f}}{X_c} \right)^2 = e_F^2 \quad (46)$$

Se $e_F^2 \leq 1$ a fibra não danificou, se $e_F^2 > 1$ a fibra danificou.

Onde σ_{1_f} é a tensão na direção da fibra, X_c é o limite de resistência da lâmina sob compressão na direção da fibra.

Modo de falha da fibra sob tração ($\sigma_{1_f} > 0$):

$$\left(\frac{\sigma_{1_f}}{X_T} \right)^2 + \frac{\int_0^{\gamma_{12}} \sigma_{12} d\gamma_{12}}{\int_0^{\gamma_{12}''} \sigma_{12} d\gamma_{12}} = e_F^2 \quad (47)$$

$$\left(\frac{\sigma_{1_f}}{X_T} \right)^2 + \frac{\left(\frac{2\sigma_{12}^2}{G_{12}} \right) + (3\alpha\sigma_{12}^4)}{\left(\frac{2S_{12}^2}{G_{12}} \right) + (3\alpha S_{12}^4)} = e_F^2 \quad (48)$$

Se $e_F^2 \leq 1$ a fibra não danificou, se $e_F^2 > 1$ a fibra danificou.

Onde X_T é a resistência da lâmina sob tração na direção da fibra e S_{12} é a resistência ao cisalhamento no plano da lâmina.

Modo de falha da matriz sob compressão ($\sigma_{2_M} < 0$):

$$\left(\frac{\sigma_{2_M}}{2S_{23}} \right)^2 + \left[\left(\frac{Y_C}{2S_{23}} \right)^2 - 1 \right] \frac{\sigma_{2_M}}{Y_C} + \frac{\left(\frac{2\sigma_{12}^2}{G_{12}} \right) + (3\alpha\sigma_{12}^4)}{\left(\frac{2S_{12}^2}{G_{12}} \right) + (3\alpha S_{12}^4)} = e_M^2 \quad (49)$$

Se $e_M^2 \leq 1$ a matriz não danificou, se $e_M^2 > 1$ a matriz danificou.

Onde Y_C é a resistência da lâmina sob compressão transversal e S_{23} é a resistência ao cisalhamento no plano 2-3.

Modo de falha da matriz sob tração ($\sigma_{2_M} > 0$):

$$\left(\frac{\sigma_2}{Y_T} \right)^2 + \frac{\left(\frac{2\sigma_{12}^2}{G_{12}} \right) + (3\alpha\sigma_{12}^4)}{\left(\frac{2S_{12}^2}{G_{12}} \right) + (3\alpha S_{12}^4)} = e_M^2 \quad (50)$$

Se $e_M^2 \leq 1$ a matriz não danificou, se $e_M^2 > 1$ a matriz danificou.

Onde Y_T é a resistência da lâmina sob tração transversal.

Além das tensões produzidas em função dos carregamentos mecânicos, podem-se obter as tensões produzidas em função de carregamentos térmicos. Deve-se destacar que os processos de fabricação de materiais compósitos induzem efeitos reversíveis ou irreversíveis devido à exposição sob temperaturas elevadas (temperatura de cura) e mudanças químicas, sendo que as manifestações mais comuns desses efeitos são as tensões residuais e o empenamento do

laminado (Daniel e Ishai, 2006). O processo de análise desses efeitos em uma estrutura de compósito é um importante detalhe ao se projetar uma peça utilizando esse tipo de material, sendo que o desempenho da estrutura é função do ambiente que a mesma está exposta, distribuição de temperatura, dos efeitos ambientais e de variáveis de processo (Daniel e Ishai, 2006).

2.2.2 ANÁLISE DE ADESIVOS E METAIS

Dada a necessidade de prever o comportamento de materiais reais, que por suas vez se apresentam bastante complexos, tem-se que uma das alternativas para se representar tal comportamento, é através de modelos reológicos, que buscam de maneira mais simples a relação entre tensão e deformação dos materiais (Sobotka, 1984).

Materiais poliméricos quando sofrem pequenas deformações podem ser analisados utilizando um modelo linear elástico. Porém, para resultados mais precisos, variáveis como tempo e histórico de carregamento deverão ser considerados. Sendo que, os modelos mais precisos para se representar o comportamento de adesivos poliméricos em juntas coladas são os modelos elastoplásticos e os modelos viscoelásticos. Já os materiais metálicos podem ser modelados como sendo elastoplástico.

Um exemplo de modelo reológico para um material elástico linear é uma mola, conforme é mostrado na Figura 20, onde há o surgimento de deformações elásticas instantâneas ao se solicitar estaticamente o material. Este modelo é independente do tempo. Quando se descarrega, a mola volta à sua dimensão original, sem deformações permanentes (Sobotka, 1984).

Figura 20: Modelo elástico linear.

O modelo viscoso possui como representação reológica uniaxial um amortecedor, cujo comportamento é dependente do tempo, assim haverá modificações nas deformações ao longo do tempo, mesmo que as tensões não variem (Sobotka, 1984). A Figura 21 apresenta a representação reológica para um elemento viscoso onde η representa a viscosidade do material.

Figura 21: Modelo viscoso.

Finalmente, o modelo plástico caracteriza-se pelo aparecimento de deformações permanentes e possui a representação reológica uniaxial de um freio que desliza a partir do momento que o limite de escoamento do material é alcançado. As deformações nesse caso são imediatas e irreversíveis (Sobotka, 1984). A Figura 22 apresenta o modelo reológico uniaxial para deformação plástica, onde σ_0 representa o limite de escoamento do material.

Figura 22: Modelo plástico.

Com a utilização combinada dos três modelos reológicos básicos, é possível modelar o comportamento de diversos materiais, como por exemplo, na Figura 23 tem-se um modelo capaz de representar o comportamento elastoplástico de um material (Sobotka, 1984).

Figura 23: Modelo elastoplástico.

No modelo acima, H é o módulo plástico do material, ε_p e ε_e são as deformações plásticas e elásticas respectivamente. No modelo elastoplástico, o material apresenta um comportamento linear até o ponto onde o mesmo atinge o seu ponto de escoamento, a partir desse limite, o material passa a se comportar de maneira não linear e quando descarregado, o material apresenta deformações permanentes. Por outro lado no processo de carregamento e descarregamento, no regime plástico, o material segue uma linha paralela ao regime elástico (Sobotka, 1984). Deve-se destacar que esse modelo é independente do tempo.

No presente trabalho, considerou-se que tanto o adesivo polimérico como o aderente metálico fossem modelados como materiais puramente elásticos, desconsiderando assim, os efeitos de viscosidade e de plasticidade. Para tal, tem-se que os níveis de deformação aplicados foram monitorados a fim de que o limite elástico não fosse ultrapassado. Com base nessa hipótese, tem-se que o nível de tensão no adesivo, bem como, os deslocamentos e esforços nos aderentes, pudessem ser obtidos através da solução de um conjunto de sistemas de equações diferenciais. Esses sistemas de equações diferenciais constituem parte de um problema de valor de contorno de domínio múltiplo, sendo, portanto necessário a utilização de métodos numéricos específicos para resolvê-los.

2.2.3 ANÁLISE DE JUNTAS COLADAS

Vale lembrar que as equações diferenciais descrevem um fenômeno que muda continuamente. Por si só um sistema de equações diferenciais possui várias soluções, sendo que a solução de interesse pode ser determinada em um único ponto (problema de valor inicial) ou em

mais de um ponto (problema de valor de contorno). O sistema de equações de juntas aderidas se caracteriza por ser um problema de valor de contorno (Shampine, Kierzenka, Reichelt, 2006). Um problema de valor de contorno pode não ter solução, pode ter um número finito de soluções ou até mesmo um número infinito de soluções. Singularidades nos coeficientes e problemas que surgem devido a intervalos infinitos não são incomuns (Shampine, Kierzenka, Reichelt, 2006).

Para se resolver o problema acima, pode-se utilizar o método de multi-segmentos de integração utilizado por Mortensen (1998), que está implementado no ESAComp[®], ou pode-se utilizar a rotina `bvp4c` do Matlab[®] para resolução de problemas de valor de contorno, que foi utilizada no presente trabalho (detalhada no Anexo A).

O método de multi-segmentos é um “multiple point shooting method” sendo utilizado quando há múltiplas condições iniciais e diferentes variáveis. Este método se inicia estabelecendo aproximações da derivada da equação para encontrar um valor entre os extremos do domínio, não considerando o valor de contorno na extremidade oposta da extremidade na qual o problema começa a ser resolvido. Para resolver as equações diferenciais, é utilizado o método de Runge-Kutta de quarta ordem. O primeiro passo para a solução começa pela utilização do método de quarta ordem de Runge-Kutta com o “chute” inicial da derivada da equação para solucionar o problema. Caso o “chute” inicial esteja correto, o valor do resultado da solução das equações diferenciais no outro extremo do domínio é comparado com o valor da condição de contorno nesse local. Caso o “chute” inicial esteja errado, é então fornecido outro valor para a derivada inicial até que o resultado esteja correto, então o valor resultante da solução das equações diferenciais no outro extremo do domínio é comparado com a condição de contorno nesse local, sendo então repetido o método de maneira iterativa. Com esses dois resultados, é então estabelecido um terceiro “chute” utilizando uma interpolação linear entre esses resultados dos dois extremos do domínio. E assim esse método é repetido até que as condições de contorno em ambos os extremos do domínio sejam atendidas. A Figura 24 mostra o esquema de como o problema de valor de contorno é resolvido.

Figura 24: Solução do problema de valor de contorno utilizando o “shooting method”. O eixo das abscissas representa o domínio do problema, e o das ordenadas representa os valores das soluções das equações diferenciais.

Saha e Banu (2007) explicam que o método de multi-segmentos de integração apresenta a vantagem de requisitar menos esforço computacional, porém o sucesso desse método é limitado a problemas pouco complexos, os quais podem ser tratados também por integração direta. Por exemplo: dado o sistema linear de equações diferenciais de ordem m na forma matricial:

$$\frac{d}{dx}[y(x)] = A(x) \cdot y(x) + B(x) \quad (51)$$

$$\text{Sendo: } y(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (53)$$

Pode-se escrever as condições de contorno como sendo (em forma matricial):

$$Cy(a) + Dy(b) = E \quad (54)$$

Considere a solução como sendo:

$$y(x) = Y(x) \cdot G + Z(x) \quad (55)$$

Onde: G é a constante de integração;

$Y(x)$ é a solução geral do sistema;

$Z(x)$ é a solução particular do sistema.

Considere:

$$\frac{d}{dx}[Y(x)] = A(x) \cdot Y(x) \text{ com } Y(a) = I \quad (56)$$

$$\frac{d}{dx}[Z(x)] = A(x) \cdot Z(x) + B(x) \text{ com } Z(a) = 0 \quad (57)$$

Resolvendo a equação de $y(x)$ em $x=a$, tem-se:

$$y(a) = Y(a) \cdot G + Z(a). \quad (58)$$

Segue que resolvendo a equação acima, tem-se que $G=Y(a)$.

Resolvendo novamente a equação de $y(x)$ em $x=b$, tem-se:

$$y(b) = Y(b) \cdot G + Z(b) \quad (59)$$

Onde $Y(b)$ pode ser obtido pela equação $\frac{d}{dx}[Y(x)]$ através do método de Runge-Kutta de ordem 4 com condição inicial $Y(a)=I$ e $Z(b)$ é obtido pela equação $\frac{d}{dx}[Z(x)]$ através do método de Runge-Kutta de ordem 4 com condição inicial $Z(a)=0$.

Aplicando os resultados obtidos para $y(a)$ e $y(b)$ na equação de condição de contorno, tem-se:

$$Cy(a) + D[Y(b) \cdot y(a) + Z(b)] = E \quad (60)$$

Da equação acima obtém-se o seguinte valor para $y(a)$:

$$y(a) = [C + D \cdot Y(b)]^{-1} \cdot [E - D \cdot Z(b)] \quad (61)$$

Por outro lado, Shampine, Kierznka e Reichelt (2006) explicam como a função `bvp4c` do Matlab[®] resolve o problema de valor de contorno. Sendo que a seguir é apresentada uma descrição de como essa função do Matlab[®] opera.

Se a função f é suave no intervalo $[a,b]$, o problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(a)$ possui somente uma solução. Dado o problema de valor de contorno de dois pontos:

$$y'' + y = 0 \quad (62)$$

Uma vez que as condições de contorno são dadas como $y(a)=A$ e $y(b)=B$. Para analisar esse tipo de problema é importante analisar a família de soluções dos problemas de valor inicial. Sendo $y(x,s)$ a solução do problema descrito acima com valores iniciais $y(a)=A$ e $y'(a)=s$. Cada $y(x,s)$ se estende para a outra extremidade do intervalo, $x=b$, e nesse caso tem-se que descobrir para qual valor de s obtém-se $y(b,s)=B$.

Caso haja solução para a equação algébrica s , tem-se, portanto, que o correspondente $y(x,s)$ resolve as equações diferenciais solucionando o problema de valor de contorno. Utilizando uma aproximação linear, fazendo $u(x)$ ser a solução definida para $y(a)=A$, $y'(a)=0$ a $v(x)$ ser a solução definida para $y(a)=0$ e $y'(a)=1$. Esta aproximação linear implica que $y(x,s)=u(x)+sv(x)$ e a condição de contorno $B=y(b,s)=u(b)+sv(b)$, resultam em um conjunto de equações algébricas lineares com inclinação inicial s .

Em alguns tipos de problemas, pode ocorrer que as equações para se obter a solução sejam não lineares, o que resulta que a existência e a unicidade do resultado são questões difíceis de serem respondidas. Resolver um problema de valor de contorno muitas vezes envolve escolher qual solução é a mais adequada.

A aproximação teórica para se resolver problemas de valor de contorno é baseada na solução de problemas de valor inicial para equações diferenciais ordinárias e na solução de equações não lineares. Devido à existência de programas para resolver as equações diferenciais e

as equações não lineares é natural combinar-se ambos os programas para resolver o problema de valor de contorno. Esse método é chamado de “shooting method”. Uma desvantagem do método “shooting” é que na resolução do problema de valor de contorno é necessária a integração dos problemas de valor inicial que podem ser instáveis. A função `bvp4c` do Matlab[®] não se utiliza desse método. A função `bvp4c` (ver anexo A) aplica o método de colocação para a resolução do problema de valor de contorno da forma:

$$y' = f(x, y, p), \quad a \leq x \leq b \quad (63)$$

Sujeitos à condição de dois pontos de valor de contorno não linear:

$$g(y(a), y(b), p) = 0 \quad (64)$$

Sendo p é o vetor de parâmetros desconhecidos, que por simplicidade não será escrito nas próximas equações. A solução aproximada $S(x)$ é uma função polinomial cúbica contínua no subintervalo $[x_n, x_{n+1}]$ com malha $a=x_0 < x_1 < \dots < x_N < b$. Satisfazendo a seguinte condição de contorno:

$$g(S(a), S(b)) = 0 \quad (65)$$

E satisfazendo as equações diferenciais nas extremidades e no meio de cada subintervalo:

$$\begin{aligned} S'(x_n) &= f(x_n, S(x_n)) \\ S'\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right) &= f\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}, S\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)\right) \\ S'(x_{n+1}) &= f(x_{n+1}, S(x_{n+1})) \end{aligned} \quad (66)$$

Estas condições resultam em um sistema de equações não lineares para os coeficientes $S(x)$. Em contraste com o método “shooting”, a solução $y(x)$ é aproximada para todo o intervalo $[a, b]$ e as condições de contorno são contabilizadas todas às vezes. O sistema de equações não lineares é resolvido através de métodos de linearização, os quais são encontrados como funções do Matlab[®]. O método `bvp4c` é conhecido como método de Simpson, sendo esse método bem estabelecido e encontrado em vários programas.

Devido aos problemas de valores de contorno possuir mais do que uma solução, os programas para solução do problema exigem que o usuário entre com um “chute” para a solução desejada na malha do problema e esse “chute” inicial irá se refletir em como a resposta irá se comportar. A função `bvp4c` utiliza uma aproximação não usual para o controle do erro o que auxilia essa função a operar com “chutes” iniciais ruins.

3. PROPOSTA DE UMA ABORDAGEM DE ANÁLISE

O presente capítulo apresenta de forma detalhada como foi elaborada a abordagem de análise de juntas coladas proposta no presente trabalho. Primeiramente são apresentados os procedimentos em forma de fluxograma, que foi utilizado para a implementação do programa implementado em código Matlab[®], sendo o mesmo designado pela sigla SAJ (Sistema de Análise de Juntas). Posteriormente, são apresentados mais detalhes do desenvolvimento do SAJ, incluindo o equacionamento dos modelos propostos para juntas simples e dupla, e as hipóteses adotadas. Também é discutida a forma de validação dos modelos implementados, utilizando resultados numéricos via Método dos Elementos Finitos (MEF) e resultados do programa comercial ESAComp[®].

3.1. PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

A Figura 25 apresenta um fluxograma geral para a análise linear elástica de juntas coladas. Vale ressaltar que este é o procedimento de análise empregado pelo SAJ.

Figura 25: Fluxograma para análise linear elástica - SAJ

Para se proceder com a análise linear elástica das juntas coladas utilizando o programa SAJ, deve-se fornecer como dado de entrada: os carregamentos a que a junta será submetida; as condições de contorno do problema, informando os graus de liberdade que serão restringidos; as propriedades mecânicas e a geometria do adesivo e dos aderentes, bem como, o tipo de junta a ser analisada (simples ou dupla).

Estes dados são fornecidos em forma de um arquivo no qual os dados devem ser fornecidos seguindo uma formatação específica (vide no Apêndice A). Com estes dados o programa, inicialmente gera o sistema de equações diferenciais, e depois, resolve o sistema de equações diferenciais do problema de valor de contorno, fornecendo os resultados de deslocamento da junta, esforços nos aderentes e tensões no adesivo para o caso desejado. Estes resultados são fornecidos em forma de gráficos ou de dados escritos em arquivos de saída.

3.2. EQUACIONAMENTO MATEMÁTICO

Nas próximas sessões serão apresentados os equacionamentos matemáticos tanto para junta simples colada (“single lap joint”) como para junta dupla colada (“double lap joint”).

3.2.1 EQUACIONAMENTO DA JUNTA SIMPLES COLADA

Para se proceder com o estudo de um modelo analítico para juntas coladas, Mortensen (1998), equaciona analiticamente vários tipos de juntas. No caso de uma junta colada simples, a junta é subdividida em três regiões diferentes. Duas regiões se caracterizam por possuir somente um aderente, e uma região intermediária na qual existe uma interface entre os aderentes, que é uma camada de adesivo. A Figura 26 mostra como o domínio do problema a ser resolvido foi subdividido.

Figura 26: Esforços na junta colada (adaptado de Mortensen, 1998).

Para o caso fora da região com adesivo tem-se o equilíbrio em um elemento infinitesimal do laminado como mostrado na Figura 27.

Figura 27: Equilíbrio em um elemento infinitesimal fora da região de interface com adesivo (adaptado de Mortensen, 1998).

Fazendo as relações de equilíbrio de forças e momentos, tem-se o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}
& -N_{xx}^i - N_{xy}^i + N_{xx}^i + \frac{dN_{xx}^i}{dx}dx + N_{xy}^i + \frac{dN_{xy}^i}{dy}dy = 0 \\
& -Q_x^i - Q_y^i + Q_x^i + \frac{dQ_x^i}{dx}dx + Q_y^i + \frac{dQ_y^i}{dy}dy = 0 \\
& -M_{xx}^i - M_{xy}^i + M_{xx}^i + \frac{dM_{xx}^i}{dx}dx + M_{xy}^i + \frac{dM_{xy}^i}{dy}dy - Q_x^i \cdot dx = 0 \\
& -N_{yy}^i - N_{xy}^i + N_{yy}^i + \frac{dN_{yy}^i}{dy}dy + N_{xy}^i + \frac{dN_{xy}^i}{dx}dx = 0 \\
& -M_{yy}^i - M_{xy}^i + M_{yy}^i + \frac{dM_{yy}^i}{dy}dy + M_{xy}^i + \frac{dM_{xy}^i}{dx}dx - Q_y^i \cdot dy = 0
\end{aligned} \tag{67}$$

Considerando as condições de contorno para o caso de flexão em uma placa cujo comprimento e largura são relativamente maiores do que a espessura (Figura 28), tem-se que não existe variação dos esforços em relação à direção y , ou seja, as derivadas em relação a y são iguais a zero.

Figura 28: Condições de contorno para placa em flexão cilíndrica (adaptado de Mortensen, 1998).

Portanto, as equações ficam como:

$$\begin{aligned}
\frac{dN_{xx}}{dx} dx &= 0 \\
\frac{dQ_x}{dx} dx &= 0 \\
\frac{dM_{xx}}{dx} dx - Q_x dx &= 0 \\
\frac{dN_{xy}}{dx} dx &= 0 \\
\frac{dM_{xy}}{dx} dx - Q_y dy &= 0
\end{aligned} \tag{68}$$

Da Teoria Clássica de Laminados, discutida anteriormente, tem-se as seguintes relações:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,x} \\ \gamma_{xy,x} \\ \kappa_{x,x} \\ \kappa_{y,y} \\ \kappa_{xy,x} \end{Bmatrix} \tag{69}$$

Invertendo a matriz ABD do sistema acima e aplicando as condições de contorno do problema estudado, obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,x} \\ 0 \\ \kappa_{x,x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ 0 \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{70}$$

$$\text{Onde } \kappa_x = -w_{xx}, u_{0,x} = \frac{du_0}{dx}, v_{0,x} = \frac{dv_0}{dx}, \kappa_{x,x} = \frac{d\kappa_x}{dx}$$

Do sistema acima e das equações de equilíbrio aplicando as condições de contorno para flexão cilíndrica, tem-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
u_{0,x} &= a_{11} \cdot N_{xx} + a_{13} \cdot N_{xy} + b_{11} \cdot M_{xx} \\
w_{,x} &= -\kappa_x \\
\kappa_{x,x} &= b_{11} \cdot N_{xx} + b_{13} \cdot N_{xy} + d_{11} \cdot M_{xx} \\
v_{0,x} &= a_{21} \cdot N_{xx} + a_{23} \cdot N_{xy} + b_{21} \cdot M_{xx} \\
0 &= a_{13} \cdot N_{xx} + a_{33} \cdot N_{xy} + b_{31} \cdot M_{xx} \\
0 &= b_{21} \cdot N_{xx} + b_{23} \cdot N_{xy} + d_{21} \cdot M_{xx} \\
0 &= b_{31} \cdot N_{xx} + b_{33} \cdot N_{xy} + d_{31} \cdot M_{xx} \\
\frac{dN_{xx}}{dx} dx &= N_{x,x} = 0 \\
\frac{dQ_x}{dx} dx &= Q_{x,x} = 0 \\
\frac{dM_{xx}}{dx} dx - Q_x dx &= 0 \Rightarrow M_{xx,x} = Q_x \\
\frac{dN_{xy}}{dx} dx &= N_{xy,x} = 0
\end{aligned} \tag{71}$$

O sistema resultante de equações para a região fora da junta é descrito como:

$$\begin{aligned}
u_{0,x} &= a_{11} \cdot N_{xx} + a_{13} \cdot N_{xy} + b_{11} \cdot M_{xx} \\
w_{,x} &= -\kappa_x \\
\kappa_{x,x} &= b_{11} \cdot N_{xx} + b_{13} \cdot N_{xy} + d_{11} \cdot M_{xx} \\
v_{0,x} &= a_{21} \cdot N_{xx} + a_{23} \cdot N_{xy} + b_{21} \cdot M_{xx} \\
N_{x,x} &= 0 \\
Q_{x,x} &= 0 \\
M_{xx,x} &= Q_x \\
N_{xy,x} &= 0
\end{aligned} \tag{72}$$

Em forma matricial, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ w_{,xx} \\ \kappa_{x,x} \\ v_{0,x} \\ N_{x,x} \\ N_{xy,x} \\ M_{xx,x} \\ Q_{x,x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{13} & b_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{13} & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{23} & b_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_0 \\ w_x \\ \kappa_x \\ v_0 \\ N_x \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ Q_x \end{Bmatrix} \quad (73)$$

Para ser implementado no programa, o sistema acima fica descrito para a região 1 (há somente o aderente 1 – Figura 26) do problema de valor de contorno como:

$$\begin{aligned} u_{0,x}^1 &= a_{11}^1 \cdot N_{xx}^1 + a_{13}^1 \cdot N_{xy}^1 + b_{11}^1 \cdot M_{xx}^1 \\ w_{,x}^1 &= -\kappa_x^1 \\ \kappa_{x,x}^1 &= b_{11}^1 \cdot N_{xx}^1 + b_{13}^1 \cdot N_{xy}^1 + d_{11}^1 \cdot M_{xx}^1 \\ v_{0,x}^1 &= a_{21}^1 \cdot N_{xx}^1 + a_{23}^1 \cdot N_{xy}^1 + b_{21}^1 \cdot M_{xx}^1 \\ N_{x,x}^1 &= 0 \\ Q_{x,x}^1 &= 0 \\ M_{xx,x}^1 &= Q_x^1 \\ N_{xy,x}^1 &= 0 \\ u_{0,x}^2 &= 0 \\ w_{,x}^2 &= -\kappa_x^2 \\ \kappa_{x,x}^2 &= 0 \\ v_{0,x}^2 &= 0 \\ N_{x,x}^2 &= 0 \\ Q_{x,x}^2 &= 0 \\ M_{xx,x}^2 &= Q_x^2 \\ N_{xy,x}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (74)$$

Já para a região 3 (há somente o aderente 2 – Figura 26), o sistema fica descrito como:

$$\begin{aligned}
u_{0,x}^1 &= 0 \\
w_{,x}^1 &= -\kappa_x^1 \\
\kappa_{x,x}^1 &= 0 \\
v_{0,x}^1 &= 0 \\
N_{x,x}^1 &= 0 \\
Q_{x,x}^1 &= 0 \\
M_{xx,x}^1 &= Q_x^1 \\
N_{xy,x}^1 &= 0 \\
u_{0,x}^2 &= a_{11}^2 \cdot N_{xx}^2 + a_{13}^2 \cdot N_{xy}^2 + b_{11}^2 \cdot M_{xx}^2 \\
w_{,x}^2 &= -\kappa_x^2 \\
\kappa_{x,x}^2 &= b_{11}^2 \cdot N_{xx}^2 + b_{13}^2 \cdot N_{xy}^2 + d_{11}^2 \cdot M_{xx}^2 \\
v_{0,x}^2 &= a_{21}^2 \cdot N_{xx}^2 + a_{23}^2 \cdot N_{xy}^2 + b_{21}^2 \cdot M_{xx}^2 \\
N_{x,x}^2 &= 0 \\
Q_{x,x}^2 &= 0 \\
M_{xx,x}^2 &= Q_x^2 \\
N_{xy,x}^2 &= 0
\end{aligned} \tag{75}$$

Na região da emenda entre as lâminas (junção do aderente 1 com o aderente 2 através do Adesivo – Figura 26), verifica-se os esforços conforme mostrado na Figura 29

Figura 29: Esforços atuantes na região de emenda (adaptado de Mortensen, 1998).

Observando a Figura 29, obtêm-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
& -N_{xx}^i - N_{xy}^i + N_{xx}^i + \frac{dN_{xx}^i}{dx} dx + N_{xy}^i + \frac{dN_{xy}^i}{dy} dy + \tau_{ax} dx dy = 0 \\
& -Q_x^i - Q_y^i + Q_x^i + \frac{dQ_x^i}{dx} dx + Q_y^i + \frac{dQ_y^i}{dy} dy + \sigma_a dx dy = 0 \\
& -M_{xx}^i - M_{xy}^i + M_{xx}^i + \frac{dM_{xx}^i}{dx} dx + M_{xy}^i + \frac{dM_{xy}^i}{dy} dy - Q_x^i \cdot dx + \tau_{ax} dx dy \left(\frac{t_{ad} + t_{lam}}{2} \right) = 0 \\
& -N_{yy}^i - N_{xy}^i + N_{yy}^i + \frac{dN_{yy}^i}{dy} dy + N_{xy}^i + \frac{dN_{xy}^i}{dx} dx + \tau_{ay} dx dy = 0 \\
& -M_{yy}^i - M_{xy}^i + M_{yy}^i + \frac{dM_{yy}^i}{dy} dy + M_{xy}^i + \frac{dM_{xy}^i}{dx} dx - Q_y^i \cdot dy + \tau_{ay} dx dy \left(\frac{t_{ad} + t_{lam}}{2} \right) = 0 \\
& -N_{xx}^j - N_{xy}^j + N_{xx}^j + \frac{dN_{xx}^j}{dx} dx + N_{xy}^j + \frac{dN_{xy}^j}{dy} dy - \tau_{ax} dx dy = 0 \\
& -Q_x^j - Q_y^j + Q_x^j + \frac{dQ_x^j}{dx} dx + Q_y^j + \frac{dQ_y^j}{dy} dy - \sigma_a dx dy = 0 \\
& -M_{xx}^j - M_{xy}^j + M_{xx}^j + \frac{dM_{xx}^j}{dx} dx + M_{xy}^j + \frac{dM_{xy}^j}{dy} dy - Q_x^j \cdot dx + \tau_{ax} dx dy \left(\frac{t_{ad} + t_{lam}}{2} \right) = 0 \\
& -N_{yy}^j - N_{xy}^j + N_{yy}^j + \frac{dN_{yy}^j}{dy} dy + N_{xy}^j + \frac{dN_{xy}^j}{dx} dx - \tau_{ay} dx dy = 0 \\
& -M_{yy}^j - M_{xy}^j + M_{yy}^j + \frac{dM_{yy}^j}{dy} dy + M_{xy}^j + \frac{dM_{xy}^j}{dx} dx - Q_y^j \cdot dy + \tau_{ay} dx dy \left(\frac{t_{ad} + t_{lam}}{2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{76}$$

Onde: t_{ad} é a espessura da camada de adesivo;

t_{lam} é a espessura do aderente.

Aplicando as condições de contorno nas equações apresentadas e das equações obtidas pela Teoria Clássica de Laminados para os aderentes, obtém-se um sistema de equações diferenciais onde se considera que as tensões tanto de cisalhamento como normais são dadas por unidade de largura do laminado. Tal sistema é descrito a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{du_x^1}{dx} &= a_{11}N_x^1 + a_{13}N_{xy}^1 + b_{11}M_{xx}^1 \\
w_{xx}^1 &= -\kappa_{xx}^1 \\
\frac{d\kappa_{xx}^1}{dx} &= b_{11}N_x^1 + b_{13}N_{xy}^1 + d_{11}M_{xx}^1 \\
\frac{dv_x^1}{dx} &= a_{21}N_x^1 + a_{23}N_{xy}^1 + b_{21}M_{xx}^1 \\
\frac{dN_{xx}^1}{dx} &= -\tau_{ax} \\
\frac{dN_{xy}^1}{dx} &= -\tau_{ay} \\
\frac{dM_{xx}^1}{dx} &= Q_x^1 - \tau_{ax} \left(\frac{t_{ad} + t_{lam}}{2} \right) \\
\frac{dQ_x^1}{dx} &= -\sigma_a \\
\frac{du_x^2}{dx} &= a_{11}N_x^2 + a_{13}N_{xy}^2 + b_{11}M_{xx}^2 \\
w_{xx}^2 &= -\kappa_{xx}^2 \\
\frac{d\kappa_{xx}^2}{dx} &= b_{11}N_x^2 + b_{13}N_{xy}^2 + d_{11}M_{xx}^2 \\
\frac{dv_x^2}{dx} &= a_{21}N_x^2 + a_{23}N_{xy}^2 + b_{21}M_{xx}^2 \\
\frac{dN_{xx}^2}{dx} &= +\tau_{ax} \\
\frac{dN_{xy}^2}{dx} &= +\tau_{ay} \\
\frac{dM_{xx}^2}{dx} &= Q_x^2 - \tau_{ax} \left(\frac{t_{ad} + t_{lam}}{2} \right) \\
\frac{dQ_x^2}{dx} &= +\sigma_a
\end{aligned} \tag{77}$$

Como uma primeira aproximação, pode-se considerar o adesivo como sendo isotrópico, homogêneo e linear elástico. Dessa forma, o adesivo é modelado como sendo molas em cisalhamento e bem como em tração e compressão, utilizando dois parâmetros elásticos:

$$\begin{aligned}
\tau_{ax} &= \frac{G_a}{t_a} \left(u_0^i - \frac{t_i(x)}{2} \cdot \kappa_x^j - u_0^j - \frac{t_j(x)}{2} \cdot \kappa_x^j \right) \\
\tau_{ay} &= \frac{G_a}{t_a} (v_0^i - v_0^j) \\
\sigma_{ax} &= \frac{E_a}{t_a} (w^i - w^j)
\end{aligned} \tag{78}$$

Com o modelo para o adesivo apresentado e sob posse da resposta do sistema de equações diferenciais, pode-se calcular as tensões atuantes no adesivo. Substituindo as equações do modelo do adesivo no sistema de equações diferenciais na região da junta, tem-se em forma matricial o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0^1 \\ w^1 \\ \kappa_x^1 \\ v_0^1 \\ N_{xx}^1 \\ N_{xy}^1 \\ M_{xx}^1 \\ Q_x^1 \\ u_0^2 \\ w^2 \\ \kappa_x^2 \\ v_0^2 \\ N_{xx}^2 \\ N_{xy}^2 \\ M_{xx}^2 \\ Q_x^2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11}^1 & a_{13}^1 & b_{11}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{11}^1 & b_{13}^1 & d_{11}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21}^1 & a_{23}^1 & b_{21}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{G_a}{t_a} & 0 & \frac{G_a \cdot t_{lam1}}{t_a \cdot 2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G_a}{t_a} & 0 & \frac{G_a \cdot t_{lam2}}{t_a \cdot 2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G_a}{t_a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G_a}{t_a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{G_a}{t_a} \left(\frac{t_a - t_{lam1}}{2} \right) & 0 & \frac{G_a \cdot t_{lam1}}{t_a \cdot 2} \left(\frac{t_a - t_{lam1}}{2} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{G_a}{t_a} \left(\frac{t_a - t_{lam2}}{2} \right) & 0 & \frac{G_a \cdot t_{lam2}}{t_a \cdot 2} \left(\frac{t_a - t_{lam2}}{2} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{E_a}{t_a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_a}{t_a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11}^2 & a_{13}^2 & b_{11}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{11}^2 & b_{13}^2 & d_{11}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21}^2 & a_{23}^2 & a_{21}^2 & 0 \\ \frac{G_a}{t_a} & 0 & -\frac{G_a \cdot t_{lam1}}{t_a \cdot 2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G_a}{t_a} & 0 & -\frac{G_a \cdot t_{lam2}}{t_a \cdot 2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{G_a}{t_a} & 0 & 0 & \frac{G_a}{t_a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G_a}{t_a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G_a}{t_a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{G_a}{t_a} \left(\frac{t_a - t_{lam1}}{2} \right) & 0 & \frac{G_a \cdot t_{lam1}}{t_a \cdot 2} \left(\frac{t_a - t_{lam1}}{2} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G_a}{t_a} \left(\frac{t_a - t_{lam1}}{2} \right) & 0 & \frac{G_a \cdot t_{lam2}}{t_a \cdot 2} \left(\frac{t_a - t_{lam2}}{2} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{E_a}{t_a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_a}{t_a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_0^1 \\ w^1 \\ \kappa_x^1 \\ v_0^1 \\ N_{xx}^1 \\ N_{xy}^1 \\ M_{xx}^1 \\ Q_x^1 \\ u_0^2 \\ w^2 \\ \kappa_x^2 \\ v_0^2 \\ N_{xx}^2 \\ N_{xy}^2 \\ M_{xx}^2 \\ Q_x^2 \end{array} \right\} \quad (79)$$

Após a dedução dos sistemas de equações diferenciais em cada parte do domínio do problema, faz-se necessário estipular quais as condições de contorno do problema e a continuidade na região da junta, dessa forma é possível modelar as vinculações e o carregamento da junta, obtendo assim a resposta para o problema a ser analisado. Vale lembrar que diferentes condições de contorno acarretarão em diferentes respostas do sistema.

3.2.2 EQUACIONAMENTO DA JUNTA DUPLA COLADA

Assim como para o caso da junta simples, a junta dupla colada apresenta o seu domínio dividido em três partes. A Figura 30 mostra essa divisão do domínio do problema e os esforços atuantes na junta.

Figura 30: Junta dupla colada, esforços e divisão do domínio do problema (adaptado de Mortensen, 1998).

As condições de contorno e hipóteses adotadas no desenvolvimento do equacionamento da junta simples, também são aplicáveis no desenvolvimento do equacionamento para a junta dupla.

Para o caso dos aderentes fora da região colada, basicamente o equacionamento do problema é elaborado de forma similar ao caso da junta simples colada, ou seja, faz-se o equilíbrio de um elemento infinitesimal e com as equações constitutivas e de compatibilidade proveniente da Teoria Clássica dos Laminados, obtêm-se os sistemas de equação para as regiões 1 e 3.

Para a região 1 (há somente o Aderente 1 – Figura 30) do domínio da junta dupla, após aplicar todas as hipóteses, tem-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
u_{0,x}^1 &= a_{11}^1 \cdot N_{xx}^1 + a_{13}^1 \cdot N_{xy}^1 + b_{11}^1 \cdot M_{xx}^1 \\
w_{,x}^1 &= -\kappa_x^1 \\
\kappa_{x,x}^1 &= b_{11}^1 \cdot N_{xx}^1 + b_{13}^1 \cdot N_{xy}^1 + d_{11}^1 \cdot M_{xx}^1 \\
v_{0,x}^1 &= a_{21}^1 \cdot N_{xx}^1 + a_{23}^1 \cdot N_{xy}^1 + b_{21}^1 \cdot M_{xx}^1 \\
N_{x,x}^1 &= 0 \\
Q_{x,x}^1 &= 0 \\
M_{xx,x}^1 &= Q_x^1 \\
N_{xy,x}^1 &= 0 \\
u_{0,x}^2 &= 0 \\
w_{,x}^2 &= -\kappa_x^2 \\
\kappa_{x,x}^2 &= 0 \\
v_{0,x}^2 &= 0 \\
N_{x,x}^2 &= 0 \\
Q_{x,x}^2 &= 0 \\
M_{xx,x}^2 &= Q_x^2 \\
N_{xy,x}^2 &= 0 \\
u_{0,x}^3 &= 0 \\
w_{,x}^3 &= -\kappa_x^3 \\
\kappa_{x,x}^3 &= 0 \\
v_{0,x}^3 &= 0 \\
N_{x,x}^3 &= 0 \\
Q_{x,x}^3 &= 0 \\
M_{xx,x}^3 &= Q_x^3 \\
N_{xy,x}^3 &= 0
\end{aligned} \tag{80}$$

Já para a região 3 (há os Aderentes 2 e 3 – Figura 30), tem-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
u_{0,x}^1 &= 0 \\
w_{,x}^1 &= -\kappa_x^1 \\
\kappa_{x,x}^1 &= 0 \\
v_{0,x}^1 &= 0 \\
N_{x,x}^1 &= 0 \\
Q_{x,x}^1 &= 0 \\
M_{xx,x}^1 &= Q_x^1 \\
N_{xy,x}^1 &= 0 \\
u_{0,x}^2 &= a_{11}^2 \cdot N_{xx}^2 + a_{13}^2 \cdot N_{xy}^2 + b_{11}^2 \cdot M_{xx}^2 \\
w_{,x}^2 &= -\kappa_x^2 \\
\kappa_{x,x}^2 &= b_{11}^2 \cdot N_{xx}^2 + b_{13}^2 \cdot N_{xy}^2 + d_{11}^2 \cdot M_{xx}^2 \\
v_{0,x}^2 &= a_{21}^2 \cdot N_{xx}^2 + a_{23}^2 \cdot N_{xy}^2 + b_{21}^2 \cdot M_{xx}^2 \\
N_{x,x}^2 &= 0 \\
Q_{x,x}^2 &= 0 \\
M_{xx,x}^2 &= Q_x^2 \\
N_{xy,x}^2 &= 0 \\
u_{0,x}^3 &= a_{11}^3 \cdot N_{xx}^3 + a_{13}^3 \cdot N_{xy}^3 + b_{11}^3 \cdot M_{xx}^3 \\
w_{,x}^3 &= -\kappa_x^3 \\
\kappa_{x,x}^3 &= b_{11}^3 \cdot N_{xx}^3 + b_{13}^3 \cdot N_{xy}^3 + d_{11}^3 \cdot M_{xx}^3 \\
v_{0,x}^3 &= a_{21}^3 \cdot N_{xx}^3 + a_{23}^3 \cdot N_{xy}^3 + b_{21}^3 \cdot M_{xx}^3 \\
N_{x,x}^3 &= 0 \\
Q_{x,x}^3 &= 0 \\
M_{xx,x}^3 &= Q_x^3 \\
N_{xy,x}^3 &= 0
\end{aligned} \tag{81}$$

Para a parte do domínio que compreende a região colada (junção dos Aderentes 1, 2 e 3 através dos Adesivos 1 e 2 – Figura 30), tem-se o seguinte diagrama de corpo livre:

Figura 31: Diagrama de corpo livre para uma junta dupla na região colada (adaptado de Mortensen, 1998).

Fazendo o equilíbrio na região da junta e aplicando as mesmas condições de contorno do caso da junta simples, obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$u_{0,x}^1 = a_{11}^1 \cdot N_{xx}^1 + a_{13}^1 \cdot N_{xy}^1 + b_{11}^1 \cdot M_{xx}^1$$

$$w_{,x}^1 = -\kappa_x^1$$

$$\kappa_{x,x}^1 = b_{11}^1 \cdot N_{xx}^1 + b_{13}^1 \cdot N_{xy}^1 + d_{11}^1 \cdot M_{xx}^1$$

$$v_{0,x}^1 = a_{21}^1 \cdot N_{xx}^1 + a_{23}^1 \cdot N_{xy}^1 + b_{21}^1 \cdot M_{xx}^1$$

$$N_{x,x}^1 = \left(\frac{G_a^1}{t_a^1} + \frac{G_a^2}{t_a^2} \right) u_x^{01} + \left(\frac{G_a^1 t_l^1}{2t_a^1} - \frac{G_a^2 t_l^1}{2t_a^2} \right) \kappa_x^1 - \left(\frac{G_a^1}{t_a^1} \right) u_x^{02} + \left(\frac{G_a^2 t_l^2}{2t_a^2} \right) \kappa_x^2 - \left(\frac{G_a^2}{t_a^2} \right) u_x^{03} - \left(\frac{G_a^2 t_l^3}{2t_a^2} \right) \kappa_x^3$$

$$Q_{x,x}^1 = \left(\frac{E_a^1}{t_a^1} + \frac{E_a^2}{t_a^2} \right) w_{xx}^1 - \left(\frac{E_a^1}{t_a^1} \right) w_{xx}^2 - \left(\frac{E_a^2}{t_a^2} \right) w_{xx}^3$$

$$M_{xx,x}^1 = \left(\frac{G_a^1 (t_l^1 + t_a^1)}{2t_a^1} - \frac{G_a^2 (t_l^1 + t_a^2)}{2t_a^2} \right) u_x^{01} + \left(\frac{G_a^1 t_l^1 (t_l^1 + t_a^1)}{4t_a^1} - \frac{G_a^2 t_l^1 (t_l^1 + t_a^2)}{4t_a^2} \right) \kappa_x^1 + Q_x^1 - \left(\frac{G_a^1 (t_l^1 + t_a^1)}{2t_a^1} \right) u_x^{02} + \left(\frac{G_a^1 t_l^2 (t_l^1 + t_a^1)}{4t_a^1} \right) \kappa_x^2 + \left(\frac{G_a^2 (t_l^1 + t_a^2)}{2t_a^2} \right) u_x^{03} + \left(\frac{G_a^2 t_l^3 (t_l^1 + t_a^2)}{4t_a^2} \right) \kappa_x^3$$

$$N_{xy,x}^1 = \left(\frac{G_a^1}{t_a^1} + \frac{G_a^2}{t_a^2} \right) v_x^{01} - \left(\frac{G_a^1}{t_a^1} \right) v_x^{02} - \left(\frac{G_a^2}{t_a^2} \right) v_x^{03}$$

Continuação do sistema de equações.

$$\begin{aligned}
u_{0,x}^2 &= a_{11}^2 \cdot N_{xx}^2 + a_{13}^2 \cdot N_{xy}^2 + b_{11}^2 \cdot M_{xx}^2 \\
w_{,x}^2 &= -\kappa_x^2 \\
\kappa_{x,x}^2 &= b_{11}^2 \cdot N_{xx}^2 + b_{13}^2 \cdot N_{xy}^2 + d_{11}^2 \cdot M_{xx}^2 \\
v_{0,x}^2 &= a_{21}^2 \cdot N_{xx}^2 + a_{23}^2 \cdot N_{xy}^2 + b_{21}^2 \cdot M_{xx}^2 \\
N_{x,x}^2 &= -\left(\frac{G_a^1}{t_a^1}\right) u_x^{01} - \left(\frac{G_a^1 t_l^1}{2t_a^1}\right) \kappa_x^1 + \left(\frac{G_a^1}{t_a^1}\right) u_x^{01} + \left(\frac{G_a^1 t_l^2}{2t_a^1}\right) \kappa_x^2 \\
Q_{x,x}^2 &= -\left(\frac{E_a^1}{t_a^1}\right) w_{xx}^1 + \left(\frac{E_a^1}{t_a^1}\right) w_{xx}^2 \\
M_{xx,x}^2 &= -\left(\frac{G_a^1(t_l^1 + t_a^1)}{2t_a^1}\right) u_x^{01} - \left(\frac{G_a^1 t_l^1(t_l^1 + t_a^1)}{4t_a^1}\right) \kappa_x^1 + \left(\frac{G_a^1(t_l^2 + t_a^1)}{2t_a^1}\right) u_x^{02} - \left(\frac{G_a^1 t_l^2(t_l^2 + t_a^1)}{4t_a^1}\right) \kappa_x^2 + Q_x^2 \\
N_{xy,x}^2 &= -\left(\frac{G_a^1}{t_a^1}\right) v_x^{01} + \left(\frac{G_a^1}{t_a^1}\right) v_x^{02} \\
u_{0,x}^3 &= a_{11}^3 \cdot N_{xx}^3 + a_{13}^3 \cdot N_{xy}^3 + b_{11}^3 \cdot M_{xx}^3 \\
w_{,x}^3 &= -\kappa_x^3 \\
\kappa_{x,x}^3 &= b_{11}^3 \cdot N_{xx}^3 + b_{13}^3 \cdot N_{xy}^3 + d_{11}^3 \cdot M_{xx}^3 \\
v_{0,x}^3 &= a_{21}^3 \cdot N_{xx}^3 + a_{23}^3 \cdot N_{xy}^3 + b_{21}^3 \cdot M_{xx}^3 \\
N_{x,x}^3 &= -\left(\frac{G_a^2}{t_a^2}\right) u_x^{01} - \left(\frac{G_a^2 t_l^1}{2t_a^2}\right) \kappa_x^1 + \left(\frac{G_a^2}{t_a^2}\right) u_x^{03} + \left(\frac{G_a^1 t_l^3}{2t_a^1}\right) \kappa_x^3 \\
Q_{x,x}^3 &= -\left(\frac{E_a^2}{t_a^2}\right) w_{xx}^1 + \left(\frac{E_a^2}{t_a^2}\right) w_{xx}^3 \\
M_{xx,x}^3 &= \left(\frac{G_a^2(t_l^1 + t_a^2)}{2t_a^2}\right) u_x^{01} - \left(\frac{G_a^2 t_l^1(t_l^1 + t_a^2)}{4t_a^2}\right) \kappa_x^1 - \left(\frac{G_a^2(t_l^3 + t_a^2)}{2t_a^2}\right) u_x^{03} - \left(\frac{G_a^1 t_l^3(t_l^3 + t_a^2)}{4t_a^2}\right) \kappa_x^3 + Q_x^3 \\
N_{xy,x}^3 &= -\left(\frac{G_a^2}{t_a^2}\right) v_x^{01} + \left(\frac{G_a^2}{t_a^2}\right) v_x^{03}
\end{aligned}$$

Além das equações, são também necessárias as condições de contorno do problema, especificando assim as vinculações, carregamentos e continuidade dos esforços e deslocamentos na região colada.

3.3. METODOLOGIA DE VALIDAÇÃO DA PROPOSTA

Para validar a abordagem de análise proposta, os resultados obtidos pelo SAJ (Sistema de Análise de Juntas) serão comparados com os resultados de um “software” comercial de análise de compósitos, ESAComp[®], e com resultados provenientes de modelos em elementos finitos elaborados no “software” ABAQUS[®].

Figura 32: Fluxograma de validação da abordagem de análise proposta.

3.3.1 MODELOS DO SAJ

Basicamente o programa SAJ resolve juntas simples (“Single Lap Joint”) e duplas (“Double Lap Joints”) coladas, sendo os dados de entrada fornecidos em um arquivo separado do programa principal (vide no Apêndice A). Neste arquivo são fornecidos ao programa as propriedades elásticas de cada aderente, como módulo de elasticidade na direção paralela às fi-

bras (E_1), módulo de elasticidade transversal às fibras (E_2), módulo ao cisalhamento no plano da lâmina (G_{12}), coeficiente de Poisson no plano da lâmina (ν_{12}), espessura de cada camada e a sua respectiva orientação, no caso de compósitos. No caso de aderentes metálicos são fornecidas as propriedades elásticas, como o módulo de elasticidade (E), o módulo ao cisalhamento (G), o coeficiente de Poisson (ν) e a espessura do aderente. Para o adesivo, são fornecidas as propriedades elásticas (E ; ν) e a espessura do adesivo.

Nesse mesmo arquivo de entrada de dados (vide no Apêndice A), também são fornecidos o tipo de carregamento e a intensidade do mesmo, sendo possível entrar com valores de força normal, força cortante e momento fletor.

As condições de contorno são fornecidas ao programa principal em forma de um vetor no qual os valores de cada variável são atribuídos em cada um dos limites das divisões do domínio do problema, ou seja, região 1, 2 ou 3. Um detalhe importante sobre o programa refere-se às unidades de entrada, devendo as mesmas ser fornecidas em kN, mm, kN/mm e kN/mm², pois devido ao método numérico empregado, tem-se que o mesmo deverá inverter matrizes durante os cálculos, e números muito grandes podem resultar em matrizes singulares e assim não ser possível obter resposta para a análise.

Como dado de saída, o programa fornece valores das tensões na camada de adesivo, força normal, cisalhamento, momentos e cortantes nos aderentes, o programa também fornece o deslocamento dos componentes da junta além de prever se haverá falha ou não nos aderentes. No caso do aderente em compósito, verifica-se se houve falha de alguma camada através do Critério de Chang-Chang, mostrado no Capítulo 2.

No processo de validação do programa foram feitos estudos considerando aderentes diferentes para o caso de juntas híbridas, laminados simétricos e assimétricos e diferentes condições de contorno tanto para a junta simples como para a junta dupla. As tabelas e as figuras a seguir apresentam um resumo dos dados de entrada utilizados nos testes realizados para validar o programa SAJ, tanto para junta simples como para junta dupla.

Tabela 3-1: Propriedades dos aderentes e adesivos, condições de contorno e carregamento dos testes realizados para validar o programa SAJ para junta simples.

JUNTA SIMPLES			
		compósito/compósito	compósito/metal
Espessura do aderente 1	[mm]	0,8	0,8
Espessura do aderente 2	[mm]	0,8	0,8
Empilhamento do aderente 1	-	[0/45] _s	-
Empilhamento do aderente 2	-	[0/45] _s	[0/45] _s
Aderente 1			
E ₁	[kN/mm ²]	126	126
E ₂	[kN/mm ²]	7,1	7,1
G ₁₂	[kN/mm ²]	4	4
ν	-	0,3	0,3
Aderente 2			
E ₁	[kN/mm ²]	126	72
E ₂	[kN/mm ²]	7,1	-
G ₁₂	[kN/mm ²]	4	27,6
ν	-	0,3	0,3
Adesivo			
E do adesivo	[kN/mm ²]	1,485	1,485
Espessura	[mm]	0,5	0,5
ν	-	0,35	0,35
Condições de contorno e carregamento			
Condições de contorno	-	x=-80=>u1=v1=w1=M1=0 x=100=>w2=M2=0	x=-80=>u1=v1=w1=M1=0 x=100=>w2=M2=0
Carregamento - Força normal	kN/mm	0,015	0,02

Para a validação do programa para junta simples não foram considerados aderentes de laminado assimétricos, pois as características da resposta são muito semelhantes aos obtidos para o caso da junta híbrida. O carregamento foi escolhido como força normal, pois este é o principal esforço que ocorre nesse tipo de junta. A Figura 33 apresenta um esquema das condições de contorno aplicadas nos testes para a junta simples. Para cada caso são modificadas as características dos aderentes, adesivos e a intensidade do carregamento aplicado, sendo mantida as condições de contorno.

Figura 33: Condições de contorno para a junta simples.

Tabela 3-2: Propriedades dos aderentes e adesivos e condições de contorno e carregamento dos testes realizados para validar o programa SAJ para junta dupla.

JUNTA DUPLA				
Espessura do aderente 1	[mm]	compósito/compósito	compósito/compósito	compósito/metal
Espessura do aderente 2	[mm]	0,8	1	0,8
Espessura do aderente 3	[mm]	0,8	1	0,8
Empilhamento do aderente 1	-	[0/45] _s	[60/30/0/45/90]	-
Empilhamento do aderente 2	-	[0/45] _s	[60/30/0/45/90]	[0/45] _s
Empilhamento do aderente 3	-	[0/45] _s	[60/30/0/45/90]	[0/45] _s
Aderente 1				
E ₁	[kN/mm ²]	126	126	72
E ₂	[kN/mm ²]	7,1	7,1	-
G ₁₂	[kN/mm ²]	4	4	27,6
ν	-	0,3	0,3	0,33
Aderente 2				
E ₁	[kN/mm ²]	126	126	126
E ₂	[kN/mm ²]	7,1	7,1	7,1
G ₁₂	[kN/mm ²]	4	4	4
ν	-	0,3	0,3	0,3
Aderente 3				
E ₁	[kN/mm ²]	126	126	126
E ₂	[kN/mm ²]	7,1	7,1	7,1
G ₁₂	[kN/mm ²]	4	4	4
ν	-	0,3	0,3	0,3
Adesivo				
E do adesivo	[kN/mm ²]	1,485	1,485	1,485
Espessura	[mm]	0,5	0,5	0,5
ν	-	0,35	0,35	0,35
Condições de contorno e carregamento				
Condições de contorno	-	x=-80=>M1=0 x=100=>u2=u3=w2=v2=w3=v3=0	x=-80=>M1=0 x=100=>u2=u3=w2=v2=w3=v3=0	x=-80=>M1=0 x=100=>u2=u3=w2=v2=w3=v3=0
Carregamento - Força normal	kN/mm	0,015	0,015	0,015

Figura 34: Condições de contorno para a junta dupla.

A Figura 34 apresenta um esquema das condições de contorno aplicadas na junta dupla. Nota-se que para cada caso estudado são modificadas as propriedades dos aderentes e a intensidade do carregamento, não sendo modificadas as condições de contorno. Porém, para a validação da junta dupla, foi estudado o caso de aderente de compósito assimétrico, devido à diferença de resposta da junta para este caso.

De maneira a facilitar a compreensão dos estudos de casos analisados para cada junta, a Figura 35 mostra a nomenclatura utilizada nas tabelas 3-1 e 3-2, esclarecendo a localização dos aderentes de acordo com a sua numeração. Os termos relacionados às condições de contorno u , v e w correspondem aos deslocamentos no sentido longitudinal, transversal e vertical da junta respectivamente conforme pode ser observado na Figura 35. Já os números que acompanham os termos u , v e w , correspondem ao aderente.

Figura 35: Montagem das juntas, especificando os aderentes e adesivos e as direções dos deslocamentos.

Por exemplo, para a junta dupla híbrida (Figura 35), a condição de contorno $M1 = 0$, significa que o momento fletor em X na extremidade do aderente 1 é igual a zero, já a condição $u2=u3=w2=w3=v2=v3=0$ significa que os movimentos nas direções longitudinal, vertical e transversal são iguais à zero na extremidade oposta da junta, e estão aplicadas nos aderentes 2 e 3.

3.3.2 MODELOS EM ELEMENTOS FINITOS

Foi utilizado o “software” ABAQUS® de elementos finitos para a elaboração e análise dos modelos. Para se elaborar os modelos, foram utilizados elementos sólidos, para serem comparados com os resultados do programa SAJ.

Vale ressaltar que os elementos sólidos podem ser utilizados para análises lineares e não-lineares, envolvendo grandes deformações, plasticidade e problemas de contato (ABAQUS User's guide, 2006). Para elaborar os modelos com elementos sólidos, foram utilizados elementos hexaédricos regulares de segunda ordem de interpolação, com 20 nós. Estes elementos produzem resultados mais precisos que os elementos de primeira ordem além de permitirem o correto posicionamento das condições de contorno na junta. Todavia, o uso de elementos sólidos para modelar o aderente de compósito é limitado a elementos com apenas graus de liberdade de deslocamento (ABAQUS User's guide, 2006). A Figura 36 apresenta um esquema do elemento cúbico de 20 nós utilizado na modelagem dos aderentes, compósitos e metálicos. Sendo que no ABAQUS® esse elemento é denominado de C3D20.

Figura 36: Elemento hexaédrico com 20 nós e três graus de liberdade por nó (C3D20).

Esse elemento também foi utilizado para modelar a camada de adesivo. Um detalhe importante na modelagem de compósitos com elementos sólidos no ABAQUS® é que somente permiti-se um elemento por laminado, porém para cada lamina há três pontos de integração, conforme é apresentado na Figura 37. Devido a esse fato, o modelo MEF poderá apresentar um comportamento mais rígido.

Figura 37: Pontos de integração por camada em um laminado de três camadas.

A união entre os aderentes e os adesivos das juntas foi modelada utilizando uma função de restrição que torna rígida a ligação entre os aderentes e os adesivos, ou seja, são transmitidos todos os graus de liberdade entre as partes, denominada de função “Tie”.

Modelo da junta simples colada

Nesta parte são apresentados os modelos de elementos finitos utilizados nas análises da junta simples colada.

Figura 38: Modelo da junta simples colada com elementos sólidos C3D20.

A Figura 38 apresenta o modelo em elementos finitos da junta simples colada modelada com elementos C3D20. Nota-se que é possível modelar tanto o caso compósito/compósito, como o caso compósito/metal. Pode-se observar também a localização das vinculações e do carregamento.

Graus de liberdade de translação em x, y e z foram restringidos (Aderente 2).

(a)

Graus de liberdade de translação em z foi restringido (Aderente 1).

(b)

Figura 39: Detalhe das condições de contorno e esforços aplicados na junta simples.

Um detalhe importante da vinculação, é que a mesma deve ser aplicada na metade da espessura do aderente, possibilitando assim que a junta se deforme de maneira correta, como

mostra a Figura 39, sendo que em uma das extremidades, os deslocamentos em x, direção longitudinal do modelo, y, direção transversal do modelo, e z, na direção da espessura do modelo, foram restringidos, porém não há nenhuma restrição em relação aos momentos Figura 39(b). Já na extremidade oposta (Figura 39(a)), os deslocamentos em y e z foram restringidos e assim como na extremidade oposta, não há restrição em relação aos momentos. Sendo que nesta extremidade aplica-se o carregamento (Figura 39(a)). Nota-se que as condições de contorno do SAJ (Figura 28), são um pouco diferentes das aplicadas no modelo MEF devido à hipótese de flexão cilíndrica.

Modelo da junta dupla colada

Nesta parte são apresentados os modelos de elementos finitos utilizados na modelagem da junta dupla colada.

Figura 40: Modelo da junta dupla colada utilizando elementos C3D20

A Figura 40 apresenta o modelo da junta dupla colada elaborado em elementos hexaédricos de 20 nós. Pode-se observar também a região onde foram aplicadas as vinculações e o carregamento. Um detalhe importante ao se modelar a junta é que os carregamentos devem ser

aplicadas na metade da espessura do aderente, possibilitando que a junta se deforme de maneira correta, como mostra a Figura 41(a). Porém, na parte engastada, todos os nós deverão ter seus graus de liberdade restringidos, como mostra a Figura 41(b).

Não há nenhuma restrição para nenhum grau de liberdade
(Aderente 1).

(a)

Todos os graus de liberdade de translação e rotação foram
restringidos (Aderentes 2 e 3).

(b)

Figura 41: Detalhes das condições de contorno e cargas aplicadas na junta dupla.

Da Figura 41, pode-se observar as condições de contorno e carregamento aplicados na junta dupla. Numa dada extremidade Figura 41(b), a junta é considerada engastada, possuindo todos os graus de liberdade restringidos, já na outra extremidade Figura 41(a) somente é aplicado o carregamento normal. Novamente, assim como explicado anteriormente, para o modelo MEF da junta simples, tem-se que as condições de contorno do SAJ são diferentes do modelo de junta dupla do modelo MEF.

3.3.3 MODELOS DO ESACOMP[®]

O “software” comercial ESAComp[®] se apresenta como uma ferramenta para análise de estruturas em materiais compósitos sendo que uma das análises que esse “software” permite é a de juntas coladas. São apresentados vários tipos de juntas, aonde o usuário deverá escolher qual o tipo de junta será analisado e proceder com as etapas de escolha dos aderentes e adesivos, fornecer a geometria da junta, o carregamento e as condições de contorno.

As condições de contorno que o “software” ESAComp[®] oferece são basicamente:

- SS (“Simple Suported”): nessa condição de contorno de simplesmente apoiado em ambas as extremidades da junta, tem-se que numa dada extremidade, o deslocamento na direção longitudinal e transversal é restringido e na outra extremidade, somente o deslocamento normal ao plano da junta é restringido. Em ambas, todas as rotações são permitidas;
- CF (“Clamped Free”): nessa condição de contorno, tem-se que a junta é engastada em numa dada extremidade e livre na outra extremidade, possibilitando se mover e rotacionar em todas as direções;
- CC (“Clamped Clamped”): essa condição de contorno corresponde às duas extremidades estarem engastadas, porém em uma extremidade é permitido o movimento no sentido longitudinal e transversal.

O programa ESAComp[®] se utiliza do método de multi-segmentos de integração, explicado mais detalhadamente no capítulo 2, item 2.2.3, para resolver os sistemas de equações diferenciais.

Modelo da junta simples no ESAComp[®]

A análise inicia-se estabelecendo as características mecânicas de cada lâmina e do adesivo. Após essa caracterização, define-se o laminado, sendo que para o caso de juntas híbridas é também determinada as características mecânicas do aderente metálico, bem como, as orientações de cada lâmina do aderente compósito. Por fim, defini-se as características geométricas da junta, sendo que o usuário deve fornecer a espessura da camada de adesivo, comprimento da área colada e alguns comprimentos da junta.

Para o caso da junta simples, o programa oferece três condições de vinculação para a análise, sendo engastada em cada extremidade (CC), simplesmente apoiada em ambas as extremidades (SS) e engastada em uma extremidade e livre na outra extremidade (CF). Como car-

regamento, pode-se submeter à junta a esforços normais, momentos, esforços cortantes e cisalhamento.

Figura 42: Esquema das condições de contorno e carregamento com força normal em uma junta simples analisada através do ESACOMP[®]

Vale ressaltar que o programa ESACOMP[®] apresenta uma série de critérios de falha tanto para materiais isotrópicos como para ortotrópicos, podendo assim, analisar a falha de aderentes e adesivos.

Modelo da junta dupla no ESAComp[®]

No caso da junta dupla, os dados de entrada são iguais aos da junta simples, porém são acrescentados os dados de um terceiro aderente e de um segundo adesivo.

Basicamente a única diferença entre a junta simples e a junta dupla está nas vinculações, sendo que o programa não permite a vinculação de simplesmente apoiado (SS) para esse tipo de junta.

Figura 43: Esquema das condições de contorno e carregamento com força normal em uma junta dupla analisada através do ESACOMP[®]

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo serão apresentados, inicialmente, os resultados obtidos pelo programa SAJ, bem como, os resultados obtidos através do “software” de elementos finitos (ABAQUS®) e do “software” de análise de compósitos ESAComp®. Todavia, destaca-se que os resultados obtidos via elementos finitos e via ESAComp® serão utilizados para a validação dos resultados obtidos pelo SAJ, tanto para juntas do tipo compósito-compósito como do tipo metal compósito, uma vez que há poucos resultados experimentais na literatura para as tensões na camada de adesivo de juntas coladas.

Posteriormente, serão apresentados estudos com relação à influência de determinados parâmetros na resposta de juntas coladas. Dentre esses, destacam-se a influência do comprimento da região colada (“over-lap”) e a influência da espessura e do módulo de elasticidade do adesivo, tanto para juntas simples (“single lap joint”) como para juntas duplas (“double lap joint”).

4.1. JUNTAS COMPÓSITO-COMPÓSITO

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos da análise para juntas de material compósito, tanto para o caso de junta simples como para o caso de junta dupla. Mais detalhes das características dos materiais e das condições de contorno serão fornecidos nos respectivos itens. Vale ressaltar que para os testes de validação do modelo, em todos os casos investigados, tem-se que a espessura do adesivo é de 0,5 mm e o carregamento é suficientemente pequeno de modo a não produzir plastificação na camada de adesivo (análise linear elástica).

4.1.1 JUNTA SIMPLES COMPÓSITO-COMPÓSITO (CASO 1)

Para realizar a validação do programa de junta simples colada de compósito-compósito, foram utilizados os materiais e as condições de contorno de acordo com o especificado na Tabela 3-1 (Capítulo 3).

Nesse caso, o modelo foi vinculado em uma extremidade, onde os seus graus de liberdade de translação foram restringidos e na outra extremidade, somente a translação na direção longitudinal foi permitida, como discutido no Capítulo 3 (Figura 33), essa vinculação corresponde à condição de contorno SS do “software” ESAComp[®]. Em ambas as extremidades todos os graus de liberdade em relação aos momentos não foram restringidos.

A Figura 44 mostra os resultados do SAJ, bem como, os resultados do programa ESAComp[®] e do modelo de elementos finitos.

Figura 44: Comparação de deslocamento w da junta colada simples entre os três modelos (caso 1).

Da Figura 44 tem-se que o modelo proposto implementado no Matlab[®] apresentou um deslocamento bem próximo ao obtido no ESAComp[®] e do modelo em elementos finitos.

Na Figura 45 tem-se o campo de deslocamentos do modelo em elementos finitos.

Figura 45: Deslocamento w do modelo em elementos finitos com elementos sólidos para uma junta simples de compósito submetida sob um carregamento normal de 0,015 kN/mm (caso 1).

Vale ressaltar que o deslocamento w causa as maiores tensões na camada de adesivo, e que, os demais deslocamentos são significativamente menores quando comparados com a ordem de grandeza do deslocamento em w . Pode-se observar da figura que a junta possui um deslocamento w simétrico. As características de como a junta irá se deformar basicamente dependem das propriedades dos aderentes, sendo que no caso de compósitos, as diferentes direções no empilhamento de cada lâmina afetam os coeficientes da matriz de rigidez o que pode fazer com que um carregamento normal produza torção e/ou flexão (fenômeno de acoplamento).

Os resultados das tensões, normal e de cisalhamento na camada de adesivo são mostrados nas Figura 46 e Figura 47.

Figura 46: Comparação entre os resultados obtidos pelos diversos métodos para a tensão normal σ_z no adesivo (caso 1).

Da Figura 46 pode-se observar que todos os métodos apresentaram resultados bastante semelhantes, sendo que as pequenas diferenças se devem basicamente às diferenças de métodos numéricos utilizados nos diferentes programas, bem como, ao tipo de elemento finito utilizado e ao número de elementos finitos empregados na discretização da espessura.

Figura 47: Comparação entre as tensões de cisalhamento τ_{zx} (caso 1).

A Figura 47 apresenta a tensão de cisalhamento τ_{zx} do adesivo, sendo que mais uma vez, guardada as diferenças, o modelo proposto apresentou um resultado muito similar aos outros modelos, principalmente com o ESAComp[®].

Figura 48: Comparação entre as tensões τ_{zy} (caso 1).

Observando a Figura 48 se verifica que em relação ao cisalhamento τ_{zy} do adesivo, o modelo proposto apresenta as maiores diferenças de resultado em relação aos demais, porém a ordem de grandeza dessa tensão de cisalhamento é dez vezes menor que a da tensão normal e do cisalhamento τ_{zx} . Portanto, essa diferença nessa tensão é aceitável uma vez que sua contribuição para a falha da junta é pequena quando comparada com as contribuições das outras tensões.

Dos resultados mostrados acima, pode-se concluir que o modelo de análise proposto para a junta simples implementado no Matlab[®] é adequado para se calcular este tipo de junta com aderentes de compósito. Na Tabela 4-1, tem-se um resumo dos resultados apresentados pelos três modelos, sendo que os valores escolhidos para verificar as diferenças são encontrados nas extremidades da sobreposição (“overlap”), onde ocorrem os maiores valores das tensões. Já para o deslocamento, a posição analisada é onde ocorrem as maiores diferenças. Pode-se observar que τ_{zy} foi o parâmetro que apresentou as maiores diferenças, porém este valor é relativamente menor que τ_{zx} e σ_z , não sendo um fator importante na falha do adesivo.

Tabela 4-1: Resultados para análise de junta simples compósito-compósito (caso 1).

Variável	SAJ	ESAComp		MEF	
		Valor	Δ	Valor	Δ
w	1,02mm	1,01mm	0,9%	1,07mm	4,9%
σ_z	0,0049kPa	0,0046kPa	6,1%	0,0053kPa	8,1%
τ_{zx}	0,0028kPa	0,0027kPa	3,5%	0,0032kPa	14,2%
τ_{zy}	0,00016kPa	0,00031kPa	93,7%	0,00034kPa	127%

$$\text{Onde: } \Delta = \left| \left(\frac{(R_p - R)}{R_p} \right) \right| \cdot 100 \quad (83)$$

R_p é o resultado obtido pelo programa SAJ;

R é o valor obtido pelo ESAComp[®] ou MEF;

4.1.2 JUNTA DUPLA COMPÓSITO-COMPÓSITO (CASO 2)

O modelo de junta dupla colada com os aderentes de material compósito utilizou as propriedades mecânicas, as condições de contorno e carregamento apresentadas na Tabela 3-2 (Capítulo 3).

Deve-se destacar que as espessuras das duas camadas de adesivo são iguais (0,5 mm) e as suas propriedades elásticas também são iguais. Essa junta é submetida a um carregamento normal de 15 N/mm aplicado na extremidade de um só aderente. Os modelos para análise foram vinculados de forma que na extremidade onde há os dois aderentes, todos os graus de liberdade de rotação e translação foram restringidos. Na outra extremidade, a junta pode se deslocar no seu sentido longitudinal x e os graus de liberdade correspondentes às rotações não foram restringidos, como discutido no Capítulo 3 (Figura 34). Essa condição é correspondente à vinculação CF do ESAComp[®].

Figura 49: Comparação entre os resultados para o deslocamento w da junta dupla colada compósito-compósito (caso 2).

A Figura 49 mostra o deslocamento w da junta dupla colada para os modelos utilizados, verifica-se assim, que as diferenças são pequenas e todos os modelos apresentaram a mesma

tendência de movimento. Isto pode ser confirmado, observando o campo de deslocamento w do modelo em elementos finitos da junta dupla colada com seus aderentes de compósito (Figura 50).

Figura 50: Campo de deslocamentos da junta dupla colada compósito-compósito (caso 2).

Na Figura 51, são apresentados os resultados da tensão normal em um dos adesivos da junta dupla. Como todos os laminados são simétricos, não há diferença entre as tensões nos dois adesivos da junta, por esse motivo e também para não comprometer a qualidade do gráfico, somente é apresentado o resultado para um dos adesivos da junta. Além disso, pode-se notar que o modelo proposto apresenta um resultado muito próximo dos obtidos através de programas comerciais. A diferença do resultado via MEF pode ser atribuída ao tipo de elemento finito utilizado e ao número de elementos finitos empregados na discretização da espessura.

Figura 51: Comparação entre os resultados de tensão normal, σ_z , na camada de adesivo para junta dupla compósito-compósito (caso 2).

Na Figura 52, são apresentados os resultados para a tensão de cisalhamento τ_{zx} , todos os modelos apresentam alguma diferença, porém todos apresentam a mesma tendência e as diferenças também não são muito significativas. As diferenças entre os resultados do MEF e do SAJ podem em parte ser atribuída à diferença de métodos numéricos e de como o problema é abordado, sendo que o “software” SAJ possui uma abordagem analítica na formulação do problema, com uma resolução numérica (baseada no algoritmo bvp4c) do sistema de equações diferenciais, sendo diferente do MEF. Além disso, tem-se que a diferença do resultado via MEF pode ser atribuída ao tipo de elemento finito utilizado e ao número de elementos finitos empregados na discretização da espessura.

Entre o SAJ e o ESAComp[®], apesar de ambos partirem de uma abordagem analítica na formulação do problema, os métodos numéricos empregados para a resolução do problema são diferentes. Além disso, o ESAComp[®] calcula mais variáveis que o SAJ, e como o sistema de equações diferenciais resultante do equacionamento é acoplado, a inclusão dessas outras equações afetam o resultado final.

Figura 52: Comparação entre os resultados de tensão de cisalhamento τ_{zx} na camada de adesivo para junta dupla compósito-compósito (caso 2).

A Figura 53 mostra os resultados para a tensão de cisalhamento τ_{zy} . Nessa figura pode-se notar que o modelo proposto e os demais modelos apresentam as mesmas tendências e pode-se observar mais uma vez que a tensão de cisalhamento nessa direção é significativamente menor que as outras tensões calculadas. Isto permite concluir que o modelo proposto também é adequado para o cálculo de juntas duplas coladas com laminado simétrico.

Figura 53: Comparação entre os resultados de tensão de cisalhamento τ_{zy} na camada de adesivo para junta dupla compósito-compósito (caso 2).

Tabela 4-2: Resultados para análise de junta dupla compósito-compósito (caso 2).

Variável	SAJ	ESAComp		MEF	
		Valor	Δ	Valor	Δ
w	0,00151mm	0,00148mm	2,0%	0,00157mm	4,0%
σ_z	0,00085kPa	0,00098kPa	15,3%	0,00087kPa	2,3%
τ_{zx}	0,0013kPa	0,0015kPa	15,4%	0,0009kPa	30,7%
τ_{zy}	0,00016kPa	0,00043kPa	169%	0,0002kPa	25%

A Tabela 4-2 apresenta um resumo dos resultados obtidos das tensões e do deslocamento, sendo que os resultados de tensão foram verificados nas extremidades da sobreposição (“overlap”) onde ocorrem os maiores valores. Por outro lado, os valores de deslocamento foram analisados no ponto médio da região da junta com dois aderentes, ou seja, ao observar a Figura 49 tem-se o ponto de coordenada $x = -28$ mm, onde se pode constatar uma certa diferença entre o modelo do programa ESAComp® e o programa SAJ. Porém, em relação ao modelo em elementos finitos, os resultados do SAJ ficaram bem próximos em termos de tensão normal, Figura 51. Para as tensões de cisalhamento, todos os modelos apresentaram uma diferença significativa, porém todos os modelos apresentam as mesmas tendências e apesar de τ_{zy} apresentar os maiores valores de diferença, este cisalhamento possui intensidade bem inferior às demais

tensões, portanto influenciando pouco no processo de falha do adesivo. Além disso, constata-se também que a tensão de cisalhamento τ_{zx} possui valores mais elevados que as tensões normais.

Outro ponto a ser considerado da observação da Figura 48 e da Figura 53 é que a tensão de cisalhamento τ_{zy} resulta da diferença dos coeficientes de Poisson do aderente e do adesivo, visto que nesses casos os aderentes são simétricos e, portanto, esforços normais provocam somente deformações extensionais.

A fim de verificar com mais profundidade as limitações e potencialidades do SAJ, buscou-se realizar análises de juntas duplas coladas com laminados assimétricos de forma a provocar uma distribuição de tensão desigual entre os adesivos. Para tal análise foram mantidas as mesmas propriedades elásticas para os laminados e adesivos, porém a seqüência de empilhamento dos laminados é modificada para [60/30/0/45/90], conforme mostrado na Tabela 3-2 (Capítulo 3), aqui considerado como um estudo de caso extra.

As condições de contorno são semelhantes as da última análise, ou seja, em uma extremidade tem-se os laminados engastados. Na extremidade oposta são permitidas todas as translações e rotações. Vale ressaltar que o carregamento e as espessuras dos adesivos são iguais aos utilizados na análise da junta dupla de compósito com laminados simétricos.

A Figura 54 mostra o resultado da comparação do deslocamento w entre o modelo proposto e os obtidos através de programas comerciais. Nessa figura observa-se que o resultado obtido com o “software” de elementos finitos ABAQUS® foi o menos rígido, apresentando uma grande diferença entre os valores de deslocamento na extremidade livre da junta, porém o modelo proposto resultou em valores muito próximos aos obtidos utilizando o “software” ESAComp®. As causas para as diferenças entre os modelos já foram explicadas anteriormente. Tem-se agora a questão do efeito de acoplamento de membrana com flexo/torção, pois o laminado é não simétrico e portanto a matriz B é diferente de zero. Apesar do modelo MEF ser mais rígido em função de não apresentar grau de liberdade de rotação, tem-se que as condições de contorno aplicadas foram, aparentemente, insuficientes para restringir o modelo, fazendo com que o mesmo apresenta-se os maiores níveis de deslocamento.

Figura 54: Comparação entre os deslocamentos na direção normal (w) para junta dupla colada compósito-compósito (com laminado assimétrico) (caso extra).

A Figura 55 mostra o campo de deslocamentos na direção w obtido através de análise via Método dos Elementos Finitos (MEF). Verifica-se uma resposta diferente do caso estudado anteriormente, pois a matriz B de acoplamento de rigidezes do laminado não é nula. Essa matriz representa que o acoplamento de esforços de membrana provocam giros e momentos provocam deformações extensionais. Com isso, tem-se que o esforço normal aplicado na junta provocou um deslocamento na direção do eixo z (w). Devido ao deslocamento da junta, as tensões nas camadas de adesivo também são diferentes.

Figura 55: Campo de deslocamentos do modelo da junta dupla em elementos finitos para junta dupla compósito-compósito (com laminado assimétrico) (caso extra).

Devido à diferença de orientação das lâminas dos laminados, tem-se um deslocamento w que resultará em uma condição de carregamento assimétrico na camada de adesivo. Primeiramente, verifica-se que para a camada de adesivo, denominada de adesivo 1, todos os modelos apresentaram resultados de tensão normal σ_z bem próximos, assim como para a camada de adesivo 2 (Figura 56 e Figura 57).

Figura 56: Tensão normal, σ_z , no adesivo 1 da junta dupla colada para junta dupla compósito-compósito (com laminado assimétrico) (caso extra).

Figura 57: Tensão normal, σ_z , no adesivo 2 da junta colada para junta dupla compósito-compósito (com laminado assimétrico) (caso extra).

Com uma observação mais detalhada, pode-se verificar a condição de carregamento assimétrico das camadas de adesivo. Sendo que o mesmo ocorre para as tensões de cisalhamento, τ_{zx} e τ_{zy} . A Figura 58 mostra os resultados obtidos para a tensão de cisalhamento τ_{zx} . Pode-se observar que o modelo proposto apresentou valores mais elevados nas extremidades da região colada (região sobreposta), sendo que esse mesmo fato ocorre na outra camada de adesivo, conforme mostrado na Figura 59. No entanto, as tensões de cisalhamento τ_{zx} apresentam comportamento da curva similar para todos os modelos. Além disso, nota-se através dos valores da tensão de cisalhamento das camadas de adesivo, que há uma condição de carregamento assimétrico aplicada nos adesivos. Pode-se observar também, que em juntas duplas, τ_{zx} possui valores nas extremidades do “overlap” da mesma ordem de grandeza que os valores tensão normal σ_z nestas mesmas regiões.

Figura 58: Tensão de cisalhamento τ_{zx} do adesivo 1 da junta para junta dupla compósito-compósito (com laminado assimétrico) (caso extra).

Figura 59: Tensão de cisalhamento τ_{zx} do adesivo 2 da junta para junta dupla compósito-compósito (com laminado assimétrico) (caso extra).

Para as tensões de cisalhamento τ_{zy} , tem-se que os resultados das três abordagens estão bem próximos (Figura 60), sendo que essa tensão de cisalhamento é significativamente menor que as outras componentes de tensão.

Figura 60: Tensão de cisalhamento τ_{zy} do adesivo 1 da junta para junta dupla compósito-compósito (com laminado assimétrico) (caso extra).

Constata-se nas Figura 60 e Figura 61 a resposta assimétrica de carregamento das camadas de adesivo. Também, evidencia-se que as três abordagens fornecem resultados com tendências semelhantes.

Figura 61: Tensão de cisalhamento τ_{zy} do adesivo 2 da junta para junta dupla compósito-compósito (com laminado assimétrico) (caso extra).

Dos resultados previamente apresentados, pode-se concluir que a abordagem proposta é adequada para calcular juntas duplas coladas de compósito-compósito, mesmo envolvendo condições mais críticas, como no caso de laminados assimétricos que provocam carregamentos diferentes nas camadas de adesivo.

Tabela 4-3: Resultados para análise de junta dupla compósito-compósito (assimétrico) (caso extra).

Variável	SAJ	ESAComp		MEF	
		valor	Δ	valor	Δ
w	0,84	0,70mm	17%	1,72	105%
Adesivo 1					
σ_z	0,0023kPa	0,0012kPa	47,80%	0,0020kPa	13%
τ_{zx}	0,0020kPa	0,0014kPa	30%	0,0014kPa	30%
τ_{zy}	0,00053kPa	0,00069kPa	30,20%	0,00046kPa	13%
Adesivo 2					
σ_z	0,0022kPa	0,0017kPa	22,70%	0,0026kPa	18,20%
τ_{zx}	0,0021kPa	0,0016kPa	23,80%	0,0019kPa	9,50%
τ_{zy}	0,00052kPa	0,00063kPa	22%	0,00049kPa	6%

Na Tabela 4-3, tem-se um resumo dos resultados obtidos nesse estudo, novamente as tensões analisadas foram a da extremidade mais carregada da região sobreposta da junta, porém o

deslocamento analisado foi o da extremidade livre da junta estudada nesse caso. Observa-se que todos os modelos apresentaram diferenças significativas para todos os parâmetros, porém apesar das diferenças todos os modelos apresentaram as mesmas tendências sendo que o programa SAJ na maioria dos casos forneceu um valor intermediário entre os dois outros modelos.

4.2. JUNTAS METAL-COMPÓSITO (HÍBRIDAS)

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos das análises elaboradas para juntas de material híbrido (metal-compósito), tanto para o caso de junta simples como para o caso de junta dupla. Mais detalhes das propriedades dos materiais e das condições de contorno serão fornecidos a seguir. Vale ressaltar que para os testes de validação do modelo, em todos os casos investigados, tem-se que a espessura do adesivo é de 0,5 mm e o carregamento não produz plastificação na camada de adesivo.

4.2.1 JUNTA SIMPLES HÍBRIDA (METAL-COMPÓSITO) (CASO 3)

As propriedades mecânicas dos aderentes e do adesivo, assim como as condições de contorno e carregamento para a análise das juntas simples híbridas são apresentadas na Tabela 3-1 (Capítulo 3).

Os modelos foram submetidos a um carregamento normal de 20 N/mm, e vinculados numa extremidade, restringindo todos os graus de liberdade de translação. Na outra extremidade foi permitida a translação na direção longitudinal x . Além disso, em ambas as extremidades, as rotações não foram restringidas.

A Figura 62 mostra o resultado da comparação do deslocamento w entre o modelo proposto e os obtidos através de programas comerciais. Nessa figura observa-se que o resultado do ESAComp[®] apresenta uma rigidez maior na região do alumínio e é menos rígido na região do laminado. Nota-se também que os resultados dos três programas estão mais próximos na regi-

ão do laminado. Essas diferenças são resultados dos diferentes métodos e equacionamento do problema conforme discutido anteriormente, bem como, em função do tipo de elemento finito utilizado, do número de elementos finitos empregados na discretização da espessura e das limitações ao se aplicar as condições de contorno.

Figura 62: Comparação de resultados para o deslocamento w de uma junta híbrida simples colada (caso 3).

A Figura 63 mostra o campo de deslocamentos na direção w obtido através de análise via MEF de uma junta simples híbrida (metal-compósito).

Figura 63: Campo de deslocamentos do Modelo em elementos finito da junta híbrida (caso 3).

A Figura 64 mostra as tensões normais, onde o nível mais elevado ocorre no aderente de alumínio, como já era esperado em função do resultado para o deslocamento w . Além disso, na Figura 64, observa-se que todos os modelos apresentaram níveis de tensão bastante similares com as mesmas tendências de resposta.

Figura 64: Comparação das tensões normais, σ_z , na camada de adesivo (caso 3).

A Figura 65 mostra as tensões de cisalhamento τ_{zx} , mais uma vez observa-se que todos os modelos apresentaram as mesmas tendências e que o modelo de elementos finitos apresentou os níveis de tensão mais elevado nas extremidades da região sobreposta da junta, porém o modelo proposto teve seu nível de tensão bem próximo ao do obtido utilizando o “software” ESAComp[®].

Figura 65: Comparação das tensões de cisalhamento τ_{zx} na camada de adesivo (caso 3).

Novamente as maiores diferenças entre todos os modelos aparecem na tensão de cisalhamento τ_{zy} , conforme mostra a Figura 66.

Figura 66: Comparação das tensões de cisalhamento τ_{zy} na camada de adesivo (caso 3).

Dos resultados apresentados, pode-se concluir que a abordagem proposta é adequada para o cálculo de juntas híbridas simples, lembrando que apesar da tensão de cisalhamento τ_{zy} resultar em alguma diferença mais significativa, tem-se que essa tensão possui uma ordem de grandeza dez vezes menor que as demais tensões, e portanto, não contribuirá de forma relevante na falha da junta.

Em suma, todas as três abordagens apresentaram as mesmas tendências e as tendências de resposta ficaram próximas entre si.

Tabela 4-4: Resultados para análise de junta simples metal-compósito (valores para o compósito) (caso 3).

Variável	Lado do aderente de compósito				
	SAJ	ESAComp		MEF	
		Valor	Δ	Valor	Δ
w	-0,6mm	-0,73mm	21,7%	-0,38mm	37%
σ_z	0,0065kPa	0,0063kPa	3,1%	0,0063kPa	3,1%
τ_{zx}	0,0038kPa	0,0037kPa	2,6%	0,0039kPa	2,6%
τ_{zy}	0,00033kPa	0,00064kPa	93,9%	0,00007kPa	78,8%

No lado do aderente de compósito da junta simples híbrida, tem-se que para σ_z e τ_{zx} as diferenças são relativamente pequenas e novamente, no caso de τ_{zy} aparecem as maiores dife-

renças, porém os valores de τ_{zy} são bem inferiores aos das outras tensões, não possuindo grande relevância na falha do adesivo. Por outro lado, o deslocamento w apresentou uma diferença significativa entre os modelos, mas, novamente, o SAJ apresentou uma resposta intermediária em relação aos outros modelos.

Tabela 4-5: Resultados para análise de junta simples metal-compósito (valores para o metal) (caso 3).

Lado do aderente metálico					
Variável	SAJ	ESAComp		MEF	
		Valor	Δ	Valor	Δ
w	3,01mm	2,56mm	14,9%	3,14mm	4,3%
σ_z	0,0083kPa	0,0078kPa	6,0%	0,0096kPa	15,6%
τ_{zx}	0,0043kPa	0,0041kPa	4,6%	0,0050kPa	16,3%
τ_{zy}	0,00010kPa	0,00022kPa	120%	0,00027kPa	172%

No lado do aderente metálico a diferença entre os valores de deslocamento w são menores do que para o lado do compósito, porém os resultados para as tensões, as diferenças foram maiores.

Nesse caso as tensões analisadas foram as localizadas nas extremidades da junta, já os deslocamentos foram analisados na parte com maior e menor valor de deslocamento w .

4.2.2 JUNTA DUPLA HÍBRIDA (METAL-COMPÓSITO) (CASO 4)

Para as análises de junta híbrida dupla, as propriedades dos materiais utilizados, assim como as condições de contorno e carregamento são apresentados na Tabela 3-2 (Capítulo 3). Nesse caso, também foi utilizado como a camada de adesivo possuindo 0,5 mm de espessura e o carregamento de 15 N/mm. Sendo que o modelo foi engastado em ambas as extremidades e numa das extremidades, foi permitido o deslocamento na direção longitudinal.

Vale ressaltar que para o presente estudo de caso, o aderente de alumínio se localiza na parte onde se tem somente um aderente. Como o alumínio é um material isotrópico, e os aderentes de compósito são simétricos, a condição de carregamento em cada camada de adesivo é igual.

A Figura 67 mostra uma comparação do deslocamento w para todos os modelos. Dessa vez, pode-se observar que o modelo proposto apresentou uma resposta muito semelhante à obtida através do “software” de elementos finitos. Por outro lado, a resposta do “software” comercial ESAComp[®] foi mais rígida que as demais. No entanto, pode-se observar que os valores de deslocamento são relativamente pequenos. As diferenças encontradas podem ser explicadas através das diferenças de métodos numéricos e do equacionamento do problema, conforme discutido anteriormente, bem como, em função do tipo de elemento finito utilizado, do número de elementos finitos empregados na discretização da espessura, e das limitações ao se aplicar as condições de contorno.

Figura 67: Comparação do deslocamento w entre o modelo proposto e os obtidos por “softwares” comerciais (caso 40).

A Figura 68 mostra o campo de deslocamentos do modelo da junta dupla colada obtido através do “software” de elementos finitos ABAQUS[®].

Figura 68: Campo de deslocamentos da junta dupla híbrida colada (caso 4).

Para as tensões normais na camada de adesivo, a Figura 69 mostra que há uma concordância razoável das respostas obtidas através das três diferentes abordagens e que todos os modelos apresentam a mesma tendência de resposta.

Figura 69: Comparação da tensão normal, σ_z , na camada de adesivo entre os modelos (caso 4).

Para a tensão de cisalhamento τ_{zx} , tem-se também uma boa correlação entre as respostas obtidas com os modelos estudados, como evidencia a Figura 70.

Figura 70: Comparação da tensão de cisalhamento τ_{zx} no adesivo (caso 4).

Para a tensão de cisalhamento τ_{zy} , tem-se também uma boa correlação entre as respostas, porém, pode-se observar algumas diferenças entre a tendência das mesmas, principalmente para o aderente em alumínio. Todavia, os valores dessa tensão são significativamente menores que os das outras tensões, não tendo, portanto, grande impacto no estado de tensão final do adesivo.

Figura 71: Comparação da tensão de cisalhamento τ_{zy} no adesivo (caso 4).

Após realizar todas essas comparações, pode-se verificar que a abordagem proposta é adequada para prever o comportamento de juntas coladas simples ou dupla, híbridas ou não.

Tabela 4-6: Resultados para análise de junta dupla metal-compósito. Os resultados são para o lado do aderente de compósito (caso 4).

Variável	SAJ	ESAComp		MEF	
		Valor	Δ	Valor	Δ
w	0,00153mm	0,0012mm	21,7%	0,00151mm	1,3%
σ_z	0,0011kPa	0,00094kPa	14,5%	0,0010kPa	3,5%
τ_{zx}	0,0017kPa	0,0015kPa	11,7%	0,0013kPa	23,5%
τ_{zy}	0,00011kPa	0,00029kPa	73,6%	0,00010kPa	9,1%

Nesse caso, as diferenças entre o programa SAJ e o modelo de elementos finitos foram menores do que para o “software” ESAComp®, conforme apresentado na Tabela 4-6. Nota-se que as tensões analisadas pertencem à região mais solicitada da junta e o deslocamento foi analisado no ponto de maior deslocamento w da junta. Tem-se que na junta dupla híbrida as tensões τ_{zx} representam um papel importante na análise de resistência da junta, visto que essa é maior que σ_z , mas τ_{zy} como nos casos anteriores, possui um valor menor que as outras tensões.

4.3. ESTUDO DA INFLUÊNCIA DE PARÂMETROS

Uma vez avaliada a abordagem proposta, busca-se neste item apresentar resultados referentes a estudos com relação à influência de determinados parâmetros no comportamento mecânico das juntas coladas tanto simples (“single lap joint”) como duplas (“double lap joint”), híbridas ou não, empregando o SAJ. Dentre esses parâmetros, destacam-se:

- A influência do comprimento da região colada (“overlap”);
- A influência do módulo de elasticidade do adesivo;
- A influência da espessura de camada do adesivo.

Deve-se destacar que são apresentados os resultados de tensões que mais contribuem para a falha da junta, ou seja, os valores mais críticos.

4.3.1 INFLUÊNCIA DO “OVERLAP”

As propriedades elásticas do adesivo e dos aderentes são apresentadas na Tabela 3-1 (Capítulo 3). Por outro lado, na Tabela 4-7 são apresentadas as condições de contorno e carregamentos utilizados na análise de uma junta híbrida.

Tabela 4-7: Influência do “overlap” - condições de contorno e carregamentos para junta simples

Junta híbrida simples colada.

Orientação das camadas [graus]	[0/45/-45] _s
Espessura da camada [mm]	0,2
Espessura do alumínio [mm]	1,2
Carregamento normal [N/mm]	20
Momento [Nmm/mm]	0
Cisalhamento [N/mm]	0
Condições de contorno	x=-80=>u1=v1=w1=M1=0 x=100=>w2=M2=0

A Figura 72 apresenta τ_{zx} na camada de adesivo para diversos comprimentos da região de sobreposição.

Figura 72: Influência do “overlap” - Tensão τ_{zx} na camada de adesivo com variação do comprimento da região colada para junta simples.

A Figura 73 apresenta a tensão normal, σ_z , na camada de adesivo para a junta híbrida estudada para diferentes comprimentos da região de sobreposição. Nota-se que o aumento no comprimento do “overlap” acarreta na redução dos valores de tensão, como já era esperado, pois com um “overlap” mais extenso, a carga é transferida por um comprimento maior, além de se ter uma maior área suportando o carregamento, resultando assim em tensões menores.

Figura 73: Influência do “overlap” - Tensão normal σ_z na camada de adesivo para diversos comprimentos da região colada para junta simples.

A Tabela 4-8 apresenta um resumo dos valores das tensões nas extremidades da região de “overlap”. Pode-se observar uma diminuição significativa da tensão com o aumento do “overlap”, assim como já foi constatado anteriormente na Figura 72 e Figura 73.

Tabela 4-8: Valores das tensões na camada de adesivo para os diversos comprimentos de “overlap” para a junta simples (valores retirados da extremidade com 0mm de cota).

Junta Simples			
“overlap” [mm]	15	20	25
Sigma z [MPa]	0,012431	0,01164	0,010942
Tau zx [MPa]	0,008978	0,008583	0,008233

Utilizando os mesmos materiais do item anterior para os aderentes e adesivos, foram realizadas análises para junta dupla híbrida através do programa SAJ, considerando a influência do “overlap”. Sendo que as condições de contorno, carregamento, empilhamento do compósito e espessuras são apresentadas na Tabela 4-9.

Tabela 4-9: Influência do “overlap” - condições de contorno e carregamentos para junta dupla.

Junta híbrida dupla colada.

Orientação das camadas [graus]	[0/45/-45] _s
Espessura da camada [mm]	0,2
Espessura do alumínio [mm]	1,2
Carregamento normal [N/mm]	20
Momento [Nmm/mm]	0
Cisalhamento [N/mm]	0
Condições de contorno	x=-80=>u2=u3=v2=v3=w2=w3=M=0 x=100=>w1=M1=0,

A Figura 74 apresenta τ_{zx} na camada de adesivo para diversos comprimentos da região de sobreposição.

Figura 74: Influência do “overlap” - τ_{zx} na região do adesivo para diversos comprimentos da região colada para uma junta dupla híbrida.

A Figura 75 apresenta a tensão normal σ_z , na camada de adesivo para a junta híbrida dupla para diferentes comprimentos da região de sobreposição. Verifica-se novamente que o aumento no comprimento do “overlap” acarreta na redução dos valores de tensão.

Figura 75: Influência do “overlap” - Tensão normal σ_z na camada de adesivo para diversos comprimentos da região colada para uma junta híbrida colada.

Outro ponto que vale ser destacado é o aumento do pico de tensão com a diminuição do comprimento da região colada, sendo que na junta dupla esse efeito é consideravelmente menor do que para a junta simples.

Na Tabela 4-10, para a junta dupla, pode-se observar que após certo comprimento de “overlap” as tensões praticamente não variam.

Tabela 4-10: Valores das tensões na camada de adesivo para os diversos comprimentos de “overlap” para a junta dupla (valores retirados da extremidade em $x=0,0\text{mm}$).

Junta Dupla			
“overlap” [mm]	15	20	25
Sigma z [MPa]	0,001520	0,001515	0,001515
Tau zx [MPa]	0,002738	0,002735	0,002735

Observando os resultados para as juntas híbridas simples e dupla, tem-se que para um mesmo carregamento normal, o nível de tensão na camada de adesivo é significativamente menor no caso da junta dupla como observado na Figura 76 e na Figura 77.

Figura 76: Comparação entre os valores da tensão σ_z entre a junta simples e junta dupla para um “overlap” de 20mm, sendo apresentado somente metade do comprimento do “overlap”.

Figura 77: Comparação entre os valores da tensão τ_{zx} entre a junta simples e dupla para um “overlap” de 20mm, sendo apresentado somente metade do comprimento do “overlap”.

4.3.2 INFLUÊNCIA DO MÓDULO DE ELASTICIDADE DO ADESIVO

Foi realizado um estudo paramétrico para investigar o efeito do módulo de elasticidade do adesivo no estado de tensão resultante da camada de adesivo. Para este estudo, foram considerados aderentes de material compósito, sendo submetidos a um carregamento normal de 20N/mm e condições de contorno conforme apresentadas na Figura 33, novamente a espessura da camada de adesivo é de 0,5 mm. As propriedades elásticas do adesivo e dos aderentes estão apresentadas na Tabela 4-11 e as características da junta estão apresentadas na Tabela 3-1 (Capítulo 3). Nesse estudo, são considerados adesivos possuindo módulos de elasticidade de 1,5 GPa, 2,0 GPa e 3,0 GPa, que são valores, encontrados na literatura (San Román, 2005). Lembrando que o coeficiente de Poisson será mantido igual a 0,35.

Tabela 4-11: Influência do módulo de elasticidade do adesivo - propriedades elásticas do adesivo e dos aderentes.

	Adesivo	Camada – Fibra –Carbono Matriz - Epóxi Hexcel
Empilhamento		[0/45] _s
E_{11}	-	164 GPa
E_{22}	-	8,3GPa
ν	0,35	0,34
$G_{12}=G_{31}$	-	2,1GPa

Num primeiro momento, foram investigadas juntas simples de compósito-compósito, sendo que as tensões normais, σ_z , nos extremos da camada de adesivo na região sobreposição da junta, para os diferentes módulos de elasticidade, são menores quanto mais flexível é o adesivo, como mostrado na Figura 78. Isso se deve ao fato que um adesivo mais rígido (módulo de elasticidade maior) se deforma menos impondo uma maior resistência ao deslocamento dos aderentes aumentando assim o nível de tensão na camada de adesivo (Myeong-Su et al., 2008).

Figura 78: Tensão normal, σ_z , na camada de adesivo para diferentes módulos de elasticidade para junta simples.

O mesmo fato é observado para o caso das tensões de cisalhamento τ_{zx} , conforme mostrado na Figura 79. Assim para um módulo de elasticidade maior, σ_z e τ_{zx} possuem valores em módulo maiores dos que para módulos de elasticidade menores, isso se deve ao mesmo fato explicado anteriormente. A Tabela 4-12 apresenta os valores das tensões na extremidade ($x=0,0\text{mm}$) da camada de adesivo.

Figura 79: Influência do módulo de elasticidade do adesivo - Tensão de cisalhamento na camada de adesivo para diferentes módulos de elasticidade para junta simples.

Tabela 4-12: Valores das tensões na camada de adesivo para os diversos valores do módulo de elasticidade do adesivo para a junta simples (valores retirados da extremidade com 0mm de cota).

Junta Simples			
E [GPa]	1,5	2,0	3,0
Sigma z [MPa]	0,0058	0,00668	0,00817
Tau zx [MPa]	0,00334	0,00384	0,00468

Num segundo momento, foram analisadas juntas duplas de compósito-compósito, sendo que para esse tipo de junta, as propriedades elásticas dos adesivos e aderentes são apresentadas na Tabela 4-11 e as características da junta estão descritas na Tabela 3-2 (Capítulo 3).

Essas análises foram realizadas considerando que uma das extremidades da região sobreposta da junta dupla estava engastada e a outra livre. Novamente, analisando as tensões nas camadas de adesivo, tem-se os resultados, conforme apresentados na Figura 80 e na Figura 81. Novamente, como explicado anteriormente para o caso da junta simples, um adesivo mais rígido impõe maiores dificuldades para o deslocamento dos aderentes que compõem a junta.

Figura 80: Influência do módulo de elasticidade do adesivo -Tensão normal, σ_z , na camada de adesivo em uma junta dupla para adesivos com diferentes valores de módulo de elasticidade.

Novamente pode-se observar que quanto maior o módulo de elasticidade, maior são os picos de tensão nas extremidades do “overlap”, conforme é mostrado na Figura 80.

Figura 81: Influência do módulo de elasticidade do adesivo - Tensão de cisalhamento τ_{zx} na camada de adesivo em uma junta dupla para adesivos com diferentes valores de módulo de elasticidade.

Fato semelhante também ocorre com a tensão de cisalhamento τ_{zx} na camada de adesivo, Figura 81, igualmente aqui, pode-se observar que os valores mínimos de tensão de cisalhamento também ocorrem para adesivos com módulos de elasticidade maior. A Tabela 4-13 apresenta os valores das tensões na extremidade ($x=0,0\text{mm}$) da camada de adesivo.

Tabela 4-13: Valores das tensões na camada de adesivo para os diversos módulos de elasticidade do adesivo para a junta dupla (valores retirados da extremidade em $x=0,0\text{mm}$).

Junta Dupla			
E [GPa]	1,5	2,0	3,0
Sigma z [MPa]	0,000538	6,40E-04	8,34E-04
Tau zx [MPa]	8,09E-04	9,18E-04	0,00112

Pode-se concluir que adesivos com módulo de elasticidade menor, resultam em picos de tensão menor nas extremidades da região sobreposta da junta, mantidas as mesmas condições de contorno e carregamento para todos os tipos de junta estudados.

4.3.3 INFLUÊNCIA DA ESPESSURA DA CAMADA DE ADESIVO

Outro aspecto que também foi estudado trata-se da influência da espessura do adesivo no estado de tensão da camada do mesmo. Nesse estudo todas as demais características do adesivo são mantidas iguais, porém, a espessura do mesmo é alterada para os valores de 0,05mm, 0,5mm e 1,0mm, sendo estes valores encontrados em alguns trabalhos sobre juntas coladas como em Qian e Sun, (2008) e Ai e Nagai (2000), tanto para o caso da junta simples como para o caso da junta dupla. Deve-se destacar que a espessura da camada de adesivo pode ser controlada com algumas técnicas de fabricação, como, por exemplo, através da inserção de fios espaçadores com o diâmetro igual ao da espessura desejada na montagem da junta, garantindo assim uma precisão razoável.

As propriedades elásticas do adesivo e dos aderentes estão apresentadas na Tabela 4-11. As condições de contorno e características dos aderentes estão apresentadas na Tabela 3-1 (Capítulo 3) para o caso de junta com aderentes de compósito.

Num primeiro momento, foram investigadas juntas simples de compósito-compósito, sendo que a espessura da camada de adesivo influencia de maneira significativa o estado de tensão na camada do mesmo, conforme se pode observar na Figura 82. Da análise dessa figura, verifica-se que na extremidade da sobreposição da junta, uma camada de adesivo muito fino possui picos de tensão, em valores absolutos, maiores do que camadas de adesivo com espessuras maiores. Pode-se explicar esse resultado observando as equações (78) (Capítulo 3 – item 3.2.1) utilizadas para modelar a camada de adesivo, onde uma redução na espessura irá produzir tensão normal e de cisalhamento maiores devido a uma menor quantidade de material para suportar o mesmo nível de esforço.

Figura 82: Influência da espessura do adesivo - Tensão normal, σ_z , na camada de adesivo de uma junta simples considerando diversas espessuras da camada de adesivo.

O mesmo acontece para a tensão de cisalhamento τ_{zx} , conforme é apresentado na Figura 83, onde o pico de tensão é consideravelmente maior para a espessura da camada de adesivo de 0,05 mm do que para as demais espessuras. A Tabela 4-14 apresenta os valores das tensões obtidas na extremidade ($x=0,0\text{mm}$) da camada de adesivo.

Figura 83: Influência da espessura do adesivo - Tensão de cisalhamento τ_{zx} na camada de adesivo de uma junta simples considerando diversas espessuras da camada de adesivo.

Tabela 4-14: Valores das tensões na camada de adesivo para os diversos valores de espessura da camada de adesivo para a junta simples (valores retirados da extremidade com 0,0mm de cota).

Junta Simples			
esp. [mm]	0,05	0,50	1,00
Sigma z [MPa]	0,01372	0,00668	0,00656
Tau zx [MPa]	0,01041	0,00384	0,00309

Num segundo momento, foram investigadas juntas duplas de compósito-compósito, sendo que os materiais utilizados são os mesmos, e suas propriedades elásticas estão apresentadas na Tabela 4-11. As condições de contorno da junta dupla utilizada nesse estudo estão apresentadas na Tabela 3-2 (Capítulo 3), assim como as características dos laminados. Vale ressaltar que a junta dupla foi considerada com uma extremidade engastada e a outra extremidade livre.

A Figura 84 apresenta os resultados para a tensão normal da camada de adesivo da junta dupla na região sobreposta, e novamente é possível observar que a espessura da camada de adesivo afeta de maneira significativa os valores da tensão σ_z . Assim como para a junta simples, os maiores valores absolutos de tensão normal foram obtidos com a menor espessura da

camada de adesivo, novamente esse fato pode ser explicado, assim como para a junta simples, observando as equações (78) (Capítulo 3 – item 3.2.1) que foram utilizadas para modelar a camada de adesivo.

Figura 84: Influência da espessura do adesivo - Tensão normal, σ_z , na camada de adesivo de uma junta dupla considerando diversas espessuras da camada de adesivo.

O mesmo acontece para a tensão τ_{zx} onde a camada de adesivo com menor espessura resulta em valores de tensões mais elevadas nos extremos da região sobreposta, porém na região mais central do adesivo a tensão tende a ser menor do que para adesivos mais espessos, conforme se pode observar na Figura 85. A Tabela 4-15 apresenta os valores das tensões obtidas na extremidade ($x=0,0\text{mm}$) da camada de adesivo.

Figura 85: Influência da espessura do adesivo - Tensão de cisalhamento τ_{zx} na camada de adesivo de uma junta dupla considerando diversas espessuras da camada de adesivo.

Tabela 4-15: Valores das tensões na camada de adesivo para os diversos valores de espessura da camada de adesivo para a junta dupla (valores retirados da extremidade com 0,0mm de cota).

Junta Dupla			
esp. [mm]	0,05	0,50	1,00
Sigma z [MPa]	0,001950	6,40E-04	6,06E-04
Tau zx [MPa]	0,00291	9,18E-04	7,06E-04

4.4. ANÁLISE DE FALHAS DE JUNTAS COMPÓSITO-COMPÓSITO

Por fim, nesta parte do trabalho, o critério de Chang-Chang, apresentado no capítulo 2 no item 2.2.1, é utilizado para prever a falha nos aderentes de compósitos. Para tal, não são considerados os efeitos da plasticidade do adesivo e outros efeitos não-lineares. Devido aos níveis de tensão e deslocamentos maiores, como pôde-se observar nos itens anteriores, será analisada a junta simples.

Nesta análise a carga é incrementada a cada iteração até que a falha ocorra em alguma das camadas dos aderentes. Neste ponto, a análise é finalizada e o programa SAJ fornece como

dado de saída a lâmina, o aderente, a força normal que ocasionou a falha e qual o modo de falha. Também é estudado o efeito do empilhamento na resistência dos aderentes de compósito.

Na Tabela 4-16 e na Tabela 4-17 são apresentadas as propriedades elásticas, espessuras e limites de resistência dos materiais utilizados nessa análise.

Tabela 4-16: Análise de falhas de juntas compósito-compósito - Propriedades elásticas do adesivo e dos aderentes e espessuras do adesivo e do aderente (dados do aderente obtidos de Tita (2003)).

	Adesivo	Camada – Prepreg M10
E_{11}	1,485GPa	127 GPa
E_{22}	-	10,0 GPa
ν	0,35	0,306
$G_{12}=G_{31}$	-	5,4 GPa
espessura	0,5mm	0,2mm

Tabela 4-17: Análise de falhas de juntas compósito-compósito – Valores de resistência dos aderentes (dados do aderente obtidos de Tita (2003)).

Valores de resistência da lâmina prepreg M10	
Resistência paralela à fibra sob tração (X_T)	1400 MPa
Resistência paralela à fibra sob compressão (X_C)	930 MPa
Resistência perpendicular à fibra sob tração (Y_T)	47 MPa
Resistência perpendicular à fibra sob compressão (Y_C)	130 MPa
Resistência ao cisalhamento no plano 1-2 (S_{12})	53 MPa
Resistência ao cisalhamento no plano 2-3 (S_{23})	89 MPa

A Figura 86 apresenta um esquema da junta analisada de forma a esclarecer a nomenclatura utilizada, sistema de coordenadas e condições de contorno utilizadas nas análises.

Figura 86: Análise de falhas de juntas compósito-compósito – Esquema apresentando as condições de contorno, numeração dos aderentes e carregamento.

A Tabela 4-18 apresenta os resultados obtidos para algumas seqüências de empilhamentos. Vale lembrar que todos os laminados possuem o mesmo número de camadas e o empilhamento é o mesmo para ambos os aderentes.

Tabela 4-18: Análise de falhas de juntas compósito-compósito – Resultados

Caso	Empilhamento	Carregamento normal que levou a falha.	Lâmina do aderente 1	Modo de falha no aderente 1	Lâmina do aderente 2	Modo de falha no aderente 2
1	$[0/90/-45]_s$	125 N/mm	5	Falha por tração na matriz	2	Falha por tração na matriz
2	$[0/90/-45/-45/0/45]$	123 N/mm	-	-	2	Falha por tração na matriz
3	$[0/45/-45]_s$	202 N/mm	-	-	2	Falha por tração na matriz
4	$[0/90/-45/-45/30/45]$	60 N/mm	6	Falha por tração na matriz	-	-

Pode-se observar que laminados assimétricos falham com carregamentos menores do que os laminados simétricos, esse fato se deve a questão do efeito de acoplamento de membrana com flexo/torção, e portanto, a matriz B é diferente de zero, resultando que um carregamento normal produz giros aumentando assim o nível de tensão no laminado. Observa-se também que a lâmina falha por tração na matriz aonde a fibra se encontra perpendicular ao carrega-

mento. Porém, no caso 4, ([0/90/-45/-45/-30/45]), o laminado falhou com uma carga significativamente menor do que os demais e a lâmina que apresentou a falha esta orientada a 45° , sendo que o laminado apresenta a maior assimetria.

Quando o laminado é simétrico e não apresenta nenhuma das camadas perpendicular ao carregamento a falha ocorre em um nível de força normal significativamente maior e novamente a matriz falha por tração na camada 2 alinhada a 45° (caso 3).

5. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Dos resultados apresentados pode-se concluir que a abordagem proposta é adequada para o cálculo de juntas coladas, tanto a simples como a dupla, apresentando resultados relativamente próximos aos obtidos através de programas comerciais, sendo que as variações apresentadas entre as diversas abordagens são relativamente pequenas, não ocasionando interferência significativa no comportamento global da junta.

Vale ressaltar a flexibilidade do programa, sendo que uma vez implementado, pode-se modelar rapidamente vários tipos de configuração de juntas com várias condições de contorno. Além disso, o programa SAJ permite uma análise relativamente mais simples e rápida quando comparado a uma análise via elementos finitos, onde o modelo de uma nova configuração precisaria ser novamente elaborado, considerando ainda que o usuário disponha da licença de um programa comercial, uma vez que o código fonte do SAJ é aberto. Dessa forma, o programa SAJ apresenta-se como uma ferramenta computacional de auxílio ao engenheiro para a área de desenvolvimento de produto.

Com relação aos estudos da influência de determinados parâmetros no comportamento mecânico de juntas, conclui-se que o comprimento do “overlap” afeta diretamente o nível de tensão nas extremidades da região colada, sendo que quanto menor esse comprimento maior é a concentração de tensão nas extremidades. Essa característica indica que há um comprimento mínimo da região colada para que a junta suporte as cargas de projeto. Com esse comportamento, pode-se concluir que quando ocorre um descolamento nas extremidades da junta, esse dano possui o mesmo efeito de reduzir o “overlap”, o que, para uma mesma carga, resultará em um aumento de concentração de tensão nas extremidades, acelerando o processo de falha da junta.

Conclui-se também que a escolha de um adesivo mais flexível, ou seja, com menor módulo de elasticidade desde que este possua resistência adequada para o carregamento atuante, é mais adequada do que a escolha de adesivos mais rígidos. Pois, juntas coladas com adesivos mais rígidos apresentam uma concentração de tensão consideravelmente maior nas extremida-

des da região sobreposta do que as juntas coladas com adesivos com menor módulo de elasticidade. Esse fenômeno ocorre tanto para as tensões de cisalhamento τ_{zx} , como para as tensões σ_z , e também, é observado tanto para junta simples como para junta dupla. Por outro lado, outro fator importante também estudado foi à influência da espessura da camada de adesivo. Nesse caso, quanto menos espessa a camada de adesivo, maiores são as concentrações de tensão σ_z e τ_{zx} nas extremidades da região sobreposta da junta para adesivos com as mesmas propriedades mecânicas, sendo que esse fenômeno também é observado tanto em juntas simples como em juntas duplas.

Comparando os resultados obtidos para juntas simples e juntas duplas, tem-se que o nível de tensão nas camadas de adesivo para juntas duplas submetidas a um mesmo carregamento, é significativamente menor do que para juntas simples, como era previsto. Porém, apesar da junta dupla possuir a capacidade de suportar carregamentos mais elevados, alguns fatores devem ser levados em conta, tais como, peso da junta e o custo de fabricação, uma vez que duas áreas de “overlap” deverão ser preparadas para a aplicação do adesivo.

As rigidezes dos aderentes também influenciam de maneira significativa a distribuição de tensão na camada de adesivo, sendo que um aderente menos rígido sofrerá deflexões maiores, e, portanto, os maiores níveis de tensão serão encontrados no adesivo no lado do aderente menos rígido. Esse fato torna-se especialmente importante no caso de juntas híbridas simples, onde pode haver materiais com valores de rigidez consideravelmente diferentes, ou também no caso de laminados com orientações das lâminas diferentes, ou lâminas com diferentes espessuras e laminados com maior número de camadas.

Por fim, tem-se que juntas coladas com aderentes de laminados simétricos suportam carregamentos maiores do que se os aderentes fossem de laminados assimétricos. Também deve-se evitar lâminas orientadas perpendiculares ao sentido do carregamento.

Outra aplicação na qual o SAJ pode ser utilizado é em reparos estruturais colados, uma vez que estes podem ser modelados como juntas. Esta aplicação é bastante útil na área de reparos estruturais aeronáuticos, na qual pode-se calcular, com cautela, reparos em estruturas de alumínio reparadas com compósito, ou estruturas de compósito reparadas com metal.

Como propostas de trabalhos futuros, tem-se:

1) Estudar de maneira mais detalhada a falha nos aderentes, avaliando os processos de danificação e a degradação das propriedades elásticas dos aderentes de compósitos, e assim prever de maneira mais precisa o comportamento das juntas coladas.

2) Estudar detalhadamente os efeitos devido à plasticidade e viscosidade do adesivo, considerando assim, os efeitos viscosos e o processo de escoamento do adesivo.

3) Realizar ensaios em corpos de prova de maneira a validar o programa SAJ de forma mais precisa, bem como, estudar a influência de outros fatores na resistência da junta colada, tais como efeitos térmicos e ambientais.

4) Tornar a interface com o usuário do programa mais amigável, incluindo como entrada as condições de contorno, dessa forma protege-se o código fonte, uma vez que o usuário não precisará alterar no programa principal as condições de contorno.

5) Refinar os modelos de elementos finitos aumentando o número de pontos de integração do elemento tanto para laminados como para os materiais isotrópicos, aumentar o número de elementos na espessura da camada de adesivo e dos aderentes metálicos. Por fim, aplicar condições de contorno de simetria ao longo do eixo longitudinal (eixo x, figura 33 para a junta simples e figura 34 para a junta dupla) nos limites laterais do modelo.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAQUS 6.6 User's manual. (2006). Dassault Systèmes.

ABAD, M. J. et al. (2001). Thermal decomposition behavior and the mechanical properties of an epoxy-cycloaliphatic amine resin with ABS. **European Polymer Journal**, v37, p.1613-1623.

AI H. ; NAGAI M. (2000). Effect of the adhesive layer thickness on the fracture toughness of dental adhesive. **Dental Materials Journal**, v19(2), jun. 2000.

ANDERSON, T.L. (1995). **Fracture Mechanics – Fundamentals and applications**. 2.ed. New York : CRC Press.

ASHBY, M, F.; JONES, D, R, H. (1996). **Engineering Materials 1 – An introduction to their properties and applications**. 2.ed. Oxford: Butterworth Heinemann.

ASHBY, M, F.; JONES, D, R, H. (1996). **Engineering Materials 2 – An introduction to microstructures, processing and design**. 2.ed. Oxford: Butterworth Heinemann.

BALDAN, A. (2004). Review, adhesively-bonded joints in metallic alloys, polymers and composite materials: mechanical and environmental durability performance. **Journal of Materials Science**, v.39, n.15, p.4729-4797, ago. 2004.

BELHOUARI, M. et al. (2003). Comparison of double and single bonded repairs to symmetric composite structures: a numerical analysis. **Composite Structures**, v.65, p.47-53, dez. 2003.

BACHIR BOUIADJRA B.; BELHOUARI M.; SERIER B. (2002). Computation of the stress intensity factors for repaired cracks with bonded composite patch in mode I and mixed mode. **Composite Structures**, v.56, p.401-406, jun. 2002.

CALLISTER JR, W.D (2002). **Materials Science and Engineering**. New York: John Wiley.

CARVALHO, J. (1996). **Computer integrated design optimisation and manufacturing of filament wound parts**. Tese (Doutorado) - Faculty of Applied Sciences, Division PMA, K.U. Leuven.

CHARALAMBIDES M. N.; KINLOCH A. J.; MATTHEWS F. L. (1998). Adhesively bonded repairs to fiber composite materials II: Finite elements modeling. **Composites, Part A, Applied science and manufacturing**, v. 29, p.1383-1396, mar. 1998.

CHEN, W.; SALEEB, A. F. (1994). **Constitutive equations for engineering materials**. Vol. 2., Amsterdam: Elsevier Science.

COSTA, R. R. C. (2006). **Estudo de modelos constitutivos para simular o comportamento mecânico de um biopolímero**. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

COSTI, F. (2006). **Metodologia numérica aplicada a viscoelasticidade em polímeros**. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006.

DANIEL, I.; ISHAI, O. (2006). **Engineering mechanics of composite materials**. 2. ed. New York: Oxford University Press.

DENNY, J.J.(1995). **Fatigue response of cracked aluminum panel with partially bonded composite patch**. Dissertação (Mestrado) – Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson AFB, 1995.

DOT/FAA/AR-00/46 (2000). **Repair of composite laminates**. Office of Aviation Research, Washington, DC.

ELLYVIN, F.; OZAH F.; XIA, Z. (2007). 3-D modeling of cyclically loaded composite patch repair of a cracked plate. **Composite Structures**, v.9, n.4, p.486-494.

GOYAL, V. K.; JOHNSON, E. R.; GOYAL, VIJAY. K. (2008). Predictive Strength-Fracture Model for Composite Bonded Joints. **Composite Structures**, v.82, n.3, p.434-446.

HART-SMITH, L. J. (1987). **Composite materials handbook**. ASM International handbook committee.

HASHIN, Z. (1980). Failure criteria for unidirectional fiber composites. **Journal of applied mechanics**. v.47, p.329,334.

JESUS, A. (2003). **Modelo de elementos finitos para simulação de juntas sobrepostas coladas em compósitos laminados**. 98p. Dissertação (mestrado) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2003.

JONES, R. M.(1999). **Mechanics of composites materials**. 2.ed., New York: Taylor & Francis.

JESUS, A. (2003). **Modelos em elementos finitos para simulação de juntas sobrepostas coladas em compósitos laminados**. Dissertação (mestrado) - – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2003.

KIM, J.; MAI, Y. (1998). **Composites - Engineered Interfaces in Fiber Reinforced**. Amsterdam: Elsevier.

KIM, T. H.; KWEON, J. H.; CHOI J, H.; (2008). An experimental study on the effect of overlap length on the failure of composite to aluminum single lap bonded joints. **Journal of Reinforced Plastic and Composites**, v.27, n.10,p.1071-1081.

KIM, H. S.; LEE, G. D. (2006). Avoidance of fabrication thermal residual stresses in co-cure bonded metal-composite hybrid structures. **Journal of Adhesion Science and technology** , v.20, n.9, p.959-979.

LAI, W. M.; RUBIN D.; KREMPL E. (1993). **Introduction to continuum mechanics**. 3.ed. Burlington: Butterworth Heinemann.

LYCKEGAARD, A.; THOMSEN, O. T. (2004). High order analysis of junction between straight and curved sandwich panels. **Journal of Sandwich Structures and Materials**, v.6, n.6, p.497-525.

Matlab R2007a, (2007): reference manual, The MathWorks.

MALVERN, L. E. (1969). **Introduction to the mechanics of a continuous medium**. Prentice-Hall. Inc: New Jersey.

MATSUI, K. (1990). Effects of curing conditions and test temperature on the strength of adhesive-bonded joints. **Journal of adhesion and adhesives**, v.1, n.4, p.277-284.

MEGSON, T. H. G. (1996). **Structural and Stress Analysis**. Oxford: Butterworth-Heinemann.

MESQUITA, A. D. (2002). **Novas metodologias e formulações para o tratamento de problemas inelásticos com acoplamento progressivo MEC/MEF**. 191p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

MYEONG-SU, S. et al. (2008). A parametric study on the failure of bonded single-lap joints of carbon composite and aluminum. **Composite structures**, v.86, p.135-145.

MOMM, G. G. (2004). **Evaluation of an analytical model for adhesively bonded repair in composite plates**. Dissertação (mestrado) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2004.

MORTENSEN, F. (1998). **Development of tools for engineering analysis and design of high-performance FRP-composite structural elements**. Tese (Doutorado) - Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, Aalborg, 1998.

MIL-HDBK-17-3E, (1998). **Polymeric matrix composite: materials usage, design and analysis**. Washington DC, Department of Defense.

NIU, M.; CHUN, Y. (1989). **Airframe structural design – Practical design information and data on aircrafts structures**. Burbank: Lockheed Aeronautical System Company.

OKAFOR A. C. et al. (2005). Design, Analysis and Performance of Adhesively Bonded Composite Patch Repair of Cracked Aluminum Aircraft Panels. **Composite Structure**, v.71, p.258-270.

PACOLA, R. R. (2004). **Análise não linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não em meio contínuo tridimensional viscoelástico através de combinação entre o MEC e o MEF**. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

PROENÇA, S. P. B. (2007). **Análise Não-Linear de Estruturas**. Notas de aula, São Carlos, 2007.

PARÍS, F. (2001). A study of failure criteria of fibrous composite materials. **NASA**. Report n. CR-2001-210661/March 2001.

QIAN, H.; SUN, C.T. (2008). Effect of Bondline Thickness on Model I Fracture in Adhesive Joints. In: 49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 16t7, Schaumburg, IL.

ROMILLY, D. P.; CLARK, R. J. (2008). Elastic analysis of hybrid bonded joints and bonded composite repairs. **Composite Structures**, v.83, n.4, p.563-576.

RASTOGI, N.; SONI, S. R.; NAGAR, A. (1998). Thermal stresses in aluminum-to-composite double-lap bonded joints. **Advances in Engineering Software**, v.29 ,n.3 , p.273-281.

SAHA, G.; BANU, S. (2007). Buckling load of a beam-column for different end conditions using multi-segment integration technique. **Journal of Engineering and Applied Sciences**, v.2, n.1, p.27-32.

SAN ROMÁN, J.C. (2005). **Experiments on epoxy, polyurethane and ADP adhesives**. Composite Structure Laboratory, Technical report n. CCLab2000.1b/1.

SEGERLIND, L. J. (1984). **Applied finite element analysis**. 2.ed. New York: John Wiley and Sons.

SEONG, M. et al. (2008). A parametric study of bonded single-lap joints of carbon composite and aluminum. **Composite Structures**, v.86 ,n.1-3 , p.135-145.

SHAMPINE L., KIERZENKA J., REICHELTL M. W., (2006); Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in MATLAB with bvp4c. **ACM Transactions on Mathematical Software**, v.31, n.1, p.79-94.

SHIM, C.,K.; LEE J.J. (2006). Effects of thermal residual stresses on failure of co-cured lap joints with steel and carbon fiber-epoxy composite adherents. **Composites: Part A**, v.37, p.476–487.

SHIM, C.,K.; LEE J.J. (2000). Prediction of tensile load-bearing capacity of a co-cured single lap joint considering residual thermal stresses. **Journal of Adhesion Science and technology**, v.14, n.13, p.1691-1704.

SILVA L. F. M.; ADANS R. D. (2006). Stress-free temperature in a mixed adhesive joint. **Journal of Adhesion Science Technology**, v.20, n.15, p 1705-1726.

SMALLMAN, R. E.; BISHOP, R. J. (1999). **Modern physical metallurgy and materials engineering – Science, Process, Applications**. 6.ed. Oxford, Butterworth Heinemann.

SOBOTKA, Z. (1984). **Rheology of materials and engineering structures**. Praga, Elsevier Science Plubisher.

SOUZA, G. P.(2003). **Avaliação de critérios de falhas de compósitos poliméricos reforçados aplicados a vigas do material sob carregamento de flexão**. 105p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. (1951). **Theory of Elasticity**. Nova York: McGraw-Hill.

TITA, V. (2003). **Contribuição ao estudo de danos e falhas progressivas em estruturas de material compósito polimérico**. Tese (doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

TITA, V. (2006). **Projeto e fabricação de estruturas aeronáuticas em material compósito polimérico**. Universidade de São Paulo, São Carlos.

THOMSEN O. T. (1993). Analysis of local bending effects in sandwich plates with orthotropic face layers subjected to localized loads, **Composite Structures**, v.25 , p.511-520.

THOMSEN O. T. (1992). Elasto-Static and Elasto-Elastic stress analysis of adhesive bonded tubular lap joints. **Composite Structures**, v.21 , p.249-259.

THOMSEN O. T. (1995). Theoretical and experimental investigations of local bending effects in sandwich plates. **Composite Structures**, v.30 , p.85-101.

THOMSEN O. T. (1998). Sandwich with 'through-the-thickness' and 'fully-plotted' inserts: evaluation of differences in structural performances, **Composite Structures**, v.40, n.2 , p.159-174.

THOMSEN O. T.; FROSTIG Y. (1997). Localized bending effects in sandwich panels: Photoelastic investigation versus high-order sandwich theory results, **Composite Structures**, v.35, n.1 , p.97-108.

THOMSEN O. T.; RITS W. (1998). Analysis and design of sandwich plates with inserts – A high-order sandwich plate theory approach. **Composite Part B**, v.29B, p.795-807.

THOMSEN O. T. et al. (1996). Ply drop-off effects in CFRP/Honeycomb sandwich panels – theory. **Composite Science and Technology**, v.56, p.407-422.

THOMSEN O. T.; MORTSEN F. (2002). Localized coupling effects in adhesive bonded joint, **Composite Structures**, v.37, n.1, p.97-108.

TONG, L. et al. (2003). **3D Fiber reinforced polymer composites**. Oxford: Elsevier.

VASILIEV, V. V.; MOROZOV, E. (2001). **Mechanics and analysis of composites materials**. Oxford: Elsevier.

WILLIAMS, J.G. (1973). **Stress analysis of polymers**. London: Longman Group Limited.

XI L.; GOUPING, W. (2006). Progressive failure analysis of bonded composite repairs, **Composite Structures**, v.81, n.3 , p.331-340.

ZIENKIEWICZ O.C.; TAYLOR R.L. (2000). **The finite element method Vol1- The basis**. 5. ed. Oxford: Butterworth Heinemann.

ZIENKIEWICZ O.C.; TAYLOR R.L. (2000). **The finite element method Vol2- Solid mechanics**. 5. ed. Oxford: Butterworth Heinemann.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Exemplo de arquivo de entrada de dados

Para se proceder com a análise de juntas utilizando o programa SAJ, deve-se elaborar um arquivo de entrada de dados e salva-lo com o nome de data.dat. Abaixo é apresentado um exemplo de arquivo de entrada de dados:

2 \Opção de tipo de junta: 1-Single lap; 2-Double lap

AS-4 carbon \Material dos laminados

3 \Número de laminados utilizados na junta

3 \Numero de propriedades de materiais diferentes.

164 8.3 0.34 2.1 \Propriedades elásticas do laminado 1 E1[kN/mm²] E2[kN/mm²] poisson G12[kN/mm²]

164 8.3 0.34 2.1 \Propriedades elásticas do laminado 2 E1[kN/mm²] E2[kN/mm²] poisson G12[kN/mm²]

164 8.3 0.34 2.1 \Propriedades elásticas do laminado 3 E1[kN/mm²] E2[kN/mm²] poisson G12[kN/mm²]

12 12 12 \Número de camadas

A matriz abaixo representa as orientações e as espessuras de cada camada

0 30 60 0 30 60 0 30 60 0 30 60

0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125

60 30 0 60 30 0 60 30 0 60 30 0

0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125

60 30 0 60 30 0 60 30 0 60 30 0

0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125

Resina Epóxi \Material do adesivo

2.8 0.4 0.05 \Propriedades elásticas do adesivo Ead[kN/mm²] poisson espessura [mm]

0.100 0.0 0.0 0.001 \Carregamento da junta

30 20 30 \Dimensões da junta, sendo o valor do meio o comprimento da sobreposição [mm]

ANEXOS

ANEXO A – Função bvp4c do Matlab

A função bvp4c do Matlab[®] foi utilizada para resolver os sistemas de equações diferenciais do problema de valor de contorno com várias divisões do domínio (junta). Abaixo segue uma descrição da função disponível no site acessado no dia 10 de março de 2009: <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/index.html?/access/helpdesk/help/techdoc/ref/bvp4c.html>

bvp4c

Solve boundary value problems for ordinary differential equations

Syntax

`sol=bvp4c(odefun,bcfun,solinit)`

`sol=bvp4c(odefun,bcfun,solinit,options)`

`solinit = bvpinit(x, yinit, params)`

Arguments

odefun	A function handle that evaluates the differential equations $f(x, y)$. It can have the form <code>dydx = odefun(x,y)</code> <code>dydx = odefun(x,y,parameters)</code> where x is a scalar corresponding to x , and y is a column vector corresponding to y . parameters is a vector of unknown parameters. The output dydx is a column vector.	
bcfun	A function handle that computes the residual in the boundary conditions. For two-point boundary value conditions of the form $bc(y(a), y(b))$, bcfun can have the form <code>res = bcfun(ya,yb)</code> <code>res = bcfun(ya,yb,parameters)</code> where ya and yb are column vectors corresponding to $y(a)$ and $y(b)$. parameters is a vector of unknown parameters. The output res is a column vector. See Multipoint Boundary Value Problems for a description of bcfun for multipoint boundary value problems.	
solinit	A structure containing the initial guess for a solution. You create solinit using the function bvpinit. solinit has the following fields.	
	x	Ordered nodes of the initial mesh. Boundary conditions are imposed at $a = \text{solinit.x}(1)$ and $b = \text{solinit.x}(\text{end})$.

	y	Initial guess for the solution such that solinit.y(:,i) is a guess for the solution at the node solinit.x(i).
	parameters	Optional. A vector that provides an initial guess for unknown parameters.
	The structure can have any name, but the fields must be named x, y, and parameters. You can form solinit with the helper function bvpinit. See bvpinit for details.	
options	Optional integration argument. A structure you create using the bvpset function. See bvpset for details.	

Description

sol = bvp4c(odefun,bcfun,solinit) integrates a system of ordinary differential equations of the form

$$y' = f(x, y)$$

on the interval [a,b] subject to two-point boundary value conditions

$$bc(y(a), y(b)) = 0$$

odefun and bcfun are function handles. See [Function Handles](#) in the MATLAB Programming documentation for more information.

[Parametrizing Functions](#) in the MATLAB mathematics documentation, explains how to provide additional parameters to the function odefun, as well as the boundary condition function bcfun, if necessary.

bvp4c can also solve multipoint boundary value problems. See [Multipoint Boundary Value Problems](#). You can use the function [bvpinit](#) to specify the boundary points, which are stored in the input argument solinit. See the reference page for bvpinit for more information.

The bvp4c solver can also find unknown parameters P for problems of the form

$$y' = f(x, y, p)$$

$$0 = bc(y(a), y(b), p)$$

where P corresponds to parameters. You provide bvp4c an initial guess for any unknown parameters in solinit.parameters. The bvp4c solver returns the final values of these unknown parameters in sol.parameters.

bvp4c produces a solution that is continuous on [a,b] and has a continuous first derivative there. Use the function [deval](#) and the output sol of [bvp4c](#) to evaluate the solution at specific points xint in the interval [a,b].

sxint = deval(sol,xint)

The structure sol returned by bvp4c has the following fields:

sol.x	Mesh selected by bvp4c
sol.y	Approximation to $y(x)$ at the mesh points of sol.x
sol.yp	Approximation to $y'(x)$ at the mesh points of sol.x
sol.parameters	Values returned by bvp4c for the unknown parameters, if any
sol.solver	'bvp4c'

The structure sol can have any name, and bvp4c creates the fields x, y, yp, parameters, and solver.

sol = bvp4c(odefun,bcfun,solinit,options) solves as above with default integration properties replaced by the values in options, a structure created with the bvpset function. See [bvpset](#) for details.

solinit = bvpinit(x, yinit, params) forms the initial guess solinit with the vector params of guesses for the unknown parameters.

Singular Boundary Value Problems

bvp4c solves a class of singular boundary value problems, including problems with unknown parameters p , of the form

$$y' = S \cdot y/x + f(x, y, p)$$

$$0 = bc(y(0), y(b), p)$$

The interval is required to be $[0, b]$ with $b > 0$. Often such problems arise when computing a smooth solution of ODEs that result from partial differential equations (PDEs) due to cylindrical or spherical symmetry. For singular problems, you specify the (constant) matrix S as the value of the 'SingularTerm' option of [bvpset](#), and `odefun` evaluates only $f(x, y, p)$. The boundary conditions must be consistent with the necessary condition $S \cdot y(0) = 0$ and the initial guess should satisfy this condition.

Multipoint Boundary Value Problems

`bvp4c` can solve multipoint boundary value problems where $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ are boundary points in the interval $[a, b]$. The points $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ represent interfaces that divide $[a, b]$ into regions. `bvp4c` enumerates the regions from left to right (from a to b), with indices starting from 1. In region k , `bvp4c` evaluates the derivative as

$$yp = \text{odefun}(x, y, k)$$

In the boundary conditions function

$$\text{bcfun}(yleft, yright)$$

`yleft(:, k)` is the solution at the left boundary of $[a_{k-1}, a_k]$. Similarly, `yright(:, k)` is the solution at the right boundary of region k . In particular,

$$\text{yleft}(:, 1) = y(a)$$

and

$$\text{yright}(:, \text{end}) = y(b)$$

When you create an initial guess with

$$\text{solinit} = \text{bvpinit}(\text{xinit}, \text{yinit}),$$

use double entries in `xinit` for each interface point. See the reference page for [bvpinit](#) for more information.

If `yinit` is a function, `bvpinit` calls `y = yinit(x, k)` to get an initial guess for the solution at x in region k . In the solution structure `sol` returned by `bvp4c`, `sol.x` has double entries for each interface point. The corresponding columns of `sol.y` contain the left and right solution at the interface, respectively.

For an example of solving a three-point boundary value problem, type `threebvp` at the MATLAB command prompt to run a demonstration.

Note The [bvp5c](#) function is used exactly like `bvp4c`, with the exception of the meaning of error tolerances between the two solvers. If $S(x)$ approximates the solution $y(x)$, `bvp4c` controls the residual $|S'(x) - f(x, S(x))|$. This controls indirectly the true error $|y(x) - S(x)|$. `bvp5c` controls the true error directly. `bvp5c` is more efficient than `bvp4c` for small error tolerances.

Examples

Example 1

Boundary value problems can have multiple solutions and one purpose of the initial guess is to indicate which solution you want. The second-order differential equation

$$y'' + |y| = 0$$

has exactly two solutions that satisfy the boundary conditions

$$y(0) = 0$$

$$y(4) = -2$$

Prior to solving this problem with `bvp4c`, you must write the differential equation as a system of two first-order ODEs

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = -|y_1|$$

Here $y_1 = y$ and $y_2 = y'$. This system has the required form
 $y' = f(x, y)$

$$bc(y(a), y(b)) = 0$$

The function f and the boundary conditions bc are coded in MATLAB software as functions `twoode` and `twobc`.

```
function dydx = twoode(x,y)
dydx = [ y(2)
        -abs(y(1))];
```

```
function res = twobc(ya,yb)
res = [ ya(1)
        yb(1) + 2];
```

Form a guess structure consisting of an initial mesh of five equally spaced points in $[0,4]$ and a guess of constant values $y_1(x) \equiv 1$ and $y_2(x) \equiv 0$ with the command

```
solinit = bvpinit(linspace(0,4,5),[1 0]);
```

Now solve the problem with

```
sol = bvp4c(@twoode,@twobc,solinit);
```

Evaluate the numerical solution at 100 equally spaced points and plot $y(x)$ with

```
x = linspace(0,4);
```

```
y = deval(sol,x);
```

```
plot(x,y(1,:));
```

You can obtain the other solution of this problem with the initial guess
`solinit = bvpinit(linspace(0,4,5),[-1 0]);`

Example 2

This boundary value problem involves an unknown parameter. The task is to compute the fourth ($q = 5$) eigenvalue λ of Mathieu's equation

$$y'' + (\lambda - 2q \cos 2x)y = 0$$

Because the unknown parameter λ is present, this second-order differential equation is subject to *three* boundary conditions

$$y'(0) = 0$$

$$y'(\pi) = 0$$

$$y(0) = 1$$

It is convenient to use subfunctions to place all the functions required by `bvp4c` in a single M-file.

function `mat4bvp`

```
lambda = 15;
solinit = bvpinit(linspace(0,pi,10),@mat4init,lambda);
sol = bvp4c(@mat4ode,@mat4bc,solinit);

fprintf('The fourth eigenvalue is approximately %7.3f.\n',...
        sol.parameters)

xint = linspace(0,pi);
Sxint = deval(sol,xint);
plot(xint,Sxint(1,:))
axis([0 pi -1 1.1])
title('Eigenfunction of Mathieu''s equation.')
xlabel('x')
ylabel('solution y')
% -----
function dydx = mat4ode(x,y,lambda)
q = 5;
dydx = [ y(2)
        -(lambda - 2*q*cos(2*x))*y(1) ];
% -----
```

```

function res = mat4bc(ya,yb,lambda)
res = [ ya(2)
        yb(2)
        ya(1)-1 ];
% -----
function yinit = mat4init(x)
yinit = [ cos(4*x)
        -4*sin(4*x) ];

```

The differential equation (converted to a first-order system) and the boundary conditions are coded as sub-functions `mat4ode` and `mat4bc`, respectively. Because unknown parameters are present, these functions must accept three input arguments, even though some of the arguments are not used.

The guess structure `solinit` is formed with `bvpinit`. An initial guess for the solution is supplied in the form of a function `mat4init`. We chose $y = \cos 4x$ because it satisfies the boundary conditions and has the correct qualitative behavior (the correct number of sign changes). In the call to `bvpinit`, the third argument (`lambda = 15`) provides an initial guess for the unknown parameter λ .

After the problem is solved with `bvp4c`, the field `sol.parameters` returns the value $\lambda = 17.097$, and the plot shows the eigenfunction associated with this eigenvalue.

Algorithms

`bvp4c` is a finite difference code that implements the three-stage Lobatto IIIa formula. This is a collocation formula and the collocation polynomial provides a C^1 -continuous solution that is fourth-order accurate uniformly in $[a,b]$. Mesh selection and error control are based on the residual of the continuous solution.

References

[1] Shampine, L.F., M.W. Reichelt, and J. Kierzenka, "Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in MATLAB with `bvp4c`," available at http://www.mathworks.com/bvp_tutorial