Wander Gustavo Rocha Vieira

**Estudo da coleta de energia a partir de oscilações não
lineares induzidas por escoamento em uma asa finita**

São Carlos

2013

Wander Gustavo Rocha Vieira

**Estudo da coleta de energia a partir de oscilações não lineares
induzidas por escoamento em uma asa finita**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos, da Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos para a obtenção do
título de mestre em Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Aeronaves

Orientador: Prof. Carlos De Marqui Jr.

ESTE EXEMPLAR TRATA-SE DA VER-
SÃO CORRIGIDA. A VERSÃO ORIGINAL
ENCONTRA-SE DISPONÍVEL JUNTO AO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ME-
CÂNICA DA EESC-USP.

São Carlos

2013

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTA TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

245e   Vieira, Wander Gustavo Rocha
            Estudo da coleta de energia a partir de oscilações
            não lineares induzidas por escoamento em uma asa finita
            / Wander Gustavo Rocha Vieira; orientador Carlos De
            Marqui Jr.. São Carlos, 2013.

            Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação
            em Engenharia Mecânica e Área de Concentração em
            Aeronaves -- Escola de Engenharia de São Carlos da
            Universidade de São Paulo, 2013.

            1. energy havesting. 2. coleta de energia. 3.
            aeroelasticidade. 4. oscilações em ciclo limite. 5.
            flutter. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **WANDER GUSTAVO ROCHA VIEIRA**.

Título da dissertação: "Estudo da coleta de energia a partir de oscilações não lineares induzidas por escoamento em uma asa finita".

Data da defesa: 10/04/2013

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Dr. **Carlos De Marqui Junior (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Dr. **Rui Marcos Grombone de Vasconcellos**
(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/UNESP-São João da Boa Vista)

APROVADO

Prof. Dr. **Marcelo Amorim Savi**
(Universidade Federal do Rio de Janeiro/UFRJ)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica:
Prof. Associado **Marcelo Areias Trindade**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

Dedicatória

Aos meus pais : Wanderlúcio, Erli
e Célia (*in memoriam*)

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço aos meus pais (e toda minha família) por todas as alegrias, ensinamentos e “puxões de orelhas”. Com certeza, esses fatores foram determinantes para que eu me tornasse o homem que sou hoje. Em especial aos meus pais, Wanderlúcio e Erli. Do meu pai, carregarei para sempre o exemplo de honestidade (que tento imprimir nesta dissertação) e a capacidade de superar grandes desafios. À minha mãe, agradeço não apenas pelo amor e carinho incondicional (imagino que nesse momento meu pai deva estar me chamando de “baratinha”), mas também, por me propiciar uma leitura única das pessoas e do mundo.

Ao meu irmão Lúcio Henrique (Lu) pela companhia sempre constante desde o meu nascimento e pelos incentivos. À minha irmã Rozâne (Ró), por sempre ter me inspirado nos meus sonhos e mostrado que sempre há tempo pra se reinventar e criar novos e surpreendentes designs. À minha irmã Rozenir (Ni) pela sua imensa generosidade e por ter me recebido em sua casa nos EUA, no único Natal da minha vida que, embora tenha passado longe de casa, passei em família. Agradeço também ao meu cunhado Grillo, que mesmo distante, se faz sempre presente. À minha Vó Deuzinha, exemplo de doçura e serenidade e à minha Vó Juraci (*in memoriam*) cujo senso de humor será sempre lembrado. Ao meu “elétrico” sobrinho e afilhado João Vitor, cujo botão de desliga continua uma incógnita. À Angela que sempre se mostrou uma grande incentivadora. À Soraia, grande amiga, ao Caiubi, e ao meu primo Pedro Augusto, sempre às voltas, testando meus conhecimentos.

Agradeço aos muitos amigos que fiz desde o tempo de Porteirinha (onde nasci), Tarumirim, Viçosa, BH, Sanca, East Falmouth e Ottawa pelos momentos de prazer. Embora queria citar nominalmente todos, citarei apenas os referentes a Sanca, as quais eu tenho a presunção de que eles lerão a dissertação (mesmo se for apenas para encontrar erros). Desde o final da graduação sinto saudade enormes do famigerado grupo B, moradores da CC e membros da Aero06, dos quais muitos foram para SJC ou foram voar no azul do céu. No entanto, embora nenhum amigo substitua os outros, as minhas tardes têm sido recheadas por cafés (e algumas sexta-feiras com churrascos) acompanhados de Marcelo "Coxa" Leite, André, R2, Alexandre, Homer, Douglas, Cid, Vagner, William, Rui, Elmer, Daniel, Gregório

de Mattos, entre tantos outros. A aeronáutica também não seria a mesma sem a presença da Gi (mesmo que ultimamente ela só fale para o R2 e Marcelo Leite fazerem silêncio quando tomam café), Mazé e Nilza, Galo, Carlos, Claudinho, João, Osnan e companhia ilimitada.

Agradeço aos professores membros da banca (Prof. Marcelo Savi e Prof. Rui Vasconcellos) pelo aceite em ler, corrigir, avaliar e sugerir contribuições para o enriquecimento dessa dissertação.

Também queria deixar relatado o meu agradecimento aos incentivos financeiros que nesse mestrado me foram fornecidos pelo CNPQ e Fapesp.

Por último, e não menos importante, queria agradecer a meu orientador (e amigo) Carlos De Marqui Jr. Não muito tempo depois da nossa primeira reunião descobri que o D de seu nome se escrevia com letra maiúscula e que se tratava de uma pessoa única. Embora eu tenha sido uma cobaia, um de seus primeiros orientados, sempre notei da parte dele não apenas um grande zelo com os orientados, conhecimento de causa acerca de aeroelasticidade e materiais inteligentes mas também valores como humildade, determinação, honestidade e vontade de realizar coisas novas. Sem dúvida, espelho-me nessas qualidades para quem sabe um dia me tornar um grande cientista e orientador como você. Não obstante, nos últimos tempos ganhei um outro orientador. Ele tem nome de filósofo e é muito sábio. Tive um ano muito bom na companhia de Fred Nietzsche. Com ele muito aprendi (não só de teoria mas da vida também) e que espero aprender muito mais nos anos do meu doutorado.

*"Eu quase que nada sei.
Mas desconfio de muito coisa"*

Guimarães Rosa

RESUMO

Vieira, W. G. R. (2013) **Estudo da coleta de energia a partir de oscilações não lineares induzidas por escoamento em uma asa finita**. 82f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil

A conversão de vibração em energia elétrica tem sido investigada por diversos grupos de pesquisa na última década. A principal motivação é a prospecção de fontes alternativas de energia elétrica para sistemas eletroeletrônicos remotamente operados e com fontes limitadas de energia. Diferentes mecanismos de transdução são investigados na literatura para a coleta de energia, entretanto, o piezelétrico tem se destacado devido à densidade de energia que proporciona e também facilidade de uso. Uma alternativa promissora que começa a ser estudada por alguns grupos de pesquisas é a conversão de energia de oscilações aeroelásticas em energia elétrica. Apesar da natureza destrutiva da maioria dos fenômenos aeroelásticos, eles apresentam um grande potencial para o estudo de novos mecanismos e sistemas para coleta de energia. A conversão piezelétrica de energia a partir de oscilações aeroelásticas lineares tem sido investigada. Entretanto, a geração piezoaeroelástica de energia pode se tornar mais atrativa e prática se realizada a partir sistemas aeroelásticos não lineares. A conversão se daria a partir de oscilações persistentes e com amplitude limitada (oscilações em ciclo limite – LCO) ocorrendo em um amplo intervalo de velocidades de escoamento. Define-se o objetivo deste projeto como a investigação numérica da conversão piezelétrica de energia a partir de oscilações aeroelásticas não lineares. Um modelo por elementos finitos para placa plana com piezocerâmicas é desenvolvido, respeitando-se as hipóteses de uma placa de von Kàrmàn. O carregamento aerodinâmico não estacionário é determinado a partir do método de malha de dipolos e uma aproximação do domínio do tempo obtida a partir da formulação apresentada por Roger. Os resultados eletroaeroelásticos são apresentados para asas com diferentes razões de aspecto investigadas em uma ampla faixa de velocidades e considerando-se diversos valores de resistores no domínio elétrico.

Palavras-chaves: *Energy Harvesting*, Coleta de Energia, Aeroelasticidade, Oscilações em Ciclo Limites, *Flutter*

ABSTRACT

Vieira, W. G. R. (2013). **Energy harvesting study of nonlinear oscillation induced by the flow in a finite wing.** 82p. Dissertation (Master of Sciences) – Engineering School of São Carlos, University of Sao Paulo, Sao Carlos, Brazil

The converting of vibration into usable electrical energy has been investigated by several researches groups in the last decade. The main motivation is the possibility of obtaining alternatives electrical energy sources to power electronic system remotely operated and with limited energy sources. Different transduction mechanism has been presented in the energy harvesting literature. However the piezoelectric has been gained more attention because not only of its power density but also its ease of use. A promissory alternative that is becoming studied is the converting of aeroelastic oscillation into electrical energy. Despite of the destructive nature of unstable aeroelastic phenomena (such as, flutter), they present a great potential to the study of innovative mechanism to harvest energy. Although the piezoelectric energy conversion using linear aeroelastic has been investigated in the literature, the use of non linear aeroelastic system can be more practical and attractive. The non linear aeorelastic harvesting occurs by persistent oscillation and with limited amplitudes (Limited Cycle Oscillation --LCO) and can be performed by considerable velocity interval greater than the linear flutter speed. The objective of this work is to investigate the energy harvesting by non linear aeroelastic oscillation. A finite element model of a thin plate (with piezoceramics) is developed), using the non linear hypothesis of von Karman. The unstable aerodynamic loading is obtained by a doublet-lattice method (DLM) and with its time domain conversion using the Roger approximation. The eletroaeroelastic results are presented for several wings with different aspect ratios, and with different resistance values in the electrical domain. The eletroaeroelastic results of the generator wing are investigated for several airspeed greater than its linear flutter speed.

Keywords: Energy Harvesting, Energy Scavenging, Aeroelasticity, Limit Cycle Oscillation, Flutter

Lista de Figuras

Figura 1- (a) Representação Conceitual do Gerador e (b) detalhe da subestrutura e disposição das piezocerâmicas	3
Figura 2 - Representação conceitual da viga em T apresentada por Kwon (2010)	8
Figura 3- Modelo experimental de uma seção típica com presença de piezocerâmicas apresentado por Erturk <i>et al.</i> , (2010).....	10
Figura 4 - Experimento apresentado por Bryant; Garcia, (2009)	11
Figura 5 - Modelo experimental apresentado por Dummon <i>et al.</i> , (2011).....	11
Figura 6- Descrição de um elemento finito	16
Figura 7- (a) Exemplo da malha aerodinâmica e (b) descrição de um painel aerodinâmico ...	20
Figura 8- Representação conceitual da asa.....	31
Figura 9- Modos de Flexão: (a) primeiro modo de flexão (1F), (b) segundo modo de flexão (2F) e (c) terceiro modo de flexão (3F)	35
Figura 10- Modos de torção: (a) primeiro modo de torção (1T) e (b) segundo modo de torção (2T)	36
Figura 11- Primeiro modo de placa (1P)	36
Figura 12- Variação da (a) frequência e (b) amortecimento com o aumento da velocidade para razão de aspecto 1	37
Figura 13 - Deslocamento da asa encontrado no vértice referente ao bordo de fuga e ponta da asa nas velocidades de (a) 10m/s, (b) 40 m/s, (c) 50 m/s, (d) 52 m/s e (e) 54 m/s.....	38
Figura 14- Comportamento da (a) frequência de <i>flutter</i> e (b) velocidade de <i>flutter</i> com a mudança da razão de aspecto.....	39
Figura 15 - Comportamento dos deslocamento para o gerador não linear com (a) razão de aspecto 1 e velocidade de 52,0 m/s, (b) razão de aspecto 2 e velocidade de 18,5 m/s, (c) razão de aspecto 3 e velocidade de 11,7 m/s (d) razão de aspecto 4 e velocidade de 8,7 m/s e (e) razão de aspecto 5 e velocidade de 6,5 m/s.	41
Figura 16 - Variação do deslocamento transversal adimensional com a mudança de velocidade para razão de aspecto 1	42
Figura 17 - Variação do deslocamento transversal adimensional com a mudança de velocidade para razão de aspecto 2	42

Figura 18 - Variação do deslocamento transversal adimensional com a mudança de velocidade para razão de aspecto 3	43
Figura 19 - Variação do deslocamento transversal adimensional com a mudança de velocidade para razão de aspecto 4	43
Figura 20 - Variação do deslocamento transversal adimensional com a mudança de velocidade para razão de aspecto 5	44
Figura 21 - Espaço de fase razão de aspecto 1 com (a) velocidade do escoamento de 53 m/s e (b) velocidade do escoamento de 75 m/s	45
Figura 22- Espaço de fase razão de aspecto 2 com (a) velocidade do escoamento de 21.5 m/s e (b) velocidade do escoamento de 32 m/s	45
Figura 23- Espaço de fase para razão de aspecto 3 com (a) velocidade do escoamento de 14 m/s e (b) velocidade do escoamento de 15 m/s.....	46
Figura 24- Espaço de fase para razão de aspecto 4 com (a) velocidade do escoamento de 9.3 m/s, (b) velocidade do escoamento de 10.7 m/s e (c) velocidade do escoamento de 11.3 m/s	46
Figura 25- Espaço de fase para razão de aspecto 5 com (a) velocidade do escoamento de 7.5 m/s e (b) velocidade do escoamento de 8.3 m/s.....	46
Figura 26 - Comportamento da tensão elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 1.....	47
Figura 27- Comportamento da tensão elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 2.....	48
Figura 28- Comportamento da tensão elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 3.....	48
Figura 29- Comportamento da tensão elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 4	49
Figura 30- Comportamento da tensão elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 5.....	49
Figura 31- Variação do acoplamento eletromecânico referente aos dois primeiros modos de flexão com a mudança da razão de aspecto.	50
Figura 32- Evolução da potência elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 1.....	51
Figura 33 - Evolução da potência elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 2.....	52

Figura 34 - Evolução da potência elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 3	52
Figura 35 - Evolução da potência elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 4	53
Figura 36- Evolução da potência elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 5	53
Figura 37- Comportamento da potência máxima para todas as razões de aspecto com a mudança a velocidade do escoamento.....	54

Lista de Tabelas

Tabela 1- Propriedades geométricas utilizadas nos diferentes estudos de casos	32
Tabela 2- Propriedades mecânicas do alumínio utilizado em todos os casos	32
Tabela 3- Propriedades eletromecânicas da piezocerâmica PZT-5A (estado plano de tensões)	33
Tabela 4- Descrição da malha estrutural utilizada em cada estudo de caso	34
Tabela 5 -Valores das frequências naturais em [Hz] para as várias razões de aspecto	35
Tabela 6- Sequência dos modos para cada razão de aspecto estudada	35
Tabela 7 - Velocidade de divergência linear para as diversas razões de aspecto	39
Tabela 8 -Potência máxima encontrada para razão de aspecto, resistência e velocidade do escoamento.....	55

Sumário

Agradecimentos	ix
RESUMO.....	xiii
ABSTRACT	xv
Lista de Figuras	xvii
Lista de Tabelas	xx
Sumário.....	xxi
Capítulo 1 - Introdução.....	1
1.1 Organização da Dissertação	4
Capítulo 2 - Revisão Bibliográfica	5
Capítulo 3 - Modelagem Piezoaeroelástica	13
3.1 Modelagem Piezoaeroelástica Linear	13
3.1.1 - Modelagem Eletromecânica Linear	13
3.1.2. Modelagem Aerodinâmica não estacionária utilizando o Método de Malhas Dipolos (DLM).....	20
3.1.3. Acoplamento entre o Modelo Estrutural e Aerodinâmico via Splines	21
3.2 Modelagem Piezoaeroelástica Não Linear.....	23
3.2.1 Modelagem Eletromecânica Não Linear	23
3.2.2 Modelagem Aerodinâmica no Domínio do Tempo.....	27
3.2.3 Solução Numérica no Domínio do Tempo.....	29
Capítulo 4 - Resultados.....	31
4.1. Apresentação dos Estudos de Casos	31
4.2 Análises Piezoaeroelásticas Lineares	34
4.2.1 Resultados Eletromecânicos em Curto-Circuito	34
4.2.2. Resultados Piezoaeroelásticos Lineares em Curto-Circuito.....	36

4.2 Análises Piezoaeroelásticas Não Lineares	40
4.2.1. Comportamento eletroaeroelástico abaixo da Velocidade Linear de <i>Flutter</i>	40
4.2.1. Comportamento Eletroaeroelástico após a Velocidade Linear de <i>Flutter</i>	42
Capítulo 5 - Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	56
5.1 Conclusões	56
6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros	58
6 Referências Bibliográficas	59

Capítulo 1 - Introdução

O estudo da coleta de energia do escoamento vem ganhando destaque nas últimas duas décadas na comunidade acadêmica e industrial, como atestam vários autores -- Anton e Sodano, (2007); Beeby, Tudor e White, (2006) e Sodano, Inman e Park, (2004). A motivação é a possibilidade de alimentar sistemas eletrônicos de baixa potência, como os sistemas de verificação de integridade estrutural (SHM) utilizados em aviões, pontes e dutos, entre outros, que geralmente são operados remotamente e que atualmente dependem de baterias como fontes de energia. Além de necessitar de trocas periódicas, o uso de baterias está relacionado ao problema de descarte de produtos químicos. Essas desvantagens podem ser evitadas empregando-se o conceito da coleta de energia. Esse conceito pode ser utilizado tanto para recarregar as baterias durante o cumprimento da missão (de uma aeronave, por exemplo) como tornar, em um caso extremo, o sistema energeticamente autônomo.

O conceito da coleta de energia do escoamento (*wind energy harvesting*) têm sua origem advinda do conceito da conversão de energia vibratória (*vibration based energy harvesting*). Em ambos os casos, energia elétrica é gerada a partir da vibração mecânica através do emprego de diferentes mecanismos de transdução: eletromagnético, eletrostático ou piezelétrico. Dentre esses, o mecanismo de transdução piezelétrico tem recebido maior destaque, devido a sua facilidade de implementação, como é discutido na revisão bibliográfica.

A coleta de energia do escoamento acontece através de um sistema piezoaeroelástico, composto a partir da instalação de materiais piezelétricos em um sistema aeroelástico. Ela pode ser realizada utilizando três regimes aeroelásticos que diferem-se, particularmente no regime linear, quanto a estabilidade aeroelástica. O primeiro regime é encontrado em velocidades partindo de zero até a velocidade crítica de *flutter*, em que o sistema é estável e amortecido. Embora no sistema aeroelástico as propriedades dinâmicas (massa, amortecimento e rigidez) sejam influenciadas pela variação da velocidade do escoamento, o princípio de funcionamento é similar ao encontrado na coleta de energia em vigas piezelétricas engastadas: uma fonte de excitação externa é necessária para gerar oscilações persistentes, como uma excitação de base ou uma entrada de rajada.

O segundo regime aeroelástico acontece quando a velocidade do escoamento é igual a velocidade de *flutter*. Nessa situação, o valor do amortecimento do sistema torna-se nulo, representando uma condição marginalmente estável. Esse segundo regime aeroelástico permite a geração de energia sem a necessidade de uma excitação externa permanente, isto é, apenas é necessário que exista uma perturbação inicial para que o sistema oscile persistentemente e assim energia seja gerada. No entanto, a geração de energia na velocidade de *flutter* (sem a presença de uma excitação externa) é difícil de ser realizada na prática. Se existe uma variação de velocidade, mesmo que pequena, a geração de energia em regime permanente não é mais possível. Quando a velocidade diminui, o sistema volta a se comportar como no primeiro regime em que a entrada externa permanente é necessária, e quando a velocidade aumenta, o sistema apresenta um comportamento instável com oscilações crescentes que pode levar a falha catastrófica do gerador, como será discutido posteriormente.

O terceiro regime aeroelástico é descrito quando a velocidade do escoamento é maior que a velocidade de *flutter*. Particularmente para esse regime, é importante ressaltar que em sistemas aeroelásticos lineares a resposta é instável com amplitudes crescentes. No entanto, quando certas não linearidades (como não linearidade geométrica) estão presentes, o sistema apresenta oscilações com valores finitos de amplitude mecânica para uma faixa de velocidades após a velocidade de *flutter*. Portanto, esse regime possui a vantagem de possibilitar a geração de energia elétrica sem a necessidade de uma excitação externa e com valores limitados de amplitude em um intervalo de velocidades do escoamento. A literatura apresenta vários estudos focando na geração (ou coleta) de energia utilizando de um modelo bidimensional (seção típica) em velocidades acima do *flutter*, que podem ser vistos em vários trabalhos: Abdelkefi; Nayfeh e Hajj (2012a); Dias, De Marqui e Erturk (2013); Erturk *et al.*, (2010) e SOUSA *et al.*, (2011). Porém, o estudo piezoaeroelástico da geração de energia a partir de uma asa finita tri-dimensional ainda é pouco explorado e discutido na literatura. A importância do estudo de uma asa finita e flexível, quando comparado com o modelo bidimensional, é que tal configuração é capaz de representar efeitos adicionais tanto do ponto de vista aerodinâmico -- efeito de ponta de uma asa finita -- como estrutural -- o modelo bidimensional utiliza uma representação por parâmetros concentrados em massas e molas, enquanto o modelo tridimensional utiliza uma abordagem por parâmetros distribuídos.

Figura 1- (a) Representação Conceitual do Gerador e (b) detalhe da subestrutura e disposição das piezocerâmicas

O objetivo dessa dissertação é investigar a geração de energia no regime de velocidade após o *flutter* em uma asa retangular (para diferentes razões de aspecto) que é sujeita a não linearidades geométricas. Os parâmetros elétricos (potência e tensão elétrica) e mecânicos (amplitudes) são simulados a partir um modelo piezoaeroelástico não linear de uma asa reto-retangular, com uma subestrutura metálica e cerâmicas piezelétricas, como pode ser visto na Figura 1. A aerodinâmica não estacionária é modelada utilizando de malha de dipolos e uma aproximação no domínio do tempo realizada com o método de Roger. A modelagem eletromecânica da asa é realizada por elementos finitos utilizando o modelo de placa de vón Kàrmàn, utilizando uma formulação de elementos finitos, com a presença de piezocerâmicas. Uma resistência elétrica é considerada no domínio elétrico do problema com o intuito de se estimar a potência elétrica. Estes dois modelos são acoplados e resolvidos no domínio do tempo utilizando um método numérico de integração temporal, método alfa generalizado. O algoritmo *Newton-Rapshon* é utilizado para resolver o sistema de equações não lineares. O comportamento da variáveis elétricas (tensão elétrica e potência) é obtido com a variação da velocidade do escoamento, ao mesmo tempo, em que o deslocamento mecânico é monitorado para assegurar que o gerador possua amplitudes aceitáveis e seguras.

1.1 Organização da Dissertação

Esta dissertação é organizada em 5 capítulos que englobam uma introdução, revisão bibliográfica, modelagem do problema, resultados e conclusões. A descrição de cada capítulo é dada a seguir iniciando-se do segundo capítulo.

O segundo capítulo apresenta a revisão bibliográfica sobre coleta de energia, focando nos trabalhos pioneiros e discutindo a escolha de possíveis mecanismo de transdução, no caso dessa dissertação, o piezelétrico. Posteriormente são discutidos alguns trabalhos que apresentam modelagens de geradores piezelétricos, assim como validações experimentais. Novas técnicas da modelagem de geradores piezelétricos também são apresentadas. Por fim, vários trabalhos relacionados com a geração (ou coleta) de energia a partir de oscilações induzidas pelo escoamento são apresentados e discutidos.

O objetivo do terceiro capítulo é apresentar o modelo piezoaeroelástico tanto para o caso linear como para o caso não linear. O modelo linear é constituído pela associação de um modelo por elementos finitos eletromecanicamente acoplado, e baseado nas hipóteses de uma placa de Kirchhoff, com um modelo aerodinâmico não estacionário de malha de dipolos. No modelo não linear, a formulação eletromecânica por elementos finitos é modificada com o uso da placa de von Kàrmàn, para considerar os efeitos de grandes deslocamentos e, a aerodinâmica que antes era resolvida no domínio da frequência, é transformada para o domínio do tempo utilizando o método de Roger.

No quarto capítulo, o comportamento aeroelástico e também piezoaeroelástico de asas com várias configurações de razões de aspectos são apresentados e discutidos. Os modos, frequências naturais e velocidade de *flutter* são determinados utilizando o modelo linear. As saídas mecânicas (deslocamentos da estrutura) e elétricas (tensão elétrica e potência gerada) são obtidas através do modelo piezoaeroelástico não linear para diferentes velocidade antes e após a velocidade crítica de *flutter*. Um resistor é considerado no domínio elétrico do problema.

O último capítulo contém as conclusões da dissertação. Discussões acerca do desenvolvimento dos modelos e dos resultados obtidos para as diferentes razões de aspecto estudadas são apresentadas. Por fim, sugestões e novas direções para futuros trabalhos são listadas.

Capítulo 2 - Revisão Bibliográfica

O trabalho apresentado por Williams e Yates (1996) é um dos pioneiros na investigação da possibilidade em se realizar a conversão de vibrações em energia elétrica. O intuito é proporcionar alternativas para a alimentação de sistemas eletrônicos de baixo consumo localizados em regiões remotas. Em alguns casos, a dificuldade para a conexão de fios elétricos ou mesmo o uso de baterias -- que possuem desvantagens como a presença de materiais tóxicos e quantidade finita de energia (que resulta em sua troca periódica) -- poderiam ser evitadas. Em Williams e Yates (1996) um gerador representado por um sistema massa-mola-amortecedor com transdução eletromagnética é modelado. Os autores também sugerem a possibilidade de uso de dois outros princípios de transdução: o eletrostático e o piezelétrico.

A comunidade acadêmica ao longo das últimas duas décadas têm discutido o uso desses três princípios de transdução para realizar a coleta de energia de vibração. A discussão está presente em vários artigos de revisão, como por exemplo nos trabalhos de Beeby, Tudor e White (2006); Chalasani e Conrad (2008) e Mateu e Moll (2005). Independentemente dos mecanismos de transdução utilizado, esses geradores são adequados para uso em sistema portáteis e com baixo consumo energético (na ordem de nano e micro Watts). Especificamente a revisão de Beeby, Tudor e White (2006) apresenta a facilidade de implementação como um critério para a escolha do mecanismo de transdução a ser utilizado. Esses autores indicam que o mecanismo piezelétrico possui a implementação mais simples, devido a necessidade de realizar apenas a colagem de um elemento piezelétrico em uma estrutura que é a fonte de vibrações. Para os outros dois mecanismos, eletromagnético e eletrostático, existe a necessidade de ocorrer deslocamento relativo entre duas partes para gerar energia elétrica. Assim, se faz necessário a presença de pelo menos duas estruturas -- uma fixa e outra móvel. O deslocamento relativo no caso eletromagnético acontece entre um condutor imerso em um campo magnético, conforme relatado por Glynne-Jones *et al.*, (2004); Kulah e Najafi (2004) e Beeby *et al.*, (2007), e no caso eletrostático acontece entre os eletrodos de um capacitor de geometria variável como apresentado por Mitcheson *et al.*, (2004) e Torres e Rincón-Mora (2009).

A utilização da transdução piezelétrica para a coleta de energia têm recebido destaque nos últimos anos, conforme discussões apresentadas em vários artigos de revisão da última década: Sodano, Inman e Park (2004); Anton e Sodano (2007) e Cook-Chennault, Thambi e Sastry (2008). O mecanismo de conversão de energia entre os domínios mecânico e elétrico para o material piezelétrico é caracterizado pelo efeito direto e indireto que são representados nas equações a seguir segundo a norma “IEEE Standard on Piezoelectricity” (1988)

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}\mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{E} \quad (1.a)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^E \mathbf{S} - \mathbf{e}\mathbf{E} \quad (1.b)$$

onde a equação (1.a) representa o efeito direto e a equação (1.b) representa o efeito inverso. Nas equações, $\mathbf{D}$ é o vetor de deslocamento elétrico, $\mathbf{e}$ é a matriz de constantes piezelétrica, $\mathbf{S}$ é o vetor de deformação, $\boldsymbol{\varepsilon}^S$ é a matriz de permissividade elétrica com tensão constante, $\mathbf{E}$ é o vetor de campo elétrico, $\mathbf{T}$ é a tensão mecânica e $\mathbf{c}^E$ é a constante de rigidez mecânica com campo elétrico constante. O comportamento das propriedades mecânica e elétrica de diversos materiais elétricos é discutido por Anton e Sodano (2007). São apresentados 2 tipos de materiais que são as cerâmicas piezelétricas (PZTs) e os polímeros piezelétricos (PVDFs). Acerca das cerâmicas é ressaltado o elevado fator de acoplamento eletromecânico, no entanto a cerâmica não suporta grandes deformações, podendo se romper devido seu comportamento frágil. Para os polímeros, é creditado suportar grandes deformações, mas o acoplamento é bem menor. Uma possível solução de compromisso é o uso de fibras compostas por cerâmicas piezelétricas que podem ser imersas em uma resina epóxi, e assim valores razoáveis de acoplamento e flexibilidade podem ser alcançados.

Pesquisadores têm proposto diversos modelos para se representar o comportamento eletromecânico de geradores piezelétricos. Esses modelos variam desde representações por parâmetros concentrados presentes nos trabalhos de Roundy, Wright e Rabaey (2003) e Dutoit, Brian e Sang-Gook (2005), a representações por parâmetros distribuídos descritas por Lu, Lee e Lim (2003); Sodano, Inman e Park (2004) e Dutoit, Brian e Sang-Gook (2005). Outros trabalhos -- Dutoit e Brian (2006) e Erturk e Inman (2009) -- apresentam verificações experimentais e validações dos modelos de parâmetros concentrados e distribuídos.

Erturk e Inman (2008) apresentaram a solução eletromecânica analítica de um gerador piezelétrico engastado para vibrações transversais baseado em hipóteses de viga Euler-Bernoulli. Embora os resultados provenientes dos modelos de parâmetros distribuídos

mostram também a conversão de energia em outros modos de flexão além do primeiro, a conversão através dos modos de torção ainda não era realizada. O uso de eletrodos segmentados para a conversão de modos da torção é presente no trabalho de De Marqui, Erturk e Inman (2010) através de um modelo eletromecânico de elementos finitos previamente desenvolvido por De Marqui, Erturk e Inman (2009).

Algumas configurações alternativas de geradores piezelétricos utilizando técnicas não lineares foram recentemente apresentadas na literatura. Destacamos a utilização de técnicas de processamento não linear da saída elétrica apresentadas por Guyomar *et al.*, (2005); Lallart e Guyomar (2010) e Delpero *et al.*, (2012) e a utilização de configurações biestáveis descritas por Stanton, Mcgehee e Mann (2010); Erturk e Inman (2011) e Friswell *et al.*, (2012). O emprego do processamento não linear da saída elétrica é uma técnica de geração semi-ativa que utiliza de um chaveamento do circuito elétrico, por exemplo as técnicas SSHI (*Synchronized Switch Harvesting on Inductor*). Quando comparado a um circuito elétrico simples, constituído de uma resistência, a técnica SSHI pode elevar a potência elétrica obtida em 900 % (GUYOMAR *et al.*, 2005). A utilização da biestabilidade consiste no emprego de um gerador que apresenta uma instabilidade estática em baixos valores de deslocamento, porém, estável em deslocamentos maiores e possibilita a conversão a partir de oscilações em torno de pontos de equilíbrio que resultam em órbitas de alta energia (grandes deslocamentos). Esse comportamento pode ser realizado fisicamente com a utilização de ímãs, como realizado por Challa *et al.*, (2008) e Erturk e Inman (2011) ou induzida por uma pretensão mecânica que baseia-se no fenômeno *snap-through* como relatado por Wang (2013). Como relatado por Erturk e Inman (2011), a principal vantagem do uso de configurações biestáveis, é gerar energia em um espectro amplo de frequências (por exemplo, um sinal aleatório), em contraste com o gerador linear que tem a condição ótima de operação quando uma excitação acontece na frequência ressonância de um modo específico. Embora essas duas técnicas apresentadas nesse trabalho não sejam o foco dessa dissertação, elas indicam possíveis direção de trabalhos futuros.

Uma tendência recente que emerge na literatura é a coleta de energia a partir de oscilações induzidas por escoamento. Allen e Smits (2001) e Taylor *et al.*, (2001) apresentam o conceito experimental do Eel. O Eel consiste de uma membrana de polímero piezelétrico localizada na esteira de um fluido hidrodinâmico e utiliza o efeito do desprendimento dos vórtices de von Kàrmàn para realizar a conversão de energia a partir das oscilações

resultantes. Os autores apresentam o comportamento de curvas adimensionais relativas a máxima amplitude obtida com o aumento do número de Reynolds. O efeito dos desprendimentos de vórtices de von Kàrmàn para a geração de energia também é examinado para escoamentos aerodinâmicos. Kwon (2010) apresenta a conversão de energia com uma em T viga engastada com piezelétricos dispostos em uma configuração *bimorph* (configuração de duas piezocerâmicas dispostas a igual distância da linha neutra) sujeita a escoamento axial, conforme mostrado na figura 2. A geração de energia é iniciada em 4 m/s e o valor máximo de potência obtida foi de 4mW na velocidade de 14 m/s.

Figura 2 - Representação conceitual da viga em T apresentada por Kwon (2010)

O estudo de efeitos aerodinâmicos em superfícies sustentadoras, asas e aerofólios, para a geração de energia em velocidades menores que a de flutter também é discutida na literatura. De Marqui *et al.*, (2011) apresentam o conceito de um gerador constituído de uma asa elástica. A asa é eletromecanicamente acoplada devido a presença de piezocerâmicas. A estrutura da asa é modelada como uma placa de Kirchhoff, através do método dos elementos finitos, e a aerodinâmica não estacionária é modelada a partir do método da malha de dipolos. Os autores apresentam dois circuitos elétricos: um composto de um resistor e outro composto de um resistor e indutor. O valor do indutor é determinado para que a frequência do domínio elétrico seja igual a frequência do *flutter*. O comportamento da potência elétrica e

deslocamentos com o aumento da velocidade do escoamento são verificadas através de Funções de Resposta em Frequência (FRFs) que são obtidas a partir de uma excitação de base para os dois circuitos elétricos, desde velocidades próximas a zero até o surgimento da instabilidade aeroelástica, o *flutter*. Os autores ainda mostram que a potência atinge um máximo quando a velocidade do escoamento aproxima-se da velocidade de *flutter* e que o circuito com o melhor conjunto resistor-indutor ótimo apresenta um resultado 20 vezes maior para a potência elétrica quando comparado com melhor caso apenas resistivo.

O potencial da geração piezoaeroelástica no entorno da velocidade de *flutter* é ressaltada em diversos artigos. De Marqui, Erturk e Inman (2010) estudaram a geração de energia em uma asa, modelada com a partir de um método de elementos finitos eletromecanicamente acoplado e método da malha de vórtices. Duas configurações de eletrodos são investigadas: contínuo e segmentado na metade da corda. Os resultados mostram um aumento na potência elétrica e velocidade de *flutter* para o caso segmentado (41 m/s) quando comparado ao caso contínuo (40 m/s). A explicação é que no *flutter*, o movimento do corpo envolve o acoplamento de modos de flexão e torção. Erturk *et al.*, (2010) apresentam um modelo de uma seção típica com dois graus de liberdade (linear e angular) e com acoplamento elétrico presente no grau de liberdade linear. Os resultados obtidos tanto numericamente -- modelado a partir de parâmetros concentrados e da aerodinâmica não estacionária de Theodorsen -- quanto experimentalmente mostram que a potência elétrica gerada foi de 10.7 mW no entorno do *flutter* (velocidade de 9.3 m/s). Dias, De Marqui e Erturk (2013) estudaram a influência de parâmetros estruturais -- raio de giração (que relaciona com a inércia rotacional da seção típica), razão de frequência (entre os graus de liberdade linear e angular) e posição do centro de gravidade -- em um gerador de uma seção típica com dois graus de liberdade (linear e angular) e com acoplamento tanto piezelétrico e magnético presente no grau de liberdade linear. Os autores notaram uma diminuição na velocidade de *flutter* e aumento na potência elétrica: com o posicionamento do centro de gravidade mais perto do bordo de fuga, a diminuição da razão de frequência, e a diminuição do raio de giração para um valor menor que 0.7.

Figura 3- Modelo experimental de uma seção típica com presença de piezocerâmicas apresentado por Erturk *et al.*, (2010)

A geração de energia em velocidades do escoamento acima da velocidade de flutter utilizando oscilações em ciclo limite para seções típicas é mencionada por vários autores. Sousa *et al.*, (2011) mostra a conversão de energia em uma seção típica após a ocorrência de *flutter*. Os autores investigaram uma seção típica com dois graus de liberdade. Um dos graus de liberdade é linear, em qual acoplamento elétrico é adicionado, e o outro é relativo a torção, em qual uma rigidez não linear é assumida. A rigidez não linear na torção consiste de uma região com rigidez nula para baixos valores de deslocamento (*free-play*) e uma associação entre uma mola linear e outra cúbica com efeito de enrijecimento com o aumento do ângulo de torção. O objetivo do uso da rigidez nula é reduzir a velocidade linear de *flutter*, enquanto da rigidez cúbica é garantir que a oscilação aconteça com valores aceitáveis após o *flutter*. O valor máximo de potência encontrado é de 108 mW na velocidade de 18 m/s (1.5 a velocidade de *flutter*) e com resistência elétrica de $10^5 \Omega$. Abdelkefi, Nayfeh e Hajj (2012) investigam a geração de energia no regime de velocidades acima do *flutter*. Os autores empregam um modelo de seção típica com estrutura não linear e acoplamento piezelétrico no grau de liberdade de flexão. Os autores apresentam o comportamento da potência elétrica após a velocidade de *flutter* utilizando os métodos da *normal form* e de continuação numérica e mostraram que o aumento da velocidade do escoamento aumenta a potência gerada.

Um outro conceito estudado para realizar a conversão de energia para oscilação em ciclo limites é o uso de vigas sujeitas a escoamento axiais. Bryant e Garcia (2009) apresentam o conceito de um gerador piezoaeroelástico constituído de uma viga engastada a uma asa rígida e pivotada a um flape com rigidez torsional nula, mostrada na figura 4. Piezocerâmicas são dispostas na região da viga próxima a asa principal. No artigo, eles mostram os resultados

experimentais da geração de energia que acontece após a ocorrência da instabilidade *flutter* em pequenos deslocamentos. A geração é iniciada em 2 m/s e atinge dois máximos, um próximo a 2.5 m/s (potência de 1.5 mW) e outro por volta de 7.2 m/s (potência 2.2 mW).

Figura 4 - Experimento apresentado por Bryant; Garcia, (2009)

Dummon *et al.*, (2011) apresentam o modelo (composto de uma abordagem por elementos finitos e método da malha de dipolos) e experimento de um gerador piezoaeroelástico não linear. O gerador consiste em uma viga engastada a uma asa, sujeita a um escoamento axial e com a presença de piezocerâmicas. Os autores relatam a obtenção de uma potência elétrica de 2.5 mW na velocidade de 27 m/s e com resistência de 10 Ω .

Figura 5 - Modelo experimental apresentado por Dummon *et al.*, (2011)

A revisão apresentada mostra a relevância do tópico da coleta de energia, particularmente em casos induzidos por escoamento, através de diversos artigos recentemente publicados. Entretanto, poucos investigam uma asa elástica não linear, caso que pode ser extrapolado para a representação de asas de alguns UAVs, campo interessante para problemas de coleta de energia. Estes fatos destacam a contribuição do presente trabalho, cuja formulação é apresentada no capítulo 3 e resultados são apresentados no capítulo 4.

Capítulo 3 - Modelagem Piezoaeroelástica

3.1 Modelagem Piezoaeroelástica Linear

Nessa seção, o modelo de um gerador piezoaeroelástico linear composto pela associação de um modelo estrutural eletromecanicamente acoplado e um modelo aerodinâmico não estacionário, é apresentado. A estrutura, composta por camadas metálicas e camadas piezelétricas, é modelada através do método dos elementos finitos, como será apresentado na subseção 3.1.1. Já o método de malha de dipolos, utilizado para a modelagem da aerodinâmica não estacionária, é apresentado na subseção 3.1.2.

É importante ressaltar que os dois modelos envolvidos, estrutural e aerodinâmico, possuem malhas distintas. Neste trabalho, eles são acoplados utilizando matrizes de transformação de coordenadas, transferindo as forças e deslocamentos entre as diferentes malhas. As matrizes de transformação são obtidas via método de *splines* e apresentadas na subseção 3.1.3. O acoplamento é realizado no domínio modal, possibilitando a redução de ordem (número de modos considerados na solução) e reduzindo o custo computacional da solução.

3.1.1 - Modelagem Eletromecânica Linear

Um modelo por elementos finitos eletromecanicamente acoplado é utilizado para a representação de uma asa elástica (placa plana retangular). As hipóteses de uma placa de Kirchhoff são assumidas. A figura 1 mostra a subestrutura metálica com camadas de piezocerâmicas cujos eletrodos estão conectados com uma resistência, com o intuito de se estimar a potência elétrica. É assumido neste trabalho que as camadas piezocerâmicas estão polarizadas transversalmente e em sentidos opostos. Assim, a ligação em série entre as mesmas é obtida.

O princípio variacional é empregado para se obter as equações do sistema eletromecânico. Aplicando o Princípio de Hamilton Generalizado, conforme realizado por De Marqui; Erturk; Inman, (2009), tem-se,

$$\delta W = \int \delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^T \mathbf{F} + \delta \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{M} + q \delta V_p - \rho (\ddot{w} \delta w + \ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v) + \delta W_{ext} + q_{ext} \delta V_p \quad (2)$$

onde $\mathbf{F}$ é a força axial, $\mathbf{M}$ é o momento, q é a carga elétrica nas piezocerâmicas, ρ é a densidade, u é o deslocamento ao longo da corda, v é o deslocamento ao longo da envergadura e w é o deslocamento transversal, $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ o vetor de deformação axial, $\boldsymbol{\kappa}$ a curvatura e V_p a tensão elétrica na piezocêramica.

Através da integração das relações constitutivas infinitesimais ao longo da espessura, os esforços internos (força e momento) e a carga elétrica são obtidos em função da variável infinitesimal (tensão). Essas relações são descritas como a relação entre forças (e momentos) com relação a deformação (e curvatura) em um laminado. É importante ressaltar a condição cinemática que as seções continuam planas após as deformações. Essa formulação é empregada devido à estrutura compósita da placa (piezocerâmicas e alumínio).

Duas relações para um laminado que relacionam o efeito flexional (relacionado com o momento), axial (relacionado com a força) e elétrico são apresentadas. A primeira refere-se a região onde existe a presença de piezocerâmicas embutidas na estrutura principal. Assim, para o caso eletromecanicamente acoplado a seguinte relação é obtida:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \\ q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & -\boldsymbol{\theta}_1^* \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & -\boldsymbol{\theta}_2^* \\ \boldsymbol{\theta}_1^* & \boldsymbol{\theta}_2^* & c_p^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_p \\ \boldsymbol{\kappa} \\ V \end{Bmatrix} \quad (3)$$

onde $\mathbf{A}$ é a matriz de rigidez axial, $\mathbf{B}$ é a matriz de acoplamento linear flexional, $\mathbf{D}$ é a matriz de rigidez flexional, $\boldsymbol{\theta}_1^*$ é a vetor de acoplamento elétrico linear, $\boldsymbol{\theta}_2^*$ o vetor de acoplamento elétrico flexional e c_p^* a capacitância elétrica equivalente de um laminado.

A segunda relação é obtida para a estrutura metálica sem material piezelétrico. Assim, os termos relativos ao acoplamento eletromecânico não aparecem na equação 4, mostrada a seguir.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_p \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Nesta etapa do trabalho é assumido que os deslocamentos são pequenos, então efeitos não lineares são desconsiderados. Portanto, a condição cinemática linear é utilizada para relacionar deformação e curvatura com deslocamento e ângulo. Além, como o modelo utilizado refere-se a uma placa fina, consequentemente tanto o cisalhamento na direção transversal quanto o efeito da inércia de rotação são desprezados. Este caso será utilizado em capítulos posteriores para a determinação da velocidade linear de *flutter*. Assim as relações cinemáticas são apresentadas como,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (5.a)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \quad (5.b)$$

onde x representa a direção da corda, y a direção da envergadura.

Um campo de deslocamento polinomial é definido internamente em um elemento retangular, mostrado na figura 6. O objetivo desse polinômio é interpolar o deslocamento do elemento internamente e assim possibilitar a integração da equação de energia em termos da variável de deslocamento.

Figura 6- Descrição de um elemento finito

O elemento retangular, possui em cada um de seus quatro nós, quatro variáveis na direção transversal e duas na direção axial. Os deslocamentos dentro do elemento são descritos em termos de coeficientes de uma aproximação polinomial que são função das variáveis descritas nos nós como apresentado na equação 6.

$$w = \mathbf{T}_w \mathbf{w} \quad (6.a)$$

$$\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{u,v} \mathbf{u} \quad (6.b)$$

onde $\mathbf{w} = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4 \ w_{x1} \ w_{x2} \ w_{x3} \ w_{x4} \ w_{y1} \ w_{y2} \ w_{y3} \ w_{y4} \ w_{xy1} \ w_{xy2} \ w_{xy3} \ w_{xy4}]$ e $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]$ são os vetores e $\mathbf{T}_w$ e $\mathbf{T}_{u,v}$ as matrizes aproximação polinomial.

A relação cinemática é reescrita em um formato matricial em termos dos deslocamentos nos pontos nodais,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{C}_{u,v} \mathbf{T}_{u,v} \mathbf{u} \quad (7.a)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{C}_w \mathbf{T}_w \mathbf{w} \quad (7.b)$$

e as variáveis virtuais são reescritas no formato matricial,

$$\delta \mathbf{\varepsilon}_e = \mathbf{C}_{u,v} \mathbf{T}_{u,v} \delta \mathbf{u} \quad (8.a)$$

$$\delta \mathbf{\kappa} = \mathbf{C}_w \mathbf{T}_w \delta \mathbf{w} \quad (8.b)$$

Substituindo a relação cinemática, mostrada na equação 7 e descrita em função das variáveis de deslocamentos, e a relação constitutiva (equação 3 e 4), na equação 2 que é referente a abordagem variacional energética do sistema, resulta:

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} = & \int \left(\delta \mathbf{w}^T \mathbf{T}_w^T \mathbf{C}_w^T \mathbf{D} \mathbf{C}_w \mathbf{T}_w \mathbf{w} - \delta \mathbf{w}^T \mathbf{T}_w^T \mathbf{C}_w^T \theta_2^* V_p + \delta V \theta_1^* \mathbf{C}_{u,v} \mathbf{T}_{u,v} \mathbf{u} + \delta V_p \theta_2^* \mathbf{C}_w \mathbf{T}_w \mathbf{w} + \delta V_p c_p^* V_p \right) dxdy + \\ & \int \left(\delta \mathbf{u}^T \mathbf{T}_{u,v}^T \mathbf{C}_{u,v}^T \mathbf{A} \mathbf{C}_{u,v} \mathbf{T}_{u,v} \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{T}_{u,v}^T \mathbf{C}_{u,v}^T \mathbf{B} \mathbf{C}_w \mathbf{T}_w \mathbf{w} + \delta \mathbf{u} \mathbf{T}_{u,v}^T \mathbf{C}_{u,v}^T \theta_1^* V_p + \delta \mathbf{w}^T \mathbf{T}_w^T \mathbf{C}_w^T \mathbf{B} \mathbf{C}_{u,v} \mathbf{T}_{u,v} \mathbf{u} \right) dxdy + \\ & \int \left(\delta \mathbf{u}^T \mathbf{T}_{u,v}^T \rho h \mathbf{T}_{u,v} \ddot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{w}^T \mathbf{T}_w^T \rho h \mathbf{T}_w \ddot{\mathbf{w}} \right) dxdy \end{aligned} \quad (9)$$

onde $\mathbf{k}_w = \int \mathbf{T}_w^T \mathbf{C}_w^T \mathbf{D} \mathbf{C}_w \mathbf{T}_w dxdy$ é a rigidez na direção transversal, $\mathbf{k}_u = \int \mathbf{T}_{u,v}^T \mathbf{C}_{u,v}^T \mathbf{A} \mathbf{C}_{u,v} \mathbf{T}_{u,v} dxdy$ é a rigidez na direção axial $\mathbf{k}_{uw} = \int \mathbf{T}_w^T \mathbf{C}_w^T \mathbf{B} \mathbf{C}_{u,v} \mathbf{T}_{u,v} dxdy$ é a rigidez acoplada entre a direção axial e transversal, $\mathbf{m}_w = \int \mathbf{T}_w^T \rho h \mathbf{T}_w dxdy$ é a massa na direção axial, $\mathbf{m}_u = \int \mathbf{T}_{u,v}^T \rho h \mathbf{T}_{u,v} dxdy$ é a massa na direção transversal, $\theta_1 = \int \theta_1^* \mathbf{C}_{u,v} \mathbf{T}_{u,v} dxdy$ é o fator de acoplamento eletromecânico na direção axial, $\theta_2 = \int \theta_2^* \mathbf{C}_w \mathbf{T}_w dxdy$ é o fator de acoplamento eletromecânico na direção transversal e $c_p = \int c_p^* dxdy$ é a capacitância elétrica de um elemento.

A partir da independência de cada deslocamento virtual e da posterior integração referente a cada termo da equação 9, a equação de energia para o sistema eletromecanicamente acoplado é escrita como,

$$\mathbf{m}_w \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{k}_w \mathbf{w} + \mathbf{k}_{wu} \mathbf{u} - \theta_2 V_p = \mathbf{f}_w \quad (10.a)$$

$$\mathbf{m}_u \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}_u \mathbf{u} + \mathbf{k}_{uw} \mathbf{w} - \theta_1 V_p = \mathbf{f}_u \quad (10.b)$$

$$c_p V_p + \theta_1 \mathbf{u} + \theta_2 \mathbf{w} + q_{ext} = 0 \quad (10.c)$$

O conjunto de equações que governam o sistema eletromecânico engloba três diferentes contribuições, correspondentes aos efeitos flexionais, axial e ao domínio elétrico. Ressalta-se que para laminados simétricos (em referência a linha neutra) os fatores de acoplamentos entre a direção axial (membrana) e transversal (flexão) são nulos. Como a configuração utilizada neste trabalho de laminados piezelétricos *bimorphs* (configuração de duas piezocerâmicas dispostas a igual distância da linha neutra) é simétrica, os acoplamentos são desprezados. Além disso, a frequência natural proveniente da equação axial é mais elevada do que a relativa a direção transversal. Assim, a equação (10.b) pode ser desprezada e as equações são reescritas em termos apenas do efeito de flexão e equação elétrica.

$$\mathbf{m}_w \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{k}_w \mathbf{w} - \boldsymbol{\theta}_2 V_p = \mathbf{F}_w \quad (11.a)$$

$$c_p V_p + \boldsymbol{\theta}_2 \mathbf{w} + q_{ext} = 0 \quad (11.b)$$

A equação global é obtida a partir das contribuições individuais de cada elemento no domínio mecânico e elétrico. Enquanto no domínio mecânico a composição acontece para elementos com nós adjacentes, no domínio elétrico duas condições precisam ser observadas. A primeira refere-se a combinação considerada quando uma configuração *bimorph* é utilizada – série ou paralelo. A segunda condição é referente à utilização de eletrodos contínuos e condutores nas mesmas voltagens em cada elemento finito e conseqüentemente em um único. Assim, os valores globais equivalentes da capacitância elétrica e fatores de acoplamento eletromecânicos são obtidos a partir da soma de cada parcela individual dos valores de cada elemento finito que modelam a piezocerâmica. Como consequência, o novo conjunto de equações que governam o sistema são,

$$\mathbf{M}_w \ddot{\mathbf{W}} + \mathbf{K}_w \mathbf{W} - \boldsymbol{\Theta}_2 V_p = \mathbf{F}_w \quad (12.a)$$

$$C_p V_p + \boldsymbol{\Theta}_2 \mathbf{W} + q_{ext} = 0 \quad (12.b)$$

onde $\mathbf{M}_w$ é a matriz de massa global, $\mathbf{K}_w$ é a matriz de rigidez global, $\boldsymbol{\Theta}_2$ é o fator de acoplamento global, C_p é a capacitância global e $\mathbf{W}$ o vetor de deslocamento global.

A diferenciação da equação elétrica resulta na transformação do termo de carga elétrica em corrente elétrica. Como a condição de contorno elétrica devido a presença de um resistor é $\dot{q}_{ext} = v/R$, a equação do sistema é modificada:

$$\mathbf{M}_w \ddot{\mathbf{W}} + \mathbf{K}_w \mathbf{W} - \boldsymbol{\Theta}_2 V_p = \mathbf{F}_w \quad (13.a)$$

$$C_p \dot{V}_p + \boldsymbol{\Theta}_2 \dot{\mathbf{W}} + \frac{1}{R} \dot{V}_p = 0 \quad (13.b)$$

As equações eletromecânicas mostradas acima podem ser convertidas do domínio físico para o modal. O objetivo é reduzir o custo computacional associado à solução dessas através da redução da ordem do sistema. A conversão das equações é realizada pré-multiplicando a equação 13.a e 13.b pela matriz modal transposta, substituindo o deslocamento físico por deslocamento modal ($\mathbf{W} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\eta}$ -- onde $\boldsymbol{\Phi}$ é a matriz modal). Posteriormente, com o sistema desacoplado, pode se reduzir a ordem para o número de modos desejados. Esse procedimento leva ao surgimento da seguinte equação,

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\mathbf{K}} \boldsymbol{\eta} - \bar{\boldsymbol{\Theta}}_2 V_p = \bar{\mathbf{F}}_w \quad (14.a)$$

$$C_p \dot{V}_p + \bar{\boldsymbol{\Theta}}_2 \dot{\boldsymbol{\eta}} + \frac{1}{R} \dot{V}_p = 0 \quad (14.b)$$

onde $\bar{\mathbf{M}}$ é a matriz de massa modal, $\bar{\mathbf{K}}$ é a matriz de rigidez modal, $\bar{\boldsymbol{\Theta}}_2$ é o vetor de acoplamento modal, $\bar{\mathbf{F}}_w$ é o vetor de forças descrito nas coordenadas modais e $\boldsymbol{\eta}$ são as coordenadas modais.

3.1.2. Modelagem Aerodinâmica não estacionária utilizando o Método de Malhas Dipolos (DLM)

O método de malha de dipolos foi originalmente apresentado por Albano e Rodden (1969) para simular a aerodinâmica tridimensional de uma asa finita no regime inviscido e subsônico¹. O método de malha de dipolos, usualmente chamado de DLM (*Doublet-lattice method*), resolve a equação do potencial aerodinâmico conjuntamente com a equação da continuidade (equação de massa) e equação de estado utilizando a singularidade de dipolos. Os dipolos são distribuídos ao longo da superfície da asa e de uma esteira plana e relacionam a pressão na asa, que é causada devido tanto ao *downwash* da asa quanto ao efeito da esteira.

Através da hipótese de movimento harmônico, o efeito da esteira pode ser descrito implicitamente em função da dinâmica do movimento da asa. Assim, a solução do potencial aerodinâmico é representada em uma matriz de coeficiente de influências que relacionam a força aerodinâmica e *downwash* encontrados na superfície da asa. A asa é discretizada em vários painéis aerodinâmicos, conforme descrito na figura a seguir.

Figura 7- (a) Exemplo da malha aerodinâmica e (b) descrição de um painel aerodinâmico

¹ O objetivo dessa subseção é mostrar as hipóteses básicas e detalhes mais importantes referentes ao método da malha de dipolos. Caso o leitor tenha um maior interesse no desenvolvimento do método, o trabalho de (BLAIR, 1992) apresenta uma excelente descrição passo a passo sobre o DLM.

Em cada painel aerodinâmico, uma linha de dipolo é assumida a $\frac{1}{4}$ de corda a partir do bordo de ataque do painel. Nessa linha, as forças aerodinâmicas são calculadas. Também em cada painel, existe um ponto de controle onde a velocidade da asa é verificada, definidos a $\frac{3}{4}$ da corda. A matriz de coeficientes de influência $\mathbf{A}(\omega)$ que é função da frequência de oscilação da asa, relacionando o *downwash* w e força aerodinâmica F_a é apresentada a seguir,

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{AIC}(\omega)\mathbf{F}_a \quad (15)$$

onde o *downwash* w_a é descrito pela soma da velocidade transversal e efeito do ângulo de ataque local induzido pela rotação,

$$\mathbf{w}_a = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + V \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \quad (16)$$

onde V é a velocidade do escoamento, $\mathbf{W}$ é o deslocamento transversal, t é o tempo e x a direção ao longo da corda.

3.1.3. Acoplamento entre o Modelo Estrutural e Aerodinâmico via Splines

A interação entre forças aerodinâmicas e deslocamentos (ou deformações) mecânicas caracterizam o problema aeroelástico. Por exemplo, as forças aerodinâmicas dependem do *downwash*; e essas forças quando aplicadas no modelo estrutural modificam deslocamentos e velocidades. A modificação nos deslocamentos e velocidades geram novos *downwash* e consequentemente novas forças aerodinâmicas.

No presente trabalho dois métodos numéricos e com malhas distintas são utilizados para a modelagem da estrutura e da aerodinâmica não estacionária. Enquanto no modelo por elementos finitos eletromecanicamente acoplado as forças e deslocamentos são verificados

nos nós dos elementos, no modelo aerodinâmico as forças são verificadas na linha de dipolos e os deslocamento (e velocidades) são verificados no ponto de controle.

Uma solução para a troca de informações entre modelos com malhas distintas, é o uso de matrizes de transformação. Na literatura de aeroelasticidade o método de *splines*, apresentado por Harder e Desmarais (1972), é utilizado para a montagem de matrizes de transformação que são apresentadas como,

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{G}_{ea} \mathbf{F}_a \quad (17.a)$$

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{G}_{ae} \mathbf{w}_e \quad (17.b)$$

onde $\mathbf{F}_e$ é o vetor de forças na malha estrutural, $\mathbf{F}_a$ é o vetor de forças na malha aerodinâmica, $\mathbf{w}_a$ o vetor de *downwash* na malha aerodinâmica, $\mathbf{w}_e$ o vetor de *downwash* na malha estrutural e $\mathbf{G}_{ea}$ e $\mathbf{G}_{ae}$ são as matrizes de transformação de malhas.

Assim tanto forças aerodinâmicas podem ser transferidas para a malha estrutural como deslocamentos (e velocidades) originários do modelo estrutural podem ser passados para a malha aerodinâmica. É importante ressaltar que o sistema é representado em função dos modos e assim os deslocamentos presentes são referentes às coordenadas modais. As forças aerodinâmicas podem ser escritas na malha estrutural como,

$$\mathbf{F}_w(\omega) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{G}_{ea} \mathbf{AIC}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{G}_{ae} \mathbf{\Phi} \mathbf{\eta} \quad (18)$$

onde $\mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{G}_{ea} \mathbf{AIC}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{G}_{ae} \mathbf{\Phi}$ e o formato final das equações que governam o sistema piezoaeroelástico linear é dado como,

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{\eta}} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{\eta} - \bar{\mathbf{\Theta}}_2 \dot{V}_p - \mathbf{Q}\mathbf{\eta} = \mathbf{0} \quad (19)$$

$$C_p \dot{V}_p + \mathbf{\Theta}_2 \dot{\mathbf{\eta}} + \frac{1}{R} \dot{V}_p = 0 \quad (20)$$

3.2 Modelagem Piezoaeroelástica Não Linear

Esta seção apresenta um modelo piezoaeroelástico não linear. Diferentemente do item anterior o efeito não linear geométrico é considerado, permitindo a representação apropriada de grandes deslocamentos na estrutura modelada. Com o intuito de representar o efeito não linear geométrico, o modelo de placa de von Kàrmàn é empregado e o mesmo é apresentado na subseção.

O modelo piezoaeroelástico não linear é resolvido no domínio do tempo. No caso anteriormente apresentado (modelo linear) o sistema eletroaeroelástico foi representado no domínio da frequência, já que o modelo aerodinâmico utilizado é originalmente formulado no domínio da frequência. No modelo não linear a ser apresentado, o mesmo modelo aerodinâmico será utilizado (DLM), entretanto, o método de Roger será utilizado para a conversão do mesmo para o domínio do tempo. Dentre outras vantagens, a representação no domínio do tempo permite a avaliação de respostas desde o regime transiente até a condição de regime permanente.

3.2.1 Modelagem Eletromecânica Não Linear

O modelo por elementos finitos não linear e eletromecanicamente acoplado emprega a teoria de placa de von Kàrmàn em sua formulação. Esse modelo é empregado na literatura para simular o comportamento de *flutter* de painéis, como nos trabalhos de Chiang; Mei; Gray C. E. (1991); Xue; Mei (1993); Zhou; Xue; Chuh (1994) e Lee; NG (2001) e utiliza uma relação cinemática não linear para representar o acoplamento entre o deslocamento transversal e a deformação axial. O acoplamento é modelado por termos não lineares de segunda ordem na variável de deslocamento, como é visto na equação a seguir,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}^T + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 & \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 & 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}^T \quad (21.a)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \quad (21.b)$$

Como consequência, termos não lineares dependentes dos deslocamentos também são encontrados na variável virtual do sistema relacionados a deformação axial,

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{C}_{u,v} \mathbf{T}_{u,v} \delta \mathbf{u} + \mathbf{C}_\theta \mathbf{G}_w \mathbf{T}_w \delta \mathbf{w} \quad (22)$$

onde a deformação axial escrita em um formato matricial têm a seguinte forma,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{C}_{u,v} \mathbf{T}_{u,v} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{C}_\theta \mathbf{G}_w \mathbf{T}_w \mathbf{w} \quad (23)$$

e as matrizes $\mathbf{C}_\theta$ e $\mathbf{G}_w$ são mostradas na equação 24,

$$\mathbf{C}_\theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G}_w = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Seguindo a mesma abordagem da seção 3.2.1, o princípio variacional é utilizado para representar a equação de energia. As relações constitutivas utilizadas são as mesmas que foram empregadas anteriormente (equações 3 e 4). Entretanto, a modificação na relação cinemática resulta em novos termos na formulação energética como visto a seguir,

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} = & \int \left(\delta \mathbf{w}^T \mathbf{T}_w^T \mathbf{C}_w^T \mathbf{D} \mathbf{C}_w \mathbf{T}_w \mathbf{w} - \delta \mathbf{w}^T \mathbf{T}_w^T \mathbf{C}_w^T \boldsymbol{\theta}_2^* V_p + \delta V \boldsymbol{\theta}_1^* \mathbf{C}_{u,v} \mathbf{T}_{u,v} \mathbf{u} + \delta V_p \boldsymbol{\theta}_2^* \mathbf{C}_w \mathbf{T}_w \mathbf{w} + \delta V_p c_p^* V_p \right) dx dy + \\ & \int \left(\delta \mathbf{u}^T \mathbf{T}_{u,v}^T \mathbf{C}_{u,v}^T \mathbf{A} \mathbf{C}_{u,v} \mathbf{T}_{u,v} \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{T}_{u,v}^T \mathbf{C}_{u,v}^T \mathbf{B} \mathbf{C}_w \mathbf{T}_w \mathbf{w} + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{T}_{u,v}^T \mathbf{C}_{u,v}^T \boldsymbol{\theta}_1^* V_p + \delta \mathbf{w}^T \mathbf{T}_w^T \mathbf{C}_w^T \mathbf{B} \mathbf{C}_{u,v} \mathbf{T}_{u,v} \mathbf{u} \right) dx dy + \\ & \int \left(\delta \mathbf{w}^T \mathbf{T}_w^T \mathbf{G}_w^T \mathbf{C}_\theta^T \mathbf{A} \mathbf{C}_{u,v} \mathbf{T}_{u,v} \mathbf{u} + \delta \mathbf{w}^T \mathbf{T}_w^T \mathbf{G}_w^T \mathbf{C}_\theta^T \mathbf{A} \mathbf{C}_\theta \mathbf{G}_w \mathbf{T}_w \mathbf{w} + \delta \mathbf{w}^T \mathbf{T}_w^T \mathbf{G}_w^T \mathbf{C}_\theta^T \mathbf{B} \mathbf{C}_w \mathbf{T}_w \mathbf{w} + \delta \mathbf{w}^T \mathbf{T}_w^T \mathbf{G}_w^T \mathbf{C}_\theta^T \boldsymbol{\theta}_1^* V_p \right) dx dy \\ & \frac{1}{2} \int \left(\delta \mathbf{w}^T \mathbf{T}_w^T \mathbf{C}_w^T \mathbf{B} \mathbf{C}_\theta \mathbf{G}_w \mathbf{T}_w \mathbf{w} + \delta V_p \boldsymbol{\theta}_1^* \mathbf{C}_\theta \mathbf{G}_w \mathbf{T}_w \mathbf{w} + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{T}_{u,v}^T \mathbf{C}_{u,v}^T \mathbf{A} \mathbf{C}_\theta \mathbf{G}_w \mathbf{T}_w \mathbf{w} + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{T}_{u,v}^T \rho h \mathbf{T}_{u,v} \ddot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{w}^T \mathbf{T}_w^T \rho h \mathbf{T}_w \ddot{\mathbf{w}} \right) dx dy \end{aligned} \quad (25)$$

Os novos termos na equação energética levam ao surgimento de termos não lineares de rigidez e esses termos são dependentes dos deslocamentos tanto em primeiro quanto em segundo grau, como mostrado a seguir.

$$\mathbf{n}_{1w} = \int \mathbf{T}_w^T \mathbf{G}_w^T \mathbf{C}_\theta^T \mathbf{A} \mathbf{C}_{u,v} \mathbf{T}_{u,v} dx dy + \int \mathbf{T}_w^T \mathbf{C}_w^T \mathbf{B} \mathbf{C}_{u,v} \mathbf{T}_{u,v} dx dy \quad (26.a)$$

$$\mathbf{n}_{2w} = \int \mathbf{T}_w^T \mathbf{G}_w^T \mathbf{C}_\theta^T \mathbf{A} \mathbf{C}_\theta \mathbf{G}_w \mathbf{T}_w dx dy \quad (26.b)$$

$$\mathbf{n}_{1w\theta} = \int \mathbf{T}_w^T \mathbf{G}_w^T \mathbf{C}_\theta^T \boldsymbol{\theta}_1 dx dy \quad (26.c)$$

Utilizando o mesmo argumento de simetria ao longo da linha média, a matriz $\mathbf{B}$ e o termo $\boldsymbol{\theta}_1$ são nulos. Como o efeito de deslocamento no plano (u e v) não é considerado, o único termo não nulo é o $\mathbf{n}_{2w}$.

A montagem das equações globais relativas a placa de von Kàrmàn é realizada em dois passos. O primeiro refere-se a montagem do sistema de equações lineares, e é similar a abordagem apresentada na subseção 3.1.1, em que as equações eletromecânicas globais são obtidas e posteriormente descritas no domínio modal. O segundo passo é a montagem das matrizes globais não lineares. Essas matrizes, que inicialmente são dependentes do deslocamento, sofrem uma transformação de coordenadas físicas para coordenadas modais, além de uma posterior redução de ordem do sistema que emprega uma abordagem semelhante aos seguintes trabalhos: Chiang; Mei; Gray C. E. (1991); Xue; Mei (1993); Zhou; Xue; Chuh (1994) e Lee; NG (2001). Assim, a obtenção das matrizes globais não lineares é simplificada. Ao invés de se montar novas matrizes a cada passo de tempo, devido a dependência intrínseca dos deslocamentos, o efeito não linear é modelado pelo somatório de matrizes não lineares modais. Essas matrizes são dependentes da forma modal e multiplicadas pela amplitude das variáveis modais utilizadas na simulação. Assim, se obtêm:

$$\mathbf{K}_{nl2} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \eta_i \eta_k \mathbf{k}_{nl2}^{i,k} (\boldsymbol{\Phi}_i, \boldsymbol{\Phi}_k) \quad (27)$$

Finalmente, o sistema não linear é escrito como,

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\mathbf{K}}\boldsymbol{\eta} - \bar{\boldsymbol{\Theta}}_2 V_p + \mathbf{K}_{2nl}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta} - \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \quad (28.a)$$

$$C_p \dot{V}_p + \bar{\boldsymbol{\Theta}}_2 \dot{\boldsymbol{\eta}} + \frac{1}{R} \dot{V}_p = 0 \quad (28.b)$$

3.2.2 Modelagem Aerodinâmica no Domínio do Tempo

Com o intuito de investigar o comportamento do sistema piezoaeroelástico não linear, o carregamento aerodinâmico, originário do método da malha de dipolos e inicialmente descrito no domínio da frequência, é convertido para o domínio do tempo. A conversão é realizada através do método apresentado por Roger (1977).

O método realiza a conversão em duas etapas. Uma é a representação da aerodinâmica em função racional no domínio da frequência e a segunda a sua posterior conversão ao domínio temporal. A primeira etapa é realizada através da hipótese que a matriz de influência aerodinâmica assume uma expansão em termos de uma função racional. Os coeficientes da matriz aerodinâmica são determinados utilizando uma estratégia de mínimos quadrados que melhor aproxima o comportamento das forças aerodinâmicas para um dado conjunto de frequências pré-estabelecidas. A matriz de influência aerodinâmica é dada como,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 s + \mathbf{A}_2 s^2 + \sum_{j=3}^N \frac{\mathbf{A}_j s}{(s + \gamma_{j-2})} \quad (29)$$

onde a variável s representa o operador laplaciano, $\mathbf{A}_j$ os coeficientes do polinômio e γ_{j-2} o zero da raízes.

A segunda etapa é a conversão da matriz de influência aerodinâmica do domínio da frequência para o do tempo. É interessante notar que existem dois grupos de termos com diferentes comportamentos na equação aerodinâmica. O primeiro grupo representa a expansão polinomial até segunda ordem. Esses termos, associados aos coeficientes $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$, representam o efeito da rigidez, amortecimento e inércia aerodinâmica, respectivamente. O segundo grupo representa as raízes racionais do problema que podem ser modeladas no tempo como estados aerodinâmicos adicionais, elevando o número de variáveis do problema.

Após a conversão para o domínio do tempo, a aerodinâmica não estacionária é associada ao sistema eletromecânico não linear. O conjunto de equações piezoaeroelásticas é descrito em uma formulação em espaços de estados que assume a seguinte forma,

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_1 \\ \dot{\mathbf{X}}_2 \\ \dot{V}_p \\ \dot{\mathbf{X}}_{s_i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_s^{-1}(\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_{NL}) & -\mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{B}_s & \mathbf{M}_s^{-1}\boldsymbol{\theta} & \mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{A}_j \\ \mathbf{0} & \frac{-\boldsymbol{\theta}^T}{R_L} & -\frac{1}{R_L C_p} & \mathbf{0} \\ \frac{V}{b}\gamma_i \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ V_p \\ \mathbf{X}_{s_i} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

onde, $\mathbf{M}_s = \bar{\mathbf{M}} - 1/2 \rho_{ar} b^2 \mathbf{A}_2$ é a matriz de massa linear aeroelástica, $\mathbf{B}_s = -1/2 \rho_{ar} b V \mathbf{A}_1$ é a matriz de amortecimento linear aeroelástica e $\mathbf{K}_s = \bar{\mathbf{K}} - 1/2 \rho_{ar} V^2 \mathbf{A}_0$ é a matriz de rigidez linear aeroelástica.

3.2.3 Solução Numérica no Domínio do Tempo

O sistema não linear apresentado na equação 30 é resolvido através de uma aproximação numérica a partir de uma abordagem iterativa. O método alfa generalizado foi escolhido para integrar as equações no tempo, como realizado por Shearer e Cesnik (2006). A escolha do método do alfa generalizado é devido a sua capacidade de adicionar amortecimento numérico em frequências altas porém sem adicionar amortecimento numérico em frequências baixas² -- frequências de interesse físico (CHUNG; HULBERT, 1993). A solução é dada na forma,

$$\dot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_{m1}} = \mathbf{A}^* \dot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_{f1}} \quad (31.a)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\dot{\mathbf{x}}_n + h\gamma_1 (\dot{\mathbf{x}}_{n+1} - \dot{\mathbf{x}}_n) \quad (31.b)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_{m1}} = \dot{\mathbf{x}}_n + \alpha_{m1} (\dot{\mathbf{x}}_{n+1} - \dot{\mathbf{x}}_n) \quad (31.c)$$

$$\mathbf{x}_{n+\alpha_{f1}} = \mathbf{x}_n + \alpha_{f1} (\dot{\mathbf{x}}_{n+1} - \dot{\mathbf{x}}_n) \quad (31.d)$$

onde $\mathbf{x}_{n+1}$ representa as variáveis de estado em um passo de tempo futuro, $\mathbf{x}_n$ representa as variáveis de estado no passo de tempo atual, $\mathbf{A}^*$ é a matriz não linear de estados, $\alpha_{m1} = \left(\frac{3 - \rho_\infty}{1 + \rho_\infty} \right)$, $\alpha_{f1} = \frac{1}{\rho_\infty + 1}$ e $\gamma_1 = \frac{1}{2} + \alpha_{m1} - \alpha_{f1}$. É importante ressaltar que os três últimos parâmetros são controlados por ρ_∞ que é relacionado com o amortecimento em altas frequências.

Associado a integração numérica, o método de *Newton-Rapshon* é utilizado para resolver o problema não linear a partir de uma estratégia iterativa. Devido a presença de termos não lineares, a busca da solução do sistema é iterativa e iniciada em um dado passo de tempo onde o valor atual do estado é conhecido. Assumindo como aproximação inicial que o valor dos estados no passo futuro é igual aos valores do passo presente,

$$\mathbf{x}_{n+1}^0 = \mathbf{x}_n \quad (32)$$

---

² A adição de amortecimento numérico em frequências baixas para o sistema aeroelástico é indesejada porque poderia alterar a previsão da velocidade linear de *flutter* do sistema, levando essa a previsão dessa instabilidade para uma velocidade mais alta.

determina-se o Jacobiano $\mathbf{J}(\mathbf{x}^k)^{-1}$ e Resíduo $\mathbf{R}(\mathbf{x}^k)$ que são utilizados para encontrar a atualização do valor do estado no passo futuro, que é dado pela seguinte relação,

$$\Delta \mathbf{x}^k = -\mathbf{J}(\mathbf{x}^k)^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{x}^k) \quad (33)$$

Pode-se então atualizar o valor do passo futuro utilizando,

$$\mathbf{x}_{n+1}^{k+1} = \Delta \mathbf{x}_{n+1}^k + \mathbf{x}_{n+1}^k \quad (34)$$

e verificar se uma nova iteração nesse passo de tempo é necessária. Se o valor da atualização for maior do que uma norma pré estabelecida, uma nova atualização do valor presente deve ser determinada. Caso contrário, procede-se para a análise em um novo passo de tempo.

Capítulo 4 - Resultados

O comportamento eletroaeroelástico de um gerador piezelétrico de energia é investigado no presente capítulo. O modelo linear e o modelo não linear apresentados no capítulo anterior são utilizados nas simulações.

Inicialmente, o gerador piezoaeroelástico é apresentado e análises estruturais e aeroelásticas lineares são realizadas. A partir da consideração de curto-circuito elétrico, modos e frequências naturais são obtidos, e em sequência, a frequência de *flutter* e velocidade crítica de *flutter* são determinadas. São ainda realizadas simulações lineares no domínio do tempo para mostrar o comportamento das oscilações piezoaerolásticas.

Posteriormente, resultados piezoaeroelásticos não lineares são apresentados. Para cada razão de aspecto, os resultados não lineares -- análise do comportamento de amplitudes mecânicas (máximo deslocamento do gerador) e do comportamento dos parâmetros elétricos (tensão elétrica e potência) -- são obtidos para uma faixa de velocidades acima da velocidade crítica de *flutter* da respectiva configuração e para diferentes valores de resistência elétrica.

4.1. Apresentação dos Estudos de Casos

O gerador estudado consiste em uma asa elástica, engastada na raiz e com piezocerâmicas embutidas na estrutura metálica, como pode ser visto na Figura 8. O domínio elétrico é constituído de um resistor conectado aos eletrodos (resultantes da conexão em série entre as camadas piezelétricas) com o intuito de se estimar a potência elétrica gerada em cada condição investigada.

Figura 8- Representação conceitual da asa

Cinco diferentes geometrias³ de geradores serão estudadas, variando-se a razão de aspecto unitariamente desde 1 até 5. Em todas os estudos de casos apresentados, as propriedades tanto do material empregado para a subestrutura, alumínio, como outras propriedades geométricas da asa, espessura e corda, são mantidos constantes e podem ser vistas na Tabela 1 e Tabela 2

Tabela 1- Propriedades geométricas utilizadas nos diferentes estudos de casos

Caso	Razão de Aspecto	Envergadura [m]	Corda [m]	Espessura [m]
RA1	1	0,3	0,3	0,001
RA2	2	0,6	0,3	0,001
RA3	3	0,9	0,3	0,001
RA4	4	1,2	0,3	0,001
RA5	5	1,5	0,3	0,001

Tabela 2- Propriedades mecânicas do alumínio utilizado em todos os casos

Material	Alumínio
Módulo de Elasticidade	69 <i>GPa</i>
Coefficiente Poisson	0,3
Densidade	2750 <i>kg/m³</i>

Em todos os casos estudados, as duas camadas de piezocerâmicas cobrem 0,01 m da estrutura (ao longo da envergadura) a partir do engaste e também toda a largura (corda). Estas dimensões foram mantidas constantes para as diferentes razões de aspecto consideradas. A cerâmica piezelétrica utilizada nesse trabalho é a PZT-5A, cujas propriedades estão listadas na Tabela 3.

³ A geometria e propriedades de material da subestrutura da asa foram escolhidos com base em um trabalho desenvolvido por Tang; Dowell; Hall, (1999). No entanto, a estrutura do artigo citado não possui material piezelétrico. O intuito inicial era validar o comportamento aeroelástico não linear das oscilações em ciclo limite, porém, os autores partiram de valores discrepantes de frequência natural para razão de aspecto 1. Eles relataram que o valor das três primeiras frequências naturais eram de 6,5, 20,5 e 71,9 Hz ou 6,5, 18,2 e 58,9 Hz dependendo do número de modos utilizados enquanto os valores encontrados no trabalho aqui desenvolvido após conversão de malhas são 9,26, 22,61 e 52,65 Hz. Mesmo com esses valores diferentes, as amplitudes dos LCOs encontrados e velocidade de *flutter* possuem a mesma ordem de grandeza.

Tabela 3- Propriedades eletromecânicas da piezocerâmica PZT-5A (estado plano de tensões)

Material	PZT 5A
Módulo de Elasticidade	69,5 <i>GPa</i>
Coeficiente Poisson	0,3
Densidade	7800 <i>kg/m³</i>
Constante Dielétrica (ϵ^s)	11,51*10 ⁻⁹ <i>F/m</i>
Constante piezelétrica (e_{31})	5,2 <i>C/m²</i>
Espessura de cada camada piezelétrica	0.4 <i>mm</i>

4.2 Análises Piezoaeroelásticas Lineares

4.2.1 Resultados Eletromecânicos em Curto-Circuito

Cada configuração dos geradores eletroaeroelásticos investigados é inicialmente caracterizada com a determinação das suas frequências piezoaeroelásticas e modos de vibrar. As frequências e modos foram obtidos a partir do modelo eletromecânico linear e os valores foram calculados para a condição próxima de curto-circuito -- com resistência elétrica de 100 Ω . É importante ressaltar que o modelo linear utilizado é representado quando o termo $\mathbf{K}_{NL}$ da equação 30 é desprezado.

A malha estrutural utilizada para as diversas asas com diferentes razões de aspecto mantém a mesma resolução. Para razão de aspecto unitária, a malha é composta de 10 elementos na direção da corda e 10 elementos na envergadura. Para as outras razões de aspecto, o número de elementos na corda é constante e o número de elementos na envergadura aumenta em 10 para cada aumento unitário de razão de aspecto. A tabela 4 mostra as diferentes malhas para as diversas razões de aspecto.

Tabela 4- Descrição da malha estrutural utilizada em cada estudo de caso

Razão de Aspecto	Elementos ao longo da corda	Elementos ao longo da envergadura
1	10	10
2	10	20
3	10	30
4	10	40
5	10	50

Os valores das frequências e a sequência dos modos são respectivamente apresentados nas tabelas 5 e 6. Na tabela 6, os modos são identificados por números que mostram a ordem dos modos e letras que mostram se o modo é de flexão (F), torção (T) ou placa (P). As figuras 9 a 11 exemplificam a forma dos modos listados na tabela 6.

Tabela 5 - Valores das frequências naturais em [Hz] para as várias razões de aspecto

RA1	RA2	RA3	RA4	RA5
9,26	2,23	1,02	0,57	0,36
22,61	9,96	6,33	3,58	2,29
52,65	14,36	6,39	4,63	3,66
71,29	32,09	17,88	10,06	6,43
74,96	39,35	19,83	14,30	11,19

Tabela 6- Sequência dos modos para cada razão de aspecto estudada

RA1	RA2	RA3	RA4	RA5
1F	1F	1F	1F	1F
1T	1T	1T	2F	2F
2F	2F	2F	1T	1T
1P	2T	3F	3F	3F
2T	3F	2T	2T	2T

Como pode ser observado na tabela 6, a sequência dos modos é alterada de acordo com as diferentes razões de aspecto consideradas. Entre o primeiro e segundo valor de razão de aspecto, o modo de placa 1P é substituído pelo terceiro modo de flexão 3T e pela consequente redução do segundo modo de torção. Da segunda para a terceira razão de aspecto, o quarto e o quinto modo têm sua ordem trocada de 2T e 3F para 3F e 2F. Para a quarta e quinta razão de aspecto, o segundo e terceiro também tem sua ordem trocada de 1T e 2F para 2F e 1T.

Figura 9- Modos de Flexão: (a) primeiro modo de flexão (1F), (b) segundo modo de flexão (2F) e (c) terceiro modo de flexão (3F)

Figura 10- Modos de torção: (a) primeiro modo de torção (1T) e (b) segundo modo de torção (2T)

Figura 11- Primeiro modo de placa (1P)

4.2.2. Resultados Piezoaeroelásticos Lineares em Curto-Circuito

A partir da determinação dos modos e frequências naturais para as diferentes razões de aspecto, a velocidade e a correspondente frequência de *flutter* para cada configuração são determinadas. As propriedades do escoamento utilizadas são a velocidade do som e a massa específica do ar, cujos valores são 340 m/s e 1.225 kg/m^3 respectivamente. A malha aerodinâmica utilizada na simulação das varias razões de aspecto mantém a mesma resolução e possui a mesma quantidade de elementos da malha estrutural (apresentada na Tabela 4), tanto na direções da corda e envergadura.

A variação da frequência (parte imaginária do autovalor) com o incremento da velocidade para a asa com razão de aspecto unitária é apresentando na figura 12.a. Nota-se que para a linha em preto, correspondente ao 1T, o valor da frequência diminui continuamente. O mesmo comportamento de decréscimo da frequência acontece para o primeiro modo de flexão. A velocidade de *flutter* é determinada utilizando uma análise de

estabilidade para o sistema linear associado. A figura 12.b apresenta a evolução do amortecimento (parte real do autovalor) com o incremento da velocidade para a asa com razão de aspecto unitária. Com o intuito de facilitar a visualização, apenas as duas curvas de amortecimento com valores próximos a origem são mostradas. Pode se observar, para a linha em preto, que o amortecimento aumenta com o aumento da velocidade até aproximadamente 40 m/s. A partir dessa velocidade o amortecimento do modo 1T começa diminuir, cruzando a condição de amortecimento nula na velocidade de 53 m/s, definida como a velocidade crítica de *flutter*.

Figura 12- Variação da (a) frequência e (b) amortecimento com o aumento da velocidade para razão de aspecto 1

A variação no amortecimento com a mudança de velocidade para o gerador com razão de aspecto 1 é investigado a partir de respostas obtidas no domínio do tempo. As respostas são simuladas em cinco velocidades distintas - 10 m/s, 40 m/s 50 m/s 52 m/s e 54 m/s - com o intuito de exemplificar as mudanças no comportamento de amortecimento e frequência denotados nas figuras 12. Como apresentado na figura 12.b, na região entre 0 m/s a 40 m/s o amortecimento cresce. Consequentemente, a resposta encontrada na velocidade de 40 m/s, mostrada na figura 13.b têm o decaimento maior do que na velocidade de 10 m/s, mostrada na figura 13.a. Quando a velocidade aumenta, de 40 m/s até 52 m/s, o amortecimento é menor e a resposta têm um decaimento menor, como apresentado nas figuras 13.c e 13.d respectivamente nas velocidades de 50 m/s e 52 m/s. Para a velocidade de 54 m/s, acima da velocidade de flutter, os deslocamentos do gerador linear apresentam um comportamento instável com amplitudes crescentes. Nas simulações realizadas uma entrada inicial de 0,15 cm (1,5 mm) foi aplicada para todas as velocidades estudadas.

Figura 13 - Deslocamento da asa encontrado no vértice referente ao bordo de fuga e ponta da asa nas velocidades de (a) 10m/s, (b) 40 m/s, (c) 50 m/s, (d) 52 m/s e (e) 54 m/s

O efeito da mudança de razão de aspecto tanto na velocidade de *flutter* como na frequência de *flutter* é investigado e mostrado na figura 14. A mudança da frequência de *flutter* com o incremento da razão de aspecto é denotada na figura 14.a. A frequência diminui com o aumento da razão de aspecto. A diminuição das frequências de flutter concorda com a variação das frequências de ressonância de cada modo para cada razão de aspecto apresentada na Tabela 5. A diminuição das frequências de ressonancia de cada modo com o aumento da razão de aspecto pode ser vinculada ao aumento da massa e redução de rigidez com o aumento da envergadura. A Figura 14 mostra a variação da velocidade de *flutter* para as diferentes razões de aspecto consideradas neste trabalho. A maior velocidade de *flutter* encontrada é 53 m/s para razão de aspecto unitária e a menor velocidade encontrada é 7 m/s

para razão de aspecto 5. A velocidade de *flutter* diminui com o aumento da razão de aspecto e essa redução é também explicada pela variação das frequências apresentadas na tabela 5. Nota-se ainda que na região com valor de aspecto baixo, a taxa de decaimento da velocidade de flutter é mais acentuada do que quando comparada com a região de aspecto alto.

Figura 14- Comportamento da (a) frequência de *flutter* e (b) velocidade de *flutter* com a mudança da razão de aspecto

Além do cálculo da velocidade em que a instabilidade dinâmica *flutter* para o regime linear acontece, a velocidade em que ocorre a divergência aeroelástica para o sistema linear também é determinada nesse capítulo. A velocidade da divergência é obtida através da análise de estabilidade da matriz de rigidez aeroelástica. Dentro das velocidades estudadas para as várias razões de aspecto, é importante ressaltar que não foi encontrada a divergência para as razões de aspecto 1 e 2. No entanto, a divergência aeroelástica é encontrada para as outras razões de aspecto. Os valores da velocidade de divergência são mostrados na Tabela 7.

Tabela 7 - Velocidade de divergência linear para as diversas razões de aspecto

Razão de Aspecto	Velocidade de divergência (m/s)
1	-
2	-
3	14.7 m/s
4	10.4 m/s
5	8.1 m/s

4.2 Análises Piezoaeroelásticas Não Lineares

Os resultados não lineares apresentados nesta dissertação referem-se as simulações realizadas para diversas razões de aspecto do gerador, com diferentes valores de resistências e para faixas de velocidades menores e maiores do que a velocidade linear de *flutter*. O objetivo das simulações é caracterizar o comportamento tanto mecânico quanto elétrico do gerador. Consequentemente, são mostrados as saídas mecânicas (deslocamento) e também elétricas (tensão elétrica e potência) são apresentadas.

Os resultados não lineares são divididos em dois grupos. O comportamento antes da velocidade de *flutter* é mostrado na subseção 4.2.1 e depois da velocidade de *flutter* é mostrado na subseção 4.2.2. Por último é importante lembrar que os todos os resultados não lineares foram obtidos utilizando o método de integração numérica alfa-generalizado, com o passo de tempo igual a 0.001 s e parâmetro de controle, ρ_{∞} , igual a 0.1.

4.2.1. Comportamento eletroaeroelástico abaixo da Velocidade Linear de *Flutter*

O comportamento aeroelástico não linear para velocidades menores que a velocidade linear de flutter (de cada configuração) foi investigado para as várias razões de aspecto assumidas neste trabalho na condição de curto circuito (com resistência de $10^2 \Omega$). Na figura 15, são apresentados os deslocamentos adimensionais na ponta da asa para cada razão de aspecto. As velocidades em que os deslocamentos são investigados correspondem a 52 m/s para razão de aspecto 1 (figura 15.a), 18,5 m/s para razão de aspecto 2 (figura 15.b), 11,7 m/s para razão de aspecto 3 (figura 15.c), 8,7 m/s para razão de aspecto 4 (figura 15.d) e 6,5 para razão de aspecto 5 (figura 15.e) e todas essas estão abaixo da velocidade de *flutter*. De um modo geral, nota-se quando a velocidade é menor do que a velocidade de *flutter*, a oscilação decrescem e tendem a zero. Na figura 15, um detalhe interessante a ser notado é o aumento do período da oscilação com o aumento da razão de aspecto.

Figura 15 - Comportamento dos deslocamento para o gerador não linear com (a) razão de aspecto 1 e velocidade de 52,0 m/s, (b) razão de aspecto 2 e velocidade de 18,5 m/s, (c) razão de aspecto 3 e velocidade de 11,7 m/s (d) razão de aspecto 4 e velocidade de 8,7 m/s e (e) razão de aspecto 5 e velocidade de 6,5 m/s.

4.2.1. Comportamento Eletroaeroelástico após a Velocidade Linear de *Flutter*

A variação dos deslocamentos adimensionais para uma ampla faixa de resistores e medidos na ponta da asa com o aumento da velocidade de escoamento é mostrado nas figuras 16 até 20. Os deslocamentos são obtidos para cinco valores de resistência, desde $10^2 \Omega$ até $10^6 \Omega$, foram adimensionalizados pela espessura da asa.

Figura 16 - Variação do deslocamento transversal adimensional com a mudança de velocidade para razão de aspecto 1

Figura 17 - Variação do deslocamento transversal adimensional com a mudança de velocidade para razão de aspecto 2

Figura 18 - Variação do deslocamento transversal adimensional com a mudança de velocidade para razão de aspecto 3

Figura 19 - Variação do deslocamento transversal adimensional com a mudança de velocidade para razão de aspecto 4

Figura 20 - Variação do deslocamento transversal adimensional com a mudança de velocidade para razão de aspecto 5

De forma geral, as amplitudes aumentam com o aumento da velocidade do escoamento, apesar de em alguns casos (razão de aspecto 3 e 5) tenderem mais rapidamente para um valor em velocidades mais altas. Na figura 16, verifica-se que para qualquer velocidade do intervalo estudado, as menores amplitudes são obtidas para resistência igual a $10^3 \Omega$, aumentando a medida que se aumenta a resistência até a condição de circuito aberto (com valor de resistência de $10^6 \Omega$). Além disso, a velocidade em que se iniciam as oscilações persistentes é dependente da condição de contorno elétrica. Na figura 17, verifica-se uma pequena influência do resistor considerado no domínio elétrico sobre a resposta mecânica do sistema eletroaeroelástico. Na figura 18, razão de aspecto 3, verifica-se pouca influência da resistência sobre a velocidade em que oscilações persistentes iniciam. Entretanto, a partir de 14 m/s pode-se verificar diferentes resistências ótimas (que minimizam a saída mecânica) com a variação de velocidade ($10^4 \Omega$ ou $10^5 \Omega$). Um comportamento semelhante é observado na figura 19 em relação à velocidade onde se iniciam as oscilações persistentes. Entretanto, em quase toda a faixa de velocidades a resistência $10^5 \Omega$ implica nas menores amplitudes. Já na figura 20, para razão de aspecto 5, verifica-se que para uma faixa específica de velocidades, a saída mecânica é fortemente influenciada pela presença da resistência ótima, levando à atenuação de vibrações na velocidade de 7,5 m/s.

Os valores de deslocamentos mostrados nessa seção são aqueles que a resposta em regime permanente é estável, convergente e diferentes de zero. Quando comparados com geradores com alta razão de aspecto, os geradores de baixa razão de aspecto convergem para um intervalo maior de velocidades. Por exemplo, na razão de aspecto unitária esse intervalo é de 22 m/s e na razão de aspecto 5, o intervalo é de 2,5 m/s. Esse fato implica que em geradores com razão de aspecto baixa, uma faixa ampla de velocidades, a conversão de energia -- sem a ocorrência de grandes deslocamentos e consequente falha do gerador -- é possível. No entanto, o mesmo fato não se aplica a geradores de alta razão de aspecto. Um pequeno aumento de velocidades pode levar a um regime de oscilações instáveis. Entretanto, geradores com elevada razão de aspecto tem a vantagem de apresentar oscilações persistentes em velocidades mais baixas, característica importante em uma implementação prática.

O espaço de fase para as várias razões de aspecto em diferentes velocidades do escoamento são apresentados nas figuras 21 a 25. Nesses planos de fase, os deslocamentos e velocidades mostrados referem-se a oscilação encontrada no vértice do bordo de fuga e ponta das várias asas.

Figura 21 - Espaço de fase razão de aspecto 1 com (a) velocidade do escoamento de 53 m/s e (b) velocidade do escoamento de 75 m/s

Figura 22- Espaço de fase razão de aspecto 2 com (a) velocidade do escoamento de 21.5 m/s e (b) velocidade do escoamento de 32 m/s

Figura 23- Espaço de fase para razão de aspecto 3 com (a) velocidade do escoamento de 14 m/s e (b) velocidade do escoamento de 15 m/s

Figura 24- Espaço de fase para razão de aspecto 4 com (a) velocidade do escoamento de 9.3 m/s, (b) velocidade do escoamento de 10.7 m/s e (c) velocidade do escoamento de 11.3 m/s

Figura 25- Espaço de fase para razão de aspecto 5 com (a) velocidade do escoamento de 7.5 m/s e (b) velocidade do escoamento de 8.3 m/s

Nas figuras apresentadas, oscilações em ciclo limite são encontradas para todas as razões de aspecto. Para as razões de aspectos 1 e 2, todos os planos de fase encontrados possuem o formato de elipses simples. Como exemplo são mostrados os planos de fase para a razão de aspecto 1 nas velocidades 51 m/s e 75 m/s e para a razão de aspecto 2 nas velocidades 21.5 m/s e 32 m/s. Para as razões de aspecto 3 a 5, os dois tipos de elipses são encontradas. Em velocidades baixas, o espaço de fase corresponde a elipse simples. Essas formas podem ser vistas nas figuras 22.a (14 m/s), 23.a (9.3 m/s) e 24.a (7.5 m/s). Quando a velocidade é maior ou igual do que 15 m/s, 11.3 m/s e 8.3 m/s, respectivamente para as razões de aspecto 3, 4 e 5, é (figuras 23b, 24c e 25 b) possível notar que o sistema passa a apresentar três pontos de equilíbrio, sendo dois estáveis e um instável (comportamento típico de um sistemas com não linearidade cúbica). Um caso particular, é mostrado na figura 24b, onde o sistema oscila em torno de um dos pontos de equilíbrio (fora da origem).

A evolução da tensão elétrica máxima no piezelétrico com o incremento da velocidade para as varias razões de aspecto é apresentada nas figura 26 a 30, mostrada abaixo. Nas várias figuras, cada curva representa um valor específico de resistência, que varia de $10^2 \Omega$ (condição próxima de curto circuito) a $10^6 \Omega$ (condição próxima de circuito aberto). Conforme a lei de Ohm, a tensão elétrica aumenta com o aumento da resistência em qualquer razão de aspecto e velocidade

Figura 26 - Comportamento da tensão elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 1

Figura 27- Comportamento da tensão elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 2

Figura 28- Comportamento da tensão elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 3

Figura 29- Comportamento da tensão elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 4

Figura 30- Comportamento da tensão elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 5

A partir do comportamento das figuras acima, nota-se que o valor da tensão elétrica diminui quando a razão de aspecto passa de 1 para 2 e de 3 para 4, no entanto, aumenta quando a razão de aspecto passa de 2 para 3 e de 3 para 5. De um modo geral, a diminuição da tensão elétrica pode ser explicada pelo decréscimo do fator do acoplamento, visto na figura 31. Já o maior valor da tensão elétrica para a razão de aspecto 3 (quando comparado a 2) é relacionado com o valor próximo das frequências de torção (1T) e flexão (2F) que levam o sistema a apresentar amplitudes (deslocamento e tensão elétrica) mais altas. O valor maior de tensão elétrica para a razão de aspecto 5, em relação a 4, é devido tanto a maior faixa de velocidades em que a resposta converge como nos valores relativamente próximos dos acoplamentos eletromecânicos nos dois casos.

Como a geometria, modos e a proporção de cerâmicas é modificada em cada um dos estudos de casos apresentados, o acoplamento eletromecânico para cada razão de aspecto é mostrado. A Figura 31 mostra a variação no valor do acoplamento eletromecânico com a mudança de razão de aspecto para os dois primeiros modos de flexão (1F e 2F). As curvas mostram uma diminuição do fator de acoplamento com o aumento da razão de aspecto. O acoplamento dos modos de torção são nulos e não contribuem para a resposta elétrica. Com o uso de eletrodos contínuos há o cancelamento da saída elétrica proveniente de modos de torção.

Figura 31- Variação do acoplamento eletromecânico referente aos dois primeiros modos de flexão com a mudança da razão de aspecto.

O comportamento da potência média é mostrado nas figuras 32 a 36. A variação da potência é investigada através de 3 diferentes parâmetros: resistência, velocidade do escoamento e razão de aspecto. De um modo geral, as figuras 32 a 36, mostram que potência aumenta com o incremento da velocidade do escoamento para todas as razões de aspecto e valores de resistência. Quando considera-se a influência da resistência elétrica, nota-se a existência de um valor ótimo para a máxima geração de potência. Esse valor ótimo pode variar com a mudança de velocidade e razão de aspecto. Para razão de aspecto 1 e 3 (e 4), a resistência ótima assume o valor de $10^4 \Omega$ (e $10^3 \Omega$). Para a razão de aspecto 2 (e 5), a resistência ótima assume dois diferentes valores com. Esses valores para razão de aspecto 2 (e 5) são de $10^4 \Omega$ entre as velocidade de 20 m/s a 28,5 m/s (e 6,5 m/s a 8,5 m/s). Nos demais valores de intervalo de velocidades estudados, para a razão de aspecto 2 (e 4), que englobam o intervalo de 29 m/s a 30 m/s (e 8.5 m/s a 11 m/s) o valor ótimo de resistência é de $10^3 \Omega$.

Figura 32- Evolução da potência elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 1

Figura 33 - Evolução da potência elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 2

Figura 34 - Evolução da potência elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 3

Figura 35 - Evolução da potência elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 4

Figura 36- Evolução da potência elétrica com o aumento da velocidade para razão de aspecto 5

A influência da razão de aspecto na potência elétrica, que embora mostrada nas figuras 32 a 36, é investigada com mais detalhes na figura 37. Nessa figura, a potência média obtida para todas as razões de aspecto é mostrada em uma escala logarítmica com o intuito de

possibilitar a visualização de todos os valores de potência que têm diferentes ordem de grandeza.

Figura 37- Comportamento da potência máxima para todas as razões de aspecto com a mudança a velocidade do escoamento

Dois efeitos podem ser notados do comportamento da potência média. O primeiro é a redução da velocidade linear de *flutter*, discutida na seção 4.2.2, que possibilita a geração de energia em velocidades mais baixas. No entanto, a redução de velocidades, ocasionada pelo aumento da razão de aspecto é acompanhada de um menor intervalos de velocidades para qual a oscilação é convergente. O segundo efeito é a mudança da ordem de grandeza dos valores de potência. Para razão de aspecto 1, a potência atinge valores de $10^{-4}W$, enquanto para razão de aspecto 4 e 5, menores valores encontrados, a potência atinge valores de $10^{-7}W$.

Os valores da potência média máxima para cada razão de aspecto são mostrados na tabela 8, com os respectivos valores de velocidade do escoamento e resistência elétrica. O maior valor da potência média obtida é $3,0 \times 10^{-4} W$ e acontece na velocidade de 72 m/s para razão de aspecto 1. Ainda que o efeito do aumento da razão de aspecto -- que mantendo o mesmo tamanho da piezocerâmica reduz o efeito do acoplamento eletromecânico-- tenha um efeito na diminuição da potência gerada, o caso mostrado na razão de aspecto 3 pode ser um bom candidato para um futuro gerador. O valor obtido nessa razão de aspecto é de $8,8 \times 10^{-6} W$, porém com velocidade de 19,7 m/s.

Tabela 8 -Potência máxima encontrada para razão de aspecto, resistência e velocidade do escoamento

Razão de Aspecto	Velocidade [m/s]	Resistência [Ω]	Potência [W]
1	72,0	10^4	$3,0 \cdot 10^{-4}$
2	32,0	10^3	$1,3 \cdot 10^{-6}$
3	19,7	10^3	$8,8 \cdot 10^{-6}$
4	16,0	10^3	$3,0 \cdot 10^{-7}$
5	11,8	10^3	$2,2 \cdot 10^{-7}$

Capítulo 5 - Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

5.1 Conclusões

Neste trabalho, o comportamento piezoaeroelástico linear e não linear de um gerador é investigado. Os casos não lineares são obtidos para velocidades acima da velocidade linear de *flutter*. O objetivo do trabalho é caracterizar o efeito da geração de energia piezelétrica sobre o comportamento eletroaeroelástico de uma asa não linear para diferentes razões de aspecto.

A modelagem piezoaeroelástica do gerador apresentado nesta dissertação consiste da associação de dois modelos. Primeiro, a representação não linear de uma placa de von Kàrmàn eletromecanicamente acoplada, e segundo, da representação aerodinâmica tridimensional não estacionária de uma asa utilizando o método de malha de dipolos e aproximação de Roger. O modelo piezoaeroelástico é resolvido no domínio do tempo que utiliza o método de integração alfa-generalizado e a estratégia de resolução de *Newton-Raphson* para as equações não lineares.

Nesta dissertação cinco geradores com diferentes razões de aspecto foram investigados. A asa teve a sua razão de aspecto variada de 1 a 5, com a corda mantida constante. Nota-se que o aumento da razão de aspecto leva a uma considerável redução na velocidade de *flutter* de 53 m/s para 6 m/s. A diminuição da velocidade possibilita o aparecimento de oscilações em ciclo limite mais cedo, um fato interessante para a geração piezoaeroelástica de energia. No entanto, o aumento da razão de aspecto reduz a faixa de velocidades com LCOs estáveis e com amplitudes mecânicas aceitáveis. Por exemplo, esta faixa de valores é de 19 m/s (53 até 72 m/s) para razão de aspecto 1 e 2.5 m/s para razão de aspecto 5.

O valor da resistência ótima, que fornece a máxima potência elétrica, é modificado para as diversas razões de aspecto. A tensão elétrica e potência elétrica máxima acontecem para a asa com razão de aspecto unitária. A explicação é devido ao maior acoplamento elétrico nesse caso específico. Dentre os valores estudados, o acoplamento elétrico sempre

diminui com o aumento da razão de aspecto. Embora a potência gerada para a terceira razão de aspecto possua um valor quase duas ordens de grandeza menor do que a razão de aspecto unitária, esse caso destaca-se entre as demais configurações. A potência elétrica obtida para esse caso é a segunda maior dentre todas as outras razões de aspectos estudadas. Uma particularidade dessa razão de aspecto é que o valor das frequências relacionadas com o primeiro modo de torção (1T) e segundo modo de flexão (2F) são bem similares.

6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Dois grupos de recomendações podem ser realizadas para o desenvolvimento do trabalho apresentado nessa dissertação. O primeiro grupo de sugestões refere-se a estratégias para se obter uma melhor representação dos efeitos não lineares quando o deslocamento assume valores mais altos. Essas sugestões são tanto do ponto de vista da estrutura como da aerodinâmica, como mostrado abaixo.

- Aerodinâmico
  - Inclusão do efeito de estol estático e estol dinâmico na modelagem.
- Estrutural
  - Modelagem do efeito de rigidez não linear por método de representação geométrica exata

O segundo grupo de sugestões refere-se a estratégias para se obter um maior valor da energia gerada e/ou um menor valor de velocidade de *flutter*.

- Adição de massa no gerador com o intuito de reduzir a frequência natural do sistema e aumentar o acoplamento entre os modos de flexão e torção
- Utilizar eletrodos segmentados nas camadas piezocerâmicas a fim de converter energia da oscilação provenientes dos modos de torção
- Utilizar circuitos elétricos mais sofisticados do que uma simples resistência, como por exemplo, o SSHI, com o intuito de obter maiores valores na potência elétrica.

6 Referências Bibliográficas

- ABDELKEFI, A; NAYFEH, A H; HAJJ, M R. Design of piezoaeroelastic energy harvesters. *Nonlinear Dynamics*, p. 1-12, 2012a.
- ABDELKEFI, A; NAYFEH, A H; HAJJ, M R. Modeling and analysis of piezoaeroelastic energy harvesters. *Nonlinear Dynamics*, v. 67, n. 2, p. 925-939, 2012b.
- ALBANO, E; RODDEN, W P. A doublet-lattice method for calculating lift distributions on oscillating surfaces in subsonic flows. *AIAA journal*, v. 7, n. 2, 2012.
- ALLEN, J J; SMITS, A J. Energy harvesting eel. *Journal of Fluids and Structures*, v. 15, n. 3, p. 629-640, 2001.
- ANTON, S R; SODANO, H A. A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003–2006). *Smart Materials and Structures*, v. 16, n. 3, p. R1, 2007.
- BEEBY, S P *et al.* A micro electromagnetic generator for vibration energy harvesting. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, v. 17, n. 7, p. 1257, 2007.
- BEEBY, S P; TUDOR, M J; WHITE, N M. Energy harvesting vibration sources for microsystems applications. *Measurement science and technology*, v. 17, n. 12, p. R175, 2006.
- BLAIR, M. *A Compilation of the mathematics leading to the doublet lattice method*. [S.l.]: DTIC Document, 1992.
- BRYANT, M; GARCIA, E. Energy harvesting: a key to wireless sensor nodes. 2009, [S.l.]: International Society for Optics and Photonics, 2009. p. 74931W-74931W.
- CHALASANI, S; CONRAD, J M. A survey of energy harvesting sources for embedded systems. 2008, [S.l.]: IEEE, 2008. p. 442-447.
- CHALLA, V R *et al.* A vibration energy harvesting device with bidirectional resonance frequency tunability. *Smart Materials and Structures*, v. 17, n. 1, p. 15035, 2008.
- CHIANG, C K; MEI, C; GRAY C. E., Jr. Finite Element Large-Amplitude Free and Forced Vibrations of Rectangular Thin Composite Plates. *Journal of Vibration and Acoustics*, 10.1115/1.2930186, v. 113, n. 3, p. 309-315, 1 jul. 1991. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1115/1.2930186>>.
- CHUNG, J; HULBERT, G M. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- α method. *Journal of Applied Mechanics*, v. 60, n. 2, p. 371-375, 1993.
- COOK-CHENNAULT, K A; THAMBI, N; SASTRY, A M. Powering MEMS portable devices—a review of non-regenerative and regenerative power supply systems with special

emphasis on piezoelectric energy harvesting systems. *Smart Materials and Structures*, v. 17, n. 4, p. 43001, 2008.

DE MARQUI, C *et al.* Modeling and analysis of piezoelectric energy harvesting from aeroelastic vibrations using the doublet-lattice method. *Journal of vibration and acoustics*, v. 133, n. 1, 2011.

DE MARQUI, C; ERTURK, A; INMAN, D J. Piezoaeroelastic modeling and analysis of a generator wing with continuous and segmented electrodes. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 21, n. 10, p. 983-993, 2010.

DE MARQUI JUNIOR, C; ERTURK, A; INMAN, D J. An electromechanical finite element model for piezoelectric energy harvester plates. *Journal of Sound and Vibration*, v. 327, n. 1, p. 9-25, 2009.

DELPERO, T *et al.* Energy harvesting module for the improvement of the damping performance of autonomous synchronized switching on inductance. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2012.

DIAS, J A C; DE MARQUI, C; ERTURK, A. Hybrid piezoelectric-inductive flow energy harvesting and dimensionless electroaeroelastic analysis for scaling. *Applied Physics Letters*, v. 102, n. 4, p. 44101, 2013.

DUNNMON, J A *et al.* Power extraction from aeroelastic limit cycle oscillations. *Journal of Fluids and Structures*, v. 27, n. 8, p. 1182-1198, 2011.

DUTOIT, NOËL E; BRIAN, L WARDLE. Performance of microfabricated piezoelectric vibration energy harvesters. *Integrated Ferroelectrics*, v. 83, n. 1, p. 13-32, 2006.

DUTOIT, Noël E; BRIAN, L WARDLE; SANG-GOOK, K I M. Design considerations for MEMS-scale piezoelectric mechanical vibration energy harvesters. *Integrated Ferroelectrics*, v. 71, n. 1, p. 121-160, 2005.

ERTURK, A; INMAN, D J. An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations. *Smart Materials and Structures*, v. 18, n. 2, p. 25009, 2009.

ERTURK, A; INMAN, D J. Broadband piezoelectric power generation on high-energy orbits of the bistable Duffing oscillator with electromechanical coupling. *Journal of Sound and Vibration*, v. 330, n. 10, p. 2339-2353, 2011.

ERTURK, A; INMAN, Daniel J. A distributed parameter electromechanical model for cantilevered piezoelectric energy harvesters. *Journal of Vibration and Acoustics*, v. 130, n. 4, 2008.

ERTURK, A. *et al.* On the energy harvesting potential of piezoaeroelastic systems. *Applied Physics Letters*, v. 96, n. 18, p. 184103, 7 maio 2010. Disponível em: <http://apl.aip.org/resource/1/applab/v96/i18/p184103_s1?view=fulltext>. Acesso em: 4 out. 2011.

- FRISWELL, M I *et al.* Non-linear piezoelectric vibration energy harvesting from a vertical cantilever beam with tip mass. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 23, n. 13, p. 1505-1521, 2012.
- GLYNNE-JONES, P *et al.* An electromagnetic, vibration-powered generator for intelligent sensor systems. *Sensors and Actuators A: Physical*, v. 110, n. 1, p. 344-349, 2004.
- GUYOMAR, D *et al.* Toward energy harvesting using active materials and conversion improvement by nonlinear processing. *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on*, v. 52, n. 4, p. 584-595, 2005.
- HARDER, R L; DESMARAIS, R N. Interpolation using surface splines(Interpolation of function of two variables by surface splines method, solving linear equations system by digital computer). *Journal of Aircraft*, v. 9, p. 189-191, 1972.
- IEEE Standard on Piezoelectricity. ANSI/IEEE Std 176-1987.* [S.l: s.n.], 1988
- KULAH, Haluk; NAJAFI, Khalil. An electromagnetic micro power generator for low-frequency environmental vibrations. 2004, [S.l.]: IEEE, 2004. p. 237-240.
- KWON, S D. A T-shaped piezoelectric cantilever for fluid energy harvesting. *Applied Physics Letters*, v. 97, p. 164102, 2010.
- LALLART, M; GUYOMAR, D. Piezoelectric conversion and energy harvesting enhancement by initial energy injection. *Applied Physics Letters*, v. 97, n. 1, p. 14104, 2010.
- LEE, Yiu-Yin; NG, Chung-Fai. Nonlinear response of composite plates using the finite element modal reduction method. *Engineering structures*, v. 23, n. 9, p. 1104-1114, 2001.
- LU, F; LEE, H P; LIM, S P. Modeling and analysis of micro piezoelectric power generators for micro-electromechanical-systems applications. *Smart Materials and Structures*, v. 13, n. 1, p. 57, 2003.
- MATEU, L; MOLL, F. Review of energy harvesting techniques and applications for microelectronics. 2005, [S.l: s.n.], 2005. p. 359-373.
- MITCHESON, Paul D *et al.* MEMS electrostatic micropower generator for low frequency operation. *Sensors and Actuators A: Physical*, v. 115, n. 2, p. 523-529, 2004.
- OTTMAN, G K *et al.* Adaptive piezoelectric energy harvesting circuit for wireless remote power supply. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, v. 17, n. 5, p. 669-676, 2002.
- ROGER, K L. Airplane math modeling methods for active control design. 1977. 11, 1977.
- ROUNDY, Shad; WRIGHT, Paul K; RABAEY, Jan. A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes. *Computer Communications*, v. 26, n. 11, p. 1131-1144, 2003.
- SHEARER, C M; CESNIK, C E S. *Modified Generalized-Alpha Method for Integrating Governing Equations of Very Flexible Aircraft.* [S.l.]: DTIC Document, 2006.

SODANO, H A; INMAN, D J; PARK, G. A review of power harvesting from vibration using piezoelectric materials. *Shock and Vibration Digest*, v. 36, n. 3, p. 197-206, 2004.

SOUSA, V C *et al.* Enhanced aeroelastic energy harvesting by exploiting combined nonlinearities: theory and experiment. *Smart Materials and Structures*, v. 20, n. 9, p. 94007, 2011.

STANTON, S C; MCGEHEE, C C; MANN, B P. Nonlinear dynamics for broadband energy harvesting: investigation of a bistable piezoelectric inertial generator. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 239, n. 10, p. 640-653, 2010.

TANG, D; DOWELL, E H; HALL, K C. Limit cycle oscillations of a cantilevered wing in low subsonic flow. *AIAA journal*, v. 37, n. 3, p. 364-371, 1999.

TAYLOR, G W *et al.* The energy harvesting eel: a small subsurface ocean/river power generator. *Oceanic Engineering, IEEE Journal of*, v. 26, n. 4, p. 539-547, 2001.

TORRES, Erick O; RINCÓN-MORA, Gabriel A. Electrostatic energy-harvesting and battery-charging CMOS system prototype. *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, v. 56, n. 9, p. 1938-1948, 2009.

WANG, R L Harne and K W. A review of the recent research on vibration energy harvesting via bistable systems. *Smart Materials and Structures*, v. 22, n. 2, p. 23001, 2013. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0964-1726/22/i=2/a=023001>>.

WILLIAMS, C B; YATES, R B. Analysis of a micro-electric generator for microsystems. *Sensors and Actuators A: Physical*, v. 52, n. 1, p. 8-11, 1996.

XUE, David Y; MEI, Chuh. Finite element nonlinear flutter and fatigue life of two-dimensional panels with temperature effects. *Journal of Aircraft*, v. 30, n. 6, p. 993-1000, 1993.

ZHOU, R C; XUE, D Y; CHUH, M E I. Finite element time domain: modal formulation for nonlinear flutter of composite panels. *AIAA journal*, v. 32, n. 10, p. 2044-2052, 1994.