UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
ÁREA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Estudo da Aplicabilidade do Método de Fronteira Imersa no Cálculo das
Derivadas Aerodinâmicas não Estacionárias para Análise de Flutter com
as Equações de Euler para Fluxo Compressível**

José Laércio Doricio

Orientador: Prof. Dr. Paulo Celso Greco Jr.

Tese apresentada à Escola de Engenharia de
São Carlos da Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos para a obtenção do
título de Doutor em Engenharia Mecânica.

São Carlos

2009

Dedicatória

Aos meus pais, Nair Vasques Doricio e Dalvo Doricio.

Agradecimentos

Deus por intermédio de Jesus é o caminho, a verdade e a vida. Por isso jamais poderia deixar de agradecê-lo, em primeiro lugar, por tudo o que tem realizado em minha vida. Em especial por esse momento de realização.

Meus pais Nair Vasques Doricio e Dalvo Doricio também foram de suma importância para eu conseguir chegar até este momento. Sem a presença deles jamais teria alcançado o que alcancei em minha vida, por intermédio da proteção, do afeto, do amor, do companheirismo, do fortalecimento e da luz para guiar meus passos. Assim agradeço fortemente a meus pais.

Gostaria muito de agradecer, especialmente, ao meu orientador professor Dr. Paulo Celso Greco Júnior por ter me aceitado, me orientado e colaborado durante a elaboração desse trabalho de tese. Considerando-o muito mais que apenas o orientador, mas como um amigo. Também gostaria de agradecer aos professores do Departamento de Engenharia de Materiais, Aeronáutica e Automobilística da USP que sempre colaboraram e foram de pronta assistência quando precisei. Em especial ao professor Dr. Michael George Maunsell pela amizade, orientação e colaboração, ao professor Dr. Marcello Augusto Faraco de Medeiros pela amizade e colaboração e aos professores Dr. Fernando Martini Catalano e Flávio Donizeti Marques pela colaboração. Também gostaria de agradecer aos demais professores do departamento, os quais tive pouco contato.

A amizade é um momento da vida do ser humano que deve ser guardado para sempre em nossa memória. E no decorrer da elaboração desse trabalho, a contribuição de grandes amigos foi muito importante para mim, no sentido da incentivação, da descontração e do fortalecimento. Dentre esses grandes amigos destacam-se o professor Renato Hallal, o professor Dr. Isaias Torres, o professor Dr. Robson Tadeu Soares de Oliveira Júnior, o professor Antônio

Carlos Henriques Marques e a professora Ana Paula Franco Bueno. Amigos esses que sempre permanecerão em minha memória.

Também gostaria de agradecer ao amigo professor Dr. José Antônio Salvador do departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, aos colegas professor Dr. Leandro Franco de Souza e Evelise R. C. Góis do Departamento de Ciências da Computação e Estatística da USP e aos colegas Igor Braga de Paula, Homero Ghioti da Silva, Ricardo Alberto Coppola Germanos, Elmer Mateus Genaro, Hernan Dario Ceron Muñoz, Carlos Eduardo Trindade, Natanael de Carvalho Pereira, André Luiz Carregari, Lee Yun Sheng, Gisele Aparecida Poppi Lavadeci e José Cláudio Pinto de Azevedo do departamento de Engenharia de Materiais, Aeronáutica e Automobilística da USP.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq - pelo apoio financeiro 141051/2006-0. E por fim, ao poeta Marcial Salaverry por autorizar o uso de sua poesia em meu trabalho e a todos àqueles que de alguma forma colaboraram para a elaboração desse trabalho e que não foram citados.

Resumo

Doricio, J. L. (2009). *Estudo da Aplicabilidade do Método de Fronteira Imersa no Cálculo das Derivadas Aerodinâmicas não estacionárias para Análise de Flutter com as Equações de Euler para Fluxo Compressível*. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo.

Neste trabalho, desenvolve-se um método de Fronteira Imersa para o estudo de escoamento compressível modelado pelas equações de Euler bidimensionais. O método de discretização de diferenças finitas é empregado, usando o método de Steger-Warming de ordem dois para discretizar as variáveis espaciais e o esquema de Runge-Kutta de ordem quatro para discretizar as variáveis temporais. O método da Fronteira Imersa foi empregado para o estudo de aeroelasticidade computacional em uma seção típica de aerofólio bidimensional com dois movimentos prescritos: torsional e vertical, com o objetivo de se verificar a eficiência do método e sua aplicabilidade para problemas em aeroelasticidade computacional. Neste estudo desenvolveu-se também um programa de computador para simular escoamentos compressíveis de fluido invíscido utilizando a metodologia proposta. A verificação do código gerado foi feita utilizando o método das Soluções Manufaturadas e o problema de reflexão de choque oblíquo. A validação foi realizada comparando-se os resultados obtidos para o escoamento ao redor de uma seção circular e de uma seção de aerofólio NACA 0012 com os resultados experimentais, para cada caso.

Palavras-Chave: Aeroelasticidade, Fronteira Imersa, Flutter, Equações de Euler, Método de Runge-Kutta, Método de Steger - Warming.

Abstract

Doricio, J. L. (2009). *Study of the Applicability of the Immersed Boundary Method in the Calculation of the Nonstationary Aerodynamics Derivatives for Flutter Analysis using the Euler Equations for Compressible Flow*. Thesis (Ph.D.). Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo.

In this work, an Immersed Boundary Method is developed to study compressible flow modeled by the two-dimensional Euler equations. The finite difference method is employed, using the second order Steger-Warming method to discretize the space variables and the fourth order Runge-Kutta method to discretize the time variables. The Immersed Boundary Method was employed to study computational aeroelasticity on a typical two-dimensional airfoil section with two prescribed motion: pitching and plunging, in order to verify the efficiency of the numerical method and its applicability in computational aeroelasticity problems. In this work, a computer program was developed to simulate compressible flows for inviscid fluids using the methodology proposed. The verification of the computational code was performed using the Method of Manufactured Solutions and the Oblique Shock Wave Reflection problem. The validation was performed comparing the obtained results for flows around a circular section and a NACA 0012 airfoil section with the experimental results, for each case.

Keywords: Aeroelasticity, Immersed Boundary, Flutter, Euler Equations, Runge-Kutta Method, Steger-Warming Method.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

1	Introdução	p. 35
1.1	Considerações Iniciais	p. 35
1.2	Objetivos da Pesquisa	p. 38
1.3	Histórico do Método da Fronteira Imersa	p. 38
1.4	Organização do Trabalho	p. 42
2	Escoamento Compressível Bidimensional com Fronteira Imersa	p. 43
2.1	Regimes de Escoamento e Compressibilidade	p. 43
2.2	Equações Governantes	p. 47
2.2.1	Comportamento físico de um fluido invíscido homogêneo	p. 47
2.2.2	Equações de Euler para escoamento compressível com termos fonte e com fronteiras imersas	p. 50
3	Método Numérico	p. 55

3.1	Método da Fronteira Imersa usando o Método de Runge-Kutta para Integração no Tempo	p. 56
3.2	Método de Steger-Warming para Discretização Espacial	p. 65
3.3	Condições de Contorno Externa	p. 72
3.4	Controle do Passo no Tempo	p. 75
4	Verificação do Método Numérico para o Domínio Euleriano	p. 79
4.1	Ordem de Convergência de Malha de um Método Numérico	p. 80
4.2	Método das Soluções Manufaturadas	p. 81
4.3	Verificação do Código para o Domínio Euleriano	p. 83
4.4	Verificação do Código para a Condição de Contorno Convencional com Escorregamento Livre	p. 96
5	Método da Fronteira Imersa com Escorregamento Livre	p. 105
5.1	Verificação do MFI-EL usando o Problema de Reflexão de Choque	p. 107
5.2	Verificação do MFI-EL para Escoamento ao Redor de um Prisma de Base Quadrada	p. 113
5.3	MFI-EL utilizando Correção na Fronteira	p. 121
5.3.1	Cálculo das derivadas espaciais para o domínio Euleriano	p. 122
5.3.2	Interpolação das variáveis lagrangianas	p. 126
5.4	Verificação do MFI-ELCF para o Escoamento sobre uma Seção Quadrada . .	p. 126
6	Estudo de Escoamento com o MFI-ELCF	p. 133
6.1	Estudo de Escoamento ao Redor de uma Seção Circular Estacionária	p. 133

6.2	Estudo de Escoamento ao Redor de uma Seção de Aerofólio NACA0012 Estacionária	p. 154
7	Aerofólio Móvel e o Cálculo das Derivadas Aerodinâmicas	p. 177
7.1	Distribuição de Pressão na Superfície de um Aerofólio NACA0012 com Movimento Prescrito	p. 177
7.2	Cálculo das Derivadas Aerodinâmicas	p. 194
8	Conclusões	p. 207
	Referências Bibliográficas	p. 209
	Apêndice A - Termos Fonte	p. 217
	Apêndice B - Detalhes das Simulações	p. 221
	Apêndice C - Resultados em Tabelas	p. 227
	Apêndice D - Função de Theodorsen	p. 245
	Índice Remissivo	p. 247

Lista de Figuras

2.1	F/A-18 Hornet na velocidade transônica. Crédito: U.S. Navy, Ensign John Gay. Fotografia sem copyright.	p. 45
2.2	VMFA-314 em vôo transônico. Crédito: U.S. Navy, Mate Airman Chris M. Valdez. Fotografia sem copyright.	p. 45
2.3	Modelo de aeronave hipersônica em túnel de vento de 20 polegadas a Mach 6. Crédito: NASA Langley Research Center (NASA-LaRC). Fotografia sem copyright.	p. 46
2.4	Esquema de modelo massa-mola-amortecedor acoplado.	p. 53
3.1	Esboço da função delta usando a Equação (3.7).	p. 63
3.2	Esboço da função delta usando a Equação (3.13).	p. 63
3.3	Esboço da função delta usando a Equação (3.14).	p. 64
3.4	Esboço da função delta usando a Equação (3.15) com $\sigma_x = 2$ e $\sigma_y = 2$	p. 64
3.5	Esboço da função delta usando a Equação (3.15) com $\sigma_x = 0,5$ e $\sigma_y = 0,5$	p. 65
3.6	Gráfico das funções limitadoras de fluxo.	p. 72
3.7	Ilustração das linhas características através do ponto I no plano xt	p. 73
4.1	Gráfico da solução manufaturada para $\rho(x,y)$	p. 85
4.2	Gráfico da solução manufaturada para $u(x,y)$	p. 85
4.3	Gráfico da solução manufaturada para $v(x,y)$	p. 86
4.4	Gráfico da solução manufaturada para $p(x,y)$	p. 86

4.5	Gráfico do termo fonte $\mathcal{F}_1(x, y)$	p. 87
4.6	Gráfico do termo fonte $\mathcal{F}_2(x, y)$	p. 87
4.7	Gráfico do termo fonte $\mathcal{F}_3(x, y)$	p. 88
4.8	Gráfico do termo fonte $\mathcal{F}_4(x, y)$	p. 88
4.9	Gráfico da função de perturbação $\mathcal{P}(x, y)$	p. 89
4.10	Malha 2 com $\Delta x = \Delta y = 0.05$	p. 89
4.11	Solução analítica para o número de Mach em preto e condição inicial perturbada em vermelho pontilhado.	p. 90
4.12	Solução analítica para a componente u da velocidade em preto e condição inicial perturbada em vermelho pontilhado.	p. 90
4.13	Solução analítica para a componente v da velocidade em preto e condição inicial perturbada em vermelho pontilhado.	p. 91
4.14	Solução analítica para a densidade ρ em preto e condição inicial perturbada em vermelho pontilhado.	p. 91
4.15	Solução analítica para a pressão p em preto e condição inicial perturbada em vermelho pontilhado.	p. 92
4.16	Solução analítica para o número de Mach Ma em preto e solução convergida em vermelho pontilhado.	p. 92
4.17	Solução analítica para a componente da velocidade u em preto e solução convergida em vermelho pontilhado.	p. 93
4.18	Solução analítica para a componente da velocidade v em preto e solução convergida em vermelho pontilhado.	p. 93
4.19	Solução analítica para a densidade ρ em preto e solução convergida em vermelho pontilhado.	p. 94

4.20	Solução analítica para a pressão p em preto e solução convergida em vermelho pontilhado.	p. 94
4.21	Comparação da ordem de convergência de malha com a ordem teórica em escala logarítmica. O eixo das ordenadas representa o valor numérico do erro em escala logarítmica e o eixo das abscissas representa de forma discreta as malhas 0, 1, ... 5.	p. 95
4.22	Notação para a onda de choque oblíquo.	p. 97
4.23	Modelo para a reflexão de onda de choque oblíquo.	p. 97
4.24	Reflexão de choque oblíquo: variável p adimensional e linha de corrente. . .	p. 99
4.25	Reflexão de choque oblíquo: variável ρ adimensional e linha de corrente. . .	p. 99
4.26	Reflexão de choque oblíquo: variável Ma e linha de corrente.	p. 99
4.27	Comparação entre a solução analítica e a computacional para a pressão p . . .	p. 101
4.28	Ampliação da região do primeiro choque para a comparação entre a solução analítica e a computacional para a pressão p	p. 101
4.29	Comparação entre a solução analítica e a computacional para a densidade ρ . .	p. 102
4.30	Ampliação da região do primeiro choque para a comparação entre a solução analítica e a computacional para a densidade ρ	p. 102
4.31	Comparação entre a solução analítica e a computacional para o número de Mach.	p. 103
4.32	Ampliação da região do primeiro choque para a comparação entre a solução analítica e a computacional para o número de Mach.	p. 103
5.1	Esquema massa-mola-amortecedor para escorregamento livre.	p. 106
5.2	Modelo para o problema da reflexão de choque oblíquo sobre uma fronteira imersa com escorregamento livre.	p. 107

5.3	Pressão p e linha de corrente.	p. 109
5.4	Densidade ρ e linha de corrente.	p. 109
5.5	Número de Mach e linha de corrente.	p. 109
5.6	Comparação da solução analítica com a solução numérica para a pressão em y=0.6	p. 110
5.7	Comparação da solução analítica com a solução numérica para a densidade em y=0.6	p. 110
5.8	Comparação da solução analítica com a solução numérica para o número de Mach em y=0.6.	p. 111
5.9	Comparação da solução analítica com a solução numérica para a pressão so- bre a fronteira imersa.	p. 111
5.10	Comparação da solução analítica com a solução numérica para a densidade sobre a fronteira imersa.	p. 112
5.11	Comparação da solução analítica com a solução numérica para o número de Mach sobre a fronteira imersa.	p. 112
5.12	Modelo da seção quadrada.	p. 114
5.13	Malha computacional usada para simular o problema de escoamento de fluido ao redor da seção quadrada.	p. 115
5.14	Campo do número de Mach para a seção quadrada: $Ma_{\infty} = 0,4$ em $t =$ $0,0125s$. Convencional em preto; fronteira imersa em vermelho.	p. 115
5.15	Campo do número de Mach para a seção quadrada, ampliado: $Ma_{\infty} = 0,4$ em $t = 0,0125s$. Convencional em preto; fronteira imersa em vermelho.	p. 116
5.16	Campo de pressão para a seção quadrada: $Ma_{\infty} = 0,4$ em $t = 0,0125s$. Con- vencional em preto; fronteira imersa em vermelho.	p. 116

- 5.17 Campo de pressão para a seção quadrada, ampliado: $Ma_{\infty} = 0,4$ em $t = 0,0125s$. Convencional em preto; fronteira imersa em vermelho. p. 117
- 5.18 Campo do número de Mach para a seção quadrada: $Ma_{\infty} = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; fronteira imersa em vermelho. p. 117
- 5.19 Campo do número de Mach para a seção quadrada, ampliado: $Ma_{\infty} = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; fronteira imersa em vermelho. p. 118
- 5.20 Campo de pressão para a seção quadrada: $Ma_{\infty} = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; fronteira imersa em vermelho. p. 118
- 5.21 Campo de pressão para a seção quadrada, ampliado: $Ma_{\infty} = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; fronteira imersa em vermelho. p. 119
- 5.22 Campo de velocidades para a seção quadrada, ampliado: $Ma_{\infty} = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; fronteira imersa em vermelho. p. 119
- 5.23 Campo de velocidades para a seção quadrada, ampliado: $Ma_{\infty} = 0,4$ em $t = 0,1s$ para o Método da fronteira imersa. p. 120
- 5.24 Esquema para interpolação das derivadas na direção horizontal. p. 123
- 5.25 Esquema para interpolação das derivadas na direção vertical. p. 123
- 5.26 Função delta especial com vetor normal $\mathbf{n} = (1,0)$ p. 125
- 5.27 Função delta especial com vetor normal $\mathbf{n} = (0,-1)$ p. 125
- 5.28 Campo do número de Mach para a seção quadrada: $Ma_{\infty} = 0,4$ em $t = 0,0125s$. Convencional em preto; MFI-ELCF em vermelho. p. 127
- 5.29 Campo do número de Mach para a seção quadrada, ampliado: $Ma_{\infty} = 0,4$ em $t = 0,0125s$. Convencional em preto; MFI-ELCF em vermelho. p. 127
- 5.30 Campo de pressão para a seção quadrada: $Ma_{\infty} = 0,4$ em $t = 0,0125s$. Convencional em preto; MFI-ELCF em vermelho. p. 128

5.31	Campo de pressão para a seção quadrada, ampliado: $Ma_{\infty} = 0,4$ em $t = 0,0125s$. Convencional em preto; MFI-ELCF em vermelho.	p. 128
5.32	Campo do número de Mach para a seção quadrada: $Ma_{\infty} = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; MFI-ELCF em vermelho.	p. 129
5.33	Campo do número de Mach para a seção quadrada, ampliado: $Ma_{\infty} = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; MFI-ELCF em vermelho.	p. 129
5.34	Campo de pressão para a seção quadrada: $Ma_{\infty} = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; MFI-ELCF em vermelho.	p. 130
5.35	Campo de pressão para a seção quadrada, ampliado: $Ma_{\infty} = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; MFI-ELCF em vermelho.	p. 130
5.36	Campo de velocidades para a seção quadrada, ampliado: $Ma_{\infty} = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; MFI-ELCF em vermelho.	p. 131
6.1	Malha computacional utilizada para simular o problema de escoamento de fluido ao redor de uma seção circular.	p. 137
6.2	Malha computacional utilizada para simular o problema de escoamento de fluido ao redor de uma seção circular com domínio 40×40	p. 137
6.3	Campo do número de Mach local para a seção circular: $Ma_{\infty} = 0,4$	p. 138
6.4	Campo do número de Mach local para a seção circular, ampliado: $Ma_{\infty} = 0,4$	p. 138
6.5	Campo de densidade ρ para a seção circular: $Ma_{\infty} = 0,4$	p. 139
6.6	Campo de densidade ρ para a seção circular, ampliado: $Ma_{\infty} = 0,4$	p. 139
6.7	Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção circular: $Ma_{\infty} = 0,4$	p. 140
6.8	Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção circular, ampliado: $Ma_{\infty} = 0,4$	p. 140

6.9	Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção circular com domínio 40×40 : $Ma_\infty = 0,4$	p. 141
6.10	Campo de Mach local para a seção circular com domínio 40×40 : $Ma_\infty = 0,4$.	p. 141
6.11	Campo do número de Mach local para a seção circular: $Ma_\infty = 0,5$	p. 142
6.12	Campo do número de Mach local para a seção circular, ampliado: $Ma_\infty = 0,5$.	p. 142
6.13	Campo de densidade ρ para a seção circular: $Ma_\infty = 0,5$	p. 143
6.14	Campo de densidade ρ para a seção circular, ampliado: $Ma_\infty = 0,5$	p. 143
6.15	Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção circular: $Ma_\infty = 0,5$	p. 144
6.16	Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção circular, ampliado: $Ma_\infty = 0,5$	p. 144
6.17	Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção circular: $Ma_\infty = 0,5$ nos instantes de tempo a) $0,81s$; b) $0,8125s$; c) $0,815s$; d) $0,8175s$; e) $0,82s$; f) $0,8225s$	p. 145
6.18	Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção circular: $Ma_\infty = 0,5$ nos instantes de tempo a) $0,825s$; b) $0,8275s$; c) $0,83s$; d) $0,8325s$; e) $0,835s$; f) $0,8375s$	p. 146
6.19	Linhas de corrente para a seção circular: $Ma_\infty = 0,5$ nos instantes de tempo a) $0,81s$; b) $0,8125s$; c) $0,815s$; d) $0,8175s$; e) $0,82s$; f) $0,8225s$	p. 147
6.20	Linhas de corrente para a seção circular: $Ma_\infty = 0,5$ nos instantes de tempo a) $0,825s$; b) $0,8275s$; c) $0,83s$; d) $0,8325s$; e) $0,835s$; f) $0,8375s$	p. 148
6.21	Figura extraída da página 214 do trabalho de Pandolfi e Larocca (1989), representando o escoamento transônico sobre uma seção circular para $Ma_\infty = 0,5$.	p. 149
6.22	Campo do número de Mach local para a seção circular: $Ma_\infty = 2$	p. 150
6.23	Campo do número de Mach local para a seção circular, ampliado: $Ma_\infty = 2$. .	p. 150

6.24	Campo de densidade ρ para a seção circular: $Ma_\infty = 2$	p. 151
6.25	Campo de densidade ρ para a seção circular, ampliado: $Ma_\infty = 2$	p. 151
6.26	Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção circular: $Ma_\infty = 2$	p. 152
6.27	Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção circular, ampliado: $Ma_\infty = 2$.	p. 152
6.28	Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície da seção circular: $Ma_\infty =$ 0,4 e $Ma_\infty = 0,5$. O ponto de estagnação frontal fica na posição π	p. 153
6.29	Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície da seção circular: $Ma_\infty = 0,5$.	p. 153
6.30	Nomenclatura e posicionamento da seção de Aerofólio.	p. 155
6.31	Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,3$, $\alpha = 0$ graus.	p. 157
6.32	Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,3$, $\alpha = 0$ graus.	p. 157
6.33	Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,3$, $\alpha = 4$ graus.	p. 158
6.34	Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,3$, $\alpha = 4$ graus.	p. 158
6.35	Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,4$, $\alpha = 0$ graus.	p. 159
6.36	Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,4$, $\alpha = 0$ graus.	p. 159
6.37	Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,5$, $\alpha = 0$ graus.	p. 160
6.38	Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,5$, $\alpha = 0$ graus.	p. 160

- 6.39 Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,5, \alpha = 4$ graus. p. 161
- 6.40 Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,5, \alpha = 4$ graus. p. 161
- 6.41 Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,5, \alpha = 8$ graus. p. 162
- 6.42 Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,5, \alpha = 8$ graus. p. 162
- 6.43 Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,6, \alpha = 0$ graus. p. 163
- 6.44 Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,6, \alpha = 0$ graus. p. 163
- 6.45 Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,73, \alpha = 0$ graus. p. 164
- 6.46 Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,73, \alpha = 0$ graus. p. 164
- 6.47 Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,75, \alpha = 0$ graus. p. 165
- 6.48 Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,75, \alpha = 0$ graus. p. 165
- 6.49 Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,75, \alpha = 3$ graus. p. 166
- 6.50 Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,75, \alpha = 3$ graus. p. 166

- 6.51 Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,75, \alpha = 4$ graus. p. 167
- 6.52 Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,75, \alpha = 4$ graus. p. 167
- 6.53 Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,8, \alpha = 0$ graus. p. 168
- 6.54 Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,8, \alpha = 0$ graus. p. 168
- 6.55 Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,3, \alpha = 0$ graus. Experimental: AGARD (1979). p. 169
- 6.56 Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,3, \alpha = 4$ graus. Experimental: AGARD (1979). p. 169
- 6.57 Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,4, \alpha = 0$ graus. Experimental: Amick (1950). p. 170
- 6.58 Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,5, \alpha = 0$ graus. Experimental: AGARD (1979). Computacional 1:
 $\Delta x_{min} = 0,004; \Delta y_{min} = 0,001$; Computacional 2: $\Delta x_{min} = 0,008; \Delta y_{min} = 0,002$. p. 170
- 6.59 Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,5, \alpha = 4$ graus. Experimental: AGARD (1979). p. 171
- 6.60 Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,5, \alpha = 8$ graus. Experimental: AGARD (1979). Computacional 1:
 $\Delta x_{min} = 0,008; \Delta y_{min} = 0,002$. Computacional 2: $\Delta x_{min} = 0,004; \Delta y_{min} = 0,001$. p. 171
- 6.61 Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012:
 $Ma_\infty = 0,6, \alpha = 0$ graus. Experimental: Amick (1950). p. 172

6.62	Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,73$, $\alpha = 0$ graus. Experimental: Amick (1950).	p. 172
6.63	Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,75$, $\alpha = 0$ graus. Experimental A: Amick (1950); Experimental B: AGARD (1979).	p. 173
6.64	Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,75$, $\alpha = 3$ graus. Experimental: AGARD (1979).	p. 173
6.65	Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,75$, $\alpha = 4$ graus. Experimental: AGARD (1979).	p. 174
6.66	Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,8$, $\alpha = 0$ graus. Experimental: AGARD (1979).	p. 174
7.1	C_p para 0,5 e 1,0 Hz na posição de 1/4 da corda	p. 180
7.2	C_p para 1,5 e 2,0 Hz na posição de 1/4 da corda	p. 180
7.3	Comparação do C_N obtidos pelos resultados computacionais e experimentais para 0,5 Hz.	p. 181
7.4	Comparação do C_N obtidos pelos resultados computacionais e experimentais para 2,0 Hz.	p. 181
7.5	Detalhe do comportamento do escoamento sobre a seção de aerofólio móvel com linhas de corrente instantâneas nos ângulos: a) 15° , b) 21° , c) 30° , d) 19° , e) 15° , e f) 0°	p. 182
7.6	Na Simulação Computacional: Pressão na superfície superior para 0,5; 1,0; 1,5 e 2,0 Hz	p. 183
7.7	Comparação da pressão na superfície superior entre os resultados numéri- cos e experimentais: a) Experimental 0,5 Hz; b) Computacional 0,5 Hz; c) Experimental 2,0 Hz; d) Computacional 2,0 Hz.	p. 184

7.8	Coeficiente de Pressão e Linhas de Corrente para o problema P1: A) $10,06^\circ$ B) $12,16^\circ$ C) $14,10^\circ$ D) $18,04^\circ$	p. 188
7.9	Coeficiente de Pressão e Linhas de Corrente para o problema P2: A) $0,65^\circ$ B) $4,94^\circ$ C) $-1,15^\circ$ D) $-4,9^\circ$	p. 188
7.10	Coeficiente de Pressão e Linhas de Corrente para o problema P3: A) $5,18^\circ$ B) $2,10^\circ$ C) $0,6^\circ$ D) $2,8^\circ$	p. 189
7.11	Coeficiente de Pressão e Linhas de Corrente para o problema P4: A) $-0,46^\circ$ B) $1,96^\circ$ C) $0,95^\circ$ D) $-2,1^\circ$	p. 189
7.12	Comparação entre resultado experimental e computacional usando o coeficiente de sustentação, com $Ma_\infty = 0,58$, $\alpha_m = 9,0$, $\alpha_0 = 9,55$ e frequência de $1,8Hz$	p. 190
7.13	Comparação entre resultado experimental e computacional usando o coeficiente de momento, com $Ma_\infty = 0,58$, $\alpha_m = 9,0$, $\alpha_0 = 9,55$ e frequência de $1,8Hz$	p. 190
7.14	Comparação entre resultado experimental e computacional usando o coeficiente de sustentação, com $Ma_\infty = 0,745$, $\alpha_m = 0,09$, $\alpha_0 = 5,0$ e frequência de $1,8Hz$	p. 191
7.15	Comparação entre resultado experimental e computacional usando o coeficiente de momento, com $Ma_\infty = 0,745$, $\alpha_m = 0,09$, $\alpha_0 = 5,0$ e frequência de $1,8Hz$	p. 191
7.16	Comparação entre resultado experimental e computacional usando o coeficiente de sustentação, com $Ma_\infty = 0,6$, $\alpha_m = 2,89$, $\alpha_0 = 2,41$ e frequência de $50,32Hz$	p. 192
7.17	Comparação entre resultado experimental e computacional usando o coeficiente de momento, com $Ma_\infty = 0,6$, $\alpha_m = 2,89$, $\alpha_0 = 2,41$ e frequência de $50,32Hz$	p. 192

7.18	Comparação entre resultado experimental e computacional usando o coeficiente de sustentação, com $Ma_\infty = 0,755$, $\alpha_m = 0,016$, $\alpha_0 = 2,51$ e frequência de $50,32Hz$	p. 193
7.19	Comparação entre resultado experimental e computacional usando o coeficiente de momento, com $Ma_\infty = 0,755$, $\alpha_m = 0,016$, $\alpha_0 = 2,51$ e frequência de $50,32Hz$	p. 193
7.20	Funções F e G em função de $\frac{1}{k}$	p. 199
7.21	Coeficiente de Sustentação, Coeficiente de Momento e Ângulo de Ataque para frequência de $5Hz$ e amplitude de 2 graus.	p. 203
7.22	Coeficiente de Sustentação, Coeficiente de Momento e Ângulo de Ataque para frequência de $5Hz$ e amplitude de 5 graus.	p. 203
7.23	Coeficiente de Sustentação, Coeficiente de Momento e Ângulo de Ataque para frequência de $50Hz$ e amplitude de 2 graus.	p. 204
7.24	Coeficiente de Sustentação, Coeficiente de Momento e Ângulo de Ataque para frequência de $50Hz$ e amplitude de 5 graus.	p. 204
7.25	Derivadas aerodinâmicas para rotação com amplitude de 2°	p. 205
7.26	Derivadas aerodinâmicas para rotação com amplitude de 5°	p. 205

Lista de Tabelas

4.1	Erro entre a solução manufaturada (m) e a convergida (c) para ρ , ρu , ρv , e p - Esquema de Ordem 2 com Limitador do tipo MinMod.	p. 95
4.2	Solução analítica para a reflexão de choque.	p. 98
5.1	Comparação do MFI-EL e do MFI-ELCF com o método <i>free-slip</i> convencional.	p. 132
7.1	Resultados para $-C_p$ máximo.	p. 185
7.2	Ângulo de estol.	p. 185
7.3	Simulações de Aerofólio Móvel.	p. 186
1	Simulações relativas às Figuras 4.16 a 4.21.	p. 221
2	Simulações relativas às Figuras 4.24 a 4.32.	p. 221
3	Simulações relativas às Figuras 5.3 a 5.11.	p. 221
4	Simulações relativas às Figuras 5.13 a 5.23; 5.28 a 5.35.	p. 222
5	Simulações relativas às Figuras 6.1 a 6.27.	p. 223
6	Simulações relativas às Figuras 6.31 a 6.54.	p. 223
7	Simulações relativas às Figuras 7.1 a 7.7.	p. 224
8	Simulações relativas às Figuras 7.8 a 7.19.	p. 225
9	Simulações relativas às Figuras 7.21 a 7.26.	p. 225
1	Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,3$, $\alpha = 0$ graus.	p. 227

2	Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,3$, $\alpha = 4$ graus.	p. 228
3	Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,4$, $\alpha = 0$ graus.	p. 230
4	Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,5$, $\alpha = 0$ graus.	p. 231
5	Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,5$, $\alpha = 4$ graus.	p. 233
6	Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,5$, $\alpha = 8$ graus.	p. 234
7	Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,6$, $\alpha = 0$ graus.	p. 235
8	Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,73$, $\alpha = 0$ graus.	p. 237
9	Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,75$, $\alpha = 0$ graus.	p. 238
10	Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,75$, $\alpha = 3$ graus.	p. 240
11	Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,75$, $\alpha = 4$ graus.	p. 241
12	Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,8$, $\alpha = 0$ graus.	p. 243
1	Tabela de valores da função de Theodorsen.	p. 245

Lista de Símbolos

u_{∞} : Velocidade de fluxo livre.	p. 43
c_{∞} : Velocidade do som de fluxo livre.	p. 43
Ma_{∞} : Número de Mach do fluxo livre.	p. 43
Ma : Número de Mach local.	p. 43
T : Temperatura.	p. 49
e : Energia por unidade de massa.	p. 49
Ω : Domínio retangular do fluido.	p. 50
Γ : Curva fechada simples.	p. 50
$\mathbf{x}$: Vetor posição.	p. 50
$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$: Velocidade do fluido na malha Euleriana.	p. 50
$p(\mathbf{x}, t)$: Pressão do fluido.	p. 51
$\rho(\mathbf{x}, t)$: Massa específica do fluido.	p. 51
$e(\mathbf{x}, t)$: Energia total.	p. 51
e_i : Energia interna.	p. 51
$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$: Força atuante na malha Euleriana.	p. 51
$\mathbf{F}(s, t)$: Força atuante na malha Lagrangiana.	p. 51

γ : Razão entre os calores específicos.	p. 51
$\delta^2(\mathbf{x})$: Função delta suavizada.	p. 51
t : Instante de tempo.	p. 52
L_1 : Comprimento na direção x do domínio computacional.	p. 56
L_2 : Comprimento na direção y do domínio computacional.	p. 56
M : Número de divisões da malha Euleriana na direção x	p. 56
N : Número de divisões da malha Euleriana na direção y	p. 56
$h_x, \Delta x$: Espaçamento da célula computacional Euleriana na direção x	p. 56
$h_y, \Delta y$: Espaçamento da célula computacional Euleriana na direção y	p. 56
S : Número de divisões da malha Lagrangiana	p. 56
Δs : Espaçamento entre os pontos na malha Lagrangiana.	p. 56
L_b : Comprimento da curva Γ	p. 56
t : Variável tempo.	p. 57
Δt : Intervalo de tempo computacional.	p. 57
$\wp$: Estágios do método de Runge-Kutta.	p. 57
κ : Constante de rigidez da fronteira imersa.	p. 59
c : Velocidade do som local.	p. 66
λ_i^x : Autovalores da matriz A	p. 66
λ_i^y : Autovalores da matriz B	p. 66

ϵ : Parâmetro de suavização.	p. 69
ϖ : Parâmetro para evitar divisão por zero no operador calcula a razão entre os fluxos.	p. 71
J^+ : Invariante de Riemann ao longo da linha característica C_+	p. 73
J^- : Invariante de Riemann ao longo da linha característica C_-	p. 73
u_n : Componente da normal da velocidade em relação a uma estrutura ou fronteira.	p. 73
u_t : Componente tangencial da velocidade em relação a uma estrutura ou fronteira.	p. 74
τ : Parâmetro de segurança para a estabilidade.	p. 76
ς : Ordem de convergência do método numérico.	p. 80
β : Taxa de refinamento da malha.	p. 81
q : Solução da equação diferencial parcial.	p. 82
ξ : Domínio computacional.	p. 82
$\mathcal{F}(\xi, t)$: Termo fonte da equação diferencial.	p. 82
$\mathcal{G}(\xi, t)$: Termo fonte da condição de contorno.	p. 82
q^e : Solução manufaturada da equação diferencial parcial.	p. 82
q^c : Solução convergida da equação diferencial parcial.	p. 82
$\mathcal{E}(q^c, q^e)$: Erro entre a solução convergida e a solução manufaturada exata.	p. 82
$\mathcal{P}(x, y)$: Função de perturbação.	p. 84
θ : Ângulo da onda de choque.	p. 98
ϕ : Ângulo de deflexão de uma linha de corrente.	p. 98

$\mathbf{n}(s, t)$: Vetor normal ao ponto s da estrutura.	p. 106
ζ : Constante de amortecimento da fronteira imersa.	p. 106
$\mathfrak{E}^-_{i,j}$: Derivada do fluxo $\mathbf{e}^-$ sobre o ponto (i, j)	p. 122
$\mathfrak{F}^+_{i,j}$: Derivada do fluxo $\mathbf{g}^+$ sobre o ponto (i, j)	p. 124
$\mathfrak{E}^+_{i,j}$: Derivada do fluxo $\mathbf{e}^+$ sobre o ponto (i, j)	p. 124
$\mathfrak{F}^-_{i,j}$: Derivada do fluxo $\mathbf{g}^-$ sobre o ponto (i, j)	p. 124
α : Ângulo de ataque.	p. 155

1 Introdução

*Campos de concentração,
acabando com a razão ...
Guerras religiosas,
produto de mentes ociosas ...
Guerrilha urbana,
e a vida se embanana ...
Preconceito racial,
algo que só faz mal ...
Guerras, revoluções,
cruéis perseguições ...
Para que na humanidade
nunca mais se repita tanta crueldade,
seria preciso que a inconsciência,
desse lugar à real consciência ...
Que os homens usassem mais o coração
do que sua desmedida ambição ...
Que esquecessem a sanha do poder,
pensando mais em apenas VIVER ...
Procurando espalhar mais amor,
ao invés de tanta dor ...
Que fosse capaz,
de ao menos pensar em PAZ ...*

Salaverry (2007).

1.1 Considerações Iniciais

A aeroelasticidade é o ramo da Engenharia Aeronáutica que estuda as interações entre forças inerciais, elásticas e aerodinâmicas. Nenhuma estrutura aeronáutica é totalmente rígida e, ao ser exposta a forças aerodinâmicas, normalmente a estrutura sofre alguma deflexão. Este efeito torna-se relevante quando a aeronave se move, pois qualquer modificação na forma do perfil aerodinâmico causa modificações nas cargas sobre o perfil, aumentando a deflexão no mesmo.

Os estudos em aeroelasticidade podem ser relativos a aeroelasticidade estática ou aeroelasticidade dinâmica, por meio de experimentos em túnel de vento utilizando modelos físicos ou através de simulação computacional. Apesar dos experimentos com modelos físicos poderem ser considerados muito mais apropriados para o estudo de aeroelasticidade, a construção de um modelo físico bem como o processo de simulação em túnel de vento costuma ser muito dispendioso para as empresas. Assim, é comum construir-se modelos físicos norteados por simulações computacionais.

A simulação computacional consiste em empregar técnicas matemáticas em computadores com o propósito de imitar um processo ou operação do mundo real. Desta forma, para ser realizada uma simulação, é necessário construir um modelo computacional que corresponda à situação real que se deseja simular. Em Fluidodinâmica Computacional (*Computational Fluid Dynamics* - **CFD**), diversas técnicas computacionais e métodos numéricos têm sido desenvolvidos para simular problemas que envolvem escoamento de fluido. Dentre esses métodos, Peskin (2002) desenvolveu uma técnica para simular escoamento incompressível de fluido newtoniano, com estruturas elásticas imersas em fluido, que destaca-se por sua robustez. Característica essencial para qualquer método numérico em CFD.

O método de Peskin (1972, 2002) - método da fronteira imersa - foi desenvolvido para resolver problemas envolvendo interações entre o fluido e a estrutura, cujo objetivo era de simular a interação de escoamento de fluido em válvulas cardíacas. A idéia geral do método é utilizar uma malha regular euleriana, para representar o fluido, juntamente com uma malha lagrangiana, para representar a fronteira imersa. Devido ao deslocamento, ou deformação, da fronteira imersa, pelo efeito da velocidade local do fluido, gera-se uma força de reação, pela fronteira imersa, exercida sobre o campo de fluido. Essa abordagem tem sido aplicada ao estudo da dinâmica dos fluidos em válvulas cardíacas nos trabalhos de Peskin (1972), McQueen, Peskin e Yellin (1982), Meisner, McQueen, Ishida, Vetter, Bortolotti, Strom, Frater, Peskin e Yellin (1985) e Lai e Peskin (2000). O método também foi aplicado ao estudo do nado de enguias, bactérias e escoamentos com partículas em suspensão respectivamente por Fauci e Peskin (1988), Dillon, Fauci e Gaver (1995), Fogelson e Peskin (1988).

O método da fronteira imersa - desenvolvido por Peskin (1972, 2002) - costuma ser confundido com os trabalhos de Goldstein, Handler e Sirovich (1993, 1995), que utilizaram uma abordagem denominada método da fronteira virtual para simular escoamentos turbulentos para fronteiras imersas rígidas. Essa abordagem compartilha o mesmo espírito do método da fronteira imersa, porém resolve problemas com fronteiras rígidas ao invés de problemas com fronteiras elásticas. A idéia primordial do método é tratar a superfície da estrutura como uma fronteira virtualmente imersa em fluido, essa fronteira virtual aplica uma força sobre o campo do fluido de forma que seja interpretado a existência de uma barreira minimizando o escoamento através da fronteira, isto é, o fluxo de massa para dentro da estrutura imersa. Por outro lado, no método da fronteira imersa, o que se minimiza é a deformação da estrutura imersa. No trabalho de Saiki e Biringen (1996) o método da fronteira virtual foi aplicado à simulação de escoamentos uniformes ao redor de cilindros estacionários ou móveis. Linnick (1999) utilizou-o para estudar o efeito de atuadores sobre estruturas aeronáuticas. O método da fronteira virtual também foi aplicado ao estudo de escoamentos turbulentos em geometrias complexas no trabalho de Lee (2003).

Para estudar os fenômenos aeroelásticos, onde há interação entre o escoamento de ar e corpos imersos no escoamento, é muito atrativa a metodologia baseada no método da fronteira imersa. Não foram encontrados trabalhos que utilizam o método da fronteira imersa aplicado ao estudo de problemas de escoamento sobre aerofólio, na literatura atual, que conseguiram simular de forma eficaz os problemas físicos. Isso motiva o estudo e aplicação do método a essa classe de problemas, assim como estudos em análises aeroelásticas. Ou mesmo verificar se o método pode ou não ser empregado para esse estudo.

Uma das vantagens em se utilizar o método da fronteira imersa para simular os escoamentos descritos acima é que as equações governantes podem ser discretizadas sobre malhas computacionais cartesianas. Isso simplifica a geração da malha e, além disso, mantém a simplicidade das equações governantes em coordenadas cartesianas. Outra vantagem importante dessa técnica, em relação à abordagem convencional, é que a fronteira imersa, representada por uma malha lagrangiana, não necessariamente se alinha à malha euleriana e tampouco depende dela, onde

o fluido é representado. Isto permite simular escoamentos com fronteiras móveis, geometrias complicadas ou mudanças topológicas, conforme relatado no trabalho de Ye, Mittal, Udaykumar e Shyy (1999). Desde que a malha cartesiana subjacente não dependa da localização da fronteira imersa, não há necessidade de reconstrução ou refinamento local da malha, uma vez que esses procedimentos são caros computacionalmente, contudo nada impede o seu uso. Todavia, é importante ressaltar que corpos ou estruturas imersas contendo regiões pontiagudas ou com alta curvatura necessitam de refinamento local da malha para que a estrutura possa ser representada corretamente nessas regiões.

1.2 Objetivos da Pesquisa

Nesse trabalho, desenvolveu-se um método de fronteira imersa adequado ao estudo de escoamento compressível modelado pelas equações de Euler. Esse método foi utilizado para o estudo de aeroelasticidade computacional em uma seção típica de aerofólio bidimensional com dois movimentos prescritos: torsional e vertical. Neste estudo desenvolveu-se um programa de computador para simular escoamentos compressíveis de fluido invíscido utilizando a metodologia mencionada.

1.3 Histórico do Método da Fronteira Imersa

O método da fronteira imersa, desenvolvido por Peskin (1972) foi empregado para muitas aplicações em dinâmica dos fluidos computacional para fluxo incompressível. Dentre as inúmeras aplicações e novas técnicas listam-se, nessa seção, as mais importantes. Beyer Júnior (1992) modelou o ouvido interno utilizando uma modelagem bidimensional com o método da fronteira imersa. Uma contribuição importante de seu trabalho foi o estudo sobre o erro na translação para diversos tipos de funções delta suavizadas. Posteriormente, Goldstein, Handler e Sirovich (1993) desenvolveram o método denominado método da fronteira virtual onde se introduz forças de corpo nas equações de Navier-Stokes para representar as superfícies sólidas. Em seu trabalho, eles estudaram escoamentos ao redor de seções circulares bidimensional e es-

coamentos em canais turbulentos tridimensionais. Para resolver um problema de fluxo através da fronteira elástica, Peskin e Printz (1993) introduziram uma metodologia para a construção de um operador de divergência a partir dos coeficientes de diferenças finitas.

Roma (1996) apresentou um estudo sobre refinamento auto-adaptativo de malha com o objetivo de melhorar a eficiência do método da fronteira imersa. No mesmo ano, Saiki e Biringen (1996) aplicaram o método da fronteira virtual para a simulação numérica de escoamentos uniformes estacionários e transientes ao redor de seções circulares. Eles utilizaram um método de diferenças finitas de alta ordem para baixos números de Reynolds. Dois anos depois, Arthurs, Moore, Peskin, Pitman e Layton (1998) desenvolveram um modelo bidimensional para escoamento arterial e transporte de massa. Eles resolveram as equações de Navier-Stokes incompressível com esquema *upwind* para os termos inerciais e com um método espectral para os termos viscosos. As forças na parede foram incluídas através do método da fronteira imersa. Bottino (1998) desenvolveu uma técnica numérica para modelar redes viscoelásticas passivas, tais como o cito-esqueleto de actina das amebas, utilizando o método da fronteira imersa. Ele utilizou as equações de Navier-Stokes incompressíveis com a técnica de diferenças finitas. Em seu trabalho, o método da fronteira imersa representa as forças atuantes na estrutura do cito-esqueleto.

Um novo método de fronteira imersa foi desenvolvido por Mohd-Yusof (1998), denominado método da fronteira fantasma (*Ghost Boundary Method*) para escoamentos em geometrias complexas. Utilizou diferenças finitas na formulação velocidade-vorticidade. Ele apresentou resultados de simulação para um canal turbulento e analisou a convergência. Stockie e Wetton (1999) estudaram o movimento de fibras elásticas imersas em fluidos com o método da fronteira imersa. Eles utilizaram as equações de Stokes para o movimento das fibras em fluido incompressível. Linnick (1999) realizou um estudo sobre atuadores e seu efeito na simulação de escoamentos sobre estruturas com o método da fronteira virtual. Ainda nesse ano, Roma, Peskin e Berger (1999) apresentaram um algoritmo computacional para o método da fronteira virtual empregando refinamento auto-adaptativo em escoamento incompressível bidimensional. Ye, Mittal, Udaykumar e Shyy (1999) desenvolveram um método numérico para malhas

cartesianas para simular escoamentos incompressíveis bidimensionais de fluidos viscosos não estacionários com fronteiras imersas complexas. Eles utilizaram o método de volumes finitos baseado em um esquema de discretização central de segunda ordem de precisão.

Wiegmann e Bube (2000) desenvolveram um Método de Interface Imersa empregando funções de salto explícito. Eles apresentaram demonstrações de segunda ordem de convergência para problemas de dimensão um e dois com funções por partes de coeficientes constantes. Fadlun, Verzicco, Orlandi e Mohd-Yusof (2000) desenvolveram um método de segunda ordem de precisão para escoamentos incompressíveis tridimensionais em geometrias complexas. Nesse método as forças de corpo permitem simular as condições de contorno. Lai e Peskin (2000) apresentaram e testaram uma abordagem do método de fronteira imersa de segunda ordem de precisão. Eles apresentaram resultados para simulação de escoamentos ao redor de seções circulares. Verzicco, Iaccarino, Fatica e Orlandi (2000) estudaram o escoamento induzido por um ejetor em um tanque cilíndrico utilizando o método da fronteira imersa para modelagem. Eles utilizaram as técnicas RANS e LES. Jung e Peskin (2001) examinaram escoamentos dirigidos por bombeamento sem válvulas. Eles utilizaram as equações de Navier-Stokes incompressíveis bidimensionais na forma euleriana e o método da fronteira imersa para representar as forças estruturais. Li e Lai (2001) propuseram um Método de Interface Imersa para as equações de Navier-Stokes incompressível com forças singulares ao longo de uma ou várias interfaces no domínio. A metodologia é baseada em um método de projeção de segunda ordem, com ordem modificada somente nos pontos próximos à interface.

Um dos mais importantes trabalhos sobre o método da fronteira imersa é o desenvolvido por Peskin (2002), que apresentou o desenvolvimento e a fundamentação matemática para o método da fronteira imersa. Peskin também apresentou postulados sobre a função delta discreta que conduz a uma versão única da mesma e a discretização temporal utiliza o método de Runge-Kutta de segunda ordem. Nesse mesmo ano, Zhu e Peskin (2002) realizaram uma simulação computacional de um filamento flexível em um filme de sabão utilizando o método da fronteira imersa. Biros, Ying e Zorin (2003) desenvolveram um método para resolver as equações de Navier-Stokes, aplicável a geometrias arbitrárias com precisão de segunda ordem e com com-

plexidade algorítmica ótima, segundo eles. Eles utilizaram uma formulação integral do método da fronteira imersa. Para fazer a discretização eles utilizaram a técnica de elementos finitos na formulação velocidade-pressão. Para resolver o sistema linear, utilizaram o método de Krilov com pré-condicionador de 2-níveis de Schwartz. Lee (2003) fez a análise de estabilidade do método da fronteira virtual para aplicações em escoamentos turbulentos tridimensionais com geometrias complexas.

Lee e Leveque (2003) estudaram um método de fronteira imersa modificado para resolver o problema de precisão próximo à fronteira imersa. Esse método foi implementado utilizando as equações de Navier-Stokes incompressíveis bidimensionais através da técnica de volumes finitos. O método da projeção foi utilizado para impor incompressibilidade. Eles apresentaram estudos sobre a precisão e a ordem de convergência do método numérico. Tseng e Ferziger (2003) apresentaram um método de fronteira imersa eficiente com células fantasmas para simular escoamentos turbulentos. Eles utilizaram malhas cartesianas deslocadas e não-deslocadas. Gilmanov, Sotiropoulos e Balaras (2003) apresentaram um algoritmo geral de reconstrução para simular escoamentos incompressíveis com fronteiras imersas sobre malhas cartesianas. A superfície do sólido é discretizada utilizando uma malha triangular não-estruturada. A solução nos nós da superfície do sólido é reconstruída por meio de interpolação linear na direção normal ao corpo sólido. Givelberg e Bunn (2003) empregaram o método da fronteira imersa para simular a propagação de ondas sonoras no interior do ouvido interno humano. Kang (2003) realizou um estudo numérico de escoamentos bidimensional sobre duas seções circulares, com arranjo de lado a lado, a baixo número de Reynolds empregando o método da fronteira imersa.

Silva, Silveira-Neto e Damasceno (2003) aplicaram o método da fronteira virtual para a simulação numérica de um escoamento uniforme sobre uma seção circular. Eles utilizaram a condição de não-escorregamento na interface fluido-estrutura e a discretização foi feita pelo método de diferenças finitas. Linnick e Fasel (2003) apresentaram um método de fronteira imersa de alta ordem para escoamentos bidimensional incompressível utilizando as equações de Navier-Stokes na formulação função corrente-vorticidade. Para integração no tempo, eles utilizaram os esquemas de Runge-Kutta de segunda e quarta ordem. Para a discretização espa-

cial, eles utilizaram o esquema de diferenças finitas de quarta ordem. Griffith e Peskin (2005) estudaram o método da fronteira imersa para problemas suaves. Nesse estudo, foi utilizado o método de Godunov para discretização espacial das equações de Navier-Stokes. Três funções delta distintas são estudadas e a ordem de convergência da fronteira é reportada.

1.4 Organização do Trabalho

O capítulo 2, desse trabalho, relata os princípios físicos de escoamento compressível bidimensional modelado pelas equações de Euler, discutindo sobre o comportamento físico de um fluido invíscido e os regimes de escoamento. No capítulo 3 desenvolve-se um método de fronteira imersa usando o método de Runge-Kutta para a integração no tempo e o esquema de Steger-Warming para discretização espacial das equações governantes. Nesse capítulo também é relatado o tipo de condição de contorno externa utilizada e o método de controle do passo no tempo. A verificação do código foi feita por meio de comparações com soluções analíticas construídas usando o Método das Soluções Manufaturadas e por meio do problema de reflexão de onda de choque oblíquo, descritas no capítulo 4. No capítulo 5 desenvolve-se uma condição de contorno de escorregamento livre modelada pelo método da fronteira imersa. O estudo de escoamento ao redor de uma seção circular estacionária e de uma seção de aerofólio NACA0012 é realizado no capítulo 6. O estudo de escoamento transiente sobre seções de aerofólio móvel é realizado no capítulo 7, que apresenta o cálculo das derivadas aerodinâmicas e comparação com os resultados analíticos de Theodorsen. As conclusões são relatadas no Capítulo 8.

2 *Escoamento Compressível Bidimensional com Fronteira Imersa*

*Tenho vivido tempo demais
entre os que odeiam a paz.
Sou um homem de paz;
mas, ainda que eu fale de paz,
eles só falam de guerra.*

Salmo 120, versículos 6 e 7.

2.1 Regimes de Escoamento e Compressibilidade

Seja u_∞ a velocidade de escoamento livre de um escoamento ao longo de uma linha de corrente distante de um corpo. Considere também um ponto arbitrário I no domínio físico, onde p , T , ρ e $\mathbf{u}$ são a pressão local, a temperatura local, a densidade local e a velocidade local nesse ponto. Todas essas variáveis são propriedades do ponto I e variam de ponto a ponto no domínio físico. A velocidade do som c depende dessas propriedades locais (LIEPMANN; ROSHKO, 1957), portanto também varia de ponto a ponto. Se c_∞ é a velocidade do som do fluxo livre, então $Ma_\infty \equiv \frac{u_\infty}{c_\infty}$ é o número de Mach do fluxo livre. Analogamente, o número de Mach local Ma é definido por $Ma \equiv \frac{u}{c}$ e varia de ponto a ponto no domínio. Assim, o número de Mach também é considerado como uma unidade de medida de velocidade.

Quando um avião se desloca com uma velocidade igual à do som, ele está voando a Mach 1. Esta unidade é uma homenagem ao físico austríaco Ernst Mach que, pela primeira vez, mediu a velocidade de propagação do som no ar. Assim, um Mach é considerada a velocidade mínima para que qualquer corpo consiga ultrapassar a barreira do som. Em aerodinâmica, a

barreira do som é a aparente barreira física que dificulta grandes objetos de atingirem velocidades supersônicas. A expressão foi criada durante a Segunda Guerra Mundial quando diversos aviões começaram a se deparar com os efeitos da compressibilidade do ar. Assim, para que os estudiosos pudessem fazer cálculos mais precisos foram criados 5 categorias de velocidade para determinar em que velocidade está o corpo:

- Subsônica: $Ma < 1$;
- Transônica: $0,8 < Ma < 1,2$;
- Sônica: $Ma = 1$;
- Supersônica: Entre $1,2 \leq Ma < 5$;
- Hipersônica: $Ma \geq 5$.

❖ **Escoamentos em regime subsônico:**

O regime subsônico ocorre quando $Ma < 1$ em todo o domínio físico ou computacional. Nesse caso, a velocidade do escoamento é sempre menor que a velocidade do som.

❖ **Escoamentos em regime supersônico:**

O regime supersônico ocorre quando o número de Mach local é maior que um em todo o domínio físico ou computacional, isto é, $Ma > 1$. Ou seja, a velocidade local do escoamento é sempre maior que a velocidade do som.

❖ **Escoamentos em regime transônico:**

O regime transônico, em aeronáutica, é um termo que se refere a um intervalo de velocidades que estão logo abaixo e logo acima da velocidade do som (isto ocorre aproximadamente para Mach 0,8 a 1,2). Isto é, esse regime é definido como o intervalo de velocidades do escoamento contendo o número de Mach crítico, quando algumas partes do escoamento de ar sobre uma aeronave se torna supersônico, e a uma velocidade mais alta, tipicamente próximo a Mach 1,2, quando todo o escoamento em torno da aeronave se torna supersônico. Entre essas velocidades, algumas partes do escoamento são supersônicas e outras não. O aparecimento de ondas de choque é muito comum para escoamentos

nesse regime. As Figuras 2.1 e 2.2 mostram um F/A-18 Hornet e um vôo do esquadrão VMFA-314 (*Marine Fighter Attack Squadron Three One Four*) na velocidade transônica.

Figura 2.1: F/A-18 Hornet na velocidade transônica. Crédito: U.S. Navy, Ensign John Gay. Fotografia sem copyright.

Figura 2.2: VMFA-314 em vôo transônico. Crédito: U.S. Navy, Mate Airman Chris M. Valdez. Fotografia sem copyright.

❖ **Escoamentos em regime hipersônico:**

Em aerodinâmica, é considerado hipersônico o escoamento com número de Mach muito superior a 1. Não há um limite bem definido entre o escoamento supersônico e o hipersônico (ANDERSON, 2006). No entanto, a partir da década de 1970, este termo geralmente se refere a números Mach iguais a 5 ou superiores. A Figura 2.3 mostra um corpo de prova de uma aeronave hipersônica em um túnel de vento a Mach 6.

Figura 2.3: Modelo de aeronave hipersônica em túnel de vento de 20 polegadas a Mach 6. Crédito: NASA Langley Research Center (NASA-LaRC). Fotografia sem copyright.

As principais características de um escoamento em regime hipersônico (ANDERSON, 2006) são:

- ❖ **Camada de Choque Fina:** Quando o número de Mach aumenta a densidade atrás do choque também aumenta, implicando na diminuição do volume atrás da onda de choque devido à conservação de massa. Conseqüentemente a camada de choque, isto é, o volume entre o corpo e a onda de choque, é fina para altos números de Mach.
- ❖ **Gradiente de Entropia elevado:** Com o aumento do número de Mach, a entropia através do choque também aumenta, isso resulta em um forte gradiente de entropia

em choques curvos e escoamento altamente rotacional que se mistura com a camada limite.

- ❖ **Interação Viscosa:** Uma porção da grande energia cinemática associada com o escoamento a altos números de Mach transforma-se em energia interna no fluido devido aos efeitos viscosos. O aumento da energia interna é liberado na forma de calor. Como o gradiente de pressão normal ao escoamento dentro da camada limite é zero, o aumento da temperatura através da camada limite coincide com uma diminuição na densidade. Portanto, a camada limite sobre o corpo aumenta em tamanho e pode, freqüentemente, se misturar ou se fundir com a camada de choque fina.
- ❖ **Escoamento de Alta Temperatura:** As altas temperaturas, devido à dissipação viscosa, causam desequilíbrio químico das propriedades do escoamento, tais como dissociação e ionização das moléculas, resultando em aquecimento convectivo e radiativo (transferência de calor por ondas eletromagnéticas).

Nesse trabalho foi empregada uma metodologia baseada no método da fronteira imersa para simular escoamentos de ar em regime subsônico ou em regime transônico. Assim, começa-se a descrever a modelagem matemática a partir da próxima seção.

2.2 Equações Governantes

2.2.1 Comportamento físico de um fluido invíscido homogêneo

As equações governantes para escoamento compressível invíscido de um fluido homogêneo foram derivadas por Euler em 1755. Euler considerou que todas as propriedades do fluido (isto é, velocidade, densidade, pressão, etc.) são funções contínuas no tempo e no espaço. Portanto, Euler assumiu que o fluido é um meio contínuo (*continuum*). Isto é, assume-se que o fluido é distribuído uniformemente e preenche completamente o espaço que ocupa, permitindo a aproximação das quantidades físicas, tais como a energia e a quantidade de movimento, no limite infinitesimal.

Deve-se tomar cuidado ao se utilizar essa hipótese, não considerando os efeitos moleculares porque para a maioria das aplicações, a distância molecular média é pequena o suficiente comparada à escala do problema que se quer simular. De forma que se pode considerar um volume de controle onde o que importa é a variação média do efeito molecular, e nesse caso, a hipótese de que o fluido é um meio contínuo pode ser considerada uma ótima aproximação do meio físico.

Euler em 1755 descobriu, para escoamentos compressíveis, que são necessárias três leis de conservação para descrever o comportamento físico do escoamento de um fluido, líquido ou gasoso. A primeira lei que rege o comportamento do fluido, segundo Euler, é a Lei da Conservação da Massa. Essa lei estabelece que:

A variação da quantidade de massa em um dado volume V sobre um período de tempo t é igual à diferença entre a quantidade de massa que entra em V e a quantidade de massa que deixa V durante o período de tempo t (SCHREIER, 1982).

Essa lei pode ser expressa (SCHREIER, 1982) na forma diferencial abaixo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.1)$$

onde ρ é a massa específica do fluido e $\mathbf{u}$ é a velocidade do fluido.

A segunda lei que rege o comportamento físico do escoamento de fluido, é a segunda Lei de Newton (conhecida também como Lei da Conservação da Quantidade de Movimento. Essa lei estabelece que:

Uma força $\mathbf{F}$ atuando sobre um corpo dá-lhe uma aceleração $\mathbf{a}$ na direção da força com magnitude inversamente proporcional à massa m do corpo: $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ (SCHREIER, 1982).

Essa lei é formulada para sistemas fechados, contudo, em mecânica dos fluidos os sistemas são, em geral, abertos - um sistema é dito aberto quando ocorre a passagem de massa através da fronteira, e fechado quando isso não ocorre (CASTELLAN, 1996). Portanto, a Lei da Conservação de Quantidade de Movimento deve ser reescrita para ser válida para sistemas abertos.

Isso é feito, como no trabalho de Schreier (1982), conduzindo à seguinte equação:

$$\int_V \mathbf{f} dV = \int_V \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV, \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{f}$ representa as forças atuando sobre o volume de controle V . Exemplos dessas forças são: gravitacional, magnética, química, elétrica, etc. O operador derivada substancial representa a taxa de mudança de uma propriedade para uma partícula particular de fluido, e é definido, em geometria bidimensional, como:

$$\frac{D}{Dt} \equiv u(x, y, t) \frac{\partial}{\partial x} + v(x, y, t) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Considerando a presença de campos de força sobre o fluido, a Equação (2.2) pode ser escrita (SCHREIER, 1982) na forma diferencial abaixo:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{f}. \quad (2.4)$$

A terceira lei que rege o comportamento físico do escoamento de fluido é a primeira Lei da Termodinâmica, conhecida também como lei da Conservação da Energia. A primeira Lei da Termodinâmica estabelece que:

Se um sistema pode trocar energia E com o ambiente externo (calor Q e trabalho W), então a variação da energia dE é definida por $dE \equiv dQ - dW$, onde dQ é a variação do calor e dW é a variação do trabalho (CASTELLAN, 1996).

A Lei da Conservação da Energia pode ser escrita em função da temperatura, da energia total, da entalpia, etc. Essa lei, na forma diferencial, em função da energia, para sistemas abertos (SCHREIER, 1982), resulta em:

$$-\nabla \cdot \nabla T = \rho \frac{De}{Dt} + \nabla(p \mathbf{u}), \quad (2.5)$$

onde T é temperatura e e é a energia total por unidade de massa do fluido. As Equações (2.1), (2.4) e (2.5) são as equações governantes para escoamentos de fluido compressível invíscido homogêneo e não condutor derivadas por Euler em 1755. Esse conjunto de equações é conhecido como **equações de Euler** ou **leis de conservação** para escoamento invíscido. Na próxima

seção serão apresentadas as leis de conservação para escoamento de ar compressível na forma conservativa para escoamento em geometria bidimensional modelado com fronteiras imersas.

2.2.2 Equações de Euler para escoamento compressível com termos fonte e com fronteiras imersas

Nesse trabalho considera-se escoamento de ar **compressível, homogêneo, invíscido e caloricamente perfeito** em um domínio retangular bidimensional Ω contendo uma fronteira imersa na forma de uma simples curva fechada Γ . A configuração dessa curva é representada na forma paramétrica $\mathbf{X}(s, t)$, com $0 \leq s \leq L_b$ e com $\mathbf{X}(0, t) = \mathbf{X}(L_b, t)$. Utilizando-se letras maiúsculas para as variáveis lagrangianas e minúsculas para as eulerianas, as equações governantes na forma conservativa são dadas por:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = \mathbf{h} , \quad (2.6)$$

onde:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho e + p)u \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho e + p)v \end{bmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ uf_1 + vf_2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$p = (\gamma - 1) \left(\rho e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right) , \quad (2.8)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \int_0^{L_b} \mathbf{F}(s, t) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s, t)) ds , \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}(s, t)}{\partial t} = \mathbf{U}(\mathbf{X}(s, t), t) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s, t)) d\mathbf{x} , \quad (2.10)$$

$$\mathbf{F}(s, t) = \mathbf{S}(\mathbf{X}(s, t), t) . \quad (2.11)$$

Nas Equações (2.6)-(2.11), $\mathbf{x} = (x, y)$ é o vetor posição, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t))$ é a veloci-

dade do fluido, $p(\mathbf{x}, t)$ é a pressão, $\rho(\mathbf{x}, t)$ é a massa específica do fluido e $e(\mathbf{x}, t)$ é a energia total, dada por:

$$e = e_i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \quad (2.12)$$

onde e_i é a energia interna específica. A força atuando sobre o fluido é $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = (f_1(\mathbf{x}, t), f_2(\mathbf{x}, t))$, enquanto que a força exercida pela fronteira imersa ou fibra é $\mathbf{F}(s, t) = (F_1(s, t), F_2(s, t))$.

A Equação (2.6) é a equação de Euler para escoamento compressível bidimensional sujeita a uma força de corpo. A força de corpo é uma força que atua sobre o volume de um corpo e também pode ser definida como uma força externa atuando através da massa de um corpo. A gravidade e o magnetismo são exemplos de forças de corpo. As forças associadas com um referencial não inercial também podem consideradas forças de corpo (HALLIDAY, 2001). No caso abordado nesse trabalho, é importante observar que essa força de corpo representa uma força de superfície, gerada pela fronteira imersa, sobre o fluido. Essas equações são resolvidas na malha euleriana. Portanto são escritas totalmente na forma euleriana e representam a conservação de massa, a conservação de quantidade de movimento e a conservação da energia em geometria bidimensional.

A equação de estado é uma equação termodinâmica que descreve o estado da matéria sob um dado conjunto de condições físicas, isto é, ela permite um relacionamento matemático entre duas ou mais funções de estado associado com a matéria, tal como temperatura, pressão, volume ou energia interna (DAVIS; MASTEN, 2004). Na modelagem matemática acima, a Equação (2.8) é a equação de estado para a pressão, considerando a lei dos gases ideais ou perfeitos. Considerando o ar como matéria, a razão entre os calores específicos é dada por $\gamma = 1,4$. Essa equação é fundamental para fechar o sistema de equações diferenciais formado pelas equações de Euler (2.6)-(2.7).

As Equações (2.9)-(2.10) representam a interação entre o fluido e a fronteira imersa. Elas estão na forma semi-lagrangiana-euleriana, ou seja, são responsáveis pela transferência de informações entre a malha do domínio lagrangiano e a malha do domínio euleriano. Nessas equações de interação aparece a função de transferência delta de Dirac suavizada, $\delta^2(\mathbf{x}) = \delta_{\Delta x}(x) \delta_{\Delta y}(y)$,

que pode ser considerada como o cerne do método da fronteira imersa (PESKIN, 2002), pois é responsável pela transferência de informações do espaço euleriano para o lagrangiano e vice-versa. Nos trabalhos de Peskin, essa função é definida como:

$$\delta_h(r) = \begin{cases} \frac{1}{8h} \left(3 - \frac{2|r|}{h} + \sqrt{1 + \frac{4|r|}{h} - \frac{4r^2}{h^2}} \right), & |r| \leq h, \\ \frac{1}{8h} \left(5 - \frac{2|r|}{h} - \sqrt{-7 + \frac{12|r|}{h} - \frac{4r^2}{h^2}} \right), & h \leq |r| \leq 2h, \\ 0, & 2h \leq |r|. \end{cases} \quad (2.13)$$

A função dada pela Equação (2.11) estabelece que a força em um segmento particular da fronteira imersa num instante de tempo t é determinada por intermédio da configuração da fronteira nesse mesmo instante de tempo t . Quando um material se deforma sob ação de tensão e retorna para sua forma original, no momento em que a tensão é removida, diz-se que o material tem propriedade elástica ou é elástico. A maioria das estruturas aeronáuticas possuem essa propriedade, responsável por inúmeros fenômenos ditos aeroelásticos, como *flutter* por exemplo. Por isso, utiliza-se modelagem elástica para representar a estrutura aeronáutica imersa em fluido, dada pela função $\mathbf{S}(\mathbf{X}, t)$ na Equação (2.11). Para tal, utiliza-se uma Lei de Hooke para modelar a elasticidade do material (UGURAL; FENSTER, 2003), isto é:

$$\text{Força de Restauração} = \kappa \times \text{Deslocamento},$$

onde κ é a constante elástica.

Nesse relacionamento, a dependência explícita no tempo permite uma fronteira ativa. Por exemplo no caso de um músculo para escoamentos incompressíveis, ver o trabalho de Jung e Peskin (2001). Já no caso de uma fronteira rígida, por exemplo em um escoamento em torno de um cilindro, $\mathbf{S}$ representa uma força passiva que tende a manter a fronteira muito próxima da configuração do cilindro (KANG, 2003).

Juntamente com a modelagem de elasticidade do material, pode-se também utilizar um modelo de amortecimento. Isso pode ser feito com o objetivo de dissipar mais rapidamente as oscilações causadas pelo efeito elástico do material e possivelmente evitar problemas de instabilidade numérica do método computacional, como será visto futuramente. Um exemplo

de modelo de amortecimento é:

$$\text{Força de Amortecimento} = \zeta \times \text{Velocidade} ,$$

onde ζ é a constante de amortecimento viscoso. Assim o modelo acoplado massa-mola-amortecedor pode ser esquematizado como:

$$\text{Força Restauração Amortecida} = \kappa \times \text{Deslocamento} + \zeta \times \text{Velocidade} . \quad (2.14)$$

Utilizando a nomenclatura de fronteiras imersas para o domínio lagrangiano, a Equação 2.14 é matematicamente traduzida em:

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}(s,t),t) = \kappa (\mathbf{X}^e(s) - \mathbf{X}(s,t)) + \zeta (\mathbf{U}^e(s) - \mathbf{U}(s,t)) ,$$

onde $\mathbf{X}^e(s)$ e $\mathbf{U}^e(s)$ representam a posição e a velocidade de referência, respectivamente, $\kappa < 0$ e $\zeta < 0$. A Figura 2.4 mostra um exemplo de sistema acoplado massa-mola-amortecedor modelado pela Equação 2.14. A massa m nessa figura representa cada partícula s que compõem a estrutura imersa e a parede representa o referencial que pode ou não estar em movimento.

Figura 2.4: Esquema de modelo massa-mola-amortecedor acoplado.

3 *Método Numérico*

*Amar o perdido
deixa confundido este coração.
Nada pode o olvido
contra o sem sentido
apelo do não.
As coisas tangíveis
tornaram-se insensíveis
a palma da mão.
Mas as coisas findas
muito mais que lindas
essas ficarão.*

**Memória - Carlos Drummond de
Andrade.**

As leis de conservação definidas pelas Equações (2.6) e (2.7) são resolvidas com o método de marcha no tempo de Runge-Kutta de ordem 4 (FORSYTHE, 1977). Os vetores de fluxo das equações de Euler são resolvidos utilizando um esquema de discretização espacial de Steger-Warming (STEGER; WARMING, 1981), com o objetivo de tratar melhor os problemas que envolvem mudanças no sinal dos autovalores, como por exemplo em escoamentos transônicos.

A estabilidade numérica é assegurada por meio de um procedimento de controle do passo no tempo, que leva em consideração o critério de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy (ANDERSON, 1995) e o critério de estabilidade para o método da fronteira imersa, como apresentado por Lai e Peskin (2000). As condições de contorno externa são não-reflexivas e foram implementadas utilizando as invariantes de Riemann, que são válidas para escoamentos em regime subsônico, transônico ou supersônico .

3.1 Método da Fronteira Imersa usando o Método de Runge-Kutta para Integração no Tempo

O método da fronteira imersa é implementado através do esquema de diferenças finitas nas malhas euleriana-lagrangianas para a interação fluido-estrutura. Duas malhas são necessárias: uma malha euleriana para representar o fluido em um domínio bidimensional e uma malha lagrangiana para representar a fronteira imersa em um domínio unidimensional. Considerando $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$ o domínio computacional. As variáveis do fluido são definidas sobre uma malha euleriana $M \times N$ com $\mathbf{x} = (x_i, y_j) = (ih_x, jh_y)$ para $(i, j) = 0, 1, \dots, (M-1; N-1)$, onde $h_x = \Delta x = \frac{L_1}{M}$ e $h_y = \Delta y = \frac{L_2}{N}$ é a largura de cada divisão da malha. Analogamente, utiliza-se um conjunto de S pontos lagrangianos $\mathbf{X} = (X_k, Y_k)$ com $k = 0, 1, \dots, S-1$ para discretizar a fronteira imersa, com espaçamento inicial entre os pontos de $\Delta s = \frac{L_b}{S}$, onde L_b é o comprimento da curva Γ . As variáveis da fronteira imersa são definidas nesses pontos.

É importante notar que os nós da malha euleriana, que representam o fluido, são fixos enquanto que os nós da malha lagrangiana, que representam a fronteira imersa, são móveis e portanto, as malhas não são coincidentes. A vantagem disso é que para representar o fluido pode-se utilizar uma malha regular que não se adapta à estrutura. Isso economiza o tempo computacional e conduz a um algoritmo mais simplificado (qualidade importante para qualquer método numérico). O termo método de Runge-Kutta é utilizado para denotar fórmulas derivadas inicialmente por Runge (1895) e Heun (1900) e mais tarde modificadas por Kutta (1901). A modificação de Kutta das fórmulas de Runge é conhecida pelo nome de método de Runge-Kutta. As equações de Euler para escoamento de fluido compressível são discretizadas no tempo pelo método predictor-corrector de quatro estágios de Runge-Kutta, conhecido como o método clássico de Runge-Kutta de ordem 4. Considere a equação governante (2.6) escrita na forma simplificada abaixo:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + P(\mathbf{v}) = 0, \quad (3.1)$$

onde

$$P(\mathbf{v}) \equiv \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} - \mathbf{h}. \quad (3.2)$$

O método de Runge-Kutta de ordem 4 é dado abaixo, para cada passo de tempo n :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}^{(0)} &= \mathbf{v}^n \\
 \mathbf{v}^{(1)} &= \mathbf{v}^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} P(\mathbf{v})^{(0)} \\
 \mathbf{v}^{(2)} &= \mathbf{v}^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} P(\mathbf{v})^{(1)} \\
 \mathbf{v}^{(3)} &= \mathbf{v}^{(0)} - \Delta t P(\mathbf{v})^{(2)} \\
 \mathbf{v}^{(4)} &= \mathbf{v}^{(0)} - \frac{\Delta t}{6} \left(P(\mathbf{v})^{(0)} + 2P(\mathbf{v})^{(1)} + 2P(\mathbf{v})^{(2)} + P(\mathbf{v})^{(3)} \right) \\
 \mathbf{v}^{n+1} &= \mathbf{v}^{(4)}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $\mathbf{v}^{(0)}$, $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$, $\mathbf{v}^{(3)}$ e $\mathbf{v}^{(4)}$ são as variáveis do fluido, definidas pela Equação (2.7), nos estágios intermediários do método de Runge-Kutta, e $\mathbf{v}^{n+1}$ é o valor das variáveis do fluido calculadas no tempo $t = t + \Delta t$. Esse esquema numérico é de ordem 4 de precisão no tempo e é estável para números de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) de até $2\sqrt{2}$ (SCHREIER, 1982). No algoritmo abaixo, cada estágio do método de Runge-Kutta é representado pela letra $\wp$ e $n + 1 = t_n + \Delta t$ representa o instante de tempo avançado pelo intervalo de tempo Δt , calculado pelo método numérico.

❖ Estágio preliminar do método de Runge-Kutta:

1. Utilizando a variável $\wp$ para representar cada passo do método de Runge-Kutta, inicializam-se as variáveis lagrangianas da fronteira imersa no passo inicial com o valor dessas mesmas variáveis no tempo $t = t_n$:

$$\mathbf{F}^{(0)}(s) = \mathbf{F}^n(s),$$

$$\mathbf{U}^{(0)}(s) = \mathbf{U}^n(s),$$

$$\mathbf{X}^{(0)}(s) = \mathbf{X}^n(s).$$

2. Inicializam-se as variáveis eulerianas no passo inicial:

$$\mathbf{f}^{(0)}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^n(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^n(\mathbf{x}).$$

Após o estágio preliminar do método de Runge-Kutta, realiza-se os estágios intermediários utilizando $\wp = 0, 1, 2, 3$.

❖ **Estágios intermediários do método de Runge-Kutta ($\wp = 0, 1, 2, 3$):**

1. Calcula-se a força lagrangiana $\mathbf{F}^{(\wp+1)}(s)$, exercida na estrutura utilizando a configuração $\mathbf{X}^{(\wp)}(s)$ dos pontos da fronteira imersa:

$$\mathbf{F}^{(\wp+1)}(s) = \mathbf{S}^{(\wp)}(\mathbf{X}^{(\wp)}), \quad (3.4)$$

2. Interpola-se a força lagrangiana $\mathbf{F}^{(\wp+1)}(s)$ no campo de força euleriano do fluido para determinar $\mathbf{f}^{(\wp+1)}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{f}^{(\wp+1)}(\mathbf{x}) = \sum_s \mathbf{F}^{(\wp+1)}(s) \delta_h^2(\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(\wp)}(s)) \Delta s, \quad (3.5)$$

onde a função delta suavizada é dada por:

$$\delta_h^2(\mathbf{x}) = \delta_{\Delta x}(x) \delta_{\Delta y}(y), \quad (3.6)$$

com

$$\delta_h(r) = \begin{cases} \frac{1}{8h} \left(3 - \frac{2|r|}{h} + \sqrt{1 + \frac{4|r|}{h} - \frac{4r^2}{h^2}} \right), & |r| \leq h, \\ \frac{1}{8h} \left(5 - \frac{2|r|}{h} - \sqrt{-7 + \frac{12|r|}{h} - \frac{4r^2}{h^2}} \right), & h \leq |r| \leq 2h, \\ 0, & 2h \leq |r|. \end{cases} \quad (3.7)$$

3. Resolvem-se as equações de Euler definidas pelas Equações (2.6)-(2.7) com o termo de força $\mathbf{f}^{(\wp+1)}(\mathbf{x})$ no estágio $(\wp + 1)$ do método de Runge-Kutta dado pela Equação (3.3).
4. Interpola-se a velocidade euleriana $\mathbf{u}^{(\wp+1)}(\mathbf{x})$ para os pontos lagrangianos da fronteira imersa:

$$\mathbf{U}^{(\wp+1)}(s) = \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{(\wp+1)}(\mathbf{x}) \delta_h^2(\mathbf{x} - \mathbf{X}^{(\wp)}(s)) h_x h_y. \quad (3.8)$$

onde δ_h^2 é a função delta suavizada, definida nas Equações (3.6)-(3.7).

5. Atualiza-se a posição dos pontos lagrangianos $\mathbf{X}^{(\wp+1)}(s)$ utilizando o método de

Runge-Kutta dado pela Equação 3.3:

$$\mathbf{X}^{(\varphi+1)}(s) = \phi(\mathbf{v}^{(\varphi+1)}(s)) . \quad (3.9)$$

onde $\phi(\mathbf{v})$ é a função que substitui $P(\mathbf{v})$ nos estágios intermediários do método de integração no tempo de Runge-Kutta definido pela Equação (3.3).

❖ **Atualizam-se as variáveis do tempo $t = t_n$ para o tempo $t = t_n + \Delta t$:**

1. Atualizam-se as variáveis lagrangianas em $t = t_n + \Delta t$ utilizando o valor delas no estágio $\varphi = 4$ do método de Runge-Kutta:

$$\mathbf{F}^{n+1}(s) = \mathbf{F}^{(4)}(s) , \quad \mathbf{U}^{n+1}(s) = \mathbf{U}^{(4)}(s) , \quad \mathbf{X}^{n+1}(s) = \mathbf{X}^{(4)}(s) .$$

2. Atualizam-se as variáveis eulerianas em $t = t_n + \Delta t$:

$$\mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{(4)}(\mathbf{x}) ,$$

$$\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^{(4)}(\mathbf{x}) .$$

Esse estágio conclui o algoritmo de marcha no tempo para as equações de Euler com fronteira imersa definidas no Capítulo 2.

No esquema numérico descrito acima, para que os pontos da fronteira elástica permaneçam próximos de sua configuração original é necessário escolher um termo forçante $\mathbf{S}(\mathbf{X}(s,t), t)$ adequado. Esse termo forçante é escolhido utilizando a Lei de Hooke generalizada. Por exemplo no caso de uma fronteira rígida fixa (sem escorregamento ou *no-slip*), o termo forçante é dado por:

$$\mathbf{F}(s,t) = \mathbf{S}(\mathbf{X}(s,t), t) = \kappa(\mathbf{X}^e(s) - \mathbf{X}(s,t)) , \quad (3.10)$$

onde κ é uma constante positiva, com $\kappa \gg 1$. A Equação (3.10) liga os pontos $\mathbf{X}$ da fronteira imersa aos pontos de equilíbrio $\mathbf{X}^e$ utilizando molas com constante de rigidez muito alta. Portanto, se os pontos da fronteira imersa saírem do ponto de equilíbrio as molas atuarão de forma

que os pontos voltem para a posição de equilíbrio mantendo o formato inicial da estrutura. Portanto, a elasticidade da fronteira dependerá da constante κ escolhida. Assim, quanto menor o valor dessa constante κ , mais elástica se tornará a fronteira. É importante observar que no caso de fronteiras fixas $\mathbf{X}^e$ é fixo, enquanto que no caso em que a fronteira é móvel $\mathbf{X}^e$ é uma função dependente do tempo e nesse caso $\mathbf{S}$ também será função de $\mathbf{X}^e$.

A função delta suavizada definida pela Equação (3.7) satisfaz duas condições de momento discreto (PESKIN, 2002) com suporte para quatro células nas direções x e y , isto é, com suporte para 16 células da malha na geometria bidimensional. Além disso, satisfaz os postulados das funções delta estabelecidos por Peskin (2002):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta(r) \in C^0 & \forall r \in \mathbb{R}, \\ \delta(r) = 0 & \text{para } |r| \geq 2, \\ \sum_{j \text{ par}} \delta(r-j) = \sum_{j \text{ impar}} \delta(r-j) = \frac{1}{2} & \forall r \in \mathbb{R}, \\ \sum_j (r-j)\delta(r-j) = 0 & \forall r \in \mathbb{R}, \\ \sum_j [\delta(r-j)]^2 = c & \forall r \in \mathbb{R}, \end{array} \right. \quad (3.11)$$

onde c é uma constante independente de r .

A função delta (3.7) não é única. Griffith e Peskin (2005) apresentam duas outras formas para a função delta. A primeira delas satisfaz quatro condições de momento discreto com suporte para seis espaçamentos de células em x e y e os postulados das funções delta de Peskin.

Considere

$$\delta_h^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{h^2} \delta\left(\frac{x}{h}\right) \delta\left(\frac{y}{h}\right), \quad (3.12)$$

essa função delta é dada por:

$$\delta(r) = \begin{cases} \frac{61}{112} - \frac{11}{42}|r| - \frac{11}{56}|r|^2 + \frac{1}{12}|r|^3 + \frac{\sqrt{3}}{336}(243 + 1584|r| - 748|r|^2 - 1560|r|^3 + 500|r|^4 + 336|r|^5 - 112|r|^6)^{\frac{1}{2}}, & 0 \leq |r| < 1, \\ \frac{21}{16} + \frac{7}{12}|r| - \frac{7}{8}|r|^2 + \frac{1}{6}|r|^3 - \frac{3}{2}\delta(|r| - 1), & 1 \leq |r| < 2, \\ \frac{9}{8} - \frac{23}{12}|r| + \frac{3}{4}|r|^2 - \frac{1}{12}|r|^3 + \frac{1}{2}\delta(|r| - 2), & 2 \leq |r| < 3, \\ 0, & 3 \leq |r|. \end{cases} \quad (3.13)$$

A segunda forma para a função delta, apresentada no trabalho de Griffith e Peskin (2005), é uma função cúbica com suporte para quatro células em cada direção x e y . Essa função também satisfaz quatro condições de momento discreto. Considerando a Equação (3.12), essa função é dada por:

$$\delta(r) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|r| - |r|^2 + \frac{1}{2}|r|^3, & 0 \leq |r| < 1, \\ 1 - \frac{11}{6}|r| + |r|^2 - \frac{1}{6}|r|^3, & 1 \leq |r| < 2, \\ 0, & 2 \leq |r|. \end{cases} \quad (3.14)$$

A função delta definida pela Equação (3.14) apesar de satisfazer quatro condições de momento discreto, não satisfaz todos os postulados descritos no trabalho de Peskin (2002) e, além disso, Peskin (2002) afirma que essa função pode causar oscilações não físicas próximo à parede da estrutura.

Autores como Linnick (1999) aproximam a função delta por uma função gaussiana em todo o domínio Ω do fluido. Essa função delta suavizada, em geometrias bidimensionais, é dada por:

$$\delta_h^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2\right], \quad (3.15)$$

A força exercida pela estrutura no fluido, devido à interação fluido-estrutura, é uma força de superfície, por esse motivo não atua como uma força de corpo (PESKIN, 2002). Portanto, a utilização da função delta definida pela equação (3.15) faz com que a força exercida pela estrutura seja transferida para todo o domínio computacional do fluido, fazendo com que o termo fonte das equações governantes se comporte como uma força de corpo, o que não é bom

em escoamentos compressíveis, pois a utilização desse tipo de função delta pode conduzir a problemas mal-postos. Por exemplo, em escoamentos em regime supersônico, a estrutura seria sentida por todo o domínio físico, mas fisicamente, o fluido não deve ser afetado pela presença da estrutura antes de chegar a ela.

Comumente (SOUZA, 2005) a função delta (3.15) é truncada para produzir suporte de malha de quatro células em cada direção x e y . Nesse caso, a função delta não satisfaz as seguintes propriedades (PESKIN, 2002):

$$\int \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{X}) d\mathbf{x} = 1 , \quad (3.16)$$

$$\int (\mathbf{x} - \mathbf{X}) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{X}) d\mathbf{x} = 0 , \quad (3.17)$$

Por esse motivo (GRIFFITH; PESKIN, 2005),

$$\int_{\Omega} f_x d\mathbf{x} \neq \int_0^{L_b} F_x ds \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} f_y d\mathbf{y} \neq \int_0^{L_b} F_y ds ,$$

resultando em cálculos incorretos do arrasto e da sustentação por meio da integração no domínio lagrangiano. Portanto, deve-se tomar um cuidado especial ao utilizá-la. Nesse trabalho utilizou-se inicialmente a função delta definida pela Equação (3.7) porque faz com que a influência da fronteira na vizinhança da estrutura seja minimizada. Além disso, a função delta (3.7) não apresenta o inconveniente da função gaussiana. As Figuras 3.1 a 3.5 esboçam o gráfico das funções delta suavizadas discutidas nesse trabalho.

Figura 3.1: Esboço da função delta usando a Equação (3.7).

Figura 3.2: Esboço da função delta usando a Equação (3.13).

Figura 3.3: Esboço da função delta usando a Equação (3.14).

Figura 3.4: Esboço da função delta usando a Equação (3.15) com $\sigma_x = 2$ e $\sigma_y = 2$.

Figura 3.5: Esboço da função delta usando a Equação (3.15) com $\sigma_x = 0,5$ e $\sigma_y = 0,5$.

3.2 Método de Steger-Warming para Discretização Espacial

A discretização espacial das equações governantes é feita utilizando o método TVD (*Total Variation Diminishing*) de Steger e Warming (1981). Os esquemas TVD preservam a monotonicidade da solução e evitam o aparecimento de soluções espúrias. Além disso, métodos monotônicos sempre convergem para soluções fisicamente relevantes. Considere o sistema hiperbólico das leis de conservação abaixo:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = \mathbf{h} . \quad (3.18)$$

Esse sistema de equações pode ser escrito na forma quase-linear como segue:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = \mathbf{h} , \quad (3.19)$$

onde $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são as matrizes jacobianas, dadas por:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{v}}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}.$$

As equações de Euler são classificadas como um sistema hiperbólico de equações diferenciais parciais. Portanto, as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ possuem autovalores e autovetores reais, assim podem ser diagonalizáveis por suas matrizes de autovetores como segue:

$$\mathbf{Q}_x^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_x = \Lambda_x = \begin{bmatrix} u & & & \\ & u & & \\ & & u+c & \\ \circ & & & u-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^x & & & \\ & \lambda_2^x & & \\ & & \lambda_3^x & \\ \circ & & & \lambda_4^x \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Q}_y = \Lambda_y = \begin{bmatrix} v & & & \\ & v & & \\ & & v+c & \\ \circ & & & v-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^y & & & \\ & \lambda_2^y & & \\ & & \lambda_3^y & \\ \circ & & & \lambda_4^y \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

onde c é a velocidade do som local, λ_i^x são os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ e λ_i^y são os autovalores da matriz $\mathbf{B}$. A velocidade do som local é dada por:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma(\gamma-1) \left(e - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right)}.$$

Utilizando o fato que $\mathbf{e}(\mathbf{v})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{v})$ são funções homogêneas de grau um em $\mathbf{v}$, pode-se aplicar o teorema de Euler a essas funções resultando em:

$$\mathbf{e} = \mathbf{A} \mathbf{v}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{B} \mathbf{v}. \quad (3.23)$$

Considerando que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_x \mathbf{Q}_x^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{Q}_x^{-1} = \mathbf{Q}_x \Lambda_x \mathbf{Q}_x^{-1}, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}_y \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Q}_y \mathbf{Q}_y^{-1} = \mathbf{Q}_y \Lambda_y \mathbf{Q}_y^{-1}, \quad (3.25)$$

as Equações (3.22) e (3.23) podem ser escritas como:

$$\mathbf{e} = \mathbf{Q}_x \Lambda_x \mathbf{Q}_x^{-1} \mathbf{v}, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{Q}_y \Lambda_y \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{v}. \quad (3.27)$$

As Equações (3.26) e (3.27) representam os vetores de fluxo em função dos autovalores. Conforme Steger e Warming (1981), as Equações (3.26) e (3.27) podem ser escritas de forma generalizada utilizando a seguinte função:

$$\mathfrak{N}(k_1, k_2, \lambda_1^m, \lambda_3^m, \lambda_4^m) = \mathbf{Q}_m \Lambda_m \mathbf{Q}_m^{-1} \mathbf{v} = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{bmatrix} 2(\gamma-1)\lambda_1^m + \lambda_3^m + \lambda_4^m \\ 2(\gamma-1)\lambda_1^m u + \lambda_3^m(u + ck_1) + \lambda_4^m(u - ck_1) \\ 2(\gamma-1)\lambda_1^m v + \lambda_3^m(v + ck_2) + \lambda_4^m(v - ck_2) \\ (\gamma-1)\lambda_1^m(u^2 + v^2) + \frac{\lambda_3^m}{2}[(u + ck_1)^2 + (v + ck_2)^2] + \mathfrak{U} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

onde

$$\mathfrak{U} = \frac{\lambda_4^m}{2} [(u - ck_1)^2 + (v - ck_2)^2] + \frac{(3-\gamma)(\lambda_3^m + \lambda_4^m)c^2}{2(\gamma-1)}.$$

O vetor de fluxo $\mathbf{e}(\mathbf{v})$ é obtido tomando $\mathfrak{N}(1, 0, \lambda_1^x, \lambda_3^x, \lambda_4^x)$. Já o vetor de fluxo $\mathbf{g}(\mathbf{v})$ é obtido tomando $\mathfrak{N}(0, 1, \lambda_1^y, \lambda_3^y, \lambda_4^y)$.

Os autovalores da matriz Λ_m são separados na parte positiva e negativa através do seguinte procedimento:

$$\Lambda_m = \Lambda_m^+ + \Lambda_m^- = \begin{bmatrix} \lambda_1^x & & & \circ \\ & \lambda_2^x & & \\ & & \lambda_3^x & \\ \circ & & & \lambda_4^x \end{bmatrix} = \quad (3.29)$$

$$\begin{bmatrix} (\lambda_1^+)^m & & & \circ \\ & (\lambda_2^+)^m & & \\ & & (\lambda_3^+)^m & \\ \circ & & & (\lambda_4^+)^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\lambda_1^-)^m & & & \circ \\ & (\lambda_2^-)^m & & \\ & & (\lambda_3^-)^m & \\ \circ & & & (\lambda_4^-)^m \end{bmatrix},$$

onde os autovalores positivos e negativos podem ser escritos assim:

$$\begin{aligned} (\lambda_1^+)^x &= \frac{u+|u|}{2}, & (\lambda_1^-)^x &= \frac{u-|u|}{2}, \\ (\lambda_3^+)^x &= (\lambda_1^+)^x + c, & (\lambda_3^-)^x &= (\lambda_1^-)^x, \\ (\lambda_4^+)^x &= (\lambda_1^+)^x, & (\lambda_4^-)^x &= (\lambda_1^-)^x - c, \\ \\ (\lambda_1^+)^y &= \frac{v+|v|}{2}, & (\lambda_1^-)^y &= \frac{v-|v|}{2}, \\ (\lambda_3^+)^y &= (\lambda_1^+)^y + c, & (\lambda_3^-)^y &= (\lambda_1^-)^y, \\ (\lambda_4^+)^y &= (\lambda_1^+)^y, & (\lambda_4^-)^y &= (\lambda_1^-)^y - c. \end{aligned}$$

Essa separação não é a separação padrão usada por Steger e Warming (1981), contudo foi proposta por eles e foi utilizada nesse trabalho. A soma $(\lambda_i^+)^m + (\lambda_i^-)^m = \lambda_i^m$ resulta nos autovalores físicos. Para se obter as matrizes de autovalores separados pode-se utilizar a Equação (3.28), fazendo $\mathbf{S}(1, 0, (\lambda_1^\pm)^x, (\lambda_3^\pm)^x, (\lambda_4^\pm)^x)$ para se obter $\mathbf{e}(\mathbf{v})^\pm$ e $\mathbf{S}(0, 1, (\lambda_1^\pm)^y, (\lambda_3^\pm)^y, (\lambda_4^\pm)^y)$ para se obter $\mathbf{g}(\mathbf{v})^\pm$.

Um problema associado com a separação de autovalores é a utilização da função módulo, que em pontos sônicos ($Ma = 1$) ou de estagnação ($Ma = 0$) apresenta derivada descontínua e conseqüentemente apresenta perda de precisão numérica. Nesse trabalho, devido à forma como os autovalores foram separados, a descontinuidade só ocorre em pontos de estagnação. Uma forma de contornar esse problema é definir a função módulo como:

$$|s| \equiv \sqrt{s^2}. \quad (3.30)$$

Nesse caso, pode-se utilizar um parâmetro de suavização, ϵ , e reescrever os autovalores:

$$(\lambda_1^+)^x = \frac{u + |u|}{2}, \quad (\lambda_1^-)^x = \frac{u - |u|}{2},$$

da seguinte forma:

$$(\lambda_1^+)^x = \frac{u + \sqrt{u^2 + \epsilon^2}}{2}, \quad (\lambda_1^-)^x = \frac{u - \sqrt{u^2 + \epsilon^2}}{2}. \quad (3.31)$$

Observe que a soma $(\lambda_1^+)^x + (\lambda_1^-)^x = \lambda_1^x$ na Equação (3.31) continua resultando no autovalor físico. Contudo, a derivada dos autovalores da Equação (3.31) em um ponto estagnação passa a ser contínua e o problema da perda de precisão numérica é resolvido. Nesse trabalho escolheu-se $\epsilon = 0,04$ após diversos testes computacionais usando outros parâmetros de suavização.

O vetor de fluxo $\mathbf{e}^+$ está associado aos autovalores positivos da matriz $\mathbf{A}$, isto significa que $\mathbf{e}^+$ transmite informações através de ondas com velocidades positivas, isto é, da esquerda para a direita em relação ao eixo de coordenadas x . Portanto, considerando o fato que $\mathbf{e}^+$ está associado às informações na direção do escoamento, então as variáveis do escoamento do lado esquerdo, definidas por $\mathbf{v}^-$, são utilizadas em seu cálculo. Por outro lado, o vetor de fluxo $\mathbf{e}^-$ está associado aos autovalores negativos da matriz $\mathbf{A}$, portanto ele é calculado utilizando as variáveis do escoamento do lado direito, definidas por $\mathbf{v}^+$. Condições similares se aplicam aos vetores de fluxo $\mathbf{g}^+$ e $\mathbf{g}^-$. Conseqüentemente, a discretização *upwind* dos termos convectivos da Equação (3.18), utilizando os fluxos nas interfaces das células da malha, é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = & \frac{\left[\mathbf{e}^+(\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j}^-) + \mathbf{e}^-(\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j}^+) \right] - \left[\mathbf{e}^+(\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2},j}^-) + \mathbf{e}^-(\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2},j}^+) \right]}{x_{i+\frac{1}{2},j} - x_{i-\frac{1}{2},j}} + \\ & \frac{\left[\mathbf{g}^+(\mathbf{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^-) + \mathbf{g}^-(\mathbf{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^+) \right] - \left[\mathbf{g}^+(\mathbf{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^-) + \mathbf{g}^-(\mathbf{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^+) \right]}{y_{i,j+\frac{1}{2}} - y_{i,j-\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde:

$$\begin{aligned} x_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{x_{i+1,j} + x_{i,j}}{2}, \\ y_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{y_{i,j+1} + y_{i,j}}{2}. \end{aligned}$$

A Equação (3.32) requer o cálculo das variáveis do escoamento, $\mathbf{v}_{i\pm\frac{1}{2},j}^{\pm}$ ou $\mathbf{v}_{i,j\pm\frac{1}{2}}^{\pm}$, nas interfaces das células da malha. Um esquema de discretização espacial de ordem 1 é facilmente obtido fazendo o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{-} &= \mathbf{v}_{i,j}, & \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{+} &= \mathbf{v}_{i+1,j}, & \mathbf{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{-} &= \mathbf{v}_{i-1,j}, & \mathbf{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{+} &= \mathbf{v}_{i,j}, \\ \mathbf{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{-} &= \mathbf{v}_{i,j}, & \mathbf{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{+} &= \mathbf{v}_{i,j+1}, & \mathbf{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{-} &= \mathbf{v}_{i,j-1}, & \mathbf{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{+} &= \mathbf{v}_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Para fazer a discretização espacial de ordem mais alta, estas variáveis são determinadas através de interpolações *upwind* das variáveis primitivas no centro das células. Esse tipo de esquema é conhecido na literatura como MUSCL (*Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws* (HIRSCH, 1990)). O esquema MUSCL foi introduzido por Van Leer (1979) juntamente com P. R. Woodward. A forma geral para esse esquema na direção x é dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_{i+\frac{1}{2}}^{-} &= \tilde{\mathbf{v}}_i + \left\{ \frac{\phi}{4} [(1-\tau)\nabla + (1+\tau)\Delta] \right\}_i, \\ \tilde{\mathbf{v}}_{i+\frac{1}{2}}^{+} &= \tilde{\mathbf{v}}_{i+1} - \left\{ \frac{\phi}{4} [(1+\tau)\nabla + (1-\tau)\Delta] \right\}_{i+1}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde os operadores de diferenças na direção x são definidos como:

$$\begin{aligned} \Delta_i &\equiv \tilde{\mathbf{v}}_{i+1} - \tilde{\mathbf{v}}_i, \\ \nabla_i &\equiv \tilde{\mathbf{v}}_i - \tilde{\mathbf{v}}_{i-1}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Um procedimento similar conduz à forma geral do esquema MUSCL para a direção y . A ordem de discretização e o tipo do esquema de diferenciação são determinados atribuindo diferentes valores aos parâmetros ϕ e τ . Por exemplo, considerando $\phi = 0$ e $\tau = 0$, um esquema de discretização espacial de ordem 1 é obtido. Utilizando $\phi = 1$ e $\tau = -1$, obtém-se um esquema de discretização espacial de ordem 2. Portanto, alterando os valores desses dois parâmetros é possível alterar a ordem de precisão do método numérico.

Nas discretizações espaciais de alta ordem, oscilações numéricas costumam aparecer onde ocorrem grandes gradientes de fluxo. Para controlar o aparecimento dessas oscilações costuma-se reduzir a ordem da discretização espacial do esquema numérico aonde ocorrem os grandes gradientes de fluxo. Isso pode ser feito utilizando a técnica dos limitadores de fluxo, introduzida

por Van Leer (1974). Comumente, o parâmetro ϕ é utilizado como limitador de fluxo em função da razão $\bar{r}$ dos operadores de diferenças. A razão $\bar{r}$ é definida como:

$$\bar{r}_i = \frac{\nabla_i + \varpi}{\Delta_i + \varpi}, \quad (3.36)$$

onde ϖ é um número pequeno, escolhido para evitar a divisão por zero em regiões onde o gradiente do escoamento é zero. Nesse trabalho $\varpi = 10^{-15}$. Utilizando a técnica dos limitadores de fluxo, a Equação (3.34) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_{i+\frac{1}{2}}^- &= \tilde{\mathbf{v}}_i + \left\{ \frac{\phi(r)}{4} [(1 - \gamma)\nabla + (1 + \gamma)\Delta] \right\}_i, \\ \tilde{\mathbf{v}}_{i+\frac{1}{2}}^+ &= \tilde{\mathbf{v}}_{i+1} - \left\{ \frac{\phi(r^{-1})}{4} [(1 + \gamma)\nabla + (1 - \gamma)\Delta] \right\}_{i+1}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

A função limitadora de fluxo $\phi(\bar{r})$ não é única. Abaixo estão listadas algumas funções limitadoras de fluxo utilizadas por Lie e Noelle (2003) e Pontes e Souto (2005):

❖ Limitador de fluxo do tipo Min-Mod:

$$\phi(\bar{r}) = \max(0, \min(\bar{r}, 1)). \quad (3.38)$$

❖ Limitador de fluxo do tipo Van Leer:

$$\phi(\bar{r}) = \frac{\bar{r} + |\bar{r}|}{1 + |\bar{r}|}. \quad (3.39)$$

❖ Limitador de fluxo do tipo Van Albada:

$$\phi(\bar{r}) = \frac{r + \bar{r}^2}{1 + \bar{r}^2}. \quad (3.40)$$

❖ Limitador de fluxo ACM (*Artificial Compression Method*):

$$\phi(\bar{r}) = \begin{cases} 0 & \text{para } \bar{r} \leq 0 \\ \frac{\bar{r}(\sigma+1) - \bar{r}^2(\sigma-1)}{\bar{r}+1} & \text{para } 0 < \bar{r} \leq 1 \\ \frac{\bar{r}(\sigma+1) - (\sigma-1)}{\bar{r}+1} & \text{para } \bar{r} > 1 \end{cases}. \quad (3.41)$$

Quando $\lim_{\bar{r} \rightarrow 1} \phi(\bar{r}) = 1$, o esquema numérico de discretização espacial de ordem 2 é em-

Figura 3.6: Gráfico das funções limitadoras de fluxo.

pregado para a discretização das equações de transporte de fluxo convectivo. Por outro lado, quando $\lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \phi(\bar{r}) = 0$, emprega-se o esquema de discretização espacial de ordem 1. A Figura 3.6 esboça os gráficos dos limitadores de fluxo apresentados pelas Equações (3.38)-(3.41) com $\sigma = 0,7$.

3.3 Condições de Contorno Externa

As condições de contorno externas são necessárias em toda simulação computacional que envolve a simulação de uma atmosfera (como em vôos livres), pois o domínio computacional é limitado, em contraste com o domínio físico. Essas condições de contorno representam o escoamento de fluxo livre, além disso, é importante que essas condições de contorno não reflitam ondas para dentro do domínio computacional porque, caso isso ocorra, os resultados da simulação serão contaminados pelas ondas refletidas. Também é importante tomar o cuidado em implementar uma condição de contorno externa que respeite as direções características das variáveis que modelam o fluido. Caso contrário, a condição de contorno pode resultar em problemas mal postos e conduzir a instabilidades numéricas ou a múltiplas soluções para uma mesma condição de contorno. Com o intuito de se implementar uma condição de contorno ex-

terna bem posta e não-reflexiva, utiliza-se nesse trabalho condições de contorno baseadas em invariantes de Riemann (BUONOMO, 2004) para um gás caloricamente perfeito. De acordo com Anderson Júnior (2003) os invariantes de Riemann na direção normal à fronteira são dados por:

$$J^+ = u_n + \frac{2c}{\gamma - 1}, \text{ ao longo da característica } C_+, \quad (3.42)$$

$$J^- = u_n - \frac{2c}{\gamma - 1}, \text{ ao longo da característica } C_-, \quad (3.43)$$

onde u_n é o componente de velocidade normal à fronteira e as linhas características C_+ e C_- estão esboçadas na Figura 3.7 para o caso unidimensional.

Figura 3.7: Ilustração das linhas características através do ponto I no plano xt .

Observa-se na Figura 3.7, para escoamentos subsônicos, que a linha característica C_- transporta informações da direita para a esquerda no domínio computacional. Por outro lado, a característica C_+ transporta informações da esquerda para a direita. Em escoamentos supersônicos, o transporte é sempre da esquerda para a direita. A linha característica C_- é uma linha com $\frac{\partial x}{\partial t} = u - c$. Por outro lado, a linha característica C_+ é uma linha com $\frac{\partial x}{\partial t} = u + c$ (ANDERSON JÚNIOR, 2003).

Para fechar o sistema de equações que modelam as condições de contorno não reflexivas na fronteira externa é necessário informações de quatro variáveis do fluxo. Duas dessas variáveis são determinadas pelos invariantes de Riemann calculados nas fronteiras externas. As outras va-

riáveis são escolhidas como a componente da velocidade na direção tangente à fronteira externa u_t , e em função da entropia s^* . A entropia (AMES RESEARCH STAFF, 1958), considerando gás termicamente e caloricamente perfeito, pode ser expressa por:

$$s - s_r = c_v \ln \left[\frac{\frac{p}{p_r}}{\left(\frac{\rho}{\rho_r}\right)^\gamma} \right], \quad (3.44)$$

onde s , s_r , c_v , p_r e ρ_r são a entropia, entropia de referência, o calor específico a volume constante, a pressão de referência e a densidade de referência, respectivamente. Manipulando a Equação (3.44), tem-se:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_r}{(\rho_r)^\gamma} \exp \left[\frac{s - s_r}{c_v} \right] = s^*. \quad (3.45)$$

Para determinar o tipo de condição de contorno na fronteira, é necessário analisar a direção do vetor normal n , na fronteira externa, para determinar se a fronteira é de entrada ou de saída de fluido. Também é necessário analisar o módulo do vetor u_n para determinar se o escoamento é subsônico ou supersônico na fronteira. Determinado se a fronteira externa é de entrada ou de saída, e se é subsônica ou supersônica, aplica-se o procedimento para determinar o valor das variáveis u_t , s^* , J^+ e J^- na fronteira, como segue:

❖ **Se o escoamento for supersônico através de uma fronteira externa:**

- ❖ Em caso de uma fronteira de entrada: Todas as variáveis são fixadas utilizando informações do escoamento de fluxo livre.
- ❖ Em caso de uma fronteira de saída: Todas as variáveis são extrapoladas utilizando informações do escoamento de dentro do domínio computational.

❖ **Se o escoamento for subsônico através de uma fronteira externa:**

- ❖ Variáveis u_t e s^* : Obedecem o mesmo procedimento do caso supersônico, isto é, em caso de fronteira de entrada são fixadas e em caso de fronteira de saída são extrapoladas.

- ❖ Variável J^+ : A velocidade característica associada à invariante J^+ é positiva. Nesse caso, se o sinal da direção normal à fronteira for negativo então J^+ é fixada com o valor do escoamento livre porque as informações de J^+ estão sendo transmitidas de fora para dentro do domínio, conforme pode ser observado na Figura 3.7. Caso contrário, J^+ é extrapolada utilizando informações de dentro do domínio computacional.
- ❖ Variável J^- : A velocidade característica associada à invariante J^- é negativa. Nesse caso, realiza-se a mesma análise do item anterior. Se a direção normal à fronteira tiver sinal negativo então J^- é extrapolada utilizando informações de dentro do domínio computacional. Caso contrário, J^- é fixada com o valor do escoamento livre.

Com os valores das variáveis u_t , s^* , J^+ e J^- calculados na fronteira externa, os valores das variáveis ρ , u_n , p e e são restaurados utilizando as seguintes equações, respectivamente:

$$c = \frac{\gamma - 1}{4} (J^+ - J^-) , \quad (3.46)$$

$$\rho = \left(\frac{c^2}{\gamma s^*} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} , \quad (3.47)$$

$$p = \frac{c^2 \rho}{\gamma} , \quad (3.48)$$

$$u_n = \frac{1}{2} (J^+ + J^-) , \quad (3.49)$$

$$e = \frac{\rho}{2} (u_n^2 + u_t^2) + \frac{p}{\gamma - 1} . \quad (3.50)$$

As variáveis no contorno externo são extrapoladas, quando necessário, usando extrapolação quadrática (POINSOT; LELE, 1992).

3.4 Controle do Passo no Tempo

A cada ciclo computacional ou a cada instante de tempo t utiliza-se um critério de estabilidade para controlar o passo no tempo. Esse controle é necessário para assegurar que a cada passo no tempo o método numérico não amplifique os erros de truncamento devido à discreti-

zação espacial do método de marcha no tempo e erros de arredondamento. O controle é feito utilizando a condição de estabilidade CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) para as equações de Euler compressíveis bidimensionais (ANDERSON, 1995) e a condição de estabilidade do método da fronteira imersa (LAI; PESKIN, 2000).

❖ Critério de estabilidade CFL para as equações de Euler:

$$\Delta t_1 \leq 2 \sqrt{2} \left(\frac{u_{max}}{\Delta x_{min}} + \frac{v_{max}}{\Delta y_{min}} + c_{max} \sqrt{\frac{1}{\Delta x_{min}^2} + \frac{1}{\Delta y_{min}^2}} \right)^{-1}, \quad (3.51)$$

onde

$$u_{max} = \max_{(i,j) \in \Omega} u_{i,j},$$

$$v_{max} = \max_{(i,j) \in \Omega} v_{i,j},$$

$$c_{max} = \max_{(i,j) \in \Omega} c_{i,j},$$

$$\Delta x_{min} = \min_{(i,j) \in \Omega} \Delta x_{i,j},$$

$$\Delta y_{min} = \min_{(i,j) \in \Omega} \Delta y_{i,j}.$$

Esse critério assegura que nenhuma partícula de fluido escoa pela distância de mais de $2\sqrt{2}$ células no domínio computacional em um intervalo de tempo Δt .

❖ Critério de estabilidade do método da fronteira imersa:

$$\Delta t_2 \leq \sqrt{\frac{\min(\Delta x_{min}, \Delta y_{min})}{\kappa}} \quad (3.52)$$

Esse critério assegura a estabilidade da fibra e foi proposto por Lai e Peskin (2000).

O critério de estabilidade do método numérico deve respeitar as restrições impostas pelas Equações (3.51) e (3.52) simultaneamente. Portanto:

$$\Delta t = \tau \min(\Delta t_1, \Delta t_2), \quad (3.53)$$

onde τ é um parâmetro de segurança escolhido para garantir a estabilidade do método numérico. O parâmetro τ é necessário pois a estabilidade do método numérico também depende das

condições de contorno empregadas. Esse critério de estabilidade é uma aproximação para o passo estável no tempo. Nesse trabalho $\tau \in [0,4;0,8]$.

4 *Verificação do Método Numérico para o Domínio Euleriano*

*És precária e veloz.
Felicidade
Custas a vir e quando vens,
Não te demoras,
Foste tu
Que ensinaste aos homens
Que havia tempo
E, para te medir,
Se inventaram as horas.*

Felicidade - Cecília Meireles.

Em simulação computacional de fenômenos físicos, como escoamento de fluidos, existem duas classes de erros que necessitam ser tratadas cuidadosamente:

1. Erros associados à modelagem do fenômeno físico através de expressões matemáticas.
2. Erros associados à solução das expressões matemáticas sobre um conjunto de pontos discretos da malha utilizando precisão de máquina.

A **validação** do código numérico está relacionada com a primeira classe de erros, isto é, erros de modelagem. Quando um problema físico é modelado matematicamente, muitas vezes, a física do problema é simplificada, contudo, essas simplificações conduzem a erros que podem fazer com que a solução modelada não corresponda à solução do fenômeno físico. Portanto, o processo de validação envolve a comparação de resultados computacionais com resultados experimentais para determinar se o modelo matemático é capaz de resolver ou representar o fenômeno físico.

A **verificação** de código está relacionada com a segunda classe de erros, isto é, erros de implementação. A verificação é um processo para identificar fontes de erros em uma simulação numérica. Fontes de erros típicas são erros de programação.

O método da fronteira imersa foi implementado utilizando a linguagem de programação C++ orientada a objetos em plataforma Linux otimizado para processadores com arquitetura i586 (família Pentium da Intel). A validação do código é feita utilizando comparações dos resultados numéricos com resultados experimentais e a verificação do sistema de equações eulerianas é feita utilizando o método das soluções manufaturadas, desenvolvido por Steinberg e Roache (1984), Roache (1998), cuja finalidade é detectar fontes de erro de implementação no método numérico e verificar se o sistema de equações governantes é resolvido corretamente.

4.1 Ordem de Convergência de Malha de um Método Numérico

Considere uma variável de interesse $\mathcal{J}$ representando, por exemplo, a velocidade, ou a pressão, ou a energia, etc. Se a solução exata $\mathcal{J}^e$ é conhecida, então, para um espaçamento de malha h , a variável $\mathcal{J}$ pode ser expandida em séries de Taylor gerando a seguinte série infinita:

$$\mathcal{J}(h) = \mathcal{J}^e + A_1 h^1 + A_2 h^2 + \dots + A_n h^n + \dots$$

Se a implementação de um código numérico é de ordem de precisão espacial 2, então $A_1 = 0$ e $A_2 \neq 0$. Truncando a série de Taylor a partir do termo ς tem-se:

$$\mathcal{J}(h) = \mathcal{J}^e + Ah^\varsigma, \quad (4.1)$$

onde A e ς são incógnitas. Se a implementação do código é de ordem 2, então o coeficiente $\varsigma \rightarrow 2$ quando a malha é refinada. Se uma solução exata $\mathcal{J}^e$ é conhecida, então existem duas incógnitas na Equação (4.1). Essas incógnitas são os coeficientes A e ς . Logo, são necessárias soluções em duas malhas distintas para determinar o valor dessas incógnitas, ou seja,

$$\mathcal{J}(h_1) = \mathcal{J}^e + Ah_1^\varsigma, \quad (4.2)$$

$$\mathcal{J}(h_2) = \mathcal{J}^e + Ah_2^S . \quad (4.3)$$

A incógnita A é removida dividindo a Equação (4.2) pela Equação (4.3), resultando em:

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^S = \frac{\mathcal{J}(h_2) - \mathcal{J}^e}{\mathcal{J}(h_1) - \mathcal{J}^e} .$$

Isolando S nessa equação, a ordem de convergência espacial é dada por:

$$S = \frac{\log \frac{\mathcal{J}(h_2) - \mathcal{J}^e}{\mathcal{J}(h_1) - \mathcal{J}^e}}{\log \frac{h_2}{h_1}} . \quad (4.4)$$

Se, porventura, a solução exata $\mathcal{J}^e$ não é conhecida, então são necessárias soluções em três malhas distintas com espaçamentos h_1 , h_2 e h_3 :

$$\mathcal{J}(h_1) = \mathcal{J}^e + Ah_1^S , \quad \mathcal{J}(h_2) = \mathcal{J}^e + Ah_2^S , \quad \mathcal{J}(h_3) = \mathcal{J}^e + Ah_3^S .$$

Removendo A e $\mathcal{J}^e$, obtém-se a seguinte equação para a ordem de convergência:

$$S = \frac{\log \frac{\mathcal{J}(h_3) - \mathcal{J}(h_2)}{\mathcal{J}(h_2) - \mathcal{J}(h_1)}}{\log \beta} , \quad (4.5)$$

onde a constante β é a taxa de refinamento da malha definida por $h_2 = \beta h_1$ e $h_3 = \beta h_2$.

4.2 Método das Soluções Manufaturadas

O método das soluções manufaturadas desenvolvido por Steinberg e Roache (1984), Roache (1998) e estudado por Burg e Murali (2004), Silva, Medeiros e Souza (2005) e Silva e Medeiros (2007) modifica as equações diferenciais governantes, conduzindo a solução à uma solução pré-estabelecida. Considere as equações diferenciais parciais escritas como segue:

$$\mathcal{L}(q, \xi, t) = \mathcal{F}(\xi, t) , \quad (4.6)$$

com condições de contorno dadas por:

$$\mathcal{B}(q, \xi, t) = \mathcal{G}(\xi, t) , \quad (4.7)$$

onde q é a solução da equação diferencial parcial, ξ representa o domínio computacional e, $\mathcal{F}(\xi, t)$ e $\mathcal{G}(\xi, t)$ são termos fonte que dependem do domínio computacional e do tempo, mas não dependem da solução q . Cada variável do escoamento, representada em q , é atribuída à alguma função contínua, por exemplo trigonométrica, exponencial, polinômial ou combinações dessas funções. Esse conjunto de soluções é representado por $q^e(x, y)$. Estas soluções manufaturadas são substituídas na equação diferencial parcial contínua para gerar os termos fonte:

$$\mathcal{F}(\xi, t) = \mathcal{L}(q^e, \xi, t), \quad \mathcal{G}(\xi, t) = \mathcal{B}(q^e, \xi, t). \quad (4.8)$$

Os termos fonte $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ modificam as equações governantes para:

$$\mathcal{L}(q, \xi, t) = \mathcal{L}(q^e, \xi, t), \quad \mathcal{B}(q, \xi, t) = \mathcal{B}(q^e, \xi, t). \quad (4.9)$$

Devido à introdução dos termos fonte, a solução numérica q^c da Equação (4.9) deve convergir para a solução exata q^e . Isto ocorrerá se a implementação e a discretização das equações governantes estiverem corretas. Além disso, a ordem de convergência de malha deve ser verificada comparando a diferença entre a solução convergida q^c com a solução exata q^e utilizando uma norma qualquer, ou seja

$$\mathcal{E}(q^c, q^e) = \|q^c - q^e\|. \quad (4.10)$$

O erro $\mathcal{E}(q^c, q^e)$ é utilizado para calcular a ordem de convergência de malha do método numérico, através da Equação (4.4). Se a ordem numérica coincidir com a ordem teórica, então pode-se dizer que o código está **verificado**, isto é, livre de erros de implementação. As soluções manufaturadas podem ser quaisquer funções diferenciáveis de classe C^n , com n grande o suficiente de tal forma que os termos de erro de truncamento da expansão em séries de Taylor, das variáveis discretizadas, não sejam nulos. Em geral, é mais prático utilizar funções de classe C^∞ , como senos e cossenos, que são infinitamente diferenciáveis. Porém, em alguns casos, as anti-derivadas dessas funções não existem, e nesse caso, as funções polinomiais são a solução. Ao escolher as soluções manufaturadas, deve-se tomar o cuidado para evitar singularidades em algumas regiões do domínio, como por exemplo, fazer divisão por zero ou tomar a raiz quadrada

de números negativos. Além disso, é muito importante escolher uma solução manufaturada que não gere termos fonte que dominem a equação diferencial.

4.3 Verificação do Código para o Domínio Euleriano

A verificação do código é feita utilizando as soluções analíticas para a densidade ρ , para as componentes u e v da velocidade e para a pressão p definidas pelas funções abaixo:

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{800} x^3 + \frac{1}{800} y^3 + \frac{3}{4}, \quad (4.11)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{5} y\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{5} x\right) + \frac{1}{2}, \quad (4.12)$$

$$v(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{4} \cos\left(\frac{1}{5} y\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{1}{5} x\right) + \frac{4}{7}, \quad (4.13)$$

$$p(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{7} \sin\left(\frac{1}{5} x\right) + \frac{1}{7} e^{(1/4)y}. \quad (4.14)$$

As soluções manufaturadas dadas pelas Equações (4.11) a (4.14) foram escolhidas evitando o aparecimento de singularidades por respeitar as restrições discutidas na seção anterior. Os termos fonte das equações governantes são definidos por:

$$\mathcal{F} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}, \quad (4.15)$$

onde:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \\ \mathcal{F}_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho e + p)u \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho e + p)v \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \quad (4.17)$$

Os valores de $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ e $\mathcal{F}_4$ são determinados substituindo os valores de ρ , u , v e p fornecidos pelas Equações (4.11) a (4.14) na Equação (4.15). Os resultados estão no Apêndice A. As Figuras 4.1 a 4.4 mostram o gráfico das soluções manufaturadas. As Figuras 4.5 a 4.8

mostram o gráfico dos termos fonte calculados a partir das soluções manufaturadas. As condições iniciais em $t = 0$ são calculadas utilizando a solução analítica juntamente com uma função de perturbação. Isto é:

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{800} x^3 + \frac{1}{800} y^3 + \frac{3}{4} + \mathcal{P}(x, y) , \quad (4.18)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{5} y\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{1}{5} x\right) + \frac{1}{2} - \mathcal{P}(x, y) , \quad (4.19)$$

$$v(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{4} \cos\left(\frac{1}{5} y\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{1}{5} x\right) + \frac{4}{7} - \mathcal{P}(x, y) , \quad (4.20)$$

$$p(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{7} \sin\left(\frac{1}{5} x\right) + \frac{1}{7} e^{(1/4)y} + 1 + \mathcal{P}(x, y) . \quad (4.21)$$

onde $\mathcal{P}(x, y)$ é a função de perturbação definida por:

$$\mathcal{P}(x, y) = \frac{1}{50} x(x-3)y(y-3)(\sin(x) - \cos(y)) . \quad (4.22)$$

Inicialmente, testou-se o método numérico sem o uso dessa perturbação na condição inicial e em seguida com a perturbação. Alguns autores sugerem que se faça o teste sem a perturbação para reduzir a influência do erro devido à integração no tempo. O gráfico da função de perturbação definida pela Equação (4.22) é mostrado pela Figura 4.9. A verificação do código foi feita com seis malhas regulares, onde $\Delta x = \Delta y = 0.2$, $\Delta x = \Delta y = 0.1$, $\Delta x = \Delta y = 0.05$, $\Delta x = \Delta y = 0.025$, $\Delta x = \Delta y = 0.0125$ e $\Delta x = \Delta y = 0.00625$, denominadas respectivamente por Malha 0, Malha 1, Malha 2, Malha 3, Malha 4 e Malha 5 sob um domínio retangular de tamanho 3×3 unidades adimensionais. A Figura 4.10 mostra a Malha 2 onde $\Delta x = \Delta y = 0.05$. As Figuras 4.11 a 4.15 mostram a comparação entre a solução analítica com a condição inicial perturbada para o número de Mach Ma , para a componente u da velocidade, para a componente v da velocidade, para a densidade ρ , e para a pressão p na Malha 5. A norma utilizada (SILVA; MEDEIROS, 2007) nos testes é dada por:

$$\|\mathfrak{H}\|_{L_1} \equiv \frac{\sum_{0 \leq i, j < M, N} \mathfrak{H}_{ij}}{MN} .$$

Figura 4.1: Gráfico da solução manufaturada para $\rho(x,y)$. Figura 4.2: Gráfico da solução manufaturada para $u(x,y)$.

Figura 4.3: Gráfico da solução manufaturada para $v(x,y)$.

Figura 4.4: Gráfico da solução manufaturada para $p(x,y)$.

Figura 4.5: Gráfico do termo fonte $\mathcal{F}_1(x, y)$. Figura 4.6: Gráfico do termo fonte $\mathcal{F}_2(x, y)$.

Figura 4.7: Gráfico do termo fonte $\mathcal{F}_3(x, y)$.

Figura 4.8: Gráfico do termo fonte $\mathcal{F}_4(x, y)$.

Figura 4.9: Gráfico da função de perturbação $\mathcal{P}(x, y)$. Figura 4.10: Malha 2 com $\Delta x = \Delta y = 0.05$.

Figura 4.11: Solução analítica para o número de Mach em preto e condição inicial perturbada em vermelho pontilhado.

Figura 4.12: Solução analítica para a componente u da velocidade em preto e condição inicial perturbada em vermelho pontilhado.

Figura 4.13: Solução analítica para a componente v da velocidade em preto e condição inicial perturbada em vermelho pontilhado.

Figura 4.14: Solução analítica para a densidade ρ em preto e condição inicial perturbada em vermelho pontilhado.

Figura 4.15: Solução analítica para a pressão p em preto e condição inicial perturbada em vermelho pontilhado.

Figura 4.16: Solução analítica para o número de Mach Ma em preto e solução convergida em vermelho pontilhado.

Figura 4.17: Solução analítica para a componente da velocidade u em preto e solução convergida em vermelho pontilhado.

Figura 4.18: Solução analítica para a componente da velocidade v em preto e solução convergida em vermelho pontilhado.

Figura 4.19: Solução analítica para a densidade ρ em preto e solução convergida em vermelho pontilhado.

Figura 4.20: Solução analítica para a pressão p em preto e solução convergida em vermelho pontilhado.

O código implementado foi executado, com a condição inicial perturbada dada pelas Equações (4.18) a (4.21) e com os termos fontes dados pelas equações do Anexo A, até atingir convergência numérica. O erro numérico entre a solução analítica manufaturada e a solução convergida foi avaliado nas seis malhas. Esses erros foram utilizados para determinar a ordem de convergência de malha através da metodologia descrita na Seção 4.1.

Tabela 4.1: Erro entre a solução manufaturada (m) e a convergida (c) para ρ , ρu , ρv , e p - Esquema de Ordem 2 com Limitador do tipo MinMod.

Malha	$\ \rho^m - \rho^c\ $	$\ (\rho u)^m - (\rho u)^c\ $	$\ (\rho v)^m - (\rho v)^c\ $	$\ p^m - p^c\ $
Malha 0	$3,81 \times 10^{-4}$	$1,58 \times 10^{-4}$	$3,76 \times 10^{-4}$	$9,44 \times 10^{-5}$
Malha 1	$9,51 \times 10^{-5}$	$3,96 \times 10^{-5}$	$9,42 \times 10^{-5}$	$2,36 \times 10^{-5}$
Malha 2	$2,38 \times 10^{-5}$	$1,14 \times 10^{-5}$	$2,43 \times 10^{-5}$	$5,71 \times 10^{-6}$
Malha 3	$6,38 \times 10^{-6}$	$3,01 \times 10^{-6}$	$6,34 \times 10^{-6}$	$1,40 \times 10^{-6}$
Malha 4	$1,86 \times 10^{-6}$	$7,64 \times 10^{-7}$	$1,71 \times 10^{-6}$	$3,75 \times 10^{-7}$
Malha 5	$4,68 \times 10^{-7}$	$1,98 \times 10^{-7}$	$4,35 \times 10^{-7}$	$1,03 \times 10^{-7}$

Figura 4.21: Comparação da ordem de convergência de malha com a ordem teórica em escala logarítmica. O eixo das ordenadas representa o valor numérico do erro em escala logarítmica e o eixo das abscissas representa de forma discreta as malhas 0, 1, ... 5.

As Figuras 4.16 a 4.20 mostram a comparação entre a solução analítica e a solução convergida para Ma , u , v , ρ e p na Malha 5 com o limitador de fluxo do tipo Min-Mod.

Os resultados mostrados pelas Figuras 4.16 a 4.20 e pela Tabela 7.1 permitem concluir que o método numérico convergiu para a solução analítica manufaturada com boa precisão numérica com erro na Malha 1 menor que 10^{-4} para todas as variáveis. A Figura 4.21 mostra a ordem de convergência de malha comparada com a ordem de convergência teórica. Pode-se observar que o erro decai com ordem 2, igual à teórica.

Os resultados demonstram que a ordem de convergência 2 foi alcançada. Considerando os resultados mostrados pela Tabela 7.1 e pelo gráfico da Figura 4.21 pode-se dizer o que código numérico está livre de erros de implementação e portanto está verificado.

4.4 Verificação do Código para a Condição de Contorno Convencional com Escorregamento Livre

A verificação do código para a condição de contorno convencional com escorregamento livre, conforme descrita no trabalho de Tomé, Doricio, Castelo, Cuminato e Mckee (2007), é feita através da comparação entre a solução analítica e a solução convergida para o problema da reflexão de onda de choque oblíqua sobre uma placa plana. Esse problema foi escolhido porque possui solução analítica conhecida. Considere a onda de choque oblíqua passando por uma linha de corrente, conforme ilustrado pela Figura 4.22. Para uma onda de choque oblíqua as seguintes relações (AMES RESEARCH STAFF, 1958) são válidas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma Ma_1^2 \sin^2(\theta) - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}, \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) Ma_1^2 \sin^2(\theta)}{(\gamma - 1) Ma_1^2 \sin^2(\theta) + 2}, \\ \frac{V_2^2}{V_1^2} = 1 - 4 \frac{(Ma_1^2 \sin^2(\theta) - 1)(\gamma Ma_1^2 \sin^2(\theta) + 1)}{(\gamma + 1)^2 Ma_1^4 \sin^2(\theta)}, \\ \tan \phi = \frac{Ma_1^2 \sin^2(2\theta) - 2 \cot(\theta)}{2 + Ma_1^2(\gamma + \cos(2\theta))}. \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Figura 4.22: Notação para a onda de choque oblíqua.

Figura 4.23: Modelo para a reflexão de onda de choque oblíqua.

Tabela 4.2: Solução analítica para a reflexão de choque.

Propriedade	V	Ma	p	ρ	ϕ
Região 1	2,95342	2,95342	0,71428	1,0	0,0°
Região 2	2,71034	2,39999	1,58943	1,74479	-11,37528°
Região 3	2,43018	1,94360	3,14003	2,81189	11,37528°

Portanto, conhecendo-se as propriedades p_1, ρ_1, V_1 e θ antes da onda de choque, é possível determinar p_2, ρ_2, V_2 e ϕ após a onda de choque por intermédio das Equações (4.23). A Figura 4.23 mostra o modelo utilizado para simular a reflexão de choque oblíquo sobre uma placa plana. Nesse modelo, a linha de corrente é desviada pelos ângulos ϕ_2 e ϕ_3 devido à presença dos choques. O valor das propriedades p_2, ρ_2, V_2 e ϕ_2 podem ser calculados a partir de p_1, ρ_1, V_1 e θ_1 utilizando as Equações (4.23). Analogamente, p_3, ρ_3, V_3 e ϕ_3 podem ser calculados utilizando o valor de p_2, ρ_2, V_2 e θ_2 .

Nota-se que o choque divide o domínio em três regiões com propriedades fixas. Na Região 1, as propriedades p, ρ, V e Ma são definidas por p_1, ρ_1, V_1 e Ma_1 . Analogamente, na Região 2 as propriedades são definidas por p_2, ρ_2, V_2, Ma_2 e ϕ_2 e na Região 3 por p_3, ρ_3, V_3, Ma_3 e ϕ_3 . A Tabela 7.2 mostra a solução analítica, calculada pelas Equações (4.23) para as propriedades do fluido em cada região, com $\theta_1 = 151^\circ$.

Para resolver o problema de reflexão de choque, utilizou-se uma malha com $\Delta_x = \Delta_y = 0,0125$ sobre um domínio computacional de 3.5×1.0 unidades adimensionais. Na fronteira esquerda e na fronteira superior, as condições de contorno utilizadas são Dirichlet e foram extraídas da Tabela 7.2. Na fronteira inferior utilizou-se a condição de contorno para uma placa plana reflexiva com escorregamento livre, esse tipo de condição de contorno está descrito no trabalho de Poinot e Lele (1992). Na fronteira direita utilizou-se a condição de contorno não-reflexiva baseada em invariantes de Riemann, conforme descrito na Seção 3.3.

Figura 4.24: Reflexão de choque oblíquo: variável p adimensional e linha de corrente.

Figura 4.25: Reflexão de choque oblíquo: variável ρ adimensional e linha de corrente.

Figura 4.26: Reflexão de choque oblíquo: variável Ma e linha de corrente.

O código foi executado até atingir convergência e os resultados numéricos para a pressão, para a densidade e para o número de Mach, com limitador de fluxo Min-Mod, são mostrados pelas Figuras 4.24 a 4.26. O ângulo formado pela linha de corrente na Região 2 com a direção x foi calculado com a velocidade local $\mathbf{v} = (2,6571, -0,5345)$ na posição $\mathbf{x} = (1,49, 0,48)$ por onde passa a linha de corrente. O cálculo resulta em $\phi_2^{\text{convergado}} = -11,37377869^\circ$. Comparando o valor desse ângulo com o valor teórico obtém-se:

$$\frac{|\phi_2^{\text{convergado}} - \phi_2^{\text{teórico}}|}{|\phi_2^{\text{teórico}}|} = 1,319 \times 10^{-4} . \quad (4.24)$$

O resultado calculado pela Equação (4.24) mostra que o ângulo de deflexão da linha de corrente é relativamente igual ao ângulo de deflexão teórico, mostrando que o método numérico foi capaz de reproduzir muito bem o resultado teórico.

As Figuras 4.27 a 4.32 mostram a comparação entre a solução analítica com a computacional convergida para as variáveis p , ρ e Ma através de uma linha horizontal ao longo do domínio em $y = 0,4$, essa comparação é feita utilizando o método de discretização espacial de ordem 1, seguido pelos métodos de ordem 2 com limitadores de fluxo do tipo MinMod, Van Leer, ACM e Van Albada. Esses gráficos mostram que a onda de choque foi capturada pelo método numérico, porém houve um pouco de dissipação próximo ao choque.

A dissipação é acentuada para o método de ordem 1 e dentre os métodos de ordem 2, o método com limitador de fluxo do tipo Min-Mod foi o que apresentou maior dissipação do choque enquanto que o método com limitador de fluxo do tipo ACM foi o que apresentou menor dissipação porém, pequenas oscilações numéricas aparecem nos resultados como pode ser observado nas Figura 4.28, 4.30 e 4.32.

Pode-se concluir desses resultados, que o método numérico foi capaz de reproduzir as características físicas do problema de reflexão de choque, portanto pode-se dizer que o método está verificado para simulações com as condições de escorregamento livre convencional.

Figura 4.27: Comparação entre a solução analítica e a computacional para a pressão p .

Figura 4.28: Ampliação da região do primeiro choque para a comparação entre a solução analítica e a computacional para a pressão p .

Figura 4.29: Comparação entre a solução analítica e a computacional para a densidade ρ .

Figura 4.30: Ampliação da região do primeiro choque para a comparação entre a solução analítica e a computacional para a densidade ρ .

Figura 4.31: Comparação entre a solução analítica e a computacional para o número de Mach.

Figura 4.32: Ampliação da região do primeiro choque para a comparação entre a solução analítica e a computacional para o número de Mach.

Todos os métodos de ordem 2 implementados apresentaram bons resultados, contudo o método de ordem 2 com limitador de fluxo do tipo Min-Mod foi escolhido por apresentar natureza mais dissipadora que os demais. Essa característica certamente ajudará a evitar o aparecimento de oscilações numéricas próximo à fronteira imersa.

5 *Método da Fronteira Imersa com Escorregamento Livre*

*Não são as respostas
que te fazem seguir em frente e sim
a vontade de continuar adiante!!!!*

Coelho (1990)

Para estudar o escoamento de fluido compressível modelado pelas equações de Euler é necessário utilizar condições de contorno com escorregamento livre, conhecidas também como *free-slip* (POINSOT; LELE, 1992), porque se utilizarmos condições de contorno inadequadas ao sistema de equações governantes, isso conduzirá a resultados fisicamente incorretos.

A condição de contorno com escorregamento livre para o método da fronteira imersa (MFI-EL) não aparece em estudos na literatura. Em todos os artigos pesquisados, apenas a condição de contorno sem escorregamento, isto é, *no-slip* (POINSOT; LELE, 1992), é estudada e desenvolvida. Isso porque o método da fronteira imersa foi desenvolvido originalmente para o estudo de escoamentos incompressíveis a baixo Reynolds (PESKIN, 2002). Além disso, há pouco estudo da versão do método da fronteira imersa para escoamento compressível. Portanto, o desenvolvimento de um método de fronteira imersa para escoamento compressível com condição de contorno com escorregamento livre (DORICIO; JÚNIOR, 2007), proposto nesse trabalho, é um dos estudos inovadores dessa tese.

A condição de contorno com escorregamento livre pode ser entendida como um mecanismo de resposta, proveniente da interação entre o fluido e a estrutura, apenas para forças aplicadas na direção normal à superfície da estrutura. Para implementar esse tipo de condição de contorno é necessário considerar que as molas (que ligam os pontos $\mathbf{X}(s, t)$ que representam a estrutura

aos pontos de equilíbrio $\mathbf{X}^e(s)$, ver Figura 5.1) atuam localmente na direção normal à estrutura, contra o deslocamento dos pontos $\mathbf{X}(s, t)$ nessa direção. Além disso, é necessário impor uma restrição ao deslocamento dos pontos $\mathbf{X}(s, t)$ na direção tangente à estrutura, sem interferir nas propriedades do fluido nessa direção. Assim, as Equações (3.9) e (3.10), para escoamento com condição de contorno sem escorregamento, re-escritas abaixo:

$$\mathbf{X}^{(\varphi+1)}(s) = \phi(\mathbf{U}^{(\varphi+1)}(s)),$$

$$\mathbf{F}(s, t) = \mathbf{S}(\mathbf{X}(s, t), t) = \kappa(\mathbf{X}^e(s) - \mathbf{X}(s, t)),$$

devem ser modificadas para satisfazerem a condição de contorno com escorregamento livre.

Figura 5.1: Esquema massa-mola-amortecedor para escorregamento livre.

Note que tomando a projeção ortogonal do vetor velocidade e do vetor deslocamento na direção do vetor normal $\mathbf{n}(s, t)$, a condição de contorno é imposta. Assim,

$$\mathbf{X}^{(\varphi+1)}(s) = \phi(\text{proj}_{\mathbf{n}(s, t)} \mathbf{U}^{(\varphi+1)}(s)), \quad (5.1)$$

$$\mathbf{F}(s, t) = \mathbf{S}(\mathbf{X}(s, t), t) = \kappa \text{proj}_{\mathbf{n}(s, t)} (\mathbf{X}^e(s) - \mathbf{X}(s, t)) + \zeta \text{proj}_{\mathbf{n}(s, t)} (\mathbf{U}^e(s) - \mathbf{U}(s, t)), \quad (5.2)$$

onde ζ é uma constante de amortecimento, com $\zeta < 1$. Estudos realizados com o método da fronteira imersa (DORICIO, 2006; DORICIO; JÚNIOR, 2007) têm demonstrado que um pouco de amortecimento introduzido na Equação (5.2) evita o aparecimento de oscilações da solução na fronteira imersa.

A condição de contorno de escorregamento livre é imposta substituindo a Equação (3.9) pela Equação (5.1) e a Equação (3.10) pela Equação (5.2) no método numérico descrito na Seção 3.1.

5.1 Verificação do MFI-EL usando o Problema de Reflexão de Choque de Choque

Para verificar se essa condição de contorno satisfaz a propriedade de escorregamento livre, no método da fronteira imersa com escorregamento livre (MFI-EL), resolve-se o problema da reflexão de choque sobre uma placa plana (representada pela condição de contorno com escorregamento livre desenvolvida nesse capítulo), utilizando uma metodologia similar à descrita na Seção 4.4 (onde utilizou-se a condição de contorno com escorregamento livre convencional).

O modelo para o problema da reflexão de choque oblíquo sobre a fronteira imersa com escorregamento livre é mostrado na Figura 5.2. As demais condições de contorno são as mesmas descritas na Seção 4.4.

Figura 5.2: Modelo para o problema da reflexão de choque oblíquo sobre uma fronteira imersa com escorregamento livre.

As Figuras 5.3 a 5.5 mostram os resultados obtidos para as propriedades do fluido: pressão, densidade e número de Mach. Um resultado qualitativo importante que se pode observar nessas figuras é que a condição de contorno com escorregamento livre é satisfeita pela fronteira imersa e o escoamento na região abaixo da fronteira não interfere nos resultados da região acima da fronteira imersa.

O ângulo formado pela linha de corrente na Região 2 com o eixo das ordenadas x foi calculado utilizando a velocidade local $\mathbf{u} = (2.6571, -0.534571)$ na posição $\mathbf{x} = (1.30089, 0.750575)$ do domínio computacional, na posição onde passa a linha de corrente mostrada pela figuras. O resultado encontrado é $\phi_2^{\text{conv}} = -11.375250128^\circ$. Comparando o valor desse ângulo com o valor do ângulo teórico, obtém-se:

$$\frac{|\phi_2^{\text{conv}} - \phi_2^{\text{teórico}}|}{|\phi_2^{\text{teórico}}|} = 2.626 \times 10^{-6}. \quad (5.3)$$

O resultado da Equação (5.3) mostra que o ângulo de inclinação da linha de corrente está bem próximo ao valor teórico, demonstrando que o método numérico está representando fisicamente bem o problema de reflexão de choque oblíquo.

Ademais, as Figuras 5.6 a 5.8 mostram a comparação entre a solução analítica e a solução convergida para as variáveis p , ρ e Ma sobre a reta horizontal $y = 0.6$. As Figuras 5.9 a 5.11 mostram a comparação entre a solução analítica e a solução convergida sobre parede representada pela fronteira imersa.

Um resultado importante é que o método numérico conseguiu reproduzir a descontinuidade gerada pela onda de choque e, além disso, as Figuras 5.9 a 5.11 mostram que a condição de escorregamento livre é satisfeita quantitativamente. Contudo, a dissipação da onda de choque sobre a fronteira imersa tem magnitude maior que no interior do domínio computacional. Isso ocorre devido ao interpolador delta - Equação (3.13) - ser de ordem um no espaço, conforme discutido no trabalho de (GRIFFITH; PESKIN, 2005). Pode-se concluir, desses resultados, que a abordagem de escorregamento livre do método da fronteira imersa gerou bons resultados para o problema de reflexão de choque, estando verificada a implementação da fronteira imersa.

Figura 5.3: Pressão p e linha de corrente. Figura 5.4: Densidade ρ e linha de corrente.

Figura 5.5: Número de Mach e linha de corrente.

Figura 5.6: Comparação da solução analítica com a solução numérica para a pressão em $y=0.6$ Figura 5.7: Comparação da solução analítica com a solução numérica para a densidade em $y=0.6$

Figura 5.8: Comparação da solução analítica com a solução numérica para o número de Mach em $y=0.6$.

Figura 5.9: Comparação da solução analítica com a solução numérica para a pressão sobre a fronteira imersa.

Figura 5.10: Comparação da solução analítica com a solução numérica para a densidade sobre a fronteira imersa.

Figura 5.11: Comparação da solução analítica com a solução numérica para o número de Mach sobre a fronteira imersa.

5.2 Verificação do MFI-EL para Escoamento ao Redor de um Prisma de Base Quadrada

Conforme mostrado anteriormente, o método da fronteira imersa com escorregamento livre apresenta resultados muito satisfatórios para o problema de reflexão de choque oblíquo. Contudo, o problema do choque oblíquo não explora a condição de contorno aplicada a problemas de escoamento de fluido ao redor de corpos fechados. Por esse motivo estudar-se-á o problema de escoamento de fluido ao redor de um prisma de base quadrada, ou simplesmente seção quadrada devido ao problema ser de natureza bidimensional.

A geometria de uma seção quadrada é ilustrada pela Figura 5.12. É importante salientar que a fronteira imersa divide o domínio computacional Ω em duas regiões com escoamento distintos:

- **Região externa:** de importância física;
- **Região interna:** de importância matemática.

Contudo, o método da fronteira imersa resolve as equações Euler indistintamente nessas duas regiões. Isto é, não existe nenhuma separação do domínio computacional em região interna ou externa ao corpo imerso.

Para verificar a condição de contorno com escorregamento livre para o problema de escoamento sobre esse tipo de geometria utiliza-se o seguinte procedimento: comparam-se os resultados da simulação computacional utilizando a condição de contorno desenvolvida aos resultados computacionais utilizando a condição de contorno com escorregamento livre convencional (POINSOT; LELE, 1992), verificada anteriormente.

As simulações foram realizadas com domínio retângular de tamanho 10×10 unidades adimensionais com a seção quadrada de 1 u. a. de lado centrado na posição $x = 5$, $y = 5$ e com 134×134 células sobre uma malha com espaçamento variável usando $\Delta x_{min} = \Delta y_{min} = 0.025$ u. a., ver Figura 5.13. Mais informações sobre os parâmetros utilizados podem ser encontrados no Apêndice B ao final desse trabalho de tese.

O escoamento de fluido compressível invíscido utilizando a condição de contorno com escorregamento livre possui natureza transiente para o problema com seção quadrada. Esse fenômeno ocorre devido à singularidade existente nas quatro quinas, onde a derivada das variáveis do escoamento é indefinida ou não-determinável.

Figura 5.12: Modelo da seção quadrada.

Para o método da fronteira imersa, o valor das derivadas das variáveis do escoamento nas quinas, considerando-se a direção normal à parede, é calculado como a média entre os vetores normais dos pontos lagrangianos adjacentes.

No caso da condição de contorno convencional, a condição de não escorregamento foi imposta nas quatro quinas para calcular o valor das derivadas das variáveis do escoamento nesses pontos. Isso foi feito para simplificar a imposição da condição de contorno convencional.

É importantíssimo ressaltar que essa diferença entre as condições de contorno convencional e de fronteira imersa precisa ser levada em consideração durante a comparação e a análise dos resultados.

Figura 5.13: Malha computacional usada para simular o problema de escoamento de fluido ao redor da seção quadrada.

Figura 5.14: Campo do número de Mach para a seção quadrada: $Ma_\infty = 0,4$ em $t = 0,0125s$. Convencional em preto; fronteira imersa em vermelho.

Figura 5.15: Campo do número de Mach para a seção quadrada, ampliado: $Ma_\infty = 0,4$ em $t = 0,0125s$. Convencional em preto; fronteira imersa em vermelho.

Figura 5.16: Campo de pressão para a seção quadrada: $Ma_\infty = 0,4$ em $t = 0,0125s$. Convencional em preto; fronteira imersa em vermelho.

Figura 5.17: Campo de pressão para a seção quadrada, ampliado: $Ma_\infty = 0,4$ em $t = 0,0125s$. Convencional em preto; fronteira imersa em vermelho.

Figura 5.18: Campo do número de Mach para a seção quadrada: $Ma_\infty = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; fronteira imersa em vermelho.

Figura 5.19: Campo do número de Mach para a seção quadrada, ampliado: $Ma_\infty = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; fronteira imersa em vermelho.

Figura 5.20: Campo de pressão para a seção quadrada: $Ma_\infty = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; fronteira imersa em vermelho.

Figura 5.21: Campo de pressão para a seção quadrada, ampliado: $Ma_\infty = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; fronteira imersa em vermelho.

Figura 5.22: Campo de velocidades para a seção quadrada, ampliado: $Ma_\infty = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; fronteira imersa em vermelho.

Figura 5.23: Campo de velocidades para a seção quadrada, ampliado: $Ma_\infty = 0,4$ em $t = 0,1s$ para o Método da fronteira imersa.

O escoamento ao redor da seção quadrada se mostrou transiente e, devido ao efeito dinâmico do fluxo, a comparação dos resultados foi realizada utilizando dois instantes de tempo diferentes: as Figuras 5.14 a 5.17 mostram os resultados para o número de Mach local, Ma , e para o campo de pressão, p , usando $Ma_\infty = 0,4$ no tempo $t = 0,0125s$, e as Figuras 5.18 a 5.21 mostram esses resultados no tempo $t = 0,1s$.

Observa-se nas Figuras 5.14, 5.16, 5.18 e 5.20 que os resultados do MFI-EL (em vermelho) estão qualitativamente bons quando comparados aos resultados do método de escorregamento livre convencional (em preto). Contudo, é importante relembrar que a condição de contorno nas quinas da seção quadrada são resolvidas diferentemente. As Figuras 5.15, 5.17, 5.19 e 5.21 permitem uma análise melhor das diferenças entre os métodos na região próxima à parede da seção quadrada. Os resultados mostram que a maior diferença ocorre na região que está próxima às quinas (ver também a Figura 5.22). Isso é esperado devido às condições de contorno nas quinas serem tratadas de forma diferente. Observa-se nas Figuras 5.6 e 5.19 forte dissipação do MFI-EL nas paredes verticais esquerda e direita. Esse efeito não é causado pela condição de

contorno na quina, porque esse problema de dissipação não aparece nos resultados do método de escorregamento livre convencional, que utiliza condição de contorno sem escorregamento nos quatro pontos de quina. Isso é um problema grave, pois a condição de escorregamento livre não é satisfeita, conforme pode ser observado nas Figuras 5.22 e principalmente na 5.23.

A Figura 5.23 mostra o campo de velocidades para a seção quadrada usando o MFI-EL. Esse resultado mostra que o escoamento do fluido na região exterior à seção quadrada gerou vorticidade, isto é, circulação do escoamento na região interior. Essa circulação diminui o gradiente de velocidades na direção vertical gerando um efeito “dissipativo” no escoamento externo, que não ocorre para a fronteira com escorregamento livre convencional - ver Figura 5.22, porque no caso da condição de escorregamento livre convencional não há escoamento dentro da estrutura, apenas nos nós exteriores. Frente a esse problema, é evidente que a formulação desenvolvida, MFI-EL, não funciona bem para problemas de escoamento de fluido ao redor de corpos fechados. Uma das maiores dificuldades desse trabalho foi encontrar uma solução simples e de fácil implementação para esse “defeito” do método, que é inerente da formulação da condição de contorno com escorregamento livre, não estudada na literatura.

Pode ser observado na Figura 5.23, um problema de interpolação que ocorre em todas as formulações do método da fronteira imersa que utiliza a função delta suavizada como interpolador. Observe que os valores das variáveis do campo de velocidade no domínio euleriano sob a fronteira imersa não coincidem com os valores no domínio lagrangiano. Isso ocorre porque a função delta não interpola a variável, ao invés, interpola a densidade da variável, ou seja a densidade de velocidade e a densidade de força (GRIFFITH; PESKIN, 2005).

5.3 MFI-EL utilizando Correção na Fronteira

Para solucionar o problema apresentado na Seção 5.2 é necessário analisar as causas do efeito “dissipativo”, ou de redução de velocidades, presente no método MFI-EL para problemas com geometrias imersas fechadas. Foi mencionado anteriormente que a circulação induzida pelo escoamento na região interna da seção quadrada é responsável pelo aparecimento dessa

dissipação. Esse efeito dissipativo não aparece quando se utiliza a condição de contorno convencional, conforme mostrado anteriormente. Isso acontece porque, no caso do problema com condição de contorno convencional, o escoamento interno não é resolvido pelo método numérico. Para resolver esse problema de “dissipação artificial” no MFI-EL é necessário limitar a solução das equações de Euler à região externa do corpo imerso. Alguns métodos, ditos de “fronteira imersa”, também conhecidos como métodos com forçantes implícitos fazem isso (nesses métodos a força de corpo é imposta indiretamente por meio das condições de contorno na fronteira imersa), ver Mohd-Yusof (1998), Verzicco, Iaccarino, Fatica e Orlandi (2000), Fadlun, Verzicco, Orlandi e Mohd-Yusof (2000) e Tseng e Ferziger (2003). Nesse trabalho será desenvolvido um método de forçante explícito baseado no MFI de Peskin (2002). O sistema de equações diferenciais do método da fronteira imersa depende dos dados internos em duas fases de solução:

- ✦ durante o cálculo das derivadas espaciais para o domínio euleriano e,
- ✦ durante o processo de interpolação das variáveis lagrangianas.

Para resolver o problema do MFI-EL é necessário eliminar essas duas dependências.

5.3.1 Cálculo das derivadas espaciais para o domínio Euleriano

As derivadas espaciais são discretizadas utilizando o esquema *upwind* descrito na Seção 3.2. A Figura 5.24 mostra os pontos utilizados no esquema de interpolação para uma fronteira passando verticalmente sobre uma célula (i, j) e a delimitação do domínio em região interna (células hachuradas) e externa do corpo imerso. Considerando o esquema mostrado nessa figura, nota-se que se a direção do fluxo for da esquerda para a direita, isto é, tiver sinal negativo, então o fluxo e^+ não depende das informações da região interna porque a derivada desse fluxo deve ser feita por meio de discretização regressiva.

Por outro lado, o fluxo e^- transmite informações da direita para a esquerda e por isso necessita de informações da região interna. Seja a derivada de e^- no ponto (i, j) dada por:

$$\mathbb{E}^-_{i,j} \equiv \left. \frac{\partial e^-}{\partial x} \right|_{i,j}$$

Figura 5.24: Esquema para interpolação das derivadas na direção horizontal.

Figura 5.25: Esquema para interpolação das derivadas na direção vertical.

A derivada do fluxo $\mathbf{e}^-$ no ponto (i, j) é calculada utilizando o seguinte esquema de extrapolação:

$$\mathfrak{E}^-_{i,j} = 2 \mathfrak{E}^-_{i-1,j} - \mathfrak{E}^-_{i-2,j} . \quad (5.4)$$

No caso em que a célula $(i, j - 1)$ está na região interna, a Figura 5.25 mostra os pontos utilizados no esquema de extrapolação. Nesse caso, a derivada do fluxo $\mathbf{g}^-$ é discretizada por derivadas utilizando diferenças progressivas e, portanto, não precisa ser extrapolada. Assim, usa-se o esquema de reconstrução MUSCL nas células $(i, j + 1)$ e $(i, j + 2)$ para calcular os valores das propriedades do fluido na célula (i, j) . Por outro lado, a derivada do fluxo $\mathbf{g}^+$ (discretizada por diferenças regressivas) definida por:

$$\mathfrak{F}^+_{i,j} \equiv \left. \frac{\partial \mathbf{g}^+}{\partial y} \right|_{i,j} ,$$

é calculada utilizando o seguinte esquema de extrapolação:

$$\mathfrak{F}^+_{i,j} = 2 \mathfrak{F}^+_{i,j+1} - \mathfrak{F}^+_{i,j+2} . \quad (5.5)$$

Analogamente, considerando as seguintes definições:

$$\mathfrak{E}^+_{i,j} \equiv \left. \frac{\partial \mathbf{e}^+}{\partial y} \right|_{i,j} , \quad \mathfrak{F}^-_{i,j} \equiv \left. \frac{\partial \mathbf{g}^-}{\partial y} \right|_{i,j} ,$$

o esquema de extrapolação é dado por:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}^+_{i,j} &= 2 \mathfrak{E}^+_{i+1,j} - \mathfrak{E}^+_{i+2,j} , \\ \mathfrak{F}^-_{i,j} &= 2 \mathfrak{F}^-_{i,j-1} - \mathfrak{F}^-_{i,j-2} . \end{aligned} \quad (5.6)$$

O esquema de extrapolação utilizado nas Equações (5.4) a (5.6) é simples de ser implementado e é de ordem um sobre a derivação (possivelmente ordem dois sobre as variáveis primitivas) e, quando aplicado sobre as células que contém a fronteira imersa, elimina a dependência dos pontos da região interna do corpo imerso.

Figura 5.26: Função delta especial com vetor normal $\mathbf{n} = (1, 0)$.

Figura 5.27: Função delta especial com vetor normal $\mathbf{n} = (0, -1)$.

5.3.2 Interpolação das variáveis lagrangianas

As variáveis lagrangianas são interpoladas por meio de uma função delta especial, mostrada pelas Figuras 5.26 e 5.27. Essa função é dada por:

$$\delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \mathfrak{d} \left(-\frac{n_y x}{\Delta x (n_y^2 + n_x^2)} + \frac{n_x y}{\Delta x (n_y^2 + n_x^2)}, -\frac{n_x x}{\Delta y (n_y^2 + n_x^2)} - \frac{n_y y}{\Delta y (n_y^2 + n_x^2)} \right), \quad (5.7)$$

onde $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ é o vetor normal ao ponto lagrangiano da fronteira imersa e

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) \equiv \begin{cases} \frac{25}{8} \frac{e^{(-\frac{25}{16}\mathfrak{x}^2 - \frac{25}{16}\mathfrak{z}^2)}}{\pi} & 0 \leq \mathfrak{z} < 5 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (5.8)$$

Essa função delta foi desenvolvida para garantir que os dados interpolados pertençam à região externa do corpo imerso. Contudo essa função apresenta o problema de truncamento das funções gaussianas, conforme discutido na Sessão 3.1. Portanto deve-se tomar um cuidado especial ao truncar essa função. O erro entre a integral e o valor unitário é de

$$\left| 1 - \iint_{-5}^5 \mathfrak{d}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) d\mathfrak{x} d\mathfrak{z} \right| < 0,2 \times 10^{-17}.$$

Ao ser truncada no raio de cinco células esse erro é menor que o erro de máquina e portanto suficiente para evitar o problema discutido na Seção 3.1. Ao utilizar a função (5.7), para interpolar a força do domínio lagrangiano para o domínio euleriano e a velocidade do euleriano para o lagrangiano, a dinâmica de movimento da fronteira imersa passa a ser independente das informações da região interna do corpo imerso. Esse procedimento finaliza o método da fronteira imersa com escorregamento livre utilizando correção na fronteira (MFI-ELCF).

5.4 Verificação do MFI-ELCF para o Escoamento sobre uma Seção Quadrada

O procedimento de simulação e de verificação para a seção quadrada é realizado exatamente como o descrito na Seção 5.2 para o MFI-EL.

Figura 5.28: Campo do número de Mach para a seção quadrada: $Ma_\infty = 0,4$ em $t = 0,0125s$. Convencional em preto; MFI-ELCF em vermelho.

Figura 5.29: Campo do número de Mach para a seção quadrada, ampliado: $Ma_\infty = 0,4$ em $t = 0,0125s$. Convencional em preto; MFI-ELCF em vermelho.

Figura 5.30: Campo de pressão para a seção quadrada: $Ma_\infty = 0,4$ em $t = 0,0125s$. Convencional em preto; MFI-ELCF em vermelho.

Figura 5.31: Campo de pressão para a seção quadrada, ampliado: $Ma_\infty = 0,4$ em $t = 0,0125s$. Convencional em preto; MFI-ELCF em vermelho.

Figura 5.32: Campo do número de Mach para a seção quadrada: $Ma_\infty = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; MFI-ELCF em vermelho.

Figura 5.33: Campo do número de Mach para a seção quadrada, ampliado: $Ma_\infty = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; MFI-ELCF em vermelho.

Figura 5.34: Campo de pressão para a seção quadrada: $Ma_\infty = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; MFI-ELCF em vermelho.

Figura 5.35: Campo de pressão para a seção quadrada, ampliado: $Ma_\infty = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; MFI-ELCF em vermelho.

Figura 5.36: Campo de velocidades para a seção quadrada, ampliado: $Ma_\infty = 0,4$ em $t = 0,1s$. Convencional em preto; MFI-ELCF em vermelho.

Os resultados obtidos para o campo do número de Mach e para o campo de pressão são mostrados pelas Figuras 5.28 a 5.35. Os resultados obtidos demonstram que o problema de “dissipação artificial” ou “camada limite artificial” foi bastante amenizado com a nova abordagem MFI-ELCF. Isso está bem evidente nas Figuras 5.29 e 5.33. Pode-se notar pela Figura 5.36 que as diferenças entre os resultados são devido ao problema de singularidade nas quinas, onde o método da fronteira imersa utiliza condição de contorno diferente do método convencional. Apesar disso, os resultados da simulação do MFI-ELCF mostram-se qualitativamente muito bons quando comparados ao problema com a seção quadrada convencional.

A Tabela 5.1 mostra uma comparação quantitativa entre os erros da solução numérica do MFI-EL e do MFI-ELCF com a solução numérica do método com escorregamento livre convencional. Os erros em Ω foram calculados utilizando a norma de Hilbert-Schmidt média da matriz $\mathfrak{H}$:

$$\|\mathfrak{H}\|_{HSm} \equiv \sqrt{\frac{\sum_{0 \leq i,j < M,N} \mathfrak{H}_{ij}^2}{MN}}.$$

Contudo, outros autores preferem usar a norma infinita ou norma do máximo justificando que capturam melhor o erro. Porém, nesse trabalho a norma de Hilbert-Schmidt foi adequada. Nota-se que o MFI-ELCF conseguiu resolver o problema de escoamento ao redor da seção quadrada com erro aproximadamente cinco vezes menor que o MFI-EL para o campo de velocidade (número de Mach) e aproximadamente duas a três vezes para os campos de densidade e de pressão. Além disso, a magnitude dos erros é relativamente baixa. De acordo com a Tabela 5.1, para o MFI-ELCF o erro com maior magnitude em $t = 0,1$ é 2,57% de $Ma_\infty = 0,4$. Devido aos resultados obtidos serem - qualitativamente e quantitativamente - bons, o método MFI-ELCF será considerado livre de erros de implementação. Contudo, testes utilizando uma seção circular e uma seção de aerofólio serão realizados para garantir a funcionalidade desse método e validá-lo.

Tabela 5.1: Comparação do MFI-EL e do MFI-ELCF com o método *free-slip* convencional.

Variável Adimensional		Erro em $t = 0,0125$	Erro em $t = 0,1$
Erro em Ω entre MFI-EL e convencional	Campo do número de Mach local	$1,07 \times 10^{-1}$	$1,25 \times 10^{-1}$
	Campo de Pressão	$2,76 \times 10^{-2}$	$1,50 \times 10^{-2}$
	Campo de Densidade	$3,07 \times 10^{-2}$	$2,29 \times 10^{-2}$
Erro em Ω entre MFI-ELCF e convencional	Campo do número de Mach local	$2,20 \times 10^{-2}$	$2,57 \times 10^{-2}$
	Campo de Pressão	$8,17 \times 10^{-3}$	$7,61 \times 10^{-3}$
	Campo de Densidade	$9,64 \times 10^{-3}$	$9,37 \times 10^{-3}$
Fator de redução do erro entre MFI-EL e MFI-ELCF	Campo do número de Mach local	4,89	4,86
	Campo de Pressão	3,38	1,98
	Campo de Densidade	3,19	2,45

6 *Estudo de Escoamento com o MFI-ELCF*

*Se um grão de trigo tem que morrer
para que nasça uma nova espiga, assim
Cristo teve que morrer para que
nascesse uma nova Humanidade.*

Autor desconhecido

6.1 **Estudo de Escoamento ao Redor de uma Seção Circular Estacionária**

O problema de escoamento de fluido ao redor de seções circulares, ou cilindros, tem sido amplamente estudado na literatura para verificar e validar algoritmos computacionais em Mecânica dos Fluidos, principalmente para escoamentos incompressíveis. Nesse caso, há uma gama de trabalhos e dentre eles, pode-se citar Williamson (1996), Saiki e Biringen (1996), Baek e Sung (1998), Silva, Silveira-Neto e Damasceno (2003), Mittal e Kumar (2003), Souza (2005), Marques, Doricio e Bueno (2006), Padrino e Joseph (2006), Doricio, Marques, Bueno, Júnior e Souza (2006), Marques, Doricio, Góis, Júnior e Souza (2007), entre outros. Esse tipo de geometria, por simplicidade entre outros motivos, também tem sido amplamente estudada para modelagem de escoamento compressível de fluidos viscosos como os seguintes trabalhos: Don e Gottlieb (1990), Burbeau e Sagaut (2002), Sabanca e Durst (2003), Palma, Tullio, Pascazio e Napolitano (2006), Lee (2007), Tullio, Palma, Iaccarino, Pascazio e Napolitano (2007), Ghias, Mittal e Dong (2007), entre outros. Apesar da existência de muitos trabalhos envolvendo escoamento de fluido incompressível ou compressível viscoso, existem poucos trabalhos reportando

sobre o problema de escoamento compressível de fluido invíscido, modelado pelas equações de Euler. Os trabalhos encontrados na literatura são: Pandolfi e Larocca (1989), Botta (1995) e Hafez e Wahba (2004)

Hafez e Wahba (2004) resolveram o problema de escoamento de fluido invíscido sobre uma seção circular utilizando a formulação estacionária das equações de conservação para escoamento subsônico, transônico e supersônico. Contudo, Pandolfi e Larocca (1989) e Botta (1995) mostram, com a formulação transiente das equações de conservação, que o escoamento ao redor da seção circular é periódico, assimétrico e estável quando transônico; e estacionário, simétrico e estável quando subsônico ou supersônico. Também é importante ressaltar que esses autores utilizaram malha conformal (ou conforme) para discretizar o domínio euleriano. Esse tipo de malha evita processos de interpolação, e fornece ótima precisão numérica. Todavia, poucas geometrias podem ser modeladas utilizando malha conformal com a técnica de diferenças finitas. Isso faz com que o método da fronteira imersa seja muito mais atrativo - devido à fraca dependência geométrica entre a malha euleriana e a malha lagrangiana.

O problema de escoamento de fluxo compressível e invíscido ao redor de uma seção circular foi resolvido utilizando o MFI-ELCF. A simulação foi realizada sobre um domínio retangular 15×15 u. a. com a seção circular, de diâmetro 1 u. a., centrado na posição $x = 7,5$; $y = 7,5$ e com 186×186 células sobre uma malha com espaçamento variável utilizando $\Delta x_{min} = \Delta y_{min} = 0,019$. Conforme mostrado pela Figura 6.1. Mais detalhes sobre os parâmetros utilizados na simulação são fornecidos no Apêndice B. As Figuras 6.3 a 6.8 mostram os resultados obtidos para o escoamento subsônico - com $Ma_\infty = 0,4$ - para o campo do número de Mach local, para o campo de densidade ρ e para o campo do coeficiente de pressão C_p , respectivamente.

O escoamento de fluido invíscido, modelado pelas equações de Euler, em regime subsônico comporta-se como escoamento de fluido potencial (PANDOLFI; LARocca, 1989), contudo, os resultados obtidos mostram que isso não acontece quando se utiliza o MFI-ELCF. A condição de contorno externa descrita na Seção 3.3 poderia estar afetando o coeficiente de pressão e para verificar se as variáveis do escoamento estão sendo afetadas por ela, realizou-se uma si-

mulação computacional usando a malha mostrada pela Figura 6.2 sobre um domínio euleriano de 40×40 u. a., isto é, colocou-se a fronteira externa bem longe da seção circular. As Figuras 6.9 e 6.10 mostram os resultados para o coeficiente de pressão e para o número de Mach local e pode-se observar que o escoamento ainda não se comporta como escoamento de fluido potencial. Portanto esse problema não é devido à condição de contorno externa. Contudo, esse problema está intimamente relacionado com a interpolação de malha inerente ao método numérico empregado. Krivodonova e Berger (2006) mostram que isso acontece para a formulação invíscida em malha não estruturada e a solução proposta por elas reside na forma de se realizar as interpolações para a imposição da condição de contorno com escorregamento livre. Segundo Krivodonova e Berger (2006), a imposição da condição de contorno de não penetração se refere ao contorno físico. No caso do método da fronteira imersa, essa condição é imposta no domínio lagrangiano, exatamente, e interpolada para o domínio euleriano por intermédio da função delta suavizada. A consequência disso é a existência de erros numéricos causando a não imposição perfeita da condição de contorno de não penetração no domínio físico. Isso é uma desvantagem do MFI-ELCF em contraste a métodos menos robustos.

As Figuras 6.11 a 6.20 mostram os resultados para o escoamento transônico - com $Ma_\infty = 0,5$. Conforme mencionado anteriormente, os trabalhos de Pandolfi e Larocca (1989) e Botta (1995) mostram que o escoamento ao redor da seção circular com $Ma_\infty = 0,5$ é periódico. Um resultado importante foi obtido durante os testes com o método da fronteira imersa para resolver o escoamento a esse número de Mach. Verificou-se, com o parâmetro $\varpi = 10^{-15}$, que o escoamento atinge regime estacionário simétrico, conforme mostrado pelas Figuras 6.11 a 6.16. Contudo, utilizando-se $\varpi = 10^{-8}$, o escoamento passa a ter padrão periódico, conforme mostrado pelas Figuras 6.17 a 6.20. Isso demonstra que o efeito de periodicidade, certamente, está associado a pequenas fontes de erro numérico, e portanto um método numérico muito bem implementado pode conduzir a soluções simétricas convergidas. Para verificar isso, foram realizadas simulações introduzindo uma perturbação na solução inicial usando $\varpi = 10^{-15}$ e constatou-se que o escoamento passa a ter regime periódico similar ao simulado usando $\varpi = 10^{-8}$. Isso mostra que pequenas perturbações no escoamento foi suficiente para torná-lo periódico.

Os resultados para o escoamento periódico são mostrados utilizando meio ciclo de oscilação. Comparando esses resultados, obtidos pelo método da fronteira imersa, com os de Pandolfi e Larocca (1989) - ver Figura 6.21, constatou-se que há concordância qualitativa dos mesmos. Isso permite concluir que o método da fronteira imersa conseguiu representar qualitativamente bem o escoamento transônico. Realizou-se também simulação para escoamento de fluido supersônico $Ma_\infty = 2$, mostrados pelas Figuras 6.22 a 6.27. Devido a não se encontrar resultados para escoamento invíscido para esse número de Mach, os resultados foram comparados qualitativamente com os apresentados por Burbeau e Sagaut (2002). Essa comparação mostrou que existe concordância, contudo deve-se ressaltar que o efeito de viscosidade não é desprezível nos resultados de Burbeau e Sagaut (2002) e portanto nada pode ser concluído.

Para comparar quantitativamente os resultados, utiliza-se a distribuição do coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície da seção circular. A Figura 6.28 mostra a comparação entre a distribuição de C_p para $Ma_\infty = 0,4$ e $Ma_\infty = 0,5$ (estacionário) obtidos pelo MFI-ELCF. Observa-se que o ponto de estagnação na parte frontal da seção circular foi bem representado pelo método desenvolvido, contudo não há recuperação total na parte posterior da seção circular. Pode-se observar também a presença de uma onda de choque para $Ma_\infty = 0,5$. A Figura 6.29 mostra uma comparação entre a distribuição de C_p para $Ma_\infty = 0,5$ com os resultados de Hafez e Wahba (2004) rotacional e potencial. Observa-se que o resultado obtido pelo MFI-ELCF apresenta coeficiente de pressão com amplitude menor que o rotacional de Hafez e Wahba (2004). Esse efeito é comum quando se utiliza condições de contorno representando atmosfera aberta, pois há mais efeito de Venturi em um túnel fechado do que em um túnel aberto (EMMONS, 1948). A recuperação também é menor que o apresentado no caso rotacional - provavelmente devido às interpolações entre a estrutura e a malha. Contudo vale ressaltar que Hafez e Wahba (2004) utilizaram malha conforme para representar a geometria. Portanto, pode-se concluir que os resultados estão consistentes.

Figura 6.1: Malha computacional utilizada para simular o problema de escoamento de fluido ao redor de uma seção circular.

Figura 6.2: Malha computacional utilizada para simular o problema de escoamento de fluido ao redor de uma seção circular com domínio 40×40 .

Figura 6.3: Campo do número de Mach local para a seção circular: $Ma_\infty = 0,4$.

Figura 6.4: Campo do número de Mach local para a seção circular, ampliado: $Ma_\infty = 0,4$.

Figura 6.5: Campo de densidade ρ para a seção circular: $Ma_\infty = 0,4$.

Figura 6.6: Campo de densidade ρ para a seção circular, ampliado: $Ma_\infty = 0,4$.

Figura 6.7: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção circular: $Ma_\infty = 0,4$.

Figura 6.8: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção circular, ampliado: $Ma_\infty = 0,4$.

Figura 6.9: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção circular com domínio 40×40 : $Ma_\infty = 0,4$.

Figura 6.10: Campo de Mach local para a seção circular com domínio 40×40 : $Ma_\infty = 0,4$.

Figura 6.11: Campo do número de Mach local para a seção circular: $Ma_{\infty} = 0,5$.

Figura 6.12: Campo do número de Mach local para a seção circular, ampliado: $Ma_{\infty} = 0,5$.

Figura 6.13: Campo de densidade ρ para a seção circular: $Ma_\infty = 0,5$.

Figura 6.14: Campo de densidade ρ para a seção circular, ampliado: $Ma_\infty = 0,5$.

Figura 6.15: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção circular: $Ma_\infty = 0,5$.

Figura 6.16: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção circular, ampliado: $Ma_\infty = 0,5$.

Figura 6.17: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção circular: $Ma_\infty = 0,5$ nos instantes de tempo a) 0,81s; b) 0,8125s; c) 0,815s; d) 0,8175s; e) 0,82s; f) 0,8225s.

Figura 6.18: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção circular: $Ma_\infty = 0,5$ nos instantes de tempo a) 0,825s; b) 0,8275s; c) 0,83s; d) 0,8325s; e) 0,835s; f) 0,8375s.

Figura 6.19: Linhas de corrente para a seção circular: $Ma_{\infty} = 0,5$ nos instantes de tempo a) $0,81s$; b) $0,8125s$; c) $0,815s$; d) $0,8175s$; e) $0,82s$; f) $0,8225s$.

Figura 6.20: Linhas de corrente para a seção circular: $Ma_{\infty} = 0,5$ nos instantes de tempo a) $0,825s$; b) $0,8275s$; c) $0,83s$; d) $0,8325s$; e) $0,835s$; f) $0,8375s$.

Fig. 7. Transonic flow about the full cylinder ($M_{\infty} = 0.50$). Eight different pictures during a cycle (isobars and instantaneous streamlines).

Figura 6.21: Figura extraída da página 214 do trabalho de Pandolfi e Larocca (1989), representando o escoamento transônico sobre uma seção circular para $Ma_{\infty} = 0,5$.

Figura 6.22: Campo do número de Mach local para a seção circular: $Ma_\infty = 2$.

Figura 6.23: Campo do número de Mach local para a seção circular, ampliado: $Ma_\infty = 2$.

Figura 6.24: Campo de densidade ρ para a seção circular: $Ma_\infty = 2$.

Figura 6.25: Campo de densidade ρ para a seção circular, ampliado: $Ma_\infty = 2$.

Figura 6.26: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção circular: $Ma_\infty = 2$.

Figura 6.27: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção circular, ampliado: $Ma_\infty = 2$.

Figura 6.28: Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície da seção circular: $Ma_\infty = 0,4$ e $Ma_\infty = 0,5$. O ponto de estagnação frontal fica na posição π .

Figura 6.29: Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície da seção circular: $Ma_\infty = 0,5$.

6.2 Estudo de Escoamento ao Redor de uma Seção de Aerofólio NACA0012 Estacionária

A seção de aerofólio NACA0012, desenvolvida pela *National Advisory Committee for Aeronautics* (NACA), tem sido amplamente utilizada para a validação de códigos numéricos. Nesse trabalho utilizar-se-á a seção NACA0012 para estudar a aplicabilidade do método da fronteira imersa para o cálculo das derivadas aerodinâmicas. Porém, é necessário validar o código numérico. Para a validação, seria ideal comparar os resultados do método da fronteira imersa com resultados obtidos por outros simuladores. Devido à dificuldade de encontrar resultados computacionais, os resultados do método da fronteira imersa foram comparados com resultados experimentais. A seção NACA0012 foi escolhida por sua simplicidade e pela vasta bibliografia sobre o tema, o que facilita muito a comparação dos resultados obtidos pelo método numérico com resultados experimentais. O perfil geométrico do aerofólio NACA0012 foi modelado utilizando o mapeamento por funções conforme descrito no trabalho de Jacobs, Ward e Pinkerton (1933):

$$f(x) = \pm \frac{0,12}{0,2} \left(0,2969 \sqrt{x} - 0,126x - 0,35160x^2 + 0,2843x^3 - 0,1015x^4 \right). \quad (6.1)$$

Jacobs, Ward e Pinkerton (1933) apresentam resultados para 78 seções de aerofólios provenientes de testes em túnel de vento de densidade variável. Os resultados deles mostram a variação dos coeficientes de sustentação e de arrasto devido a variação do ângulo de ataque. Emmons (1948) apresentou resultados comparativos de escoamento de ar em aerofólio simétrico (NACA0012) em túnel de vento aberto e em ar livre. Ele concluiu que a simulação de escoamento de ar sobre um aerofólio em atmosfera livre gera coeficiente de pressão sobre a superfície do aerofólio ligeiramente menor do que em túnel de vento fechado. De acordo com Emmons (1948), isso ocorre porque, quando a parede do túnel de vento está presente há mais efeito de Venturi que se nenhuma restrição ao escoamento de ar fosse imposta.

Ainda segundo Emmons (1948), para escoamento em túnel de vento fechado com ângulo de ataque de zero graus, a onda de choque está presente a partir de $Ma_\infty = 0,74$. No caso de

escoamento em ar livre, a onda de choque não aparece mesmo para $Ma_\infty = 0,75$. Em 1950, Amick (1950) apresentou uma comparação entre resultados experimentais com resultados obtidos pelo método da relaxação. Os resultados experimentais foram digitalizados de seu trabalho e utilizados em algumas comparações com o método da fronteira imersa. Contudo, melhores resultados são reportados por AGARD (1979), que para facilitar a validação de métodos numéricos, apresentaram um relatório rico em resultados experimentais para diversos tipos de seções de aerofólio. Os resultados apresentados por AGARD (1979) são utilizados para validar o método da fronteira imersa com escorregamento livre, por meio da distribuição de pressão sobre a superfície da seção NACA0012.

Figura 6.30: Nomenclatura e posicionamento da seção de Aerofólio.

As Figuras 6.31 a 6.54 mostram os resultados obtidos pelo MFI-ELCF para os números de Mach de corrente livre variando em $Ma_\infty = 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,73; 0,75; 0,8$ e com ângulos de ataque variando em $\alpha = 0; 2; 3; 4; 8$. Os detalhes sobre as simulações podem ser encontrados no Apêndice B. Nessas figuras, mostra-se o campo do coeficiente de pressão C_p e o campo do número de Mach local. A nomenclatura e a configuração da seção de aerofólio NACA0012 é mostrada pela Figura 6.30. Os resultados obtidos para o campo de pressão são qualitativamente muito bons, quando comparados aos resultados da literatura (CAMILO, 2003; CAMILO; MARQUES, 2004), preservando as características de um escoamento invíscido.

Com relação ao campo de velocidades, expresso pelo campo do número de Mach local, o método da fronteira imersa gera uma camada com “característica dissipativa ou distorciva” ao redor da seção de aerofólio, essa camada parece com uma “camada limite artificial”. Todavia, esse efeito não é camada limite física. A formação dessa camada é resultado do processo de interpolação do campo de força do domínio lagrangiano para o euleriano por intermédio da

função delta suavizada. Diversos trabalhos (LEVEQUE; LI, 1997), (LI; LAI, 2001), (TSENG; FERZIGER, 2003) tentam resolver esse problema impondo explicitamente a condição de contorno, contudo isso faz com que o efeito interativo natural do método da fronteira imersa entre o fluido e a estrutura se perca. Apesar desse problema, características importantes do escoamento, como formação de onda de choque não são afetadas, conforme pode-se observar nas Figuras 6.49 a 6.54 e 6.64 a 6.66.

O objetivo desse trabalho foi estudar o uso do método da fronteira imersa para o cálculo das derivadas aerodinâmicas. Assim, é necessário verificar se o campo de pressão, responsável pelas forças aerodinâmicas sobre a estrutura está quantitativamente bem representado, pois estando, o método MFI-ELCF pode ser utilizado para estudos em aeroelasticidade, mesmo com esse problema no campo de velocidades. Portanto, para verificar quantitativamente os resultados, comparou-se os resultados obtidos pelo MFI-ELCF por intermédio da distribuição do coeficiente de pressão em torno da seção de aerofólio com resultados experimentais de Amick (1950) e AGARD (1979), conforme mostrado pelas Figuras 6.55 a 6.66.

O campo de pressão na superfície da seção de aerofólio foi obtido por interpolação bi-linear das quatro nós computacionais eulerianos mais próximos do ponto lagrangiano contendo respectivo ponto. Os resultados obtidos, mostrados pelas Figuras 6.55 a 6.66, demonstram que houve concordância quantitativa entre os resultados computacionais com os resultados experimentais, mostrando que o método desenvolvido é capaz de representar bem a distribuição de pressão sobre a superfície da seção de aerofólio. É importante observar que as ondas de choque também foram muito bem representadas pelo método numérico, conforme pode ser visto nas Figuras 6.64 a 6.66. Para ângulos de ataque maiores, como mostrado pelas Figuras 6.59 e 6.60, percebe-se que a magnitude da pressão próximo ao bordo de ataque é menor nos resultados computacionais, isso ocorre devido à falta de precisão de malha nessa região (ver Figura 6.60), contudo, para pequenas variações do ângulo de ataque os resultados ainda são muito bons. Levando em consideração os bons resultados obtidos pela distribuição de pressão, considera-se como validado o método numérico MFI-ELCF para resolver escoamentos ao redor de seções de aerofólios do tipo NACA0012 em regime subsônico e transônico.

Figura 6.31: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,3$, $\alpha = 0$ graus.

Figura 6.32: Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,3$, $\alpha = 0$ graus.

Figura 6.33: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,3$, $\alpha = 4$ graus.

Figura 6.34: Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,3$, $\alpha = 4$ graus.

Figura 6.35: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,4$, $\alpha = 0$ graus.

Figura 6.36: Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,4$, $\alpha = 0$ graus.

Figura 6.37: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,5$, $\alpha = 0$ graus.

Figura 6.38: Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,5$, $\alpha = 0$ graus.

Figura 6.39: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,5$, $\alpha = 4$ graus.

Figura 6.40: Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,5$, $\alpha = 4$ graus.

Figura 6.41: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,5$, $\alpha = 8$ graus.

Figura 6.42: Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,5$, $\alpha = 8$ graus.

Figura 6.43: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,6$, $\alpha = 0$ graus.

Figura 6.44: Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,6$, $\alpha = 0$ graus.

Figura 6.45: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,73$, $\alpha = 0$ graus.

Figura 6.46: Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,73$, $\alpha = 0$ graus.

Figura 6.47: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,75$, $\alpha = 0$ graus.

Figura 6.48: Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,75$, $\alpha = 0$ graus.

Figura 6.49: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,75$, $\alpha = 3$ graus.

Figura 6.50: Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,75$, $\alpha = 3$ graus.

Figura 6.51: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,75$, $\alpha = 4$ graus.

Figura 6.52: Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,75$, $\alpha = 4$ graus.

Figura 6.53: Campo do coeficiente de pressão C_p para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,8$, $\alpha = 0$ graus.

Figura 6.54: Campo do número de Mach local para a seção de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,8$, $\alpha = 0$ graus.

Figura 6.55: Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,3$, $\alpha = 0$ graus. Experimental: AGARD (1979).

Figura 6.56: Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,3$, $\alpha = 4$ graus. Experimental: AGARD (1979).

Figura 6.57: Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,4$, $\alpha = 0$ graus. Experimental: Amick (1950).

Figura 6.58: Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,5$, $\alpha = 0$ graus. Experimental: AGARD (1979). Computacional 1: $\Delta x_{min} = 0,004$; $\Delta y_{min} = 0,001$; Computacional 2: $\Delta x_{min} = 0,008$; $\Delta y_{min} = 0,002$.

Figura 6.59: Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,5$, $\alpha = 4$ graus. Experimental: AGARD (1979).

Figura 6.60: Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,5$, $\alpha = 8$ graus. Experimental: AGARD (1979). Computacional 1: $\Delta x_{min} = 0,008$; $\Delta y_{min} = 0,002$. Computacional 2: $\Delta x_{min} = 0,004$; $\Delta y_{min} = 0,001$.

Figura 6.61: Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,6$, $\alpha = 0$ graus. Experimental: Amick (1950).

Figura 6.62: Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,73$, $\alpha = 0$ graus. Experimental: Amick (1950).

Figura 6.63: Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,75$, $\alpha = 0$ graus. Experimental A: Amick (1950); Experimental B: AGARD (1979).

Figura 6.64: Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,75$, $\alpha = 3$ graus. Experimental: AGARD (1979).

Figura 6.65: Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,75$, $\alpha = 4$ graus. Experimental: AGARD (1979).

Figura 6.66: Coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012: $Ma_\infty = 0,8$, $\alpha = 0$ graus. Experimental: AGARD (1979).

Para assegurar convergência de malha, a Figura 6.58 mostra os resultados da simulação computacional do escoamento ao redor da seção de aerofólio NACA 0012 com $Ma_\infty = 0,5$ e $\alpha = 0$ usando duas malhas diferentes. Na primeira malha $\Delta_{xmin} = 0,008$ e $\Delta_{ymin} = 0,002$, enquanto que na segunda malha $\Delta_{xmin} = 0,004$ e $\Delta_{ymin} = 0,001$. A comparação entre os resultados numéricos juntamente com o experimental de AGARD (1979) mostram que há concordância e convergência de malha.

7 *Aerofólio Móvel e o Cálculo das Derivadas Aerodinâmicas*

*Sei que o Senhor defenderá
a causa do necessitado
e fará justiça aos pobres.
Com certeza os justos darão graças
ao teu nome,
e os homens íntegros viverão na tua presença.*

Salmo 140, versículos 12 e 13.

7.1 **Distribuição de Pressão na Superfície de um Aerofólio NACA0012 com Movimento Prescrito**

O crescente interesse no desenvolvimento de modelos computacionais para o estudo de aerodinâmica é motivado pela sua inerente flexibilidade, controle e pela evolução dos computadores. As técnicas de oscilação forçada têm sido amplamente utilizadas para determinar as características de estabilidade aerodinâmica para asas em túnel de vento, incluindo o estol dinâmico. O estol dinâmico é um fenômeno que afeta aerofólios, asas e rotores em escoamento não estacionário. Ele ocorre devido às mudanças, periódicas ou não, nas condições do escoamento de fluxo livre e/ou na variação do ângulo de ataque. Em alguns casos, tais como helicópteros em vôo, o estol dinâmico é um fenômeno intrínseco ao seu estado de operação. Revisões sobre métodos em Dinâmica de Fluidos Computacional para o estol dinâmico foram publicadas por Coton e Galbraith (1999), McCroskey, Carr e McIister (1976), Niven e Galbraith (1997), e Carta (1974). Em turbinas, ele é o resultado da turbulência atmosférica, camada limite da

terra, etc. Fatores que afetam o *estol dinâmico* são o número de Reynolds, o número de Mach, a forma geométrica da asa ou rotor. Também existem outros fatores, como os efeitos de vórtices, oscilações transversais, verticais ou rotacionais, etc.

O movimento periódico de arfagem no aerofólio induz uma variação periódica no ângulo de ataque. Quando essa oscilação ocorre em torno do ângulo de ataque médio, próximo ao valor de C_{Lmax} (estol estático) os fenômenos viscosos se tornam predominantes. Contudo, o fenômeno de separação de grande escala é amplamente um problema invíscido (FILIPPONE; SORENSEN, 1995). A descrição dos fenômenos físicos que atuam nesse caso é bem mais difícil. O fenômeno de estol dinâmico pode ser identificado pela curva de histerese, que varia com a frequência reduzida, (FILIPPONE; SORENSEN, 1995).

Estudos teóricos têm demonstrado que a separação invíscida (recirculação) pode ocorrer em escoamento rotacional como resultado da retardação prematura da velocidade na superfície da estrutura, causado pela vorticidade no escoamento. A separação invíscida tem sido observada em cálculos numéricos de escoamento passando ao redor de cilindros circulares (KUMAR; SALAS, 1985), cones circulares (MARCONI, 1983), asas delta (RAJ; SIKORA, 1984) e aerofólios (BARTON; PULLIAM, 1984). O escoamento de fluido real nunca é verdadeiramente invíscido. Apesar disso, em alguns casos os efeitos viscosos podem ser desprezados. Em muitos dos trabalhos reportados pela literatura, a precisão dos resultados é muito boa, considerando-se a hipótese de escoamento invíscido, e as soluções obtidas são representativas do escoamento físico de interesse (BARTON; PULLIAM, 1984). Existem muitos fenômenos físicos que causam a separação e a recirculação do escoamento. Em todos os casos, no qual a recirculação está presente, a vorticidade também deve estar presente. Então deve existir algum mecanismo que gera vorticidade no escoamento. A questão naturalmente reside na interpretação física desse escoamento na ausência de viscosidade física (BARTON; PULLIAM, 1984). Apesar da importância dos efeitos viscosos, as simulações computacionais modeladas por escoamento de fluido invíscido, homogêneo e compressível mostram resultados qualitativamente compatíveis com as características de estol dinâmico (BARTON; PULLIAM, 1984).

No caso da oscilação forçada, as perturbações não são induzidas pela variação das condições de voo, como realizado nos testes tradicionais (CARTA, 1974), ao invés, as perturbações são causadas pelos movimentos oscilatórios do aerofólio. Nesse trabalho, comparou-se os resultados das simulações computacionais, por meio do coeficiente de pressão e do coeficiente de força normal, com resultados obtidos por meio de experimentos realizados no Departamento de Engenharia de Materiais, Aeronáutica e Automobilística da Universidade de São Paulo, conforme descrito no trabalho de Bueno, Doricio, Marques, Paula, Catalano e Júnior (2007). A distribuição do coeficiente de pressão é utilizada para mostrar as características do estol dinâmico. O coeficiente de pressão C_p foi calculado por meio da seguinte equação:

$$C_p = \frac{\frac{p_i - p_\infty}{p_\infty}}{\frac{1}{2}\gamma M_\infty^2},$$

onde p_i é a pressão medida na região do ponto i da superfície do aerofólio e p_∞ é a pressão de fluxo livre.

A simulação computacional usa uma malha não uniforme com um domínio de 6×3 unidades adimensionais (u. a.). Cada célula computacional na região de maior refinamento possui tamanho 0.008×0.004 u. a., totalizando 231×248 células. Mais detalhes sobre os dados da simulação podem ser encontrados no Apêndice B. O centro de rotação do aerofólio é posicionado em 2,5 na direção x e 1,5 na direção y . O número de Mach do escoamento é $Ma = 0,059$. O aerofólio é rotacionado de forma senoidal no tempo, com frequência rotacional S_f e amplitude θ . O centro de rotação foi colocado na posição $1/4$ da corda (a mesma utilizada nos testes em túnel de vento). No método da fronteira imersa, a equação da posição da fronteira é dada por:

$$\varphi = \theta \sin(2\pi S_f t) + \alpha_m, \quad (7.1)$$

onde θ é o deslocamento angular máximo, α_m é o ângulo de ataque médio e t é o tempo, adimensionais.

As simulações computacionais foram realizadas para as frequências de 0,5 Hz, 1,0 Hz, 1,5 Hz e 2,0 Hz e amplitude angular de 15° em torno do ângulo de ataque médio de 15° , para es-

tudar a influência dos parâmetros (frequência e amplitude) no fenômeno do estol dinâmico. Os resultados computacionais foram comparados com resultados experimentais obtidos em túnel de vento aberto, conforme Bueno, Doricio, Marques, Paula, Catalano e Júnior (2007).

Figura 7.1: C_p para 0,5 e 1,0 Hz na posição de 1/4 da corda

Figura 7.2: C_p para 1,5 e 2,0 Hz na posição de 1/4 da corda

As Fig. 7.1 e Fig. 7.2 mostram o fenômeno da histerese no ponto de pressão localizado sobre a posição 1/4 da corda. Pode-se observar que a histerese aumenta conforme a frequência aumenta e que a queda de pressão é retardada com o aumento da frequência. E quando ocorre, a pressão sofre uma forte queda.

As Figuras 7.3 e 7.4 mostram os coeficientes de força normal C_N para as frequências de 0,5 Hz e 2 Hz. Ao comparar os resultados experimentais com os computacionais, verifica-se

Figura 7.3: Comparação do C_N obtidos pelos resultados computacionais e experimentais para 0,5 Hz.

Figura 7.4: Comparação do C_N obtidos pelos resultados computacionais e experimentais para 2,0 Hz.

que a histerese é maior nos resultados computacionais. A ausência de viscosidade ou outros fatores no método numérico podem ser responsáveis por essa diferença. Essas figuras também mostram os resultados experimentais para C_N no regime estacionário. No caso da frequência de 0,5 Hz, estão muito próximos dos resultados obtidos pelo regime não-estacionário para ângulos variando de 0° até 20° . A diferença é mais intensa quando a frequência é de 2 Hz, devido à presença do estol dinâmico.

O efeito dinâmico de recirculação pode ser observado na Fig. 7.5 por meio das linhas de

Figura 7.5: Detalhe do comportamento do escoamento sobre a seção de aerofólio móvel com linhas de corrente instantâneas nos ângulos: a) 15° , b) 21° , c) 30° , d) 19° , e) 15° , e f) 0° .

corrente. A figura Fig. 7.6 mostra a distribuição de pressão na superfície superior do aerofólio, em função da variação do ângulo de ataque. À medida que o ângulo de ataque aumenta há aumento do coeficiente de pressão que torna-se máximo próximo do ângulo máximo. Quando do retorno, há uma queda abrupta do coeficiente de pressão (estol dinâmico) e em seguida uma recuperação gradual, mas não consegue recuperação total, ou seja, pode-se notar que com o aumento da frequência o efeito do estol dinâmico aparece significativamente durante o retorno do aerofólio da posição de ângulo máximo para a posição de ângulo mínimo. Essa diferença é conhecida como histerese e é bem evidente nas Fig. 7.1 e Fig. 7.2. É interessante notar que as bordas inferiores nas Fig. 7.6a-d apresentam pequenas oscilações devido à captura do contorno da fronteira pela malha estruturada durante o movimento angular do aerofólio. Outra observação importante é que a perda de sustentação é retardada com o aumento da frequência, conforme mencionado anteriormente.

Figura 7.6: Na Simulação Computacional: Pressão na superfície superior para 0,5; 1,0; 1,5 e 2,0 Hz

Figura 7.7: Comparação da pressão na superfície superior entre os resultados numéricos e experimentais: a) Experimental 0,5 Hz; b) Computacional 0,5 Hz; c) Experimental 2,0 Hz; d) Computacional 2,0 Hz.

A Fig. 7.6a mostra que o fenômeno ocorre, na posição de 1/4 da corda, próximo do ângulo de 21° . Já a Fig. 7.6b mostra que ocorre próximo ao ângulo de 26° e com histerese maior. As Fig. 7.6c e Fig. 7.6d mostram que o estol ocorre próximo ao ângulo de 30° com histereses ainda maiores. A comparação entre os resultados computacionais e experimentais apresenta valores pertinentes para o ângulo de recuperação e valores de C_p máximo, de acordo com as tabelas 7.1 e 7.2. Pode-se observar ainda, por meio das Figuras 7.6 e 7.7, que a simulação computacional exibe, qualitativamente, as mesmas características de estol apresentadas pelos resultados experimentais, apesar de existir diferenças na forma da superfície de pressão em torno do valor máximo do coeficiente de pressão.

Tabela 7.1: Resultados para $-C_p$ máximo.

Frequência em Hz	0,5	1	1,5	2
Computacional	1,625	2,0	2,17	2,28
Experimental de Bueno et al. (2007)	1,45	-	-	1,98

Tabela 7.2: Ângulo de estol.

Frequência em Hz	0,5	1	1,5	2
Computacional	21°	25°	$28,7^\circ$	29°
Experimental de Bueno et al. (2007)	20°	-	-	$26,2^\circ$

Os resultados apresentados pelas simulações indicam que o método computacional utilizado pode ser aplicado para simulação do estol dinâmico sem considerar o efeito de camada limite. O modelo testado reproduz o fenômeno tão bem como os apresentados por outros autores ((CARTA, 1974), (COTON; GALBRAITH, 1999) e (MCCROSKEY, 1976)). O modelo computacional usou condições de contorno externas sem reflexão, baseado nas invariantes de Riemann, (BUONOMO, 2004) e não considerou alguns aspectos físicos como viscosidade, camada limite e turbulência. Também, as características do modelo computacional apresenta

comportamento bidimensional, enquanto nos testes de túnel de vento o modelo é tridimensional. Como em todas as simulações a eficiência do código está fortemente relacionada à precisão do esquema computacional e do refinamento da malha, algumas alternativas podem ser adotadas para melhorar a eficiência: malha bloco estruturada, multigrid, processamento paralelo ou distribuído, etc. Além destes fatores principais, se a superfície imersa apresentar alguma região “fina” ou pontiaguda poderá exigir esquemas mais complexos tal como refinamento adaptativo, já que são necessárias pelo menos quatro células computacionais entre duas fibras para garantir a precisão da malha-estrutura. Isso é um ponto negativo do método da fronteira imersa.

Outro meio de se estudar as previsões dos fenômenos aerodinâmicos, como *flutter*, é comparando a variação dos coeficientes de sustentação e de momento, calculado na posição $\frac{1}{4}$ da corda, contra o ângulo de ataque. Isso foi feito utilizando-se os resultados experimentais de Landon (1982). Para tal, foram realizadas simulações seguindo o esquema mostrado pela Tabela 7.3. Os detalhes sobre a simulação estão descritos no Apêndice B.

Tabela 7.3: Simulações de Aerofólio Móvel.

Problema	Frequência S_f	Ma_∞	α_m	θ	Tipo de Movimento
P1	1,8 Hz	0,58	9,0	9,55	Quase estacionário
P2	1,8 Hz	0,745	0,09	5,0	Quase estacionário
P3	50,32 Hz	0,6	2,89	2,41	Alta Frequência
P4	50,32 Hz	0,755	0,016	2,51	Alta Frequência

Na tabela 7.3, α_m é o ângulo de ataque médio do movimento e θ é a amplitude do movimento descrito pela seguinte equação:

$$\varphi = \theta \sin(2\pi S_f t) + \alpha_m . \quad (7.2)$$

Os dois primeiros casos simulados, mostrados na Tabela 7.3, têm comportamento classificado como quase estacionário devido à baixa frequência de oscilação do aerofólio. No primeiro (P1), há uma grande variação do ângulo de ataque que chega a um máximo de 18 graus, mas

com escoamento a $Ma_\infty = 0,58$. No segundo caso (P2), o ângulo de ataque varia bem menos, com máximo de 5 graus e escoamento a $Ma_\infty = 0,745$, que é o valor de Mach na iminência de escoamento transônico para ângulo de ataque de zero graus. O caso P3 é similar ao P1, o ângulo de ataque máximo é de 5,3 graus com escoamento a $Ma_\infty = 0,6$ e o caso P4 é similar ao caso P2, onde o ângulo de ataque varia bem menos chegando a 2,51 graus e $Ma_\infty = 0,755$. Os casos P3 e P4 têm comportamento de alta frequência.

Os gráficos mostrados pelas Figuras 7.12 a 7.19 apresentam os resultados da simulação computacional usando o método da fronteira imersa comparado aos resultados experimentais de (LANDON, 1982). Na figura 7.12 observa-se perfeita concordância entre os resultados numéricos com os experimentais para ângulos de ataque menores que 7 graus. O estol estático se apresenta nos resultados experimentais para valores de ângulo de ataque maior que 7 graus, já nos resultados computacionais do método da fronteira imersa esse efeito só se apresenta para ângulos de ataque maiores que 12 graus e a recuperação se dá por volta do ângulo de 8 graus. A formação da onda de choque e a formação de vórtices podem ser observadas em mais detalhes na Figura 7.8. Analogamente, pela figura 7.13, o coeficiente de momento é bem representado pelo método da fronteira imersa até atingir um ângulo próximo a 5 graus. A partir desse ponto, os efeitos viscosos se tornam importantes e a boa representatividade do fenômeno de estol é prejudicada.

A comparação entre os resultados computacionais e experimentais mostrados pelas figuras 7.14 e 7.15 mostram que há boa concordância para o coeficiente de sustentação. Contudo, para o coeficiente de momento, calculado sobre a posição $\frac{1}{4}$ da corda não há concordância quando o ângulo de ataque está fora do intervalo $[-2; 1]$. Nesse caso, pode-se observar, por meio da figura 7.9, que não houve formação de vórtices, contudo há formação de onda de choque no escoamento. No caso do escoamento com alta frequência na oscilação do aerofólio, mostrado pelas figuras 7.16 e 7.17, há concordância entre os resultados numéricos e computacionais para o coeficiente de sustentação. No caso do coeficiente de momento, há uma diferença na histerese a partir do ângulo de 3,5 graus. Nesse caso, não houve formação de vórtice e nem de onda de choque, conforme pode ser visto na figura 7.10.

Figura 7.8: Coeficiente de Pressão e Linhas de Corrente para o problema P1: A) $10,06^\circ$ B) $12,16^\circ$ C) $14,10^\circ$ D) $18,04^\circ$.

Figura 7.9: Coeficiente de Pressão e Linhas de Corrente para o problema P2: A) $0,65^\circ$ B) $4,94^\circ$ C) $-1,15^\circ$ D) $-4,9^\circ$.

Figura 7.10: Coeficiente de Pressão e Linhas de Corrente para o problema P3: A) $5,18^\circ$ B) $2,10^\circ$ C) $0,6^\circ$ D) $2,8^\circ$.

Figura 7.11: Coeficiente de Pressão e Linhas de Corrente para o problema P4: A) $-0,46^\circ$ B) $1,96^\circ$ C) $0,95^\circ$ D) $-2,1^\circ$.

Figura 7.12: Comparação entre resultado experimental e computacional usando o coeficiente de sustentação, com $Ma_\infty = 0,58$, $\alpha_m = 9,0$, $\alpha_0 = 9,55$ e frequência de $1,8Hz$.

Figura 7.13: Comparação entre resultado experimental e computacional usando o coeficiente de momento, com $Ma_\infty = 0,58$, $\alpha_m = 9,0$, $\alpha_0 = 9,55$ e frequência de $1,8Hz$.

Figura 7.14: Comparação entre resultado experimental e computacional usando o coeficiente de sustentação, com $Ma_\infty = 0,745$, $\alpha_m = 0,09$, $\alpha_0 = 5,0$ e frequência de $1,8Hz$.

Figura 7.15: Comparação entre resultado experimental e computacional usando o coeficiente de momento, com $Ma_\infty = 0,745$, $\alpha_m = 0,09$, $\alpha_0 = 5,0$ e frequência de $1,8Hz$.

Figura 7.16: Comparação entre resultado experimental e computacional usando o coeficiente de sustentação, com $Ma_\infty = 0,6$, $\alpha_m = 2,89$, $\alpha_0 = 2,41$ e frequência de $50,32Hz$.

Figura 7.17: Comparação entre resultado experimental e computacional usando o coeficiente de momento, com $Ma_\infty = 0,6$, $\alpha_m = 2,89$, $\alpha_0 = 2,41$ e frequência de $50,32Hz$.

Figura 7.18: Comparação entre resultado experimental e computacional usando o coeficiente de sustentação, com $Ma_{\infty} = 0,755$, $\alpha_m = 0,016$, $\alpha_0 = 2,51$ e frequência de $50,32Hz$.

Figura 7.19: Comparação entre resultado experimental e computacional usando o coeficiente de momento, com $Ma_{\infty} = 0,755$, $\alpha_m = 0,016$, $\alpha_0 = 2,51$ e frequência de $50,32Hz$.

As Figuras 7.18 e 7.19 mostram a comparação dos resultados para o problema P4. Nesse caso, não há boa concordância entre os resultados, contudo a histerese do coeficiente de sustentação obtida pelo método da fronteira imersa é um pouco menor do que a dos resultados experimentais. Nesse caso, o coeficiente de momento foi bem representado. Observado os resultados mostrados pela figura 7.11, nota-se que não houve formação de vórtices.

A ausência de onda de choque em alguns dos resultados numéricos é devido ao efeito da condição de contorno externa aberta. Os resultados experimentais foram obtidos em túnel de vento fechado, enquanto que os resultados numéricos foram obtidos usando condição de contorno externa aberta, ou seja, representando uma atmosfera. Os resultados numéricos apresentaram maior diferença no coeficiente de momento do que no de sustentação. É bastante evidente na Figura 7.15 o efeito da precisão de malha, pois a magnitude dos resultados é bastante pequena e as oscilações nos resultados numéricos se torna bem evidente. Essas oscilações ocorrem quando as partículas que representam a fronteira imersa caminham de uma célula para a outra da malha do domínio euleriano. Simulações computacionais permitiram verificar que esse efeito é reduzido significativamente com o refinamento da malha. Com base nos resultados obtidos, pode-se concluir que na ausência de choque ou vórtices o método da fronteira imersa invíscido é capaz de representar bem as propriedades aerodinâmicas do escoamento para oscilações em que a influência da viscosidade não é significativa.

7.2 Cálculo das Derivadas Aerodinâmicas

Os movimentos auto-induzidos provocados pelas forças aerodinâmicas podem causar um fenômeno de instabilidade denominado *flutter*. Essa instabilidade é responsável por gerar movimentos de grande amplitude na estrutura da asa ou mesmo quebrá-la. Por esse motivo, a estabilidade de *flutter* é um critério importante do projeto de uma estrutura aeronáutica.

Durante os últimos anos, vários métodos numéricos têm sido desenvolvidos para complementar os estudos realizados experimentalmente. Os métodos numéricos permitem a pré-visualização dos fenômenos aerodinâmicos que aparecem no modelo antes dele ser testado em

túnel. Assim, a realização preliminar de testes por cálculos numéricos pode reduzir significativamente os custos financeiros.

A qualidade dos cálculos em dinâmica dos fluidos computacional não depende somente da qualidade do método numérico empregado, mas fortemente da modelagem. Nesse trabalho é empregado o método da fronteira imersa para modelar a estrutura que representa uma seção de aerofólio do tipo NACA0012 para o estudo dos fenômenos gerados devido ao movimento oscilatório dessa estrutura.

Considerando o *flutter* como um problema de estabilidade linear, assume-se que o movimento da estrutura pode ser representado como uma composição de movimentos harmônicos. Para a análise aeroelástica da seção típica assume-se, também, dois tipos de deformações: torsional e vertical. Baseado na teoria analítica de Theodorsen (1949), uma teoria modificada é introduzida por Starossek (1993). Essa teoria permite calcular as derivadas aerodinâmicas para análise de *flutter* (*Flutter Derivatives*) numericamente ou experimentalmente ao invés de fazer isso analiticamente. Para um sistema com dois graus de liberdade, a equação do movimento pode ser escrita como segue:

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{F}_L(t), \quad (7.3)$$

onde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} h(t) \\ \alpha(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_L(t) = \begin{bmatrix} L(t) \\ M(t) \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{K}$ são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente. $\mathbf{x}(t)$ é o vetor de deslocamento e $\mathbf{F}_L(t)$ é o vetor de momento de arfagem e força de sustentação aerodinâmica. Conforme Starossek (1993), as forças aerodinâmicas podem ser expressas usando as seguintes equações linearizadas:

$$L(t) = \pi \rho k^2 u_\infty^2 [c_{hh}h(t) + bc_{h\alpha}\alpha(t)], \quad M(t) = \pi \rho k^2 u_\infty^2 [bc_{\alpha h}h(t) + b^2 c_{\alpha\alpha}\alpha(t)].$$

Os coeficientes complexos de força adimensionais são dados por $c_{mn} = \bar{c}_{mn} + i \bar{\bar{c}}_{mn}$, onde

$\bar{c}_{mn}$ e $\bar{\bar{c}}_{mn}$ são números reais e i é a unidade imaginária. Além disso, $k = \frac{\omega b}{u_\infty}$ é a frequência reduzida, b é a metade do comprimento da corda, u_∞ é a velocidade do escoamento livre, ω é a frequência do movimento estrutural e ρ é a densidade do escoamento livre. Os coeficientes c_{mn} são funções da frequência reduzida k . O primeiro índice (m) descreve a direção da força e o segundo índice (n) indica o movimento causado pela força.

Outra forma de se escrever as forças aerodinâmicas (SIMIU; SCANLAN, 1996) é a seguinte:

$$L(t) = \rho u_\infty^2 b \left[\frac{k H_1^*(k)}{u_\infty} \frac{\partial h(t)}{\partial t} + \frac{k H_2^*(k) b}{u_\infty} \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} + k^2 H_3^*(k) \alpha(t) + \frac{k^2 H_4^*(k)}{b} h(t) \right], \quad (7.4)$$

$$M(t) = \rho u_\infty^2 b^2 \left[\frac{k A_1^*(k)}{u_\infty} \frac{\partial h(t)}{\partial t} + \frac{k A_2^*(k) b}{u_\infty} \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} + k^2 A_3^*(k) \alpha(t) + \frac{k^2 A_4^*(k)}{b} h(t) \right], \quad (7.5)$$

onde os coeficientes H_i^* e A_i^* são as derivadas aerodinâmicas conforme a abordagem de Simiu e Scanlan (1996). As derivadas aerodinâmicas são funções da frequência reduzida e, na prática, procura-se pelos coeficientes aerodinâmicos H_i^* e A_i^* . As equações (7.4) e (7.5) mostram, claramente, a hipótese de dependência linear das forças do escoamento atuando sobre o aerofólio em relação à velocidade e à posição das variáveis do deslocamento h e α .

Devido à expansão linear das funções de força das equações (7.4) e (7.5), as derivadas aerodinâmicas H_1^* e A_1^* associadas ao movimento h podem ser medidas dos experimentos ou simulações de movimento forçado a uma frequência reduzida fixa k . Por exemplo, considerando apenas o movimento de rotação, a equação do movimento é dada por:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin \omega t + \alpha_m. \quad (7.6)$$

Substituindo a equação (7.6) nas equações (7.4) e (7.5), e considerando $k = \frac{\omega b}{u_\infty}$ e $\alpha_m = 0$, obtém-se:

$$\frac{L(t)}{\alpha_0 k^2 \rho u_\infty^2 b} = H_2^* \cos \omega t + H_3^* \sin \omega t, \quad (7.7)$$

$$\frac{M(t)}{\alpha_0 k^2 \rho u_\infty^2 b^2} = A_2^* \cos \omega t + A_3^* \sin \omega t. \quad (7.8)$$

Por outro lado, considerando-se apenas o movimento de oscilação vertical, modelado pela equação:

$$h(t) = h_0 \sin \omega t + h_m . \quad (7.9)$$

e substituindo a equação do movimento (7.9) nas equações (7.4) e (7.5), e considerando $k = \frac{\omega b}{u_\infty}$ e $h_m = 0$, obtém-se:

$$\frac{L(t)}{h_0 k^2 \rho u_\infty^2} = H_1^* \cos \omega t + H_4^* \sin \omega t , \quad (7.10)$$

$$\frac{M(t)}{h_0 k^2 \rho u_\infty^2 b} = A_1^* \cos \omega t + A_4^* \sin \omega t . \quad (7.11)$$

Portanto, H_3^* e A_3^* podem ser calculadas dos componentes do sinal de sustentação e torque, respectivamente, usando o sinal em fase com a oscilação. Enquanto que H_2^* e A_2^* podem ser obtidos usando o componente fora de fase dos sinais de sustentação e torque, respectivamente. O mesmo vale para as outras derivadas. Para explicar melhor isso, considere a seguinte equação:

$$A(t) \sin [\omega t + \phi(t)] = I(t) \sin \omega t + Q(t) \cos \omega t , \quad (7.12)$$

onde $\phi(t)$ é o ângulo de fase, ω é a frequência angular. As funções $I(t)$ e $Q(t)$ são dadas por:

$$I(t) = A(t) \cos \phi(t) ,$$

$$Q(t) = A(t) \sin \phi(t) .$$

Se considerarmos que a força $L(t)$ pode ser escrita como uma função periódica da forma:

$$L(t) = L_0 \sin [\omega t + \phi(t)] ,$$

então, substituindo-a na equação (7.7) e comparando com a equação (7.12) temos:

$$\frac{L_0 \sin [\omega t + \phi(t)]}{\alpha_0 k^2 \rho u_\infty^2 b} = H_2^* \cos \omega t + H_3^* \sin \omega t ,$$

$$A(t) \sin [\omega t + \phi(t)] = I(t) \sin \omega t + Q(t) \cos \omega t .$$

portanto, obtém-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{L_0}{\alpha_0 k^2 \rho u_\infty^2 b} , \\ H_2^* &= Q(t) = A(t) \sin \phi(t) = \frac{L_0}{\alpha_0 k^2 \rho u_\infty^2 b} \sin \phi(t) , \\ H_3^* &= I(t) = A(t) \cos \phi(t) = \frac{L_0}{\alpha_0 k^2 \rho u_\infty^2 b} \cos \phi(t) . \end{aligned}$$

Usando o mesmo procedimento determina-se o valor de todas as derivadas:

- Considerando-se apenas o movimento rotacional definido pela equação (7.6) obtém-se:

$$\begin{aligned} H_2^* &= \frac{L_0}{\alpha_0 k^2 \rho u_\infty^2 b} \sin \phi_L(t) , & H_3^* &= \frac{L_0}{\alpha_0 k^2 \rho u_\infty^2 b} \cos \phi_L(t) , \\ A_2^* &= \frac{M_0}{\alpha_0 k^2 \rho u_\infty^2 b^2} \sin \phi_M(t) , & A_3^* &= \frac{M_0}{\alpha_0 k^2 \rho u_\infty^2 b^2} \cos \phi_M(t) , \end{aligned}$$

onde L_0 é a amplitude do sinal da força de sustentação e $\phi_L(t)$ é o ângulo de fase desta força. E M_0 é a amplitude do sinal do momento e $\phi_M(t)$ é o seu ângulo de fase.

- Considerando-se apenas o movimento de translação vertical definido pela equação (7.9) obtém-se:

$$\begin{aligned} H_1^* &= \frac{\bar{L}_0}{h_0 k^2 \rho u_\infty^2} \sin \phi_{\bar{L}}(t) , & H_4^* &= \frac{\bar{L}_0}{h_0 k^2 \rho u_\infty^2} \cos \phi_{\bar{L}}(t) , \\ A_1^* &= \frac{\bar{M}_0}{h_0 k^2 \rho u_\infty^2 b} \sin \phi_{\bar{M}}(t) , & A_4^* &= \frac{\bar{M}_0}{h_0 k^2 \rho u_\infty^2 b} \cos \phi_{\bar{M}}(t) , \end{aligned}$$

onde $\bar{L}_0$ é a amplitude do sinal da força de sustentação e $\phi_{\bar{L}}(t)$ é o seu ângulo de fase. E $\bar{M}_0$ é a amplitude do sinal do momento e $\phi_{\bar{M}}(t)$ é o seu ângulo de fase.

A simulação deve ser repetida para cada frequência reduzida k de interesse para se construir o gráfico que relaciona as derivadas aerodinâmicas com a velocidade reduzida:

$$u_{red} = \frac{\pi}{k} .$$

Theodorsen (1949) desenvolveu um método analítico onde as derivadas aerodinâmicas são determinadas comparando-se o corpo com uma placa plana em um escoamento potencial. A placa plana tem as mesmas características estruturais de um corpo oscilante e as derivadas são

dadas em termos da função de circulação de Theodorsen $C(k) = F(k) + iG(k)$, por exemplo, como segue:

$$\begin{aligned} H_1^* &= -\frac{\pi F(k)}{2k}, & H_2^* &= -\frac{\pi}{8k} \left[1 + F(k) + \frac{2G(k)}{k} \right], \\ H_3^* &= -\frac{\pi}{4k^2} \left[F(k) - \frac{kG(k)}{2} \right], & H_4^* &= \frac{\pi}{4} \left[1 + \frac{2G(k)}{k} \right], \\ A_1^* &= \frac{\pi F(k)}{8k}, & A_2^* &= -\frac{\pi}{32k} \left[1 - F(k) - \frac{2G(k)}{k} \right], \\ A_3^* &= \frac{\pi}{16k^2} \left[F(k) - \frac{kG(k)}{2} \right], & A_4^* &= -\frac{\pi}{8} \frac{G(k)}{k}. \end{aligned}$$

onde $F(k)$ e $G(k)$ podem ser representadas por funções de Bessel, ou de Hänkel, de primeira e segunda classe e de ordem zero e um, como segue:

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{J_1(J_1 + Y_0) + Y_1(Y_1 - J_0)}{(J_1 + Y_0)^2 + (Y_1 - J_0)^2}, \\ G(k) &= -\frac{Y_1 Y_0 + J_1 J_0}{(J_1 + Y_0)^2 + (Y_1 - J_0)^2}. \end{aligned}$$

Essas funções têm importância fundamental na teoria de aerofólio oscilante e são mostradas graficamente na Figura 7.20 e estão tabeladas no Apêndice D.

Figura 7.20: Funções F e G em função de $\frac{1}{k}$.

Os resultados teóricos apresentados por Theodorsen (1949) representam a solução para um aerofólio de espessura zero (placa plana). Portanto, eles são soluções de um problema que não é totalmente equivalente ao problema resolvido nesse trabalho. Assim, não se espera boa concordância entre os resultados numéricos calculados pelo método da fronteira imersa

com os resultados teóricos. Apesar disso, os resultados teóricos servem para uma comparação qualitativa. Para aproximar melhor os resultados teóricos da placa plana com um aerofólio NACA0012, Scanlan e Tomko (1971) propuseram uma correção dos valores teóricos por meio de um fator de $\frac{4,54}{2\pi}$ para levar em consideração as diferenças geométricas entre eles.

Todas as simulações computacionais foram realizadas usando $Ma_\infty = 0,3$ que representa um escoamento praticamente incompressível, cuja solução é bem próxima a de um escoamento potencial. Foi utilizado amplitude de oscilação de arfagem valendo 2 e 5 graus, e frequências variando no intervalo de 5 a 50 Hz. Utilizou-se um domínio computacional de 3×5 unidades adimensionais usando uma malha não uniforme com $\delta_x = \delta_y = 0,0045$ na região mais fina de interesse do domínio Euleriano. O perfil de aerofólio, modelado pela fronteira imersa, tem centro de rotação na posição $\frac{1}{4}$ da corda. Para mais detalhes, ver Apêndice B.

A Figura 7.21 mostra um gráfico comparando o sinal (função) de movimento angular realizado pelo perfil de aerofólio juntamente com o coeficiente de sustentação e o outro mostra, em mais detalhes, o coeficiente de sustentação e de momento para frequência de oscilação de 5Hz e amplitude de 2 graus. Por outro lado, a Figura 7.22 mostra os resultados obtidos para o coeficiente de sustentação e de momento de forma análoga à mostrada pela Figura 7.21, mas com frequência de oscilação de 5Hz e amplitude de 5 graus. É evidente nesses gráficos que a sustentação e o momento se comportam como funções periódicas e que podem ser aproximadas por funções transcendentes baseadas em senos e cossenos. Também pode ser verificado que, para frequências menores, a magnitude do coeficiente de momento é bem pequena quando comparada aos resultados das simulações com frequências maiores, mostrada pelas Figuras 7.23 e 7.24. Ambas as últimas figuras mostram os resultados para frequência de oscilação de 50Hz. Outro ponto importante que pode ser observado nesses gráficos, em especial ao mostrado pela Figura 7.24, é o atraso da resposta da sustentação e do momento em relação ao movimento prescrito da estrutura. Esse atraso é importante para determinar os efeitos aerodinâmicos devido ao *flutter* e assim possibilitar o estudo das características aeroelásticas do aerofólio. O ângulo de fase pode ser obtido facilmente por meio do atraso da resposta no tempo.

Os gráficos mostrados na Figura 7.25 permitem uma comparação qualitativa dos resultados numéricos com o teórico para as derivadas aerodinâmicas, com amplitude de oscilação de 2 graus. Na Figura 7.26 são mostrados gráficos similares aos da Figura 7.25, contudo a amplitude de oscilação nesse caso é de 5 graus. Estudando os gráficos, observa-se que há boa concordância entre os resultados numéricos com os teóricos para as derivadas H_2^* , H_3^* e A_3^* , que representam, respectivamente, o efeito da velocidade angular sobre a sustentação, o efeito do ângulo de ataque sobre a sustentação e o efeito do ângulo de ataque sobre o momento. Essa boa concordância entre os resultados ocorre tanto para a amplitude de oscilação de 2 graus quanto para a amplitude de oscilação de 5 graus. Contudo, o efeito da velocidade angular sobre o momento, representado pela derivada A_2^* , não apresenta concordância com os resultados teóricos, isso é previsto pelos trabalhos de Le Maître, Scanlan e Knio (2003) e Scanlan e Tomko (1971). Apesar dessa diferença, o Método da Fronteira Imersa desenvolvido nesse trabalho conseguiu representar significativamente bem os efeitos das derivadas H_2^* , H_3^* e A_3^* .

As derivadas aerodinâmicas podem ser usadas para a previsão de *flutter* por meio do modelo de expansão linear das forças aerodinâmicas (ROBERTSON, 2003). Esse método é utilizado para determinar a velocidade reduzida crítica de *flutter* para um modelo aeroelástico, considerando que a sustentação e o momento de arfagem podem ser representados por funções lineares. Nesse método, assume-se que as forças e o momento são dependentes do deslocamento angular e vertical da estrutura, da velocidade e também das derivadas aerodinâmicas associadas ao corpo. As derivadas aerodinâmicas são proporcionais à variação de sustentação e de momento com o deslocamento e com a velocidade. Podem ser calculadas conforme realizado anteriormente para H_2^* , H_3^* , A_2^* e A_3^* . De acordo com (ROBERTSON, 2003), o sistema aeroelástico pode ser expresso em termos do movimento estrutural do corpo, juntamente com a sustentação e o momento de arfagem devido às forças aerodinâmicas sobre a estrutura. Assim as equações aeroelásticas podem ser expressas como:

$$\frac{\partial^2 h(t)}{\partial t^2} + 2\zeta_h k_h \frac{\partial h(t)}{\partial t} + k_h^2 h(t) = \frac{1}{n_h} \left[WH_1^* \frac{\partial h(t)}{\partial t} + WH_2^* \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} + W^2 H_3^* \alpha(t) + W^2 H_4^* h(t) \right], \quad (7.13)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha(t)}{\partial t^2} + 2\zeta_\alpha k_\alpha \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} + k_\alpha^2 \alpha(t) = \frac{1}{n_\alpha} \left[WA_1^* \frac{\partial h(t)}{\partial t} + WA_2^* \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} + W^2 A_3^* \alpha(t) + W^2 A_4^* h(t) \right], \quad (7.14)$$

onde $k_h = \frac{\omega_h b}{u_\infty}$, $k_\alpha = \frac{\omega_\alpha b}{u_\infty}$. ω_h e ω_α representam as frequências naturais de translação e de rotação da estrutura. Considerando que os deslocamentos de translação e de rotação podem ser expressos por:

$$h(t) = A_h e^{iWt}, \quad (7.15)$$

$$\alpha(t) = A_\alpha e^{iWt}, \quad (7.16)$$

e substituindo essas equações (7.15) e (7.16) nas equações (7.13) e (7.14), resulta no seguinte equacionamento para a frequência W :

$$\begin{aligned} \left[-W^2 + 2\zeta_h k_h W i + k_h^2 - \frac{1}{n_h} W^2 H_1^* i - \frac{1}{n_h} W^2 H_4^* \right] A_h - \left[\frac{1}{n_h} W^2 H_2^* i + \frac{1}{n_y} W^2 H_3^* \right] A_\alpha &= 0, \\ \left[-\frac{1}{n_\alpha} W^2 A_1^* i - \frac{1}{n_\alpha} W^2 A_4^* \right] A_h + \left[-W^2 + 2\zeta_\alpha k_\alpha W i + k_\alpha^2 - \frac{1}{n_\alpha} W^2 A_2^* i - \frac{1}{n_\alpha} W^2 A_3^* \right] A_\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Essas equações podem ser expressas em uma forma matricial, como segue:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_h \\ A_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.17)$$

onde:

$$\begin{aligned} A &= -W^2 + 2\zeta_h k_h W i + k_h^2 - \frac{1}{n_h} W^2 H_1^* i - \frac{1}{n_h} W^2 H_4^*, \\ B &= -\frac{1}{n_h} W^2 H_2^* i - \frac{1}{n_y} W^2 H_3^*, \\ C &= -\frac{1}{n_\alpha} W^2 A_1^* i - \frac{1}{n_\alpha} W^2 A_4^*, \\ D &= -W^2 + 2\zeta_\alpha k_\alpha W i + k_\alpha^2 - \frac{1}{n_\alpha} W^2 A_2^* i - \frac{1}{n_\alpha} W^2 A_3^*. \end{aligned}$$

Para o sistema linear ter solução não trivial o determinante da matriz do sistema (7.17) deve ser igual a zero, ou seja:

$$AD - CB = 0. \quad (7.18)$$

A solução do sistema é calculada com o objetivo de determinar o valor de W que satisfaz a equação (7.18). W será um número complexo da forma $W = W_R + iW_I$ onde a parte real representa a frequência das oscilações e a parte imaginária de W indica o quanto a solução está crescendo ou decaindo. Um valor positivo para W_I implica em uma solução amortecida

e um valor negativo implica em soluções com oscilações crescentes. Quando $W_I = 0$ tem-se a velocidade reduzida crítica de *flutter*. Essa análise permite determinar a velocidade de *flutter* e será deixada como sugestão para estudos futuros.

Figura 7.21: Coeficiente de Sustentação, Coeficiente de Momento e Ângulo de Ataque para frequência de $5Hz$ e amplitude de 2 graus.

Figura 7.22: Coeficiente de Sustentação, Coeficiente de Momento e Ângulo de Ataque para frequência de $5Hz$ e amplitude de 5 graus.

Figura 7.23: Coeficiente de Sustentação, Coeficiente de Momento e Ângulo de Ataque para frequência de 50Hz e amplitude de 2 graus.

Figura 7.24: Coeficiente de Sustentação, Coeficiente de Momento e Ângulo de Ataque para frequência de 50Hz e amplitude de 5 graus.

Figura 7.25: Derivadas aerodinâmicas para rotação com amplitude de 2° .

Figura 7.26: Derivadas aerodinâmicas para rotação com amplitude de 5° .

8 *Conclusões*

Nesse trabalho desenvolveu-se um método de fronteira imersa para condições de contorno com escorregamento livre (denominado MFI-ELCF) utilizando discretização espacial pelo método de Steger-Warming de ordem dois com limitador de fluxo do tipo Min-Mod e discretização no tempo por meio do método de Runge-Kutta de ordem quatro. O código foi verificado utilizando o método das soluções manufaturadas para o domínio euleriano e verificado utilizando o problema de reflexão de choque oblíquo e o escoamento ao redor de uma seção quadrada para o domínio lagrangiano. A validação do método MFI-ELCF foi realizada por meio de comparações qualitativas e quantitativas com resultados computacionais e experimentais de escoamento ao redor de seções circulares e ao redor de uma seção de aerofólio NACA0012.

Os resultados obtidos, demonstram um bom método para estudos em aeroelasticidade. O método representou bem a distribuição de pressão sobre a superfície da seção de aerofólio. Contudo, o problema de redução da velocidade na região adjacente à superfície está presente, mas interferindo de forma imperceptível na força (pressão) que atua sobre a estrutura. E portanto, para o caso estático, os coeficientes aerodinâmicos foram bem representados. Para o caso dinâmico, estudou-se o escoamento ao redor da seção aerofólio não estacionário com oscilação do ângulo de ataque. Para número de Mach muito baixo foi realizada uma comparação entre resultados experimentais (BUENO, 2007) e o método numérico. Essa comparação mostrou que método da fronteira imersa foi capaz de capturar alguns efeitos de estol dinâmico em grande escala (efeitos inerciais), mas não foi possível verificar a qualidade da previsão porque os efeitos viscosos não foram considerados. Mostrou também que, para uma faixa de ângulos de ataques pequenos, há boa concordância entre os resultados computacionais com os experimentais. Para

números de Mach maiores que 0,3 comparou-se os resultados para os coeficientes de sustentação e de momento com dados experimentais (LANDON, 1982). Essa comparação mostrou que o método da fronteira imersa representou bem o coeficiente de sustentação e de momento para pequenas variações do ângulo de ataque. Devido a magnitude do coeficiente de momento ser muito baixa, um refinamento melhor da malha se faz necessário.

Foram calculadas as derivadas aerodinâmicas (também conhecidas na literatura como *flutter derivatives*) e comparadas com os resultados teóricos de Theodorsen para um aerofólio de espessura zero (placa plana). Os resultados obtidos pelo método da fronteira imersa sobre o coeficiente de sustentação e de momento se comportaram conforme esperado, apresentando característica de uma função periódica que pode ser aproximada por senos e cossenos. A comparação das derivadas com os resultados teóricos demonstraram boa concordância, exceto pelo efeito do ângulo de ataque sobre o coeficiente de momento. A discordância nesse caso já foi reportada e discutida em alguns trabalhos na literatura, como Le Maître, Scanlan e Knio (2003) que justificam essa diferença devido às diferenças aerodinâmicas entre a placa plana e a seção de aerofólio. Apesar dos bons resultados obtidos, o método ainda precisa ser melhorado para resolver o problema de redução de velocidade sobre a estrutura. Sugestões para estudos futuros seria comparar os resultados obtidos com resultados de outros simuladores, calcular as derivadas aerodinâmicas usando simulação com placa plana modelada pelo método da fronteira imersa e fazer um estudo de velocidade de flutter usando as derivadas aerodinâmicas obtidas.

Referências Bibliográficas

- AGARD. *Experimental Data Base for Computer Program Assessment*. [S.l.], 1979. AGARD AR 138.
- AMES RESEARCH STAFF. *Equations, Tables, and Charts for Compressible Flow*. [S.l.], 1958. v. 1135.
- AMICK, J. L. *Comparison of the Experimental Pressure Distribution on an NACA 0012 Profile at High Speeds with that Calculated by the Relaxation Method*. [S.l.], 1950. NACA TN 2174.
- ANDERSON, J. *Hypersonic and High-Temperature Gas Dynamics*. [S.l.]: AIAA Education Series, 2006.
- ANDERSON, J. D. *Computational Fluid Dynamics: the Basics with Applications*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1995.
- ANDERSON JÚNIOR, J. D. *Modern Compressible Flow: with Historical Perspective*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2003.
- ARTHURS, K. M.; MOORE, L. C.; PESKIN, C. S.; PITMAN, E. B.; LAYTON, H. E. Modeling arteriolar flow and mass transport using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 147, p. 402–440, 1998.
- BAEK, S.-J.; SUNG, H. J. Numerical simulation of the flow behind a rotary oscillating circular cilinder. *Physics of Fluids*, v. 10, n. 4, p. 869–876, 1998.
- BARTON, J. T.; PULLIAM, T. H. Airfoil computation at high angles of attack, inviscid and viscous phenomena. In: *AIAA Paper*. [S.l.: s.n.], 1984. v. 84-0524.
- BEYER JÚNIOR, R. P. A computational model of the cochlea using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 98, p. 145–162, 1992.
- BIROS, G.; YING, L.; ZORIN, D. A fast solver for the stokes equations with distributed forces in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, v. 193, n. 1, p. 317–348, 2003.
- BOTTA, N. The inviscid transonic flow about a cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 301, p. 225–250, 1995.
- BOTTINO, D. C. Modeling viscoelastic networks and cell deformation in the context of the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 147, p. 86–113, 1998.
- BUENO, A. P. F.; DORICIO, J. L.; MARQUES, A. C. H.; PAULA, I. B. de; CATALANO, F. M.; JÚNIOR, P. C. G. Pressure measurements in oscillatory naca0012 airfoil - experimental and computational results. In: XIX COBEM. [S.l.], 2007.

- BUONOMO, C. A. *Técnica de Fronteiras Imersas com Formulação Viscosa e Compressível*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2004.
- BURBEAU, A.; SAGAUT, P. Simulation of a viscous compressible flow past a circular cylinder with high-order discontinuous Galerkin methods. *Computers & Fluids*, v. 31, p. 867–889, 2002.
- BURG, C. O. E.; MURALI, V. K. Efficient code verification using the residual formulation of the method of manufactured solutions. In: 34TH AIAA FLUID DYNAMICS CONFERENCE. [S.l.], 2004. p. 1–13.
- CAMILO, E. *Solução Numérica das Equações de Euler para Representação do Escoamento Transônico em Aerofólios*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 2003.
- CAMILO, E.; MARQUES, F. D. Numerical solution of the euler equations for the representation of transonic flows on airfoils. In: III CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA. [S.l.], 2004.
- CARTA, F. O. Analysis of oscillatory pressure data including dynamic stall effects. NASA, CR-2394, 1974.
- CASTELLAN, G. *Fundamentos de Físico-Química*. [S.l.]: LTC, 1996.
- COELHO, P. *Brida*. 95. ed. Editora Rocco, 1990. Disponível em: <www.ebookcult.com.br>.
- COTON, F. N.; GALBRAITH, R. A. M. An experimental study of dynamic stall on a finite wing. *The Aeronautical Journal*, v. 103, n. 1023, p. 229–236, 1999.
- DAVIS, M. L.; MASTEN, S. J. *Principles of Environmental Engineering and Science*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2004.
- DILLON, R.; FAUCI, L. J.; GAVAR, D. A microscale model of bacterial swimming, chemotaxis and substrate transport. *J. Theor. Biol.*, v. 177, p. 325–340, 1995.
- DON, W.-S.; GOTTLIEB, D. Spectral simulations of an unsteady compressible flow past a circular cylinder. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 80, p. 39–58, 1990.
- DORICIO, J. L.; JÚNIOR, P. C. G. Free-slip approach of the immersed boundary method. In: XIX COBEM. [S.l.], 2007.
- DORICIO, J. L.; MARQUES, A. C. H.; BUENO, A. P. F.; JÚNIOR, P. C. G.; SOUZA, L. F. de. Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder: Immersed boundary and virtual boundary methods. In: XXVII CILAMCE. [S.l.], 2006.
- EMMONS, H. W. *Flow of a Compressible Fluid Past a Symmetrical Airfoil in a Wind Tunnel and in Free Air*. [S.l.], 1948. NACA TN 1746.
- FADLUN, E. A.; VERZICCO, R.; ORLANDI, P.; MOHD-YUSOF, J. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations. *Journal of Computational Physics*, v. 161, p. 35–60, 2000.

- FAUCI, L.; PESKIN, C. S. Computational model of aquatic animal locomotion. *J. Comput. Phys.*, v. 77, p. 85–108, 1988.
- FILIPPONE, A.; SORENSEN, J. N. A viscous-inviscid interaction model for rotor aerodynamics. In: AGARD AERODYNAMICS AND AEROACOUSTICS OF ROTORCRAFT. *WWW.AERODYM.ORG*. 1995. Disponível em: <www.aerodym.org>.
- FOGELSON, A. L.; PESKIN, C. S. A fast numerical method for solving the three-dimensional stokes' equations in the presence of suspended particles. *J. Comput. Phys.*, v. 79, p. 50–69, 1988.
- FORSYTHE, G. E.; MALCOLM, M. A.; MOLER, C. B. *Computer Methods for Mathematical Computations*. [S.l.]: Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1977.
- GHIAS, R.; MITTAL, R.; DONG, H. A sharp interface immersed boundary method for compressible viscous flows. *Journal of Computational Physics*, v. 225, p. 528–553, 2007.
- GILMANOV, A.; SOTIROPOULOS, F.; BALARAS, E. A general reconstruction algorithm for simulating flows with complex 3d immersed boundaries on cartesian grids. *Journal of Computational Physics*, v. 191, n. 2, p. 660–669, 2003.
- GIVELBERG, E.; BUNN, J. A comprehensive three-dimensional model of the cochlea. *Journal of Computational Physics*, v. 191, n. 2, p. 377–391, 2003.
- GOLDSTEIN, D.; HANDLER, R.; SIROVICH, L. Modeling a no-slip flow boundary with an external force field. *Journal of Computational Physics*, v. 105, p. 354–366, 1993.
- GOLDSTEIN, D.; HANDLER, R.; SIROVICH, L. Direct numerical simulation of turbulent flow over a modelled riblet covered surface. *J. Fluid Mech.*, v. 302, p. 333, 1995.
- GRIFFITH, B. E.; PESKIN, C. S. On the order of accuracy of the immersed boundary method: High order convergence rates for sufficiently smooth problems. *Journal of Computational Physics*, v. 208, p. 75–105, 2005.
- HAFEZ, M.; WAHBA, E. Inviscid flows over a cylinder. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, p. 1981–1995, 2004.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S. *Physics*. [S.l.]: Volume 1. John Wiley & Sons, 2001.
- HEUN, K. Neue methode zur approximativen integration der differentialgleichungen einer unabhängigen veränderlichen. *Z. Math. Phys.*, v. 45, p. 23–38, 1900.
- HIRSCH, C. *Numerical Computation of Internal and External Flows*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1990.
- JACOBS, E. N.; WARD, K. E.; PINKERTON, R. M. *The Characteristics of 78 Related Airfoil Sections from Tests in the Variable-Density Wind Tunnel*. [S.l.], 1933. NACA Report 460.
- JUNG, E.; PESKIN, C. S. Two-dimensional simulations of valveless pumping using the immersed boundary method. *SIAM J. Sci. Comput.*, v. 23, n. 1, p. 19–45, 2001.
- KANG, S. Characteristics of flow over two circular cylinders in a side-by-side arrangement at low reynolds numbers. *Physics of Fluids*, v. 15, n. 9, 2003.

- KRIVODONOVA, L.; BERGER, M. High-order accurate implementation of solid wall boundary conditions in curved geometries. *Journal of Computational Physics*, v. 211, n. 2, p. 492–512, 2006.
- KUMAR, A.; SALAS, M. D. Euler and Navier-Stokes solutions for supersonic shear flow past a circular cylinder. *AIAA Journal*, v. 83, n. 4, p. 583–587, 1985.
- KUTTA, W. Beitrag zur näherungsweise integration totaler differentialgleichungen. *Z. Math. Phys.*, v. 46, p. 435–453, 1901.
- LAI, M.-C.; PESKIN, C. S. An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity. *Journal of Computational Physics*, v. 160, p. 705–719, 2000.
- LANDON, R. H. *NACA0012 oscillating and transient pitching, Compendium of Unsteady Aerodynamic Measurements, Data Set 3*. [S.l.], 1982.
- Le Maître, O. P.; SCANLAN, R. H.; KNIO, O. M. Estimation of the flutter derivatives of an naca airfoil by means of navier-stokes simulation. *Journal of Fluids and Structures*, v. 17, p. 1–28, 2003.
- LEE, C. Stability characteristics of the virtual boundary method in three-dimensional applications. *Journal of Computational Physics*, v. 184, p. 559–591, 2003.
- LEE, L.; LEVEQUE, R. J. An immersed interface method for incompressible navier-stokes equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, v. 25, n. 3, p. 832–856, 2003.
- LEE, S.-H. Cancellation problem of preconditioning method at low mach numbers. *Journal of Computational Physics*, v. 225, p. 1199–1210, 2007.
- LEVEQUE, R. J.; LI, Z. Immersed interface methods for stokes flow with elastic boundaries or surface tension. *SIAM J. Sci. Comput.*, v. 18, n. 3, p. 709–735, 1997.
- LI, Z.; LAI, M.-C. The immersed interface method for the navier-stokes equations with singular forces. *Journal of Computational Physics*, v. 171, p. 822–842, 2001.
- LIE, K.-A.; NOELLE, S. On the artificial compression method for second-order nonoscillatory central difference schemes for systems of conservation laws. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 24, n. 4, p. 1157–1174, 2003.
- LIEPMANN, H. W.; ROSHKO, A. *Elements of Gasdynamics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1957.
- LINNICK, M. M. *Investigation of Actuators for use in Active Flow Control*. Dissertação (Mestrado), 1999.
- LINNICK, M. N.; FASEL, H. F. A high-order immersed boundary method for unsteady incompressible flow calculations. *AIAA 2003-1124*, 2003.
- MARCONI, F. The spiral singularity in supersonic inviscid flow over a cone. In: *AIAA Paper*. [S.l.: s.n.], 1983. v. 83-1665.
- MARQUES, A. C. H.; DORICIO, J. L.; BUENO, A. P. F. Numerical simulation of a cylinder in uniform flow: Application of an immersed boundary method. In: *DINCON*. [S.l.], 2006.

- MARQUES, A. C. H.; DORICIO, J. L.; GÓIS, E. R. C.; JÚNIOR, P. C. G.; SOUZA, L. F. de. Simulação numérica de fluido incompressível ao redor de um cilindro com oscilação angular: Método da fronteira imersa e método da fronteira virtual. In: XXX CNMAC. [S.l.], 2007.
- MCCROSKEY, W. J.; CARR, L. W.; MCLISTER, K. W. Dynamic stall experiments on oscillating airfoils. *AIAA Journal*, v. 14, n. 1, p. 57–63, 1976.
- MCQUEEN, D. M.; PESKIN, C. S.; YELLIN, E. L. Fluid dynamics of the mitral valve: Physiological aspects of a mathematical model. *Amer. J. Physiol.*, v. 242, p. H1095–H1110, 1982.
- MEISNER, J. S.; MCQUEEN, D. M.; ISHIDA, Y.; VETTER, H. O.; BORTOLOTTI, U.; STROM, J. A.; FRATER, R. W. M.; PESKIN, C. S.; YELLIN, E. L. Effects of timing of atrial systole on lv filling and mitral valve closure: Computer and dog studies. *Amer. J. Physiol.*, v. 249, p. H604–H619, 1985.
- MITTAL, S.; KUMAR, B. Flow past a rotating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 476, p. 303–334, 2003.
- MOHD-YUSOF, J. Development of immersed boundary methods for complex geometries. *Annual Research Briefs*, 1998.
- NIVEN, A. J.; GALBRAITH, R. A. M. Modelling dynamic stall vortex inception at low Mach numbers. *The Aeronautical Journal*, n. 2163, p. 67–76, 1997.
- PADRINO, J. C.; JOSEPH, D. D. Numerical study of the steady-state uniform flow past a rotating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 557, p. 191–223, 2006.
- PALMA, P. de; TULLIO, M. D. de; PASCAZIO, G.; NAPOLITANO, M. An immersed-boundary method for compressible viscous flows. *Computers & Fluids*, v. 35, p. 693–702, 2006.
- PANDOLFI, M.; LAROCCA, F. Transonic flow about a circular cylinder. *Computers & Fluids*, v. 17, n. 1, p. 205–220, 1989.
- PESKIN, C. S. *Flow Patterns around Heart Valves: A digital computer method to solve the equations of motion*. Tese (Doutorado) — Albert Einstein College of Medicine, 1972.
- PESKIN, C. S. The immersed boundary method. *Acta Numerica*, p. 479–517, 2002.
- PESKIN, C. S.; PRINTZ, B. F. Improved volume conservation in the computation of flows with immersed elastic boundaries. *Journal of Computational Physics*, v. 105, p. 33–46, 1993.
- POINSOT, T. J.; LELE, S. K. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *Journal of Computational Physics*, v. 101, p. 104–129, 1992.
- PONTES, C. de O.; SOUTO, H. P. A. Esquemas TVD para o transporte advectivo-difusivo de um campo escalar. In: VIII EMC. [S.l.], 2005.
- RAJ, P.; SIKORA, J. S. Free-vortex flows: recent encounters with an Euler code. In: *AIAA Paper*. [S.l.: s.n.], 1984. v. 84-0135.
- ROACHE, P. J. Verification of codes and calculations. *AIAA Journal*, v. 36, p. 696–702, 1998.

ROBERTSON, I.; SHERWIN, S. J.; BEARMAN, P. W. Flutter instability prediction techniques for bridge deck sections. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 43, p. 1239–1256, 2003.

ROMA, A. M. *A Multilevel Self Adaptive Version of the Immersed Boundary Method*. Dissertação (Mestrado), 1996.

ROMA, A. M.; PESKIN, C. S.; BERGER, M. J. An adaptive version of the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 153, p. 509–534, 1999.

RUNGE, C. über die numerische auflösung von differential-gleichungen. *Math. Ann.*, v. 46, p. 167–178, 1895.

SABANCA, M.; DURST, F. Flows past a tiny circular cylinder at high temperature ratios and slight compressible effects on the vortex shedding. v. 15, n. 7, p. 1821–1829, 2003.

SAIKI, E. M.; BIRINGEN, S. Numerical simulation of a cylinder in uniform flow: Application of a virtual boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 123, p. 450–465, 1996.

SALAVERRY, M. *Chamado de Paz - Prosa & Poesia*. 2007. Disponível em: <www.prosaepoesia.com.br>.

SCANLAN, R. H.; TOMKO, J. J. Airfoil and bridge deck flutter derivatives. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, v. 97, p. 1717–1737, 1971.

SCHREIER, S. *Compressible Flow*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1982.

SILVA, A. L. F. L.; SILVEIRA-NETO, A.; DAMASCENO, J. J. R. Numerical simulation of two-dimensional flow over a circular cylinder using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 189, p. 351–370, 2003.

SILVA, H. G. da; MEDEIROS, M. A. F. de. Verificação de um código, para simulação numérica direta de um escoamento no contexto de instabilidade hidrodinâmica, usando o método das soluções manufaturadas. In: CMNE/CILAMCE 2007. [S.l.], 2007.

SILVA, H. G. da; MEDEIROS, M. A. F. de; SOUZA, L. F. de. A verification test for a direct numerical simulation code that uses a high order discretization scheme. In: 18TH INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING. [S.l.], 2005.

SIMI, E.; SCANLAN, R. *Wind effects on structures*. [S.l.]: Terceira edição. John Wiley & Sons, 1996.

SOUZA, L. F. de. Numerical simulation of a flow over a circular cylinder using immersed boundary method in vorticity-velocity formulation. In: 18TH INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING. [S.l.], 2005.

STAROSSEK, U. Prediction of flutter through the use of finite elements. *Structural Engineering Review*, v. 5, n. 4, p. 301–307, 1993.

STEGER, J. L.; WARMING, R. F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods. *Journal of Computational Physics*, v. 40, n. 2, p. 263–293, 1981.

- STEINBERG, S.; ROACHE, P. J. Symbolic manipulation and computational fluid dynamics. *AIAA Journal*, v. 22, p. 1390–1394, 1984.
- STOCKIE, J. M.; WETTON, B. R. Analysis of stiffness in the immersed boundary method and implications for time-stepping schemes. *Journal of Computational Physics*, v. 154, p. 41–64, 1999.
- THEODORSEN, T. *General Theory Of Aerodynamic Instability And The Mechanism Of Flutter*. [S.l.], 1949. 413–433 p.
- TOMÉ, M. F.; DORICIO, J. L.; CASTELO, A.; CUMINATO, J. A.; MCKEE, S. Solving viscoelastic free surface flow of a second order fluid using a marker-and-cell approach. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 53, p. 599–627, 2007.
- TSENG, Y.-H.; FERZIGER, J. H. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *Journal of Computational Physics*, v. 192, n. 2, p. 593–623, 2003.
- TULLIO, M. D. de; PALMA, P. de; IACCARINO, G.; PASCAZIO, G.; NAPOLITANO, M. An immersed boundary method for compressible flows using local grid refinement. *Journal of Computational Physics*, v. 225, p. 2098–2117, 2007.
- UGURAL, A. C.; FENSTER, S. K. *Advanced Strength and Applied Elasticity*. [S.l.]: Prentice Hall, 2003.
- VAN LEER, B. Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *Journal of Computational Physics*, v. 14, n. 4, p. 361–370, 1974.
- VAN LEER, B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *Journal of Computational Physics*, v. 32, p. 101–136, 1979.
- VERZICCO, R.; IACCARINO, G.; FATICA, M.; ORLANDI, P. Flow in an impeller stirred tank using an immersed boundary method. *Annual Research Briefs*, 2000.
- WIEGMANN, A.; BUBE, K. P. The explicit-jump immersed interface method: Finite difference methods for pdes with piecewise smooth solutions. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 37, n. 3, p. 827–862, 2000.
- WILLIAMSON, C. H. K. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annual Review Fluid Mechanics*, v. 28, p. 477–539, 1996.
- YE, T.; MITTAL, R.; UDAYKUMAR, H. S.; SHYY, W. Incompressible flows with complex immersed boundaries. *Journal of Computational Physics*, v. 156, p. 209–240, 1999.
- ZHU, L.; PESKIN, C. S. Simulation of a flapping flexible filament in a flowing soap film by the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 179, p. 452–468, 2002.

Apêndice A - Termos Fonte

Termos fonte da solução manufaturada referentes à Seção 4.3. Essas funções foram calculadas analiticamente com a ajuda do software **Maple V release 4**.

Termo fonte $\mathcal{F}_1(x, y)$ calculado analiticamente usando as Equações (4.11) a (4.17):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(x, y) = & \frac{1}{800} x^2 \sin\left(\frac{1}{5} y\right) + \frac{1}{800} x^2 \sin\left(\frac{1}{5} x\right) + \frac{3}{1600} x^2 + \frac{1}{12000} \cos\left(\frac{1}{5} x\right) x^3 \\ & + \frac{1}{12000} \cos\left(\frac{1}{5} x\right) y^3 + \frac{1}{20} \cos\left(\frac{1}{5} x\right) + \frac{3}{3200} y^2 \cos\left(\frac{1}{5} y\right) + \frac{3}{3200} y^2 \cos\left(\frac{1}{5} x\right) + \frac{3}{1400} y^2 \\ & - \frac{1}{16000} \sin\left(\frac{1}{5} y\right) x^3 - \frac{1}{16000} \sin\left(\frac{1}{5} y\right) y^3 - \frac{3}{80} \sin\left(\frac{1}{5} y\right),\end{aligned}$$

Termo fonte $\mathcal{F}_2(x, y)$ calculado analiticamente usando as Equações (4.11) a (4.17):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2(x, y) = & -\frac{1}{48000} x^3 - \frac{1}{32000} \sin\left(\frac{1}{5} y\right) x^3 - \frac{1}{48000} y^3 - \frac{3}{160} \sin\left(\frac{1}{5} y\right) + \frac{1}{35} \cos\left(\frac{1}{5} y\right) \\ & + \frac{11}{140} \cos\left(\frac{1}{5} x\right) + \frac{1}{12000} \cos\left(\frac{1}{5} x\right) y^3 + \frac{1}{12000} \cos\left(\frac{1}{5} x\right) x^3 + \frac{1}{800} x^2 \sin\left(\frac{1}{5} x\right) + \frac{1}{800} x^2 \sin\left(\frac{1}{5} y\right) \\ & + \frac{3}{6400} y^2 \cos\left(\frac{1}{5} y\right) + \frac{1}{21000} x^3 \cos\left(\frac{1}{5} y\right) - \frac{1}{32000} \sin\left(\frac{1}{5} y\right) y^3 + \frac{3}{2800} y^2 + \frac{17}{9600} x^2 - \frac{1}{80} \\ & + \frac{3}{6400} y^2 \cos\left(\frac{1}{5} x\right) + \frac{1}{24000} x^3 \cos\left(\frac{1}{5} y\right)^2 + \frac{1}{80} \cos\left(\frac{1}{5} y\right) \cos\left(\frac{1}{5} x\right) + \frac{1}{21000} y^3 \cos\left(\frac{1}{5} y\right) \\ & + \frac{1}{18000} \cos\left(\frac{1}{5} x\right) x^3 \sin\left(\frac{1}{5} y\right) + \frac{1}{1200} x^2 \sin\left(\frac{1}{5} y\right) \sin\left(\frac{1}{5} x\right) - \frac{1}{48000} \sin\left(\frac{1}{5} y\right) y^3 \sin\left(\frac{1}{5} x\right) \\ & - \frac{1}{48000} \sin\left(\frac{1}{5} y\right) x^3 \sin\left(\frac{1}{5} x\right) + \frac{1}{48000} \cos\left(\frac{1}{5} y\right) \cos\left(\frac{1}{5} x\right) y^3 + \frac{1}{48000} \cos\left(\frac{1}{5} y\right) \cos\left(\frac{1}{5} x\right) x^3 \\ & + \frac{1}{3200} y^2 \cos\left(\frac{1}{5} x\right) \sin\left(\frac{1}{5} x\right) + \frac{1}{3200} y^2 \sin\left(\frac{1}{5} x\right) \cos\left(\frac{1}{5} y\right) + \frac{1}{3200} y^2 \cos\left(\frac{1}{5} x\right) \sin\left(\frac{1}{5} y\right) \\ & + \frac{1}{3200} y^2 \sin\left(\frac{1}{5} y\right) \cos\left(\frac{1}{5} y\right) + \frac{1}{18000} \cos\left(\frac{1}{5} x\right) y^3 \sin\left(\frac{1}{5} x\right) + \frac{1}{18000} \cos\left(\frac{1}{5} x\right) y^3 \sin\left(\frac{1}{5} y\right) \\ & + \frac{1}{18000} \cos\left(\frac{1}{5} x\right) x^3 \sin\left(\frac{1}{5} x\right) + \frac{1}{30} \cos\left(\frac{1}{5} x\right) \sin\left(\frac{1}{5} y\right) + \frac{1}{1400} y^2 \sin\left(\frac{1}{5} y\right) \\ & + \frac{1}{30} \cos\left(\frac{1}{5} x\right) \sin\left(\frac{1}{5} x\right) + \frac{1}{24000} y^3 \cos\left(\frac{1}{5} y\right)^2 + \frac{1}{1400} y^2 \sin\left(\frac{1}{5} x\right) - \frac{1}{2400} x^2 \cos\left(\frac{1}{5} x\right)^2 \\ & - \frac{1}{2400} x^2 \cos\left(\frac{1}{5} y\right)^2 - \frac{1}{80} \sin\left(\frac{1}{5} y\right) \sin\left(\frac{1}{5} x\right) + \frac{1}{40} \cos\left(\frac{1}{5} y\right)^2,\end{aligned}$$

Termo fonte $\mathcal{F}_4(x, y)$ calculado analiticamente usando as Equações (4.11) a (4.17):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_4(x, y) = & -\frac{1}{44800}x^3 - \frac{2561}{56448000}\sin\left(\frac{1}{5}y\right)x^3 - \frac{1}{44800}y^3 - \frac{2561}{94080}\sin\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& + \frac{1}{42000}y^3\cos\left(\frac{1}{5}x\right)^2 + \frac{5}{448}\cos\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{851}{9408}\cos\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{1903}{28224000}\cos\left(\frac{1}{5}x\right)y^3 \\
& + \frac{1903}{28224000}\cos\left(\frac{1}{5}x\right)x^3 + \frac{2683}{2822400}x^2\sin\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{2683}{2822400}x^2\sin\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{1}{14}e^{(1/4)y} \\
& + \frac{2561}{3763200}y^2\cos\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{1}{53760}x^3\cos\left(\frac{1}{5}y\right) - \frac{5}{336}\sin\left(\frac{1}{5}x\right) - \frac{2561}{56448000}\sin\left(\frac{1}{5}y\right)y^3 \\
& + \frac{1409}{1646400}y^2 + \frac{731}{627200}x^2 + \frac{3}{11200}x^2\cos\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{3}{11200}x^2\cos\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& - \frac{11}{7680}\cos\left(\frac{1}{5}x\right)^2\sin\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{1}{120}\sin\left(\frac{1}{5}x\right)\cos\left(\frac{1}{5}y\right)^2 + \frac{1}{32}e^{(1/4)y}\cos\left(\frac{1}{5}y\right) - \frac{1}{40320}y^3\sin\left(\frac{1}{5}x\right) \\
& + \frac{31}{480}\cos\left(\frac{1}{5}x\right)e^{(1/4)y} + \frac{1}{160}\cos\left(\frac{1}{5}y\right)\cos\left(\frac{1}{5}x\right)^2 - \frac{1}{40}\sin\left(\frac{1}{5}y\right)e^{(1/4)y} - \frac{7}{307200}y^2\cos\left(\frac{1}{5}y\right)^3 \\
& - \frac{7}{307200}y^2\cos\left(\frac{1}{5}x\right)^3 + \frac{7}{2560}\cos\left(\frac{1}{5}y\right)^2\sin\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{2561}{3763200}y^2\cos\left(\frac{1}{5}x\right) \\
& - \frac{7}{1152000}y^3\cos\left(\frac{1}{5}x\right)^3 - \frac{13}{1920}\cos\left(\frac{1}{5}x\right)\cos\left(\frac{1}{5}y\right)^2 - \frac{7}{1152000}x^3\cos\left(\frac{1}{5}x\right)^3 \\
& - \frac{13}{76800}x^2\cos\left(\frac{1}{5}x\right)^2\sin\left(\frac{1}{5}y\right) - \frac{1}{320}\sin\left(\frac{1}{5}x\right)\cos\left(\frac{1}{5}y\right)\sin\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{1}{96000}y^3\cos\left(\frac{1}{5}y\right)\cos\left(\frac{1}{5}x\right)^2 \\
& + \frac{13}{960}\cos\left(\frac{1}{5}x\right)\sin\left(\frac{1}{5}y\right)\sin\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{1}{72000}x^3\sin\left(\frac{1}{5}x\right)\cos\left(\frac{1}{5}y\right)^2 \\
& - \frac{13}{1152000}\cos\left(\frac{1}{5}x\right)x^3\cos\left(\frac{1}{5}y\right)^2 + \frac{1}{96000}x^3\cos\left(\frac{1}{5}y\right)\cos\left(\frac{1}{5}x\right)^2 \\
& - \frac{7}{230400}x^2\cos\left(\frac{1}{5}y\right)^2\sin\left(\frac{1}{5}y\right) - \frac{13}{1152000}\cos\left(\frac{1}{5}x\right)y^3\cos\left(\frac{1}{5}y\right)^2 \\
& - \frac{7}{230400}x^2\cos\left(\frac{1}{5}x\right)^2\sin\left(\frac{1}{5}x\right) - \frac{13}{76800}x^2\cos\left(\frac{1}{5}y\right)^2\sin\left(\frac{1}{5}x\right) \\
& - \frac{11}{4608000}y^3\cos\left(\frac{1}{5}x\right)^2\sin\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{1}{72000}y^3\sin\left(\frac{1}{5}x\right)\cos\left(\frac{1}{5}y\right)^2 + \frac{1}{4200}y^2\sin\left(\frac{1}{5}y\right)\sin\left(\frac{1}{5}x\right) \\
& + \frac{3}{25600}x^2\cos\left(\frac{1}{5}y\right)\cos\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{13}{1612800}x^3\sin\left(\frac{1}{5}x\right)\cos\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& + \frac{11}{307200}y^2\cos\left(\frac{1}{5}y\right)\cos\left(\frac{1}{5}x\right)^2 + \frac{11}{307200}y^2\cos\left(\frac{1}{5}y\right)^2\cos\left(\frac{1}{5}x\right) \\
& + \frac{7}{1536000}x^3\cos\left(\frac{1}{5}y\right)^2\sin\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{7}{1536000}y^3\cos\left(\frac{1}{5}y\right)^2\sin\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& - \frac{11}{4608000}x^3\cos\left(\frac{1}{5}x\right)^2\sin\left(\frac{1}{5}y\right) - \frac{11}{3840}\cos\left(\frac{1}{5}x\right)\sin\left(\frac{1}{5}y\right)\cos\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& + \frac{1}{240}\sin\left(\frac{1}{5}x\right)\cos\left(\frac{1}{5}y\right)\cos\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{13}{1612800}y^3\sin\left(\frac{1}{5}x\right)\cos\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& + \frac{1}{144000}x^3\sin\left(\frac{1}{5}x\right)\cos\left(\frac{1}{5}y\right)\cos\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{13}{2688}\sin\left(\frac{1}{5}x\right)\cos\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& - \frac{11}{2304000}y^3\cos\left(\frac{1}{5}x\right)\sin\left(\frac{1}{5}y\right)\cos\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{13}{576000}y^3\cos\left(\frac{1}{5}x\right)\sin\left(\frac{1}{5}x\right)\sin\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& - \frac{1}{192000}y^3\sin\left(\frac{1}{5}x\right)\cos\left(\frac{1}{5}y\right)\sin\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{1}{12800}x^2\cos\left(\frac{1}{5}y\right)\cos\left(\frac{1}{5}x\right)\sin\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& + \frac{1}{12800}x^2\cos\left(\frac{1}{5}y\right)\cos\left(\frac{1}{5}x\right)\sin\left(\frac{1}{5}x\right) - \frac{1}{192000}x^3\sin\left(\frac{1}{5}x\right)\cos\left(\frac{1}{5}y\right)\sin\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& + \frac{13}{576000}x^3\cos\left(\frac{1}{5}x\right)\sin\left(\frac{1}{5}x\right)\sin\left(\frac{1}{5}y\right) - \frac{7}{1920}\cos\left(\frac{1}{5}x\right)^3 + \frac{1}{9600}y^2\sin\left(\frac{1}{5}y\right)\sin\left(\frac{1}{5}x\right)\cos\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& - \frac{11}{2304000}x^3\cos\left(\frac{1}{5}x\right)\sin\left(\frac{1}{5}y\right)\cos\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{1}{9600}y^2\sin\left(\frac{1}{5}y\right)\sin\left(\frac{1}{5}x\right)\cos\left(\frac{1}{5}x\right) \\
& + \frac{1}{144000}y^3\sin\left(\frac{1}{5}x\right)\cos\left(\frac{1}{5}y\right)\cos\left(\frac{1}{5}x\right) - \frac{11}{1008000}\sin\left(\frac{1}{5}y\right)y^3\cos\left(\frac{1}{5}y\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{9}{22400} y^2 \cos\left(\frac{1}{5}x\right) \cos\left(\frac{1}{5}y\right) - \frac{11}{1008000} \sin\left(\frac{1}{5}y\right) x^3 \cos\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{1}{5600} x^2 \sin\left(\frac{1}{5}x\right) \cos\left(\frac{1}{5}x\right) \\
& + \frac{1}{5600} x^2 \sin\left(\frac{1}{5}y\right) \cos\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{1}{5600} x^2 \sin\left(\frac{1}{5}y\right) \cos\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{1}{5600} x^2 \sin\left(\frac{1}{5}x\right) \cos\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& - \frac{11}{1680} \sin\left(\frac{1}{5}y\right) \cos\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{11}{134400} y^2 \cos\left(\frac{1}{5}y\right)^2 + \frac{11}{134400} y^2 \cos\left(\frac{1}{5}x\right)^2 + \frac{1}{42000} x^3 \cos\left(\frac{1}{5}x\right)^2 \\
& - \frac{1}{40320} x^3 \sin\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{1}{48000} x^3 \cos\left(\frac{1}{5}y\right)^2 + \frac{3}{224} \cos\left(\frac{1}{5}y\right) \cos\left(\frac{1}{5}x\right) - \frac{3}{224} \\
& + \frac{1}{53760} y^3 \cos\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{1}{67200} \cos\left(\frac{1}{5}x\right) x^3 \sin\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{1}{1600} x^2 \sin\left(\frac{1}{5}y\right) \sin\left(\frac{1}{5}x\right) \\
& - \frac{1}{44800} \sin\left(\frac{1}{5}y\right) y^3 \sin\left(\frac{1}{5}x\right) - \frac{1}{44800} \sin\left(\frac{1}{5}y\right) x^3 \sin\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{1}{44800} \cos\left(\frac{1}{5}y\right) \cos\left(\frac{1}{5}x\right) y^3 \\
& + \frac{1}{44800} \cos\left(\frac{1}{5}y\right) \cos\left(\frac{1}{5}x\right) x^3 + \frac{1}{6400} y^2 \cos\left(\frac{1}{5}x\right) \sin\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{1}{6400} y^2 \sin\left(\frac{1}{5}x\right) \cos\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& + \frac{1}{6400} y^2 \cos\left(\frac{1}{5}x\right) \sin\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{1}{6400} y^2 \sin\left(\frac{1}{5}y\right) \cos\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{13}{384000} \cos\left(\frac{1}{5}x\right) y^3 \sin\left(\frac{1}{5}x\right) \\
& + \frac{1}{67200} \cos\left(\frac{1}{5}x\right) y^3 \sin\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{13}{384000} \cos\left(\frac{1}{5}x\right) x^3 \sin\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{71}{1680} \cos\left(\frac{1}{5}x\right) \sin\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& + \frac{1}{2800} y^2 \sin\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{167}{1920} \cos\left(\frac{1}{5}x\right) \sin\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{1}{48000} y^3 \cos\left(\frac{1}{5}y\right)^2 + \frac{1}{2800} y^2 \sin\left(\frac{1}{5}x\right) \\
& - \frac{13}{51200} x^2 \cos\left(\frac{1}{5}x\right)^2 - \frac{13}{51200} x^2 \cos\left(\frac{1}{5}y\right)^2 - \frac{43}{1120} \sin\left(\frac{1}{5}y\right) \sin\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{1}{80} \cos\left(\frac{1}{5}y\right)^2 \\
& + \frac{1}{70} \cos\left(\frac{1}{5}x\right)^2,
\end{aligned}$$

Termo fonte $\mathcal{F}_3(x, y)$ calculado analiticamente usando as Equações (4.11) a (4.17):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_3(x, y) = & -\frac{1}{48000} x^3 - \frac{1}{14000} \sin\left(\frac{1}{5}y\right) x^3 - \frac{1}{48000} y^3 - \frac{3}{70} \sin\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& + \frac{1}{24000} y^3 \cos\left(\frac{1}{5}x\right)^2 + \frac{1}{35} \cos\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{1}{21000} \cos\left(\frac{1}{5}x\right) y^3 + \frac{1}{21000} \cos\left(\frac{1}{5}x\right) x^3 \\
& + \frac{1}{1400} x^2 \sin\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{1}{1400} x^2 \sin\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{1}{28} e^{(1/4)y} + \frac{3}{2800} y^2 \cos\left(\frac{1}{5}y\right) - \frac{3}{160} \sin\left(\frac{1}{5}x\right) \\
& - \frac{1}{14000} \sin\left(\frac{1}{5}y\right) y^3 + \frac{3}{2450} y^2 + \frac{3}{2800} x^2 + \frac{3}{6400} x^2 \cos\left(\frac{1}{5}x\right) - \frac{1}{80} + \frac{3}{6400} x^2 \cos\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& - \frac{1}{32000} y^3 \sin\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{3}{2800} y^2 \cos\left(\frac{1}{5}x\right) - \frac{1}{32000} \sin\left(\frac{1}{5}y\right) y^3 \cos\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& + \frac{3}{6400} y^2 \cos\left(\frac{1}{5}x\right) \cos\left(\frac{1}{5}y\right) - \frac{1}{32000} \sin\left(\frac{1}{5}y\right) x^3 \cos\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{1}{3200} x^2 \sin\left(\frac{1}{5}x\right) \cos\left(\frac{1}{5}x\right) \\
& + \frac{1}{3200} x^2 \sin\left(\frac{1}{5}y\right) \cos\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{1}{3200} x^2 \sin\left(\frac{1}{5}y\right) \cos\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{1}{3200} x^2 \sin\left(\frac{1}{5}x\right) \cos\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& - \frac{3}{160} \sin\left(\frac{1}{5}y\right) \cos\left(\frac{1}{5}y\right) + \frac{3}{12800} y^2 \cos\left(\frac{1}{5}y\right)^2 + \frac{3}{12800} y^2 \cos\left(\frac{1}{5}x\right)^2 + \frac{1}{24000} x^3 \cos\left(\frac{1}{5}x\right)^2 \\
& - \frac{1}{32000} x^3 \sin\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{1}{80} \cos\left(\frac{1}{5}y\right) \cos\left(\frac{1}{5}x\right) - \frac{1}{32000} \cos\left(\frac{1}{5}x\right) x^3 \sin\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& - \frac{1}{48000} \sin\left(\frac{1}{5}y\right) y^3 \sin\left(\frac{1}{5}x\right) - \frac{1}{48000} \sin\left(\frac{1}{5}y\right) x^3 \sin\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{1}{48000} \cos\left(\frac{1}{5}y\right) \cos\left(\frac{1}{5}x\right) y^3 \\
& + \frac{1}{48000} \cos\left(\frac{1}{5}y\right) \cos\left(\frac{1}{5}x\right) x^3 - \frac{1}{32000} \cos\left(\frac{1}{5}x\right) y^3 \sin\left(\frac{1}{5}y\right) - \frac{3}{160} \cos\left(\frac{1}{5}x\right) \sin\left(\frac{1}{5}y\right) \\
& - \frac{1}{80} \sin\left(\frac{1}{5}y\right) \sin\left(\frac{1}{5}x\right) + \frac{1}{40} \cos\left(\frac{1}{5}x\right)^2.
\end{aligned}$$

Apêndice B - Detalhes das Simulações

Os parâmetros utilizados no simulador para realizar as simulações são listados nas tabelas a seguir, com referência aos resultados mostrados em figuras:

Tabela 1: Simulações relativas às Figuras 4.16 a 4.21.

Malha Euleriana	30×30 ; 60×60 ; 120×120 ; 240×240 ; 480×480
Δx	0,1; 0,05; 0,025; 0,0125; 0,00625
Δy	0,1; 0,05; 0,025; 0,0125; 0,00625
Domínio	3×3
CFL	0,4
Convergência	10^{-10}
ϵ	0,04
ϖ	10^{-15}

Tabela 2: Simulações relativas às Figuras 4.24 a 4.32.

Malha Euleriana	280×80
Δx	0,0125
Δy	0,0125
Domínio	$3,5 \times 1$
CFL	0,75
Convergência	10^{-10}
ϵ	0,04
ϖ	10^{-15}

Tabela 3: Simulações relativas às Figuras 5.3 a 5.11.

Malha Euleriana	280×96
Δx	0,0125
Δy	0,0125

Tabela 3 – Continuação

Domínio	$3,5 \times 1,2$
CFL	0,35
Convergência	10^{-10}
Malha Lagrangiana	272
Δs	0,0125
κ	160000
ζ	10
ϵ	0,04
ϖ	10^{-15}

Tabela 4: Simulações relativas às Figuras 5.13 a 5.23; 5.28 a 5.35.

Malha Euleriana	130×130
Δx_{max}	0,4
Δy_{max}	0,4
Δx_{min}	0,025
Δy_{min}	0,025
Domínio	10×10
CFL	0,2
Convergência	10^{-10}
Malha Lagrangiana	168
Δs	0,025
κ	10000
ζ	10
Geometria	Seção Quadrada
Centro	(5; 5)
Altitude	856 m
Velocidade	134,7985957 m/s
Densidade	1.127456703 kg/m ³
Pressão	91457,67788 N/m ²
Velocidade do Som	336,9964893 m/s
Viscosidade	$1,76 \times 10^{-5}$ Ns/m ²
Ma_{∞}	0,4
ϵ	0,04
ϖ	10^{-15}

Tabela 5: Simulações relativas às Figuras 6.1 a 6.27.

Malha Euleriana	190×190
Δx_{max}	0,45
Δy_{max}	0,45
Δx_{min}	0,019
Δy_{min}	0,019
Domínio	15×15
CFL	0,2
Convergência	10^{-10}
Malha Lagrangiana	151
Δs	0,019
κ	55000
ζ	10
Geometria	Seção Circular
Centro	(7,5; 7,5)
Altitude	856 m
Velocidade	134,7985957; 168,4982447; 673,9929786 m/s
Densidade	$1.127456703 \text{ kg/m}^3$
Pressão	$91457,67788 \text{ N/m}^2$
Velocidade do Som	$336,9964893 \text{ m/s}$
Viscosidade	$1,76 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$
Ma_{∞}	0,4; 0,5; 2
ϵ	0,04
ϖ	10^{-15} ; 10^{-8}

Tabela 6: Simulações relativas às Figuras 6.31 a 6.54.

Malha Euleriana	216×250
Δx_{max}	0,5
Δy_{max}	0,5
Δx_{min}	0,008
Δy_{min}	0,002
Domínio	8×4
CFL	0,4
Convergência	10^{-10}
Malha Lagrangiana	390
Δs	0,002
κ	40000
ζ	5
Geometria	Seção NACA0012

Tabela 6 – Continuação

Centro	(4; 2)
Altitude	856 m
Velocidade	101,0989468; 134,7985957; 168,4982447; 202,1978936; 246,0074372; 252,7473670; 269,5971914 m/s
Densidade	1.127456703 kg/m ³
Pressão	91457,67788 N/m ²
Velocidade do Som	336,9964893 m/s
Viscosidade	1,76 × 10 ⁻⁵ Ns/m ²
Ma_{∞}	0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,73; 0,75; 0,8
ϵ	0,04
ϖ	10 ⁻¹⁵
α	0; 3; 4; 8

Tabela 7: Simulações relativas às Figuras 7.1 a 7.7.

Malha Euleriana	231 × 248
Δx_{max}	0,2
Δy_{max}	0,2
Δx_{min}	0,008
Δy_{min}	0,004
Domínio	6 × 3
CFL	0,45
Convergência	10 ⁻¹⁰
Malha Lagrangiana	713
Δs	0,001
κ	40000
ζ	5
Geometria	Seção NACA0012
Centro	(2,5; 1,5)
Altitude	856 m
Velocidade	20,0 m/s
Densidade	1.127456703 kg/m ³
Pressão	91457,67788 N/m ²
Velocidade do Som	340,2979401 m/s
Viscosidade	1,76 × 10 ⁻⁵ Ns/m ²
Ma_{∞}	0,058772
ϵ	0,04
ϖ	10 ⁻¹⁵
α	15 graus

Tabela 7 – Continuação

Amplitude	15 graus
Frequência	0,5; 1,0; 1,5; 2,0

Tabela 8: Simulações relativas às Figuras 7.8 a 7.19.

Malha Euleriana	174×180
Δx_{max}	0,8
Δy_{max}	0,8
Δx_{min}	0,008
Δy_{min}	0,002
Domínio	6×3
CFL	0,95
Convergência	10^{-10}
Malha Lagrangiana	958
Δs	0,001
κ	10000
ζ	1
Geometria	Seção NACA0012
Centro	(2,5; 1,5)
Altitude	0 m
Densidade	$1.127456703 \text{ kg/m}^3$
Pressão	$91457,67788 \text{ N/m}^2$
Velocidade do Som	$340,2979401 \text{ m/s}$
Viscosidade	$1,76 \times 10^{-5} \text{ N s/m}^2$
Ma_{∞}	0,58; 0,745; 0,6; 0,755
ϵ	0,04
ϖ	10^{-15}
α	9,0; 0,09; 2,89; 0,016 graus
Amplitude	9,55; 5,0; 2,41; 2,51 graus
Frequência	1,8; 50,32 Hz

Tabela 9: Simulações relativas às Figuras 7.21 a 7.26.

Malha Euleriana	272×136
Δx_{max}	0,25
Δy_{max}	0,25
Δx_{min}	0,0045

Tabela 9 – Continuação

Δy_{min}	0,0045
Domínio	3×5
CFL	0,9
Convergência	10^{-10}
Malha Lagrangiana	908
Δs	0,00225
κ	10000
ζ	1
Geometria	Seção NACA0012
Centro	(1; 2,5)
Altitude	0 m
Densidade	$1.127456703 \text{ kg/m}^3$
Pressão	$91457,67788 \text{ N/m}^2$
Velocidade do Som	$340,2979401 \text{ m/s}$
Viscosidade	$1,76 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$
Ma_{∞}	0,3
ϵ	0,04
ϖ	10^{-15}
α	0,0 graus
Amplitude	2,0; 5,0 graus
Frequência	5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50 Hz

Apêndice C - Resultados em Tabelas

Os resultados obtidos para a distribuição de pressão (coeficiente de pressão) ao longo da superfície do perfil de aerofólio NACA0012 são tabeladas a seguir para vários números de Mach e para vários ângulos de ataque:

Tabela 1: Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,3$, $\alpha = 0$ graus.

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,00013	0,65563	0,27842	-0,35373	0,95070	0,15266	0,26486	-0,36032
0,00112	0,62828	0,28767	-0,34948	0,92949	0,11172	0,25603	-0,36348
0,00297	0,53247	0,29709	-0,34370	0,90865	0,08208	0,24736	-0,37049
0,00545	0,38779	0,30669	-0,33858	0,88818	0,05167	0,23885	-0,37310
0,00837	0,30200	0,31647	-0,33199	0,86808	0,03132	0,23050	-0,37925
0,01162	0,13052	0,32643	-0,32729	0,84834	0,01166	0,22230	-0,38356
0,01513	0,05795	0,33657	-0,31933	0,82895	-0,00640	0,21426	-0,38775
0,01884	-0,05406	0,34691	-0,31333	0,80990	-0,02110	0,20636	-0,38971
0,02272	-0,12822	0,35743	-0,30711	0,79120	-0,03655	0,19861	-0,39357
0,02675	-0,17935	0,36816	-0,30042	0,77284	-0,05014	0,19101	-0,39397
0,03092	-0,21807	0,37908	-0,29393	0,75480	-0,06307	0,18355	-0,39718
0,03521	-0,24570	0,39020	-0,28772	0,73709	-0,07565	0,17622	-0,39818
0,03963	-0,28116	0,40153	-0,28102	0,71969	-0,08778	0,16904	-0,40075
0,04416	-0,30017	0,41306	-0,27414	0,70261	-0,09835	0,16198	-0,40192
0,04881	-0,31598	0,42482	-0,26652	0,68584	-0,10913	0,15507	-0,40498
0,05357	-0,32592	0,43678	-0,25990	0,66937	-0,11917	0,14828	-0,40808
0,05843	-0,33259	0,44897	-0,25237	0,65320	-0,12889	0,14162	-0,40861
0,06341	-0,35133	0,46139	-0,24439	0,63731	-0,13878	0,13509	-0,40636
0,06850	-0,35990	0,47403	-0,23712	0,62172	-0,14848	0,12868	-0,41040
0,07369	-0,36962	0,48691	-0,22899	0,60640	-0,15765	0,12239	-0,40661
0,07900	-0,38136	0,50003	-0,22076	0,59137	-0,16648	0,11623	-0,41026
0,08441	-0,38924	0,51338	-0,21375	0,57660	-0,17560	0,11018	-0,40885
0,08994	-0,38682	0,52699	-0,20551	0,56210	-0,18395	0,10426	-0,40293

Tabela 1 – Continuação

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,09558	-0,39831	0,54084	-0,19751	0,54786	-0,19291	0,09844	-0,40303
0,10133	-0,40171	0,55495	-0,18829	0,53388	-0,20093	0,09275	-0,39173
0,10720	-0,40655	0,56932	-0,17990	0,52015	-0,20953	0,08716	-0,38803
0,11319	-0,41124	0,58395	-0,17123	0,50667	-0,21703	0,08169	-0,38735
0,11929	-0,40805	0,59885	-0,16238	0,49344	-0,22522	0,07633	-0,37371
0,12552	-0,40853	0,61403	-0,15295	0,48044	-0,23295	0,07108	-0,36741
0,13187	-0,40848	0,62948	-0,14364	0,46768	-0,24087	0,06594	-0,35278
0,13834	-0,40632	0,64522	-0,13409	0,45515	-0,24884	0,06091	-0,34279
0,14493	-0,41041	0,66125	-0,12399	0,44285	-0,25660	0,05599	-0,33414
0,15166	-0,40624	0,67757	-0,11345	0,43077	-0,26204	0,05117	-0,31416
0,15851	-0,40296	0,69419	-0,10363	0,41891	-0,27044	0,04647	-0,30919
0,16549	-0,40135	0,71112	-0,09325	0,40727	-0,27881	0,04188	-0,29299
0,17261	-0,39868	0,72835	-0,08191	0,39584	-0,28405	0,03741	-0,26748
0,17987	-0,39882	0,74590	-0,06976	0,38461	-0,29068	0,03305	-0,23528
0,18726	-0,39533	0,76378	-0,05710	0,37359	-0,29709	0,02882	-0,19573
0,19479	-0,39354	0,78198	-0,04362	0,36277	-0,30396	0,02472	-0,15661
0,20247	-0,39185	0,80051	-0,02913	0,35215	-0,31008	0,02076	-0,09067
0,21029	-0,38936	0,81938	-0,01429	0,34172	-0,31636	0,01697	-0,00935
0,21826	-0,38532	0,83860	0,00136	0,33148	-0,32360	0,01335	0,09122
0,22638	-0,38166	0,85816	0,02202	0,32143	-0,32834	0,00996	0,19829
0,23466	-0,37633	0,87808	0,04223	0,31156	-0,33664	0,00686	0,35118
0,24309	-0,37141	0,89837	0,06762	0,30187	-0,34086	0,00414	0,44105
0,25168	-0,36726	0,91902	0,09349	0,29236	-0,34666	0,00195	0,60854
0,26043	-0,36176	0,94005	0,13277	0,28302	-0,35149	0,00051	0,64398
0,26934	-0,35845	0,96145	0,16511	0,27386	-0,35612		

Tabela 2: Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,3$, $\alpha = 4$ graus.

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,00013	0,59925	0,29653	-0,12184	0,95047	0,11932	0,27530	-0,61081
0,00112	0,71471	0,30526	-0,12143	0,93188	0,09129	0,26704	-0,62257
0,00296	0,70875	0,31413	-0,12165	0,91356	0,06222	0,25891	-0,63633
0,00543	0,76185	0,32313	-0,12256	0,89552	0,03842	0,25090	-0,64392
0,00834	0,66302	0,33228	-0,12181	0,87775	0,01498	0,24302	-0,65645

Tabela 2 – Continuação

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,01156	0,67549	0,34157	-0,12052	0,86025	-0,00419	0,23526	-0,66690
0,01503	0,55331	0,35101	-0,11992	0,84302	-0,02530	0,22763	-0,67960
0,01869	0,55258	0,36059	-0,11974	0,82605	-0,04397	0,22011	-0,69056
0,02251	0,44851	0,37033	-0,11897	0,80933	-0,06059	0,21272	-0,70215
0,02647	0,41932	0,38022	-0,11778	0,79287	-0,07887	0,20544	-0,71373
0,03055	0,36946	0,39026	-0,11576	0,77666	-0,09310	0,19827	-0,72542
0,03475	0,31172	0,40046	-0,11424	0,76070	-0,10977	0,19122	-0,73636
0,03905	0,29525	0,41082	-0,11292	0,74498	-0,12651	0,18428	-0,74744
0,04569	0,22653	0,42667	-0,11022	0,72185	-0,14741	0,17407	-0,76558
0,05024	0,18741	0,43744	-0,10808	0,70672	-0,16064	0,16741	-0,77723
0,05489	0,16679	0,44838	-0,10533	0,69182	-0,17450	0,16085	-0,78937
0,05962	0,15461	0,45948	-0,10287	0,67716	-0,18889	0,15439	-0,80232
0,06445	0,12198	0,47077	-0,10031	0,66271	-0,20260	0,14804	-0,81282
0,06937	0,09973	0,48223	-0,09770	0,64849	-0,21477	0,14179	-0,82588
0,07692	0,07573	0,49975	-0,09355	0,62756	-0,23261	0,13261	-0,84630
0,08207	0,06186	0,51166	-0,09043	0,61387	-0,24538	0,12661	-0,85949
0,08731	0,05563	0,52376	-0,08731	0,60039	-0,25789	0,12071	-0,86770
0,09534	0,02913	0,54226	-0,08232	0,58056	-0,27464	0,11204	-0,88728
0,10081	0,01721	0,55483	-0,07882	0,56760	-0,28688	0,10638	-0,90344
0,10638	-0,00173	0,56760	-0,07543	0,55483	-0,29914	0,10081	-0,91990
0,11204	-0,01429	0,58056	-0,07189	0,54226	-0,31181	0,09534	-0,92695
0,11779	-0,02417	0,59373	-0,06793	0,52988	-0,32394	0,08997	-0,93937
0,12364	-0,02666	0,60711	-0,06384	0,51769	-0,33478	0,08468	-0,95579
0,12959	-0,03482	0,62069	-0,05968	0,50568	-0,34615	0,07949	-0,96427
0,13564	-0,04822	0,63448	-0,05550	0,49386	-0,35817	0,07438	-0,97899
0,14179	-0,04803	0,64849	-0,05104	0,48223	-0,37264	0,06937	-0,99967
0,14804	-0,06001	0,66271	-0,04701	0,47077	-0,38436	0,06445	-0,99999
0,15439	-0,06956	0,67716	-0,04196	0,45948	-0,39226	0,05962	-1,00176
0,16085	-0,07585	0,69182	-0,03661	0,44838	-0,40579	0,05489	-1,00936
0,16741	-0,07862	0,70672	-0,03092	0,43744	-0,41976	0,05024	-1,01629
0,17745	-0,08301	0,72950	-0,02249	0,42134	-0,43392	0,04345	-1,01132
0,18428	-0,09394	0,74498	-0,01678	0,41082	-0,44591	0,03905	-1,02431
0,19122	-0,09320	0,76070	-0,00985	0,40046	-0,45571	0,03475	-1,03223
0,19827	-0,10050	0,77666	-0,00227	0,39026	-0,46650	0,03055	-1,02523
0,20906	-0,10151	0,80107	0,00862	0,37525	-0,48471	0,02448	-1,00320
0,21640	-0,10593	0,81766	0,01801	0,36544	-0,49610	0,02058	-1,00048
0,22386	-0,10789	0,83450	0,02625	0,35578	-0,50807	0,01684	-0,92734
0,23143	-0,11145	0,85160	0,03782	0,34627	-0,52006	0,01327	-0,83970
0,24302	-0,11522	0,87775	0,05684	0,33228	-0,53660	0,00834	-0,62293
0,25489	-0,11829	0,90451	0,08342	0,31861	-0,55440	0,00413	-0,26476

Tabela 2 – Continuação

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,26296	-0,11779	0,92268	0,10216	0,30968	-0,56538	0,00195	-0,02225
0,27115	-0,11944	0,94114	0,13312	0,30088	-0,57749	0,00051	0,27510
0,28794	-0,12022	0,96935	0,13633	0,28369	-0,59983		

Tabela 3: Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,4$, $\alpha = 0$ graus.

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,00013	0,66843	0,27842	-0,37052	0,95070	0,16651	0,26486	-0,37750
0,00113	0,64668	0,28767	-0,36546	0,92949	0,11464	0,25603	-0,38207
0,00297	0,57228	0,29709	-0,35986	0,90865	0,08297	0,24736	-0,38823
0,00545	0,44229	0,30669	-0,35463	0,88818	0,05128	0,23885	-0,39194
0,00838	0,35259	0,31647	-0,34845	0,86808	0,03238	0,23050	-0,39677
0,01163	0,13321	0,32643	-0,34282	0,84834	0,01112	0,22230	-0,40211
0,01513	0,03073	0,33657	-0,33546	0,82895	-0,00638	0,21426	-0,40675
0,01884	-0,08317	0,34691	-0,32907	0,80990	-0,02381	0,20636	-0,40900
0,02272	-0,15132	0,35743	-0,32267	0,79120	-0,03896	0,19861	-0,41310
0,02675	-0,20179	0,36816	-0,31587	0,77284	-0,05311	0,19101	-0,41590
0,03091	-0,24785	0,37908	-0,30892	0,75480	-0,06623	0,18355	-0,42004
0,03521	-0,28159	0,39020	-0,30140	0,73709	-0,07919	0,17622	-0,42127
0,03964	-0,31331	0,40153	-0,29365	0,71969	-0,09142	0,16904	-0,42458
0,04417	-0,32694	0,41306	-0,28722	0,70261	-0,10280	0,16198	-0,42656
0,04882	-0,34451	0,42482	-0,27976	0,68584	-0,11439	0,15507	-0,42961
0,05357	-0,35648	0,43678	-0,27216	0,66937	-0,12506	0,14828	-0,43294
0,05843	-0,36451	0,44897	-0,26426	0,65320	-0,13559	0,14162	-0,43415
0,06342	-0,38890	0,46139	-0,25660	0,63731	-0,14560	0,13509	-0,43295
0,06849	-0,39402	0,47403	-0,24912	0,62172	-0,15510	0,12868	-0,43548
0,07369	-0,40669	0,48691	-0,24045	0,60640	-0,16486	0,12239	-0,43353
0,07900	-0,41535	0,50003	-0,23225	0,59137	-0,17416	0,11623	-0,43550
0,08441	-0,41593	0,51338	-0,22351	0,57660	-0,18351	0,11018	-0,43428
0,08994	-0,41891	0,52699	-0,21475	0,56210	-0,19272	0,10426	-0,43030
0,09558	-0,42407	0,54084	-0,20574	0,54786	-0,20165	0,09844	-0,42459
0,10133	-0,43136	0,55495	-0,19668	0,53388	-0,21003	0,09275	-0,41757
0,10720	-0,43328	0,56932	-0,18787	0,52015	-0,21867	0,08716	-0,41279
0,11319	-0,43741	0,58395	-0,17914	0,50667	-0,22749	0,08169	-0,40967

Tabela 3 – Continuação

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,11929	-0,43529	0,59885	-0,16979	0,49344	-0,23603	0,07633	-0,40245
0,12552	-0,43561	0,61403	-0,16040	0,48044	-0,24412	0,07108	-0,39660
0,13187	-0,43503	0,62948	-0,15050	0,46768	-0,25235	0,06594	-0,37919
0,13834	-0,43382	0,64522	-0,14035	0,45515	-0,26034	0,06091	-0,37124
0,14493	-0,43523	0,66125	-0,13037	0,44285	-0,26761	0,05599	-0,36383
0,15166	-0,43253	0,67757	-0,11963	0,43077	-0,27475	0,05117	-0,33900
0,15851	-0,42853	0,69419	-0,10837	0,41891	-0,28259	0,04647	-0,33837
0,16549	-0,42686	0,71112	-0,09765	0,40727	-0,29075	0,04188	-0,33098
0,17261	-0,42340	0,72835	-0,08655	0,39584	-0,29653	0,03741	-0,31358
0,17987	-0,42151	0,74590	-0,07339	0,38461	-0,30526	0,03306	-0,28164
0,18726	-0,41804	0,76378	-0,06071	0,37359	-0,31251	0,02882	-0,21619
0,19479	-0,41386	0,78198	-0,04688	0,36277	-0,31999	0,02472	-0,18543
0,20247	-0,41000	0,80051	-0,03196	0,35215	-0,32665	0,02076	-0,11745
0,21029	-0,40641	0,81938	-0,01579	0,34172	-0,33308	0,01697	-0,04858
0,21826	-0,40279	0,83860	-0,34405	0,33148	-0,34007	0,01335	0,07307
0,22638	-0,39779	0,85816	0,02120	0,32143	-0,34573	0,00996	0,21973
0,23466	-0,39272	0,87808	0,04400	0,31156	-0,35279	0,00686	0,40736
0,24309	-0,38878	0,89837	0,06886	0,30187	-0,35763	0,00414	0,50049
0,25168	-0,38448	0,91902	0,09874	0,29236	-0,36310	0,00196	0,63404
0,26043	-0,37913	0,94005	0,14206	0,28302	-0,36827	0,00051	0,66219
0,26934	-0,37546	0,96145	0,18061	0,27386	-0,37365		

Tabela 4: Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,5$, $\alpha = 0$ graus.

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,00013	0,75416	0,27842	-0,39764	0,95070	0,17521	0,26486	-0,40550
0,00113	0,72753	0,28767	-0,39214	0,92949	0,12662	0,25603	-0,41030
0,00297	0,64347	0,29709	-0,38596	0,90865	0,09184	0,24736	-0,41756
0,00545	0,51098	0,30669	-0,38001	0,88818	0,05861	0,23885	-0,42147
0,00837	0,39873	0,31647	-0,37327	0,86808	0,03583	0,23050	-0,42748
0,01162	0,23646	0,32643	-0,36701	0,84834	0,01414	0,22230	-0,43180
0,01513	0,13040	0,33657	-0,35885	0,82895	-0,00550	0,21426	-0,43649
0,01884	0,02618	0,34691	-0,35169	0,80990	-0,02170	0,20636	-0,44066
0,02272	-0,05829	0,35743	-0,34450	0,79120	-0,03876	0,19861	-0,44485

Tabela 4 – Continuação

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,02675	-0,12607	0,36816	-0,33667	0,77284	-0,05395	0,19101	-0,44590
0,03092	-0,17545	0,37908	-0,32906	0,75480	-0,06835	0,18355	-0,44930
0,03521	-0,22490	0,39020	-0,32231	0,73709	-0,08220	0,17622	-0,45157
0,03963	-0,25977	0,40153	-0,31405	0,71969	-0,09569	0,16904	-0,45398
0,04416	-0,29467	0,41306	-0,30602	0,70261	-0,10748	0,16198	-0,45684
0,04881	-0,31173	0,42482	-0,29741	0,68584	-0,11899	0,15507	-0,45994
0,05357	-0,33261	0,43678	-0,28988	0,66937	-0,13031	0,14828	-0,46069
0,05843	-0,35463	0,44897	-0,28145	0,65320	-0,14162	0,14162	-0,46178
0,06341	-0,36552	0,46139	-0,27244	0,63731	-0,15271	0,13509	-0,46180
0,06849	-0,38220	0,47403	-0,26360	0,62172	-0,16332	0,12868	-0,46195
0,07369	-0,39571	0,48691	-0,25459	0,60640	-0,17369	0,12239	-0,46175
0,07900	-0,40808	0,50003	-0,24518	0,59137	-0,18381	0,11623	-0,46098
0,08441	-0,42390	0,51338	-0,23675	0,57660	-0,19376	0,11018	-0,45788
0,08994	-0,42705	0,52699	-0,22775	0,56210	-0,20357	0,10426	-0,44885
0,09558	-0,43769	0,54084	-0,21861	0,54786	-0,21342	0,09844	-0,44073
0,10133	-0,44358	0,55495	-0,20836	0,53388	-0,22282	0,09274	-0,43057
0,10720	-0,45584	0,56932	-0,19888	0,52015	-0,23215	0,08716	-0,42353
0,11319	-0,46138	0,58395	-0,18907	0,50667	-0,24078	0,08169	-0,41776
0,11930	-0,46129	0,59885	-0,17883	0,49344	-0,25014	0,07633	-0,40308
0,12552	-0,46115	0,61403	-0,16862	0,48044	-0,25896	0,07108	-0,38653
0,13187	-0,46145	0,62948	-0,15801	0,46768	-0,26809	0,06594	-0,37711
0,13834	-0,46236	0,64522	-0,14715	0,45515	-0,27717	0,06091	-0,35975
0,14493	-0,46188	0,66125	-0,13605	0,44285	-0,28612	0,05599	-0,34085
0,15166	-0,46006	0,67757	-0,12438	0,43077	-0,29277	0,05117	-0,32684
0,15851	-0,45824	0,69419	-0,11334	0,41891	-0,30174	0,04647	-0,30260
0,16549	-0,45525	0,71112	-0,10112	0,40727	-0,31087	0,04188	-0,27629
0,17261	-0,45235	0,72835	-0,08904	0,39584	-0,31802	0,03741	-0,24353
0,17987	-0,45130	0,74590	-0,07556	0,38461	-0,32563	0,03305	-0,19850
0,18726	-0,44746	0,76378	-0,06139	0,37359	-0,33267	0,02882	-0,15833
0,19479	-0,44512	0,78198	-0,04666	0,36277	-0,34074	0,02472	-0,09251
0,20247	-0,44319	0,80051	-0,03067	0,35215	-0,34797	0,02076	-0,02072
0,21029	-0,43891	0,81938	-0,01423	0,34172	-0,35534	0,01696	0,07473
0,21826	-0,43383	0,83860	0,00359	0,33148	-0,36310	0,01335	0,17954
0,22638	-0,42974	0,85816	0,02533	0,32143	-0,36956	0,00996	0,30861
0,23466	-0,42469	0,87808	0,04797	0,31156	-0,37733	0,00686	0,45882
0,24309	-0,41922	0,89837	0,07537	0,30187	-0,38286	0,00414	0,56884
0,25168	-0,41416	0,91902	0,10571	0,29236	-0,38910	0,00195	0,70573
0,26043	-0,40787	0,94005	0,15041	0,28302	-0,39490	0,00051	0,74430
0,26934	-0,40292	0,96145	0,19567	0,27386	-0,40025		

Tabela 5: Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,5$, $\alpha = 4$ graus.

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,00013	0,70073	0,27842	-0,14890	0,95070	0,15670	0,26486	-0,67180
0,00112	0,80623	0,28767	-0,14963	0,92949	0,11577	0,25603	-0,68752
0,00297	0,81061	0,29709	-0,14991	0,90865	0,07958	0,24736	-0,70298
0,00544	0,82161	0,30669	-0,14969	0,88818	0,04939	0,23885	-0,71714
0,00837	0,79003	0,31647	-0,15060	0,86808	0,01939	0,23050	-0,73139
0,01162	0,70478	0,32643	-0,14948	0,84834	-0,00358	0,22230	-0,74512
0,01513	0,65306	0,33657	-0,14864	0,82895	-0,02425	0,21426	-0,75932
0,01884	0,56494	0,34691	-0,14841	0,80990	-0,04719	0,20636	-0,77371
0,02272	0,51297	0,35743	-0,14637	0,79120	-0,06957	0,19861	-0,78834
0,02675	0,44434	0,36816	-0,14459	0,77284	-0,08728	0,19101	-0,80289
0,03092	0,39286	0,37908	-0,14325	0,75480	-0,10770	0,18355	-0,81728
0,03522	0,34380	0,39020	-0,14087	0,73709	-0,12618	0,17622	-0,83217
0,03963	0,30079	0,40153	-0,13872	0,71969	-0,14225	0,16904	-0,84613
0,04416	0,26594	0,41306	-0,13598	0,70261	-0,15971	0,16198	-0,86114
0,04881	0,22572	0,42482	-0,13326	0,68584	-0,17785	0,15507	-0,87543
0,05357	0,19823	0,43678	-0,13075	0,66937	-0,19172	0,14828	-0,89198
0,05843	0,16699	0,44897	-0,12771	0,65320	-0,20899	0,14162	-0,90655
0,06341	0,13813	0,46139	-0,12403	0,63731	-0,22614	0,13509	-0,92199
0,06850	0,11561	0,47403	-0,12056	0,62172	-0,24039	0,12868	-0,93872
0,07369	0,09524	0,48691	-0,11697	0,60640	-0,25464	0,12239	-0,95075
0,07900	0,07535	0,50003	-0,11282	0,59137	-0,27017	0,11623	-0,96464
0,08441	0,05609	0,51338	-0,10855	0,57660	-0,28466	0,11018	-0,98132
0,08994	0,03827	0,52699	-0,10442	0,56210	-0,30044	0,10425	-0,99909
0,09558	0,02129	0,54084	-0,09994	0,54786	-0,31616	0,09844	-1,01389
0,10133	0,00853	0,55495	-0,09518	0,53388	-0,33108	0,09275	-1,02642
0,10720	-0,00096	0,56932	-0,09071	0,52015	-0,34503	0,08716	-1,04433
0,11319	-0,01482	0,58395	-0,08590	0,50667	-0,35982	0,08169	-1,06310
0,11929	-0,02874	0,59885	-0,08056	0,49344	-0,37488	0,07633	-1,07534
0,12552	-0,04117	0,61403	-0,07499	0,48044	-0,39191	0,07108	-1,08906
0,13187	-0,05262	0,62948	-0,06932	0,46768	-0,40533	0,06594	-1,08023
0,13834	-0,06059	0,64522	-0,06355	0,45515	-0,41786	0,06091	-1,09477
0,14493	-0,07091	0,66125	-0,05837	0,44285	-0,43210	0,05599	-1,08577
0,15166	-0,08017	0,67757	-0,05176	0,43077	-0,44785	0,05118	-1,08351
0,15851	-0,08691	0,69419	-0,04487	0,41891	-0,46262	0,04647	-1,08085
0,16549	-0,09591	0,71112	-0,03752	0,40727	-0,47493	0,04188	-1,06768
0,17261	-0,10417	0,72835	-0,03004	0,39584	-0,48988	0,03741	-1,04286
0,17987	-0,10828	0,74590	-0,02286	0,38461	-0,50440	0,03305	-1,01791

Tabela 5 – Continuação

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,18726	-0,11398	0,76378	-0,01371	0,37359	-0,51952	0,02882	-0,97095
0,19479	-0,11727	0,78198	-0,00412	0,36277	-0,53607	0,02472	-0,95590
0,20247	-0,12182	0,80051	0,00513	0,35215	-0,54856	0,02076	-0,86333
0,21029	-0,12676	0,81938	0,01711	0,34172	-0,56527	0,01696	-0,80989
0,21826	-0,13064	0,83860	0,02868	0,33148	-0,57729	0,01335	-0,64721
0,22638	-0,13577	0,85816	0,04393	0,32143	-0,59028	0,00996	-0,49116
0,23466	-0,13979	0,87808	0,05986	0,31156	-0,60593	0,00686	-0,27201
0,24309	-0,14339	0,89837	0,08040	0,30187	-0,61765	0,00414	-0,03291
0,25168	-0,14509	0,91902	0,10529	0,29236	-0,63015	0,00195	0,22501
0,26043	-0,14639	0,94005	0,14148	0,28302	-0,64438	0,00051	0,48219
0,26934	-0,14854	0,96145	0,17454	0,27386	-0,65858		

Tabela 6: Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,5$, $\alpha = 8$ graus.

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,00013	0,43251	0,27842	0,03220	0,97230	0,06593	0,27386	-0,83326
0,00112	0,64191	0,28767	0,02761	0,95070	0,05716	0,26486	-0,86492
0,00297	0,81280	0,29709	0,02257	0,92949	0,03987	0,25603	-0,87018
0,00544	0,81050	0,30669	0,01803	0,90865	0,02160	0,24736	-0,90312
0,00837	0,87106	0,31647	0,01355	0,88818	0,00259	0,23885	-0,90780
0,01162	0,85664	0,32643	0,01034	0,86808	-0,01743	0,23050	-0,94247
0,01513	0,83380	0,33657	0,00664	0,84834	-0,03656	0,22230	-0,95344
0,01884	0,80759	0,34691	0,00351	0,82895	-0,05402	0,21426	-0,97413
0,02272	0,75320	0,35743	0,00101	0,80990	-0,07487	0,20636	-0,99748
0,02675	0,72483	0,36816	-0,00169	0,79120	-0,09336	0,19861	-1,01904
0,03092	0,68797	0,37908	-0,00400	0,77284	-0,11154	0,19101	-1,04205
0,03522	0,64742	0,39020	-0,00591	0,75480	-0,13150	0,18355	-1,07339
0,03963	0,61113	0,40153	-0,00755	0,73709	-0,15089	0,17622	-1,09732
0,04416	0,56612	0,41306	-0,00918	0,71969	-0,17006	0,16904	-1,12319
0,04881	0,54433	0,42482	-0,01042	0,70261	-0,18973	0,16198	-1,15086
0,05357	0,50273	0,43678	-0,01164	0,68584	-0,20878	0,15507	-1,18077
0,05843	0,48450	0,44897	-0,01244	0,66937	-0,22723	0,14828	-1,20819
0,06341	0,45110	0,46139	-0,01302	0,65320	-0,24562	0,14162	-1,23482
0,06850	0,42100	0,47403	-0,01344	0,63731	-0,26288	0,13509	-1,26192

Tabela 6 – Continuação

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,07369	0,40409	0,48691	-0,01361	0,62172	-0,28049	0,12868	-1,29223
0,07900	0,37399	0,50003	-0,01393	0,60640	-0,29899	0,12239	-1,32703
0,08441	0,35051	0,51338	-0,01363	0,59137	-0,31726	0,11623	-1,36271
0,08994	0,33500	0,52699	-0,01355	0,57660	-0,33409	0,11018	-1,40209
0,09558	0,31442	0,54084	-0,01274	0,56210	-0,35437	0,10425	-1,44113
0,10133	0,29525	0,55495	-0,01228	0,54786	-0,37061	0,09844	-1,47269
0,10720	0,27845	0,56932	-0,01129	0,53388	-0,39022	0,09275	-1,51244
0,11319	0,26242	0,58395	-0,01051	0,52015	-0,40698	0,08716	-1,55422
0,11929	0,24359	0,59885	-0,00923	0,50667	-0,42578	0,08169	-1,58654
0,12552	0,22782	0,61403	-0,00813	0,49344	-0,44439	0,07633	-1,63291
0,13187	0,21295	0,62948	-0,00654	0,48044	-0,46345	0,07108	-1,67751
0,13834	0,19796	0,64522	-0,00500	0,46768	-0,47981	0,06594	-1,72439
0,14493	0,18354	0,66125	-0,00308	0,45515	-0,50009	0,06091	-1,77859
0,15166	0,17122	0,67757	-0,00096	0,44285	-0,51961	0,05599	-1,80960
0,15851	0,15962	0,69419	0,00108	0,43077	-0,53720	0,05118	-1,86198
0,16549	0,14836	0,71112	0,00369	0,41891	-0,55711	0,04647	-1,90942
0,17261	0,13746	0,72835	0,00648	0,40727	-0,57616	0,04188	-1,92963
0,17987	0,12627	0,74590	0,00944	0,39584	-0,59370	0,03741	-1,99860
0,18726	0,11568	0,76378	0,01303	0,38461	-0,61782	0,03305	-1,95300
0,19479	0,10601	0,78198	0,01704	0,37359	-0,63233	0,02882	-1,95575
0,20247	0,09551	0,80051	0,02144	0,36277	-0,65357	0,02472	-1,93496
0,21029	0,08722	0,81938	0,02669	0,35215	-0,67461	0,02076	-1,85445
0,21826	0,07839	0,83860	0,03278	0,34172	-0,68953	0,01696	-1,82390
0,22638	0,07108	0,85816	0,04008	0,33148	-0,70713	0,01335	-1,59912
0,23466	0,06297	0,87808	0,04889	0,32143	-0,73090	0,00996	-1,43543
0,24309	0,05709	0,89837	0,06026	0,31156	-0,75502	0,00686	-1,10345
0,25168	0,05044	0,91902	0,07454	0,30187	-0,76763	0,00414	-0,78197
0,26043	0,04285	0,94005	0,09452	0,29236	-0,79105	0,00195	-0,37179
0,26934	0,03818	0,96145	0,13704	0,28302	-0,81197	0,00051	0,02020

Tabela 7: Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,6$, $\alpha = 0$ graus.

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,00014	0,76997	0,27842	-0,43630	0,95070	0,19792	0,26486	-0,43817

Tabela 7 – Continuação

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,00113	0,74925	0,28767	-0,42933	0,92949	0,14035	0,25603	-0,44448
0,00297	0,68399	0,29709	-0,42268	0,90865	0,10472	0,24736	-0,45161
0,00545	0,56281	0,30669	-0,41626	0,88818	0,06032	0,23885	-0,45657
0,00838	0,45338	0,31647	-0,40918	0,86808	0,04540	0,23050	-0,46204
0,01163	0,24810	0,32643	-0,40166	0,84834	0,02089	0,22231	-0,46853
0,01513	0,12158	0,33657	-0,39329	0,82895	-0,00026	0,21426	-0,47573
0,01884	-0,00708	0,34691	-0,38521	0,80990	-0,02015	0,20636	-0,48049
0,02272	-0,09493	0,35743	-0,37665	0,79120	-0,03788	0,19861	-0,48524
0,02675	-0,16264	0,36816	-0,36806	0,77284	-0,05458	0,19101	-0,48874
0,03092	-0,22280	0,37908	-0,35888	0,75480	-0,07018	0,18355	-0,49355
0,03521	-0,27359	0,39020	-0,35340	0,73709	-0,08512	0,17622	-0,49614
0,03964	-0,30866	0,40153	-0,34344	0,71969	-0,10007	0,16904	-0,49836
0,04416	-0,33862	0,41306	-0,33237	0,70261	-0,11199	0,16199	-0,50050
0,04882	-0,36158	0,42482	-0,32209	0,68584	-0,12498	0,15507	-0,50452
0,05357	-0,38206	0,43678	-0,31344	0,66937	-0,13788	0,14828	-0,50534
0,05843	-0,39948	0,44897	-0,30341	0,65320	-0,15074	0,14162	-0,50575
0,06342	-0,41954	0,46139	-0,29343	0,63731	-0,16297	0,13509	-0,50574
0,06849	-0,43351	0,47403	-0,28264	0,62172	-0,17480	0,12868	-0,50530
0,07369	-0,44795	0,48691	-0,27247	0,60640	-0,18607	0,12239	-0,50441
0,07900	-0,45711	0,50003	-0,26149	0,59137	-0,19842	0,11623	-0,50157
0,08441	-0,46526	0,51338	-0,25069	0,57660	-0,20794	0,11018	-0,49786
0,08994	-0,47320	0,52699	-0,24042	0,56210	-0,21902	0,10426	-0,49285
0,09558	-0,48101	0,54084	-0,24187	0,54786	-0,23129	0,09844	-0,48769
0,10133	-0,48523	0,55495	-0,22305	0,53388	-0,23920	0,09275	-0,48039
0,10720	-0,49089	0,56932	-0,21181	0,52015	-0,24654	0,08716	-0,47243
0,11319	-0,49413	0,58395	-0,20403	0,50667	-0,25725	0,08169	-0,46456
0,11929	-0,49653	0,59885	-0,19187	0,49344	-0,26785	0,07633	-0,45521
0,12552	-0,49742	0,61403	-0,17993	0,48044	-0,27781	0,07108	-0,44451
0,13187	-0,49749	0,62948	-0,16863	0,46768	-0,29055	0,06594	-0,42828
0,13834	-0,49786	0,64522	-0,15652	0,45515	-0,30344	0,06091	-0,41263
0,14493	-0,49746	0,66125	-0,14392	0,44285	-0,30788	0,05599	-0,39539
0,15166	-0,49711	0,67757	-0,13076	0,43077	-0,32225	0,05117	-0,37083
0,15851	-0,49402	0,69419	-0,11785	0,41891	-0,33101	0,04647	-0,34881
0,16549	-0,49193	0,71112	-0,10622	0,40727	-0,34028	0,04188	-0,32132
0,17261	-0,49023	0,72835	-0,09573	0,39584	-0,35278	0,03741	-0,28755
0,17987	-0,48930	0,74590	-0,07799	0,38461	-0,35514	0,03306	-0,24244
0,18726	-0,48646	0,76378	-0,06459	0,37359	-0,36274	0,02882	-0,18409
0,19479	-0,48386	0,78198	-0,04769	0,36277	-0,37179	0,02472	-0,12359
0,20247	-0,48173	0,80051	-0,03040	0,35215	-0,38020	0,02076	-0,04419
0,21029	-0,47867	0,81938	-0,01130	0,34172	-0,38844	0,01697	0,05825

Tabela 7 – Continuação

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,21826	-0,47490	0,83860	0,00728	0,33148	-0,39647	0,01335	0,18595
0,22638	-0,46980	0,85816	0,03246	0,32143	-0,40354	0,00996	0,33714
0,23466	-0,46522	0,87808	0,05697	0,31156	-0,41048	0,00686	0,51334
0,24309	-0,46104	0,89837	0,08579	0,30187	-0,41578	0,00414	0,61838
0,25168	-0,45570	0,91902	0,11966	0,29236	-0,42134	0,00196	0,73266
0,26043	-0,44862	0,94005	0,16987	0,28302	-0,42707	0,00052	0,76316
0,26934	-0,44258	0,96145	0,22165	0,27386	-0,43304		

Tabela 8: Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,73$, $\alpha = 0$ graus.

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,00013	0,87298	0,27842	-0,55836	0,95070	0,22349	0,26486	-0,57355
0,00113	0,84886	0,28767	-0,54731	0,92949	0,16704	0,25603	-0,58485
0,00297	0,77753	0,29709	-0,53669	0,90865	0,12476	0,24736	-0,59653
0,00545	0,65839	0,30669	-0,52652	0,88818	0,08612	0,23885	-0,60502
0,00837	0,53936	0,31647	-0,51619	0,86808	0,05802	0,23050	-0,61448
0,01162	0,38700	0,32643	-0,50482	0,84834	0,03164	0,22231	-0,62286
0,01513	0,26735	0,33657	-0,49170	0,82895	0,00786	0,21426	-0,63176
0,01884	0,16140	0,34691	-0,47918	0,80990	-0,01261	0,20636	-0,63831
0,02272	0,06356	0,35743	-0,46669	0,79120	-0,03378	0,19861	-0,64224
0,02676	-0,01845	0,36816	-0,45362	0,77284	-0,05289	0,19101	-0,64371
0,03092	-0,08509	0,37908	-0,44088	0,75480	-0,07108	0,18355	-0,64729
0,03521	-0,15744	0,39020	-0,42951	0,73709	-0,08910	0,17622	-0,64868
0,03963	-0,20385	0,40153	-0,41656	0,71969	-0,10594	0,16904	-0,64936
0,04416	-0,25611	0,41306	-0,40341	0,70261	-0,12155	0,16198	-0,65052
0,04882	-0,28745	0,42482	-0,39030	0,68584	-0,13656	0,15506	-0,65156
0,05357	-0,32958	0,43678	-0,37788	0,66937	-0,15145	0,14828	-0,64699
0,05843	-0,37147	0,44897	-0,36464	0,65320	-0,16657	0,14162	-0,64319
0,06342	-0,39724	0,46139	-0,35166	0,63731	-0,18145	0,13509	-0,63814
0,06849	-0,43327	0,47403	-0,33810	0,62172	-0,19577	0,12868	-0,63029
0,07369	-0,46288	0,48691	-0,32480	0,60640	-0,20973	0,12239	-0,62336
0,07900	-0,48676	0,50003	-0,31157	0,59137	-0,22401	0,11623	-0,60996
0,08441	-0,51502	0,51338	-0,29826	0,57660	-0,23743	0,11018	-0,59624
0,08994	-0,52811	0,52699	-0,28527	0,56210	-0,25125	0,10426	-0,57518

Tabela 8 – Continuação

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,09558	-0,54993	0,54084	-0,27227	0,54786	-0,26504	0,09844	-0,55735
0,10133	-0,56384	0,55495	-0,25805	0,53388	-0,27866	0,09274	-0,53521
0,10720	-0,59003	0,56932	-0,24458	0,52015	-0,29157	0,08716	-0,51950
0,11319	-0,60504	0,58395	-0,23105	0,50667	-0,30486	0,08169	-0,50278
0,11930	-0,61677	0,59885	-0,21679	0,49344	-0,31836	0,07633	-0,47705
0,12552	-0,62564	0,61403	-0,20290	0,48044	-0,33132	0,07108	-0,44438
0,13187	-0,63377	0,62948	-0,18853	0,46768	-0,34497	0,06594	-0,42028
0,13834	-0,64205	0,64522	-0,17395	0,45515	-0,35829	0,06091	-0,38379
0,14493	-0,64557	0,66125	-0,15922	0,44285	-0,37155	0,05599	-0,34547
0,15166	-0,64912	0,67757	-0,14378	0,43077	-0,38381	0,05117	-0,31680
0,15851	-0,65101	0,69419	-0,12898	0,41891	-0,39686	0,04647	-0,27056
0,16549	-0,64965	0,71112	-0,11329	0,40727	-0,41033	0,04189	-0,22654
0,17261	-0,64878	0,72835	-0,09756	0,39584	-0,42308	0,03740	-0,18168
0,17987	-0,64884	0,74590	-0,08037	0,38461	-0,43499	0,03306	-0,11750
0,18726	-0,64547	0,76378	-0,06220	0,37359	-0,44707	0,02882	-0,06308
0,19479	-0,64270	0,78198	-0,04375	0,36277	-0,46026	0,02472	0,02308
0,20247	-0,64071	0,80051	-0,02356	0,35215	-0,47292	0,02076	0,10668
0,21029	-0,63568	0,81938	-0,00279	0,34172	-0,48546	0,01696	0,21394
0,21826	-0,62732	0,83860	0,01902	0,33148	-0,49835	0,01335	0,32399
0,22638	-0,61861	0,85816	0,04523	0,32143	-0,51060	0,00996	0,45848
0,23466	-0,60993	0,87808	0,07267	0,31156	-0,52167	0,00686	0,60234
0,24309	-0,60062	0,89837	0,10528	0,30187	-0,53152	0,00414	0,71331
0,25168	-0,59093	0,91902	0,14258	0,29236	-0,54201	0,00196	0,82870
0,26043	-0,57917	0,94005	0,19420	0,28302	-0,55292	0,00051	0,86475
0,26934	-0,56866	0,96145	0,25006	0,27386	-0,56360		

Tabela 9: Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,75$, $\alpha = 0$ graus.

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,00013	0,88553	0,27842	-0,59892	0,95070	0,23041	0,26486	-0,62227
0,00113	0,86178	0,28767	-0,58317	0,92949	0,17347	0,25603	-0,63904
0,00297	0,79168	0,29709	-0,56884	0,90865	0,13061	0,24736	-0,65467
0,00545	0,67435	0,30669	-0,55554	0,88818	0,09138	0,23885	-0,66598
0,00837	0,55639	0,31647	-0,54267	0,86808	0,06279	0,23050	-0,67733

Tabela 9 – Continuação

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,01162	0,40619	0,32643	-0,52973	0,84834	0,03580	0,22231	-0,68675
0,01513	0,28718	0,33657	-0,51541	0,82895	0,01167	0,21426	-0,69585
0,01884	0,18209	0,34691	-0,50176	0,80990	-0,00934	0,20636	-0,70168
0,02272	0,08400	0,35743	-0,48780	0,79120	-0,03098	0,19861	-0,70426
0,02676	0,00161	0,36816	-0,47318	0,77284	-0,05058	0,19101	-0,70432
0,03092	-0,06534	0,37908	-0,45902	0,75480	-0,06928	0,18355	-0,70599
0,03521	-0,13823	0,39020	-0,44635	0,73709	-0,08780	0,17622	-0,70478
0,03963	-0,18632	0,40153	-0,43234	0,71969	-0,10510	0,16904	-0,70219
0,04416	-0,23954	0,41306	-0,41801	0,70261	-0,12123	0,16198	-0,69992
0,04882	-0,27223	0,42482	-0,40381	0,68584	-0,13673	0,15506	-0,69637
0,05357	-0,31593	0,43678	-0,39035	0,66937	-0,15215	0,14828	-0,68722
0,05843	-0,35942	0,44897	-0,37613	0,65320	-0,16777	0,14162	-0,67853
0,06342	-0,38711	0,46139	-0,36229	0,63731	-0,18328	0,13509	-0,66843
0,06849	-0,42512	0,47403	-0,34776	0,62172	-0,19815	0,12868	-0,65537
0,07369	-0,45628	0,48691	-0,33351	0,60640	-0,21264	0,12239	-0,64316
0,07900	-0,48133	0,50003	-0,31960	0,59137	-0,22767	0,11623	-0,62496
0,08441	-0,51143	0,51338	-0,30547	0,57660	-0,24157	0,11018	-0,60671
0,08994	-0,52659	0,52699	-0,29183	0,56210	-0,25603	0,10425	-0,58136
0,09558	-0,55096	0,54084	-0,27810	0,54786	-0,27043	0,09844	-0,55977
0,10133	-0,56803	0,55495	-0,26311	0,53388	-0,28493	0,09274	-0,53488
0,10720	-0,59844	0,56932	-0,24903	0,52015	-0,29843	0,08716	-0,51693
0,11319	-0,61779	0,58395	-0,23497	0,50667	-0,31248	0,08169	-0,49809
0,11930	-0,63413	0,59885	-0,21999	0,49344	-0,32674	0,07633	-0,47115
0,12552	-0,64798	0,61403	-0,20558	0,48044	-0,34048	0,07108	-0,43681
0,13187	-0,66146	0,62948	-0,19060	0,46768	-0,35509	0,06594	-0,41145
0,13834	-0,67489	0,64522	-0,17543	0,45515	-0,36927	0,06091	-0,37261
0,14493	-0,68355	0,66125	-0,16022	0,44285	-0,38348	0,05599	-0,33255
0,15166	-0,69156	0,67757	-0,14421	0,43077	-0,39677	0,05117	-0,30244
0,15851	-0,69823	0,69419	-0,12887	0,41891	-0,41087	0,04647	-0,25461
0,16549	-0,70076	0,71112	-0,11273	0,40727	-0,42550	0,04189	-0,20945
0,17261	-0,70325	0,72835	-0,09657	0,39584	-0,43937	0,03740	-0,16325
0,17987	-0,70633	0,74590	-0,07881	0,38461	-0,45242	0,03306	-0,09781
0,18726	-0,70517	0,76378	-0,06014	0,37359	-0,46592	0,02882	-0,04344
0,19479	-0,70410	0,78198	-0,04122	0,36277	-0,48059	0,02472	0,04342
0,20247	-0,70340	0,80051	-0,02051	0,35215	-0,49475	0,02076	0,12721
0,21029	-0,69954	0,81938	0,00075	0,34172	-0,50858	0,01696	0,23437
0,21826	-0,69144	0,83860	0,02304	0,33148	-0,52258	0,01335	0,34361
0,22638	-0,68208	0,85816	0,04972	0,32143	-0,53622	0,00996	0,47676
0,23466	-0,67193	0,87808	0,07767	0,31156	-0,54934	0,00686	0,61877
0,24309	-0,66024	0,89837	0,11084	0,30187	-0,56211	0,00414	0,72855

Tabela 9 – Continuação

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,25168	-0,64714	0,91902	0,14871	0,29236	-0,57595	0,00196	0,84188
0,26043	-0,63064	0,94005	0,20081	0,28302	-0,59103	0,00051	0,87747
0,26934	-0,61452	0,96145	0,25729	0,27386	-0,60670		

Tabela 10: Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,75$, $\alpha = 3$ graus.

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,00013	0,90260	0,27842	-0,31814	0,97230	0,25102	0,27386	-1,23908
0,00112	0,93847	0,28767	-0,31514	0,95070	0,20413	0,26486	-1,23376
0,00297	0,91571	0,29709	-0,31338	0,92949	0,16560	0,25603	-1,22914
0,00544	0,86378	0,30669	-0,31096	0,90865	0,12607	0,24736	-1,22459
0,00837	0,81250	0,31647	-0,30666	0,88818	0,09634	0,23885	-1,21926
0,01162	0,69771	0,32643	-0,30304	0,86808	0,06867	0,23050	-1,21305
0,01513	0,60760	0,33657	-0,29948	0,84834	0,04266	0,22230	-1,20582
0,01884	0,51605	0,34691	-0,29572	0,82895	0,01752	0,21426	-1,19879
0,02272	0,44247	0,35743	-0,28999	0,80990	-0,00453	0,20636	-1,19116
0,02675	0,37463	0,36816	-0,28422	0,79120	-0,02758	0,19861	-1,18391
0,03092	0,31479	0,37908	-0,27824	0,77284	-0,04530	0,19101	-1,17481
0,03522	0,25906	0,39020	-0,27270	0,75480	-0,06361	0,18355	-1,16353
0,03963	0,20984	0,40153	-0,26690	0,73709	-0,08190	0,17622	-1,15135
0,04416	0,16136	0,41306	-0,26020	0,71969	-0,09709	0,16904	-1,14004
0,04881	0,12683	0,42482	-0,25304	0,70261	-0,11403	0,16198	-1,13006
0,05357	0,08573	0,43678	-0,24570	0,68584	-0,12948	0,15507	-1,11930
0,05843	0,05384	0,44897	-0,23801	0,66937	-0,14387	0,14828	-1,10583
0,06341	0,02221	0,46139	-0,23018	0,65320	-0,15713	0,14162	-1,09123
0,06850	-0,01005	0,47403	-0,22230	0,63731	-0,17035	0,13509	-1,07866
0,07369	-0,03151	0,48691	-0,21419	0,62172	-0,18364	0,12868	-1,06505
0,07900	-0,05677	0,50003	-0,20585	0,60640	-0,19605	0,12239	-1,04914
0,08441	-0,08513	0,51338	-0,19713	0,59137	-0,20751	0,11623	-1,02680
0,08994	-0,10370	0,52699	-0,18891	0,57660	-0,21791	0,11018	-1,00936
0,09558	-0,12557	0,54084	-0,18055	0,56210	-0,22707	0,10425	-0,99213
0,10133	-0,14960	0,55495	-0,17237	0,54786	-0,23683	0,09844	-0,96582
0,10720	-0,17022	0,56932	-0,16296	0,53388	-0,24486	0,09275	-0,94311
0,11319	-0,18273	0,58395	-0,15339	0,52015	-0,25322	0,08716	-0,92087

Tabela 10 – Continuação

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,11929	-0,19721	0,59885	-0,14348	0,50667	-0,26008	0,08169	-0,88536
0,12552	-0,21212	0,61403	-0,13407	0,49344	-0,26639	0,07633	-0,86926
0,13187	-0,23316	0,62948	-0,12447	0,48044	-0,27573	0,07108	-0,84733
0,13834	-0,24366	0,64522	-0,11402	0,46768	-0,29699	0,06594	-0,81269
0,14493	-0,25769	0,66125	-0,10310	0,45515	-0,34934	0,06091	-0,77514
0,15166	-0,26451	0,67757	-0,09274	0,44285	-0,43703	0,05599	-0,74836
0,15851	-0,27506	0,69419	-0,08155	0,43077	-0,66146	0,05118	-0,69602
0,16549	-0,28288	0,71112	-0,06939	0,41891	-0,95792	0,04647	-0,66404
0,17261	-0,29041	0,72835	-0,05780	0,40727	-1,15014	0,04188	-0,60014
0,17987	-0,29594	0,74590	-0,04510	0,39584	-1,22612	0,03741	-0,54000
0,18726	-0,30105	0,76378	-0,03203	0,38461	-1,25793	0,03305	-0,50366
0,19479	-0,30443	0,78198	-0,01754	0,37359	-1,26623	0,02882	-0,41757
0,20247	-0,30876	0,80051	-0,00279	0,36277	-1,26875	0,02472	-0,34526
0,21029	-0,31193	0,81938	0,01455	0,35215	-1,26722	0,02076	-0,23772
0,21826	-0,31489	0,83860	0,03217	0,34172	-1,26543	0,01696	-0,13061
0,22638	-0,31744	0,85816	0,05198	0,33148	-1,26311	0,01335	0,00554
0,23466	-0,31874	0,87808	0,07592	0,32143	-1,26004	0,00996	0,15879
0,24309	-0,31937	0,89837	0,10252	0,31156	-1,25639	0,00686	0,33203
0,25168	-0,31982	0,91902	0,13479	0,30187	-1,25234	0,00414	0,51202
0,26043	-0,31929	0,94005	0,17532	0,29236	-1,24818	0,00195	0,67771
0,26934	-0,32015	0,96145	0,22507	0,28302	-1,24386	0,00051	0,80611

Tabela 11: Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,75$, $\alpha = 4$ graus.

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,00013	0,89756	0,27842	-0,25198	0,95070	0,20875	0,26486	-1,32030
0,00112	0,94253	0,28767	-0,25178	0,92949	0,17139	0,25603	-1,31564
0,00297	0,92564	0,29709	-0,25095	0,90865	0,13776	0,24736	-1,31074
0,00544	0,90032	0,30669	-0,24969	0,88818	0,10858	0,23885	-1,30530
0,00837	0,84681	0,31647	-0,24921	0,86808	0,07926	0,23050	-1,29973
0,01162	0,74922	0,32643	-0,24690	0,84834	0,05684	0,22230	-1,29370
0,01513	0,67089	0,33657	-0,24407	0,82895	0,03710	0,21426	-1,28756
0,01884	0,58233	0,34691	-0,24189	0,80990	0,01501	0,20636	-1,28111
0,02272	0,51479	0,35743	-0,23836	0,79120	-0,00610	0,19861	-1,27398

Tabela 11 – Continuação

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,02675	0,44639	0,36816	-0,23439	0,77284	-0,02332	0,19101	-1,26654
0,03092	0,38938	0,37908	-0,23079	0,75480	-0,04221	0,18355	-1,25862
0,03522	0,33496	0,39020	-0,22643	0,73709	-0,05944	0,17622	-1,25025
0,03963	0,28827	0,40153	-0,22176	0,71969	-0,07385	0,16904	-1,24142
0,04416	0,24425	0,41306	-0,21643	0,70261	-0,08935	0,16198	-1,23165
0,04881	0,20660	0,42482	-0,21104	0,68584	-0,10470	0,15507	-1,22008
0,05357	0,17029	0,43678	-0,20611	0,66937	-0,11671	0,14828	-1,20717
0,05843	0,13939	0,44897	-0,20080	0,65320	-0,13080	0,14162	-1,19160
0,06341	0,11062	0,46139	-0,19434	0,63731	-0,14419	0,13509	-1,17768
0,06850	0,07851	0,47403	-0,18781	0,62172	-0,15544	0,12868	-1,16554
0,07369	0,05736	0,48691	-0,18135	0,60640	-0,16565	0,12239	-1,14800
0,07900	0,03354	0,50003	-0,17431	0,59137	-0,17654	0,11623	-1,12893
0,08441	0,01183	0,51338	-0,16727	0,57660	-0,18621	0,11018	-1,11299
0,08994	-0,00564	0,52699	-0,16025	0,56210	-0,19639	0,10425	-1,09733
0,09558	-0,02591	0,54084	-0,15304	0,54786	-0,20683	0,09844	-1,07735
0,10133	-0,04703	0,55495	-0,14553	0,53388	-0,21751	0,09275	-1,05323
0,10720	-0,06411	0,56932	-0,13804	0,52015	-0,22902	0,08716	-1,03086
0,11319	-0,08211	0,58395	-0,13023	0,50667	-0,24209	0,08169	-1,00826
0,11929	-0,10129	0,59885	-0,12184	0,49344	-0,26117	0,07633	-0,97842
0,12552	-0,11802	0,61403	-0,11323	0,48044	-0,30428	0,07108	-0,94489
0,13187	-0,13729	0,62948	-0,10447	0,46768	-0,38053	0,06594	-0,89275
0,13834	-0,14967	0,64522	-0,09575	0,45515	-0,53492	0,06091	-0,86184
0,14493	-0,16331	0,66125	-0,08760	0,44285	-0,84893	0,05599	-0,80978
0,15166	-0,17508	0,67757	-0,07804	0,43077	-1,16416	0,05118	-0,76744
0,15851	-0,18171	0,69419	-0,06805	0,41891	-1,30278	0,04647	-0,72715
0,16549	-0,19362	0,71112	-0,05741	0,40727	-1,33773	0,04188	-0,67796
0,17261	-0,20236	0,72835	-0,04678	0,39584	-1,35379	0,03741	-0,62055
0,17987	-0,20937	0,74590	-0,03667	0,38461	-1,35742	0,03305	-0,55713
0,18726	-0,21435	0,76378	-0,02387	0,37359	-1,35775	0,02882	-0,48432
0,19479	-0,22097	0,78198	-0,01083	0,36277	-1,35570	0,02472	-0,42465
0,20247	-0,22492	0,80051	0,00188	0,35215	-1,35271	0,02076	-0,31197
0,21029	-0,23212	0,81938	0,01768	0,34172	-1,34995	0,01696	-0,22470
0,21826	-0,23514	0,83860	0,03340	0,33148	-1,34705	0,01335	-0,07226
0,22638	-0,24145	0,85816	0,05230	0,32143	-1,34413	0,00996	0,07251
0,23466	-0,24440	0,87808	0,07318	0,31156	-1,34115	0,00686	0,25606
0,24309	-0,24883	0,89837	0,09793	0,30187	-1,33789	0,00414	0,44741
0,25168	-0,25022	0,91902	0,12755	0,29236	-1,33428	0,00195	0,62286
0,26043	-0,25083	0,94005	0,17039	0,28302	-1,33047	0,00051	0,78100
0,26934	-0,25221	0,96145	0,21741	0,27386	-1,32602		

Tabela 12: Distribuição de C_p ao longo da superfície do perfil NACA0012. $Ma_\infty = 0,8$, $\alpha = 0$ graus.

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,00014	0,91318	0,27842	-0,83016	0,95070	0,24862	0,26486	-0,82088
0,00113	0,89060	0,28767	-0,83600	0,92949	0,19379	0,25603	-0,81409
0,00297	0,82416	0,29709	-0,84194	0,90865	0,15211	0,24736	-0,80604
0,00545	0,71264	0,30669	-0,84787	0,88818	0,11394	0,23885	-0,79702
0,00837	0,59980	0,31647	-0,85227	0,86808	0,08599	0,23050	-0,78701
0,01162	0,45697	0,32643	-0,85638	0,84834	0,05941	0,22231	-0,77660
0,01513	0,34229	0,33657	-0,86079	0,82895	0,03613	0,21426	-0,76696
0,01884	0,24154	0,34691	-0,86608	0,80990	0,01576	0,20636	-0,75665
0,02272	0,14623	0,35743	-0,87129	0,79120	-0,00524	0,19861	-0,74724
0,02676	0,06587	0,36816	-0,87545	0,77284	-0,02409	0,19101	-0,73584
0,03092	0,00092	0,37908	-0,87702	0,75480	-0,04186	0,18355	-0,72573
0,03521	-0,06998	0,39020	-0,87639	0,73709	-0,05939	0,17622	-0,71285
0,03963	-0,11831	0,40153	-0,86429	0,71969	-0,07547	0,16904	-0,69990
0,04416	-0,17098	0,41306	-0,82238	0,70261	-0,09019	0,16198	-0,68775
0,04882	-0,20429	0,42482	-0,72256	0,68584	-0,10366	0,15506	-0,67499
0,05357	-0,24817	0,43678	-0,53387	0,66937	-0,11704	0,14828	-0,65876
0,05843	-0,29161	0,44897	-0,35295	0,65320	-0,13010	0,14162	-0,64390
0,06342	-0,32011	0,46139	-0,25711	0,63731	-0,14266	0,13509	-0,62814
0,06849	-0,35871	0,47403	-0,21546	0,62172	-0,15358	0,12868	-0,60996
0,07369	-0,38992	0,48691	-0,20095	0,60640	-0,16389	0,12239	-0,59304
0,07900	-0,41474	0,50003	-0,19883	0,59137	-0,17365	0,11623	-0,57068
0,08441	-0,44521	0,51338	-0,19925	0,57660	-0,18136	0,11018	-0,54885
0,08994	-0,46147	0,52699	-0,19912	0,56210	-0,18893	0,10425	-0,52066
0,09558	-0,48700	0,54084	-0,19656	0,54786	-0,19428	0,09844	-0,49658
0,10133	-0,50605	0,55495	-0,19190	0,53388	-0,19817	0,09274	-0,47044
0,10720	-0,53912	0,56932	-0,18528	0,52015	-0,19942	0,08716	-0,45130
0,11319	-0,56154	0,58395	-0,17779	0,50667	-0,19902	0,08169	-0,43144
0,11930	-0,58190	0,59885	-0,16871	0,49344	-0,19897	0,07633	-0,40477
0,12552	-0,60015	0,61403	-0,15932	0,48044	-0,20463	0,07108	-0,37029
0,13187	-0,61862	0,62948	-0,14804	0,46768	-0,23216	0,06594	-0,34508
0,13834	-0,63729	0,64522	-0,13632	0,45515	-0,29420	0,06091	-0,30512
0,14493	-0,65197	0,66125	-0,12399	0,44285	-0,43608	0,05599	-0,26481
0,15166	-0,66618	0,67757	-0,11037	0,43077	-0,63887	0,05117	-0,23456
0,15851	-0,68138	0,69419	-0,09682	0,41891	-0,78101	0,04647	-0,18637
0,16549	-0,69346	0,71112	-0,08233	0,40727	-0,85056	0,04189	-0,14120
0,17261	-0,70614	0,72835	-0,06782	0,39584	-0,87223	0,03740	-0,09497
0,17987	-0,72018	0,74590	-0,05097	0,38461	-0,87709	0,03306	-0,03037

Tabela 12 – Continuação

x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p	x/c	C_p
0,18726	-0,73080	0,76378	-0,03324	0,37359	-0,87646	0,02881	0,02166
0,19479	-0,74137	0,78198	-0,01509	0,36277	-0,87355	0,02472	0,10678
0,20247	-0,75229	0,80051	0,00487	0,35215	-0,86862	0,02076	0,18818
0,21029	-0,76170	0,81938	0,02551	0,34172	-0,86350	0,01696	0,29188
0,21826	-0,77174	0,83860	0,04717	0,33148	-0,85857	0,01335	0,39679
0,22638	-0,78172	0,85816	0,07313	0,32143	-0,85405	0,00996	0,52422
0,23466	-0,79209	0,87808	0,10053	0,31156	-0,85062	0,00686	0,65941
0,24309	-0,80159	0,89837	0,13288	0,30187	-0,84498	0,00414	0,76448
0,25168	-0,81008	0,91902	0,16997	0,29236	-0,83896	0,00196	0,87165
0,26043	-0,81751	0,94005	0,22015	0,28302	-0,83314	0,00051	0,90562
0,26934	-0,82383	0,96145	0,27459	0,27386	-0,82692		

Apêndice D - Função de Theodorsen

Tabela 1: Tabela de valores da função de Theodorsen.

Frequência reduzida (k)	Parte Real $F(k)$	Parte Imaginária $G(k)$
0	1	0
0,01	0,9824216	-0,0456521
0,02	0,9637253	-0,0752079
0,03	0,9450111	-0,0979135
0,04	0,9267018	-0,1160013
0,05	0,9090087	-0,1306443
0,06	0,8920397	-0,1425944
0,08	0,8604318	-0,1604021
0,1	0,8319241	-0,1723022
0,12	0,8063273	-0,1800727
0,14	0,7833715	-0,1848904
0,16	0,7627719	-0,1875659
0,18	0,744257	-0,1886727
0,2	0,7275799	-0,1886242
0,22	0,7125211	-0,1877232
0,24	0,6988879	-0,186194
0,26	0,6865125	-0,1842043
0,28	0,6752492	-0,1818807
0,3	0,6649711	-0,1793191
0,32	0,6555686	-0,1765929
0,34	0,646946	-0,173758
0,36	0,63902	-0,1708575
0,38	0,6317179	-0,1679244
0,4	0,6249763	-0,164984
0,42	0,6187392	-0,1620556
0,44	0,6129575	-0,1591543
0,46	0,6075879	-0,1562909
0,48	0,6025921	-0,153474
0,5	0,5979361	-0,1507095
0,52	0,5935896	-0,1480019

Tabela 1 – Continuação

Frequência reduzida (k)	Parte Real $F(k)$	Parte Imaginária $G(k)$
0,54	0,5895258	-0,1453541
0,56	0,5857205	-0,1427682
0,58	0,5821522	-0,140245
0,6	0,5788016	-0,1377852
0,62	0,5756512	-0,1353885
0,64	0,5726853	-0,1330545
0,66	0,5698898	-0,1307822
0,68	0,5672518	-0,1285708
0,7	0,5647596	-0,1264189
0,72	0,5624026	-0,1243252
0,74	0,5601712	-0,1222882
0,76	0,5580567	-0,1203065
0,78	0,5560509	-0,1183784
0,8	0,5541466	-0,1165024
0,82	0,5523369	-0,1146768
0,86	0,5489774	-0,1111714
0,9	0,5459286	-0,1078496
0,94	0,5431533	-0,1046996
0,98	0,5406197	-0,1017105
1	0,5394349	-0,1002729
1,1	0,5342148	-0,0936062
1,2	0,529956	-0,087709
1,3	0,5264367	-0,0824643
1,4	0,5234957	-0,0777759
1,5	0,5210132	-0,0735641
1,6	0,5188992	-0,0697629
1,7	0,5170845	-0,0663173
1,8	0,5155155	-0,0631816
1,9	0,5141501	-0,0603171
2	0,5129548	-0,0576913
2,1	0,5119026	-0,0552762
2,2	0,5109717	-0,0530482
2,3	0,5101443	-0,0509871
2,4	0,5094058	-0,049075
2,5	0,508744	-0,0472969
3	0,5062799	-0,0400039
4	0,5036709	-0,0304961
5	0,5023973	-0,0245986
10	0,5006178	-0,0124467

Índice Remissivo

- Ângulo
 - Fase, 197
- Ângulo de ataque, 155
- Aerodinâmica, 37, 177
- Aeroelasticidade, 201
- Arfagem, 201
- arfagem, 200
- Coeficiente
 - Pressão, 179
- Condição de Contorno, 74
 - Convencional, 107
 - Dirichlet, 98
 - Escorregamento Livre, 105
 - Externa, 72
 - MFI-EL, 106
 - MFI-ELCF, 122, 126
 - Não Reflexiva, 73, 98
 - Reflexiva, 98
 - Sem Escorregamento, 105
- Discretização, *veja* Esquema
- Domínio
 - Computacional, 56, 72, 74, 113
 - Físico, 43, 44, 62, 72
- Entropia, 74
- Equações
 - Euler, 49
 - Governantes, 47
- Erros, 79
 - Implementação, 80
 - Implementação, 79, 96
 - Modelagem, 79
- Esquema
 - Interpolação, 124
 - MUSCL, 70
 - TVD, 65
 - Upwind, 69
- Estabilidade, 75
 - CFL, 55, 76
 - Fronteira Imersa, 76
- Euleriano, 50
- euleriano, 36
- Flutter, 186, 195
 - Derivadas, 194, 196
- Força
 - de Amortecimento, 53
 - de Corpo, 51
 - Elástica, 52
- Função
 - Bessel, 199
 - Circulação, 199
 - Hänkel, 199
- Função
 - Delta, 52, 60, 108, 126
 - Gaussiana, 61
 - Homogênea, 66
 - Perturbação, 84
- Histerese, 180, 194
- Interpolação
 - Bilinear, 156
- Lagrangiano, 50
- lagrangiano, 36
- Lei de Hooke Generalizada, 59
- Leis de Conservação, 48, 55
 - Energia, 49
 - Massa, 48
 - Quantidade de Movimento, 48
- Limitador de Fluxo, 71
 - ACM, 71, 100
 - Min-Mod, 71, 96, 100, 104
 - Van Albada, 71

- Van Leer, 71
- Linha de Corrente, 100, 108
- Método
 - Fronteira Imersa, 36, 56, 106
 - Fronteira Virtual, 37
 - Invariantes de Rieman, 55, 98
 - Runge-Kutta, 55, 56
 - Solução Manufaturada, 80, 81
 - Steger-Warming, 55, 65
- Mach
 - de Fluxo Livre, 43
 - Local, 43
- Malha, 84
 - Espaçamento Variável, 113
 - Euleriana, 56
 - Lagrangiana, 56
 - Regular, 56
- Matriz, 195
 - Amortecimento, 195
 - Autovalor, 66, 67
 - Autovetor, 66
 - Determinante, 202
 - Massa, 195
 - Rigidez, 195
- Monotonicidade, 65
- Norma
 - L_1 para matrizes, 84
 - Hilbert-Schmidt, 131
- Operador
 - Diferenças, 70
 - Razão, 71
- Ordem de Convergência, 81, 95
- Oscilação Numérica, 104
- Parâmetro
 - Estabilidade, 76
- MUSCL, 70
- Rigidez, 59
- Singularidade, 71
- Suavização, 69
- Placa Plana, 199
- Problema
 - Interpolação, 121
 - Placa Plana, 96
 - Reflexão de Choque, 96, 107
 - Seção Circular, 133
 - Seção Quadrada, 113
 - Transiente, 114
- Regime
 - Hipersônico, 46
 - Subsônico, 44, 55, 73, 75
 - Supersônico, 44, 55, 73, 74
 - Transônico, 55
- Série de Taylor, 80
- Separação
 - Invíscida, 178
- Stall
 - Dinâmico, 185
 - Estático, 187
- Túnel de Vento, 179
- Taxa de Refinamento, 81
- Torque, 197
- Validação, 79
- Velocidade
 - do Som, 43, 66
 - Fluxo Livre, 43
- Verificação, 80, 96, 113
 - Domínio Euleriano, 83
 - Domínio Lagrangiano, 96
- Vetor de Fluxo, 67
- Viscosidade, 181