UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

MURILO SARTORATO

**Desenvolvimento de um Elemento Finito para Análise de Compósitos
Inteligentes: Formulação, Implementação e Avaliação**

São Carlos
2013

MURILO SARTORATO

**Desenvolvimento de um Elemento Finito para Análise de Compósitos
Inteligentes: Formulação, Implementação e Avaliação**

Dissertação apresentada a Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica. Área de concentração: Aeronaves.

Orientador: Prof. Assoc. Volnei Tita

São Carlos

2013

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

S251d Sartorato, Murilo
Desenvolvimento de um Elemento Finito para Análise de Compósitos Inteligentes: Formulação, Implementação e Avaliação / Murilo Sartorato; orientador Volnei Tita. São Carlos, 2013.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Área de Concentração em Aeronaves -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2013.

1. Método dos elementos finitos. 2. Compósitos inteligentes. 3. Materiais inteligentes. 4. Cascas laminadas. 5. Fibras piezoelétricas. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **MURILO SARTORATO**.

Título da dissertação: "Desenvolvimento de um elemento finito para análise de compósitos inteligentes: formulação, implementação e avaliação".

Data da defesa: 25/04/2013

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Associado **Volnei Tita (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Associado **Flávio Donizeti Marques**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **José Benaque Rubert**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica:
Prof. Associado **Marcelo Areias Trindade**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

*“Dedico este trabalho a meus pais
Wilson e Eliana e a meu irmão Fábio.”*

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Assoc. Volnei Tita, pela oportunidade da realização do trabalho, orientação, atenção, apoio e dedicação, e pelos momentos de orientação e discussão sobre o projeto de pesquisa.

Ao Prof. Dr. Mariano Eduardo Moreno (UFSCar) pelo desafio lançado.

Ao Prof. Assoc. Flávio Donizeti Marques (EESC/USP) pelas grandes discussões que enriqueceram o trabalho e pelo incentivo demonstrado.

Ao Prof. Tit. Sérgio Persival Baroncini Proença e ao Prof. Tit. Humberto Breves Coda da Escola de Engenharia de São Carlos (Departamento de Engenharia de Estruturas) por contribuírem com sugestões para o enriquecimento do trabalho e pelas discussões inspiradoras acerca de Mecânica do Contínuo e Elementos Finitos.

Ao Eng. Me. Ricardo de Medeiros pela ajuda e contribuição para o trabalho pela realização de ensaios experimentais.

Aos meus companheiros de república, Eng. Rodolfo Schiavinato Bonito e Bruno Yasui Matsuyama por momentos de descontração, incentivo, e pelas incansáveis discussões acerca de eletromagnetismo, piezeletricidade e equações de Maxwell que contribuíram para o enriquecimento do trabalho.

Aos companheiros do Departamento de Engenharia Aeronáutica (USP/São Carlos) por momentos agradáveis.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia Aeronáutica (USP/São Carlos) pelo auxílio nas questões burocráticas.

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo financiamento concedido ao presente projeto de pesquisa.

Aos meus pais Eliana e Wilson e meu irmão Fábio pelo incentivo e suporte sem os quais o presente trabalho não seria possível.

Resumo

SARTORATO, M., *Desenvolvimento de um Elemento Finito para Análise de Compósitos Inteligentes: Formulação, Implementação e Avaliação*. 2013, 163p. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil 2013.

O presente trabalho visa o desenvolvimento de uma formulação de um elemento finito de casca com capacidade de prever o comportamento de materiais compósitos inteligentes. Além disso, tem-se a implementação da referida formulação junto ao pacote comercial de elementos finitos Abaqus™, através de sub-rotinas em Fortran via sua ferramenta UEL (User Element). De posse da formulação implementada, realiza-se a avaliação de suas potencialidades e limitações através de estudos de casos. Para selecionar de forma criteriosa a formulação a ser avaliada, executa-se, inicialmente, uma revisão bibliográfica aprofundada sobre trabalhos relevantes na área. Posteriormente apresenta-se a fundamentação teórica da formulação selecionada, bem como uma discussão acerca dos diferentes modelos matemáticos existentes para piezeletricidade linear. Há também uma descrição sobre modelos de casca e do comportamento mecânico de materiais laminados. Além disso, tem-se que as particularidades existentes devido ao acoplamento piezoelétrico e a utilização da ferramenta UEL são discutidas. A metodologia utilizada no trabalho é abordada, evidenciando-se as diferentes etapas empregadas. Por fim, sete estudos de casos são investigados, comparando os resultados providos pelo elemento implementado via UEL com resultados da literatura, bem como, com resultados de experimentos realizados pelo Grupo de Estruturas Aeronáuticas da EESC/USP. Concluindo o trabalho, perspectivas futuras de novos projetos de pesquisas, fruto do presente trabalho, são apresentadas. Por fim, com base na análise dos resultados, conclui-se que a formulação proposta é capaz de simular o comportamento de estruturas fabricadas a partir de materiais compósitos inteligentes. No entanto, trabalhos futuros devem ser realizados com o intuito de melhorar a precisão dos resultados obtidos via UEL, sem gerar um elevado custo computacional.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos, Compósitos Inteligentes Piezoelétricos, Materiais Inteligentes, Cascas Laminadas, Fibras Piezoelétricas.

ABSTRACT

SARTORATO, M., Development of a Finite Element for Analysis of Piezoelectric Smart Composite Materials: Formulation, Implementation and Evaluation. 2013, 163p. Dissertation (Master of Science) – School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, SP, Brazil, 2013.

The present work aims at the development of a shell finite element formulation in order to simulate the behavior of smart composite materials. Furthermore, the referred formulation is implemented within the commercial finite element package Abaqus™ by using Fortran subroutines through its UEL (User Element) tool. Based on the implemented formulation, case studies are used to evaluate its potentialities and limitations. A deep review of works in the area is carried out in order to perform a careful selection of the finite element formulation, which is implemented. After that, the theory for the selected formulation is presented, as well as a discussion of the different existing mathematical models for linear piezoelectricity. Also, a description of the mechanical behavior of laminated shells is shown. Besides, the particularities of the piezoelectric coupling and its implementations by using UEL tool are discussed. The used methodology is addressed, detailing its phases. Finally, seven case studies are investigated, comparing results provided by simulations by using the implemented element with results found in the literature and experimental results from experiments performed by the Aeronautical Structures Group of the EESC/USP. In conclusion, based on the analysis of the aforementioned results, it is established that the proposed formulation is capable of simulating the behavior of smart composite structures. However, future works should be introduced to enhance the precision of the solutions obtained through the UEL tool, without increasing the inherent computational cost.

Keywords: Finite element method; smart composites; smart materials; laminated shells; piezoelectric fibers.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – A. Esquema da micro estrutura de um AFC; B. Esquema da micro estrutura de um MFC TM	3
Figura 1.2 – Visão qualitativa das diferentes escalas estudadas, análises comuns e elementos utilizados.....	5
Figura 1.3 – Motivação para criação de elementos bidimensionais	6
Figura 3.1 – Esquema indicando as relações entre diferentes grandezas físicas num material piezoelétrico	15
Figura 3.2 – Nomenclaturas geralmente encontradas na literatura para o sistema de coordenadas local em materiais compósitos com fibras piezoelétricas A. Abordagem meso e macromecânica; B. Abordagem micromecânica.....	18
Figura 3.3 - Linhas de campo na fibra piezoelétrica de um MFC: A. eletrodos contínuos; B. eletrodos interdigitados simétricos; C. eletrodos interdigitados alternados	21
Figura 3.4 – Esquema das hipóteses cinemáticas para placa de Kirchhoff, utilizadas na Teoria de Clássica de Laminados.....	26
Figura 3.5 - Esquema das hipóteses cinemáticas para placa de Reissner-Mindlin, utilizadas na Teoria de Cisalhamento de Primeira Ordem.....	27
Figura 3.6 - Esquema das hipóteses cinemáticas utilizadas nas Teorias de Cisalhamento de Ordem Superior.....	29
Figura 3.7 - Esquema das hipóteses cinemáticas utilizadas nas Teorias Zig-zag lineares dependentes.....	29
Figura 3.8 – Esquema das hipóteses cinemáticas utilizadas nas Teorias Zig-zag lineares independente	30
Figura 3.9 - Esquema das hipóteses cinemáticas utilizadas na Teoria Zig-zag de Ordem Superior	31
Figura 3.10 – Esquema qualitativo das características de diferentes teorias para cascas laminadas	31
Figura 3.11 - Sistemas de coordenadas utilizados na teoria de cascas degeneradas e suas transformações	32
Figura 3.12 – Entidades retratadas na descrição geométrica.....	34
Figura 3.13 - Vista lateral do laminado: A. efeito de γ_0 ; B. efeito de γ_1 ; C. efeito de κt	36

Figura 3.14 – Forças normais solicitantes de um laminado vindas da integração das tensões de membrana.....	39
Figura 3.15 – Momentos fletores/torçores solicitantes de um laminado vindas da integração das tensões de membrana.....	39
Figura 3.16 – Forças cortantes solicitantes de um laminado vindas da integração das tensões de transversais ao plano do laminado.....	39
Figura 3.17 – Momentos torçores solicitantes de um laminado vindas da integração das tensões de transversais ao plano do laminado.....	40
Figura 3.18 – Distribuição de campo elétrico ao longo da espessura de uma lâmina piezoelétrica [NASSER, 2008]	44
Figura 3.19 – Distribuição típica de distorções transversais ao longo da espessura de um laminado e suas derivadas.....	46
Figura 4.1 – Metodologia adotada	49
Figura 4.2 – Sistemas de coordenadas, matrizes de transformação e suas relações	54
Figura 4.3 – Pontos utilizados na integração do elemento finito: “O” nós; “X” pontos de cálculo das deformações na técnica mista; “ Δ ” pontos da quadratura de Gauss de segunda ordem; “ $\diamond$ ” pontos na quadratura de Gauss de primeira ordem.....	64
Figura 4.4 – Fluxograma resumindo a interação entre o <i>solver</i> do Abaqus e a sub-rotina UEL	67
Figura 5.1 – Malha utilizada no primeiro estudo de caso com vinculação de engastamento ..	74
Figura 5.2 – Resultados do deslocamentos vertical ao longo da viga para a aplicação de potencial elétrico	75
Figura 5.3 – Resultados de potencial elétrico medido sobre os eletrodos para a aplicação de força mecânica	76
Figura 5.4 – Problema e geometria do segundo estudo de caso [MARINKOVIĆ et al., 2007]	77
Figura 5.5 – Modelo em Abaqus utilizado no segundo estudo de caso, mostrando a região dos transdutores piezoelétricos.....	78
Figura 5.6 – Malha utilizada para a simulação via UEL no segundo estudo de caso com as condições de vinculação	78
Figura 5.7 – Comparação entre os resultados de deslocamento do segundo estudo de caso encontrados pelo presente trabalho com os apresentados por Marinković et al. (2007)	79

Figura 5.8 – Diferença relativa entre os resultados obtidos pelo presente trabalho e os resultados apresentados por Marinković et al. (2007), destacando a região contendo os transdutores piezoelétricos, entre as linhas pontilhadas em vermelho	80
Figura 5.9 – Geometria do terceiro estudo de caso [MARINKOVIC et al. 2008].....	81
Figura 5.10 – Malha utilizada para a simulação via UEL no terceiro estudo de caso e eixo de coordenadas	81
Figura 5.11 – Resultado de deslocamento vertical da placa no terceiro estudo de caso (medido ao longo do eixo X).....	82
Figura 5.12 – Problema da Viga de Bernoulli	83
Figura 5.13 - Esquema do quarto estudo de caso	84
Figura 5.14 – Malha utilizada para a simulação via UEL no quarto estudo de caso	85
Figura 5.15 – Forma deformada do quarto estudo de caso para a aplicação de carga mecânica	85
Figura 5.16 – Forma deformada do quarto estudo de caso para a aplicação de carga elétrica	85
Figura 5.17 - Deslocamentos verticais dos nós ao longo do diâmetro do meio cilindro para a condição de deslocamento prescrito.....	86
Figura 5.18 – Deslocamentos verticais dos nós ao longo do diâmetro do meio cilindro para a condição de aumento do potencial elétrico.....	86
Figura 5.19 – Aplicação de deslocamento prescrito: A. Força versus deslocamento; B. Potencial elétrico versus deslocamento	87
Figura 5.20 – Aplicação de potencial elétrico: A. Força versus deslocamento; B. Potencial elétrico versus deslocamento	87
Figura 5.21 – Geometria do problema do quinto estudo de caso [adaptado de DASSAULT SYSTÈMES SIMULIA, 2010A]	88
Figura 5.22 – Malha utilizada no quinto estudo de caso.....	89
Figura 5.23 – Detalhe da geometria do transdutor piezoelétrico no quinto estudo de caso para: A. O elemento implementado; B. Elementos sólidos nativos do Abaqus.	90
Figura 5.24 – Transdutor piezoelétrico Midé, modelo QP10n, utilizado nos ensaios experimentais	91
Figura 5.25 – Esquema do ensaio experimental [MEDEIROS, 2012]	91
Figura 5.26 – Ensaio experimental e equipamentos utilizados [MEDEIROS, 2012].....	92
Figura 5.27 – Dimensões do corpo de prova e ponto de aplicação do sinal de entrada	92
Figura 5.28 – Malha utilizada e posição dos nós.....	92

Figura 5.29 – Geometria utilizada. A seta mostra a região virtual estendida para aplicação das condições de contorno	93
Figura 5.30 – Comparação entre as FRFs experimental e numérica sentidas pelo PZT-1	95
Figura 5.31 – Comparação entre as FRFs experimental e numérica sentidas pelo PZT-2	95
Figura 5.32 – Esquema dos corpos de prova utilizados no sétimo estudo de caso.....	96
Figura 5.33 – Malhas utilizadas no sétimo estudo de caso	97
Figura 5.34 – FRFs encontradas numérica e experimentalmente para os casos intacto e com o maior dano, sentidas pelos transdutores 1 e 2.....	99
Figura 5.35 – Métricas de SHM para diferentes modos.....	101
Figura 5.36 – Métricas de SHM para diferentes níveis de dano. As métricas calculadas numericamente encontram-se em linhas pontilhadas. As métricas calculadas experimentalmente encontram-se em linha cheias.....	101
Figura 8.1 – Representação esquemática da geração de polarização numa microestrutura [adaptado de PIEFORD, 2001]	123

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Grandezas admitidas pelas matrizes de saída da UEL para diferentes passos e análises.....	70
Tabela 5.1 – Propriedades do PVDF utilizadas no primeiro estudo de caso	74
Tabela 5.2 – Propriedades de material utilizadas no Segundo estudo de caso.....	77
Tabela 5.3 – Propriedades de material utilizadas no terceiro estudo de caso	81
Tabela 5.4 – Propriedades de material utilizadas para o quarto estudo de caso.....	84
Tabela 5.5 – Propriedades das camadas de compósito estrutural utilizadas no quinto estudo de caso	89
Tabela 5.6 – Propriedades mecânicas do transdutor piezoelétrico utilizadas no quinto estudo de caso	89
Tabela 5.7 – Propriedades elétricas e de acoplamento piezoelétrico utilizadas no quinto estudo de caso	89
Tabela 5.8 – Resultados para o quinto estudo de caso.....	90
Tabela 5.9 – Propriedades mecânicas de material dos transdutores piezoelétricos utilizadas no sexto estudo de caso [MEDEIROS, 2012]	93
Tabela 5.10 – Propriedades elétricas e de acoplamento eletromecânico dos transdutores piezoelétricos utilizadas no sexto estudo de caso [MEDEIROS, 2012].....	93
Tabela 5.11 – Frequências naturais obtidas pelos diferentes métodos utilizados	94
Tabela 5.12 – Amortecimentos críticos utilizados no sétimo estudo de caso	97

LISTA DE SÍMBOLOS

Capítulo 3

(S_1, S_2)	Coordenadas de um dado ponto de uma casca no sistema de coordenadas local
(S_1, S_2, N)	Sistema de coordenadas local de uma casca
(X_1, X_2, X_3)	Coordenadas de um dado ponto de uma casca no sistema global
(ξ_1, ξ_2, ξ_3)	Coordenadas de um dado ponto de uma casca no sistema isoparamétrico
$\overline{(\sigma_b)}, \overline{(\sigma_s)}, \overline{(Q_b)}, \overline{(Q_s)}$	Grandezas da lâmina escritas no sistema global
∇	Vetor nabla de derivadas parciais
A, B, D, G, G_h, H	Matrizes de Rigidez de um laminado
C_{ijkl}^D	Tensor elástico linear de quarta ordem para condição de contorno elétrica de circuito aberto
C_{ijkl}^E	Tensor elástico linear de quarta ordem para condição de contorno elétrica de curto-circuito
D_i	Tensor dos deslocamentos elétricos
d'_{ii}	Componentes efetivas da matriz dielétrica para lâminas
d_{ik}^e	Tensor dielétrico para condição de deformação uniforme
d_{ik}^σ	Tensor dielétrico para condição de tensão constante
e_{ij}	Componentes da matriz de acoplamento piezoelétrica para lâminas
e'_{ij}	Componentes efetivas para a matriz de acoplamento piezoelétrica para lâminas
e_{ikl}	Tensor de acoplamento piezoelétrico linear de terceira ordem
E_k	Tensor dos campos elétricos
f_{1i}, f_{2i}	Variáveis utilizadas em teorias de alta ordem
h	Espessura
H	Matriz de transformação das rotações do sistema global para o sistema local
M_x, M_y, M_{xy}	Momentos fletores solicitantes de um laminado

N	Vetor normal à superfície média de uma casca num dado ponto
N_x, N_y, N_{xy}	Esforços solicitantes de membrana de um laminado
Q_{ij}	Componentes efetivas da matriz elástica linear para lâminas
Q_x, Q_y	Esforços cortantes solicitantes de um laminado
T_1, T_2	Vetores normalizados ortogonais ao vetor normal de um dado ponto de uma casca
T_b	Matriz de rotação das tensões de membrana de uma lâmina do sistema local para o sistema global
T_s	Matriz de rotação das tensões de cisalhamento de uma lâmina do sistema local para o sistema global
T_x, T_y	Momentos torçores solicitantes de um laminado
u_i	Deslocamentos de um dado ponto de uma casca
u_i^{mid}	Deslocamentos da superfície média de uma casca
γ	Elementos do vetor de deformações correspondentes às distorções causadas por cisalhamento transversal
γ_0	Parcela do vetor de deformações correspondente às distorções transversais da superfície média de uma casca, causadas pela translação pura da mesma
γ_1	Parcela do vetor de deformações correspondente às distorções transversais da superfície média de uma casca, causadas pela rotação pura da mesma
ε	Vetor das deformações de engenharia escrito segundo notação de Voigt
ε_0	Parcela do vetor de deformações correspondente às deformações de membrana da superfície média de uma casca
ε_{kl}	Tensor das deformações de engenharia
ζ_i, ψ_i	Graus de liberdade relacionados a teorias de alta ordem sem interpretação física
θ_i	Rotações em torno dos eixos contidos no plano tangente a superfície média de uma casca num dado ponto
κ_m	Curvatura de uma casca num dado ponto
κ_t	Distorção torcional de uma casca num dado ponto

ρ_f	Cargas livres sobre um dielétrico
σ_b	Tensões de membrana de uma lâmina
σ_{ij}	Tensor das tensões mecânicas de engenharia
σ_s	Tensões de cisalhamento de uma lâmina
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	Tensões de membrana de um laminado
τ_{xz}, τ_{yz}	Tensões de cisalhamento transversal de um laminado
ϕ	Potencial elétrico

Capítulo 4

$(S_1, S_2, N) = (S_1, S_2, S_3)$	Sistema de coordenadas local de uma casca
(X_1, X_2, X_3)	Coordenadas de um dado ponto de uma casca no sistema global
(ξ_1, ξ_2, ξ_3)	Coordenadas de um dado ponto de uma casca no sistema isoparamétrico
$\hat{\phi}$	Vetor das diferenças de potencial elétricos nodais
b	Forças de campo distribuídas
B_0, B_1	Matrizes finais formadas por $B_{m0}^u, B_{m0}^\theta, B_{m1}^\theta, B_{t0}^u, B_{t0}^\theta$ e B_{t1}^θ
$B_{m0}^u, B_{m0}^\theta, B_{m1}^\theta$	Matrizes que relacionam deformações de membrana com graus de liberdade nodais
$B_{t0}^u, B_{t0}^\theta, B_{t1}^\theta$	Matrizes que relacionam distorções angulares com graus de liberdade nodais
B_u^m, B_u^t e $B_{u\phi}$	Matrizes de simplificação
B_ϕ	Matriz que relaciona campos elétricos com as diferenças de potencial elétrico nodais
C	Matriz de amortecimento elementar
C^E	Matriz constitutiva elástica linear para lâminas
D	Vetor dos deslocamentos elétricos
d^ε	Matriz dielétrica
e	Matriz de acoplamento piezoelétrico linear

E	Vetor dos campos elétricos
F	Forças concentradas
h	Espessura
H_0, H_1	Matrizes que relacionam graus de liberdade num ponto qualquer da casca com os graus de liberdade nodais
H_{ij}^n	Matriz de transformação das rotações do sistema global para o local de um dado nó da casca
h^n	Espessuras nodais
i,j,k,l,m,n	Índices utilizados para notação indicial
I_5	Tensor identidade de ordem 2 e dimensão 5
J_{ij}	Matriz Jacobiana de uma casca, transformação entre o sistema de coordenadas local e o global
K	Energia cinética
$K_{uu}, K_{u\varphi}, K_{\varphi u}, K_{\varphi\varphi}$	Parcelas da matriz hessiana da energia interna
M	Matriz de massa
N_i^n	Vetores normais à superfície média de uma casca nos nós
P	Trabalho das forças externa
Q	Cargas concentradas
q	Cargas livres de superfície distribuídas
Q	Trabalho das forças internas não conservativas
t	Forças de superfície distribuídas ou variável de tempo de solução
T_1^n, T_2^n	Vetores ortogonais a N_i^n num dado nó
T_i^n	Matriz de transformação entre o sistema global e o sistema local de uma casca para cada nó
U	Energia interna
$\hat{u}$	Vetor dos graus de liberdade mecânicos nodais
u_i^n	Deslocamentos globais nodais da superfície média de uma casca
w_i, w_j	Fatores de ponderação para integração via quadratura de Gauss

X_i^n	Coordenadas globais nodais de uma casca não-deformada
α, β	Constantes de amortecimento proporcional
Γ	Superfície livre do elemento
δh	Entropia eletromecânica específica
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ε	Vetor das deformações na notação de Voigt
ϵ_{ijk}	Tensor de permutação de terceira ordem
θ_j^n	Rotações nodais em torno dos vetores tangentes a superfície média de uma casca
Π	Energia potencial
ρ	Densidade
σ	Vetor das tensões mecânicas na notação de Voigt
φ^n	Diferenças de potencial elétrico nodais em uma casca
ϕ_n	Funções de interpolação
Ω	Domínio do elemento

Capítulo 5

$_sensor$	Subescrito que identifica em qual sensor a amplitude foi medida
b	Comprimento da viga
CMPM	Métrica de mudança de parâmetros medidos (<i>change in measured parameters metric</i>)
CMRM	Métrica de mudança de razões medidas (<i>change in measured ratio metric</i>)
E	Campo elétrico
e_{31}	Propriedade de acoplamento piezoelétrica
h	Espessura da viga
M	Momento fletor
TRM	Métrica de transmissibilidade de razões (<i>transmissibility ratio metric</i>)

w	Deslocamento vertical
X	Distância até a região do engaste
Y	Módulo de elasticidade
Δ_1	Diferença relativa entre os resultados experimentais e do Abaqus
Δ_2	Diferença relativa entre os resultados experimentais e obtidos via UEL
$\Delta\phi$	Diferença de potencial
ϕ/F_{Dj}	Amplitude no domínio da frequência para a estrutura danificada no j-ésimo nível de dano
ϕ/F_{UD}	Amplitude no domínio da frequência para a estrutura intacta
ω_i^{Abaqus}	Frequência natural obtida pelo Abaqus
ω_i^{eUEL}	Frequência natural obtida via UEL
ω_i^{exp}	Frequência natural obtida experimentalmente

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	IX
RESUMO	XI
ABSTRACT	XIII
LISTA DE FIGURAS	XV
LISTA DE TABELAS	XIX
LISTA DE SÍMBOLOS	XXI
SUMÁRIO	XXVII
1 INTRODUÇÃO, JUSTIFICATIVAS E OBJETIVOS	1
1.1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVAS	1
1.2 OBJETIVOS	7
1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	8
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	11
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
3.1 PIEZOLETRICIDADE E RELAÇÕES CONSTITUTIVAS	15
3.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO NAS CAMADAS PIEZOELÉTRICAS	18
3.3 TEORIAS DE CASCAS LAMINADAS	24
3.4 TEORIA DE CASCAS DEGENERADAS	32
3.5 MATERIAIS COMPÓSITOS: RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DA LÂMINA E RELAÇÕES PARA O LAMINADO	36
3.6 LAMINADOS INTELIGENTES E HIPÓTESES DE CAMPO ELÉTRICO UNIFORME	42
4 METODOLOGIA: FORMULAÇÃO, IMPLEMENTAÇÃO E AVALIAÇÃO DO ELEMENTO FINITO	49

4.1	FORMULAÇÃO	52
4.1.1	DESCRIÇÃO E DISCRETIZAÇÃO DOS GRAUS DE LIBERDADE, DEFORMAÇÕES E CAMPOS ELÉTRICOS – CASO LINEAR	52
4.1.1	DESCRIÇÃO E DISCRETIZAÇÃO DAS DEFORMAÇÕES – CASO NÃO-LINEAR	57
4.1.2	FORMULAÇÃO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	59
4.1.3	INTEGRAÇÃO REDUZIDA	63
4.2	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	64
4.3	AVALIAÇÃO DO ELEMENTO FINITO	70
5	ESTUDOS DE CASOS: RESULTADOS E DISCUSSÕES	73
5.1	PRIMEIRO ESTUDO DE CASO – VIGA BIMÓRFA DE PVDF EM BALANÇO	73
5.2	SEGUNDO ESTUDO DE CASO – VIGA DE ALUMÍNIO EM BALANÇO ATUADA POR DOIS TRANSDUTORES PIEZOELÉTRICOS	77
5.3	TERCEIRO ESTUDO DE CASO – PLACA DE AÇO ENGASTADA COM TRANSDUTOR MFC™	80
5.4	QUARTO ESTUDO DE CASO – SEMICILINDROS DE COMPÓSITO INTELIGENTE	83
5.5	QUINTO ESTUDO DE CASO – “GANCHO” EM BALANÇO FABRICADO EM COMPÓSITO INTELIGENTE	88
5.6	SEXTO ESTUDO DE CASO – VIGA DE ALUMÍNIO EM BALANÇO COM DOIS TRANSDUTORES MFC	90
5.7	SÉTIMO ESTUDO DE CASO – APLICAÇÃO DE ANÁLISE PARA SHM	96
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	103
7	REFERÊNCIAS	107
8	ANEXOS	117
8.1	ANEXO 1 – SIMPLIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS PIEZOELÉTRICAS DEVIDO A CONDIÇÕES DE CONTORNO	117
8.2	ANEXO 2 – CONSIDERAÇÕES SOBRE AS HIPÓTESES DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO ELÉTRICAS SOBRE UMA CAMADA PIEZOELÉTRICA	122
8.3	ANEXO 3 – MATRIZES DE COMPATIBILIDADE B E H EM FORMA EXPLÍCITA	125
8.4	ANEXO 4 – PUBLICAÇÕES VINCULADAS AO PROJETO	129
8.4.1	ARTIGOS PUBLICADOS EM ANAIS DE CONGRESSOS	129
8.4.2	RESUMOS SUBMETIDOS PARA CONGRESSOS	129
8.4.3	ARTIGOS ACEITOS PARA PUBLICAÇÃO	130

8.5 ANEXO 5 – FLUXOGRAMAS DO PSEUDO-ALGORITMO DOS CÓDIGOS IMPLEMENTADOS PARA O PROGRAMA***STAND-ALONE* EM PYTHON****131****8.6 ANEXO 6 – FLUXOGRAMA DO FUNCIONAMENTO BÁSICO DA UEL IMPLEMENTADA****132**

1 INTRODUÇÃO, JUSTIFICATIVAS E OBJETIVOS

1.1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVAS

A indústria aeronáutica enfrenta grandes desafios na realização de projetos estruturais devido ao alto nível dos requisitos de projeto, condições essas que são somadas à necessidade de estruturas leves, redundantes e com grande robustez ao dano. Dentro desse contexto, algumas das grandes inovações nas áreas de Engenharia Estrutural e Engenharia de Materiais dos últimos anos surgiram desse ambiente, tais como a utilização de materiais compósitos estruturais laminados. Tais materiais são inerentemente heterogêneos e multifásicos, sendo, por exemplo, formados por fibras cerâmicas contínuas embebidas em resinas poliméricas. Somado a isto, houve também o desenvolvimento das filosofias de projeto de tolerância ao dano (*damage tolerance* – CALLISTER, 2002). Neste caso, tem-se a concepção de que elementos estruturais primários devam ser continuamente inspecionados para que, com a catalogação e análise do histórico de danos, como micro e macro trincas, reparos ou troca de elementos estruturais sejam efetuados apenas quando estritamente necessário.

Dentro desse contexto, não é surpreendente a ênfase dada pela indústria e a crescente pesquisa do meio acadêmico no estudo da aplicação de materiais inteligentes nas duas últimas décadas. Materiais inteligentes são definidos como materiais que possuam uma ou mais propriedades que possam ser alteradas de maneira controlada por um estímulo externo, como: tensão mecânica, corrente elétrica, campo magnético, etc. (GHANDI; THOMPSON, 1992, IYER; HADDAD, 1993).

A capacidade desses materiais de atuar tanto como sensores e atuadores, podendo indicar e, agir em tempo real, sobre as condições de um dado elemento estrutural gerou diversas aplicações como: monitoramento constante da integridade estrutural (*Structural Health Monitoring* – SHM – IHN; CHANG, 2008; BORGES, 2012); utilização de estruturas inteligentes com relativa capacidade de auto reparo (*self-repairing structures* – SRS – GIURGIUTIU et al., 2002; YANG-WU, et al., 2008; BRUNNER et al., 2009); aplicação de estruturas primárias no controle de escoamentos aerodinâmicos para controle ou melhoria do desempenho de aeronaves (*flow control* – SULEMAN; COSTA, 2004); controle ativo de problemas aeroelásticos como *flutter* ou *buffeting* (DE MARQUI et al., 2005); ou ainda

atenuadores de vibrações mecânicas, ativos ou passivos, podendo inclusive converter a energia das vibrações em energia elétrica utilizável (*energy harvesting* – DE MARQUI et al., 2009; ERTURK et al. 2010).

Dessa forma, mostra-se uma crescente busca pela utilização de materiais capazes de realizar múltiplas funções além da estrutural, tais como: ligas de memória de forma, materiais piezoelétricos e fluídos magneto-hidrodinâmicos. Particularmente, os materiais piezoelétricos são de grande interesse, pois, como possuem um acoplamento eletromecânico, proporcionam uma aplicação imediata em sistemas de controle eletrônicos (PIEFORT, 2001).

Porém, há alguns obstáculos, principalmente no segmento de aeronaves civis, para a utilização de materiais piezoelétricos clássicos no meio aeronáutico, como piezocerâmicas (materiais com estrutura policristalina) como os PZTs (titanatos zircanatos de chumbo) ou piezopolímeros como o PVDFs (fluoretos de polivinilideno). Os materiais piezocerâmicos baseados em PZTs como pastilhas e placas cerâmicas possuem uma difícil integração a estruturas aeronáuticas tradicionais devido a algumas de suas características. Dentre essas características destacam-se: baixa flexibilidade, impossibilitando utilização em superfícies curvas como revestimentos de asas e fuselagens; alta fragilidade; baixa vida em fadiga; e dimensões reduzidas de produtos comercialmente disponíveis, gerando descontinuidades e concentrações de tensão (KORNMAN; NGUYEN, 2006). Os PVDFs por sua vez, apresentam um elevado custo de fabricação; são limitadas a determinadas condições ambientais de operação (por exemplo: temperatura); e possuem constantes de acoplamento piezoelétrico reduzidas, especialmente se comparadas às encontradas nos PZTs. Isso acarreta uma taxa de conversão de energia considerada insignificante para a maioria dos projetos aeronáuticos (CHOPRA, 2002).

Nos últimos anos, contudo, o desenvolvimento de processos de fabricação capazes de produzir fibras de material piezoelétrico embebidas em resina e, encapsuladas em eletrodos de modo a obter lâminas adequadas para utilização em materiais compósitos estruturais laminados, criou uma nova categoria de materiais: compósitos estruturais laminados ativos piezoelétricos (geralmente chamados apenas de compósitos ativos ou compósitos inteligentes). Dentre esses materiais, destacam-se: o AFC (*Active Fiber Composites*) (Figura 1.1A), inicialmente desenvolvido pelo Massachusetts Institute of Technology – MIT (HAGOOD; BENT, 1993 e 1995; BENT, 1997 e 1999) e, o MFCTM (*Macro Fiber Composites*) (Figura 1.1B) desenvolvido pelo NASA Langley Research Center (WILKIE et.

at., 2000). Esses materiais diferem pelo modo de fabricação e pela ordem de grandeza das dimensões das fibras piezoelétricas utilizadas. Sendo que o primeiro corresponde à micro fibras de PZT estrudadas, de seção circular. E o segundo correspondente a macro fibras de PZT obtidas através do corte de placas, formando fibras de seção retangulares. Utilizando essa metodologia de fabricação, os compósitos estruturais laminados ativos (compósitos inteligentes) superam alguns dos obstáculos supracitados, pois a introdução de resina polimérica melhora a resistência à fadiga e a flexibilidade, possibilitando, por exemplo, a criação de elementos estruturais ativos curvos, que possam ser utilizados em revestimentos de asas e fuselagens.

Figura 1.1 – A. Esquema da micro estrutura de um AFC; B. Esquema da micro estrutura de um MFCTM

Ademais, como o componente ativo do material passa a fazer parte integral da estrutura, há uma mínima alteração da geometria original, diminuindo, em alguns casos, os problemas de concentração de tensão. Dessa forma, evita-se que os sensores sejam componentes externos às estruturas, inseridos posteriormente à sua fabricação; de modo que atualmente, estudos sobre o modo de inserção dos sensores no interior do laminado são escassos. Também se deve notar que as fibras ativas podem, teoricamente, ser aplicadas a qualquer camada (interna ou superficial) de um dado laminado. Assim, a posição ou angulação das fibras ativas num compósito inteligente pode ser utilizada para otimização do material de acordo com um dado requisito, podendo ser esse estrutural ou de controle (atuação e/ou sensoriamento).

Entretanto, existem diversos obstáculos para a aplicação prática dessa tecnologia, tais como: o alto custo de manufatura; a difícil previsão computacional do comportamento em serviço; a obtenção experimental das propriedades eletromecânicas desses materiais; e, o fato do comportamento de estruturas contendo compósitos inteligentes não ser completamente compreendido. Esse último obstáculo explica-se pelo fato do surgimento desses materiais ter ocorrido nestes últimos anos, e embora diversos estudos existam no ambiente acadêmico

sobre essa categoria de materiais, não há um modelo padrão utilizado pela comunidade científica. Além disso, as ferramentas de cálculo e simulação do comportamento de estruturas fabricadas em material compósito estrutural laminado ativo encontram-se em estágio embrionário dentro do meio acadêmico ou do meio de pesquisa industrial. Dessa forma, nem todos os modelos matemáticos propostos na literatura existem pré-implementados em pacotes comerciais de simulação. Do mesmo modo, ainda são raros os casos de aplicações práticas desses materiais, sendo a maioria das aplicações existentes mantidas sob sigilo industrial, dificultando comparações entre modelos numéricos e resultados experimentais em macro escala. Um dos poucos casos publicados é o projeto da utilização de transdutores piezoelétricos para atenuação de *buffeting* na empenagem vertical do F-18 (MOSES, 1997), mas as ferramentas computacionais utilizadas nas análises não foram disponibilizadas publicamente.

Diversos trabalhos têm sido publicados sobre modelos matemáticos e o modo correto de simular o comportamento eletromecânico desses materiais, utilizando diferentes métodos, dentre os quais, destaca-se o Método dos Elementos Finitos (MEF). Dessa forma, pode-se encontrar na literatura, inúmeros modelos para a formulação de elementos finitos capazes de simular o comportamento de compósitos inteligentes (ativos).

Em geral, os trabalhos encontrados se diferenciam dependendo da escala do problema de simulação a ser investigado. Essas escalas podem ser classificadas como análises micromecânicas, mesomecânicas ou macromecânicas. As primeiras consistem na modelagem detalhada das diferentes fases (fibra, matriz e eletrodos) através de um Volume Elementar Representativo (VER) de material compósito inteligente (ativo). Para tal, utiliza-se, por exemplo, elementos finitos sólidos com capacidade de acoplamento eletromecânico. Tais modelos visam quantificar as propriedades eletromecânicas ou piezoelétricas desses compósitos ou parâmetros associados à evolução do dano nesses materiais. As análises meso mecânicas consistem na modelagem de lâminas (camadas) ou laminados completos homogeneizadas, geralmente, tratadas como materiais ortotrópicos, devido à orientação preferencial das fibras para uma dada direção. Sendo assim, as abordagens mesomecânicas são utilizadas para simulações de testes em escala laboratorial e implementação de diferentes teorias para o comportamento eletromecânico dessas estruturas e sua relação com a integridade estrutural. As análises macro mecânicas versam sobre a modelagem de elementos estruturais ou estruturas completas para a simulação do comportamento global e, visam

verificar requisitos ou extrair informações, como características dinâmicas do sistema. Uma visão qualitativa das diferentes escalas estudadas pode ser vista na Figura 1.2.

Figura 1.2 – Visão qualitativa das diferentes escalas estudadas, análises comuns e elementos utilizados

A grande maioria dos trabalhos existentes na literatura reside em análises micromecânicas de Volume Elementares Representativos (VER) para obtenção de propriedades eletromecânicas e piezoelétricas de compósitos inteligentes ou para a identificação de parâmetros de modelos de dano (MEDEIROS, 2012). Embora haja pesquisadores como Kim et al. (2003) que defendam a tese de que estruturas fabricadas com materiais compósitos inteligentes possuem uma complexidade inerente e, sendo assim, apenas análises detalhadas da microestrutura seriam verossímeis, há outra vertente de pesquisadores preocupados com simulações de elementos finitos, empregando uma abordagem meso ou macromecânicas.

No caso de análises meso ou macromecânicas, devido às dimensões da estrutura analisada ser diversas ordens de grandeza maior que a espessura do material, estratégias utilizadas em análises micromecânicas geram modelos computacionalmente impraticáveis (XIA et al., 2003). Isso decorre do fato que as estratégias comuns a análises micromecânicas como o uso de elementos finitos tridimensionais e uma descrição completa de um VER (que contém as diferentes camadas e fases existentes ao longo da espessura do material), necessitem de milhares de elementos finitos para discretizar volumes de material de dimensão

da ordem de grandeza de sua espessura. (PIEFORD, 2001) Dessa forma, para análises meso e macromecânicas, é preferível a utilização de elementos finitos baseados em modelos, que simulam o comportamento de todo o laminado, homogeneizando suas propriedades. Assim, volumes de material, que nas estratégias micromecânicas necessitam de milhares de elementos finitos para sua simulação, passam a ser simulados por um único elemento. Em geral, os diferentes pesquisadores trabalhando na área de meso e macro análises para materiais compósitos inteligentes optam pela formulação e implementação de elementos de placa ou casca, especialmente desenvolvidos para as peculiaridades desses materiais (QATU et al., 2010). Os elementos bidimensionais possuem diversas vantagens dentro dessa abordagem, pois possuem diversos modelos para utilização junto a materiais homogeneizados. Além disso, como a grande maioria das estruturas fabricadas em compósitos são finas, não há a necessidade de uma discretização ao longo da espessura, sendo os modelos matemáticos de placa e casca suficientes para sua simulação (REDDY e OCHOA, 1996). Essa simplificação da análise está exemplificada na Figura 1.3, na qual um mesmo sensor necessita de centenas de elementos para ser modelado utilizando elementos finitos tridimensionais, enquanto é representado por poucas dezenas de elementos finitos bidimensionais.

Figura 1.3 – Motivação para criação de elementos bidimensionais

Deve-se ressaltar, fortemente, que nos grandes pacotes comerciais de elementos finitos como Abaqus, Ansys e Nastran, encontram-se elementos sólidos com capacidade de acoplamento eletromecânico para análises de microestruturas. No entanto, elementos bidimensionais e tridimensionais, eficientes computacionalmente para análises de meso ou macroestruturas, não são encontrados.

Diante do que foi supracitado justifica-se e motiva-se o desenvolvimento de projetos que abordem como tema o estudo de estruturas fabricadas em material compósito inteligente,

bem como a criação de modelos computacionais de elementos finitos que simulem de forma eficiente o comportamento dessas estruturas para utilização em análises em escala meso e macromecânicas. Em especial, a implementação de tais modelos dentro de um pacote comercial de elementos finitos, como será discutido, aumenta a visibilidade da criação de modelos que simulem estruturas complexas fabricadas parcialmente em material inteligente de forma adequada e com custo computacional aceitável. Vale ressaltar que na literatura há inúmeras definições para compósitos inteligentes. Porém, no presente trabalho, o referido material tratar-se-á de um material laminado, que possui uma ou diversas camadas fabricadas em material piezoelétrico. Ao passo que as demais lâminas são definidas como camadas estruturais e, são fabricadas em material compósito convencional (por exemplo: resina epóxi reforçada por fibra de carbono) ou, até mesmo, em material metálico (por exemplo: alumínio ou titânio).

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho visa desenvolver a formulação, e, realizar a implementação e a avaliação das limitações e potencialidades de um modelo computacional de elementos finitos que possa descrever o comportamento de estruturas fabricadas em material compósito inteligente. Sendo que neste trabalho, serão investigadas, principalmente, estruturas fabricadas a partir de transdutores piezoelétricos do tipo AFC e/ou MFCTM. Para isso, formulações matemáticas encontradas na literatura foram estudadas e modificadas, sendo suas limitações e potencialidades criteriosamente analisadas. De posse da formulação matemática final, a implementação do modelo foi feita a partir do desenvolvimento de códigos em linguagem Fortran, que são compilados junto ao pacote de elementos finitos Abaqus, utilizando uma ferramenta definida como UEL (*User Element subroutine*). Devido à amplitude do objetivo proposto optou-se por subdividi-lo em objetivos específicos, tais como:

- ☑ Realizar uma revisão bibliográfica visando encontrar e compreender os trabalhos científicos mais relevantes, assim como os trabalhos mais recentes desenvolvidos nas áreas de formulação de elementos finitos para compósitos inteligentes, principalmente materiais ativos piezoelétricos;

- ☑ Dentre os modelos encontrados na revisão bibliográfica supracitada, selecionar criteriosamente os modelos mais importantes através de uma análise de limitações e potencialidades e, assim, modificá-los adequadamente, a fim de se obter uma formulação matemática nova, que seja eficiente computacionalmente;
- ☑ Implementar a formulação através de sub-rotinas UEL em linguagem Fortran, para que essa possa ser compilada junto ao pacote de elementos finitos Abaqus, utilizando sua sub-rotina UEL;
- ☑ Realizar testes com o elemento implementado, comparando os resultados obtidos com simulações computacionais utilizando elementos nativos pré-implementados no Abaqus, ou com resultados analíticos, ou então através de, *patch tests* de elementos finitos. Além disso, confrontar os resultados obtidos via UEL com resultados experimentais encontrados na literatura;
- ☑ Desenvolver, junto ao Grupo de Estruturas Aeronáuticas (GEA), ensaios experimentais para estruturas em compósitos ativos piezoelétricos do tipo MFCTM e comparar seus resultados com simulações empregando o elemento finito previamente implementado;
- ☑ Identificar as limitações do elemento finito desenvolvido com base nos resultados a serem obtidos e então, atribuir melhorias à formulação inicialmente proposta de modo a minimizar tais limitações;
- ☑ Identificar as potencialidades do elemento finito desenvolvido, mostrando a aplicação do mesmo para estudos de caso em SHM (*Structure Health Monitoring*).

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Partindo dos objetivos descritos na seção anterior, o presente trabalho foi estruturado de modo a, inicialmente, fazer uma breve revisão dos trabalhos mais relevantes da literatura. Essa revisão envolveu a descrição de trabalhos contemplando o desenvolvimento histórico de modelos para materiais compósitos inteligentes bem como os trabalhos atuais mais pertinentes sobre formulações de elementos finitos para esses materiais. Posteriormente, a fundamentação teórica necessária para descrição matemática do modelo de elemento finito implementado é apresentada, mostrando os modelos físicos utilizados para piezeletricidade, descrição geométrica de cascas e comportamento mecânico de materiais compósitos laminados. A metodologia científica aplicada ao projeto é detalhada, incluindo a formulação

final do elemento finito desenvolvido, sua implementação e os métodos utilizados para avaliação de suas limitações e potencialidades. Além disso, evidenciam-se as melhorias aplicadas à formulação do elemento. Em seguida, os diversos estudos de caso aplicados ao elemento implementado e seus resultados são mostrados, interpretados e discutidos. Dessa forma, o presente trabalho foi dividido nos seguintes capítulos:

Capítulo 1 – Introdução, Justificativas e Objetivos

No referido capítulo, mostra-se uma breve introdução aos materiais compósitos inteligentes, algumas de suas aplicações, particularizando-as para a indústria aeronáutica e os desafios existentes atualmente para sua utilização mais ampla. Além disso, mostra-se como o presente trabalho se justifica diante desses diversos desafios, e quais deles especificamente serão abordados. Enfim, sumarizam-se os principais objetivos do trabalho e a estrutura utilizada em sua redação.

Capítulo 2 – Revisão Bibliográfica

Neste capítulo, inicialmente, tem-se uma breve revisão dos trabalhos científicos históricos sobre a modelagem de materiais compósitos ativos piezoelétricos. Posteriormente, os trabalhos atuais mais relevantes sobre formulação de elementos finitos aplicados a esses materiais são citados e sumarizados.

Capítulo 3 – Fundamentação Teórica

Este capítulo é constituído por diferentes seções, contendo a descrição de modelos matemáticos para: piezeletricidade, condições de contorno específicas para os transdutores piezoelétricos estudados no presente trabalho, teoria de cascas laminadas, teorias para o comportamento mecânico de materiais compósitos laminados e particularidades dos compósitos laminados inteligentes. Para os diferentes modelos abordados, são apresentadas suas vantagens e desvantagens, sendo o modelo final detalhado matematicamente.

Capítulo 4 – Metodologia: Formulação, Implementação e Avaliação

Neste capítulo, a metodologia adotada no trabalho é descrita, bem como a evolução da formulação adotada. Posteriormente, o modelo matemático da formulação discretizada em nós, bem como sua implementação via Método dos Elementos Finitos são descritas. Em seguida, a implementação em UEL, com suas particularidades é sucintamente explicada. Por

fim, os métodos de avaliação utilizados para o elemento são descritos, enumerando e justificando alguns dos estudos de casos realizados.

Capítulo 5 – Estudos de Caso: Resultados e Discussões

Os resultados dos diferentes estudos de casos realizados são mostrados e discutidos. Em particular, sete estudos de casos são descritos, mostrando a aplicação da formulação do elemento finito implementado. Isso é realizado comparando simulações utilizando via UEL com resultados encontrados na literatura e ensaios experimentais. Num primeiro momento, são investigados problemas de viga. Em seguida, problemas de placa plana, e cascas com alta curvatura. Por fim, os resultados são comparados com resultados experimentais.

Capítulo 6 – Conclusões e perspectivas Futuras

Neste Capítulo, verifica-se as principais conclusões obtidas com base nos resultados discutidos no Capítulo 5, sobre as potencialidades e limitações do elemento finito implementado, retomando-se, principalmente, os objetivos específicos apresentados anteriormente. Finaliza-se o texto da dissertação, mostrando diferentes perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 7 - Referências

Contém as referências bibliográficas utilizadas durante o desenvolvimento do presente trabalho.

Anexos

- ☒ Anexo 1 – Simplificação das equações constitutivas piezoelétricas devido a condições de contorno
- ☒ Anexo 2 – Considerações sobre as hipóteses das condições de contorno elétricas sobre uma camada piezoelétrica
- ☒ Anexo 3 – Matrizes de compatibilidade B e H em forma explícita
- ☒ Anexo 4 – Publicações vinculadas ao presente trabalho
- ☒ Anexo 5 – Fluxogramas do pseudo-algoritmo dos códigos implementados para o programa stand-alone em Python
- ☒ Anexo 6 – Fluxograma do funcionamento básico da UEL implementada

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, os trabalhos mais relevantes para o desenvolvimento sobre formulação teórica de materiais compósitos inteligentes, bem como os trabalhos mais atuais na área de modelagem de elementos finitos para compósitos inteligentes são listados e sumarizados. Vale ressaltar que trabalhos sobre a utilização de materiais piezoelétricos em aplicações diretas em estruturas são relativamente recentes, sendo que os primeiros trabalhos na área surgiram por volta da primeira metade da década de 90. Pesquisas sobre a utilização prática de materiais piezoelétricos em estruturas se tornaram possíveis após a descrição teórica das matrizes constitutivas de acoplamento piezoelétricas (NYE, 1969) e, a compilação de trabalhos anteriores realizados por diferentes pesquisadores, dentre os quais se destaca Ikeda (1996).

Os trabalhos iniciais na área de aplicação de sensores piezoelétricos a estruturas utilizavam a teoria de deformações induzidas, que simplificava o problema e não incorporavam o acoplamento eletromecânico total apresentado pelos materiais (FARIA, 2006). Além disso, soluções analíticas eram buscadas para que a capacidade da utilização desses materiais pudesse ser mostrada. Três trabalhos pioneiros na área foram os de Chan e Unsworth (1989), Smith e Auld (1991) e Hagood e von Flotow (1991), os quais apresentaram abordagens analíticas para a solução de elementos estruturais de viga e placa, controlados por atuadores piezoelétricos em circuito *shunt*. Um circuito *shunt* piezoelétrico consiste num transdutor piezoelétrico ligado a uma carga externa resistiva, ou resistiva-indutiva. Essa resistência *shunt* pode ser escolhida de modo a modificar as características dinâmicas da interação transdutor piezoelétrico-estrutura de maneira controlada, alterando as características elétricas do transdutor, aproximando-o ou afastando-o da condição de curto-circuito (HAGOOD; VON FLOTOW, 1991). Além disso, esses trabalhos apresentavam-se limitados em termos das condições e de esforços externos compatíveis aos modelos. Entretanto, isso não foi considerado uma limitação pelos autores, pois, essas pesquisas tinham como objetivo obter as mudanças de características estruturais, que fossem mensuráveis ou atuáveis através de transdutores piezoelétricos, tais como frequências naturais, valores de amortecimento, e amplitudes de resposta em frequências de ressonância.

Nesse mesmo contexto, Hwang e Park (1993) e Tzou et al. (1993) criaram soluções analíticas para resposta do problema de uma viga piezoelétrica em balanço sob carregamento

eletromecânico estático, enquanto Lee (1990) fez o mesmo para estruturas de placa. Em seguida, os trabalhos de Hagood e Bent (1993) e Bent e Hagood (1995) analisaram as potencialidades da utilização de diferentes eletrodos e geometrias para os transdutores piezoelétricos, criando um modelo matemático simples para a previsão do comportamento desses materiais. Cabe ressaltar que, posteriormente, tais transdutores investigados seriam chamados de AFC, iniciando-se, assim, os trabalhos em estruturas bidimensionais laminadas. Dentro desse contexto, Mitchell e Reddy (1995) desenvolveram um modelo analítico para placas laminadas com acoplamento piezoelétrico. Com o passar de poucos anos, esses trabalhos evoluíram e, as publicações de Bent (1997) e Bent (1999) introduziram o conceito de AFCs.

Ainda dentro do período supracitado, artigos científicos sobre a utilização do Método dos Elementos finitos para a previsão do comportamento de materiais compósitos inteligentes, utilizando as teorias de acoplamento piezoelétrico completas, que introduzam mudanças nas matrizes constitutivas dos materiais começaram a surgir. Hwang et al. (1994) e Tzou e Tiersten (1994) implementaram suas teorias analíticas de placas piezoelétricas num código de elementos finitos. Saravanos et al. (1997) e Correia et al. (2000) propuseram trabalhos similares nos quais formularam um elemento finito de casca laminada via Teoria de Lâminas Piezoelétricas Mistas acopladas a circuitos *shunt* piezoelétrico. Kaljević e Saravanos (1997), Balamurugan e Narayanan (2001) e Yang and Shen (2001) propuseram diferentes elementos finitos para análise das características dinâmicas de estruturas contendo transdutores piezoelétricos, dando atenção especial a cargas de impacto e estruturas delgadas.

A partir do fim da década de 1990 e do início da década de 2000, os trabalhos realizados começaram a utilizar modelos mais sofisticados e, então, passaram a abordar problemas mais complexos. Lee e Saravanos (1999) implementaram uma formulação de elementos finitos generalizados para placas contendo acoplamento piezoelétrico. Neto (2000) publicou formulações de elementos finitos para materiais compósitos inteligentes, porém optou pela utilização de teorias pouco comuns, como elementos mistos entre graus de liberdade descritos por funções de forma do tipo C^0 e outros descritos por funções de forma do tipo C^1 . Bisegna e Caruso (2001) mostraram uma comparação entre diversos trabalhos realizados anteriormente e, analisaram qualitativamente a aplicação de Teorias de Cisalhamento de Alta Ordem para compósitos inteligentes. Posteriormente, Piefort (2001) mostrou a utilização de diferentes materiais ativos para a fabricação de materiais compósitos inteligentes. O pesquisador ainda propôs formulações para elementos finitos de placa e

sólidos, que utilizam estados de tensão quase-3D, baseando-se em relações extraídas diretamente das equações termodinâmicas para os acoplamentos eletro-térmico-mecânico. Azzous et al. (2002) desenvolveram elementos finitos contendo graus de liberdade elétricos adicionais aos graus de liberdade de diferença de potencial típicos e, os utilizaram na modelagem de transdutores piezoelétricos AFC e MFC, comparando sua eficiência.

Lee et al. (2006), Varelis e Saravanos (2006) e Dong e Wang (2006) propuseram elementos finitos bidimensionais para laminados finos não-lineares, com capacidade de simular o comportamento de estruturas sobre grandes deslocamentos e grandes deformações. Nesses diferentes trabalhos os autores chegaram a mesma conclusão de que em transdutores piezoelétricos com grande flexibilidade como MFCs um dos maiores desafios é a correta previsão das distorções transversais. Haja vista que as mesmas são responsáveis pelo maior acoplamento eletromecânico nas condições em que há carregamentos de flexões de tal magnitude que causem efeitos não lineares. Sendo que no mesmo ano, Wu e Lo (2006) propuseram uma solução assintótica para problemas dinâmicos em placas laminadas com efeitos piezoelétricos.

Marinković e Gabbert publicaram uma sequência de trabalhos com diferentes parcerias, mostrando elementos de casca para materiais compósitos ativos com incrementos gradativos de complexidade. Inicialmente, os pesquisadores apenas propuseram uma formulação simples (Gabbert et al., 2002) e, em seguida, desenvolveram elementos finitos bidimensionais laminados, utilizando a Teoria de Cisalhamento de Primeira Ordem (Marinković e Gabbert, 2004). E, posteriormente, eles optaram pela incorporação de efeitos não-lineares mecânicos (Marinković et al, 2006), elétricos (Marinković et. al, 2007) e efeitos térmicos e piroelétricos (Marinković et al. 2008).

Faria (2006) propôs formulações baseadas em Teorias de Múltiplas Camadas (layer-wise theories), tanto para os graus de liberdade mecânicos quanto para os graus de liberdade elétricos. Tal abordagem foi utilizada, pois o pesquisador alegou que a homogeneização via integração do material ao longo da espessura do laminado pode mascarar características elétricas, como os efeitos dielétricos de lâminas não piezoelétricas. Mais recentemente, Neto et al. (2009 e 2012) publicaram uma sequência de artigos, evidenciando formulações de elementos finitos não-lineares, triangulares, baseados nas formulações de “casca de Sanders” para materiais laminados com capacidade de acoplamento piezoelétrico.

Outras vertentes do tema podem ser vistas na junção de diferentes análises, tais como propagação de dano, viscoelasticidade e efeitos piroelétricos acoplados aos efeitos piezoelétricos. Rasskazov et al.(2000) desenvolveram um elemento com capacidade de efetuar análise não-linear geométrica, acoplamento termo- acústico e viscoelasticidade para laminados finos. Fuhui et al. (2008) criaram elementos, que combinam as capacidades de simular o comportamento piezoelétrico de compósitos ativos em conjunto com modelos de dano intralaminares aplicados às fibras piezoelétricas e falhas interlaminares de delaminação. Kozlov and Karnaukhova (2002) desenvolveram uma formulação, que leva em consideração efeitos viscoelásticos e de fadiga para as camadas ativas em compósitos inteligentes. Tal estudo teve o intuito de criar controladores eficientes para vibrações não estacionárias.

Vale ressaltar que além das abordagens supracitadas, há ainda, na literatura, outras metodologias, que são utilizadas para realizar a caracterização e/ou a simulação do comportamento de materiais compósitos inteligentes. Dentre essas, pode-se destacar, por exemplo, o trabalho de Meyer e Steinhorst (2006). Neste estudo, os pesquisadores propuseram a utilização de métodos mais globais, como por exemplo, a utilização de malhas adaptativas e métodos numéricos iterativos com elementos finitos mais simples. Em sendo assim, os pesquisadores utilizaram elementos triangulares de três nós ou quadriláteros de quatro nós, partindo de equações constitutivas baseadas em métodos semi-empíricos para problemas bidimensionais. No entanto, outros pesquisadores, como Kim et al (2003) e Paik et al (2004 e 2007) defenderam o uso de uma modelagem incluindo a microestrutura completa dos compósitos com fibra ativa. Tais autores afirmam que, devido a grande quantidade de informações e comportamentos diferentes, outras abordagens não seriam capazes de simular o comportamento real dessas estruturas. Porém, como os próprios pesquisadores declararam, a abordagem micromecânica possui o revés de necessitar de supercomputadores e, plataformas especiais para o processamento de dados em arquiteturas paralelas aumentando assim, os custos das simulações em ordens de grandeza suficientes para que as tornem, ainda hoje, inviáveis. Principalmente, para o caso de estruturas grandes e/ou com geometria complexa.

Diante de todo o estudo realizado, optou-se por utilizar no presente trabalho uma abordagem mesomecânica a fim de se garantir não somente uma precisão aceitável, mas também, um custo computacional razoável.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 PIEZELETRICIDADE E RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

Piezeletricidade é uma característica encontrada em alguns materiais cristalinos, tanto naturais como turmalina, quartzo e topázio, como artificiais, por exemplo, os PZTs e PVDFs. O comportamento físico desses materiais apresenta um acoplamento eletromecânico, ou seja, a aplicação externa de um gradiente de potencial elétrico sobre o material gera deformação mecânica, e a aplicação de tensão mecânica, por sua vez, gera uma polarização dielétrica, traduzida segundo a Lei de Gauss num deslocamento elétrico (variação do fluxo de densidade de cargas no material). O efeito piezoelétrico direto, isto é, a geração de deslocamento elétrico (associado à corrente elétrica) pela variação do estado de tensões mecânicas do material foi descrito e provado experimentalmente pela primeira vez, de maneira metodologicamente aceita pela comunidade científica, pelos irmãos Pierre e Jacques Curie em 1880. Contudo, o efeito piezoelétrico inverso, isto é, a geração de deformação mecânica dada à aplicação de um gradiente de potencial elétrico, não foi demonstrado experimentalmente pelos irmãos Curie, embora fosse pressuposta a sua existência. Em 1881, Gabriel Lippmann demonstrou matematicamente a existência do efeito piezoelétrico inverso, que foi provado experimentalmente nos anos seguintes (FARIA, 2006). Esses dois comportamentos complementares definem, assim, a piezeletricidade e encontram-se esquematizados na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Esquema indicando as relações entre diferentes grandezas físicas num material piezoelétrico

Dessa maneira, o comportamento de materiais piezoelétricos pode ser escrito matematicamente através da inserção de coeficientes de acoplamento eletromecânico, ou seja, coeficientes piezoelétricos, nas equações constitutivas mecânicas entre tensão e deformação e, nas relações dielétricas entre campo elétrico e deslocamento elétrico (MEDEIROS, 2012).

Considerando que os materiais estão dentro do regime de pequenas deformações, desconsiderando efeitos térmicos e de histerese elétrica, o modelo de piezeletricidade linear é válido (IKEDA, 1996). Nesse modelo, há quatro diferentes formas de se escrever as equações eletromecânicas acopladas, baseadas nas permutações entre as mutuo-dependências dos tensores de tensão mecânica, deformação mecânica, campo elétrico e deslocamento elétrico e, na escolha dos tensores independentes.

Ainda deve-se notar que para materiais piezoelétricos, as condições de contorno ao qual o sistema está submetido alteram ligeiramente as respostas mecânica e dielétrica do sistema, devido ao próprio acoplamento piezoelétrico. Especificamente, a condição de contorno elétrica influencia na resposta mecânica, variando entre duas condições extremas: curto circuito e circuito aberto. Da mesma forma as condições de contorno mecânicas influenciam a resposta dielétrica do sistema, variando entre duas condições extremas: deformação uniforme (extremidades livres) e tensão constante (extremidades engastadas).

Matematicamente, as condições de contorno do sistema alteram o modo como são calculados os termos das matrizes constitutivas elástica e dielétrica do material. Os termos da matriz constitutiva elástica variam entre a condição de curto-circuito (C_{ijkl}^E) e a condição de circuito aberto (C_{ijkl}^D), sendo $C_{ijkl}^E < C_{ijkl}^D$. Os termos da matriz dielétrica, por sua vez, variam entre a condição de deformação uniforme (d_{ik}^E) e tensão uniforme (d_{ik}^D), sendo $d_{ik}^E < d_{ik}^D$. Ainda pode-se observar que existe uma dualidade entre essas condições, sendo que as equações constitutivas acopladas são geralmente escritas seguindo os pares curto-circuito/deformação uniforme e circuito-aberto/tensão (IKEDA, 1996).

Na maior parte dos problemas, a chamada forma E (do inglês *e-form*, em tradução livre) é a mais interessante (IKEDA, 1996). Nessa formulação, as deformações mecânicas e os campos elétricos são as variáveis independentes, o que é necessário numa formulação de elementos finitos baseada em deslocamentos. Nesse tipo de formulação, as equações finais devem ser escritas de modo que os deslocamentos mecânicos e seus equivalentes no domínio eletromagnético, os potenciais elétricos, sejam as variáveis independentes do problema (BATHE, 1996). Isso é realizado através da utilização das relações cinemáticas da Mecânica

do Contínuo para definição das deformações através dos deslocamentos mecânicos (utilizando, por exemplo, as clássicas deformações infinitesimais de Cauchy) e, das relações eletromagnéticas dadas pela Lei da Indução de Faraday e pela Lei de Gauss para dielétricos, que relacionam potencial, deslocamento e campo elétrico (GABBERT, 2002). A forma E pode ser resumida tensorialmente pela Equação 3.1.

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k \\ D_i &= e_{ikl} \varepsilon_{kl} + d_{ik}^E E_k\end{aligned}\tag{3.1}$$

Na Equação 3.1, σ_{ij} , ε_{kl} , E_k e D_i são respectivamente: as componentes dos tensores de tensão mecânica, deformação mecânica, campo elétrico e deslocamento elétrico; C_{ijkl}^E é o tensor elástico linear de quarta ordem para condição de contorno elétrica de curto circuito, ou seja, E é constante; d_{ik}^E é o tensor dielétrico completo de segunda ordem para condição de contorno mecânica de deformação uniforme ao longo do material, ou seja, ε é constante; e e_{ijk} é o tensor de terceira ordem dos coeficientes piezoelétricos. O conjunto dos tensores e, C^E , bem como d^E gera um total de 144 coeficientes independentes, considerando o caso geral de um material piezoelétrico. Sendo assim, tem-se 81 coeficientes elásticos pertencentes ao tensor C^E , 9 coeficientes de permissividade dielétrica formando o tensor d^E e 27 coeficientes de acoplamento piezoelétrico que constituem o tensor e .

Utilizando a notação de Voigt (FUNG, 1994), as características de simetria dos tensores C_{ijkl}^E e d_{ik}^E e o posicionamento simétrico dos termos do tensor e_{ijk} no sistema, a Equação 3.1 pode ser simplificada numa forma matricial contendo 45 coeficientes distintos. Contudo, deve-se verificar que essa notação pode gerar confusões em sua forma matricial explícita no caso da análise de materiais compósitos ativos (MFCs ou AFCs). Isso ocorre pois, na literatura não há um consenso para nomenclatura dos eixos do sistema de coordenadas locais de um material piezoelétrico. Por um lado, trabalhos nas áreas de material compósitos, mecânica do contínuo, elementos finitos e trabalhos relacionados com estruturas em escala meso e macromecânica utilizam a seguinte nomenclatura: a direção 1 é sempre alinhada a extensão das fibras (piezoelétricas ou não) numa lâmina (ou na direção que contém as propriedades de material de maior magnitude); a direção 2 é sempre normal à direção 1 e pertence ao plano da lâmina; já a direção 3 é alinhada com a direção do empilhamento, ou

seja, normal ao plano da lâmina (Figura 3.2A). Por outro lado, para trabalhos nas áreas que abordam a micromecânica dos elementos piezoelétricos e, voltados para a área de propriedades elétricas e eletrônicas, é comum ter os eixos do sistema de coordenadas locais definidos da seguinte forma: a direção 3 é sempre alinhada com a extensão das fibras piezoelétricas; a direção 2 é sempre normal à direção 3 e pertence ao plano da lâmina e a direção 1 é alinhada com a direção de a polarização do material. No caso de a direção de polarização ser coincidente com qualquer uma das direções 2 e 3, ou não ser ortogonal a essas, a direção 1 passa a ser definida a partir da direção do empilhamento, ou seja, normal ao plano da lâmina (Figura 3.2B). Para o presente trabalho, todas as equações seguem a primeira nomenclatura, ou seja, a que está evidenciada na Figura 3.2A

Figura 3.2 – Nomenclaturas geralmente encontradas na literatura para o sistema de coordenadas local em materiais compósitos com fibras piezoelétricas A. Abordagem meso e macromecânica; B. Abordagem micromecânica.

3.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO NAS CAMADAS PIEZOELÉTRICAS

A Equação 3.1 mostra as equações constitutivas para um material piezoelétrico qualquer, sob condições de contorno desconhecidas. Utilizando as condições de contorno e características micromecânicas conhecidas nas camadas piezoelétricas, é possível simplificar as relações mostradas anteriormente. Particularmente, é possível descrever o comportamento do referido material, empregando menos coeficientes.

No caso do tensor elástico C^E , considerando-se que uma lâmina de material compósito inteligente é bidimensionalmente ortotrópica, ou seja, possui ao menos dois planos de simetria em sua microestrutura, seus coeficientes são reduzidos a 8 elementos distintos (CALLISTER,

2002), de modo que o tensor C^E possa ser escrito segundo a Equação 3.2. Da mesma forma, no caso do tensor de permissividade elétrica d^e , pode-se considerar não existem efeitos significativos de acoplamento eletromagnético cruzado e, portanto, segue a Lei de Gauss para dielétricos. Considerando ainda que o material foi polarizado numa única direção, sua descrição matemática é dada pela Equação 3.3. Por fim, sabe-se que o tensor e apresenta poucos elementos não nulos, dependentes dos diferentes eixos e das condições de simetria ou de assimetria encontradas na estrutura cristalina do material. Vale destacar que trinta e duas classes de estruturas cristalinas são fisicamente possíveis, das quais apenas vinte e duas apresentam uma assimetria capaz de gerar o efeito piezoelétrico como discutido por Nye (1957). Ele ainda descreveu as matrizes de acoplamento geradas para cada uma das possíveis classes de simetria. Em particular, os materiais piezoelétricos geralmente utilizados (PZTs e PVDFs) apresentam uma estrutura cristalina hexagonal (6mm), na qual existem 3 coeficientes de acoplamento piezoelétrico distintos (KAR-GUPTA; VENKATESH, 2007), dispostos conforme a Equação 3.4. Utilizando todas as considerações supracitadas na tensorial Equação 3.1, pode-se obter uma forma matricial simplificada da mesma, como mostra a Equação 3.5.

$$C^E = \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^E & C_{22}^E & C_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^E & C_{23}^E & C_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^E \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$d^e = \begin{bmatrix} d_{11}^e & 0 & 0 \\ 0 & d_{11}^e & 0 \\ 0 & 0 & d_{33}^e \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{13} & e_{13} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{13} \\ C_{12}^E & C_{22}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{13} \\ C_{13}^E & C_{13}^E & C_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & d_{11}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & d_{11}^E & 0 \\ e_{13} & e_{13} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Com base na Equação 3.5, um dos primeiros fatos a ser discutido é a hipótese de o material ser bidimensionalmente ortotrópico. Teoricamente, devido ao alinhamento das fibras numa única direção e, à presença de resina polimérica entre as fibras, os valores das propriedades correspondentes aos esforços nas direções 1 e 2, tanto normais (C_{11}^E e C_{22}^E) quanto transversais (C_{44}^E e C_{55}^E) deveriam ser diferentes. Contudo, na prática, nota-se que esses valores são praticamente iguais. Esse fato decorre de duas causas. A primeira e mais importante é o fato de existir uma pequena quantidade de resina entre as fibras e, o fato de que, num material compósito com fibras contínuas, os esforços normais e de cisalhamento transversal são suportados quase que unicamente pelas fibras. A segunda causa decorre de que transdutores piezoelétricos do tipo MFC ou AFC geralmente apresentam uma camada relativamente espessa de encapsulamento nas superfícies externas para isolamento (normalmente há uma camada com cerca de dezenas ou até centenas de micrometros de material dielétrico isolante – por exemplo: acrílico e KaptonTM). Além disso, dificilmente os fabricantes desses materiais revelam propriedades diferentes para os pares C_{11}^E - C_{22}^E e C_{44}^E - C_{55}^E . Dessa forma, uma equação constitutiva para um material transversalmente isotrópico é geralmente utilizada pelos pesquisadores (KAR-GUPTA; VENKATESH, 2007). Baseando-se nesta hipótese, obtém-se a Equação 3.6.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{13} \\ C_{12}^E & C_{11}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{13} \\ C_{13}^E & C_{13}^E & C_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & d_{11}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & d_{11}^E & 0 \\ e_{13} & e_{13} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

A partir da equação matricial apresentada (Equação 3.6), podem-se admitir algumas hipóteses sobre as características dimensionais do material, particularmente sua pequena espessura e , aplicar assim, uma condição de estado de tensões quase-3D (onde $\sigma_3=0$). Além disso, as condições de contorno elétricas existentes num transdutor MFC ou AFC devem ser consideradas. Esses transdutores possuem três tipos básicos de eletrodos utilizados sobre suas superfícies: eletrodos contínuos; eletrodos interdigitados simétricos (ou elongadores) (BENT; HAGOOD, 1995) e eletrodos interdigitados alternados (ou compressores) (KORNMAN; NGUYEN, 2006). A Figura 3.3 esquematiza as linhas de fluxo do campo elétrico formado no interior de uma fibra MFC para cada tipo de eletrodo.

Figura 3.3 - Linhas de campo na fibra piezoelétrica de um MFC: A. eletrodos contínuos; B. eletrodos interdigitados simétricos; C. eletrodos interdigitados alternados

Considerando que as ordens de grandeza das dimensões de espessura de transdutores MFC estão entre 10^{-4} e 10^{-3} metros e, a distância entre eletrodos entre 10^{-6} e 10^{-4} metros, pode-se utilizar a hipótese simplificadora de que os eletrodos contínuos (Figura 3.3A) ou interdigitados simétricos (Figura 3.3B) atribuem uma condição de campo elétrico uniaxial na direção 3 ($E_1=E_2=0$, $E_3 \neq 0$). Por outro lado, os eletrodos interdigitados alternados (Figura 3.3C) atribuem uma condição de campo elétrico uniaxial na direção 1 ($E_2=E_3=0$, $E_1 \neq 0$). Dessa forma, a matriz mostrada na Equação 3.6 pode ser simplificada, respectivamente, para as mostradas nas Equações 3.7 e 3.8. Essa simplificação está detalhada no Anexo 1.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 & -e'_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 & -e'_{13} \\ 0 & 0 & C_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 \\ e'_{13} & e'_{13} & 0 & 0 & 0 & d'_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\text{onde, } Q_{11} = C_{11}^E - \frac{C_{13}^{E^2}}{C_{33}^E}, Q_{22} = C_{22}^E - \frac{C_{13}^{E^2}}{C_{33}^E}, Q_{12} = C_{12}^E - \frac{C_{13}^{E^2}}{C_{33}^E}, e'_{13} = e_{13} - \frac{C_{13}^E}{C_{33}^E} e_{33},$$

$$d'_{33} = d_{33} + \frac{e_{33}^2}{C_{33}^E}.$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ D_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & d_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ E_1 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\text{onde, } Q_{11} = C_{11}^E - \frac{C_{13}^{E^2}}{C_{33}^E}, Q_{22} = C_{22}^E - \frac{C_{13}^{E^2}}{C_{33}^E}, Q_{12} = C_{12}^E - \frac{C_{13}^{E^2}}{C_{33}^E}.$$

No caso das hipóteses utilizadas para escrever as Equações 3.7, alguns pesquisadores como Gabbert et al. (2002), Faria (2006), Lee et al. (2006) e Marinković et al. (2007) utilizaram a hipótese complementar de que, ao invés de não haver campo elétrico atuando nas direções apontadas pelos eixos locais, tem-se que a corrente elétrica é nula nessas direções, ou seja: $D_1=D_2=0$. Essa hipótese modifica os valores apresentados para o cisalhamento transversal, que passa a ser igual a $C_{44}^E + e_{15}^2/d_{11}$. Novamente, essa modificação está detalhada no Anexo 1.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 & -e'_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 & -e'_{13} \\ 0 & 0 & C_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ e'_{13} & e'_{13} & 0 & 0 & 0 & d'_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\text{onde, } Q_{11} = C_{11}^E - \frac{C_{13}^E{}^2}{C_{33}^E}, Q_{22} = C_{22}^E - \frac{C_{13}^E{}^2}{C_{33}^E}, Q_{12} = C_{12}^E - \frac{C_{13}^E{}^2}{C_{33}^E}, Q_{44} = C_{44}^E + \frac{e_{15}^2}{d_{11}},$$

$$e'_{13} = e_{13} - \frac{C_{13}^E}{C_{33}^E} e_{33}, d'_{33} = d_{33} + \frac{e_{33}^2}{C_{33}^E}.$$

Além disso, deve-se notar que ambas as hipóteses de $E_1=E_2=0$ ou $D_1=D_2=0$ não representam de forma consistente o comportamento físico das lâminas de compósitos ativos com fibras MFC ou AFC, tanto no caso de eletrodos contínuos, quanto no caso de eletrodos interdigitados. Para a configuração de eletrodos interdigitados, essa constatação é imediata, uma vez que essa disposição faz com que existam primariamente efeitos numa direção e, efeitos secundários em outra direção, como mostrado Figura 3.3B. Para a configuração de eletrodos contínuos, deve-se lembrar de que efeitos eletromagnéticos secundários ocorrem dentro do dielétrico, tais como: correntes de fuga de dielétrico (que causam o aparecimento de deslocamentos elétricos de menor magnitude nas direções normais a um deslocamento elétrico primário – efeito análogo ao efeito de Poisson nos casos mecânicos); histerese da polarização das fibras piezoelétricas (que causam mudanças nas direções de polarização, induzindo momentos de dipolo, e por consequência, deslocamento elétrico em direções perpendiculares ao campo elétrico aplicado, criando um efeito análogo à introdução de coeficientes virtuais cruzados de permissividade elétrica no tensor d^e nas posições 12, 13, 23, 21, 31 e 32 da matriz) (DAMJANOVIC, 2006); cargas livres geradas na interface fibra-matriz; e efeitos de borda.

Ademais, deve-se notar que, embora a hipótese de campo elétrico uniaxial na presença de um campo de deslocamentos elétrico tridimensional ($E_1=E_2=0$; $D_1,D_2\neq 0$) seja possível fisicamente, a hipótese de deslocamento elétrico nulo nas direções 1 e 2 na condição de campo elétrico tridimensional ($D_1=D_2=0$; $E_1,E_2\neq 0$) é impossível fisicamente (DAMJANOVIC, 2006). Essa impossibilidade física é de carácter fenomenológico, e esta ligada a impossibilidade de existir parcelas de polarização numa dada direção de modo que anulem os efeitos de campo elétrico geradas pela presença de deslocamento elétrico.

Outra forma de entender esse fato é o de que deslocamento elétrico está relacionado à carga livre no meio ao passo que polarização está ligada a presença de carga de superfície. Para que exista deslocamento elétrico e polarização sem campo elétrico num dado meio, a carga total, relacionada ao campo elétrico, deve ser nula, porém devem existir cargas livres e de superfície. Embora matematicamente seja possível que as cargas livres anulem as cargas de superfície, devido às cargas de superfície não possuírem uma polaridade fixa ao longo do

tempo, fisicamente esse fato não ocorre sobre todo o meio. Uma forma final simplificada de explicar essa impossibilidade física é o fato de momentos de dipolo não conseguirem suprimir efeitos de deslocamento elétrico de forma exclusiva. Esses fenômenos estão melhores discutidos no Anexo 2.

3.3 TEORIAS DE CASCAS LAMINADAS

As teorias utilizadas para materiais compósitos laminados surgiram inicialmente do estudo de placas e cascas isotrópicas, utilizando as mesmas hipóteses cinemáticas dessas teorias. Portanto, as referidas teorias foram adaptadas e/ou expandidas para os casos de materiais anisotrópicos, ortotrópicos (bi e tridimensionais) e estruturas laminadas.

Atualmente, o estudo de elementos finitos e teorias de modelagem para materiais compósitos se baseia praticamente apenas na utilização de cascas, devido a maior generalidade que essa modelagem acrescenta às formulações. As cascas (do inglês, *shells*), são definidas como estruturas nas quais uma de suas dimensões (espessura) é diversas ordens de grandeza menor que as outras duas e, que podem possuir altas curvaturas, tanto no estado deformado quanto no não-deformado, de modo que podem ser descritas matematicamente através da sobreposição de duas superfícies geradas por uma única curva (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000). Dessa forma, cascas são elementos inerentemente tridimensionais. Entretanto, devido à grande dificuldade em se escrever as equações elásticas tridimensionais para as coordenadas de uma dada casca, verifica-se que quase a totalidade dos trabalhos encontrados na literatura reduz o problema da descrição geométrica de um corpo tridimensional para um corpo bidimensional, utilizando a descrição das cascas a partir de superfícies de referência, sendo as superfícies médias geralmente utilizadas (QATU et al., 2010).

Diversas classificações existem entre as diferentes teorias de cascas laminadas. A primeira, e talvez mais importante classificação a ser feita é entre as teorias de camada única, que modelam uma casca laminada como um único corpo homogeneizado (do inglês, *Equivalent Single Layer Theories*) e as teorias de múltiplas camadas, que modelam cada uma de suas lâminas como um corpo separado, aplicando graus de liberdade distintos para cada camada (do inglês *Layerwise Theories*) (QATU et al., 2010).

Dentre as teorias de camada única, uma segunda classificação pode ser feita dependendo do estado de tensões sob o qual o laminado está submetido: estado plano de tensões ($\tau_{13} = \tau_{23} = \sigma_{33} = 0$); estado de tensões quase-3D ($\sigma_{33} = 0$) e estado de tensões tridimensional, na qual todas as componentes de tensão são presentes. A principal diferença entre essas teorias é a sua aplicação. Deve-se notar que no estudo de estruturas chamadas bidimensionais (placas e cascas), os termos grande e pequena espessura são utilizados na literatura para denotar estruturas nas quais os termos de tensão e deformação fora do plano são significativos ou não. Esse fato decorre de que, embora as espessuras dessas estruturas, por definição, sejam sempre ordens de grandeza menores que suas outras dimensões, esses efeitos transversais ao plano ainda são dependentes de sua dimensão. Portanto, teorias formuladas especificamente para laminados finos costumam utilizar hipóteses de estado plano de tensão, enquanto, teorias para laminados espessos costumam utilizar estados de tensão quase-3D. Ademais, teorias que utilizam o estado de tensão completo, por sua vez, são geralmente empregadas para avaliar os demais modelos menos gerais, devido à sua inerente complexidade. Como as tensões fora do plano ($\tau_{13}, \tau_{23}, \sigma_{33}$), tanto de cisalhamento quanto normal transversal, possuem um efeito aumentado na presença de grandes curvaturas, em geral, placas são modeladas através de teorias para pequena espessura, enquanto cascas utilizam as teorias para grandes espessuras (REDDY; OCHOA, 1996).

Dentre as teorias para estado plano de tensões, encontra-se a Teoria Clássica dos Laminados. Para as teorias que versam sobre estado de tensão quase-3D de camada única, há dois conjuntos de modelos considerados mais pertinentes: as Teorias de Cisalhamento de Primeira Ordem, ou do inglês *First Order Shear Theory (FOST)* e as Teorias de Cisalhamento de Ordem Superior, ou do inglês, *Higher Order Shear Theories (HOST)*. Como exemplo de *FOST*, pode-se citar as Teoria dos Laminados Estendida, a Teoria de Placas de Reddy e a Teoria de Cascas Degeneradas de Zienkiewicz. Embora haja inúmeros exemplos de *HOST* na literatura, não há referências segmentadas no meio científico como para as *FOSTs*. Em meio às teorias de múltiplas camadas, pode-se exemplificar a Teoria Zig-zag (*Zigzag Theory*), as Teorias de Múltiplas Camadas Dependentes de Ordem Superior e a Teoria de Múltiplas Camadas Completa (REDDY; ARCINIEGA 2004).

Com relação à Teoria Clássica dos Laminados, a hipótese cinemática de placa de Kirchhoff é utilizada. Em sendo assim, dada uma seção plana, normal à superfície média da casca não deformada num dado ponto, tem-se que a mesma permanecerá plana e normal à superfície média da placa após a aplicação de um dado carregamento. Essa hipótese está

esquematizada na Figura 3.4 e, se traduz matematicamente na Equação 3.10. A utilização dessa teoria gera naturalmente o caso de estado plano de tensão e origina esforços de membrana (forças normais e cisalhantes atuantes no plano) e momentos fletores e de torção. Dessa maneira, segundo Reddy e Ochoa (1996), teorias para laminados finos devem ser utilizadas apenas em análises nas quais pode-se garantir que o laminado não possua grandes curvaturas e deformações transversais. Além disso, devido à descrição simplista das distribuições de tensão e deformação, Reddy e Ochoa (1996) recomenda que essas teorias sejam utilizadas apenas em análises em que se objetiva respostas primárias do sistema como deslocamentos, frequências naturais e modos de vibrar de deslocamento normal.

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1^{\text{mid}}(x_1, x_2) + x_3 \frac{\partial u_1^{\text{mid}}}{\partial x_1} \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2^{\text{mid}}(x_1, x_2) + x_3 \frac{\partial u_2^{\text{mid}}}{\partial x_2} \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3^{\text{mid}}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Figura 3.4 – Esquema das hipóteses cinemáticas para placa de Kirchhoff, utilizadas na Teoria de Clássica de Laminados

As Teorias de Cisalhamento de Primeira Ordem, em geral, utilizam as hipóteses cinemáticas de Reissner-Mindlin. Em sendo assim, dada uma linha reta normal à superfície média de uma casca não deformada num dado ponto, tem-se que a mesma permanecerá reta após a deformação, mas não necessariamente normal à superfície média deformada após a aplicação de um dado carregamento. Essa hipótese está esquematizada na Figura 3.5 e, se traduz matematicamente na Equação 3.11. Essa teoria gera naturalmente o caso de estado de tensões quase 3D. Diferentes descrições geométricas de casca e diferentes hipóteses sobre o

acoplamento dos esforços solicitantes originam diferentes esforços compatíveis. Porém, geralmente se observa teorias contendo não somente esforços de membrana e momentos fletores e de torção, mas também, esforços cortantes. Ademais, a utilização dessa teoria pode causar diversos problemas numéricos, tais como: travamento (*shear locking*), graus de liberdade espúrios (*drilling degrees of freedom*) e no caso de análises dinâmicas, modos espúrios de vibrar (*hourglass modes*). Diversas soluções existem para cada um desses problemas numéricos. Como exemplo, pode-se citar a implementação de elementos finitos com integração reduzida ou, então, modelos de definição mista das deformações energia de cisalhamento virtual e *hourglass control*, sendo que esses cuidados especiais devem ser tomados. Segundo Reddy e Ochoa (1996), essa teoria deve ser utilizada sempre que se busca eficiência computacional e não se necessita de uma descrição precisa das tensões atuantes fora do plano do laminado. Sendo, portanto, fortemente indicada para análises que necessitem de diversas iterações e, possuem como objetivo final a determinação do campo de deslocamentos. As análises dinâmicas no domínio do tempo e da frequência e as análises não lineares geométricas são casos potenciais de aplicação dessa teoria.

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1^{\text{mid}}(x_1, x_2) + x_3 \theta_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2^{\text{mid}}(x_1, x_2) + x_3 \theta_2(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3^{\text{mid}}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Figura 3.5 - Esquema das hipóteses cinemáticas para placa de Reissner-Mindlin, utilizadas na Teoria de Cisalhamento de Primeira Ordem

As Teorias de Cisalhamento de Ordem Superior utilizam como hipóteses cinemáticas o fato de que, dada a superfície média de uma casca num dado ponto, sua posição relativa à espessura do laminado permanece constante ao ser aplicado um dado carregamento, mas pode haver escorregamento entre os infinitésimos de material ao longo da espessura devido a efeitos de cisalhamento fora do plano. Esse escorregamento faz com que dada uma linha reta normal à superfície média da casca no estado não deformado, a mesma irá admitir um formato descrito por um polinômio cúbico ou de ordem superior em seu estado deformado. Inúmeros trabalhos existem propondo diferentes teorias de ordem superior, sendo a principal variação entre eles, o polinômio que descreve a forma deformada de uma seção da casca a partir de sua superfície média. Em geral, essas teorias utilizam polinômios cúbicos na espessura, mas existem na literatura exemplos da utilização de polinômios de diferentes ordens, incluindo séries infinitas. O caso cúbico está esquematizado na Figura 3.6 e, descrito matematicamente pela Equação 3.12. A teoria para uma ordem geral está descrita segundo a Equação 3.13. Essa teoria pode apresentar os mesmos problemas numéricos mostrados pela Teoria de Cisalhamento de Primeira Ordem e, gera um grande aumento de esforço computacional na resolução do problema após sua implementação em elementos finitos, uma vez que, para cada termo de ordem superior adicionado à formulação do deslocamento, três graus de liberdade são incluídos por nó num elemento. Segundo Reddy e Ochoa (1996), essas teorias devem ser empregadas quando objetiva-se uma alta precisão nos valores de tensão e deformação fora do plano ($\tau_{13}, \tau_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$). No entanto, requisita-se que esses valores fora do plano sejam globais ao laminado e, não sejam utilizados para análises locais intralaminares como critérios de dano de fibra e matriz.

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1^{\text{mid}}(x_1, x_2) + x_3 \theta_1(x_1, x_2) + x_3^2 \zeta_1(x_1, x_2) + x_3^3 \psi_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2^{\text{mid}}(x_1, x_2) + x_3 \theta_2(x_1, x_2) + x_3^2 \zeta_2(x_1, x_2) + x_3^3 \psi_2(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3^{\text{mid}}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1^{\text{mid}}(x_1, x_2) + \sum_{i=1}^m x_3^i f_{1i}(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2^{\text{mid}}(x_1, x_2) + \sum_{i=1}^m x_3^i f_{2i}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3^{\text{mid}}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Figura 3.6 - Esquema das hipóteses cinemáticas utilizadas nas Teorias de Cisalhamento de Ordem Superior

A Teoria Zig-Zag admite que o deslocamento dentro do laminado varie linearmente com a espessura, retomando as hipóteses da Teoria de Cisalhamento de Primeira Ordem. Porém essa variação ocorre de maneira independente camada a camada. Há diversas formas diferentes para sua descrição matemática na literatura, não havendo assim uma forma fechada para sua descrição. Em geral, sua descrição matemática é feita de duas maneiras distintas, ou seja, utilizando graus de liberdade diferentes para cada camada ou, utilizando apenas funções de forma dependentes da espessura, que gerem a distribuição de deslocamentos em zig-zag. Além disso, uma segunda classificação, que pode ser feita, consiste em separar a em Teoria Zig-Zag Independente (independe do número de camadas) e Teoria Zig-Zag Dependente (depende do número de camadas). Na teoria dependente, cada camada possui um conjunto de pontos, podendo esses corresponder a graus de liberdade ou não, que descrevem seu comportamento, de maneira que o número pontos com deslocamento conhecido dentro do laminado depende do número de camadas apresentado pelo material. Essa abordagem está esquematizada na Figura 3.7.

Figura 3.7 - Esquema das hipóteses cinemáticas utilizadas nas Teorias Zig-zag lineares dependentes

Na teoria independente, a descrição matemática é realizada através de diferentes estratégias: a atribuição de funções de forma do deslocamento das linhas médias em relação a sua posição relativa na espessura (x_3); ou a partir de pontos isométricos fixos na espessura e independentes das camadas, sobre os quais as funções em zig-zag são atribuídas. Dessa forma, obtém-se um número fixo de graus de liberdade por elementos, independentes da quantidade de laminas no laminado. Essa abordagem está esquematizada na Figura 3.8.

Figura 3.8 – Esquema das hipóteses cinemáticas utilizadas nas Teorias Zig-zag lineares independente

Embora a formulação dependente utilize mais esforços computacionais, geralmente é mais precisa que a formulação independente, especialmente em laminados com uma grande quantidade de camadas e, uma variação grande das propriedades de cisalhamento entre camadas consecutivas. Segundo Qatu et al. (2010), é difícil definir o modelo mais preciso para o cálculo das tensões de cisalhamento transversais entre essa teoria e as Teorias de Ordem Superior, uma vez que esse resultado irá depender de diversas variáveis, tais como: ordem dos polinômios utilizados; número de camadas no laminado; intensidade e distribuição dos esforços externos e sequência de empilhamento das camadas.

Se as funções empregadas na modelagem da Teoria Zig-Zag forem alteradas para polinômios de ordem superior ou funções trigonométricas, obtém-se as Teorias de Múltiplas Camadas de Ordem Superior. Essa teoria está exemplificada na Figura 3.9. Segundo Qatu (2010), essa é a teoria mais precisa descrita atualmente na literatura, desconsiderando as teorias baseadas na elasticidade linear, que contempla estados de tensão 3D. Deve-se destacar ainda que as Teorias de Múltiplas Camadas de Ordem Superior não consideram as tensões e deformações normais fora do plano (σ_{33} e ε_{33}).

Figura 3.9 - Esquema das hipóteses cinemáticas utilizadas na Teoria Zig-zag de Ordem Superior

Essas diferentes teorias e sua capacidade de prever as tensões transversais atuantes fora do plano, considerando a eficiência computacional de cálculo, estão esquematizadas, de maneira geral, na Figura 3.10. Deve-se notar que esse esquema é puramente qualitativo e, trata as características de cada teoria da maneira mais generalizada possível. Pois tanto eficiência, quanto precisão de resultados são dependentes de inúmeras variáveis associadas a cada tipo de problema.

Figura 3.10 – Esquema qualitativo das características de diferentes teorias para cascas laminadas

3.4 TEORIA DE CASCAS DEGENERADAS

A teoria de cascas degeneradas trata da descrição geométrica de cascas com simples ou dupla curvatura a partir da degeneração de sólidos em superfícies bidimensionais utilizando suas superfícies médias como referência para os cálculos. Essa teoria foi inicialmente proposta por Zienkiewicz no artigo publicado por Ahmad et al. (1970) e foi largamente estudada ao longo dos anos.

A descrição geométrica se inicia a partir da localização no espaço de um ponto qualquer da casca tridimensional não deformada, utilizando três diferentes sistemas de coordenadas ilustrados na Figura 3.11:

- O sistema isoparamétrico (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ;
- O sistema de coordenadas global (X_1, X_2, X_3) ;
- O sistema de coordenadas local (S_1, S_2, N) , que por motivos de simplificação em notação indicial, também pode ser escrito como (S_1, S_2, S_3) .

Figura 3.11 - Sistemas de coordenadas utilizados na teoria de cascas degeneradas e suas transformações

O sistema de coordenadas isoparamétrico possui características tais que, independentemente da forma ou posição, a partir de uma transformação linear, a casca passa a ser descrita como um cubo de lado igual 2 (dois), de modo que suas coordenadas são limitadas pelo intervalo $[-1,1]$, ou seja, $-1 \leq \xi_1, \xi_2, \xi_3 \leq 1$. Já o sistema de coordenadas

global corresponde a descrição da casca a partir de um sistema fixo num dado ponto do espaço. Por fim, sistema de coordenadas local, muda ponto a ponto na casca, sendo o eixo N normal ao plano tangente à superfície média da casca em cada ponto e, os eixos S_1 e S_2 versores desse plano (Figura 3.11).

Dessa maneira, um dado ponto X da casca não deformada, onde $h(X_1, X_2, X_3) = h(S_1, S_2)$ é a espessura pontual da casca e, pode ser descrito pela Equação 3.14 Da mesma forma, tomando a hipótese de que a espessura não varia significativamente após a deformação da casca devido à aplicação de um esforço externo (ou seja, a deformação na direção 3 deve ser insignificante se comparada à deformação nas demais direções: $\varepsilon_{33} \ll \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$) e, sendo n o eixo normal ao plano tangente à superfície média da casca deformada num dado ponto, tem-se que esse ponto qualquer da casca deformada pode ser descrito pela equação 3.16.

$$X(X_1, X_2, X_3) = X_{\text{mid}}(S_1, S_2) + \xi_3 \frac{h(S_1, S_2)}{2} N(S_1, S_2) \quad (3.14)$$

$$N = \frac{\partial X}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial X}{\partial \xi_2} / \left\| \frac{\partial X}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial X}{\partial \xi_2} \right\| \quad (3.15)$$

$$x(X_1, X_2, X_3) = x_{\text{mid}}(S_1, S_2) + \xi_3 \frac{h(S_1, S_2)}{2} n(S_1, S_2) \quad (3.16)$$

Com relação às hipóteses utilizadas para a formulação da Equação 3.16, para que essa seja válida, é necessário considerar que a variação de espessura do elemento durante a deformação da casca deve ser pequena em relação às dimensões do elemento. Isso quer dizer que, para essa formulação, não necessariamente uma maior discretização de um modelo em uma quantidade maior de elementos irá resultar numa maior precisão do resultado. Haja vista que, quanto mais refinada a discretização do meio contínuo, mais distante a formulação estará dessa hipótese (CARRERA et al., 2011). Esse fato é altamente relevante e perigoso em análises que envolvem propagação de trincas, nas quais muitas vezes são utilizados elementos com dimensões de ordens de grandeza menores que a espessura do laminado nas regiões próximas a trinca.

Definindo-se os deslocamentos da casca u como a diferença entre as posições de um dado ponto antes e depois da deformação da mesma, obtém-se a expressão dada pela Equação 3.17. A visualização geométrica das Equações 3.14 a 3.17 pode ser vista na Figura 3.12.

$$u = x - X = (x_{\text{mid}} - X_{\text{mid}}) + \xi_3 h(n - N) = u_{\text{mid}} + \xi_3 h(n - N) \quad (3.17)$$

Figura 3.12 – Entidades retratadas na descrição geométrica

Dessa forma, retomam-se as relações cinemáticas de Reissner-Mindlin, onde os deslocamentos totais são dados através da soma de dois termos: um relativo à superfície média da casca e independente e, outro relativo à rotação da casca, linearmente proporcional à espessura isoparamétrica.

Deve-se notar que as componentes do vetor $(n-N)$, através de matrizes de mudança de coordenada, podem recuperar as rotações clássicas da teoria de Reissner-Mindlin $(\theta_{yz}$ e $\theta_{xz})$. Essas matrizes de mudança de coordenada são dadas pela Equação 3.18 e, a descrição geral do deslocamento da casca é dada pela Equação 3.19.

$$H = \begin{Bmatrix} -T_2 \\ T_1 \end{Bmatrix}^T, \quad T_2 = \begin{cases} N \times \hat{i}, & \text{se } |N_1| < \cos(0.1) \\ N \times \hat{k}, & \text{se } |N_1| > \cos(0.1) \end{cases}, \quad T_1 = T_2 \times N \quad (3.18)$$

$$u = u_{\text{mid}} + \xi_3 h H \theta, \quad u_{\text{mid}} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\theta = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{yz} \\ \theta_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Desse modo, a descrição do deslocamento da casca pode ser realizada utilizando cinco graus de liberdade distintos $(u, v, w, \theta_{xz}, \theta_{yz})$. Esse fato ocorre, pois, o grau de liberdade $(n-N)_3$ existente na descrição formulada é um grau de liberdade espúrio (do inglês, *drilling degree of*

freedom). Tal expressão serve para denotar um grau de liberdade que existe apenas matematicamente, devido às transformações de coordenada entre o sistema global, fixo no espaço e o sistema local. Dessa forma, se esse grau de liberdade for mantido, uma rigidez virtual de cisalhamento deve ser adicionada para que o sistema final não resulte num sistema com resposta trivial (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000). Geometricamente esse fato pode ser interpretado como se o movimento de rotação pura da casca fosse dado pela rotação do vetor N até a posição do vetor n . Como a rotação do vetor N em torno do plano local S_1S_2 não causa a rotação da casca no sistema de coordenadas local, o grau de liberdade de rotação $(n-N)_3$ é sempre nulo no sistema local. No entanto, o grau de liberdade de rotação $(n-N)_3$ não necessariamente é nulo no sistema global. Como na maior parte das formulações de elementos finitos baseadas em deslocamento, tem-se que os deslocamentos globais são calculados, porém utilizando as deformações no sistema local, há a introdução de uma equação trivial no sistema.

A partir da definição dos deslocamentos, pode-se definir as deformações de engenharia através da definição clássica de deformação infinitesimal de Cauchy, dada pela Equação 3.21. Dessa equação, dois fatos geralmente impostos em diversas teorias surgem naturalmente: $\varepsilon_{33}=0$ e a hipótese de que as parcelas de deformação se dividem em um termo independente somado a um termo linearmente proporcional à espessura, geralmente associado a mudança de curvatura da casca. Porém, diferentemente das teorias clássicas, reorganizando essa expressão pela notação de Voigt, obtém-se que esse fato ocorre tanto para as deformações de membrana quanto para as distorções transversais.

Além disso, as distorções transversais podem ser agrupadas em três diferentes termos: um termo constante dependente dos deslocamentos da superfície média (γ_0); um termo constante dependente das rotações (γ_1); e um termo que varia linearmente com a espessura e é dependente das rotações (κ_t). Esse fato é mostrado pela Equação 3.22.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial S_j} + \frac{\partial u_j}{\partial S_i} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial S_j} = \frac{\partial u_{mid_i}}{\partial S_j} + \xi_3 h H_{ik} \frac{\partial \theta_k}{\partial S_j} + h H_{ik} \theta_k \frac{\partial \xi_3}{\partial S_j} \quad (3.21)$$

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0(u) \\ \gamma_0(u) + \gamma_1(\theta) \end{Bmatrix} + \xi_3 \begin{Bmatrix} \kappa_m(\theta) \\ \kappa_t(\theta) \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Geometricamente, tem-se que, dado uma casca deformada em vista lateral, γ_0 é uma distorção angular, que está relacionada linearmente com os deslocamentos das faces superior e inferior do laminado; γ_1 é uma distorção angular, que está relacionada linearmente com a rotação e κ_t está relacionada quadraticamente com rotação da seção transversal do laminado, conforme mostra a Figura 3.13.

Figura 3.13 - Vista lateral do laminado: A. efeito de γ^0 ; B. efeito de γ^1 ; C. efeito de κ_t

3.5 MATERIAIS COMPÓSITOS: RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DA LÂMINA E RELAÇÕES PARA O LAMINADO

A seguir apresenta-se uma síntese contendo as principais equações e considerações da análise de tensões de uma placa laminada obtida através da Teoria de Laminados Estendida, adaptada para utilização com a descrição geométrica dada pela Teoria de Cascas Degeneradas.

Considerando um dado meio contínuo qualquer, as relações entre tensões e deformações são expressas a partir da Lei de Hooke generalizada. Sendo que para um meio anisótropo, têm-se nove componentes de tensões e de deformações, porém, 81 constantes elásticas no tensor de quarta ordem C_{ijkl} , conforme mostra a Equação 3.23.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (3.23)$$

Devido à simetria dos tensores, utilizando a notação de Voigt (FUNG, 1994) o tensor C pode ser escrito utilizando 36 constantes elásticas independentes. Particularizando-se para

materiais ortotrópicos, ou seja, materiais com três planos de simetria, essas 36 constantes elásticas podem ser novamente simplificadas em 9 coeficientes independentes. Neste caso, a Lei de Hooke pode ser escrita conforme a Equação 3.24.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Em grande parte das aplicações de compósitos, devido à fina espessura das lâminas, pode-se considerar que a tensão normal ao plano da lâmina é nula, ($\sigma_3=0$). Dessa forma, a Equação 3.24 pode ser separada em dois sistemas de equações distintos mostrados nas Equações 3.25 e 3.26.

$$\sigma_b = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\sigma_s = \begin{Bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\text{onde, } Q_{11} = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}, Q_{12} = C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}, Q_{44} = C_{44}, Q_{55} = C_{55}, Q_{66} = C_{66}.$$

Em geral, o sistema de coordenadas da lâmina (sistema local) não coincide com o sistema global adotado. Requer-se assim, uma mudança de base, a qual é regida através de duas matrizes de rotação, T_b e T_s , dadas pela Equação 3.27.

$$T_b = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \quad T_s = \begin{bmatrix} m & -n \\ n & m \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Onde, $m = \cos(\theta)$; $n = \sin(\theta)$. Dessa maneira, as tensões globais em cada lâmina ($\bar{\sigma}$) podem ser escritas segundo as Equações 3.28 e 3.29. A mesma transformação deve ser aplicada às matrizes constitutivas, para que essas sejam escritas nas coordenadas globais, obtendo as equações 3.30 e 3.31.

$$\overline{(\sigma_b)} = T_b \sigma_b \quad (3.28)$$

$$\overline{(\sigma_s)} = T_s \sigma_s \quad (3.29)$$

$$\overline{(Q_b)} = T_b^T \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} T_b \quad (3.30)$$

$$\overline{(Q_s)} = T_s^T \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} T_s \quad (3.31)$$

Sabe-se que um laminado é constituído de diversas lâminas, cada qual com suas propriedades físicas e geométricas, como: material, espessura e orientação das fibras. Para se obter as propriedades homogeneizadas do empilhamento completo, é possível integrar as tensões locais de cada lâmina, previamente descritas, ao longo da espessura do laminado. O resultado da integração das tensões ao longo da espessura do laminado gera grandezas físicas chamadas de esforços generalizados (ou solicitantes) do laminado. Esses esforços simbolizam as forças internas distribuídas por unidade de espessura suportados por todo o empilhamento, compatíveis com as hipóteses cinemáticas aplicadas a teoria. Essa integração pode ser feita utilizando diferentes funções de ponderação, chamadas na literatura de *warping functions* ou *shear weighting functions* nos casos das tensões transversais ao plano do laminado, que simulam a distribuição correta dessas tensões ao longo da espessura. Vale destacar que a escolha correta dessas entidades para cada formulação ainda é um problema em aberto. Ademais, cada conjunto de funções utilizadas pode gerar diferentes esforços solicitantes no laminado, bem como diferentes equações constitutivas e diferentes acoplamentos mecânicos entre os dados esforços.

Especificamente para a Teoria de Laminados Estendida, tem-se que os esforços generalizados utilizados são provenientes de uma análise qualitativa realizada pelo presente autor com base no comportamento de placas em compósito sob efeito de carregamento de flexo-torção aplicados em suas bordas. Ademais esses esforços são forças de membrana e cortantes generalizadas (N e Q, respectivamente), bem como os momentos generalizados (M respectivamente) (LEE, 2006). As hipóteses para essa teoria preveem que: os esforços cortantes Q são desacoplados dos esforços de membrana N e dos momentos M; as tensões no plano da lâmina (σ_{11} , σ_{22} , τ_{12}) são uniformes ao longo da espessura; e as de cisalhamento transversal ao plano (τ_{13} , τ_{23}) variam parabolicamente com a espessura. Deve-se destacar que

isto é um comportamento geralmente observado em estruturas fabricadas em material isotrópico.

Figura 3.14 – Forças normais solicitantes de um laminado vindas da integração das tensões de membrana

Figura 3.15 – Momentos fletores/torçores solicitantes de um laminado vindas da integração das tensões de membrana

Figura 3.16 – Forças cortantes solicitantes de um laminado vindas da integração das tensões de transversais ao plano do laminado

Figura 3.17 – Momentos torçores solicitantes de um laminado vindas da integração das tensões de transversais ao plano do laminado

Em particular, a introdução das hipóteses cinemáticas provenientes da Teoria de Cascas Degeneradas introduz novos esforços solicitantes compatíveis na forma de momentos torçores (T), vindos da integração do produto entre a distância atual no interior do laminado e as tensões de cisalhamento transversais com relação à espessura do laminado. Uma forma de visualizar esse fato é a partir do cálculo de equilíbrio de uma casca livre de esforços externos, utilizando os resultados para deformações segundo a Teoria de Cascas Degeneradas, descrita na seção 3.3. Segundo o Princípio da Estacionariedade, uma estrutura se encontra em equilíbrio quando seu variacional da energia potencia total for nulo. O variacional da energia potencial total num laminado dentro do regime linear é dado pela soma dos variacionais da energia interna de deformação elástica, energia cinética e trabalho das forças externas. O variacional da energia interna de deformação elástica de um laminado pode ser escrito conforme a Equação 3.32. Dessa forma, estando o laminado livre de esforços externos, cargas dinâmicas e forças internas não conservativas, segundo o Princípio da Estacionariedade, seu equilíbrio ocorre quando a Equação 3.31 for igual a zero. Utilizando o fato de que, dentro de uma lâmina as deformações no sistema de coordenadas local podem ser escritas segundo a Equação 3.22, obtém-se a Equação 3.33, na qual a integração dos diferentes termos do vetor de tensões uniformemente ou linearmente com a espessura geram os quatro esforços solicitantes compatíveis com as hipóteses utilizadas, destacados na Equação 3.34. Esses esforços estão esquematizados nas figuras a seguir. As forças de membrana estão representadas na Figura 3.14. Os momentos estão representados na Figura 3.15. As forças cortantes generalizadas estão representadas na Figura 3.16. Os momentos torçores gerados por cisalhamento estão representados na Figura 3.17.

$$\delta U_e = \int_{\Omega} \delta \varepsilon \cdot \sigma \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(\begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_0 \\ \delta \gamma_0 + \delta \gamma_1 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \delta \kappa_m \\ \delta \kappa_t \end{Bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} \, d\Omega \quad (3.32)$$

$$\delta U_e = \int_{\Omega} (\delta \varepsilon_0 + z \delta \kappa_m) \cdot \sigma + (\delta \gamma_0 + \delta \gamma_1 + z \delta \kappa_t) \cdot \tau \, d\Omega = 0 \quad (3.33)$$

Sendo $d\Omega = dz dS_1 dS_2 = dz dA$

$$\int_A \left[\delta \varepsilon_0 \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma(z) dz + \delta \kappa_m \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma(z) dz + (\delta \gamma_0 + \delta \gamma_1) \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau(z) dz + \delta \kappa_t \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \tau(z) dz \right] dA = \int_A \delta \varepsilon_0 \cdot \mathbf{N} + \delta \kappa_m \cdot \mathbf{M} + (\delta \gamma_0 + \delta \gamma_1) \cdot \mathbf{Q} + \delta \kappa_t \cdot \mathbf{T} \, dA = 0 \quad (3.34)$$

Dados esses esforços solicitantes compatíveis, utilizando as hipóteses de que as tensões de membrana são uniformes ao longo da espessura e que as tensões de cisalhamento transversal variam parabolicamente ao longo da espessura, as funções de ponderação escolhidas são definidas por uma função constante unitária ao longo da espessura para os esforços de membrana e uma função parabólica normalizada pela espessura total do laminado para os esforços fora do plano. Dessa forma, obtêm-se as Equações 3.35 a 3.38 e, pode-se escrever o sistema de maneira resumida como na Equação 3.38 (QATU, 2004). Deve-se lembrar que tomando-se outras hipóteses, as matrizes de rigidezes finais seriam diferentes das matrizes evidenciadas na Equação 3.39, geralmente chamada de matriz ABBD-GH. Além disso, deve-se citar que a hipótese de distribuição parabólica para as tensões de cisalhamento é uma aproximação. Pois, embora esse seja o resultado teórico para materiais homogêneos, no caso de laminados, outras distribuições podem ocorrer, porém sua influência global não gera efeitos significativos, sendo outras distribuições custosas computacionalmente e geralmente impraticáveis (PAI, 2005; SARTORATO e TITA, 2011; SARTORATO et al., 2013).

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (3.35)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (3.36)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{5}{4} \left[1 - \left(\frac{z}{h_{total}/2} \right)^2 \right] \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz \quad (3.37)$$

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{5}{4} \left[1 - \left(\frac{z}{h_{total}/2} \right)^2 \right] z \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz \quad (3.38)$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 \\ B & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & G_h \\ 0 & 0 & G_h & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \\ \gamma^0 + \gamma^1 \\ \kappa_t \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

Sendo:

- ☑ $A_{ij} = \sum_{k=1}^N \overline{(Q_{ij}^k)}_b (X_{3k} - X_{3k-1})$ - Matriz de Rigidez de Membrana;
- ☑ $B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \overline{(Q_{ij}^k)}_b (X_{3k}^2 - X_{3k-1}^2)$ - Matriz de Rigidez de Acoplamento N-M;
- ☑ $D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \overline{(Q_{ij}^k)}_b (X_{3k}^3 - X_{3k-1}^3)$ - Matriz de Rigidez de Flexão/Torção;
- ☑ $G_{ij} = \frac{5}{4} \sum_{k=1}^N \overline{(Q_{ij}^k)}_s \left(X_{3k} - X_{3k-1} - \frac{4}{3} \frac{1}{h_{total}^2} (X_{3k}^3 - X_{3k-1}^3) \right)$ - Matriz de Rigidez ao Cisalhamento no Plano;
- ☑ $G_{Hij} = \frac{5}{4} \frac{1}{h_{total}^2} \sum_{k=1}^N \overline{(Q_{ij}^k)}_s (X_{3k}^2 - X_{3k-1}^2) * (X_{3k}^2 + X_{3k-1}^2 - \frac{h_{total}^2}{2})$ - Matriz de Rigidez Acoplamento Q-T
- ☑ $H_{ij} = \frac{5}{12} \sum_{k=1}^N \overline{(Q_{ij}^k)}_s \left(X_{3k}^3 - X_{3k-1}^3 - \frac{12}{5} \frac{1}{h_{total}^2} (X_{3k}^5 - X_{3k-1}^5) \right)$ - Matriz de Rigidez de Flexão/Torção.

A partir da resolução do sistema de equações, determinam-se as deformações e curvaturas do plano médio, que equilibram os esforços generalizados aplicados. Por conseguinte, calculam-se as tensões de cada lâmina no sistema local.

3.6 LAMINADOS INTELIGENTES E HIPÓTESES DE CAMPO ELÉTRICO UNIFORME

No caso de laminados contendo lâminas piezoelétricas, da mesma forma que para laminados compósitos sem camadas ativas, as características de todo o empilhamento podem ser obtidas a partir da integração ao longo da espessura dos diferentes esforços internos, tanto

mecânicos (tensões), quanto elétricos (deslocamentos elétricos). Utilizando a hipótese de que não há acoplamento entre os esforços solicitantes mecânicos e elétricos sobre um compósito inteligente, para os esforços mecânicos, tem-se, então, que as mesmas considerações e modelagens utilizadas na seção 3.5 podem ser utilizadas, bem como as matrizes supracitadas previamente calculadas.

O cálculo dos esforços solicitantes elétricos é feito analogamente aos esforços mecânicos, através da integração dos deslocamentos elétricos não-nulos ao longo da espessura do laminado. Da mesma forma como no caso mecânico, essa integração se torna uma soma discreta ao longo das diferentes lâminas, sendo que lâminas que não contenham material piezoelétrico contribuem de forma nula a essa somatória. Esse fato se traduz como uma hipótese simplificadora, uma vez que para isto ser verdadeiro, os efeitos de dielétrico das camadas puramente mecânicas devem ser desprezados.

Outra hipótese a ser feita diz respeito à orientação das matrizes de acoplamento piezoelétrico e dielétricas em relação às coordenadas globais do laminado. Diferentemente do caso mecânico, rotações dessas matrizes podem ser desprezadas. Como na prática, cada camada ativa deve conter um par próprio de eletrodos, devido às reduzidas eficiências dielétricas de camadas puramente estruturais, o campo elétrico uniaxial dos diferentes casos de transdutores na seção 3.2 encontra-se sempre com o mesmo alinhamento em relação às fibras piezoelétricas, independente da orientação da lâmina em relação ao laminado. Dessa forma, não é necessário a aplicação de rotação nas matrizes de acoplamento piezoelétrico (e) e dielétrica (d^e). Além disso, não há influência da teoria utilizada na descrição geométrica do laminado.

Ademais, conforme as Equações 3.7 e 3.8, devido às condições de contorno elétricas, essas matrizes são reduzidas a uma “matriz linha” contendo um único termo distinto no caso do tensor e_{ikl} , e um escalar no caso do tensor d^e . Dessa forma, os esforços elétricos generalizados podem ser obtidos através da integração dos deslocamentos elétricos e , correspondem ao fluxo de carga generalizado (medido em C/m). Tais esforços dependem apenas da distribuição do campo elétrico ao longo da espessura da lâmina.

Sobre as funções de ponderação que dão a distribuição dos campos elétricos em função da espessura do laminado, a hipótese de uniformidade do campo elétrico é utilizada pela maioria dos pesquisadores. No entanto, alguns pesquisadores como Nasser et al. (2008) e Deraemaeker et al. (2009) previram, a partir da utilização de análises via elementos finitos da

microestrutura de AFCs, a distribuição do campo elétrico em torno de fibras piezoelétricas quadradas e circulares para o problema de eletrodos interdigitados. Para o primeiro caso, os pesquisadores obtiveram uma distribuição linear do campo com a espessura. E, para o segundo caso, os pesquisadores observaram uma distribuição parabólica. Porém, argumentaram que, nos casos de pequenas dimensões entre os eletrodos e as fibras, a distribuição não-linear encontrada se assemelha a distribuição uniforme. Esse fato pode ser reforçado pelo gráfico da Figura 3.18, obtido por Nasser et al. (2008), no qual visivelmente se vê um grande platô uniforme na distribuição de campo elétrico ao longo da espessura.

Figura 3.18 – Distribuição de campo elétrico ao longo da espessura de uma lâmina piezoelétrica [NASSER, 2008]

Somado aos aspectos já comentados, há ainda a influência da distribuição de deformações mecânicas do transdutor sobre o campo elétrico devido ao efeito de acoplamento piezoelétrico (MARINKOVIĆ et al., 2007). Dada a Lei de Gauss para dielétricos pela Equação 3.40, como os campos elétricos gerados pelos eletrodos das camadas piezoelétricas são orientados na direção 3 e, as cargas livres existentes dentro do transdutor vão se concentrar nas interfaces fibra-matriz nas direções 1 e 2, tem-se que nesta direção não há carga livre dentro do volume considerado, dessa forma pode-se escrever a Equação 3.41.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial D_3}{\partial x_3} = 0 \quad (3.41)$$

Da Equação 3.37 pode-se explicitar D_3 em função das deformações e dos campos elétricos.

$$D_3 = e'_{31}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + d'_{33}E_3, \quad \frac{\partial D_3}{\partial X_3} = e'_{31} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial X_3} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial X_3} \right) + d'_{33} \frac{\partial E_3}{\partial X_3} = 0 \quad (3.42)$$

Utilizando a relação $E_3 = -\frac{\partial \varphi}{\partial X_3}$ decorrente da Lei de indução de Faraday e as condições de contorno da camada piezoeétrica, $\varphi(X_3 = \frac{h}{2}) = \Delta\varphi$, $\varphi(X_3 = -\frac{h}{2}) = 0$, obtém-se a Equação 3.43.

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial X_3^2} = \frac{e'_{31}}{d'_{33}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial X_3} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial X_3} \right), \quad E_3 = -X_3 \frac{e'_{31}}{d'_{33}} \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial X_3} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial X_3} \right) - \frac{\Delta\varphi}{h} \quad (3.43)$$

Conclui-se, portanto, que o campo pode ser descrito a partir do potencial elétrico sobre os eletrodos e, a partir de derivadas das deformações de membrana. Esse último fato pode ser explicado pela redução da espessura proveniente do efeito de Poisson (DAMJANOVIC, 2006; LEE, 2006).

O termo $X_3 e'_{31}/d'_{33}$ para as dimensões e as propriedades típicas de um transdutor piezoelétrico tem valor máximo entre as ordens de grandeza 10^0 e 10^1 , podendo ser aproximado por “1” para efeito de análise qualitativa. O termo $\left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial X_3} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial X_3} \right)$ possui duas parcelas, sendo que uma é devido aos efeitos intralaminares causados pela distribuição de deformação normal ao longo da espessura. E, a outra parcela é devido aos efeitos interlaminares causados pela mudança de propriedades de membrana entre duas camadas consecutivas em função da mudança de orientação das fibras. Intralaminarmente, esse termo é pequeno, pois as camadas piezoelétricas são finas. Interlaminarmente esse termo cresce dependendo da diferença entre as propriedades de membrana das camadas consecutivas. No entanto, são efeitos pontuais ao longo da espessura que pouco afetam o valor integral do cálculo, sendo seu efeito total desprezível. Esses fatos podem ser vistos na Figura 3.19 que mostra uma distribuição de distorções transversais comumente vistas num material compósito e sua derivada. Pode se observar que os efeitos intralaminares são pequenos, da ordem de 10^{-4} a 10^{-5} , enquanto os efeitos interlaminares (evidenciados pelos círculos vermelhos) são pontuais.

Figura 3.19 – Distribuição típica de distorções transversais ao longo da espessura de um laminado e suas derivadas

Dessa forma, o $\left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial X_3} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial X_3}\right)$ pode ser desprezado em relação ao termo $\Delta\varphi/h$, retomando a expressão de campo uniforme dada pela Equação 3.44.

$$E_3 = -\frac{\Delta\varphi}{h} \quad (3.44)$$

De forma análoga, para os eletrodos interdigitados cruzados, chega-se a expressão mostrada na Equação 3.45.

$$E_1 = -X_3 \frac{e_{15}}{d_{11}} \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial X_1} - \frac{\Delta\varphi}{h} \cong -\frac{\Delta\varphi}{h} \quad (3.45)$$

Da mesma forma que para o caso com eletrodos simétricos, o termo $X_1 \frac{e_{15}}{d_{11}} \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial X_1}$ possui um cálculo complexo. Porém, diferente do caso simétrico, esse termo não necessariamente é desprezível em relação à $\Delta\varphi/h$, sendo primariamente dependente das dimensões do transdutor em relação à espessura e à distribuição de distorção transversal sobre o laminado. Num modelo de elementos finitos, esse termo remete à dimensão do elemento em relação ao restante da estrutura e sua posição em relação a pontos de concentração de tensão. Como, geralmente a discretização em elementos finitos é feita de tal maneira que a variação das grandezas de cálculo sobre o elemento não seja grande, o termo $X_1 e_{15}/d_{11}$, como no caso anterior, volta a ser próximo de “1”, e a magnitude do termo $\partial \varepsilon_{13}/\partial X_1$ costuma ser pequena. Além disso, o termo total ainda pode ser desprezado por razões de precisão de cálculo. Para o cálculo preciso dos termos da derivada das deformações, uma interpolação de ordem cúbica ou maior é necessária. Porém, uma malha com elementos de alta interpolação geraria

elementos com grandes dimensões, que acarretariam numa maior mudança das deformações calculadas ao longo do elemento, aumentando a significância dos termos $X_1 e_{15}/d_{11}$ e $\partial \varepsilon_{13}/\partial X_1$. Ademais, elementos com altas ordens de interpolação possuem um alto custo computacional. Dessa forma, o cálculo preciso das derivadas das deformações acarretaria numa maior significância desses termos, sendo que para motivos de eficiência computacional, o mais prático seria utilizar elementos com interpolações de ordens inferiores, e desprezar o termo extra.

Dessa maneira, tomando os campos elétricos no interior de cada camada piezoelétrica de um laminado como uniformes, obtêm-se as constantes piezoelétricas e dielétricas para o laminado, mostradas nas Equações 3.46 a 3.49.

$$e_{15\text{laminado}} = \sum_{k=1}^N e_{15_k} (X_{3_k} - X_{3_{k-1}}) \quad (3.46)$$

$$e'_{31\text{laminado}} = \sum_{k=1}^N e'_{31_k} (X_{3_k} - X_{3_{k-1}}) \quad (3.47)$$

$$d_{11\text{laminado}} = \sum_{k=1}^N d_{11_k} (X_{3_k} - X_{3_{k-1}}) \quad (3.48)$$

$$d'_{33\text{laminado}} = \sum_{k=1}^N d'_{33_k} (X_{3_k} - X_{3_{k-1}}) \quad (3.49)$$

Após toda essa apresentação detalhada dos vários tipos de teoria para a simulação adequada não somente de compósitos puramente estruturais, mas também de compósitos inteligentes, tem-se no próximo capítulo toda metodologia científica que foi utilizada para desenvolver, implementar e avaliar um novo elemento finito.

4 METODOLOGIA: FORMULAÇÃO, IMPLEMENTAÇÃO E AVALIAÇÃO DO ELEMENTO FINITO

A metodologia adotada no presente trabalho consistiu de três fases distintas, e sua organização nessas diferentes fases pode ser resumida pelo fluxograma mostrado Figura 4.1. A primeira fase (Fase 1 – Figura 4.1) consistiu na escolha e implementação computacional de uma formulação de elementos finitos para compósitos inteligentes, dentre as diversas encontradas na literatura. Paralelamente a esse trabalho, na segunda fase (Fase 2 – Figura 4.1), procurou-se também catalogar resultados da literatura para gerar estudos de caso capazes de avaliar o elemento implementado. Com esse objetivo em vista, também foram desenvolvidos ensaios experimentais realizados junto ao Grupo de Estruturas Aeronáuticas (GEA/EESC), mais especificamente, em conjunto com o doutorando Ricardo de Medeiros (Medeiros, 2012). Em sequência, uma terceira fase (Fase 3 – Figura 4.1) de avaliação e atualização da formulação implementada, utilizando os resultados coletados, foi realizada. Por fim, estudos de caso para aplicação final da formulação computacional implementada foram realizados.

Figura 4.1 – Metodologia adotada

A Fase 1 consistiu de cinco diferentes etapas: 1.Revisão Bibliográfica; 2.Análise das formulações encontradas na literatura e escolha da formulação a ser implementada; 3.Implementação da formulação num código *stand-alone* (Python); 4.Implementação da formulação em sub-rotina UEL (Fortran); 5.Verificação dos códigos implementados. A primeira etapa consistiu em se buscar na literatura os trabalhos mais relevantes e atuais sobre modelagem e formulações de elementos finitos para compósitos inteligentes. De posse desses trabalhos, na segunda etapa, uma análise criteriosa de seu conteúdo foi realizada e, uma formulação, dentre as diversas encontradas foi escolhida, baseada nos objetivos de eficiência computacional e nas limitações das diferentes teorias, elucidadas por seus autores, bem como nas potencialidades das ferramentas computacionais utilizadas para sua implementação. Nessa etapa, foi escolhida a formulação de Marinković et al. (2007), baseada na Teoria de Cisalhamento de Primeira Ordem, adaptada para compósitos ativos. Numa terceira etapa, um programa *stand-alone* de elementos finitos foi desenvolvido em linguagem Python. Embora o objetivo do presente trabalho seja a implementação da formulação em uma sub-rotina do usuário do *software* Abaqus chamada UEL, a terceira etapa foi necessária devido a limitações na verificação, *debug* e compilação das sub-rotinas de usuário do *software* Abaqus. De posse do *software* em Python, a verificação do elemento implementado (quinta etapa) foi possível através da comparação de diferentes grandezas, tais como: matriz de massa, matriz de rigidez e matrizes constitutivas de material. Tais matrizes foram obtidas de análises contendo um único elemento finito sem cargas aplicadas ou condições de contorno. Além disso, a comparação dos resultados obtidos entre o programa em Python e a UEL para com um resultado analítico encontrado na literatura será detalhada na Seção 5.1 – Capítulo 5.

A Fase 2 consistiu em três etapas: 1.Compilação de resultados obtidos da literatura, desenvolvimento de ensaios experimentais a serem realizados pelo GEA e acompanhamento desses experimentos; 2.Análise dos resultados obtidos, 3.Compilação dos resultados obtidos. A primeira etapa consistiu na indexação e escolha de resultados provenientes da revisão bibliográfica, que seriam pertinentes para a avaliação do elemento finito implementado, bem como no desenvolvimento junto ao GEA de ensaios experimentais próprios para o mesmo fim. A segunda etapa consistiu na análise dos resultados da literatura e dos resultados experimentais obtidos pelo GEA, bem como seu tratamento numérico para resultar numa forma que proporcionasse fácil comparação com as análises realizadas via UEL. A terceira etapa consistiu numa segunda e mais criteriosa seleção desses resultados e, sua compilação.

A Fase 3 consistiu de seis etapas: 1. Análises computacionais dos resultados obtidos; 2. Análise das potencialidades e limitações do elemento; 3. Avaliação das características do elemento; 4. Atualização da revisão bibliográfica; 5. Alteração da formulação matemática implementada; 6. Estudos de caso de aplicação em SHM. A primeira etapa dessa fase consistiu na realização de simulações numéricas que retratassem os testes, problemas e experimentos compilados na Fase 2, utilizando a formulação implementada via UEL. De posse dos dados coletados e simulações numéricas realizadas, a segunda etapa consistiu em avaliações sobre as limitações do elemento finito implementado. Numa terceira etapa, discutiu-se se as características encontradas para o elemento eram satisfatórias, em especial suas limitações. Durante essa etapa decidiu-se que algumas das limitações encontradas para o elemento deveriam ser corrigidas. Dentre essas, destaca-se problemas encontrados na resolução de algumas das análises devido ao grau de liberdade espúrio contido na formulação e, nos modelos constitutivos utilizados para as camadas piezoelétricas. Assim, durante uma quarta etapa, uma nova e mais criteriosa revisão bibliográfica foi realizada, de modo a tratar os problemas encontrados, abordando pontos específicos da formulação. Em seguida, na quinta etapa, a formulação inicialmente utilizada foi alterada, empregando dados advindos da experiência obtida pelo presente autor ao longo do desenvolvimento do trabalho e da revisão bibliográfica atualizada. Em particular, as mudanças mais críticas realizadas foram:

- ☑ Modificação das hipóteses cinemáticas de Reissner-Mindlin advindas da Teoria de Cisalhamento de Primeira Ordem para descrição geométrica tridimensional de casca degenerada de Zienkiewicz e Taylor (2002), introduzindo as parcelas lineares na espessura para as deformações de cisalhamentos transversal. Em sendo assim, momentos torçores foram aplicados como esforços solicitantes no laminado;
- ☑ A inserção do termo de energia de cisalhamento virtual, segundo o trabalho de Neto et al. (2012) para a solução do problema do grau de liberdade espúrio;
- ☑ A modificação da Teoria Clássica de Laminados para uma Teoria de Laminados Estendida (QATU, 2004) adaptada;
- ☑ A modificação das condições de contorno e relações eletromagnéticas utilizadas por Marinković et al. (2007), através de alterações propostas pelo próprio autor com base nos trabalhos de Azzouz et al. (2001), Chopra (2002), Nasser et al. (2008) e Deraemaeker et al. (2009);
- ☑ A implementação de uma formulação não-linear geométrica para o elemento utilizando as deformações de von Karman (SARTORATO et al., 2012)

Por fim, na sexta etapa, após obter-se um elemento mais completo, tem-se que suas limitações e potencialidades foram enumeradas e, um estudo de caso foi realizado visando a aplicação da formulação proposta em um problema de SHM.

4.1 FORMULAÇÃO

Nesse item do trabalho a formulação para o elemento finito implementado é descrita detalhadamente, bem como algumas das escolhas feitas durante o processo de desenvolvimento do referido elemento. Para melhor organização da presente seção, a mesma será dividida em: Discretização dos graus de liberdade, deformações e campos elétricos, Formulação do elemento finito e Integração reduzida.

4.1.1 Descrição e Discretização dos Graus de Liberdade, Deformações e Campos Elétricos – Caso Linear

Inicialmente, um elemento retangular com funções de interpolação lineares de quatro nós foi cogitado. No entanto, durante a primeira revisão bibliográfica, esse modelo foi rapidamente descartado, visto que a quase totalidade dos trabalhos encontrados na literatura dissertam sobre o fato de que, devido ao acoplamento piezoelétrico na forma E ser descrito com base nas deformações, sua distribuição sobre um dado elemento deve ser suficientemente suave e precisa. Como a Teoria das Cascas Degeneradas de Zienkiewicz gera elementos do tipo C^0 , funções de interpolação lineares produzem campos de deformação constantes sobre o domínio do elemento, acarretando em imprecisões na descrição elétrica do problema. Dessa forma, optou-se pela implementação de um elemento retangular com funções de interpolação quadráticas, que geram uma distribuição de deformações sobre o domínio do elemento linear. Assim, o modelo implementado foi escolhido como um elemento finito retangular, contendo oito nós e seis graus de liberdade por nó: três de translação (u_1 , u_2 , u_3), dois de rotação (θ_1 , θ_2) e um elétrico (ϕ).

Para as funções de interpolação foram escolhidas as funções quadráticas de Lagrange da família *serendipity*, listadas nas Equações 4.1 a 4.8. A interpolação dos graus de liberdade

mecânicos e elétricos utiliza as mesmas funções de forma. Embora alguns trabalhos afirmem que as funções de forma para os graus de liberdade (gdl) elétricos não necessitem ser da mesma ordem das funções de forma para os gdl mecânicos, devido à necessidade de uma menor precisão (FARIA, 2006), a utilização das mesmas funções, além de facilitar o trabalho e a implementação computacional, facilita a aplicação de condições de contorno elétricas de continuidade de potencial elétrico sobre os eletrodos. Portanto, pode-se obter, assim, as coordenadas dos nós e graus de liberdade discretizados no sistema de coordenadas isoparamétrico segundo as Equações 4.9 a 4.12, nas quais os índices subscritos dizem respeito a componente da grandeza, enquanto os índices sobrescritos dizem respeito ao nó ao qual pertencem. Sendo os índices definidos para os domínios: $i=1..3$, $j=1..2$, $n=1..8$.

$$\phi_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) - \frac{1}{4}(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2) - \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2^2) \quad (4.1)$$

$$\phi_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2) - \frac{1}{4}(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2) - \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2^2) \quad (4.2)$$

$$\phi_3(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) - \frac{1}{4}(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2) - \frac{1}{4}(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2) \quad (4.3)$$

$$\phi_4(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2) - \frac{1}{4}(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2) - \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2^2) \quad (4.4)$$

$$\phi_5(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2) \quad (4.5)$$

$$\phi_6(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2^2) \quad (4.6)$$

$$\phi_7(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2) \quad (4.7)$$

$$\phi_8(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2^2) \quad (4.8)$$

$$X_i^{\text{mid}} = X_i^n \phi_n \quad (4.9)$$

$$u_i = u_i^n \phi_n \quad (4.10)$$

$$\theta_j = \theta_j^n \phi_n \quad (4.11)$$

$$\varphi = \varphi^n \phi_n \quad (4.12)$$

Utilizando a teoria de cascas degeneradas descrita anteriormente na Seção 3.4 (Capítulo 3), e as discretizações apresentadas nas Equações 4.1 a 4.12 é possível definir os vetores normais à superfície média do elemento para cada nó, e vetores ortogonais, dados pela Equação 4.13.

$$N_i^n = \frac{\epsilon_{ijk} X_j^m X_k^l \phi_{m,1}(\xi_1^n, \xi_2^n) \phi_{l,2}(\xi_1^n, \xi_2^n)}{\sqrt{(N_1^n)^2 + (N_2^n)^2 + (N_3^n)^2}}, \quad T_2^n = \begin{cases} \epsilon_{1jk} N_j^n \delta_{1k}, & \text{se } N_1^n < \cos(0.1) \\ \epsilon_{1jk} N_j^n \delta_{3k}, & \text{se } N_1^n < \cos(0.1) \end{cases}, \quad T_1^n = \epsilon_{2jk} N_j^n \delta_{2k},$$

$$i, j, k = 1..3, \quad m, n, l = 1..8 \quad (4.13)$$

De posse dos vetores normal e tangentes a casca nos nós, é possível definir as matrizes de mudança de coordenada do sistema global para o local (T^n - Equação 4.14), coordenadas discretas da casca (Equação 4.15), as matrizes jacobiana de transformação de coordenadas do sistema isoparamétrico para o sistema global (J – Equação 4.16), bem como do sistema local para o isoparamétrico ($J^{-1}T^n$ – Equação 4.17). Essas diferentes matrizes estão esquematizadas na Figura 4.2.

$$T_i^n = \begin{Bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ N^n \end{Bmatrix}, \quad H_l^n = \begin{Bmatrix} -T_2^n \\ T_1^n \end{Bmatrix}^T \quad (4.14)$$

$$X_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = X_i^{mid}(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \frac{h(\xi_1, \xi_2)}{2} N(\xi_1, \xi_2) = X_i^n \phi_n + \xi_3 \frac{h_n}{2} N_i^n \quad (4.15)$$

Figura 4.2 – Sistemas de coordenadas, matrizes de transformação e suas relações

$$J_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial \xi_j} = X_i^n \phi_{i,j}^n + \delta_{i3} \delta_{3j} \frac{h_n}{2}, \quad J^{-1} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial X} \right)^{-1} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial S_j} = \frac{\partial \xi_i}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial S_j} = J_{ik}^{-1} T_{kj} \quad (4.17)$$

onde $i = 1..3, j = 1..3, k = 1..3, m = 1..8, n = 1..8$. Baseando-se nas definições supracitadas, pode-se escrever o vetor de deslocamentos discretizados, segundo a Equação 4.18, na qual $i = 1..3, j = 1..2, n = 1..8$.

$$u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_n(\xi_1, \xi_2) u_i^n + \xi_3 \frac{h_n}{2} \phi_n(\xi_1, \xi_2) H_{ij}^n \theta_j^n \quad (4.18)$$

Dada a descrição dos deslocamentos nodais discretizados, é possível calcular as deformações baseadas nos deslocamentos nodais, segundo a Equação 4.19. Utilizando a

aproximação de pequenos deslocamentos, o tensor das derivadas é dado pelo tensor gradiente simétrico dos deslocamentos. Porém, como as equações constitutivas apresentadas nas seções 3.4 e 3.5 (Capítulo 3), encontram-se no sistema local de coordenadas, é estratégico que as tensões e deformações sejam calculadas nessa orientação, pois nela $\sigma_{33} = 0$ e as grandezas mecânicas transversais ao plano são independentes das grandezas mensuradas no plano. Dessa forma, as deformações devem ser calculadas através do gradiente simétrico dos deslocamentos no sistema local. Sendo assim, as deformações podem ser calculadas utilizando a Equação 4.20, na qual $i=1..3, j=1..3, k=1..3, l=1..3, m=1..2, n=1..8$.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial S_j} + \frac{\partial u_j}{\partial S_i} \right) \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial S_j} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial S_j} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} J_{il}^{-1} T_{lj} = \left(u_i^n \Phi_{n,k} + \xi_3 \frac{h_n}{2} H_{im}^n \theta_m^n \Phi_{n,k} + \delta_{3k} \frac{h_n}{2} H_{im}^n \theta_m^n \Phi_n \right) J_{il}^{-1} T_{lj}^n \quad (4.20)$$

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \\ - \\ u_{2,3} + u_{3,2} \\ u_{1,3} + u_{3,1} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} B_{m_0}^u + B_{m_0}^\theta + \xi_3 B_{m_1}^\theta \\ B_{t_0}^u + B_{t_0}^\theta + \xi_3 B_{t_1}^\theta \end{pmatrix} \hat{u} = (B_0 + \xi_3 B_1) \hat{u} \quad (4.21)$$

Utilizando a notação de Voigt e as propriedades de simetria do tensor de deformações, pode-se organizá-la de forma vetorial, segundo a Equação 4.21. Para uma simplificação da implementação da formulação em elementos finitos, introduz-se o vetor dos graus de liberdade mecânicos contidos no elemento finito $\hat{u}$. Separando os termos da Equação 4.20 nos termos relativos às deformações de membrana e transversais ao plano, dependentes das translações ou rotações, de maneira uniforme ou linear, pode-se introduzir as diferentes matrizes B . Essas matrizes descrevem a discretização das deformações em cada grau de liberdade mecânico e são descritas pelas Equações 4.22 a 4.36.

Dessa maneira tem-se: as matrizes constituintes das deformações de membrana $B_{m_0}^u$, $B_{m_0}^\theta$ e $B_{m_1}^\theta$ e as matrizes constituintes das deformações transversais $B_{t_0}^u$, $B_{t_0}^\theta$ e $B_{t_1}^\theta$. O subscrito m indica que são matrizes correspondentes a efeitos de membrana; o sobrescrito t indica que são matrizes correspondentes a efeitos transversais ao plano; o subscrito 0 indica termos independentes; o subscrito 1 indica termos multiplicados por ξ_3 ; o sobrescrito u

indica matrizes que contém termos não nulos que multiplicam os deslocamentos; e o sobrescrito θ indica matrizes que contém termos não nulos que multiplicam as rotações.

$$B_{m_0(1,5(n-1)+j)}^u = \phi_{n,k} J_{11}^{-1n} T_{11}^n \quad (4.22)$$

$$B_{m_0(2,5(n-1)+j)}^u = \phi_{n,k} J_{21}^{-1n} T_{12}^n \quad (4.23)$$

$$B_{m_0(3,5(n-1)+j)}^u = \phi_{n,k} (J_{21}^{-1n} T_{11}^n + J_{11}^{-1n} T_{12}^n) \quad (4.24)$$

$$B_{m_0(1,5(n-1)+j)}^\theta = \delta_{3k} \frac{h_n}{2} \phi_n H_{1m}^n J_{11}^{-1n} T_{11}^n \quad (4.25)$$

$$B_{m_0(2,5(n-1)+j)}^\theta = \delta_{3k} \frac{h_n}{2} \phi_n H_{2m}^n J_{21}^{-1n} T_{12}^n \quad (4.26)$$

$$B_{m_0(3,5(n-1)+j)}^\theta = \delta_{3k} \frac{h_n}{2} \phi_n (H_{1m}^n J_{11}^{-1n} T_{12}^n + H_{2m}^n J_{21}^{-1n} T_{11}^n) \quad (4.27)$$

$$B_{m_1(1,5(n-1)+j)}^\theta = \frac{h_n}{2} \phi_{n,k} H_{1m}^n J_{11}^{-1n} T_{11}^n \quad (4.28)$$

$$B_{m_1(2,5(n-1)+j)}^\theta = \frac{h_n}{2} \phi_{n,k} H_{2m}^n J_{21}^{-1n} T_{12}^n \quad (4.29)$$

$$B_{m_1(3,5(n-1)+j)}^\theta = \frac{h_n}{2} \phi_{n,k} (H_{2m}^n J_{21}^{-1n} T_{11}^n + H_{1m}^n J_{11}^{-1n} T_{12}^n) \quad (4.30)$$

$$B_{t_0(1,5(n-1)+j)}^u = \phi_{n,k} (J_{21}^{-1n} T_{13}^n + J_{31}^{-1n} T_{12}^n) \quad (4.31)$$

$$B_{t_0(2,5(n-1)+j)}^u = \phi_{n,k} (J_{11}^{-1n} T_{13}^n + J_{31}^{-1n} T_{11}^n) \quad (4.32)$$

$$B_{t_0(1,5(n-1)+j)}^\theta = \delta_{3k} \frac{h_n}{2} \phi_n (H_{2m}^n J_{21}^{-1n} T_{13}^n + H_{3m}^n J_{31}^{-1n} T_{12}^n) \quad (4.33)$$

$$B_{t_0(2,5(n-1)+j)}^\theta = \delta_{3k} \frac{h_n}{2} \phi_n (H_{1m}^n J_{11}^{-1n} T_{13}^n + H_{3m}^n J_{31}^{-1n} T_{11}^n) \quad (4.34)$$

$$B_{t_1(1,5(n-1)+j)}^\theta = \frac{h_n}{2} \phi_{n,k} (H_{2m}^n J_{21}^{-1n} T_{13}^n + H_{3m}^n J_{31}^{-1n} T_{12}^n) \quad (4.35)$$

$$B_{t_1(2,5(n-1)+j)}^\theta = \frac{h_n}{2} \phi_{n,k} (H_{1m}^n J_{11}^{-1n} T_{13}^n + H_{3m}^n J_{31}^{-1n} T_{11}^n) \quad (4.36)$$

Uma simplificação desse sistema pode ser feita utilizando as matrizes B_0 e B_1 dadas pelas Equações 4.37 e 4.38.

$$B_0 = \begin{Bmatrix} B_{m_0}^u + B_{m_0}^\theta \\ B_{t_0}^u + B_{t_0}^\theta \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

$$B_1 = \begin{Bmatrix} B_{m_1}^\theta \\ B_{t_1}^\theta \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

O vetor $\hat{u}$ denota o vetor de todos os graus de liberdade mecânicos e, pode ser escrito segundo a Equação 4.39, na qual as matrizes H_0 e H_1 são dadas pelas Equações 4.40 e 4.41. Nessas equações, tem-se os domínios $i=1..3, j=1..3, k=1..3, l=1..3, m=1..2, n=1..8$.

$$u_{5(n-1)+i} = H_{0,i,5(n-1)+j} u_j^n + \xi_3 H_{1,i,5(n-1)+m} \theta_m \quad (4.39)$$

$$H_{0,i,5(n-1)+j} = \delta_{ij} \phi_n \quad (4.40)$$

$$H_{1,i,5(n-1)+j} = \delta_{(i,j+3)} \frac{h_n}{2} \phi_n H_{ij}^n \quad (4.41)$$

Da mesma forma, utilizando a discretização das diferenças de potencial elétricos nodais, mostrada na Equação 4.12, juntamente com a equação de campo uniforme, mostrada na seção 3.6, pode-se escrever o campo em função das diferenças de potencial elétrico segundo a Equação 4.42, na qual $\hat{\phi}$ denota o vetor dos potenciais nodais, sendo que B_ϕ possui dimensão 8×8 e é dada pela Equação 4.43.

$$E = B_\phi \hat{\phi} \quad (4.42)$$

$$B_{\phi ij} = -\delta_{ij} \frac{1}{h^i} \quad (4.43)$$

Por fim, para simplificação da formulação em elementos finitos, as matrizes auxiliares B_u^m , B_u^t e $B_{u\phi}$ são definidas segundo as definições encontradas na Equação 4.44. A forma matricial explícita de todas as matrizes B e H está descrita no Anexo 3.

$$B_u^m = \begin{bmatrix} B_{m_0}^u + B_{m_0}^\theta \\ B_{m_1}^\theta \end{bmatrix}, \quad B_u^t = \begin{bmatrix} B_{t_0}^u + B_{t_0}^\theta \\ B_{t_1}^\theta \end{bmatrix}, \quad B_{u\phi} = \begin{bmatrix} B_{m_0}^u \\ B_{m_1}^\theta \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

4.1.1 Descrição e Discretização das Deformações – Caso Não-Linear

Uma das formas de introduzir o problema não linear geométrico em formulações de cascas é através da utilização das deformações de von Karman ao invés das deformações de

engenharia. As deformações de von Karman utilizam os termos não lineares das deformações de Green mais significativos no contexto das teorias de cascas laminadas, considerando o caso de pequenas deformações, porém com rotações elevadas, entre 10° e 20°. Dessa forma, são desprezados os termos de Green relacionados aos graus de liberdade planares (u_1 e u_2), pois são referentes a deformações relacionadas a grandes translações. Além disso, vale notar que, na teoria descrita, o termo $u_{3,3}$ é nulo.

Dessa forma, o vetor de deformações contido na Equação 4.21 é expandido para o vetor da Equação 4.45. Da mesma forma como na seção anterior, esse vetor pode ser escrito explicitamente a partir dos deslocamentos com a introdução das diferentes matrizes B calculadas nas Equações 4.22 a 4.46. Porém, neste caso, contendo uma parcela de relações não-lineares nos deslocamentos calculados no último passo de carga $\hat{u}_u|_t$ e $\hat{u}_\theta|_t$ (4.46). Assim, as matrizes B_0 e B_1 passam a ser dadas pelas Equações 4.47 e 4.48.

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \\ - \\ u_{2,3} + u_{3,2} \\ u_{1,3} + u_{3,1} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_{3,1}^2 \\ u_{3,2}^2 \\ u_{3,2}u_{3,1} \\ - \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.45)$$

$$\varepsilon = \left[\begin{pmatrix} B_{m_0}^u + B_{m_0}^\theta + \xi_3 B_{m_1}^\theta \\ B_{t_0}^u + B_{t_0}^\theta + \xi_3 B_{t_1}^\theta \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} B_{m_0}^u \hat{u}_u|_t B_{m_0}^u + B_{m_0}^\theta \hat{u}_\theta|_t B_{m_0}^\theta + \xi_3 (B_{m_0}^u \hat{u}_u|_t B_{m_1}^\theta + B_{m_1}^\theta \hat{u}_\theta|_t B_{m_0}^u) \\ 0 \end{pmatrix} \right] \hat{u} \quad (4.46)$$

$$B_0 = \begin{Bmatrix} B_{m_0}^u + B_{m_0}^\theta + \frac{1}{2} (B_{m_0}^u \hat{u}_u|_t B_{m_0}^u + B_{m_0}^\theta \hat{u}_\theta|_t B_{m_0}^\theta) \\ B_{t_0}^u + B_{t_0}^\theta \end{Bmatrix} \quad (4.47)$$

$$B_1 = \begin{Bmatrix} B_{m_1}^\theta + \frac{1}{2} (B_{m_0}^u \hat{u}_u|_t B_{m_1}^\theta + B_{m_1}^\theta \hat{u}_\theta|_t B_{m_0}^u) \\ B_{t_1}^\theta \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

4.1.2 Formulação via Método dos Elementos Finitos

De acordo com o Princípio da Mínima Energia Potencial, o equilíbrio de um sistema é obtido quando a derivada de sua energia potencial total com respeito ao vetor contendo todos os graus de liberdade existentes no sistema (y) for nula. Para um sistema contido no domínio Ω contendo n graus de liberdade, portanto, tem-se a Equação 4.49. Porém, discretizando o sistema em m elementos, pode-se supor que a energia potencial total do sistema é igual à soma da energia potencial de cada elemento. Dessa forma, a Equação 4.49 pode ser reescrita como a Equação 4.50. Como a energia potencial de cada elemento depende apenas de seus próprios graus de liberdade, é possível realizar os cálculos para apenas um elemento e montar assim, o vetor global de derivadas do potencial energético posteriormente.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y^n} = 0, \quad \forall n \in \Omega \quad (4.49)$$

$$\Pi = \sum_1^m \Pi_m \Rightarrow \frac{\partial \Pi_m}{\partial y_n} = 0, \quad \forall n, m \in \Omega \quad (4.50)$$

Em sendo assim, como é necessário apenas calcular as grandezas elementares, então, somente o problema elementar será considerado. Para isso, inicia-se o cálculo a partir da descrição da energia total Π sobre um único elemento, dado pela Equação 4.51:

$$\Pi = U + K + P + Q \quad (4.51)$$

onde: U equivale à energia potencial total, incluindo as parcelas mecânicas e eletromagnéticas; K equivale à energia cinética; P equivale ao trabalho dos esforços externos, incluindo as forças e momentos mecânicos, bem como as mudanças no potencial elétrico e cargas externas; e Q equivale ao trabalho das forças internas não conservativas atuando no sistema.

Pelo Princípio da Estacionariedade, o sistema elementar entra em equilíbrio quando o variacional da energia total é igual a zero, conforme a Equação 4.52.

$$\delta \Pi = \delta U + \delta K + \delta P + \delta Q = 0 \quad (4.52)$$

No caso de um sistema com acoplamento piezoelétrico, diferentemente dos sistemas clássicos puramente mecânicos, o variacional da energia potencial interna elementar δU pode ser descrito pela integração no domínio do elemento Ω do variacional da entalpia eletromecânica específica δh (também chamada de energia piezelétrica de Gibbs), conforme a Equação 4.53 (IKEDA, 1996). Utilizando as relações constitutivas para lâmina de material piezoelétrico mostradas na seção 3.1 (Capítulo 3) ou ortotrópico mostradas na seção 3.5 (Capítulo 3) pode-se escrever a Equação 4.54.

$$\delta U = \int_{\Omega} \delta h d\Omega, \quad \delta h = \frac{1}{2} (\delta \varepsilon : \sigma - \delta E \cdot D) \quad (4.53)$$

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta \varepsilon : C^E \varepsilon - \delta \varepsilon : e^t E - \delta E : e \varepsilon - \delta E : d^e E d\Omega \quad (4.54)$$

A parcela de variação da energia cinética é dada por sua definição, que pode ser rearranjada através das Equações 4.55 e 4.56, e ser escrita em função de deslocamentos virtuais e acelerações reais, segundo a Equação 4.57.

$$K = \int_{\Omega} \frac{\rho}{2} \dot{u} \cdot \dot{u} d\Omega \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \int_{\Omega} \rho \frac{d\dot{u}}{dt} \cdot \dot{u} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot \dot{u} d\Omega \quad (4.55)$$

$$\delta K = \frac{dK}{dt} \delta t = \int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot \dot{u} \delta t d\Omega = \int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot \delta u d\Omega \quad (4.56)$$

$$\delta K = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \delta \dot{u} \cdot \dot{u} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \delta u \cdot \ddot{u} d\Omega \quad (4.57)$$

A parcela do trabalho dos esforços externos é dada pela Equação 4.58, onde b , t , q , F e Q são respectivamente forças de corpo, forças de superfície, potencial elétrico distribuído sobre a superfície, forças concentradas e potenciais elétricos concentrados (diferenças de potencial sobre os eletrodos). Sobre os potenciais elétricos distribuídos, esses são teoricamente inexistente devido à hipótese de continuidade do potencial elétrico sobre os eletrodos. Todavia, esses existem como um efeito secundário no caso de eletrodos interdigitados, conforme Nasser et al. (2008). Considerando que os únicos esforços não conservativos encontrados no sistema são provenientes de amortecimento mecânico e, utilizando um modelo de amortecimento viscoso, onde C indica a matriz elementar de amortecimento e a parcela δQ pode ser escrita como na Equação 4.59. Deve-se notar que outros esforços não conservativos que poderiam ser incluídos nessa parcela são efeitos viscoelásticos, capacitivos e de histerese mecânica ou elétrica.

$$\delta P = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma + \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} - \int_{\Gamma} \delta \varphi \cdot \mathbf{q} \, d\Gamma - \delta \varphi \cdot \mathbf{Q} \right) \quad (4.58)$$

$$\delta Q = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} : \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega \quad (4.59)$$

Desse modo, obtém-se a Equação 4.56, que descreve o equilíbrio elementar do elemento finito. Utilizando as relações para as deformações em relação aos deslocamentos nodais mostrados na seção 4.1.1, dados pela Equação 4.21, e as relações para os campos elétricos baseados em deslocamentos elétricos nodais, dados pela Equação 4.42. E, utilizando a notação de que $\hat{\mathbf{u}}$ e $\hat{\varphi}$ denotam os vetores nodais, obtém-se a Equação 4.57.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{u} : \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \delta \varepsilon : \mathbf{C}^E \varepsilon - \delta \varepsilon : \mathbf{e}^t \mathbf{E} - \delta \mathbf{E} : \mathbf{e} \varepsilon - \delta \mathbf{E} : \mathbf{d}^E \mathbf{E} \, d\Omega \\ = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma + \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} - \int_{\Gamma} \delta \varphi \cdot \mathbf{q} \, d\Gamma - \delta \varphi \cdot \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi = \int_{\Omega} \rho \delta \hat{\mathbf{u}}^t (\mathbf{H}_0^t + \xi_3 \mathbf{H}_1^t) \cdot (\mathbf{H}_0 + \xi_3 \mathbf{H}_1) \ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \delta \hat{\mathbf{u}}^t (\mathbf{H}_0^t + \xi_3 \mathbf{H}_1^t) : \mathbf{C} (\mathbf{H}_0 + \xi_3 \mathbf{H}_1) \dot{\hat{\mathbf{u}}} \\ + \delta \hat{\mathbf{u}}^t (\mathbf{B}_0^t + \xi_3 \mathbf{B}_1^t) : \mathbf{C}^E (\mathbf{B}_0 + \xi_3 \mathbf{B}_1) \hat{\mathbf{u}} - \delta \hat{\mathbf{u}}^t (\mathbf{B}_0^t + \xi_3 \mathbf{B}_1^t) : \mathbf{e}^t \mathbf{B}_{\varphi} \hat{\varphi} \\ - \delta \varphi^t \mathbf{B}_{\varphi} : \mathbf{e} (\mathbf{B}_0 + \xi_3 \mathbf{B}_1) \hat{\mathbf{u}} - \delta \varphi^t \mathbf{B}_{\varphi} : \mathbf{d}^E \mathbf{B}_{\varphi} \hat{\varphi} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \hat{\mathbf{u}}^t (\mathbf{H}_0^t + \xi_3 \mathbf{H}_1^t) \cdot \mathbf{b} \, d\Omega \\ - \int_{\Gamma} \delta \hat{\mathbf{u}}^t (\mathbf{H}_0^t + \xi_3 \mathbf{H}_1^t) \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma + \delta \hat{\mathbf{u}}^t (\mathbf{H}_0^t + \xi_3 \mathbf{H}_1^t) \cdot \mathbf{F} + \int_{\Gamma} \delta \varphi^t \mathbf{B}_{\varphi} \cdot \mathbf{q} \, d\Gamma + \delta \varphi^t \mathbf{B}_{\varphi} \\ \cdot \mathbf{Q} = 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

Sabe-se que a solução para a Equação 4.57, segundo o Lema Fundamental do Cálculo Variacional, existe apenas para deslocamentos compatíveis com um dado problema. Portanto, nos casos em que não há condições de contorno prescritas, ou seja, $\delta \hat{\mathbf{u}}$ e $\delta \hat{\varphi}$ são representações virtuais de variáveis do problema, pode-se escrever essa equação como o sistema de equações apresentado na Equação 4.58, sendo que um sistema é escrito em $\hat{\mathbf{u}}$ e, o outro, em $\hat{\varphi}$.

$$\begin{aligned} M\ddot{\hat{u}} + C\dot{\hat{u}} + K_{uu}\hat{u} + K_{u\varphi}\hat{\varphi} &= F \\ K_{\varphi u}\hat{u} + K_{\varphi\varphi}\hat{\varphi} &= Q \end{aligned} \quad (4.58)$$

Utilizando as relações cinemáticas e elétricas descritas nas Equações 4.21 e 4.42, as matrizes de rigidez do laminado ABBD-GH, e as matrizes de simplificação mostradas nas Equações 4.44, integrando no volume e utilizando quadratura de Gauss de ordem m , bem como empregando as constantes de amortecimento proporcional α e β (HE; FU, 2006), tem-se que as matrizes M , K_u , $K_{u\varphi}$, $K_{\varphi u}$ e $K_{\varphi\varphi}$ e C e os vetores F e Q podem ser obtidos, respectivamente, segundo as relações apresentadas nas Equações 4.59 a 4.66.

$$M = \sum_{i,j=1}^m \det(J^{-1}) w_i w_j \rho_i \left[\frac{h_{i+j}}{2} H_0^t H_0 + \frac{h_{i+j}^2}{4} (H_1^t H_0 + H_0^t H_1) + \frac{h_{i+j}^3}{12} H_1^t H_1 \right] \quad (4.59)$$

$$K_{uu} = \sum_{i,j=1}^m \det(J^{-1}) w_i w_j \left(B_u^{mt} \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} B_u^m + B_u^{tt} \begin{bmatrix} G & G_h \\ G_h & H \end{bmatrix} B_u^t \right) \quad (4.60)$$

$$K_{u\varphi} = \sum_{i,j=1}^m \det(J^{-1}) w_i w_j B_{u\varphi}^t e^t B_\varphi \quad (4.61)$$

$$K_{\varphi u} = \sum_{i,j=1}^m \det(J^{-1}) w_i w_j B_\varphi^t e B_{u\varphi} \quad (4.62)$$

$$K_{\varphi\varphi} = \sum_{i,j=1}^m \det(J^{-1}) w_i w_j B_\varphi^t d^e B_\varphi \quad (4.63)$$

$$C = aM + bK \quad (4.64)$$

$$F = \int_{\Omega} (H_0^t + \xi_3 H_1^t) b^k d\Omega + \int_{\Gamma} (H_0^t + \xi_3 H_1^t) t^k d\Gamma + \phi_k F_i^k \quad (4.65)$$

$$Q = - \int_{\Gamma} \frac{1}{h_i} q^i d\Gamma - B_\varphi^t \cdot Q \quad (4.66)$$

4.1.3 Integração Reduzida

Como descrito na seção 3.3, um dos problemas existentes nas formulações de elementos de casca que seguem uma Teoria de Cisalhamento de Primeira Ordem é o travamento por cisalhamento transversal (*shear locking*). Esse problema está vastamente documentado na literatura, existindo diversas soluções consideradas clássicas. Duas das soluções mais aceitas para remediar esse problema são: a utilização de integração reduzida; e as formulações mistas para o cálculo de deformações (BATHE, 1996).

A integração reduzida é uma técnica matemática aplicada quando as grandezas finais do elemento são obtidas através de integração via uma quadratura numérica. Nesse caso as parcelas da matriz de rigidez elementar provenientes dos termos de tensão e deformação transversais ao plano da casca (γ_{13} e γ_{23}) são “sub-integradas”, ou seja, são calculadas utilizando uma quadratura de ordem inferior aos outros termos. Essa mudança faz com que, nos casos onde há travamento numérico, por exemplo, as rigidezes provenientes dos efeitos transversais aumentam virtualmente, sua contribuição para o todo é diminuída. Já nos casos onde não há travamento, sua “sub-integração” não causa uma diferença significativa nos resultados de rigidez transversal, pois esses esforços são praticamente lineares ao longo da superfície do elemento. Dessa forma, a Equação 4.60 deve ser alterada para a Equação 4.63, de forma a ser “sub-integrada” nos termos transversais ao plano, evitando o travamento por cisalhamento transversal, caso o elemento implementado seja utilizado para simular materiais com espessura reduzida.

$$K_{uu} = \sum_{i,j=1}^m \det(J^{-1}) w_i w_j \left(B_u^{mt} \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} B_u^m \right) + \sum_{i,j=1}^{m-1} \det(J^{-1}) w_i w_j \left(B_u^{t^t} \begin{bmatrix} G & G_h \\ G_h & H \end{bmatrix} B_u^t \right) \quad (4.63)$$

Já a técnica de formulação mista para o cálculo das deformações, a energia potencial de deformação é calculada através de deformações computadas em pontos onde é conhecido que, matematicamente, os efeitos de travamento no elemento não são significativos, como nos pontos de Barlow (BATHE, 1996). Dessa forma, durante o cálculo das deformações, as matrizes B contidas nas Equações 4.22 a 4.36 são calculadas nos pontos de Barlow ao invés de serem calculadas nos nós. Isso pode ser visto na Figura 5.4, onde denotam-se os pontos utilizados para o cálculo das deformações em “X”, ao passo que os pontos de integração por

quadratura são dados por “ Δ ”, os nós por “O” e, finalmente, os pontos de integração reduzida representados por “ $\diamond$ ”.

Figura 4.3 – Pontos utilizados na integração do elemento finito: “O” nós; “X” pontos de cálculo das deformações na técnica mista; “ Δ ” pontos da quadratura de Gauss de segunda ordem; “ $\diamond$ ” pontos na quadratura de Gauss de primeira ordem

Ambas as técnicas foram aplicadas na implementação, e essas mostraram resultados semelhantes. Dessa forma, optou-se por seguir apenas com a integração reduzida, já que essa é menos custosa computacionalmente.

4.2 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O objetivo principal do presente trabalho correspondeu à implementação da formulação supracitada em sub-rotinas escritas em linguagem Fortran que foram compiladas juntas ao pacote comercial de elementos finitos Abaqus. Para tal procedimento, utilizou-se a ferramenta UEL (*User Element Subroutines*) disponível no programa Abaqus. Dentre as vantagens da utilização de uma sub-rotina vinculada a um pacote comercial de elementos finitos, ao invés do desenvolvimento de um programa próprio, destacam-se:

- ☑ A possibilidade de utilizar todas as funções de pré-processamento do Abaqus, incluindo seu gerador de malhas, seu *solver* otimizado, e seus algoritmos automáticos de subestruturação, proporcionando uma grande facilidade na modelagem de estruturas com geometrias complexas;

- ☑ A possibilidade de utilizar as funções de condição de contorno do Abaqus, incluindo: imposição de equações de movimento, condições de contato, condições de fixadores e de suportes hiperelásticos (como buchas e coxins poliméricos), entre outras;
- ☑ O acesso aos diversos elementos nativos, implementados na biblioteca do Abaqus®, incluindo elementos para análises com acoplamento térmico ou acoplamento acústico.

Por outro lado, a utilização da sub-rotina UEL acrescentou algumas limitações à escolha da formulação utilizada. Dentre as principais limitações apresentadas por uma implementação de elemento finito via UEL tem-se (DASSAULT SYSTÈMES SIMULIA, 2010B):

- ☑ A capacidade de utilizar somente elementos com formulação baseada em deslocamento, impossibilitando a implementação de formulações mistas como os elementos MITC (BATHE, 1996) ou a formulação apresentada por Kim e Reddy (2010);
- ☑ A quantidade máxima de graus de liberdade por nó ser finita (igual a 46 nas versões 6.9 e igual a 92 na versão 6.10), impossibilitando a implementação de elementos baseados em algumas teorias (como Teorias de Cisalhamento de Ordem Superior com Altas Ordens, ou Teorias Zig-Zag independentes).

Dessa maneira, as teorias de múltiplas camadas foram automaticamente descartadas, devido às limitações de número de graus de liberdade por nó. Essa limitação faz com que elementos para materiais laminados de oito nós com capacidade de acoplamento piezoelétrico, como o implementado, possam conter, no máximo, de 6 a 12 camadas, independente de condições de simetria do laminado. Essas limitações restringiram a capacidade do elemento de simular algumas condições reais, pois, é comum encontrar em projetos estruturais reais a existência de regiões com laminados contendo entre 20 e 40 camadas. Além disso, as diversas teorias de alta ordem encontradas na literatura foram também descartadas, devido ao objetivo de se formular um elemento com grande eficiência computacional.

Há ainda outros problemas encontrados, tais como: cuidados especiais a serem tomados com detalhes da implementação computacional, em especial para análises dinâmicas e análises no domínio da frequência e, bem como dificuldades nas etapas de programação da sub-rotina devido à inexistência de plataformas de verificação e *debug* dos códigos.

Dessa forma, a implementação se deu de maneira iterativa. Como comentado anteriormente, inicialmente um programa *stand alone* de elementos finitos codificado em Python foi desenvolvido, devido às dificuldades e limitações existentes para verificações do código em Fortran na sub-rotina UEL. Dessa forma, o programa em Python foi desenvolvido de tal maneira que o uso da UEL fosse emulado para os tipos de análises objetivadas. Dentre essas se destacam as análises estáticas direta e por *steps* de carga, as análises dinâmicas no tempo e no domínio da frequência e as análises modais.

Posteriormente, a partir do estudo de exemplos de sub-rotinas do tipo UEL encontradas na literatura (FEIH, 2005; GINER et al., 2008), somadas às informações contidas no manual do *software* Abaqus (DASSAULT SYSTÈMES SIMULIA, 2010B), a programação em linguagem Fortran via UEL foi iniciada. Previamente a implementação da formulação para o elemento finito proposto, foi necessária uma fase de familiarização com a estrutura básica da UEL, bem como um estudo aprofundado sobre o modelo de resolução do *solver* do Abaqus. Para isso, modelos clássicos de elementos finitos, com um nível crescente de complexidade, foram implementados no programa em Python e via UEL.

Esta estratégia visou à realização de testes e comparações com resultados do próprio Abaqus. Sendo assim, alguns exemplos foram pré-avaliados antes da implementação do elemento finito com camadas piezoelétricas. Dentre esses elementos, pode-se citar: elemento de barra bidimensional elástica; elemento de barra bidimensional não-linear elástica; elemento de placa e elemento de placa de material compósito laminado (somente com camadas estruturais).

Deve-se também salientar que a sub-rotina opera de maneira diferente para análises estáticas, dinâmicas transientes e dinâmicas no domínio da frequência. Vale ressaltar que um fluxograma em pseudocódigo da sub-rotina UEL, encontra-se no Anexo 3. Ademais, o organograma evidenciado pela Figura 4.4 resume o funcionamento e a integração entre o Abaqus e a sub-rotina UEL. Na Figura 4.4, tem-se que inicialmente o *software* lê o arquivo de entrada gerado manualmente, ou pelo módulo CAE (gerador de geometria e malhas do Abaqus). Do arquivo de entrada são obtidos dados de geometria do modelo (nós e elementos), propriedades de material e etc. Em seguida, as dimensões finais das matrizes de massa, rigidez e amortecimento são calculadas, bem como as matrizes de indexação global-local entre os diferentes elementos e algumas condições de contorno como simetrias, equivalências, subestruturação e redução de modelos. Para cada análise solicitada pelo arquivo de entrada, a

rotina de solução do Abaqus é inicializada. Essa rotina de solução se inicia com a construção do vetor de *flags* que indica para a UEL o tipo de solução solicitada e, as variáveis que devem ser calculadas no elemento. Posteriormente, as condições de contorno e carregamentos existentes nessa análise são interpretadas e armazenadas. Um laço sobre todos os elementos do modelo é criado e suas grandezas elementares são calculadas, através de códigos internos do Abaqus para elementos pré-implementados e para elementos do usuário via UEL. No caso de elementos via UEL, um laço interno da sub-rotina é chamado e, embora o usuário não tenha muito controle sobre esse, cálculos de equilíbrio elementar são realizados. Criadas as matrizes globais, o algoritmo de solução da análise é chamado. Por fim, as saídas são geradas.

Figura 4.4 – Fluxograma resumindo a interação entre o *solver* do Abaqus e a sub-rotina UEL

A implementação da sub-rotina UEL depende da análise desejada: estática, dinâmica transiente ou dinâmica no domínio da frequência. Porém, em todos os casos, a rotina deve calcular duas grandezas lagrangeanas baseadas nas coordenadas globais do sistema a partir de propriedades de material, coordenadas globais dos nós do elemento, resultados de deslocamento, velocidades e acelerações dos graus de liberdade para a última iteração realizada e, informações sobre o tempo de solução como passo atual e variação do tempo de solução na última iteração. Essas duas grandezas são dadas por:

- ☑ Uma matriz com o número de linhas igual ao número de graus de liberdade no elemento e duas colunas. Tal matriz é designada como RHS;
- ☑ Uma matriz quadrada com dimensão igual ao número de graus de liberdade no elemento, que é chamada AMATRX.

Ambas as matrizes podem admitir diferentes grandezas a depender do passo atual e, do tipo de análise requisitada ao Abaqus, sendo suas definições sumarizadas pela Tabela 4.1.

Por fim, algumas peculiaridades da implementação do elemento formulado via UEL existem. A primeira decorre da ordem dos graus de liberdade referente às matrizes RHS e AMATRX, que é sempre dada pela sequência de graus de liberdade de cada nó, seguida pelos nós. Dessa forma, a separação que normalmente é utilizada entre os graus de liberdade mecânicos e elétricos, não pode ser feita para UEL. Uma maneira simples de resolver esse problema é calcular as matrizes K_{uu} , $K_{u\phi}$, $K_{\phi u}$ e $K_{\phi\phi}$ como mostrado pelas seções 4.1.1 ou 4.1.2, a depender da linearidade geométrica do problema e então, reorganizar a matriz de modo que os graus de liberdade fiquem na ordem certa. Para isso, uma transformação linear dada pela matriz P , mostrada na Equação 4.64 pode ser empregada, na qual I_5 denota o tensor identidade de segunda ordem e dimensão igual a 5.

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ \phi_1 \\ u_7 \\ u_8 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} u_{5(n-1), 5(n-1)+5} \\ \phi_n \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} I_5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_5 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_5 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{39} \\ u_{40} \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_8 \end{Bmatrix} = P\hat{\mathbf{u}} \quad (4.64)$$

Outra peculiaridade do sistema é a incapacidade, dentro da UEL, da aplicação das condições de contorno eletromagnéticas de continuidade e constância do potencial elétrico sobre os eletrodos. Entretanto, é possível realizar essa ação dentro do ambiente do Abaqus, utilizando sua ferramenta *Equation* para geração de conjuntos de nós sobre os quais os valores dos graus de liberdade são iguais. Particularmente, o efeito dessa ferramenta é a retirada de algumas linhas da matriz de rigidez global e sua substituição por coeficientes 1 e -1 em pontos estratégicos de modo que todos os graus de liberdade sejam correspondentes.

Tabela 4.1 – Grandezas admitidas pelas matrizes de saída da UEL para diferentes passos e análises

Tipo de Análise	Passo da solução	Matriz AMATRIX	Matriz RHS	Sistema resolvido
Estática	Passo geral de solução estática	$K_{ij} = -\frac{\partial R_i}{\partial u_j}$	$R = F_{int}$	$K\Delta u = R$; Resolve para Δu
Estatística com Riks ou Comprimento de Arco	Passo geral de solução de multiplicadores de Lagrange	$K_{ij} = -\frac{\partial R_i}{\partial u_j}$	Primeira coluna $R = F_{int}(\lambda, \dots)$	$K[\Delta u, \lambda] = \left[F_{int}, \Delta \lambda \frac{\partial F_{int}}{\partial \lambda} \right]$
			Segunda Coluna $R = \Delta \lambda \frac{\partial F_{int}}{\partial \lambda}$	Resolve para Δu e λ
		Hilber-Hughes-Taylor (recebe α) $K_{ij} = M_{ij} \frac{\partial^2 \ddot{u}}{\partial u_j \partial u} + (1 + \alpha) \frac{\partial F_{int i}}{\partial u_j}$	$R_i = -M_{ij} \ddot{u}_{t_{s+1}}^j + (1 + \alpha) F_{int}^i(u_{t_{s+1}}, \dot{u}_{t_{s+1}}) - \alpha F_{int}^i(u_t, \dot{u}_t, \ddot{u}_t)$	$K\Delta u = R$ Resolve para Δu , encontra velocidades $\Delta \dot{u}$ e acelerações $\Delta \ddot{u}$
		Newmark-Beta (recebe β e γ) $K_{ij} = -\frac{\partial F_{int i}}{\partial u_j} - \frac{\mathcal{M}_{ij}}{\beta \Delta t^2} - \frac{\gamma \mathcal{C}_{ij}}{\beta \Delta t}$	$R_i = F_{int}^i(u_{t_{s+1}}) + \left(\frac{\mathcal{M}_{ij}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathcal{C}_{ij}}{\beta \Delta t} \right) u_{j,t+1} - A_i^{passado}(u_t, \dot{u}_t, \ddot{u}_t)$	
Dinâmica no domínio do tempo ou da frequência	Passo de cálculo de amortecimento	$K_{ij} = \mathcal{C}_{ij}$	Não é definido	-
	Passo de cálculo de massa	$K_{ij} = \mathcal{M}_{ij}$	Não é definido	-
	Passo de meio incremento	Não é definido	Forças internas definidas no tempo de solução $t_{s+1} = t_s + 0,5\Delta t$	$K \frac{\Delta u}{2} = R$; Resolve para Δu
	Passo de cálculo de acelerações iniciais	$K_{ij} = \mathcal{M}_{ij}$	$R_i =$ Forças de inércia, contato ou simetria iniciais	$M\Delta \ddot{u} = R$; Resolve para $\Delta \ddot{u}$
Modal	Passo de cálculo de rigidez	$K_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial u^2} \right _{u(t=t_0)}$	Não é definido	Problema de autovalor generalizado $\omega^2 M\phi = K\phi$
	Passo de cálculo de massa	$K_{ij} = \mathcal{M}_{ij}$	Não é definido	
	Passo de cálculo de rigidez	$K_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial u^2} \right _{\omega(t=t_s)}$		$R = F_{int}(\omega)$ Caso F_{int} seja dada no domínio do tempo, R será sua transformada de Fourier, calculada fora da UEL
	Passo de cálculo de amortecimento	$K_{ij} = \mathcal{C}_{ij}$		$(-\phi^T M \phi \omega^2 + \phi^T C \phi) \omega + \phi^T K \phi) u = \phi^T R_1$ Resolve para u
Domínio da frequência	Passo de cálculo de massa	$K_{ij} = \mathcal{M}_{ij}$		

Uma terceira peculiaridade do sistema se dá em análises onde há carga externa ligada sobre os transdutores piezoelétricos. Como o único esforço externo aceito pelo Abaqus é diferença de potencial, cargas resistivas, capacitivas e indutivas não são compatíveis com a UEL. Entretanto, a partir da utilização de diferenças de potencial complexos, cargas capacitivas e indutivas podem ser emuladas. Da mesma forma, cargas resistivas podem ser emuladas através de condições de contorno de cargas constantes concentradas sobre os eletrodos. Uma alternativa para o problema é a geração, no código da UEL, de uma sub-rotina de identificação de cargas capacitivas, resistivas e indutivas através de comandos específicos dados pelo usuário no arquivo de entrada para que, no cálculo das matrizes de amortecimento ou do vetor de desbalanceamento, utilizando o Método do Comprimento de Arco, essas cargas externas possam ser inseridas na solução como forças internas invertidas.

Visando dar maiores esclarecimentos sobre este assunto, um fluxograma com o pseudo-código, os *flags* do Abaqus e a lógica básica que há por trás do código implementado em UEL é apresentado no Anexo 3.

4.3 AVALIAÇÃO DO ELEMENTO FINITO

Como previamente citado, inicialmente, a verificação do código e implementação do elemento finito em UEL foi realizada através da comparação de grandezas físicas diretas extraídas de um modelo contendo um único elemento sem qualquer tipo de condição de contorno ou carregamento externo aplicado. Sendo que tal atividade foi executada empregando um código independente (*stand-alone*) implementado em linguagem Python. Então, somente após a verificação de que o código implementado em Fortran compilado junto ao programa Abaqus, realmente possuía a formulação desejada, sete estudos de caso foram realizados com diferentes objetivos.

O primeiro estudo de caso (seção 5.1) consistiu na reprodução do problema de uma viga piezoelétrica bimórfica em balanço, inicialmente proposta por Hwang e Park (2003). Tal estudo é aceito pela comunidade científica como um *benchmark* para elementos contendo acoplamento piezoelétrico, pois possui uma solução analítica fechada. Inicialmente, essa resposta analítica foi comparada à solução obtida tanto via UEL quanto pelo programa

codificado em Python de modo a realizar uma segunda verificação do código implementado. Posteriormente, a resposta obtida pela UEL foi comparada às respostas obtidas em trabalhos de diferentes pesquisadores, de modo a consolidar a formulação para o caso mais simples de solução.

Um segundo passo na avaliação do elemento se deu através da comparação de resultados de problemas numéricos sugeridos por Marinkovic et al. (2007) com resultados gerados pelo elemento implementado via UEL. Três estudos de caso foram feitos baseados nas seguintes análises: análise de uma viga com transdutores piezoelétricos em camadas simétricas; análise de uma placa contendo um transdutor piezoelétrico acêntrico; análise de um semicilindro de compósito ativo simplesmente apoiado sofrendo cargas mecânicas e elétricas. Esses problemas foram utilizados para verificar a precisão do elemento frente aos resultados providos pela literatura em modelos mais complexos.

O terceiro passo na avaliação do elemento foi a verificação da capacidade de resolução de problemas inerentes a sua formulação, tais como: o travamento por cisalhamento transversal (*shear locking*) e o grau de liberdade espúrio (*drilling degree of freedom*). Para isso, resultados encontrados na literatura de problemas experimentais foram explorados. Um *bench mark* sugerido pelo manual do Abaqus (DASSAULT SYSTÈMES SIMULIA, 2010A) que trata desses obstáculos foi também utilizado como um estudo de caso ao ser adaptado para estruturas em compósito inteligente. Em seguida, esse mesmo modelo foi utilizado para realizar uma comparação entre a eficiência e a precisão de resposta do modelo implementado e os elementos sólidos nativos (pré-implementados) no Abaqus.

Outro estudo de caso consistiu em comparar resultados de ensaios experimentais com resultados numéricos obtidos via UEL. Nesse caso, como a análise realizada foi no domínio da frequência, requerendo uma série de iterações, a eficiência do modelo implementado perante aos elementos nativos do Abaqus foi melhor verificada, bem como sua precisão frente ao cálculo de frequências naturais e modos de vibrar.

Por fim, realizou-se, ainda, a análise de um estudo de caso que envolveu a aplicação do modelo para um problema de SHM.

5 ESTUDOS DE CASOS: RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados obtidos para os diversos estudos de casos investigados durante o presente trabalho, bem como uma breve descrição do problema apresentado em cada um são e discutidos neste capítulo. Dessa forma, mais detalhes a cerca desses estudos podem ser encontrados nas publicações geradas pelo presente autor, que estão listadas no Anexo 4.

5.1 PRIMEIRO ESTUDO DE CASO – VIGA BIMÓRFA DE PVDF EM BALANÇO

O primeiro estudo de caso consistiu em um problema proposto inicialmente por Hwang e Park (2003), de uma viga completamente fabricada em material piezoelétrico, bimórfa (ou seja, contendo duas camadas de material polarizados na mesma direção, porém em sentidos contrários), que foi ensaiada em balanço (condição de contorno engastada-livre). Esse problema é amplamente aceito pela comunidade científica como um *benchmark* na simulação de materiais piezoelétricos, pois evidencia, num único experimento, os dois efeitos piezoelétricos complementares: direto e inverso. Ademais, possui uma solução analítica fechada.

O efeito do biformismo da viga faz com que, dada a aplicação de um potencial elétrico externo, devido aos sentidos de polarização de cada metade da viga estarem invertidos, deformações são geradas em função do efeito piezoelétrico direto e, então um momento fletor resultante será criado. Da mesma forma, considerando os eletrodos da seção média da viga como referência (aterramento – $\phi=0$ V), dado um deslocamento sobre a viga, verifica-se que pelo efeito piezoelétrico direto uma voltagem será gerada sobre os eletrodos externos de cada camada. De forma análoga, devido à polarização invertida, a mesma diferença de potencial será criada sobre cada eletrodo, porém com sinal inverso. Dessa maneira, o biformismo da viga duplica as comutações energéticas causadas pelo efeito piezoelétrico.

A solução analítica do referido problema, é obtida de maneira direta através das hipóteses de campo elétrico uniforme em cada lâmina de material e da integração dos esforços internos. Em sendo assim, o momento fletor gerado pela aplicação de um campo elétrico

sobre a viga e a da distribuição de deslocamentos gerada pela aplicação de um potencial externo podem ser obtidos, respectivamente, através das Equações 5.1 e 5.2. na primeira M representa o momento fletor atuando sobre a viga devido a um campo elétrico E ; b corresponde a largura da viga; h corresponde a espessura da viga; e_{31} corresponde ao acoplamento piezoelétrico cruzado na forma- E ; $\Delta\phi$ corresponde à diferença de potencial entre as superfícies da viga. Na segunda equação w representa o deslocamento da viga num dado ponto x ; x corresponde a distância de uma dado ponto à raiz engastada; e Y corresponde ao módulo de elasticidade isotrópico obtido via ensaio de tração uniaxial da viga.

$$M = \frac{bh^2}{4} e_{31} E, \text{ onde } E = -2 \frac{\Delta\phi}{h} \quad (5.1)$$

$$w = \frac{3}{2} \frac{e_{31} \Delta\phi}{Y h^2} x^2 \quad (5.2)$$

Na versão original proposta por Hwang e Park (2003), o problema consiste numa viga bimórfica piezoelétrica de dimensões 100x5x1 mm fabricada em PVDF com propriedades mostradas na Tabela 5.1. Inicialmente um carregamento elétrico de 1 V é aplicado sobre os eletrodos externos a viga, gerando o efeito piezoelétrico inverso.

Em seguida, é realizada: uma análise envolvendo o efeito piezoelétrico direto: através da aplicação de uma força constante de 10 N distribuída ao longo da superfície da viga. Como condição de contorno elétrica, é considerado que há cinco eletrodos contínuos distintos de mesmo tamanho sobre cada superfície da viga. Portanto, para avaliação do elemento finito proposto (implementado via UEL), utiliza-se uma malha contendo 20 elementos, mostrada na Figura 5.1.

Figura 5.1 – Malha utilizada no primeiro estudo de caso com vinculação de engastamento

Tabela 5.1 – Propriedades do PVDF utilizadas no primeiro estudo de caso

Propriedade	C_{11} [GPa]	C_{12} [GPa]	C_{22} [GPa]	C_{13} [GPa]	C_{44} [GPa]	C_{66} [GPa]	e_{31} [C/m ²]	e_{32} [C/m ²]	d_{33} [pF/m]
Valor	2,183	0,6332	2,183	0,6332	0,8463	0,863	0,0460	0,0460	0,1261

Na Figura 5.2, observa-se a comparação entre o resultado da deflexão da viga segundo a solução analítica, o programa implementado em Python, a UEL linear e a UEL não linear. Inicialmente pode-se notar que o programa em Python e a UEL apresentaram as mesmas respostas, reforçando a verificação realizada sobre a coerência do código em Fortran. Da mesma forma, a resposta obtida via UEL foi praticamente idêntica à resposta analítica no caso linear. No caso não linear, o deslocamento encontrado foi ligeiramente maior que o observado pela solução linear. Geralmente, problemas solucionados utilizando formulações contendo não linearidade geométrica apresentam deslocamentos menores que as soluções análogas utilizando formulações lineares, devido ao incremento de rigidez causado pelo equilíbrio na forma deformada. Tal forma contém componentes de tensão a mais no equilíbrio quando comparada com o equilíbrio realizado na forma não deformada. No caso, devido ao efeito piezoelétrico inverso causar tensões contrárias a ação das deformações (devido ao sinal negativo da parcela de acoplamento na Equação 3.1), e as propriedades particulares do PVDF utilizado: módulos de elasticidade baixos e coeficientes de acoplamento altos, nota-se um deslocamento maior no caso não linear. Em sendo assim, verifica-se que a máxima deflexão da viga foi de 3.43 mm para a simulação enquanto a resposta analítica mostrou 3.312 mm, ou seja, uma diferença percentual de 3.26%.

Figura 5.2 – Resultados do deslocamentos vertical ao longo da viga para a aplicação de potencial elétrico

Na Figura 5.3, verifica-se a comparação do segundo teste realizado entre a solução analítica de Hwang e Park (2003), o programa em Python e a UEL implementada. Nesse caso, como a aplicação ocorre devido ao efeito piezoelétrico direto, não há diferença entre as formulações linear e não-linear para a UEL. Além disso, deve-se ressaltar que a solução analítica de Hwang e Park (2003) não prevê as condições de contorno elétricas aplicadas, tratando os transdutores piezoelétricos como possuindo infinitos eletrodos distintos discretos sobre sua superfície. Outro detalhe que pode ser visto é a diferença nos “degraus” da resposta observados entre a solução realizada pelo programa em Python e pela UEL. Isso se deve as saídas do programa do programa em Python terem sido codificadas de modo que correspondem sobre os pontos de integração e não aos nós.

Figura 5.3 – Resultados de potencial elétrico medido sobre os eletrodos para a aplicação de força mecânica

5.2 SEGUNDO ESTUDO DE CASO – VIGA DE ALUMÍNIO EM BALANÇO ATUADA POR DOIS TRANSDUTORES PIEZOELÉTRICOS

O segundo estudo baseou-se na reprodução dos resultados numéricos apresentados pelo modelo de Marinković et al. (2007). Vale ressaltar que esse modelo foi baseado num experimento realizado por Gabbert et al. (2004).

O problema consiste numa viga de alumínio em balanço, contendo duas camadas piezelétricas coladas próximas a sua base. Um potencial elétrico total de 100 V é aplicado sobre os transdutores piezoelétricos, de maneira direta numericamente, e de maneira quase-estática experimentalmente (ou seja, o potencial é aplicado segundo uma variação linear ao longo do tempo, iniciando em 0 V. e progredindo de maneira lenta). Esse potencial é dividido entre os eletrodos dos dois transdutores. Os eletrodos internos ao laminado são a referência (aterramento, “0” V), enquanto os eletrodos externos recebem +/- 50 V, sendo o sinal relativo à sua posição. Devido aos potenciais antissimétricos, o esforço elétrico externo gera momentos fletores sobre a estrutura na faixa de existência dos transdutores. As dimensões do modelo consistem numa viga de alumínio de 110x27,5x0,5 mm e transdutores piezoelétricos de 42,5x27,5x0,2 mm colados a 7,5 mm do engaste(Figura 5.4). As propriedades de material utilizadas encontram-se na Tabela 5.3.

Figura 5.4 – Problema e geometria do segundo estudo de caso [MARINKOVIĆ et al., 2007]

Tabela 5.2 – Propriedades de material utilizadas no Segundo estudo de caso

Propriedade	E [GPa]	N	C ₁₁ [GPa]	C ₁₂ [GPa]	C ₂₂ [GPa]	C ₁₃ [GPa]	C ₄₄ [GPa]	C ₅₅ [GPa]	C ₆₆ [GPa]	e ₃₁ [C/m2]	d ₃₃ [nC/m]
Alumínio	70,3	0,345	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Transdutor Piezoelétrico	-	-	115	70,6	115	7,23	1,29	1,29	2,22,	9,6	17,1

Na Figura 5.5, encontra-se a geometria do modelo desenvolvido em Abaqus, evidenciando as regiões com e sem transdutores piezoelétricos colados. Na Figura 5.6 é mostrada a malha utilizada para simulação via UEL, contendo 90 elementos.

Figura 5.5 – Modelo em Abaqus utilizado no segundo estudo de caso, mostrando a região dos transdutores piezoelétricos

Figura 5.6 – Malha utilizada para a simulação via UEL no segundo estudo de caso com as condições de vinculação

Na Figura 5.7, encontra-se a comparação entre os resultados obtidos por Marinković et al. (2007) e pelo presente trabalho (via UEL). Marinković et al. (2007) propôs um elemento finito bidimensional com capacidade de simulação de materiais compósitos piezoelétricos. Porém seu elemento possui algumas diferenças se comparado ao implementado no presente trabalho como o uso de algumas equações constitutivas e hipóteses diferentes. Pode-se notar uma pequena diferença nos valores de deslocamento da extremidade livre da viga. Sendo um valor de 0,608 mm encontrado por Marinković et al. (2007) e um valor de 0,620 mm encontrado pela simulação via UEL. Portanto, apresenta-se uma diferença percentual relativa de apenas 1,935%.

Figura 5.7 – Comparação entre os resultados de deslocamento do segundo estudo de caso encontrados pelo presente trabalho com os apresentados por Marinković et al. (2007)

Na Figura 5.8, a diferença percentual entre as duas análises para toda a distribuição é mostrada. Nesse gráfico, pode-se notar que a maior diferença percentual obtida é de 5,263% e ocorreu na região compreendida pelos transdutores piezoelétrico. Esse fato mostra que as diferenças observadas entre os dois trabalhos, provavelmente, se concentram nos diferentes modelos elétricos implementados. Em particular, a diferença nas condições de contorno elétricas utilizadas sobre os transdutores piezoelétricos, que inserem ou não a parcela e_{15}^2/d_{11} nos valores de cisalhamento transversal. Além disso, a inserção ou não de funções parabólicas para a distribuição de cisalhamento transversal, mostradas na seção 3.2 (Capítulo 3), são diferenças proeminentes existentes entre os dois modelos.

Ademais, deve-se notar que os gráficos obtidos para o trabalho de Marinković et al. (2007) são provenientes de interpolações realizadas via Matlab[®] com base nos gráficos retirados diretamente dos arquivos eletrônicos dos artigos citados, podendo assim, não possuir uma alta precisão.

De qualquer maneira, esse estudo de caso mostrou que a formulação proposta é bastante consistente, uma vez que os resultados obtidos mostraram uma diferença percentual menor que 5% para boa parte da resposta apresentada pela literatura.

Figura 5.8 – Diferença relativa entre os resultados obtidos pelo presente trabalho e os resultados apresentados por Marinković et al. (2007), destacando a região contendo os transdutores piezoelétricos, entre as linhas pontilhadas em vermelho

5.3 TERCEIRO ESTUDO DE CASO – PLACA DE AÇO ENGASTADA COM TRANSDUTOR MFCTM

Uma terceira simulação computacional, empregando a UEL implementada, foi realizada, visando reproduzir outro estudo feito por Marinković et al. (2008). Neste caso, tem-se uma placa de aço, com as bordas engastadas, contendo um transdutor piezoelétrico colado próximo a uma das extremidades. Os mesmos materiais piezoelétricos do segundo estudo de caso foram utilizados no presente estudo, sendo a placa feita de aço com as propriedades mostradas na Tabela 5.3. Esse problema, se comparado ao problema apresentado no estudo de caso anterior, possui uma geometria com dimensões mais próximas a de uma placa propriamente dita e, não uma viga simulada através de elementos de casca. A geometria está mostrada na Figura 5.9. As condições de contorno são de uma placa completamente engastada, com uma voltagem de 1 kV aplicada sobre a camada piezoelétrica. Novamente, tem-se que as cargas são aplicadas de forma quase estática e, não há cargas externas ligadas ao sistema. A malha utilizada para simulação encontra-se na Figura 5.10.

Tabela 5.3 – Propriedades de material utilizadas no terceiro estudo de caso

Propriedade	E [GPa]	ν	C ₁₁ [GPa]	C ₁₂ [GPa]	C ₂₂ [GPa]	C ₁₃ [GPa]	C ₄₄ [GPa]	C ₅₅ [GPa]	C ₆₆ [GPa]	ϵ_{31} [C/m2]	d ₃₃ [nC/m]
Aço	221,0	0,333	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Transdutor Piezoelétrico	-	-	115	70,6	115	7,23	1,29	1,29	2,22,	9,6	17,1

Figura 5.9 – Geometria do terceiro estudo de caso [MARINKOVIC et al. 2008]

Figura 5.10 – Malha utilizada para a simulação via UEL no terceiro estudo de caso e eixo de coordenadas

Os resultados obtidos por Marinkoć et al (2008) e pela simulação via UEL para a deflexão da linha média da placa são mostrados na Figura 5.11. Nota-se que, embora as respostas para o maior deslocamento em ambos os modelos tenham ficado próximas, sendo de 0,325 mm para Marinkovic et al. (2008) e 0,3234 mm para o presente modelo. A distribuição do deslocamento ao longo da placa teve uma diferença considerável do maior vão existente entre o transdutor e o engaste, dimensão mostrado na Figura 5.10 pela seta preta, sendo a diferença percentual máxima igual a 29,34%. Esse fato pode ter sido decorrente da malha não refinada, que foi utilizada no presente trabalho, ou de diferentes condições de contorno utilizadas por Marinkoć et al (2008), uma vez que nota-se que o deslocamento nas extremidades dado pelo autor não apresenta a condição de rotação nula vinda do engaste. Ademais, novamente, deve-se ressaltar que as formulações utilizadas em cada trabalho possuem nuances diferentes. Porém, como esses não são resultados experimentais, pouco pode se concluir a respeito desse problema.

Figura 5.11 – Resultado de deslocamento vertical da placa no terceiro estudo de caso (medido ao longo do eixo X)

5.4 QUARTO ESTUDO DE CASO – SEMICILINDROS DE COMPÓSITO INTELIGENTE

O quarto estudo de caso realizado visa reproduzir o problema proposto por Marinkoć (2007) de um semicilindro fabricado em compósito inteligente, contendo duas camadas piezoelétricas. Deve-se destacar que como condição de contorno as extremidades do semicilindro apresentam as translações travadas e as rotações liberadas (no inglês, condição *pinned*). Esse é um exemplo interessante para a verificação das potencialidades do elemento implementado, pois demonstra duas das principais melhorias aplicadas ao elemento finito. Em primeiro lugar, trata-se de um problema que necessita de uma modelagem de cascas espessas devido a grande espessura relativa do material utilizado e, da elevada curvatura existente em uma estrutura circular. Em segundo lugar, tem-se um problema inerentemente não-linear, pois essa estrutura possui o efeito de *snap-through* e/ou *snap-back*. Portanto, uma estrutura bidimensional análoga ao presente estudo de caso é o Problema da Viga de Bernoulli (FUNG, 1994), mostrado na Figura 5.12.

Figura 5.12 – Problema da Viga de Bernoulli

As dimensões do semicilindro estão esquematizadas na Figura 5.13 e são iguais a 100 mm de raio e 60 mm de largura. O empilhamento do material compósito possui oito camadas distribuídas segundo as orientações $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/0^\circ]_s$ com propriedades dadas pela Tabela 5.4. As camadas externas consistem em material piezoelétrico e, possuem uma espessura de 0,24 mm enquanto as camadas internas são laminas de carbono-epóxi de 0,12 mm de espessura.

Figura 5.13 - Esquema do quarto estudo de caso

Tabela 5.4 – Propriedades de material utilizadas para o quarto estudo de caso

Propriedade	C_{11} [GPa]	C_{12} [GPa]	C_{22} [GPa]	C_{13} [GPa]	C_{44} [GPa]	C_{55} [GPa]	C_{66} [GPa]	e_{31} [C/m ²]	d_{33} [nC/m]
Carbono-epóxi	171,2	3,768	11,08	3,768	5,401	5,401	6,701	-	-
Transdutor Piezoelétrico	115	70,6	115	7,23	1,29	1,29	2,22,	9,6	17,1

Inicialmente, o problema análogo a Viga de Bernoulli foi simulado, para verificação do comportamento não linear geométrico do modelo. Em sendo assim, inicialmente avaliou-se a estrutura para uma carga mecânica distribuída sobre a linha de simetria do cilindro. Posteriormente, analisou-se a estrutura para um deslocamento prescrito monotônico crescente aplicado nesta mesma linha de simetria. Em ambos os casos, a forma deformada foi avaliada ao longo do histórico de carregamento, bem como gráficos de força versus deslocamento e potencial elétrico versus deslocamento em dois pontos distintos. E finalmente, um carregamento puramente elétrico, distribuído sobre toda a superfície superior do cilindro foi aplicado. As mesmas análises de comportamento da forma deformada e de força versus deslocamento e potencial elétrico versus deslocamento. A malha utilizada para simulação via UEL possui 200 elementos e está mostrada na Figura 5.14.

Figura 5.14 – Malha utilizada para a simulação via UEL no quarto estudo de caso

As formas deformadas finais encontradas para cada um dos esforços aplicados são mostradas a seguir. A evolução da forma deformada para a aplicação de deslocamento prescrito e potencial elétrico se encontram, respectivamente na Figura 5.17 e na Figura 5.18.

Figura 5.15 – Forma deformada do quarto estudo de caso para a aplicação de carga mecânica

Figura 5.16 – Forma deformada do quarto estudo de caso para a aplicação de carga elétrica

Figura 5.17 - Deslocamentos verticais dos nós ao longo do diâmetro do meio cilindro para a condição de deslocamento prescrito

Figura 5.18 – Deslocamentos verticais dos nós ao longo do diâmetro do meio cilindro para a condição de aumento do potencial elétrico

A Figura 5.19 mostra a evolução do carregamento em função do deslocamento da linha de simetria do semicilindro para o caso de deslocamento prescrito. A

Figura 5.20 mostra gráficos análogos, porém, para o caso de potencial elétrico aplicado. Verifica-se nos casos de carregamento (mecânico e elétrico) que há o efeito de *snap-back*. Tal fenômeno é evidenciado pelo comportamento da força mecânica interna e pela presença da não linearidade de resposta do problema. Entretanto, os gráficos de potencial elétrico apresentam um comportamento praticamente linear. Esse fato provavelmente decorre da aplicação da condição de contorno de continuidade de potencial elétrico ao longo de toda a superfície do semicilindro, considerando um único e contínuo eletrodo. Com base em estudos de instabilidade do tipo *snap-back*, é sabido que o nível de não linearidade de estruturas análogas a Viga de Bernoulli diminui ao se afastar da linha de simetria. Como o potencial elétrico é dado pelo efeito médio de toda a superfície do semicilindro, a não linearidade local demonstrada pelos nós centrais da linha de simetria não é suficiente para que o efeito seja pronunciado.

Figura 5.19 – Aplicação de deslocamento prescrito: A. Força versus deslocamento; B. Potencial elétrico versus deslocamento

Figura 5.20 – Aplicação de potencial elétrico: A. Força versus deslocamento; B. Potencial elétrico versus deslocamento

5.5 QUINTO ESTUDO DE CASO – “GANCHO” EM BALANÇO FABRICADO EM COMPÓSITO INTELIGENTE

O quinto estudo de caso trata de um *benchmark* proposto no manual do Abaqus (DASSAULT SYSTÈMES SIMULIA, 2010A), inicialmente descrito por Knight (1997). Tal estudo ficou conhecido como o “desafio de Raasch para elementos de casca”. O problema original consiste numa viga engastada com curvatura variável em formato de “gancho”, sendo que suas dimensões estão descritas na Figura 5.21. Na extremidade livre é aplicada uma carga vertical de 8.7536 N/m (equivalente a 0.05 lb/in), distribuída ao longo da borda. Esse problema, devido a sua geometria, garante que problemas de travamento numérico aconteçam de maneira significativa em elementos finitos de casca bidimensionais. Dessa forma, pode ser usado como um teste para a eficácia da aplicação de integração reduzida no elemento finito implementado em UEL. Como os elementos nativos do Abaqus foram avaliados segundo o teste proposto por Knight (1997), tem-se que uma forma rápida de avaliação é comparar os deslocamentos apresentados por elementos nativos do Abaqus com os obtidos por simulações via UEL.

Figura 5.21 – Geometria do problema do quinto estudo de caso [adaptado de DASSAULT SYSTÈMES SIMULIA, 2010A]

Para que as peculiaridades do acoplamento piezoelétrico e materiais laminados fossem consideradas, o problema foi adaptado. As alterações realizadas perante o problema original consistem na mudança do material utilizado. Haja vista que o alumínio isotrópico (do problema inicial) foi substituído por um material compósito laminado de propriedades

mostradas na Tabela 5.5 com empilhamento $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$ e, por um transdutor piezoelétrico colado próximo ao engaste. As propriedades do referido transdutor estão evidenciadas na Tabela 5.6 e na Tabela 5.7.

Tabela 5.5 – Propriedades das camadas de compósito estrutural utilizadas no quinto estudo de caso

Propriedade	E_{11} [GPa]	E_{22} [GPa]	ν_{12} []	ν_{13} []	ρ [kg/m ³]	G_{12} [GPa]
Valor	132,0	10,3	0,356	0,305	1470	1,8170

Tabela 5.6 – Propriedades mecânicas do transdutor piezoelétrico utilizadas no quinto estudo de caso

Propriedade	E_{11} [GPa]	E_{22} [GPa]	ν_{12} []	ν_{13} []	ρ [kg/m ³]	G_{12} [GPa]
Valor	30,336	15,857	0,31	0,305	5440	5,515

Tabela 5.7 – Propriedades elétricas e de acoplamento piezoelétrico utilizadas no quinto estudo de caso

Propriedade	e_{13} [C/m ²]	e_{15} [C/m ²]	e_{33} [C/m ²]	d_{11} [nC/m]	d_{33} [nC/m]
Valor	-2,1	0,75	4,02	46,0	4,2

Os resultados das simulações computacionais utilizando o modelo proposto no presente trabalho foram comparados com resultados fornecidos por elementos piezoelétricos sólidos (nativos) do Abaqus. A Figura 5.22 apresenta a malha utilizada para as simulações com e sem a utilização da UEL. A Figura 5.23 mostra os detalhes da geometria do transdutor piezoelétrico utilizando as duas abordagens. No caso do emprego de elementos sólidos do Abaqus, deve-se ter uma condição de contorno *Tie* adicional, visando a fixação da superfície desses elementos junto às faces dos elementos de casca, que modelam o “gancho” (DASSAULT SYSTÈMES SIMULIA, 2010A). Essa condição de contorno é uma condição de “contato” que une os gdl's de duas superfícies de maneira que seus deslocamentos relativos serão sempre nulos.

Figura 5.22 – Malha utilizada no quinto estudo de caso

Figura 5.23 – Detalhe da geometria do transdutor piezoelétrico no quinto estudo de caso para: A. O elemento implementado; B. Elementos sólidos nativos do Abaqus.

A Tabela 5.8 mostra os deslocamentos da extremidade livre e a diferença de potencial apontada pelo transdutor piezoelétrico, bem como o tempo de processamento de cada análise. Os resultados obtidos pelo elemento implementado (via UEL) e pelo elemento (nativo) do Abaqus se assemelham. O tempo de processamento foi praticamente o mesmo, uma vez que essa foi uma análise estática contendo poucos elementos, não necessitando de uma grande quantidade de cálculos, sendo a eficiência mais importante em modelos maiores ou análises iterativas.

Tabela 5.8 – Resultados para o quinto estudo de caso

Grandeza	Deslocamento da extremidade livre [mm]	Diferença de potencial no transdutor [mV]	Tempo de processamento [s]
UEL	92.03	2,2434	3
Elemento nativo do Abaqus	94.06	2,221	3

5.6 SEXTO ESTUDO DE CASO – VIGA DE ALUMÍNIO EM BALANÇO COM DOIS TRANSDUTORES MFC

O sexto estudo de caso correspondeu à simulação e comparação dos resultados numéricos via UEL com resultados experimentais realizados pelo Grupo de Estruturas Aeronáuticas da EESC/USP. Mais detalhes podem ser encontrados em Medeiros (2012). Ademais, comparou-se, também os resultados obtidos pelo elemento implementado, com resultados calculados através dos elementos piezoelétricos sólidos do Abaqus.

Para o ensaio experimental, foram produzidos corpos de prova de vigas de alumínio contendo dois transdutores piezoelétricos Midé, modelo QP10n (Figura 5.24). Os referidos transdutores foram estrategicamente colados sobre a superfície superior da viga como mostra a Figura 5.25.

Figura 5.24 – Transdutor piezoelétrico Midé, modelo QP10n, utilizado nos ensaios experimentais

Figura 5.25 – Esquema do ensaio experimental [MEDEIROS, 2012]

Após a fabricação dos corpos de prova, foram realizados ensaios modais e dinâmicos de resposta em frequência, utilizando como sinal de entrada um impulso dado por um martelo de impacto e como condição de contorno, a condição engastada-livre. A Figura 5.26 e a Figura 5.27 evidenciam, respectivamente, o esquema do ensaio experimental realizado e as dimensões do corpo de prova obtido, bem como a nomenclatura utilizada para os transdutores piezoelétricos. Deve-se destacar que os transdutores foram utilizados tanto para medir o “output” (ou seja, como sensores) como para aplicar um sinal de entrada “input” (ou seja, como atuadores).

Figura 5.26 – Ensaio experimental e equipamentos utilizados [MEDEIROS, 2012]

Figura 5.27 – Dimensões do corpo de prova e ponto de aplicação do sinal de entrada

As simulações computacionais foram realizadas utilizando elementos de casca laminada, via UEL, bem como, elementos sólidos (nativos) do Abaqus. Porém, ambas as malhas apresentam a mesma discretização como mostra a Figura 5.28. Vale ressaltar que para a malha de elementos sólidos do Abaqus, ainda foi necessário utilizar quatro elementos para discretização ao longo da espessura, tanto para a viga de alumínio, quanto para os transdutores piezoelétricos.

Figura 5.28 – Malha utilizada e posição dos nós

Conforme mostrado na Figura 5.29, tem-se que houve uma extensão virtual da viga na qual foram engastadas as translações de suas bordas para simular o engaste realizado em laboratório. Além disso, nas regiões destacadas em verde, onde se encontram os transdutores piezoelétricos, foram utilizadas as ferramentas de subestruturação do Abaqus. Dessa forma, cada piezo atua como um superelemento, porém com propriedades elétricas médias entre os diversos nós e saídas elétricas contínuas, garantidas por uma condição de contorno de igualdade entre os graus de liberdade elétricos nessas regiões (utilizando a ferramenta *Equation* do Abaqus).

Figura 5.29 – Geometria utilizada. A seta mostra a região virtual estendida para aplicação das condições de contorno

As propriedades de material para os transdutores piezoelétricos, que foram utilizadas na simulação computacional, foram obtidas por Medeiros (2012), utilizando uma metodologia de resolução do problema inverso de obtenção de propriedades de material a partir de um Volume Elementar Representativo via MEF (Método dos Elementos Finitos). Essas propriedades encontram-se na Tabela 5.9 e na Tabela 5.10.

Tabela 5.9 – Propriedades mecânicas de material dos transdutores piezoelétricos utilizadas no sexto estudo de caso [MEDEIROS, 2012]

Propriedade	E [GPa]	ν	C ₁₁ [GPa]	C ₁₂ [GPa]	C ₁₃ [GPa]	C ₃₃ [GPa]	C ₄₄ [GPa]	C ₆₆ [GPa]	ρ [kg/m ³]
Alumínio	69,0	0,3	-	-	-	-	-	-	2697
Transdutor Piezoelétrico	-	-	53,2711	4,8380	16,9226	38,6050	1,8418	1,8170	7400

Tabela 5.10 – Propriedades elétricas e de acoplamento eletromecânico dos transdutores piezoelétricos utilizadas no sexto estudo de caso [MEDEIROS, 2012]

Propriedade	e_{13} [C/m ²]	e_{15} [C/m ²]	e_{33} [C/m ²]	d_{11} [nC/m]	d_{33} [nC/m]
Transdutor Piezoelétrico	-4,3248	0,2599-	10,7469	7,7362	5,5257

Os modos de vibrar e frequências naturais, obtidas experimentalmente e através das simulações numéricas, encontram-se na Tabela 5.11. Deve-se notar que os valores obtidos numericamente via UEL (mesmo desconsiderando efeitos de amortecimento) são muito

próximos das medidas experimentais, ou seja, as diferenças percentuais (Δ_2) são menores que 1% para todos os modos. Esse fato, entretanto, não mostra uma validação completa do modelo implementado, uma vez que as frequências naturais são dependentes principalmente da geometria e propriedades de material de um sistema, de modo que a formulação de elementos finitos utilizada em seu cálculo possui uma influência não muito relevante nos resultados finais. Ademais, a precisão obtida pelo modelo implementado em relação aos resultados experimentais ficou na mesma ordem de grandeza com relação ao modelo 3D utilizando elementos (nativos) do Abaqus. No entanto, cabe ressaltar que houve uma precisão maior para o primeiro modo de vibrar.

Na Figura 5.30 e na Figura 5.31 encontram-se as funções de resposta em frequência (FRF) obtidas numericamente pelo elemento implementado, bem como, medidas experimentalmente. É possível verificar o quanto o modelo formulado e implementado via UEL se aproxima da resposta experimental, mesmo não empregando um modelo de amortecimento.

Tabela 5.11 – Frequências naturais obtidas pelos diferentes métodos utilizados

Frequência Natural	ω_1 [Hz]	ω_2 [Hz]	ω_3 [Hz]	ω_4 [Hz]
Experimental	9,375	58,750	164,375	322,50
Abaqus	9,9018	59,118	164,328	321,643
Δ_1^*	5,619%	0,0626%	0,0003%	0,027%
UEL	9,321	59,161	165,40	325,10
Δ_2^{**}	0,057%	0,070%	0,00624%	0,0806%

$$*\Delta_1 = \left| \frac{\omega_i^{exp} - \omega_i^{Abaqus}}{\omega_i^{Abaqus}} \right| * 100; **\Delta_2 = \left| \frac{\omega_i^{exp} - \omega_i^{UEL}}{\omega_i^{UEL}} \right| * 100$$

Algumas ressonâncias não foram encontradas pelo modelo nas funções de resposta em frequência. Isso se deu devido aos modos de vibrar relacionados a essas ressonâncias serem modos de flexão lateral, ou seja, vibração da barra no seu próprio plano. Tais modos de vibrar, teoricamente, não são capturados pelo modelo devido a sua formulação conter apenas cinco graus de liberdade no sistema de coordenadas local, excluindo o grau de liberdade de rotação no plano.

Figura 5.30 – Comparação entre as FRFs experimental e numérica sentidas pelo PZT-1

Figura 5.31 – Comparação entre as FRFs experimental e numérica sentidas pelo PZT-2

Vale ressaltar que o tempo de processamento da análise no domínio da frequência, para o elemento implementado foi de 31'23'', enquanto que o tempo de processamento para o modelo com elementos sólidos do Abaqus foi de 3h8'17''. Portanto, houve um ganho de eficiência computacional de aproximadamente seis vezes. No entanto, não se pode afirmar que esse seja o ganho de eficiência existente com a utilização do elemento casca laminada formulado, pois, a solução foi feita para um problema de geometria relativamente simples. No caso de estruturas mais complexas não é possível fixar um ganho de eficiência, mas apenas supor que o mesmo existe, pois outros fatores além do cálculo de grandezas elementares

começam a influenciar no tempo de processamento, tais como: a indexação de matrizes globais e a solução propriamente dita do sistema matricial global.

5.7 SÉTIMO ESTUDO DE CASO – APLICAÇÃO DE ANÁLISE PARA SHM

Para o último estudo de caso apresentado, novamente foram utilizados experimentos realizados pelo Grupo de Estruturas Aeronáuticas (EESC/USP), porém, visando numa aplicação numérico-experimental de SHM (*Structural Health Monitoring*). Para tal, danos progressivos foram introduzidos na viga de alumínio através da inserção de furos na região entre os sensores piezoelétricos, como mostrado no esquema da Figura 5.32.

Figura 5.32 – Esquema dos corpos de prova utilizados no sétimo estudo de caso

Os ensaios experimentais e as simulações numéricas foram repetidos para essas estruturas danificadas, de modo a obter mudanças nas características dinâmicas do sistema como frequências naturais e amplitudes de ressonância. As malhas utilizadas para as análises são mostradas na Figura 5.33.

Figura 5.33 – Malhas utilizadas no sétimo estudo de caso

Utilizando as funções de resposta em frequência obtidas experimentalmente, pode-se determinar os fatores de amortecimento crítico modo a modo, empregando o Método dos Mínimos Quadrados para Exponenciais Complexas (*Least-Squares Complex Exponential* ou LSCE) (HE; FU, 2001). Dessa forma, neste estudo de caso, foram realizadas simulações computacionais amortecidas, sendo os amortecimentos críticos mostrados na Tabela 5.12.

Tabela 5.12 – Amortecimentos críticos utilizados no sétimo estudo de caso

Frequência do modo correspondente [Hz]	Amortecimento crítico ζ_{cr} [%]
8,972	6,16085
60,05	0,844101
119,9	0,41234
160,2	0,153993
240,0	8,2202
315,3	0,535355
521,4	0,56335
573,6	0,101515

Em seguida, métricas de dano para SHM (PRADAA et. al, 2012) foram utilizadas considerando o sinal de entrada (força aplicada pelo martelo) e os sinais capturados pelos sensores piezoelétricos (potencial elétrico ϕ). Essas métricas se baseiam em métodos de resposta e frequência e são calculadas a partir de razões entre amplitudes eletromecânicas (razão entre a diferença de potencial medida por um dado transdutor piezoelétrico e a força de entrada aplicada) em frequências de ressonâncias para diferentes condições da estrutura. Tais métricas são definidas como CMPM (*change in measured parameters metric*), CMRM

(*change in measured ratio metric*) e TRM (*transmissibility ratio metric*) e, são representadas, respectivamente, pelas Equações de 5.3 a 5.5.

A CMPM consiste na razão entre as amplitudes da resposta eletromecânica em frequência do sistema sentida por um dado sensor e a mesma amplitude previamente obtida numericamente ou experimentalmente na condição intacta da estrutura. Possui a vantagem de necessitar de apenas um sensor, requisitando, assim, uma pequena quantidade de sensores sobre a estrutura, que são colocados em pontos estratégicos, previamente calculados (por exemplo: regiões de maior tensão). Além disso, uma rede de sensores pode ser utilizada para, a partir dessa métrica, detectar não somente a presença e a intensidade de dano, mas também sua possível localização. Porém sua desvantagem é a necessidade de dados prévios da estrutura, contendo os sensores, que devem ser obtidas de maneira experimental ou numérica.

$$CMPM = \left(\frac{\frac{\varphi}{F_{UD}}}{\frac{\varphi}{F_{Dj}}} \right)_{\text{sensor}} \quad (5.3)$$

A CMRM consiste na razão entre as CMPMs medidas por dois diferentes sensores. Possui a desvantagem de necessitar de no mínimo um par de sensores sobre cada ponto de interesse da estrutura. Porém, como mostrados nos resultados a seguir, é mais sensível que a anterior numa maior extensão de modos. Além disso, sua precisão cresce com a quantidade de sensores próximos a um dado ponto, pois uma maior permutação de razões pode ser calculada, obtendo influências na mudança das características dinâmicas da estrutura em diversas direções. Assim, possui a desvantagem de ser uma métrica mais custosa.

$$CMRM = \frac{\left(\frac{\varphi}{F_{UD}} \right)_{\text{sensor 1}}}{\left(\frac{\varphi}{F_{Dj}} \right)_{\text{sensor 2}}} \quad (5.4)$$

A TRM consiste na razão de amplitudes obtidas em tempo real por dois diferentes sensores. Dessa forma, não necessita de dados prévios da estrutura. Porém, assim como a CMRM, necessita de no mínimo dois sensores por ponto de interesse da estrutura e, possui uma relação entre precisão e quantidade de sensores utilizados. Além disso, é mais dependente da posição dos sensores, bem como das condições de carregamento se comparada com as outras métricas citadas.

$$\text{TRM} = \frac{\left(\frac{\varphi}{F_{Dj}}\right)_{\text{sensor 1}}}{\left(\frac{\varphi}{F_{Dj}}\right)_{\text{sensor 2}}} \quad (5.5)$$

Deve-se notar que há outras métricas descritas na literatura, porém, apenas o conjunto previamente citado foi estudado e escolhido devido a sua simplicidade.

A Figura 5.34 mostra a comparação entre as FRFs obtidas experimentalmente para ambos os sensores, considerando tanto o caso intacto (sem furo) com o caso com o maior dano, ou seja, três furos. Inicialmente, pode-se notar a melhora nos resultados devido à inserção de um modelo de amortecimento em comparação aos resultados não amortecidos mostrados anteriormente para o sexto estudo de caso. Ou seja, para as análises em que a viga está intacta.

Figura 5.34 – FRFs encontradas numérica e experimentalmente para os casos intacto e com o maior dano, sentidas pelos transdutores 1 e 2

Da mesma forma como no caso amortecido, algumas ressonâncias, destacadas em vermelho, encontradas experimentalmente, não foram captadas pelo modelo numérico. Algumas dessas ressonâncias correspondem a modos de vibrar de torção ou flexão no plano

da viga, que, teoricamente, também não deveriam ocorrer nos resultados experimentais por não gerarem deformações mensuráveis pelos transdutores piezoelétrico. Pois, caso o sensor esteja sobre um regime de campo elétrico uniforme, durante uma torção ou flexão planar (vibração lateral) da viga, nenhuma diferença de potencial elétrico deveria ser capturada. Porém, devido às imprecisões na colagem dos transdutores, gerando assimetrias e, devido à presença de efeitos elétricos secundários tanto de deformação quanto elétricos surgidos no transdutores enumerados na seção 3.2, tem-se a possibilidade de se medir (de forma imprecisa) os modos supracitados. Ademais, tem-se o fato de que as hipóteses de potencial elétrico contínuo sobre os eletrodos e campo elétrico uniaxial uniforme não são perfeitas. Então, novamente, os movimentos de vibração lateral da viga são registrados com uma amplitude mais baixa do que nas outras ressonâncias.

O fato desses modos não ocorrerem se relacionam a: limitações da formulação implementada, ou seja, há somente cinco graus de liberdade; o fato de que na simulação numérica as condições do transdutor piezoelétrico são perfeitas, isto é, condições de colagem, simetria e uniformidade dos campos estão presentes.

O destaque em verde na Figura 5.34 mostra uma antirressonância experimental, não identificada pelas simulações, pois esta deve-se à relação entre a sobreposição da segunda com a terceira ressonância experimental. Como a terceira ressonância não foi detectada numericamente devido aos problemas supracitados, essa antirressonância não pode ser simulada. Mostra-se, assim, uma das limitações do modelo implementado.

Na Figura 5.35, encontram-se os gráficos do valor obtido pelas métricas calculadas (Equações 5.3 a 5.5) em relação aos primeiros cinco modos de vibrar obtidos pelo modelo numérico proposto. Na Figura 5.36, uma comparação entre as métricas calculadas utilizando o modelo numérico e o experimental foi efetuada. Nesse mesmo gráfico pode-se notar com clareza a grande capacidade das métricas em indicar dano na estrutura, uma vez que para alguns modos de vibrar, recomendam-se as métricas CMPM e TRM, e para outros modos, a métrica CMRM. Forma-se, assim, uma lógica entre o crescimento da métrica e o crescimento do dano. Uma última comparação a ser feita é entre as métricas CMRM e TRM. Pois, enquanto a primeira mostrou resultados mais confiáveis para uma maior faixa de modos, essa necessita de dados provenientes da estrutura intacta, diferentemente da segunda, que não necessita de conhecimento prévio da estrutura intacta.

Figura 5.35 – Métricas de SHM para diferentes modos

Entretanto, com base nessa constatação, o presente trabalho se justifica, pois o modelo implementado pode ser utilizado para obtenção numérica das características dinâmicas do sistema, como FRFs da estrutura intacta e de estruturas virtualmente danificadas. Dessa forma, torna-se possível, com a adição de análise de danificação e critério de dano da estrutura, a menos dos valores de amortecimento, calcular as curvas obtidas por diferentes métricas de maneira puramente numérica.

Figura 5.36 – Métricas de SHM para diferentes níveis de dano. As métricas calculadas numericamente encontram-se em linhas pontilhadas. As métricas calculadas experimentalmente encontram-se em linha cheias.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

O objetivo principal desse trabalho correspondeu a formulação, implementação e avaliação de um elemento finito de casca com capacidade de simular estruturas fabricadas em materiais compósitos ativos e com eficiência computacional. Inicialmente, foi apresentada uma revisão bibliográfica sobre o surgimento desses materiais e dos trabalhos atuais mais importantes na área de formulação de elementos finitos para compósitos ativos. Conclui-se que uma análise criteriosa dos trabalhos encontrados na literatura, bem como as avaliações realizadas durante o desenvolvimento do trabalho foram de fundamental importância para selecionar a formulação base a ser utilizada. Essa formulação foi então, apresentada e se baseou na teoria linear de piezeletricidade e nas Teorias de Casca Degenerada de Zienkiewicz, bem como na Teoria de Laminados Estendida. Num primeiro momento obteve-se a formulação linear e, depois, implementou-se uma formulação não-linear geométrica baseada nas deformações de von Karman. Com base nos resultados experimentais, conclui-se, também, que para alguns casos é importante ter uma formulação não-linear implementada. Além disso, outros estudos de caso provaram que mudanças nas propriedades piezoelétricas baseadas na análise das condições de contorno dos transdutores do tipo MFC™/AFC, em especial seus eletrodos, são também relevantes para se obter maior precisão dos resultados. Houve ainda outras melhorias na formulação, tais como: introdução de uma distribuição parabólica das tensões de cisalhamento e introdução dos momentos torçores como esforços solicitantes do laminado. De fato, conclui-se também que tais modificações foram muito importantes para se melhorar a qualidade das previsões computacionais.

Com relação especificamente à Revisão Bibliográfica, constata-se que os trabalhos mais relevantes foram muito importantes para o desenvolvimento do presente trabalho. Haja vista que diversos modelos de elementos finitos foram analisados. Isto permitiu uma seleção criteriosa do elemento finito mais adequado que deveria ser utilizado para a simulação de placas fabricadas em material compósito, contendo transdutores piezoelétricos. Além disso, através de comparações de diversas hipóteses usadas em diferentes modelos encontrados na literatura, conclui-se que há limitações no modelo escolhido. Em sendo assim, algumas soluções foram desenvolvidas para suprir tais limitações. No entanto, verificou-se que há algumas limitações insuperáveis. Principalmente àquelas que estão vinculadas estritamente ao uso da ferramenta UEL.

Com relação à metodologia utilizada e aos resultados obtidos, conclui-se que o trabalho se desenvolveu de forma adequada, apresentando resultados coerentes e consistentes. Dentre os grandes ganhos desse trabalho, deve-se notar a capacitação do presente autor e, por consequência do GEA (Grupo de Estruturas Aeronáuticas – EESC/USP) do qual ele faz parte, quanto à utilização da ferramenta UEL, bem como quanto ao aprendizado da formulação de elementos finitos desde as teorias fundamentais à aplicação final. Através do presente trabalho ficou demonstrada a possibilidade de incorporar as sub-rotinas desenvolvidas por usuários, que podem ser posteriormente compiladas junto ao programa Abaqus. Ademais, os estudos de caso numéricos e experimentais apresentados mostraram uma das diversas aplicações da tecnologia desenvolvida, bem como suas potencialidades e limitações.

Com relação às potencialidades observadas na formulação do elemento finito implementado, através dos três primeiros estudos de caso, conclui-se que o modelo proposto produz bons resultados para a simulação de problemas de cascas fabricadas em compósito inteligente, fornecendo resultados coerentes com outros modelos encontrados na literatura e com resultados experimentais. Em especial, o quarto estudo de caso demonstrou a capacidade da formulação de resolver problemas não lineares geométricos. Além disso, a simulação via UEL possibilitou a utilização de algoritmos complexos (já implementados no Abaqus), que foram utilizados para a solução de instabilidades numéricas (como problemas de *snap-back*). Dentre esses, destacam-se os algoritmos de comprimento de arco. O quinto estudo de caso provou como o elemento possui artifícios matemáticos suficientes, que evitam problemas numéricos inerentes a elementos de placa e casca, como o travamento via cisalhamento transversal. O sexto estudo de caso demonstrou o ganho de eficiência computacional a partir da utilização de elementos propostos ao invés de elementos sólidos do Abaqus. Por fim, o último estudo de caso mostrou que o elemento finito programado tem grande potencial para ser empregado em uma aplicação prática de SHM.

Com relação às limitações da formulação implementada, conclui-se que tanto a utilização da ferramenta UEL como outras advindas das escolhas realizadas para a formulação implementada podem gerar algumas restrições. E, isto pode afetar a qualidade dos resultados computacionais. Conclui-se que as limitações existentes devido à aplicação da ferramenta UEL são: a incapacidade da aplicação direta de cargas elétricas externas ao sistema, como cargas resistivas, capacitivas e indutivas, geralmente utilizadas junto a transdutores piezoelétricos para controle ativo e passivo de estruturas; a dificuldade gerada no pós-processamento de análises; a incapacidade da utilização de cargas distribuídas aplicadas

diretamente aos elementos, sendo necessárias transformações matemáticas de equivalência para cargas concentradas nos nós. Conclui-se que as limitações inerentes à formulação são: a utilização da hipótese de campo elétrico uniforme; a incapacidade do elemento de obter modos de vibrar de torção e de flexão no plano da casca em análises modais e no domínio da frequência, conforme mostrados pelo sexto e sétimo estudos de caso; a utilização de amortecimento proporcional viscoso, ignorando modelos mais complexos de amortecimento não proporcional, viscoelasticidade e histerese elétrica capacitiva.

Como perspectivas futuras, tem-se o aperfeiçoamento das formulações utilizadas, por exemplo, com a implementação de modelos mais fidedignos quanto aos esforços transversais (como teorias de ordem superior) ou modelos que sejam melhor adequados às características eletromagnéticas dos transdutores utilizados e a implementação de modelos de capacitância e histerese piezoelétricas. Pode-se destacar, também, trabalhos mais aprofundados na utilização dos estudos de caso de SHM, utilizando, por exemplo, redes de sensores, métricas mais complexas e/ou controladores de malha fechada. Outra vertente que pode ser seguida é a utilização do modelo implementado em modelos aeroelásticos de controle ou *energy harvesting*.

Além de tudo o que já foi discutido, tem-se que o conhecimento adquirido sobre a ferramenta UEL possibilita a expansão do modelo implementado para outra ferramenta existente no Abaqus, a UELMAT (*User Element with Material Points and Properties*). Essa ferramenta permite um pós-processamento de informações muito mais detalhado, pois contém os dados secundários da resposta, tais como tensões e deformações calculados nos pontos materiais (pontos de Gauss), podendo gerar automaticamente gradientes de propriedades. Além disso, com essa ferramenta, é possível, junto com uma formulação de elemento finito, implementar formulações de comportamento de material, como modelos de plastificação, modelos dependentes de temperatura e modelos de dano. Em especial, com uma UELMAT, pode-se desenvolver um modelo de dano e elementos com acoplamento piezoelétrico visando simular completamente uma estrutura em fadiga ou impacto com sensores. E, assim, pode-se prever computacionalmente com mais precisão, a menos do amortecimento, seu comportamento para modelos de SHM.

7 REFERÊNCIAS

- AHMAD S., IRONS B. M., ZIENKIEWICZ O. C. (1970). **Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements.** *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 2, pp. 419-451.
- AZZOUZ, M. S.; MEI, C.; BEVAN, J. S.; RO, J. J. (2001). **Finite Element Modeling of MFC/AFC Actuators and Performance of MFC,** *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 12, pp. 601.
- BALAMURUGAN, V.; NARAYANAN, S. (2001). **Shell finite element for smart composite structures and its application to the study of vibration control.** *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 37, pp. 713-738.
- BATHE, K., (1996). **Finite Element Procedures**, Prentice Hall, New Jersey.
- BENT, A. A. (1997). **Active fiber composites for structural actuation.** PhD Thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA
- BENT, A. A. (1999). **Active fiber composite material systems for structural control applications.** *In: Proceedings of SPIE, 6th International Symposium on Smart Structures and Materials.* Newport Beach, CA. 3674: 166–177.
- BENT, A. A.; HAGOOD, N. W. (1995). **Improvement performance in piezoelectric fiber composites using interdigitated electrodes.** *In: Proceedings of SPIE, 2nd International Symposium on Smart Structures and Materials.* San Diego, CA. 2441: 196–212.
- BENT, A.A.; HAGOOD, N.W. (1995). **Improvement performance in piezoelectric fiber composites using interdigitated electrodes.** *In: Proceedings of SPIE, 2nd International Symposium on Smart Structures and Materials.* San Diego, CA. article 2441, pp. 196–212.
- BISEGNA, P.; CARUSO, G. (2001). **Evaluation of higher-order theories of piezoelectric plates in bending and in stretching.** *Int. J. Solids Structures*, 38, 8805-8830, 2001.

- BRUNNER, A. J.; BIRCHMEIER, M.; MELNYKOWYCZ, M. M.; BARBEZAT, M. (2009). **Piezoelectric Fiber Composites as Sensor Elements for Structural Health Monitoring and Adaptive Material Systems**, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 20.
- CALLISTER JR., W. D. (2002). **Ciência e engenharia de materiais: uma introdução**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos.
- CHAN, H. L. W.; UNSWORTH, J. (1989). **Simple model for piezoelectric ceramic/polymer 1-3 composites used in ultrasonic transducer**. *IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics & Frequency Control*, vol. 36, n. 4, pp. 434-441.
- CHOPRA, I. (2002). **Review of State of Art of Smart Structures and Integrated Systems**. *AIAA Journal*, vol. 40, n. 11.
- CORREIA, I. F. P., SOARES, C. M. M., SOARES, C. A., HERSKOVITS J (2000). **Active control of axisymmetric shells with piezoelectric layers: a mixed laminated theory with a high order displacement field**. *Comput. Struct.* vol. 80, pp. 2265–2272.
- DAMJANOVIC, D. (2006). *Hysteresis in Piezoelectric and Ferroelectric Materials*. In: BERTOTTI G.; MAYERGOYZ, I. D. **The Science of Hysteresis**. Academic Press, Cap. 4, pp. 337-465.
- DASSAULT SYSTÈMES SIMULIA. (2010A). **Abaqus Benchmarks Manual v6.10**. Pawtucket: Hibbitt, Karlsson & Sorensen.
- DASSAULT SYSTÈMES SIMULIA. (2010B). **Abaqus User Subroutines Reference Manual v6.10**. Pawtucket: Hibbitt, Karlsson & Sorensen.
- DE MARQUI JR., C. J.; ERTURK, A.; INMAN, D. J. (2009). **An electromechanical finite element model for piezoelectric energy harvester plates**, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 327.
- DE MARQUI JR., C.; BELO, E. M.; MARQUES, F. D. (2005). **A flutter suppression active controller**. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part G, *Journal of Aerospace Engineering*, vol. 219, n.1, pp. 19-33.

- DERAEMAER, A.; NASSER, H.; BENJEDDOU, H.; PREUMONT, A. (2009). **Mixing rules for Macro Fiber Composites (MFC)**. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 20(12), pp. 1475-1482.
- DONG, K., WANG, X. (2006). **Wave propagation in piezoelectric laminated cylindrical shells under large deformations and rotary inertias**. *J Mech Eng Sci*, vol. 220:1537–48
- ERTURK, A.; VIEIRA, W. G. R.; DE MARQUI, JR., C.; INMAN, D. J. (2010). **On the energy harvesting potential of piezoaeroelastic systems**. *Applied Physics Letters*, v. 96, p. 184103.
- FARIA, A. W. (2006). **Modelagem por elementos finitos de placas compostas dotadas de sensors e atuadores piezoelétricos: implementação computacional e avaliação numérica** Dissertação (Mestrado) - *Universidade Federal de Uberlândia*, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
- FEIH, S. (2005). **Development of a user element in ABAQUS for modeling of cohesive laws in composite structures**. *Riso-R Report*. ISSN 0106-2840, ISBN 87-550-3410-1.
- FUHUI, Z.; YIMING, F.; DELIANG, C. (2008). **Analysis of fatigue delamination growth for piezoelectric laminated cylindrical shell considering nonlinear contact effect**. *Int J Solids Struct*, vol. 45:5381–96.
- FUNG, Y. C. (1994) **A first course in continuum mechanics**. Prentice Hall.
- GABBERT, U.; KÖPPE, H.; SEEGER, F.; BERGER, H. (2002) **Modelling of smart composite shell structures**. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 3, article 40, pp. 575-593.
- GABBERT, U.; MARINKOVIC, D. KÖPPE, H. (2004). **Finite element development for generally shaped piezoelectric active laminates**. *Mechanics of Advanced Material and Structures*, vol. 2, n. 1, pp. 11-24.
- GANDHI, M. V.; THOMPSON, B. S. (1992). **Smart Materials and Structures**, London: Sprinkler, Primeira Edição, pp. 41-50.

- GINER, E.; SUKUMAR, N.; TARANCÓN, J. E.; FUENMAYOR, F. J. (2008). **An Abaqus implementation of the extended finite element method.** *Engineering Fracture Mechanics*, October, 24.
- GIURGIUTIU, V.; ANDREI ZAGRAI, A.; BAO, J. (2002). **Piezoelectric Wafer Embedded Active Sensors for Aging Aircraft Structural Health Monitoring,** *Structural Health Monitoring*, vol. 1, article 41.
- HAGGOD, N. W.; FLOTOW, A. von; (1991). **Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks.** *Journal of Sound and Vibration*, vol. 146, n. 2, pp. 243–268.
- HAGOOD, N.W.; BENT, A.A. (1993). **Development of piezoelectric fiber composites for structural actuation.** In: *Proceedings of 34th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conferences*. AIAA Paper 93-1717, La Jolla, CA.
- HE, J.; FU, Z. (2001). **Modal Analysis,** *Butterworth-Heinemann*, Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP, ISBN 0 7506 5079 6, pp. 123-125/140-179.
- HWANG, W. S.; PARK, H. C. (1993). **Finite Element Modeling of Piezoelectric Sensors and Actuators.** *AIAA Journal*, vol. 31, n. 5, pp. 930–937.
- HWANG, W. S.; PARK, H. C.; HWANG, W.B. (1994). **Vibration control of laminated plate with piezoelectric sensors and actuators: finite element formulation and model analysis.** *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 4, pp. 317–329
- IHN, J; CHANG, F. (2008). **Pitch-catch Active Sensing Methods in Structural Health Monitoring for Aircraft Structures,** *Structural Health Monitoring*, vol. 7, pp. 7-17.
- IKEDA, T.(1996). **Fundamentals of Piezoelectricity,** Oxford University Press Inc.
- IYER, S. S.; HADDAD, Y. M. (1993). **Intelligent materials – An overview.** *Int. J. Pres. Ves. And Piping*, vol. 58, pp. 335-344.
- KALJEVIĆ, I.; SARAVANOS, D. A.. (1997). **Steady-state response of acoustic cavities bounded by piezoelectric composite shell structures.** *Journal of Sound and Vibration*, vol. 204, n. 3, pp. 459-476.

- KAR-GUPTA, R.; VENKATESH, T.A. (2007). **Electromechanical response of 1-3 piezoelectric composites: an analytical model.** *Acta Materialia*, v.55, n.3, p.1093-1108.
- KIM, S. J.; LEE, C. S.; JOH, M.; LEE, S. (2003). **A High-performance Parallel Finite Element Code for Large-scale Structural Analysis Based on Domain-wise Multifrontal Technique.** *Supercomputing*, 2003, ACM/IEEE Conference, vol. 1, pp. 32-50.
- KNIGHT, N. F., Jr. (1997). **The Raasch Challenge for Shell Elements.** *AIAA Journal*, vol. 35, no.2, pp. 375–381.
- KIM, W.; REDDY, J. N. (2010). **Novel mixed finite element models for nonlinear analysis of plates.** *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 7, pp. 201-226.
- KORNMAN, X.; NGUYEN, C. (2006). **A Comparison of Dynamic Piezoactuation of Fiber-based Actuators and Conventional PZT Patches,** *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 16, pp. 47
- KOZLOV, V. I.; KARNAUKHOVA, T. V. (2002). **Basic equations for viscoelastic laminated shells with disturbed piezoelectric inclusions intended to control nonstationary vibrations.** *Int Appl Mech*, vol. 38:1253–60.
- LEE, C. K. (1990) **Theory of laminated piezoelectric plates of the design of distributed sensor/actuators. Part I and II.** *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 89, pp. 1144p1158.
- LEE, H.; SARAVANOS, D. A. (1999). **Generalized finite element formulation for smart multilayered thermal piezoelectric composite plates.** *International Journal of Solids and Structures*, vol. 221, n. 5, pp. 867-885.
- LEE, H.; SARAVANOS, D. A. (2000). **A mixed multi-field finite element formulation for thermopiezoelectric composite shells.** *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, n. 36, pp.4949-4967.
- LEE, S. J.; REDDY, J. N.; ROSTAM-ABADI, F. (2006). **Nonlinear finite element analysis of laminated composite shells with actuating layers.** *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 43, pp. 1-21.

- MARINKOVIC, D.; GABBERT, U. (2004). **Modeling of Laminate Composites with Embedded Piezoelectric Actuators and Sensors**. *Mechanics, Automatic Control and Robotics*, vol. 4, n. 16, pp. 115-120.
- MARINKOVIC, D.; KÖPPE H.; GABBERT, U. (2006). **Numerically Efficient Finite Element Formulation for Modeling Active Composite Laminates**. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 13, pp. 379-392.
- MARINKOVIC, D. (2007). **A new finite composite shell element for piezoelectric active structures**. Tese (Doutorado) – Fortsch.-Ber, VDI Reihe, Düsseldorf.
- MARINKOVIC, D.; KÖPPE H.; GABBERT, U. (2007). **Accurate Modeling of the Electric Field within Piezoelectric Layers for Active Composite Structures**. *Journal for Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 18, pp. 503-514.
- MARINKOVIC, D.; KÖPPE H.; GABBERT, U. (2008). **Degenerated shell element for geometrically nonlinear analysis of thin-walled piezoelectric active structures**. *Smart Material Structure*, vol. 17.
- MEDEIROS, R. (2012) **Desenvolvimento de uma Metodologia Computacional para Determinar Coeficientes Efetivos de Compósitos Inteligentes**. Dissertação (Mestrado), *Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo*, São Carlos.
- MEYER, A.; STEINHORST, P. (2006). **Mixed FEM for piezoelectric problems – recent work and difficulties**, *Chemnitz FEM Symposium*.
- MITCHEL, J. A.; REDDY, J. N. (1995). **A refined hybrid plate theory for composite laminates with piezoelectric laminae**. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 32, n. 16, pp. 2345-2367.
- MOSES, R. W. (1997). **Vertical Tail Buffeting Alleviation Using Piezoelectric Actuators – Some Results of the Actively Controlled Response of Buffet-Affected Tails (ACROBAT) Program** Aeroelasticity Branch, In. *SPIE's 4th Annual Symposium on Smart Structures and Materials, Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies*, Conference 3044, San Diego, CA.

- NASSER, H.; DERAEMAERKER, A.; BELOUETTAR, S. (2008). **Electric field distribution in macro fiber composite using interdigitated electrodes.** *Advanced Materials Research*, 47-50:1173–1176.
- NETO, A. L. C. (2000). **Formulation of a rectangular finite element for a laminated composite plate with piezoelectric layers.** Dissertação (Mestrado), Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP.
- NETO, M. A.; LEAL, R. P.; YU, W. (2012). **A triangular finite elemento with drilling degress of freedom for static and dynamics analysis of smart laminated structures.** *Computers and Structures*, doi:10.1016/j.compstruc.2012.02.014.
- NETO, M. A.; YU, W.; ROY, S. (2009). **Two finite elements for general composite beams with piezoelectric actuators and sensors.** *Finite Element Anal Des*, 45(5):295–304. doi:10.1016/j.finel.2008.10.010.
- BORGES, E. N. (2012). **Análise experimental e computacional de juntas híbridas coladas monitoradas por compósitos inteligentes.** Dissertação (Mestrado), Universidade de São Carlos, São Carlos.
- NYE, J. F. (1957). **Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices**, Clarendon Press, Oxford.
- PAI, P.F., 1995, **A new look at shear correction factors and warping functions of anisotropic laminates.** *International Journal of Solids Structures*, vol 32, n. 16, pp. 2295-2313.
- PAIK, S. H.; YOON, T. H.; SHIN, S. J.; KIM, S. J. (2007). **Computational material characterization of active fiber composite.** *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol.18, p. 19-28.
- PAIK, S. H; KIM, J. Y.; SHIN, S. J.; KIM, S. J. (2004). **Numerical simulation of actuation behavior of active fiber composites in helicopter rotor blade application.** *Smart Structures and Materials: Smart Structures and Integrated Systems*, vol. 5390, pp. 89-96.
- PIEFORT, V. (2009). **Finite element modeling of piezoelectric active structures.** Tese (Doutorado), *Faculty of Applied Sciences, Université Libre de Bruxelles*.

- PRADAA, M. A.; TOIVOLAA, J.; KULLAAB, J.; HOLLMÉNA, J. (2012). **Three-way analysis of structural health monitoring data**, *Neurocomputing*, vol. 80, pp. 119-128.
- QATU, M. S. (2004). **Theory and vibration analysis of laminated barrel thick shells**. *J Vib Control*, vol. 10, pp. 319–341.
- QATU, M. S.; SULLIVAN, R. W.; WANG, W. (2010). **Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000-2009**, *Composite Structures*, vol. 93, pp. 14-31.
- RASSKAZOV, A. O.; KOZLOV, V. I.; KARNAUKHOVA, T. V.(2000). **Forced vibrations and vibroheating of shallow viscoelastic laminated shells with piezoelectric effect**. *Int Appl Mech*, vol. 36:769–78
- REDDY, J. N.; ARCINIEGA, R. A. (2004). **Shear Deformation Plate Theories: From Stavsky to Present**, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 11: pp. 535–582.
- REDDY, J. N.; OCHOA, O. O. (1996). **Finite Element Analysis of Composite Laminates**. *Kluwer Academic Print on Demand*, 1996. 3rd Edition
- SARAVANOS, D. A.; HEYLIGE, P. R.; HOPKINS, D. A. (1997). **Layerwise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plates**. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, pp. 359-378.
- SARTORATO, M.; MEDEIROS, R.; RIBEIRO, M.L; TITA, V. (2012). **A finite element for active composite plates with piezoelectric layers applied to composite cylinders**. In: VII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2012, São Luís. *Anais do VII CONEM*.
- SARTORATO, M.; MEDEIROS, R. ; RIBEIRO, M.L. ; TITA, V. (2013). **Transversal shear characterization of thick laminate composites using a representative volume element (RVE)**. *International Journal of Vehicle Structures and Systems*.
- SARTORATO, M.; TITA, V. (2011). **A finite element for composite laminated beams with a shear correction factor model**. In: 21th International Congress of Mechanical

Engineering (COBEM 2011), Natal-RN, Brasil. *Proceeding of 21th International Congress of Mechanical Engineering*.

SMITH, W. A.; AULD, A. (1991). **Modeling 1-3 Composite Piezoelectrics: Thickness Mode Oscillation** *IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics & Frequency Control*, vol. 38, n. 1, pp. 40-47

SULEMAN, A.; COSTA, A. P. (2004). **Adaptive control of an aeroelastic flight vehicle using piezoelectric actuators**. *Computers & Structures*, vol. 82, Issues 17-19, pp. 1303-1314

TZOU, H. S. (1993). **Piezoelectric Shells**, Kluwer Academic Publishers.

TZOU, H. S., TIERSTEN, H. F. (1994). **Elastic analysis of laminated composite plates in cylindrical bending due to piezoelectric actuators**. *Smart Mater Struct*, vol. 3, n. 3 pp. 255–265.

VARELIS, D., SARAVANOS, D. A. (2006). **Coupled mechanics and finite element for nonlinear laminated piezoelectric shallow shells undergoing large displacements and rotations**. *Int J Numer Methods Eng*, vol. 66:1211–33.

XIA, Z., ZHANG, Y., ELLYIN, F. (2003). **A unified periodical boundary conditions for representative volume elements of composites and applications**. *International Journal of Solids Structures*, Vol. 40, pp. 1907-1921.

WILKIE, W. K.; HIGH, W. J.; MIRICK, P. H.; FOX, R. L.; LITTLE, B. D.; BRYANT, R. G.; HELLBAUM, R. F.; JALINK, A. J. (2000). **Low-cost piezocomposite actuator for structural control applications**. In: *Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies, SPIE 7th International Symposium on Smart Structures and Materials*, Newport Beach, California.

WU, C. P.; LO, J. Y. (2006). **An asymptotic theory for dynamic response of laminated piezoelectric shells**. *Acta Mech*, 183:177–208

YANG, X. M.; SHEN, Y. P. (2001). **Dynamic instability of laminated piezoelectric shells**. *Int J Solids Struct*, 38:2291–303.

YANG-WU, D.; MEURE, S.; SOLOMON, D. (2008). **Self-healing polymeric materials: A review of recent developments**, *Progress in Polymer Science*, vol. 33, p. 479-522.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. (2000). **The Finite Element Method**, *Butterworth Heinemann*, Segunda Edição.

8 ANEXOS

8.1 ANEXO 1 – SIMPLIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS PIEZOELÉTRICAS DEVIDO A CONDIÇÕES DE CONTORNO

A Equação A1.1 mostra a matriz constitutiva para um material piezoelétrico transversalmente isotrópico com estrutura cristalina apresentando simetria hexagonal do tipo 6mm.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{13} \\ C_{12}^E & C_{11}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{13} \\ C_{13}^E & C_{13}^E & C_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & d_{11}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & d_{11}^E & 0 \\ e_{13} & e_{13} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (A1.1)$$

Aplicando a condição de estado de tensões quase-3D (ou seja $\sigma_3=0$) na terceira linha da matriz obtemos a Equação A1.2.

$$C_{13}^E \varepsilon_1 + C_{13}^E \varepsilon_2 + C_{33}^E \varepsilon_3 - e_{33} E_3 = 0 \quad (A1.2)$$

Resolvendo a Equação A1.2 em ε_{33} obtemos a expressão para deformação normal transversal ao plano na Equação A1.3.

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{C_{33}^E} (C_{13}^E \varepsilon_1 + C_{13}^E \varepsilon_2 - e_{33} E_3) \quad (A1.3)$$

Das linhas 1, 2 e 9 obtemos da Equação A1.1 relações para as tensões normais e deslocamento elétrico transversal, nas equações A1.4 a A1.6.

$$\sigma_1 = C_{11}^E \varepsilon_1 + C_{12}^E \varepsilon_2 + C_{13}^E \varepsilon_3 - e_{13} E_3 \quad (A1.4)$$

$$\sigma_2 = C_{12}^E \varepsilon_1 + C_{11}^E \varepsilon_2 + C_{13}^E \varepsilon_3 - e_{13} E_3 \quad (A1.5)$$

$$D_3 = e_{13} \varepsilon_1 + e_{13} \varepsilon_2 + e_{33} \varepsilon_3 + d_{33}^\varepsilon E_3 \quad (A1.6)$$

Substituindo a expressão obtida para ε_{33} nas equações A1.4 a A1.6, obtemos as expressões A1.7 a A1.9.

$$\sigma_1 = C_{11}^E \varepsilon_1 + C_{12}^E \varepsilon_2 + C_{13}^E \left[\frac{1}{C_{33}^E} (C_{13}^E \varepsilon_1 + C_{13}^E \varepsilon_2 - e_{33} E_3) \right] - e_{13} E_3 \quad (A1.7)$$

$$\sigma_2 = C_{12}^E \varepsilon_1 + C_{11}^E \varepsilon_2 + C_{13}^E \left[\frac{1}{C_{33}^E} (C_{13}^E \varepsilon_1 + C_{13}^E \varepsilon_2 - e_{33} E_3) \right] - e_{13} E_3 \quad (A1.8)$$

$$D_3 = e_{13} \varepsilon_1 + e_{13} \varepsilon_2 + e_{33} \left[\frac{1}{C_{33}^E} (C_{13}^E \varepsilon_1 + C_{13}^E \varepsilon_2 - e_{33} E_3) \right] + d_{33}^\varepsilon E_3 \quad (A1.9)$$

Reorganizando as expressões, obtemos:

$$\sigma_1 = \left(C_{11}^E + \frac{C_{13}^E{}^2}{C_{33}^E} \right) \varepsilon_1 + \left(C_{12}^E + \frac{C_{13}^E{}^2}{C_{33}^E} \right) \varepsilon_2 - \left(e_{13} + e_{33} \frac{C_{13}^E}{C_{33}^E} \right) E_3 \quad (A1.10)$$

$$\sigma_2 = \left(C_{12}^E + \frac{C_{13}^E{}^2}{C_{33}^E} \right) \varepsilon_1 + \left(C_{11}^E + \frac{C_{13}^E{}^2}{C_{33}^E} \right) \varepsilon_2 - \left(e_{13} + e_{33} \frac{C_{13}^E}{C_{33}^E} \right) E_3 \quad (A1.11)$$

$$D_3 = \left(e_{13} + e_{33} \frac{C_{13}^E}{C_{33}^E} \right) \varepsilon_1 + \left(e_{13} + e_{33} \frac{C_{13}^E}{C_{33}^E} \right) \varepsilon_2 + \left(d_{33}^\varepsilon - \frac{e_{33}^2}{C_{33}^E} \right) E_3 \quad (A1.12).$$

Assim obtemos a matriz constitutiva simplificada na Equação A1.13. Onde, $Q_{11} =$

$$C_{11}^E - \frac{C_{13}^E{}^2}{C_{33}^E}, Q_{22} = C_{22}^E - \frac{C_{13}^E{}^2}{C_{33}^E}, Q_{12} = C_{12}^E - \frac{C_{13}^E{}^2}{C_{33}^E}, e'_{13} = e_{13} - \frac{C_{13}^E}{C_{33}^E} e_{33} \text{ e } d'_{33} = d_{33} + \frac{e_{33}^2}{C_{33}^E}.$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e'_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e'_{13} \\ 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & d_{11}^\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & d_{11}^\varepsilon & 0 \\ e'_{13} & e'_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33}^{\varepsilon'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (A1.13)$$

Das linhas 6 e 7 dessa matriz obtemos as expressões A1.14, A1.15 e A1.16.

$$D_1 = e_{15}\varepsilon_5 + d_{11}^\varepsilon E_1 \quad (A1.14)$$

$$D_2 = e_{15}\varepsilon_4 + d_{11}^\varepsilon E_2 \quad (A1.15)$$

$$D_3 = \left(e_{13} + e_{33}\frac{C_{13}^E}{C_{33}^E}\right)\varepsilon_1 + \left(e_{13} + e_{33}\frac{C_{13}^E}{C_{33}^E}\right)\varepsilon_2 + \left(d_{33}^\varepsilon - \frac{e_{33}^2}{C_{33}^E}\right)E_3 \quad (A1.16)$$

De maneira análoga a anterior, podemos incluir condições de contorno elétricas para essas equações. Para o caso de eletrodos contínuos ou alternados, podemos utilizar a hipótese de campo uniaxial na direção 3, ou seja, $E_3 \neq 0$, $E_1 = E_2 = 0$, obtemos a matriz dada pela Equação A1.17.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 & -e'_{13} \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 & -e'_{13} \\ 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 \\ e'_{13} & e'_{13} & 0 & 0 & 0 & d_{33}^{\varepsilon'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (A1.17)$$

Nessa matriz, embora D_1 e D_2 existam, e sejam dependentes das deformações, é possível desconsiderar seus efeitos, pois, quando a equação de equilíbrio do sistema for escrita, seus termos são multiplicados por E_1 e E_2 , que por hipótese são nulos, não afetando o equilíbrio do sistema. Esse fato é verificado pela Equação A1.18. Assim obtemos a Equação A1.19.

$$\delta U = \int_{\Omega} \varepsilon \cdot \sigma - E \cdot D \, d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon \cdot \sigma - E_1 D_1 - E_2 D_2 - E_3 D_3 \, d\Omega \quad (A1.18)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 & -e'_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 & -e'_{13} \\ 0 & 0 & C_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 \\ e'_{13} & e'_{13} & 0 & 0 & 0 & d'_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (A1.19)$$

onde, $Q_{11} = C_{11}^E - \frac{C_{13}^{E^2}}{C_{33}^E}$, $Q_{22} = C_{22}^E - \frac{C_{13}^{E^2}}{C_{33}^E}$, $Q_{12} = C_{12}^E - \frac{C_{13}^{E^2}}{C_{33}^E}$, $e'_{13} = e_{13} - \frac{C_{13}^E}{C_{33}^E} e_{33}$,

$$d'_{33} = d_{33} + \frac{e_{33}^2}{C_{33}^E}.$$

De maneira análoga, utilizando a hipótese de eletrodos cruzados e de campo uniaxial na direção 1, ou seja, $E_1 \neq 0$, $E_2 = E_3 = 0$ obtemos a expressão da Equação A1.20.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & -e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & d_{11}^E \\ 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 \\ e'_{13} & e'_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_1 \end{Bmatrix} \quad (A1.20)$$

Da mesma forma, devido ao cálculo de equilíbrio vir da equação de energia, os termos em D_2 e D_3 podem ser ignorados, assim obtemos a matriz constitutiva mostrada na Equação A1.21.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & -e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & d_{11}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_1 \end{Bmatrix} \quad (A1.21)$$

onde, $Q_{11} = C_{11}^E - \frac{C_{13}^{E^2}}{C_{33}^E}$, $Q_{22} = C_{22}^E - \frac{C_{13}^{E^2}}{C_{33}^E}$, $Q_{12} = C_{12}^E - \frac{C_{13}^{E^2}}{C_{33}^E}$.

Por fim, utilizando a condição de contorno análoga de deslocamento elétrico uniaxial ao invés de campo uniaxial $D_1 = D_2 = 0$; $E_1, E_2 \neq 0$, das Equações A1.14 e A1.15 obtemos expressões para os campos E_1 e E_2 , mostradas nas Equações A1.22 e A1.23.

$$E_1 = \frac{e_{15}}{d_{11}^\varepsilon} \varepsilon_5 \quad (\text{A1.22})$$

$$E_2 = \frac{e_{15}}{d_{11}^\varepsilon} \varepsilon_4 \quad (\text{A1.23})$$

Analogamente ao caso mecânico, substituindo essas expressões nas linhas 3 e 4 da Equação A1.17 obtemos as expressões da Equação A1.24 e Equação A1.25.

$$\sigma_4 = C_{44}^E \varepsilon_4 - e_{15} E_2 = \left(C_{44}^E - \frac{e_{15}^2}{d_{11}^\varepsilon} \right) \varepsilon_4 \quad (\text{A1.24})$$

$$\sigma_5 = C_{44}^E \varepsilon_4 - e_{15} E_1 = \left(C_{44}^E - \frac{e_{15}^2}{d_{11}^\varepsilon} \right) \varepsilon_5 \quad (\text{A1.25})$$

Dessa forma, obtemos a matriz constitutiva encontrada na Equação A1.26.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 & -e'_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 & -e'_{13} \\ 0 & 0 & C_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ e'_{13} & e'_{13} & 0 & 0 & 0 & d'_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

onde, $Q_{11} = C_{11}^E - \frac{C_{13}^{E^2}}{C_{33}^E}$, $Q_{22} = C_{22}^E - \frac{C_{13}^{E^2}}{C_{33}^E}$, $Q_{12} = C_{12}^E - \frac{C_{13}^{E^2}}{C_{33}^E}$, $Q_{44} = C_{44}^E + \frac{e_{15}^2}{d_{11}^\varepsilon}$,
 $e'_{13} = e_{13} - \frac{C_{13}^E}{C_{33}^E} e_{33}$, $d'_{33} = d_{33} + \frac{e_{33}^2}{C_{33}^E}$.

8.2 ANEXO 2 – CONSIDERAÇÕES SOBRE AS HIPÓTESES DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO ELÉTRICAS SOBRE UMA CAMADA PIEZOELÉTRICA

Dadas a hipótese da existência de um campo aproximadamente uniaxial sobre uma camada piezoelétrica fabricada em material transversalmente isotrópico, com estrutura cristalina com simetria hexagonal do tipo 6mm, e construída seguindo a filosofia de MFCs ou AFCs, duas hipóteses para o restante das condições de campo e deslocamento elétrico geralmente são encontradas na literatura. A primeira consiste em campo elétrico uniaxial na presença de um campo de deslocamentos elétrico tridimensional ($E_1=E_2=0$; $D_1,D_2\neq 0$) e é possível fisicamente. A segunda consiste em deslocamento elétrico nulo nas direções 1 e 2 na condição de um campo elétrico tridimensional ($D_1=D_2=0$; $E_1,E_2\neq 0$) e é impossível fisicamente. Porém a impossibilidade física da segunda hipótese é de caráter fenomenológico, e difícil de explicar matematicamente.

Ambas essas hipóteses possuem razão de ser, já que mesmo a segunda sendo impossível fisicamente, simula melhor o comportamento de camadas piezoelétricas espessas de pequena dimensão. Isso ocorre, pois, nesse tipo de camada, os efeitos secundários de corrente de fuga e efeitos de borda são significativos. Nesse caso, a existência de um campo elétrico tridimensional se aproxima mais do caso real do que a existência de um campo tridimensional de deslocamentos elétricos.

Para melhor explicar a impossibilidade física, inicialmente deve-se retomar os conceitos de deslocamento elétrico e polarização. Polarização é um vetor abstrato que caracteriza o efeito macroscópico do momento elétrico resultante do alinhamento dos dipolos de uma microestrutura devido a presença de campo elétrico. Esse fenômeno está esquematizado na Figura 8.1.

Figura 8.1 – Representação esquemática da geração de polarização numa microestrutura [adaptado de PIEFORD, 2001]

Deslocamento elétrico por sua vez é o fenômeno da geração de fluxo de cargas dentro de um material devido à presença de polarização. Dessa forma, o deslocamento elétrico pode ser entendido como uma polarização induzida no material, e nunca surge sozinho, sendo sempre dependente da presença de polarização por momentos de dipolo. Porém esse fluxo de cargas, devido a atração magnética entre os elétrons em movimento e os pares de elétrons polarizados é contrário a polarização por momentos de dipolo. No caso de materiais puramente dielétricos, polarização só pode ser induzida por campos elétricos externos. Já no caso de materiais piezoelétricos, a assimetria de sua microestrutura faz com que deformações mecânicas gerem micro deslocamentos entre os elétrons e núcleos nos átomos, que causam momentos de dipolo que geram polarização local.

A relação entre campo elétrico, polarização e deslocamento elétrico é dada por definição pela Equação A2.1, onde ϵ_0 é a permissividade eletromagnética do meio, e P é o vetor de polarização no meio.

$$D = \epsilon_0 E + P \quad (A2.1)$$

Assim, para que a primeira hipótese aconteça ($E_1=E_2=0$; $D_1,D_2 \neq 0$), deformações mecânicas geradas pela própria estrutura, ou por efeito de Poisson vindas das deformações inerentes da presença de campo elétrico na direção 3 geram polarização nas direções 1 e 2, que por sua vez geram polarizações induzidas que são origem aos deslocamentos elétricos nas direções 1 e 2. Porém, como essas polarizações foram geradas mecanicamente, e não há carga total no meio, as cargas de superfície (dependentes de P) e as cargas livres (dependentes de D), embora existam localmente, se anulam sobre todo o transdutor.

Por sua vez, para que a segunda hipótese ($D_1=D_2=0$; $E_1, E_2 \neq 0$) aconteça, como sabe-se que o campo externo aplicado ao transdutor esta na direção 3; campos elétricos nas direções 1 e 2 devem ser gerados única e exclusivamente por polarização dielétrica. Essa polarização dielétrica aparece, como no primeiro caso, devido as deformações mecânicas. Porém, como a polarização é um efeito local, não consegue gerar um campo coeso sobre todo o transdutor de maneira que os deslocamentos elétricos não existam. Essa hipótese, portanto é uma impossibilidade física.

8.3 ANEXO 3 – MATRIZES DE COMPATIBILIDADE B E H EM FORMA EXPLÍCITA

Segundo a Teoria de Cascas Degeneradas de Zienkiewicz, a deformação mecânica de uma casca discretizada segundo funções de forma dadas pelo Método dos Elementos Finitos num dado ponto é dada em função dos graus de liberdade elementares $\hat{u}$ pela Equação A3.1. Nota-se que ξ_3 é a direção transversal a superfície média da casca.

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \\ - \\ u_{2,3} + u_{3,2} \\ u_{1,3} + u_{3,1} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} B_{m_0}^u + B_{m_0}^\theta + \xi_3 B_{m_1}^\theta \\ B_{t_0}^u + B_{t_0}^\theta + \xi_3 B_{t_1}^\theta \end{pmatrix} \hat{u} \quad (A3.1)$$

Onde as matrizes $B_{m_0}^u$, $B_{m_0}^\theta$, $B_{m_1}^\theta$, $B_{t_0}^u$, $B_{t_0}^\theta$, $B_{t_1}^\theta$, são dadas pelas Equações A3.2 a A3.7, nas quais n é o número de nós no elemento finito.

$$B_{m_0}^u = [B_{m_0}^{u\ 1} \ B_{m_0}^{u\ 2} \ B_{m_0}^{u\ 3} \ \dots \ B_{m_0}^{u\ n}] \quad (A3.2)$$

$$B_{m_0}^\theta = [B_{m_0}^{\theta\ 1} \ B_{m_0}^{\theta\ 2} \ B_{m_0}^{\theta\ 3} \ \dots \ B_{m_0}^{\theta\ n}] \quad (A3.3)$$

$$B_{m_1}^\theta = [B_{m_1}^{\theta\ 1} \ B_{m_1}^{\theta\ 2} \ B_{m_1}^{\theta\ 3} \ \dots \ B_{m_1}^{\theta\ n}] \quad (A3.4)$$

$$B_{t_0}^u = [B_{t_0}^{u\ 1} \ B_{t_0}^{u\ 2} \ B_{t_0}^{u\ 3} \ \dots \ B_{t_0}^{u\ n}] \quad (A3.5)$$

$$B_{t_0}^\theta = [B_{t_0}^{\theta\ 1} \ B_{t_0}^{\theta\ 2} \ B_{t_0}^{\theta\ 3} \ \dots \ B_{t_0}^{\theta\ n}] \quad (A3.6)$$

$$B_{t_1}^\theta = [B_{t_1}^{\theta\ 1} \ B_{t_1}^{\theta\ 2} \ B_{t_1}^{\theta\ 3} \ \dots \ B_{t_1}^{\theta\ n}] \quad (A3.7)$$

As componentes de cada matriz são dadas pelas equações A3.8 a A3.13, nas quais $k, l=1..3$. Deve-se notar que as matrizes J^{-1} , T^n e H^n são respectivamente: a matriz jacobiana inversa, a matriz de mudança de coordenadas do sistema isoparamétrico para o sistema global, a matriz de mudança de coordenadas dos graus de liberdade de rotação globais para locais.

Suas definições podem ser encontradas na Seção 4 nas Equações 4.14 e 4.16. ϕ_n expressão as funções de forma.

$$B_{m_0}^{u\ n} = \begin{bmatrix} \phi_{n,k} J_{1l}^{-1} T_{l1}^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{n,k} J_{2l}^{-1} T_{l2}^n & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{n,k} J_{1l}^{-1} T_{l2}^n & \phi_{n,k} J_{2l}^{-1} T_{l1}^n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A3.8)$$

$$B_{m_0}^{\theta\ n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_{3k} \frac{h_n}{2} \phi_n H_{11}^n J_{1l}^{-1} T_{l1}^n & \delta_{3k} \frac{h_n}{2} \phi_n H_{12}^n J_{1l}^{-1} T_{l1}^n \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{3k} \frac{h_n}{2} \phi_n H_{21}^n J_{2l}^{-1} T_{l2}^n & \delta_{3k} \frac{h_n}{2} \phi_n H_{22}^n J_{2l}^{-1} T_{l2}^n \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{3k} \frac{h_n}{2} \phi_n (H_{11}^n J_{1l}^{-1} T_{l2}^n + H_{21}^n J_{2l}^{-1} T_{l1}^n) & \delta_{3k} \frac{h_n}{2} \phi_n (H_{11}^n J_{1l}^{-1} T_{l2}^n + H_{21}^n J_{2l}^{-1} T_{l1}^n) \end{bmatrix} \quad (A3.9)$$

$$B_{m_1}^{\theta\ n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{h_n}{2} \phi_{n,k} H_{11}^n J_{1l}^{-1} T_{l1}^n & \frac{h_n}{2} \phi_{n,k} H_{12}^n J_{1l}^{-1} T_{l1}^n \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_n}{2} \phi_{n,k} H_{21}^n J_{2l}^{-1} T_{l2}^n & \delta_{3k} \frac{h_n}{2} \phi_{n,k} H_{22}^n J_{2l}^{-1} T_{l2}^n \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_n}{2} \phi_{n,k} (H_{11}^n J_{1l}^{-1} T_{l2}^n + H_{21}^n J_{2l}^{-1} T_{l1}^n) & \frac{h_n}{2} \phi_{n,k} (H_{11}^n J_{1l}^{-1} T_{l2}^n + H_{21}^n J_{2l}^{-1} T_{l1}^n) \end{bmatrix} \quad (A3.10)$$

$$B_{t_0}^{u\ n} = \begin{bmatrix} 0 & \phi_{n,k} J_{2l}^{-1} T_{l3}^n & \phi_{n,k} J_{2l}^{-1} T_{l3}^n & 0 & 0 \\ \phi_{n,k} J_{1l}^{-1} T_{l3}^n & 0 & \phi_{n,k} J_{1l}^{-1} T_{l3}^n & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A3.11)$$

$$B_{t_0}^{\theta\ n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_{3k} \frac{h_n}{2} \phi_n (H_{21}^n J_{2l}^{-1} T_{l3}^n + H_{31}^n J_{2l}^{-1} T_{l2}^n) & \delta_{3k} \frac{h_n}{2} \phi_n (H_{22}^n J_{2l}^{-1} T_{l3}^n + H_{32}^n J_{3l}^{-1} T_{l2}^n) \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{3k} \frac{h_n}{2} \phi_n (H_{11}^n J_{1l}^{-1} T_{l3}^n + H_{31}^n J_{1l}^{-1} T_{l3}^n) & \delta_{3k} \frac{h_n}{2} \phi_n (H_{12}^n J_{1l}^{-1} T_{l3}^n + H_{32}^n J_{3l}^{-1} T_{l1}^n) \end{bmatrix} \quad (A3.12)$$

$$B_{t_1}^{\theta\ n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{h_n}{2} \phi_{n,k} (H_{21}^n J_{2l}^{-1} T_{l3}^n + H_{31}^n J_{2l}^{-1} T_{l2}^n) & \frac{h_n}{2} \phi_{n,k} (H_{22}^n J_{2l}^{-1} T_{l3}^n + H_{32}^n J_{3l}^{-1} T_{l2}^n) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_n}{2} \phi_{n,k} (H_{11}^n J_{1l}^{-1} T_{l3}^n + H_{31}^n J_{1l}^{-1} T_{l3}^n) & \frac{h_n}{2} \phi_{n,k} (H_{12}^n J_{1l}^{-1} T_{l3}^n + H_{32}^n J_{3l}^{-1} T_{l1}^n) \end{bmatrix} \quad (A3.13)$$

A equação A3.1 ainda pode ser simplificada para efeitos de cálculos de energia no elemento segundo as Equações A3.14 a A3.16.

$$\varepsilon = (B_0 + \xi_3 B_1) \hat{u} \quad (A3.14)$$

$$B_0 = \begin{Bmatrix} B_{m_0}^u + B_{m_0}^\theta \\ B_{t_0}^u + B_{t_0}^\theta \end{Bmatrix} \quad (A3.15)$$

$$B_1 = \begin{Bmatrix} B_{m_1}^\theta \\ B_{t_1}^\theta \end{Bmatrix} \quad (A3.16)$$

Da mesma maneira, segundo a Teoria de Cascas Degeneradas de Zienkiewicz, o vetor dos graus de liberdade mecânicos de um ponto qualquer de uma casca $u = (u_1, u_2, u_3, \theta_1, \theta_2)$ pode ser escrito segundo os graus de liberdade mecânicos nodais de um elemento finito $\hat{u}$ segundo a Equação A3.17. A expressão para $\hat{u}$ é dada pela Equação A3.18. As expressões para as matrizes H_0 e H_1 são dadas pelas Equações A3.19 e A3.20, enquanto seus termos são dados pelas Equações A3.21 e A3.22.

$$u = (H_0 + \xi_3 H_1) \hat{u} \quad (A3.17)$$

$$\hat{u} = \{u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad \theta_1^1 \quad \theta_2^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \quad \theta_1^2 \quad \theta_2^2 \quad \dots \quad u_1^n \quad u_2^n \quad u_3^n \quad \theta_1^n \quad \theta_2^n\}^T \quad (A3.18)$$

$$H_0 = [H_0^1 \quad H_0^2 \quad H_0^3 \quad \dots \quad H_0^n] \quad (A3.19)$$

$$H_1 = [H_1^1 \quad H_1^2 \quad H_1^3 \quad \dots \quad H_1^n] \quad (A3.20)$$

$$H_0^n = \begin{bmatrix} \phi_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A3.21)$$

$$H_1^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{h_n}{2} \phi_n H_{11}^n & \frac{h_n}{2} \phi_n H_{12}^n \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_n}{2} \phi_n H_{21}^n & \frac{h_n}{2} \phi_n H_{22}^n \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_n}{2} \phi_n H_{31}^n & \frac{h_n}{2} \phi_n H_{32}^n \end{bmatrix} \quad (A3.22)$$

A relação de compatibilidade entre o campo elétrico e a diferença de potencial elétrico aplicado a uma dada camada piezoelétrica é definida segundo a Equação A3.23, na qual E é o campo elétrico, φ os potenciais aplicados sobre cada nó e h^n as espessuras em cada nó. A matriz B_φ é definida segundo a Equação A3.24.

$$E = B_\varphi \varphi \quad (\text{A3.23})$$

$$B_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\phi_1}{h_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\phi_2}{h_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\phi_3}{h_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\phi_n}{h_n} \end{bmatrix} \quad (\text{A3.24})$$

Por fim ainda são definidas as matrizes B_u^m , B_u^t e $B_{u\varphi}$. As matrizes B_u^m , B_u^t e $B_{u\varphi}$ são definidas, respectivamente, pelas Equações A3.25 a A3.27 e são utilizadas como matrizes de simplificação nos cálculos de energia de um elemento finito de casca laminada inteligente.

$$B_u^m = \begin{bmatrix} B_{m_0}^u + B_{m_0}^\theta \\ B_{m_1}^\theta \end{bmatrix} \quad (\text{A3.25})$$

$$B_u^t = \begin{bmatrix} B_{t_0}^u + B_{t_0}^\theta \\ B_{t_1}^\theta \end{bmatrix} \quad (\text{A3.26})$$

$$B_{u\varphi} = \begin{bmatrix} B_{m_0}^u \\ B_{m_1}^\theta \end{bmatrix} \quad (\text{A3.27})$$

8.4 ANEXO 4 – PUBLICAÇÕES VINCULADAS AO PROJETO

8.4.1 Artigos publicados em anais de congressos

- RIBEIRO, R. M.; MEDEIROS, R.; SARTORATO, M.; TITA, V. (2012) **Damage detection in carbon-fiber filament winding cylinder using smart piezoceramic**. In: VII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2012, São Luís. *Anais do VII CONEM*.
- SARTORATO, M. ; TITA, V. ; MEDEIROS, R. ; RIBEIRO, M.L. (2012). **A finite element for active composite plates with piezoelectric layers applied to composite cylinders**. In: VII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2012, São Luís. *Anais do VII CONEM*.
- SARTORATO, M. ; MEDEIROS, R. ; RIBEIRO, M.L. ; TITA, V. (2012). **Transversal shear characterization of thick laminated composite using a representative volume element (RVE)**. In: I Brazilian Conference on Composite Materials, 2012, Natal. *Proceedings of I BCCM*.
- RIBEIRO, M.L. ; MARTINS, T. H. P. ; SARTORATO, M. ; TITA, V. ; VANDEPITTE, D. (2012). **Experimental analysis of low energy impact in filament winding cylinders**. In: I Brazilian Conference on Composite Materials, 2012, Natal. *Proceedings of I BCCM*.
- RIBEIRO, M.L. ; SARTORATO, M. ; FERREIRA, G. F. O. ; TITA, V. ; VANDEPITTE, D. (2012). **Evaluation of progressive failure of filament winding composite structures under multiple stress state**. In: I Brazilian Conference on Composite Materials, 2012, Natal. *Proceedings of I BCCM*.
- SARTORATO, M. ; MEDEIROS, R. ; TITA, V. (2012). **A finite element for active composite plates with piezoelectric layers and experimental validation**. In: X World Congress on Computational Mechanics, 2012, São Paulo. *Proceedings of X WCCM*.
- MEDEIROS, R. ; SARTORATO, M. ; RIBEIRO, M.L. ; VANDEPITTE, D. ; TITA, V. (2012). **Numerical and experimental analyses about SHM metrics using piezoelectric materials**. In: International Conference on Noise and Vibration Engineering 2012, 2012, Leuven. *Proceedings of ISMA 2012*.
- SARTORATO, M. ; TITA, V. (2011). **A finite element for composite laminated beams with a shear correction factor model**. In: 21th International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2011), 2011, Natal. *Proceeding of 21th International Congress of Mechanical Engineering*.

8.4.2 Resumos submetidos para congressos

- SARTORATO, M. ; TITA, V. (2013). **Transversal shear characterization of laminate composites plates and its influence on impact analysis of aircraft tails**. In: 22th

International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013), 2013, Ribeirão Preto.

SARTORATO, M.; MEDEIROS, R.; MARQUES, F. D. ; DIRK, V. ; TITA, V. (2013) **Vibration-based damage identification applied for composite plate: numerical analyses**. In: 22th International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013), 2013, Ribeirão Preto.

8.4.3 Artigos aceitos para publicação

SARTORATO, M. ; MEDEIROS, R. ; RIBEIRO, M.L. ; TITA, V. (2013). **Transversal shear characterization of thick laminate composites using a representative volume element (RVE)**. *International Journal of Vehicle Structures and Systems*.

RIBEIRO, M.L. ; MARTINS, T. H. P. ; SARTORATO, M. ; FERREIRA, G. F. O. ; TITA, V. ; VANDEPITTE, D. (2013). **Experimental analysis of low energy impact on filament winding cylinders**. *International Journal of Vehicle Structures and Systems*.

8.5 ANEXO 5 – FLUXOGRAMAS DO PSEUDO-ALGORITMO DOS CÓDIGOS IMPLEMENTADOS PARA O PROGRAMA *STAND-ALONE* EM PYTHON

8.6 ANEXO 6 – FLUXOGRAMA DO FUNCIONAMENTO BÁSICO DA UEL IMPLEMENTADA

(Próxima página)