Alexandre Bernardes de Barros

Análise de desempenho e ruído de hélices de
mínima perda de energia.

Teste apresentada a Escola de Engenharia de São
Carlos da USP para obtenção do título de mestre em
engenharia

Área de concentração: engenharia aeronáutica
Orientador: Prof. Dr. Fernando Martini Catalano

v.1

São Carlos
2009

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTES
TRABALHOS, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO,
PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

B277a Barros, Alexandre Bernardes de.
 Análise de desempenho e ruído de hélices de mínima
perda de energia / Alexandre Bernardes de Barros;
orientador Fernando Martini Catalano. – São Carlos,
2009.

 Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-graduação em
Engenharia Mecânica e Área de concentração em Aeronaves)
– Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de
São Paulo, 2009.

 1. Hélices de aeronaves – desempenho. 2. Ruído.
I. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

SUBSTITUIR PELA FOLHA DE APROVAÇÃO DEFINITIVA!

INTENCIONALMENTE DEIXADA EM BRANCO

DEDICATÓRIA

A Tâmara, minha amada esposa, com amor, admiração e gratidão por sua compreensão, carinho, presença e incansável apoio desde a minha decisão por retornar a carreira acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, o prof. Dr. Fernando Martini Catalano, por ter me aceitado como seu orientado e por todo o apoio durante a execução deste trabalho.

Aos amigos, prof. Alvaro Abdala e prof. James Waterhouse pelas dicas valiosas para execução deste trabalho e também pelos agradáveis momentos de descontração, nos intervalos do café e almoços.

Resumo

Revista os métodos para cálculo de desempenho e ruído de hélices. Apresenta um método para determinação de desempenho de hélices com mínima perda de energia usando a teoria dos vórtices. Faz uso das tabelas de Goldstein que criam automaticamente a geometria da hélice através do acesso a um banco de dados aerodinâmico. Avalia o ruído harmônico com o método no domínio da frequência, utilizando os valores de desempenho e geometria previamente calculados. Valida o método de desempenho e ruído através da comparação com dados experimentais. Apresenta um estudo de caso para desempenho e ruído de hélices aplicados a ultraleves e aviação geral e compara as diferentes configurações e seus efeitos no desempenho e ruído. Conclui que a simplicidade de implantação do método o torna indicado para o projeto preliminar e permite que seja integrado com modelos de otimização.

Palavras-chave: hélice. Desempenho. Ruído.

Abstract

This paper reviews the methods of propeller performance and noise calculation. It presents a prediction method for propellers performance with minimum energy loss. The method uses the vortex theory, using the Goldstein circulation function tables for performance determination, linked with an aerodynamic database for propeller geometry generation. The results are used for a quick evaluation of propeller harmonic noise through the frequency domain method. The method is validated by comparison with experimental data. It presents a case study of propeller designed for a Very Light Aircraft, comparing different configurations and its effects on performance and noise. The method is recommended in the framework of preliminary design and for integration with optimization algorithms.

Keywords: propeller. Performance. Noise.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Fig.1 – Sistema de velocidades e pressão na teoria de conservação de energia
- Fig.2 – Sistema de forças e velocidades no elemento de pá de hélice
- Fig.3 – Lâminas de vórtices helicoidais de uma hélice quadripá
- Fig.4 – Comparação de desempenho de alguns perfis aerodinâmicos usados no banco de dados
- Fig.5 – Exemplos de geometria de perfis desenvolvidos para hélices
- Fig.6 – A hélice e seu sistema de vórtices
- Fig.7 – O escoamento em torno da onda helicoidal
- Fig.8 – Distribuição de circulação de Goldstein
- Fig.9 – Influência da presença de um *spinner* na função de distribuição de circulação de Goldstein
- Fig.10 – Comparação entre os dados obtidos usando o método proposto neste trabalho e o método apresentado na referência 8
- Fig.11 – Eficiência da hélice em função da razão de avanço
- Fig.12 – Características do ruído harmônico
- Fig.13 – Características do ruído aleatório de banda estreita
- Fig.14 – Características do ruído aleatório de banda larga
- Fig.15 – Características e classificação do ruído quanto ao mecanismo de geração
- Fig.16 – Geometria do sistema de corpo sólido em movimento em escoamento uniforme
- Fig.17 – Relação entre o ângulo visual e ângulo com atraso
- Fig.18 – Relação entre o ângulo visual e ângulo com atraso em função da velocidade de deslocamento da hélice
- Fig.19 – Função de distribuição de espessura
- Fig.20 – Função de distribuição de carregamento
- Fig.21 – Comportamento da função Bessel de ordem diferente de zero
- Fig.22 – Comparação entre os valores de ruído calculados com o modelo apresentado e os valores apresentados na referência 23.
- Fig.23 - Fluxograma do cálculo de desempenho e ruído
- Fig.24 - Efeito da razão de avanço na geometria ótima de uma hélice para aviação leve
- Fig.25 - Função de espessura mínima da pá

Fig.26 - Forma em planta e distribuição de espessura para uma hélice bipá para aeronaves da categoria LSA

Fig.27 - Forma em planta e distribuição de espessura para uma hélice bipá para aeronaves da categoria LSA

Fig.28 - Comparação entre o ruído gerado por hélices bipás e tripás projetadas para uso em aeronaves da categoria LSA

Fig.29 - Derivadas aerodinâmicas da hélice usada na validação do modelo aerodinâmico.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Função de circulação de Goldstein para $B=2$

Tabela 2. Função de circulação de Goldstein para $B=3$

Tabela 3. Função de circulação de Goldstein para $B=4$

Tabela 4. Função de circulação de Goldstein para $B=5$

Tabela 5. Função de circulação de Goldstein para $B=6$

Tabela 6. Coeficiente de massa ε de Theodorsen

Tabela 7. Coeficiente ε/κ

SIMBOLOGIA

a_0 = razão de sustentação em função do ângulo de ataque. $a_0 = dC_l/d\alpha$

B = número de pás

B_D = relação entre a corda do elemento de pá e o diâmetro

c = corda do elemento de pá

c_0 = velocidade do som

C_L = coeficiente de sustentação do elemento de pá

C_D = coeficiente de arrasto do elemento de pá

C_p = Coeficiente de potência $C_p = P / \frac{1}{2} \rho \pi R^2 V^3$

C_{p_1} = Coeficiente de potência $C_{p_1} = P / \frac{1}{2} \rho \pi R_1^2 V^3$

C_P = Coeficiente de potência $C_P = P / \rho n^3 D^5$

C_P/dr = derivada do coeficiente de potência em relação ao raio da hélice

C_q = Coeficiente de torque $C_q = Q / \frac{1}{2} \rho \pi R^3 V^2$

C_Q = Coeficiente de torque $C_Q = Q / \rho n^2 D^5$

C_Q/dr = derivada do coeficiente de torque em relação ao raio da hélice

C_t = Coeficiente de tração $C_t = T / \frac{1}{2} \rho \pi R^2 V^2$

C_T = Coeficiente de tração $C_T = T / \rho n^2 D^4$

C_T/dr = derivada do coeficiente de tração em relação ao raio da hélice

D = diâmetro da hélice

$G(r, \lambda_2)$ = função de circulação de Goldstein

h = distância axial entre duas voltas adjacentes da lâmina de vórtices.

$h = 2\pi(V + w)/\Omega B$

J = razão de avanço (V/nD)

J_{mB} = função Bessel

K = circulação

K_x = parâmetro de não compactação das fontes de ruído

K_y = número da onda

L = sustentação

MCA = distância entre a linha de centro do eixo da pá e a meia corda do perfil

M_r = Mach resultante na pá

M_t = Mach tangencial na ponta da hélice

M_x = Mach de voo

p = pressão, pressão acústica

P_{Vm} = harmônica de ruído devido a espessura

P_{Dm} = harmônica de ruído devido ao arrasto

P_{Lm} = harmônica de ruído devido a sustentação

Q = torque disponível

Q_c = coeficiente de torque. $Q_c = 8C_Q/\pi^3$

r, r_0 = coordenada radial no plano da hélice

R, R_0 = raio da hélice

r_1 = coordenada radial no sistema de vórtices

R_1 = raio da extremidade da lâmina de vórtices

r_h = raio do *spinner*

t = espessura do perfil

T = tração da hélice

t_b = espessura do perfil em relação a corda

u_{θ_0} = componente tangencial da velocidade induzida no elemento de pá

u_{z_0} = componente axial da velocidade induzida no elemento de pá

U_0 = velocidade resultante do elemento de pá

V = velocidade linear

w = velocidade axial de deslocamento da lâmina de vórtices helicoidal

$$\bar{w} = \frac{w}{V}$$

x = coordenada radial adimensional no plano da hélice. $x = r / R$

x_1 = coordenada radial adimensional no sistema de vórtices. $x = r / R_1$

y = distância lateral

z = coordenada axial a partir do plano da hélice no sentido do escoamento (cap.3).

Coordenada radial adimensional do elemento de pá (cap.4)

α = ângulo de ataque

α_{L_0} = ângulo de ataque na qual a sustentação do perfil é nula

β = ângulo geométrico da pá

ε = fator de perda axial de Theodorsen

ϕ_0 = ângulo entre a velocidade resultante e o plano da hélice

ϕ_s = ângulo de atraso devido ao enflechamento da pá

Φ = função potencial

κ = coeficiente de massa de Theodorsen

λ = razão de avanço. $\lambda = V / \Omega R$

λ_1 = razão de avanço. $\lambda_1 = V / \Omega R_1$

$\lambda_2 = (V + w) / \Omega R_1 = (1 + \bar{w}) \lambda_1$

θ = ângulo da pá (cap. 3), ângulo de propagação sonora com atraso (cap. 4)

θ_1 = ângulo de propagação sonora com referência no observador

ρ, ρ_0 = densidade do ar

σ = razão de solidez ($Bc/2\pi R$)

Ω = velocidade angular

ψ = transformadas de Fourier das funções de espessura e carregamento

SUMÁRIO

1. Introdução	14
2. Revisão Histórica dos Modelos de Desempenho	16
2.1 Teoria da Conservação de Energia	17
2.2 A Teoria do Elemento de Pá.....	18
2.3 A Teoria dos Vórtices.....	20
2.4 O desenvolvimento de novos aerofólios	21
2.5 Novos Métodos para Cálculo de Desempenho.....	24
3. A Teoria dos Vórtices	26
3.1 Introdução	26
3.2 Princípios Básicos.....	28
3.3 A cinemática do sistema de vórtices helicoidal	33
3.4 Hélices de mínima perda de energia	35
3.5 A Função de Goldstein / Theodorsen	38
3.6 Tração de uma hélice com distribuição ideal de carregamento	40
3.7 Projeto de hélice com mínima perda de energia.....	42
3.8 Desempenho de uma hélice conhecida	53
3.9 Validação do modelo de desempenho.....	55
4. Ruído de hélices.....	59
4.1 Introdução	59
4.2 Características do ruído de hélices.....	59
4.3 As fontes de ruído.....	65
4.4 Modelo de previsão de ruído	69
4.5 Método do domínio da frequência	72
4.6 Validação do modelo de previsão de ruído.....	78
5. Resultados	80
6. Conclusão	88

1. Introdução

A capacidade dos principais aeroportos do mundo está próxima do ponto de saturação e a possibilidade de construção de novos aeroportos ou expansão dos existentes é em muitos casos inviável. O aumento na demanda por transporte aéreo nos próximos anos deverá ser atendido através de uma mudança na maneira que este é efetuado. A solução prevista por grupos de estudos^{1,2} dos EUA, aponta o incentivo ao crescimento da aviação geral em substituição de parte da aviação regional. As previsões são de aumento do movimento dos táxi aéreos operando a partir de pequenas cidades e o do número de aeronaves leves operadas por particulares.

A tendência de aumento da demanda por pequenas aeronaves renova a necessidade de pesquisa sobre hélices. Estas continuam sendo o principal sistema propulsivo de pequenas aeronaves, justificado pelo baixo custo e alta eficiência propulsiva.

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma metodologia para o projeto preliminar de hélices que permita uma avaliação rápida de desempenho e ruído em diferentes configurações e apresenta um estudo de caso com foco em aviação leve. Para isso, desenvolveu um modelo de desempenho baseado na teoria dos vórtices, utilizando as tabelas de Goldstein. A geometria da hélice é criada automaticamente, com o acesso a um banco de dados aerodinâmico. As características geométricas e a distribuição de cargas aerodinâmicas ao longo da hélice permitem estimar o ruído harmônico produzido, utilizando um método no domínio da frequência.

Este trabalho é dividido em 6 partes principais. O capítulo 2 apresenta uma revisão histórica dos métodos de desempenho de hélices, onde justificamos a escolha pelo uso da teoria dos vórtices. No capítulo 3 apresentamos a teoria do vórtice em detalhe, o método para cálculo de desempenho na condição de projeto (*on design*) e em qualquer condição (*off design*). Comparamos os valores obtidos no modelo com dados experimentais disponíveis na literatura para validação.

O capítulo 4 apresenta uma introdução sobre os parâmetros que influenciam a geração de ruído em hélices e em seguida descreve o método para previsão de ruído harmônico no domínio da frequência. Novamente valores experimentais são utilizados para validação do modelo.

O capítulo 5 apresenta os resultados obtidos, como desempenho, geometria e ruído gerado por hélices de 2 e 3 pás, projetadas para uso em ultra leves avançados. Finalmente o capítulo 6 apresenta as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2. Revisão Histórica dos Modelos de Desempenho

O desenvolvimento da aerodinâmica de hélices foi desacelerado com o surgimento das grandes aeronaves de transporte a partir da década de 50. O desenvolvimento foi retomado na década de 80, após a crise do petróleo, onde se buscou a expansão do envelope de utilização das hélices a níveis próximos dos *turbofans* com a utilização dos *propfans*. Na mesma época, também se desenvolveram os principais métodos para previsão de ruído, assunto que começou a ser considerado, em função da busca pelo conforto de ocupantes de aeronaves e legislações ambientais. Recentemente, alguns projetos retornam a utilizar hélices, na maioria dos casos, aeronaves de transporte militar e pequenas aeronaves.

Novos processos de fabricação e o desenvolvimento de novos perfis aerodinâmicos tem sido a principal inovação das hélices modernas. Com relação a projeto a principal inovação é o uso da aerodinâmica computacional.

Modernos modelos de previsão de desempenho incluem grande precisão e consideram efeitos tridimensionais e compressibilidade³. Métodos para projeto preliminar de hélices deixam a desejar, no sentido de não considerar a máxima eficiência possível para uma determinada condição de operação, porque desconsideram o arrasto de perfil das pás. O conceito de eficiência ideal foi inicialmente apresentado por Betz⁴ e amplamente divulgado por Theodorsen⁵, referência presente em praticamente todos os trabalhos sobre hélices. Estudos recentes, como o de Ribner⁶ e mais recentemente de Wald⁷, revisam e aprimoram o trabalho de Theodorsen permitindo seu uso com relativa simplicidade.

2.1 Teoria da Conservação de Energia

A função de uma hélice ou qualquer outro dispositivo de propulsão é gerar tração ao longo de seu eixo axial. A tração é produzida deslocando-se o ar para trás e sua produção está associada com a energia cinética inserida no fluido.

Para termos um dispositivo de geração de tração sem perdas de energia, todo o trabalho inserido na hélice deve ser convertido em tração. Para isso ocorrer deveríamos ter a velocidade induzida, tanto axial quanto rotacional igual a zero. As perdas adicionais de energia estão relacionadas com a rotação do escoamento gerado pelo torque da hélice e o arrasto, gerado pelo perfil aerodinâmico da pá.

Fig.1 – Sistema de velocidades e pressão na teoria de conservação de energia

A teoria de conservação de energia axial assume que não há movimento rotacional no escoamento e que uma hélice pode ser substituída por disco de atuação que produz um aumento abrupto na pressão do ar sem aumento de velocidade, como na Figura 1. De maneira mais geral, o escoamento terá um movimento rotacional induzido pela reação ao torque da hélice, implicando em uma perda adicional de energia. Para considerar os efeitos de rotação no escoamento é necessário assumir que o disco de atuação aplica um efeito de rotação no escoamento sem alterar as componentes radiais e axiais do escoamento. Glauert⁸ demonstrou que as perdas de eficiência devido ao movimento rotacional do escoamento são praticamente desprezíveis em hélices projetadas corretamente.

A teoria de conservação de energia possui pouca aplicação prática em projeto de hélices. A conclusão geral é que a velocidade induzida a uma distância no escoamento após o disco de atuação é dobro da velocidade no disco. Também concluímos que a eficiência da hélice é maior quanto menor for a velocidade induzida, o que é possível quanto maior for o disco de atuação ou seja, o diâmetro da hélice.

2.2 A Teoria do Elemento de Pá

A teoria de conservação de energia aplicada ao desempenho de hélices considera que as velocidades axiais e rotacionais do escoamento são conhecidas e que a tração e o torque da hélice são obtidos através da variação de energia no escoamento. Através da teoria é possível determinar a máxima eficiência possível para uma determinada hélice em função da sua razão de avanço e potência absorvida. Por outro lado é impossível determinar a geometria em planta, número de

pás ou perfis capazes de gerar tal resultado.

A primeira tentativa de teoria de elemento de pá foi obtida por Froude⁹, mas o desenvolvimento da teoria de pá é atribuído ao trabalho de S. Drzewiecki¹⁰.

O desenvolvimento da teoria de elemento de pá é baseado na hipótese de que as forças atuantes em uma seção de uma pá são as mesmas atuando em um perfil bidimensional em um escoamento com a mesma velocidade resultante e mesmo ângulo de ataque (Figura 2). A tração e torque total da pá são calculados somando-se todas componentes dos elementos. A teoria assume que não há interferência entre os elementos de pá adjacentes.

Fig.2 – Sistema de forças e velocidades no elemento de pá de hélice

A grande limitação da teoria como inicialmente proposta foi desconsiderar os efeitos das velocidades induzidas. Todas as perdas de eficiência consideradas eram devidas ao arrasto dos perfis. Como consequência desta simplificação, a teoria previa que a eficiência das hélices aumentaria com a redução de diâmetro em oposição ao previsto na teoria de conservação de energia. Somente quando

Glauert¹¹ adaptou a teoria de vórtices de Prandtl, foi possível a união das duas teorias, proporcionando dados compatíveis com o desempenho apresentados pelas hélices projetadas época. Como limitação ainda se considerava um número infinito de pás.

2.3 A Teoria dos Vórtices

A teoria dos vórtices de hélices é baseada no conceito que vórtices se desprendem das pás da hélice em seu movimento de rotação e se movem pelo escoamento como uma lâmina de vórtices na forma de um helicóide. A velocidade de interferência afetando as pás da hélice deve ser calculada como a velocidade induzida do sistema de vórtices. O efeito aerodinâmico em cada elemento de pá considera o efeito das velocidades modificadas pelo helicóide, associada com as características bidimensionais de cada perfil aerodinâmico do elemento de pá, como se cada elemento da pá estivesse em escoamento bidimensional.

Fig.3 – Lâminas de vórtices helicoidais de uma hélice quadripá

O cálculo tradicional das velocidades induzidas é complexo e a análise normalmente considera um número infinito de pás. Como consequência desta hipótese simplificadora, a velocidade induzida possui um valor uniforme ao longo do disco de hélice e a teoria se torna basicamente igual a teoria de elemento de pá (incluindo as velocidades induzidas determinadas pela teoria da conservação de energia e calculando a tração e torque do elemento de pá através do uso de dados bidimensionais do perfil). O efeito da periodicidade do escoamento (que realmente ocorre em hélices com número finito de pás), bem como efeitos de compressibilidade, pode ser estimado através de correções posteriores.

2.4 O desenvolvimento de novos aerofólios

Nos primórdios, o uso de perfis com intra-dorso chatos eram praticamente mandatórios na fabricação de hélices, facilitando a fabricação de hélices em

madeira. Na Inglaterra o perfil RAF6 rapidamente entrou em utilização e manteve-se em uso até a segunda guerra. Os resultados de diversas pesquisas realizadas com esses perfis os tornaram praticamente um padrão naquele país e foi substituído durante a segunda guerra pelo perfil Clark Y. À medida que os dados do perfil Clark Y foram publicados, ele atraiu cada vez mais adeptos. Até os dias de hoje este tipo de perfil é utilizado em aviação geral.

Fig.4 – Comparação de desempenho de alguns perfis aerodinâmicos usados no banco de dados

No final de segunda guerra surgiram as primeiras publicações sobre a série 16 de aerofólios da NACA, capazes de melhor desempenho principalmente em altas velocidades. Em pouco tempo tal família de aerofólios passou a ser amplamente utilizada por fabricantes de hélices em todo o mundo.

Na década de 70, a ARA – Aircraft Research Association desenvolveu em parceria com o fabricante de hélices Dowty, a família ARA-D de perfis para hélices. Essa

família de aerofólios tem como característica principal a capacidade de gerar alta sustentação sem sacrifício de desempenho em grandes velocidades.

Famílias mais recentes de aerofólios para hélice incluem a família Eppler E85x, Martin Hepperle MH 11x, família HORxx, desenvolvido pela francesa Onera. A Figura 4 apresenta uma comparação do desempenho de alguns destes perfis, operando nas mesmas condições. A Figura 5 apresenta as características geométricas destes perfis.

O programa computacional desenvolvido neste trabalho permite a análise de um banco de dados de perfis gerado com o uso do código Xfoil¹². Não é necessário escolher previamente qual o perfil deverá ser utilizado. Desta forma é possível incluir novos perfis no futuro ou atualizar os dados dos perfis armazenados com valores experimentais.

Fig.5 – Exemplos de geometria de perfis desenvolvidos para hélices

2.5 Novos Métodos para Cálculo de Desempenho

Com a crise de petróleo na década de 80 houve uma nova frente de estudos sobre hélices, particularmente, o desenvolvimento de métodos baseados em aerodinâmica computacional, permitindo o projeto de hélices com alto carregamento e considerando efeitos de compressibilidade, enflechamento, bem como possibilidade avaliar o desempenho de hélices contra-rotativas.

Os dois métodos mais comuns de aerodinâmica computacional consistem na

solução das equações do potencial aerodinamicamente linearizado e equações de Euler. O terceiro é o método de linha de sustentação, combinado com diferenças finitas para determinar a geometria da esteira de vórtices.

A grande desvantagem desses métodos, principalmente os que envolvem solução das equações de potencial e de Euler é o esforço computacional necessário e a geração de malhas. Essas limitações fazem com que a aplicação desses métodos seja restrita ao detalhamento de projeto. Para definir a geometria básica ou mesmo avaliar o desempenho preliminar de uma hélice, o método tradicional utilizando a teoria de vórtices ainda é mais recomendado.

Se considerarmos que os modelos desenvolvidos neste trabalho tem como foco principal a aviação geral, a diferença entre métodos é ainda menor. Estudos recentes usando métodos de vórtice como de Larabee¹³, D'Angelo¹⁴ e Sabzehparvar¹⁵, demonstram ótima correlação com dados reais.

3. A Teoria dos Vórtices

3.1 Introdução

Betz⁴ demonstrou que a eficiência ideal de uma hélice está associada com o carregamento ótimo das pás, gerando um escoamento na forma de helicóide como apresentado na Figura 3. Ele demonstrou que para hélices de baixo carregamento ter mínima perda de energia, a distribuição da sustentação deve ser tal, que os vórtices destacados formem lâminas de vórtices regulares na forma de um helicóide, movendo-se para trás da hélice. Prandtl¹⁶ encontrou uma solução aproximada para o escoamento em torno das esteiras de vórtice, efetuando um análogo do escoamento em torno das extremidades das lâminas de vórtices com o escoamento bidimensional em torno de uma cascata de lâminas retas semi-infinitas. A aproximação é razoável quando a razão de avanço é pequena e melhora com o aumento do número de pás.

Goldstein¹⁷ resolveu o problema de campo potencial para a distribuição de circulação do sistema de vórtices helicoidais em pequenas razões de avanço. Outra hipótese da teoria de Goldstein era a de hélices com baixo carregamento. Seu trabalho foi publicado com valores tabelados para hélices de duas e quatro pás.

O que torna a utilização do método de Goldstein muito atrativo é que as funções de circulação são encontradas na forma de tabelas organizadas em função da razão de avanço e número pás e os valores específicos para o projeto em questão podem ser interpolados com facilidade.

As tabelas eram difíceis de serem encontradas, além de limitadas em valores e número de pás disponíveis. Com o trabalho de Wald⁷ em 2006, as tabelas de função de circulação de Goldstein e de coeficiente de massa foram expandidas em uma gama de razões de avanço e em número de pás de 2 a 6, que consideramos os valores de aplicação prática. Wald também apresenta em seu trabalho a influência do spinner na distribuição de circulação.

Theodorsen⁵ demonstrou que os estudos de Goldstein não precisam ficar limitados ao caso de baixo carregamento, permitindo o uso mais expandido da teoria. Larrabee¹³ apresentou modelos práticos para projeto de hélices, que são limitados pela hipótese de baixo carregamento nas pás, não aproveitando aos conceitos mais abrangentes apresentados por Theodorsen e que usaremos neste trabalho.

A teoria de Theodorsen é dividida em duas partes. A primeira consiste em determinar a distribuição de circulação ótima nas pás de forma a obtermos a máxima eficiência, ignorando o arrasto do aerofólio ou efeitos de compressibilidade. A segunda parte consiste em obtermos a geometria de uma hélice ótima através da escolha adequada de aerofólios para cada seção da pá. Neste momento o arrasto do perfil é considerado.

A limitação da teoria está em assumir um escoamento bidimensional no perfil o que naturalmente não ocorre. Para determinarmos os efeitos tridimensionais, métodos mais modernos devem ser utilizados tais como métodos dos painéis ou solução das equações de Euler em uma malha tridimensional.

3.2 Princípios Básicos

A sustentação L por unidade de comprimento de uma seção de aerofólio bi-dimensional é relacionado com a circulação K em seu contorno, são relacionados pela seguinte equação:

$$L = \rho VK \quad (3.1)$$

Onde ρ é a densidade do fluido e V é a velocidade linear do aerofólio neste fluido. Se considerarmos a corda c da seção do aerofólio, a sustentação pode ser expressa em função do coeficiente de sustentação como:

$$L = 0.5C_L\rho V^2c \quad (3.2)$$

Igualando as equações 1 e 2 temos:

$$K = 0.5C_LVc \quad (3.3)$$

Se aplicarmos o conceito de teoria dos aerofólios no problema de hélices, fica evidente que deve existir uma circulação em torno das pás da hélice para produzir tração e torque. A circulação K em torno do elemento de pá é variável ao longo desta. Para entendermos o modo de operação da hélice é mais simples assumirmos que a circulação seja constante ao longo do comprimento da pá. A existência de circulação é expressa assumindo-se que existe uma linha de vórtices de intensidade K , ligados a pá, deslocando-se ao longo do elemento de pá, no sentido da raiz para a ponta como na figura 6.

Fig. 6 A hélice e seu sistema de vórtices – Adaptado da figura 11 da referência 7

Uma linha de vórtices não pode começar ou terminar abruptamente e a não ser que forme uma curva fechada no corpo, deve continuar como uma linha de vórtices livres no fluido, seguindo o escoamento como um vórtice que se desprende atrás do corpo. Os vórtices ligados K , deslocando-se ao longo da pá da hélice, devem se transformar em dois vórtices livres no fluido, sendo um se desprendendo da raiz da pá e outro da ponta. O vórtice desprendido da raiz da hélice forma uma linha reta ao longo do eixo da hélice e sua intensidade será BK para uma hélice com B pás. Os vórtices de ponta de pá, cada um de intensidade K , têm forma helicoidal, na trajetória descrita pela ponta da pá. As linhas de vórtice formam a esteira da hélice e o movimento do fluido na esteira pode ser calculado como a velocidade induzida por esse sistema de vórtices. O sentido de rotação do sistema de vórtices é tal que o fluido na esteira possui um aumento na velocidade axial e rotacional no mesmo sentido de rotação da hélice, de maneira análoga à teoria de conservação de energia.

A hipótese de circulação constante ao longo da pá serve somente para uma

compreensão da teoria. Em termos práticos, a circulação varia ao longo da pá, o que implica em vórtices destacados não apenas na raiz e na ponta, mas ao longo de todo o bordo de fuga da pá.

Os vórtices desprendendo da pá da hélice formam uma lâmina helicoidal, sendo uma superfície para cada pá da hélice. A esteira da hélice é formada por esta superfície de vórtices e do fluido contido entre estas. De maneira geral a superfície de vórtices apresenta distorção ao deixar a hélice, mas formam um helicóide regular à medida que se afastam da hélice.

O distúrbio causado por uma hélice no escoamento pode ser representado como a velocidade induzida pelo sistema completo de vórtices, compreendendo os vórtices ligados nas pás da hélice e a superfície de vórtices livres na esteira. O movimento do fluido em relação à hélice é a resultante da velocidade axial V e da velocidade induzida pelo sistema de vórtices. É possível então determinar as características do aerofólio que devem ser utilizados em cada elemento de pá da hélice. De acordo com a teoria do aerofólio bidimensional de Prandtl, o comportamento de um elemento de pá pode ser considerado o mesmo que um aerofólio bi-dimensional se as velocidades induzidas por um sistema de vórtices forem consideradas.

O sistema de velocidades em um elemento de pá é apresentado na Figura 2.

A sustentação gerada pelo elemento de pá é dada por:

$$dL = \rho U_0 \times K dr \quad (3.4)$$

Onde dL é a sustentação gerada por um elemento de pá de dimensão radial dr , U_0 é

a velocidade resultante e K é a circulação. Usando o produto vetorial, obtemos as expressões de tração e torque gerados pelo elemento. A parcela de tração gerada pelo elemento de pá é proporcional ao produto da circulação e da componente da velocidade normal a tração, ou a componente rotacional de U_0 . De maneira análoga, a contribuição do torque é o produto da circulação e da componente axial da velocidade relativa ao elemento de pá.

$$dT = \rho K (\Omega r - u_{\theta_0}) dr \quad (3.5)$$

$$dQ = \rho K (V + u_{z_0}) r dr \quad (3.6)$$

As velocidades u_{θ_0} e u_{z_0} são as velocidades tangencial e axial respectivamente, induzidas no elemento de pá pelo sistema de vórtices.

Integrando as forças unitárias ao longo do raio da pá com B pás temos as seguintes expressões para tração e torque:

$$T = \rho B \int_{r_h}^R K (\Omega r - u_{\theta_0}) dr \quad (3.7)$$

$$Q = \rho B \int_{r_h}^R K (V + u_{z_0}) r dr \quad (3.8)$$

Aplicando a teoria de aerofólios bidimensional, a circulação no elemento de pá pode ser relacionada com o ângulo de ataque local no elemento de pá através da

expressão:

$$dL = C_l \frac{\rho}{2} U_0^2 c dr = a_0 (\alpha - \alpha_{L_0}) \frac{\rho}{2} U_0^2 c dr \quad (3.9)$$

O ângulo de ataque local é dado por $\alpha = \beta - \phi$ onde β é o ângulo geométrico da pá e ϕ é o ângulo entre a velocidade resultante e o plano da hélice. Sabendo que:

$$dL = \rho U_0 K dr \quad (3.10)$$

Então

$$K = \frac{1}{2} a_0 (\alpha - \alpha_{L_0}) U_0 c \quad (3.11)$$

E

$$\phi = \tan^{-1} \frac{V + u_{z_0}}{\Omega r - u_{\theta_0}} \quad (3.12)$$

As equações apresentadas anteriormente são as relações fundamentais para o entendimento da aerodinâmica das hélices. A próxima etapa é determinar as velocidades induzidas pelo sistema de vórtices.

3.3 A cinemática do sistema de vórtices helicoidal

Para uma hélice com número B de pás a posição angular da superfície de vórtices helicoidais é dada por:

$$\theta = \Omega t + 2\pi(n-1)/B \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots, B \quad (3.13)$$

E

$$z = (V + w)t \quad (3.14)$$

Onde w é a velocidade axial da superfície de vórtices helicoidais em um plano bem atrás do plano da hélice. A equação de superfície de vórtice independente do tempo t é dada por:

$$\theta - \frac{\Omega}{V + w} z - 2\pi(n-1)/B = 0 \quad (3.15)$$

O ângulo de avanço da superfície é dado por:

$$\tan \phi = \frac{dz}{rd\theta} = (V + w)/\Omega r = \lambda_2 / x_1 \quad (3.16)$$

Onde $\lambda_2 = (V + w)/\Omega R_1$ (3.17)

E R_1 é o raio da superfície de vórtices e $x_1 = r/R_1$ é a coordenada radial adimensional

da superfície de vórtices.

O avanço geométrico linear da superfície de vórtices é dada por:

$$P = 2\pi r \tan \phi = 2\pi(V + w)/\Omega = 2\pi R_1 \lambda_2 \quad (3.18)$$

A velocidade normal à superfície em qualquer ponto é aquela com que a superfície é deslocada através do fluido e é a componente normal à velocidade resultante $w \cos \phi$. As componentes axial e tangencial da velocidade de deslocamento da superfície são dadas por:

$$u_{z_1} = w \cos^2 \phi \quad (3.19)$$

$$u_{\theta_1} = w \cos \phi \sin \phi \quad (3.20)$$

$$\tan \phi = (V + u_{z_1})/(\Omega r - u_{\theta_1}) \quad (3.21)$$

Substituindo temos

$$u_{z_1} = w/(1 + \lambda_2^2 / x_1^2) \quad (3.22)$$

$$u_{\theta_1} = w(\lambda_2 / x_1)/(1 + \lambda_2^2 / x_1^2) \quad (3.23)$$

As superfícies de vórtices deslocam-se paralelas entre si e, portanto possuem

velocidade rotacional e transladam ao longo de seu eixo. As superfícies de vórtices não contêm partículas de fluido. São apenas superfícies de descontinuidade da velocidade no fluido.

3.4 Hélices de mínima perda de energia

As superfícies de vórtices se desprendem dos bordos de fuga das pás das hélices, formando superfícies helicoidais intercaladas em função do número de pás. Os helicóides se deslocam para trás da hélice após contração no plano da hélice sem nenhum outro tipo de deformação, como se fossem superfícies rígidas. A variação na velocidade radial através da superfície é a intensidade do vórtice e possui a magnitude necessária para o equilíbrio. As superfícies deslocam-se em um campo irrotacional com mesma velocidade em ambos os lados da superfície e, portanto mesma pressão. Considerando que não há alteração na pressão é razoável considerar que as superfícies se movem sem deformação.

Fig.7 - O escoamento em torno da onda helicoidal. Adaptado da figura 8 da referência 6

O sistema de superfícies de vórtices helicoidais movendo-se para trás da hélice sem deformação é um modelo matemático que permite relacionar a velocidade induzida na hélice com o seu carregamento aerodinâmico. Esta é a situação do escoamento que permite a máxima eficiência para uma determinada tração necessária. Assim sendo este modelo permite definir a distribuição radial de cargas ao longo da pá que resultam na melhor eficiência, tornando-se assim, a base para o projeto de hélices.

As superfícies de vórtices são descontinuidades na velocidade do escoamento, de espessura desprezível. Todo o fluido do escoamento está contido entre as superfícies de vórtices. Estes são irrotacionais mesmo com o aumento do número de pás, o que significa uma redução na distância entre as superfícies. A Figura 7 apresenta uma representação gráfica do escoamento em torno da lâmina helicoidal.

Para determinarmos a condição de maior eficiência, devemos considerar o efeito da circulação aumentando em um determinado elemento de pá em raio r por uma pequena quantidade dK . O aumento da circulação causado por aumento da corda ou ângulo de ataque local modifica o carregamento aerodinâmico no elemento de pá e causa alteração no equilíbrio nos demais elementos da hélice, resultando em aumento de tração ΔT e torque ΔQ . A potência útil é aumentada em $V\Delta T$ e a potência absorvida é alterada para $\Omega\Delta Q$. Se considerarmos a razão entre essas duas grandezas k temos:

$$k = \frac{V\Delta T}{\Omega\Delta Q} \quad (3.24)$$

Se a razão k varia com o raio r quando a circulação em um elemento de pá é

alterada, é possível manter a potência constante e aumentar a eficiência da hélice, aumentando a circulação do elemento onde k é pequeno. Desta forma concluímos que a condição para ótima distribuição de circulação em torno da pá é que a razão k se mantenha constante ao longo da pá.

De acordo com Betz uma hélice projetada para uma dada potência ou tração possui a máxima eficiência (ou mínima perda de energia) se as lâminas de vórtices, após deformação inicial no plano da hélice, movem-se no sentido axial como superfícies helicoidais rígidas. Isso é válido para hélices com baixo carregamento. Theodorsen generalizou a teoria para qualquer tipo de carregamento.

A razão de avanço da hélice é dada por

$$\lambda = V / \Omega R \quad (3.25)$$

E a razão de avanço do helicóide é dada por

$$\lambda_2 = (V + w) / \Omega R_1 \quad (3.26)$$

Onde R_1 é o raio do helicóide após a deformação inicial. A diferença entre o raio da hélice e o raio do helicóide é a principal diferença entre o modelo de Goldstein e Theodorsen do tratamento dados por outros trabalhos. A dificuldade para obtermos o modelo mais genérico, é calcularmos a velocidade de avanço do helicóide w .

3.5 A Função de Goldstein / Theodorsen

É necessário determinar a distribuição de vorticidade na lâmina de vórtice e através disto, deduzir qual a circulação dos elementos de pá da hélice. Para determinarmos essa circulação é necessário definir a função potencial Φ que descreve o escoamento do fluido. A equação que deve ser satisfeita para a função potencial é:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.27)$$

$$E \ K_B = \Delta \Phi \quad (3.28)$$

A circulação no elemento de pá é igual a diferença de potencial através da lâmina de vórtices da esteira em determinado ponto.

E a condição para que isso ocorra é que a velocidade normal na lâmina de vórtices seja dada por

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = w \cos \phi \quad (3.29)$$

Os detalhes para determinação da função potencial Φ é uma tarefa complexa e não entraremos em detalhes neste trabalho. Para maiores detalhes consultar os trabalhos de Goldstein e Theodorsen.

Goldstein encontrou uma solução para o problema da função potencial. Ele considerou uma hélice de baixo carregamento e calculou a função potencial para

hélices de 2 e 4 pás, operando em diferentes razões de avanço. Theodorsen expandiu os estudos de Goldstein, cobrindo os casos de hélices com grandes carregamentos e diferentes números de pás.

A função de Goldstein é definida como um fator adimensional em função da função de circulação $K(r_1)$:

$$G(r_1) = K(r_1) / hw \quad (3.30)$$

Onde h é a distância axial entre lâminas de vórtices adjacentes e w é a velocidade de deslocamento da lâmina de vórtices em relação ao escoamento. A função $G(r_1)$ depende da geometria da lâmina de vórtices que por sua vez é função da razão de avanço λ e do número de pás da hélice. A distância axial h pode ser calculada em função do avanço axial e do número de pás da hélice $h=P/B$. A função de Goldstein pode ser reescrita como:

$$G(r_1) = BK\Omega / 2\pi w(V + w) = BK / 2\pi R_1 w \lambda_2 \quad (3.31)$$

Tiberly e Wrench¹⁸ tiveram o trabalho de processar novamente as funções potenciais de Theodorsen com grande precisão, gerando tabelas de Goldstein modificadas para hélices com pás variando de 2 a 10 e razões de avanço da lâmina de vórtices variando de 0.08 a 4. A figura 8 apresenta a distribuição de circulação de Goldstein.

Fig.8 – Distribuição de circulação de Goldstein

A grande vantagem em utilizarmos as tabelas de Goldstein é que o trabalho de processamento para determinação da função potencial é substituído por uma simples interpolação entre tabelas, aumentando a velocidade para obtenção de um projeto preliminar e permitindo a integração com algoritmos de otimização e projeto multi-disciplinares, ou no caso deste trabalho geração rápida da geometria da hélice para cálculo do ruído.

3.6 Tração de uma hélice com distribuição ideal de carregamento

De acordo com a equação da conservação de energia, a força axial necessária para manter o movimento contínuo da lâmina de vórtices é dada por:

$$T = \int_S \rho(V + u_z)u_z dS + \int_S (p - p_\infty) dS \quad (3.32)$$

A integração deve ser feita em um plano normal ao eixo do helicóide e fixo no fluido sem perturbação.

Considerando que a pressão no fluido não perturbado seja p_∞ e que a lâmina de esteira se mova com velocidade w na direção z a equação de pressão é dada por:

$$p - p_\infty + \frac{1}{2} \rho u^2 = \rho w u_z \quad (3.33)$$

Assumindo-se a densidade constante e substituindo a equação da pressão, temos que a expressão da tração associada ao sistema de vórtices é dada por:

$$T = \rho \int_S [(V + w)u_z + u_z^2 - u^2 / 2] dS \quad (3.34)$$

Para obter os valores de tração, Theodorsen criou dois parâmetros adimensionais k e ε , funções do avanço das lâminas de vórtice e do número de pás da hélice. As funções são definidas como:

$$\kappa = \frac{\int u_z(x) dS}{wA} = 2 \int_0^1 G(x_1) x_1 dx_1 \quad (3.35)$$

Onde $x = r/R$, $A = \pi R_2^2$

$$\varepsilon = \int_S u_z^2 dS / \pi R_1^2 w^2 \quad (3.36)$$

κ é chamado por Theodorsen como “coeficiente de massa” e ε é o “fator de perda axial”. Para interpretação física dos parâmetros lembramos que κ e ε são relacionados com o escoamento devido ao movimento axial dos helicoides de seção A. Este helicóide em movimento é dinamicamente equivalente a um cilindro de fluido movimentando-se de maneira rígida sem rotação ou vazamento de fluido por uma área efetiva de dimensões reduzidas. Com relação a conservação de energia axial e energia cinética total a área efetiva é dada por:

$$A_{eff} = \kappa A \quad (3.37)$$

E em relação a energia cinética axial a área efetiva é dada por:

$$A_{eff} = \varepsilon / A \quad (3.38)$$

A relação entre κ , ε e a razão de avanço λ_2 é função do número de pás e é dada por:

$$\varepsilon = \kappa + \frac{1}{2} \lambda_2 \frac{d\kappa}{d\lambda_2} \quad (3.39)$$

3.7 Projeto de hélice com mínima perda de energia

O projeto de uma hélice com mínima perda de energia pode ser feito com o uso da teoria dos vórtices. Para tal é necessário saber o número de pás desejado, a razão

de avanço λ_1 e a velocidade relativa de deslocamento da lâmina de vórtices. Para o cálculo de valores preliminares baseados em parâmetros reais, consideramos o diâmetro da hélice como parâmetro conhecido, uma vez que na maioria dos casos o diâmetro é função de limitações geométricas da aeronave.

A tração em função dos parâmetros k e ε é dada por:

$$T = k\rho\pi R_1^2 V^2 \bar{w} [1 + \bar{w}(\frac{1}{2} + \varepsilon/k)] \quad (3.40)$$

Onde $\bar{w} = w/V$

Definindo o coeficiente de tração como $C_t = T / \frac{1}{2} \rho \pi V^2 R$ temos

$$C_{t_1} = 2k\bar{w} [1 + \bar{w}(\frac{1}{2} + \varepsilon/k)] \quad (3.41)$$

A velocidade axial da lâmina de vórtices é dada por:

$$\bar{w} = \frac{-1 + \sqrt{1 + C_{t_1} (1 + 2\varepsilon/k) / k}}{1 + 2\varepsilon/k} \quad (3.42)$$

A determinação de $\bar{w}$ é feita através de um processo iterativo, onde valores iniciais podem ser obtidos considerando-se $C_{t_1} = C_s$ e $\lambda_2 = \lambda$.

Os valores de C_t e λ podem ser estimados conhecendo-se o torque disponível do motor na rotação e condições de operação, como temperatura e altitude. A tração é

obtida estimando um valor de eficiência desejado.

Tendo as razões de avanço e número de pás é possível obter os valores de k e ε/k interpolando-se os valores das tabelas de Theodorsen.

O resultado de $\bar{w}$ permite o cálculo de novos valores de λ_2 e C_{t_1} , que geram novos valores de k e ε/k , que por sua vez permitem o cálculo de um novo valor de $\bar{w}$.

Os valores dos coeficientes de torque e eficiência desprezando as perdas por forças viscosas são dados por:

$$C_{t_1} = 2k\bar{w}[1 + \bar{w}(\frac{1}{2} + \varepsilon/k)] \quad (3.43)$$

$$C_{q_1} = 2k\bar{w}(1 + \bar{w})(1 + \bar{w}\varepsilon/k) \quad (3.44)$$

E a eficiência ideal é dada por:

$$\eta_i = \frac{1 + \bar{w}(\frac{1}{2} + \varepsilon/k)}{(1 + \bar{w})(1 + \bar{w}\varepsilon/k)} \quad (3.45)$$

Uma vez que o escoamento atrás da hélice se contrai é necessário determinar o diâmetro da hélice. A razão entre o raio da hélice e o raio do sistema de vórtices é obtida igualando-se a tração gerada pela circulação nos elementos de pá da hélice com a tração gerada pelo movimento para trás da lâmina de vórtices. A distribuição de circulação no sistema de vórtices é:

$$BK = 2\pi R_1 w \lambda_2 G(x_1) = 2\pi R_0 V \bar{w}(1 + \bar{w}) \lambda G(x_1) \quad (3.46)$$

Substituindo na expressão de tração temos:

$$T_0 = \rho \pi R_0^2 V^2 \bar{w} (1 + \bar{w}) \int_{x_h}^1 2G(x_1)(x_0 - \lambda \bar{u}_{\theta_0}) dx_0 \quad (3.47)$$

Onde x_h é a coordenada radial adimensional do *spinner* da hélice.

Fig.9 – Influência da presença de um spinner na função de distribuição de circulação de Goldstein

Como vimos anteriormente, a circulação nas pás da hélice é nula em seu eixo de rotação. No caso onde há um *spinner*, a circulação é nula em raios menores do que o raio do *spinner*. Para raios maiores do que o raio do *spinner*, a distribuição ótima é

diferente da distribuição de Goldstein. A Figura 9 apresenta a influência da presença de um spinner na distribuição de circulação. Uma solução simplificada para corrigir a distribuição ótima na presença de um *spinner* é feita aplicando-se o princípio da continuidade no escoamento.

$$(V + u_{z_0})2\pi r_0 dr_0 = (V + u_{z_1})2\pi r_1 dr_1 \quad (3.48)$$

Assumindo que a razão entre duas velocidades correlatas no plano da hélice e no sistema de vórtices podem ser considerados uma constante m temos:

$$m \int_{r_h}^{r_0} r_0 dr_0 = \int_0^{r_1} r_1 dr_1 \quad (3.49)$$

ou

$$m \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^2 \int_{x_h}^{x_0} x_0 dx_0 = \int_0^{x_1} x_1 dx_1 \quad (3.50)$$

Então

$$x_0^2 = x_h^2 + x_1^2 \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 / m \quad (3.51)$$

Na ponta da pá $x_0 = x_1 = 1$

$$\left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 / m = 1 - x_h^2 \quad (3.52)$$

Portanto

$$x_0^2 = x_h^2 + x_1^2 (1 - x_h^2) \quad (3.53)$$

A expressão relaciona a coordenada adimensional x_1 de um elemento do sistema de vórtices e a coordenada x_0 no plano da hélice sem a necessidade de conhecimento prévio do raio R_0 da hélice.

Voltando a expressão da tração temos

$$\int_{x_h}^1 2G(x_1)x_0 dx_0 = (1 - x_h^2) \int_0^1 2G(x_1)x_1 dx_1 = (1 - x_h^2)k \quad (3.54)$$

$$\int_{x_h}^1 2G(x_1)\bar{u}_{\theta_0} dx_0 = \frac{1}{2} \bar{w}(1 + \bar{w})\mathcal{M}_1 \quad (3.55)$$

Onde

$$I_1 \equiv \int_0^1 \frac{2G(x_1)x_1^3 dx_1}{(x_1^2 + \lambda_2^2)(x_1^2 + x_h^2/(1 - x_h^2))} \quad (3.56)$$

E substituindo na expressão da tração temos:

$$T_0 = \rho \pi R_0^2 V^2 \bar{w}(1 + \bar{w}) [k(1 - x_h^2) - \frac{1}{2} \bar{w}(1 + \bar{w}) \lambda^2 I_1] \quad (3.57)$$

Igualando a expressão da tração com a tração produzida pelo sistema de vórtices, obtemos a relação entre o raio da hélice e o raio da lâmina de vórtices.

$$\left(\frac{R_0}{R_1} \right)^2 = \frac{[1 + \bar{w}(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{k})] / (1 + \bar{w})}{(1 - x_h^2) - \frac{1}{2} \bar{w}(1 + \bar{w}) \lambda^2 I_1 / k} \quad (3.58)$$

A razão de avanço da hélice pode agora ser determinada por:

$$\lambda = \lambda_1 / (R_0 / R_1) \quad (3.59)$$

Precisamos agora determinar as velocidades induzidas e consequentemente a velocidade relativa em cada elemento de pá. A velocidade tangencial na hélice é relacionada com a velocidade no sistema de vórtices através da seguinte equação:

$$u_{\theta_0} r_0 = \frac{1}{2} u_{\theta_1} r_1 \text{ ou } \bar{u}_{\theta_0} x_0 R_0 = \frac{1}{2} \bar{u}_{\theta_1} x_1 R_1 \quad (3.60)$$

Onde

$$\bar{u}_{\theta_0} = \frac{1}{2} \bar{u}_{\theta_1} (x_1 / x_0) (R_1 / R_0) \quad (3.61)$$

Eliminando a relação entre os raios temos:

$$\bar{u}_{\theta_0} = \frac{1}{2} \bar{w}(1 + \bar{w})(\lambda / x_0) / (1 + \lambda_2^2 / x_1^2) \quad (3.62)$$

e

$$\bar{u}_{z_0} = \frac{1}{2} u_{z_1} = \frac{1}{2} \bar{w} / (1 + \lambda_2^2 / x_1^2) \quad (3.63)$$

A velocidade resultante no elemento de pá, necessária para determinação da corda e do ângulo de ataque que equivale a circulação pretendida é dada por:

$$U_0^2 = (V + u_{z_0})^2 + (\Omega r_0 - u_{\theta_0})^2 \quad (3.64)$$

$$(U_0 / V)^2 = (1 + \bar{u}_{z_0})^2 + (x_0 / \lambda - \bar{u}_{\theta_0})^2 \quad (3.65)$$

O ângulo de avanço do escoamento no elemento de pá é dado por:

$$\tan \phi_0 = \frac{V + u_{z_0}}{\Omega r_0 - u_{\theta_0}} = \frac{1 + \bar{u}_{z_0}}{x_0 / \lambda - \bar{u}_{\theta_0}} \quad (3.66)$$

Precisamos agora definir o coeficiente de sustentação e a corda do elemento de pá na radial r_0 na hélice cuja circulação seja a mesma dos vórtices livres no raio r_1 passando pelos filamentos de vórtices liberados pelo elemento de pá na radial r_0 . A sustentação no elemento de pá em uma determinada seção radial dr é dada por:

$$dL = c_l \frac{\rho}{2} U_0^2 c dr = \rho K U_0 dr \quad (3.67)$$

A circulação do perfil é dada por:

$$BK = \frac{1}{2} c_l B c U_0 = c_l \sigma \pi R U_0 \quad (3.68)$$

A circulação equivalente ao sistema de vórtices é dada por:

$$BK = 2\pi R_1 w \lambda_2 G(x) = 2\pi R \lambda w (1 + \bar{w}) G(x) \quad (3.69)$$

Igualando as duas equações temos que:

$$\sigma c_l = 2\lambda \bar{w} (1 + \bar{w}) G(x) / (U_0 / V) \quad (3.70)$$

Se considerarmos somente a melhor eficiência, devemos escolher o coeficiente de sustentação c_l de maneira que a relação c_d / c_l seja minimizada. Tal escolha deve ser feita levando em conta o número de Reynolds e Mach locais em cada seção. Uma vez que o número de Reynolds também é função da corda, é necessário um processo iterativo para definir o perfil que apresenta a máxima eficiência. Na prática, principalmente em regiões próximas a raiz, a espessura obtida é menor do que o mínimo necessário por razões estruturais. É necessário então definir uma função de espessura que permita a escolha adequada de perfis com boa relação sustentação e arrasto que permitam uma espessura mínima. Critérios adicionais devem ser incluídos para cobrir os casos onde o Mach local é elevado implicando em aumento de arrasto e ruído devido a efeitos de compressibilidade. Correções para os efeitos de compressibilidade podem ser facilmente ser incluídos¹⁴.

Uma vez definidos os perfis que deverão ser utilizados em cada seção,

determinamos o ângulo de ataque local ótimo e conseqüentemente a distribuição de cordas e a torção geométrica da hélice, dada por:

$$\beta = \phi_0 + \alpha \quad (3.71)$$

A distribuição ótima da circulação na seção da hélice foi determinada sem considerarmos a existência do arrasto do perfil. Podemos tratar o arrasto como uma força que pode ser adicionada sem modificação na lâmina de vórtices, uma vez que este atua na direção normal da sustentação, não afetando o sistema de vórtices. A perda de tração em consequência do arrasto do perfil das seções das pás da hélice ideal sem perdas é:

$$dT = -c_d \frac{\rho}{2} U_0^2 B c dr \sin \phi_0 = -c_d \rho U_0^2 \sigma \pi R^2 \sin \phi_0 dx \quad (3.72)$$

O coeficiente de tração ideal é dado por:

$$dC_t = -2c_d \sigma (U_0 / V)^2 \sin \phi_0 dx \quad (3.73)$$

A contribuição com o coeficiente de tração é dada por:

$$\Delta C_t = -2 \int_0^1 c_d \sigma (U_0 / V)^2 \sin \phi_0 dx \quad (3.74)$$

O torque devido o arrasto do perfil é dado por:

$$dQ = c_d \frac{\rho}{2} U_0^2 B c r dr \cos \phi_0 = c_d \rho U_0^2 \sigma \pi R^3 \cos \phi_0 x dx \quad (3.75)$$

E o coeficiente de torque é

$$C_q = c_d 2 \sigma (U_0 / V)^2 x dx \cos \phi_0 \quad (3.76)$$

A contribuição para o coeficiente de torque é dado por:

$$\Delta C_q = 2 \int_0^1 c_d \sigma (U_0 / V)^2 \cos \phi_0 x dx \quad (3.77)$$

O efeito no coeficiente de potência é dado por:

$$\Delta C_p = \Delta C_q / \lambda \quad (3.78)$$

Os coeficientes de tração e potência para uma hélice com distribuição de carregamento ideal, considerando o efeito do arrasto dos perfis das seções da pá é dado por:

$$C_t = C_{t_1} / (R_0 / R_1)^2 + \Delta C_t \quad (3.79)$$

$$C_p = C_{p_1} / (R_0 / R_1)^2 + \Delta C_p \quad (3.80)$$

A eficiência da hélice é dada por:

$$\eta = TV / P = C_t / C_p \quad (3.81)$$

3.8 Desempenho de uma hélice conhecida

Para validarmos o modelo de projeto de hélice utilizando o método de Goldstein, é necessário compararmos dados de uma hélice conhecida, da qual possuímos dados experimentais de desempenho. O desempenho de uma hélice em condições diferentes das de projeto, pode ser obtido utilizando o modelo de mínima perda de energia, se assumirmos algumas hipóteses simplificadoras.

A teoria do elemento de pá combinada com a teoria de conservação de energia assume a independência aerodinâmica dos elementos, como se o escoamento fosse bidimensional. Esta hipótese é válida para hélices com número infinito de pás na qual o escoamento se mantém confinado em anéis concêntricos.

Na teoria dos vórtices, pelo contrário, não há independência entre os elementos de pá. A vorticidade liberada por cada elemento contribui com a perturbação de velocidade em todos os demais.

A velocidade de deslocamento das lâminas de vórtice destacadas de hélices com distribuição de circulação diferente da ótima, não é a mesma para todos os elementos de pá. Porém, podemos assumir que a velocidade induzida em cada elemento, é aquela que ocorreria se existisse um sistema de vórtices com velocidade de deslocamento uniforme, equivalente a um sistema com velocidade de deslocamento compatível com a circulação daquele elemento. Essa hipótese

equivale a assumirmos a independência dos elementos de pá, porém, como veremos adiante, os dados obtidos com esse modelo são muito próximos de dados experimentais.

Para obtermos os dados de desempenho de uma determinada hélice, é necessário o conhecimento prévio de todas as suas características geométricas, bem como sua condição de operação. Também é necessário conhecer as características aerodinâmicas dos perfis usados em cada elemento de pá. Para isso utilizamos os dados publicados por Hartman e Birman¹⁹. As condições iniciais são a razão de avanço λ , o número B de pás, a distribuição de torção da pá β , a distribuição de corda c e as características aerodinâmicas dos perfis, como a_0 , α_{L_0} e C_d .

Através de um processo iterativo, devemos encontrar $\bar{w}$ em um número de estações de forma que a velocidade induzida e o coeficiente de sustentação encontrado sejam compatíveis com a circulação obtida do valor de $\bar{w}$. A relação entre o coeficiente de sustentação local e a função de circulação de Goldstein é dada por:

$$\sigma c_l = 2\lambda \bar{w}(1 + \bar{w})G(x)/(U_0/V) \quad (3.70)$$

Lembrando que agora $\bar{w}$ não é um valor único, mas sim uma função da coordenada radial x . As velocidades induzidas em cada elemento de pá são dadas por:

$$(U_0/V)^2 = (1 + \bar{u}_{z_0})^2 + (x_0/\lambda - \bar{u}_{\theta_0})^2 \quad (3.65)$$

O ângulo de avanço em cada elemento de pá é dado por:

$$\tan \phi_0 = \frac{V + u_{z_0}}{\Omega r_0 - u_{\theta_0}} = \frac{1 + \bar{u}_{z_0}}{x_0 / \lambda - u_{\theta_0}} \quad (3.66)$$

Para que a condição de circulação seja atingida, o coeficiente de sustentação em cada seção deverá ser:

$$c_l = a_0(\beta - \phi_0 - \alpha_{L_0}) \quad (3.82)$$

Os coeficientes de tração e torque são dados por:

$$C_t = 2 \int_0^1 (c_l \cos \phi_0 - c_d \sin \phi_0) \sigma (U_0/V)^2 dx \quad (3.83)$$

$$C_q = 2 \int_0^1 (c_l \sin \phi_0 + c_d \cos \phi_0) \sigma (U_0/V)^2 x dx \quad (3.84)$$

A eficiência é dada por:

$$\eta = \lambda C_t / C_q \quad (3.85)$$

3.9 Validação do modelo de desempenho

Para validação do modelo de desempenho utilizamos dois métodos distintos. O primeiro mais simplificado, permite a comparação entre os valores obtidos para a hélice projetada, enquanto o segundo valida o método com dados experimentais de uma hélice diferente da obtida anteriormente.

Para verificarmos se o desempenho da hélice projetada apresenta valores coerentes, comparamos os resultados com valores obtidos usando o método simplificado proposto por Glauert⁸. O rendimento da hélice é calculado usando o método de conservação de energia combinado com a teoria de elemento de pá. A solução proposta permite o cálculo da hélice de melhor rendimento possível em função de um dado coeficiente de torque Q_c , da razão de avanço λ , da razão de solidez σ , do número de pás B e do coeficiente de arrasto médio das seções da pá δ . Para validação do método, comparamos os valores de rendimentos obtidos das hélices projetadas em diferentes razões de avanço, mantendo os demais parâmetros constantes.

A Figura 10 apresenta a comparação entre os métodos. Comparamos o rendimento obtido para hélices de 2 e 3 pás. As linhas representam o método de referência enquanto que os pontos representam os valores calculados. Para cada razão de avanço, é necessário gerarmos um novo projeto de hélice.

O segundo método permitiu a comparação com valores experimentais disponíveis na referência 19. A comparação foi possível, pois além dos resultados experimentais de desempenho, o trabalho apresenta as características geométricas das hélices

Fig.10 – Comparação entre os dados obtidos usando o método proposto neste trabalho e o método apresentado na referência 8.

ensaiadas. Os valores dos coeficientes aerodinâmicos dos perfis utilizados foram os disponíveis no banco de dados.

A figura 11 apresenta a comparação entre os dados obtidos e experimentais. Como referência, escolhemos uma hélice bi-pá, com perfil Clark Y. A linha contínua apresenta os dados calculados numericamente, enquanto que a linha com pontos representa os dados experimentais. Os valores à esquerda de cada curva representam o ângulo de torção da pá a $0.75R$.

Fig.11 – Eficiência da hélice em função da razão de avanço. Comparação entre valores numéricos e experimentais.

Como podemos observar, em ambos os casos temos uma boa correlação entre os valores obtidos com o modelo apresentado com métodos alternativos e valores experimentais. Desta forma podemos prosseguir com o desenvolvimento com o modelo de previsão de ruído harmônico como veremos a seguir.

4. Ruído de hélices

4.1 Introdução

A propagação do ruído de hélices é causada pelo deslocamento de um volume de ar durante a passagem das pás e pelas cargas transmitidas pela pá ao ar. O deslocamento desse volume de ar provoca o ruído de espessura ou *thickness noise*; já os efeitos causados pelo carregamento aerodinâmico causam o ruído de carregamento ou *loading noise*. Para análise, o carregamento pode ser dividido em regime estacionário ou produção de sustentação e arrasto e uma componente não estacionária. A componente não estacionária é subdividida em componentes aleatórias, devido a turbulência e interferência com componentes da aeronave e uma componente periódica associada com o ângulo de ataque do escoamento, gerando diferentes carregamentos em função do quadrante em que a pá se encontra. A somatória de todas essas componentes de ruído descreve o espectro de ruído. Para identificarmos a importância de cada componente de ruído é necessário o conhecimento das características geométricas e de operação da hélice.

4.2 Características do ruído de hélices

O ruído de hélices pode ser classificado quanto a característica do sinal e quanto a seu mecanismo de geração. Em relação a característica do sinal, são classificados em ruído harmônico e ruído aleatório, sendo este subdividido em ruído de banda estreita e ruído de banda larga. Quanto ao mecanismo de geração, são classificados

em fontes estacionárias, não estacionárias e fontes aleatórias.

O ruído harmônico é uma componente periódica, ou seja, o sinal é repetitivo no tempo. Uma hélice com B pás operando a uma rotação constante N , terá o sinal de ruído em uma frequência fundamental BN , com período de passagem da pá igual a $1/BN$ (fig.12). O sinal gerado no domínio do tempo não é uma senóide pura, uma vez que existem várias harmônicas. Tais harmônicas ocorrem em múltiplos inteiros da frequência fundamental e pode ser facilmente observadas analisando o sinal no domínio da frequência.

Fig.12 – Características do ruído harmônico

O ruído harmônico é gerado devido ao campo de pressão oscilatória agindo no plano de atuação da hélice. Por esse motivo o ruído é máximo neste plano. O ruído harmônico aumenta com a potência absorvida pela hélice, aumento do diâmetro, menor número de pás e com o aumento da velocidade na ponta da pá.

Fig.13 – Características do ruído aleatório de banda estreita

O ruído de banda estreita é do tipo falso periódico. No domínio do tempo, o sinal parece se repetir, mas a análise no domínio da frequência permite concluir que a energia está distribuída em diversas frequências (fig.13).

O ruído de banda larga é fundamentalmente aleatório e possui componentes em todas as frequências. O espectro de frequência é contínuo, porém nem todas as frequências possuem necessariamente a mesma amplitude (fig.14).

As fontes estacionárias são aquelas que parecem constantes no tempo para um observador fixo na pá rodando. Estas fontes produzem ruído periódico devido ao movimento de rotação. São agrupadas em efeitos lineares devido à espessura, linear devido ao carregamento e efeitos não lineares.

Fig.14 – Características do ruído aleatório de banda larga

O ruído de espessura ocorre devido o deslocamento do ar durante a passagem do

elemento de pá. A amplitude desta componente do ruído é proporcional ao volume da pá, com frequências dependentes geometria dos perfis aerodinâmicos e velocidade angular. O ruído de espessura é significativo em altas velocidades e tem seus efeitos reduzidos com a redução da espessura dos perfis e enflechamento das pás, principalmente das pontas da hélice onde as velocidades são maiores.

Fig.15 – Características e classificação do ruído quanto ao mecanismo de geração

O ruído de carregamento agrupa os efeitos de sustentação e arrasto gerado por cada elemento de pá e é causado pela distribuição de pressão em torno do perfil durante seu movimento. Essa distribuição de pressão se movendo pelo meio se propaga na forma de ruído. O ruído de carregamento é significativo em velocidades moderadas e baixas.

Para velocidades moderadas do elemento de pá, os efeitos de espessura e carregamento são lineares e atuam na superfície dos perfis. Quando o escoamento passa a ser transônico, os efeitos não lineares são significativos.

As fontes não estacionárias são dependentes da posição da pá de referência. Incluem variação periódica e aleatória do carregamento das pás. Um exemplo de carregamento periódico nas pás ocorre quando o eixo da hélice está submetido a determinado ângulo de ataque. Quando a pá desce, o ângulo de ataque é maior do que quando sobe, conseqüentemente, o carregamento da pá varia durante a rotação. A variação do carregamento pode ocorrer uma vez por revolução ou muitas vezes, em função da distorção do escoamento no sentido da hélice. Quando a distorção é estacionária, o ruído não estacionário de carregamento é periódico com harmônicas nas frequências de passagem da pá.

Em casos onde a distorção é dependente do tempo, uma fonte não estacionária pode gerar um ruído aleatório de banda estreita. Como exemplo, podemos citar a ingestão de um vórtice destacado do solo, que gera um pulso no carregamento das pás. Como a distorção pode permanecer presente por varias revoluções da hélice, um falso sinal harmônico pode ser gerado.

As fontes aleatórias são responsáveis pelo ruído de banda larga. Uma delas é resultado da interação entre a turbulência no escoamento no sentido da hélice com o

bordo de ataque da pá. Como o escoamento é turbulento, a geração de ruído é aleatória. A relevância de considerarmos esse tipo de ruído vem do conhecimento prévio da condição de operação da hélice. Se considerarmos o ruído para uma hélice não instalada operando em escoamento livre turbulência, este tipo de ruído pode ser desconsiderado, porém em altas velocidades e escoamento turbulento, seu efeito no ruído total é significativo. O outro tipo de mecanismo gerador de ruído aleatório ocorre na região do bordo de fuga. Em um escoamento real sobre um perfil aerodinâmico, o regime transiciona para turbulento em regiões próximas ao bordo de fuga, desta forma há uma variação do carregamento. O ruído é caracterizado pelas propriedades da camada limite. Mecanismo similar ocorre próximo a ponta da hélice onde há interação entre o vórtice de ponta com o vórtice do bordo de fuga.

A Figura 15 apresenta de forma organizada as características do ruído e sua classificação quanto às fontes geradoras.

4.3 As fontes de ruído

A seguir, avaliaremos os principais pontos que podem ser alterados com objetivo de obtermos redução de ruído e em seguida apresentaremos as equações que explicam a relação entre os parâmetros da hélice e o ruído gerado. Como exemplo, podemos citar que uma hélice de espessura desprezível, eliminaria o ruído de espessura, hélices de grande diâmetro podem reduzir o ruído de carregamento, e hélices enflechadas podem ter o ruído aleatório reduzido.

Do ponto de vista prático, algumas soluções propostas para redução de ruído não podem ser incorporadas, como por exemplo, a redução de espessura dos perfis, que

afeta diretamente a estrutura. O diâmetro da hélice pode estar limitado pela rotação ótima do motor (Mach na ponta) ou mesmo restrições do projeto da aeronave como espaço entre a ponta da hélice e o chão. De maneira geral o ruído deve ser estimado de forma global uma vez que algumas fontes influenciam outras, mas de maneira geral podemos avaliar a influência individual das fontes de ruído como descrito a seguir.

Espessura da pá

Quanto mais espesso um perfil, maiores são suas velocidades relativas, principalmente durante cruzeiro em alta velocidade. A maneira de reduzir o ruído devido a espessura do perfil é obviamente reduzir sua espessura. Na prática a maneira de se obter essa redução é através da redução da corda do perfil, o que é normalmente efetuado nas pontas das pás. A redução da corda na região próxima a raiz possui implicações estruturais. O efeito da espessura no ruído também é função da forma do aerofólio. Mantendo a corda constante a redução da espessura do perfil implica em mudança em sua geometria. Tal mudança reduz o ruído em todas as harmônicas.

Número de pás

O aumento no número de pás reduz o ruído das hélices em todas as condições principalmente em baixas razões de avanço como decolagens e subidas. O ruído devido ao carregamento e ruídos aleatórios são os mais reduzidos. Embora o ruído total seja reduzido, o ruído percebido devido ao aumento das frequências de passagem, reduz parte do ganho obtido. Isso ocorre, pois a escala de ruído em dB(A) é mais sensível a frequências mais altas. Mesmo assim, a redução de ruído é

sempre benéfica para hélices de um mesmo diâmetro e velocidade na ponta da pá. Se a razão de solidez é mantida constante, reduzindo a corda da pá, para manter eficiência da hélice, a redução de ruído não será tão significativa.

Diâmetro da hélice

Se considerarmos uma dada tração necessária, o aumento do diâmetro da hélice reduz o carregamento nas pás, o que resulta em redução no ruído devido ao carregamento. O aumento do diâmetro também aumenta a eficiência da hélice para pequenas razões de avanço, ou seja, uma potência menor será necessária para obtermos a mesma tração. A redução de ruído ocorrerá principalmente em condições de pequena razão de avanço como decolagem ou subida onde a aeronave encontra-se em pequenas velocidades. Por outro lado o aumento do diâmetro da hélice aumenta a velocidade na ponta o que tende a aumentar o ruído e implica em perda de eficiência devido aos efeitos de Mach. A manutenção de níveis de ruído pode ser obtida com o enflechamento das pás.

Enflechamento das pás

O enflechamento melhora o desempenho dos perfis em alto Mach, reduzindo o arrasto e conseqüentemente o ruído. Um pequeno enflechamento pode ser responsável por uma grande redução do ruído, porém a redução de ruído é mais significativa em grande enflechamentos para aeronaves com alta velocidade de cruzeiro²⁰. Os efeitos de enflechamento durante decolagem e subida são significativamente menores.

Forma em planta das pás (*shank form*)

Os efeitos da forma em planta das pás e torção são difíceis de estimar uma vez que estes parâmetros estão diretamente relacionados com a distribuição do carregamento aerodinâmico. De maneira geral, as diferenças entre as formas em planta das pás, possuem um efeito muito maior no desempenho do que no ruído. Alterações na forma em planta da pá podem reduzir o ruído em até 3dB, com considerável perda de eficiência²⁰.

Perfil aerodinâmico das seções

A influência dos perfis aerodinâmicos no ruído das hélices é um dos itens mais complexos de serem analisados. De maneira geral, os perfis possuem um efeito muito maior no desempenho do que no ruído. Teoricamente perfis menos espessos geram uma maior redução no ruído, porém a distribuição de cargas ao longo do perfil também possui influência no mesmo.

Efeitos de instalação

As hélices sempre operam em um escoamento com algum tipo de distorção. Esta pode ser causada por turbulência, ângulo de ataque da aeronave, derrapagem, *upwash* das asas, influências da nacele e pilones. Hélices operando em ambiente com distorção possuem ruído adicional. É possível avaliar a influência da distorção no ruído. Para isso é necessário conhecer as condições de operação da aeronave bem como suas características geométricas. Neste trabalho avaliaremos apenas o escoamento livre de distorções.

De maneira geral as fontes de ruído de hélices são função da velocidade da ponta da hélice e a maneira mais eficaz de reduzirmos o ruído de uma hélice é diminuindo

a velocidade em sua ponta. Perfis de pequena espessura contribuem para redução dos efeitos de Mach, principalmente nas pontas. O número de pás, forma em planta e perfis aerodinâmicos possuem um efeito maior no desempenho que no ruído.

Para conseguirmos boas estimativas de ruído, um modelo completo de desempenho deve ser obtido de forma que as relações entre desempenho e ruído possam ser avaliadas corretamente. Outros fatores como estruturas, materiais e custos também devem ser considerados, porém não serão discutidos neste trabalho.

4.4 Modelo de previsão de ruído

O ruído de hélices pode ser estimado através de modelos paramétricos, como os desenvolvidos por Vorobel²¹ e a empresa Hamilton-Standard²², levando em consideração a geometria em planta, número de pás, potência do motor e condição de operação. Modelos analíticos para previsão de ruído de hélices como os descritos por Soderman²³, Marte²⁴ e SAE²⁵, requerem o conhecimento da geometria da hélice, condição de operação e variáveis aerodinâmicas em cada seção da pá. Apesar da maior complexidade, os modelos analíticos são mais precisos e permitem a integração com modelos de projeto e otimização. O projeto de hélices visando o mínimo ruído para dada uma série de restrições aerodinâmicas foi feito por Woan²⁶.

A equação fundamental do ruído foi apresentada por Ffowcs Willian e Hawkings²⁷. A equação fundamental leva em consideração a conservação de energia, continuidade e estados e pode ser resolvida por meios analíticos de diferentes formas. Os métodos foram revisados por Farassat²⁸ que criou formas lineares das equações de

ruído, permitindo análises no domínio do tempo e no domínio da frequência. A vantagem de utilizarmos as equações de ruído no domínio da frequência é a simplicidade de solução.

A forma linear da equação de ruído de Ffowcs e Hawkins publicada por Farassat é:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = \frac{\partial}{\partial t} [\rho_0 v_n |\nabla f| \delta(f)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [l_i |\nabla f| \delta(f)] \quad (4.1)$$

Onde p é a pressão acústica, ρ_0 é a densidade do ar, c é a velocidade do som no ambiente, v_n é velocidade local normal a superfície, $\delta(f)$ é a função de Dirac, x_i é a posição do observador e l_i são as componentes de carregamento por unidade de área agindo na superfície. A geometria do sistema é apresentada na Figura 16.

Fig.16 – Geometria do sistema de corpo sólido em movimento em escoamento uniforme.

A função $f = f(x,t)$ representa uma superfície no espaço com as seguintes propriedades:

$f(x,t) < 0$, dentro da superfície; 0 na superfície e >0 fora da superfície.

Os valores são restritos a determinadas regiões de interesse através da multiplicação da função pela função Dirac.

O lado esquerdo da equação é a forma da propagação de onda agindo sobre a pressão acústica p . O lado direito contém as fontes de ruído resultantes do movimento da superfície da hélice no fluido. O primeiro termo representa as pás cortando o ar produzindo o ruído devido a espessura. O segundo termo representa os carregamentos nas pás produzindo o ruído devido às cargas aerodinâmicas. A equação está escrita com referência em eixos cartesianos fixos em um meio não perturbado.

Existem duas maneiras de resolver as equações de ruído. Através de métodos no domínio do tempo e no domínio da frequência. Os métodos são equivalentes mas em geral os métodos no domínio da frequência são mais simples de serem implantados do ponto de vista matemático.

Os métodos no domínio do tempo resolvem a equação 4.1 em termos de variáveis no tempo e espaço. Em geral esse método é escolhido, pois a geometria das pás pode ser tratada com o grau de precisão que se deseja. A saída destes modelos é a previsão das ondas de pressão acústica em função do tempo $p(t)$, normalmente considerando o tempo de uma rotação da hélice. Para se obter as harmônicas é necessário efetuar uma transformada de Fourier.

Os métodos no domínio da frequência substituem a distribuição de fontes rotativas por uma distribuição estacionária no plano da hélice, eliminando o tempo da equação de onda. Esta possui a grande vantagem de eliminar a necessidade do cálculo da posição das fontes de ruído em função do tempo. Estas são substituídas por séries de Fourier em função do azimuth.

Alguma precisão na representação da geometria das pás é normalmente perdida durante a transformada, mas o efeito no ruído normalmente é pequeno até grandes

frequências. Desta maneira, por estarmos tratando de modelos para projetos preliminares e comparação rápida de diferentes configurações de hélices, o método do domínio da frequência foi o escolhido.

4.5 Método no domínio da frequência

Os modelos de previsão de ruído no domínio do tempo requerem o cálculo da posição das diversas coordenadas de cada seção da pá no espaço, além do cálculo de derivadas numéricas, demandando grande capacidade computacional. A transformada para o domínio da frequência elimina esta necessidade, permitindo a estimativa do ruído harmônico, com grande rapidez e relativa simplicidade.

Gutin²⁹ apresentou a primeira teoria sobre ruído de hélices em 1948, usando representação no domínio da frequência. Hanson aprimorou a teoria, incluindo efeitos de espessura³⁰, deslocamento axial³¹ (voo) e enflechamento da pá³². O modelo de Hanson considera que as fontes de carregamento e espessura atuam em uma superfície helicoidal, criada por uma linha radial deslocando-se com velocidade angular Ω e velocidade axial V . Essa hipótese simplificadora permite a linearização do cálculo de propagação do ruído.

O modelo de Hanson considera que a pressão acústica em função do tempo é dada por:

$$p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{mB} \exp(-imB\Omega t) \quad (4.2)$$

Ou

$$p(t) = 2R_e \sum_{m=1}^{\infty} P_{mB} \exp(-imB\Omega t) \quad (4.3)$$

Onde $2P_{mB}$ é a transformada de Fourier da pressão acústica na m-ésima harmônica de passagem da pá, em uma hélice com B pás. A pressão total (ruído total) é a soma dos efeitos devido à espessura, sustentação e arrasto, P_{Vm} , P_{Dm} e P_{Lm} respectivamente. O ruído total P_{mB} é dado por:

$$P_{mB} = P_{Vm} + P_{Dm} + P_{Lm} \quad (4.4)$$

As harmônicas do ruído são dadas por³⁰:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P_{Vm} \\ P_{Dm} \\ P_{Lm} \end{Bmatrix} &= - \frac{\rho_0 c_0^2 B \sin \theta \exp \left[imB \left(\frac{\Omega r}{c_0} - \frac{\pi}{2} \right) \right]}{8\pi (y/D)(1 - M_x \cos \theta)} \\ &* \int_0^1 M_r^2 \exp(i\phi_s) J_{mB} \left(\frac{mBz M_t \sin \theta}{1 - M_x \cos \theta} \right) \begin{Bmatrix} k_x^2 t_b \psi_V(k_x) \\ ik_x (C_D/2) \psi_D(k_x) \\ ik_y (C_L/2) \psi_L(k_x) \end{Bmatrix} dz \end{aligned} \quad (4.5)$$

A posição da hélice é dada em termos da distância lateral y e o ângulo de propagação com atraso como representado na Figura 17. A relação entre o ângulo com atraso θ e o ângulo na posição do observador θ_1 dependem da velocidade axial da hélice (Figura 18). A relação é dada por:

$$\cos \theta = \cos \theta_1 \sqrt{1 - M_x^2 \sin^2 \theta_1} + M_x \sin^2 \theta_1 \quad (4.6)$$

Para obtermos os valores das harmônicas de ruído descritas na equação (4.5), a geometria e o carregamento aerodinâmico da hélice devem ser conhecidos. A geometria em planta é descrita em função da razão da corda pelo diâmetro da hélice B_D e pelo enflechamento MCA/D , onde MCA é distância entre a linha de centro do eixo da pá e a meia corda do perfil. Os parâmetros B_D e MCA são função da coordenada radial adimensional da seção, z .

Fig.17 – Relação entre o ângulo visual e ângulo com atraso.

A espessura do perfil em cada elemento de pá é dada pelo parâmetro t_B , que é a razão entre a espessura máxima do perfil t e a corda c . A distribuição de espessura é dada pela função $H(x)$ como ilustrado na figura 19. Para cada elemento a corda unitária vai de $-1/2$ a $1/2$, enquanto que a espessura vai de zero no intra-dorso até 1

na espessura máxima.

A velocidade resultante da seção é dada em função do número de Mach, através da relação:

$$M_r^2 = M_x^2 + z^2 M_t^2 \quad (4.7)$$

Onde M_x é o Mach de vôo, M_t é o Mach na ponta da hélice e z é a coordenada radial adimensional da seção.

Fig.18 – Relação entre o ângulo visual e ângulo com atraso em função da velocidade de deslocamento da hélice.

As funções de carregamento $f_L(x)$ e $f_D(x)$, consideram as distribuições de sustentação e arrasto em termos dos coeficientes C_L e C_D unitários por unidade de área ao longo da corda, de maneira análoga a distribuição de espessura (Figura 20).

As funções de distribuição de espessura e carregamento são dadas em termos da

transformada de Fourier por:

$$\begin{Bmatrix} \psi_V(k_x) \\ \psi_D(k_x) \\ \psi_L(k_x) \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} H(x) \\ f_D(x) \\ f_L(x) \end{Bmatrix} \exp(ik_x x) dx \quad (4.8)$$

As funções ψ representam a interferência na posição do observador, de sinais emitidos das várias localizações das fontes de ruído ao longo da corda, também chamado de efeito de não compactação. K_x e K_y são os números da onda dados por:

$$k_x = \frac{2mBB_D M_t}{M_r (1 - M_x \cos \theta)} \quad (4.9)$$

$$k_y = \frac{2mBB_D}{zM_r} \left(\frac{M_x - M_r^2 \cos \theta}{1 - M_x \cos \theta} \right) \quad (4.10)$$

K_x é considerado o parâmetro de não compactação das fontes de ruído harmônico.

Fig.19 – Função de distribuição de espessura. Adaptado da referência 30

ϕ_s é o ângulo de fase devido ao enflechamento da pá, dado por:

$$\phi_s = \frac{2mBM_t}{M_r (1 - M_x \cos \theta)} \frac{MCA}{D} \quad (4.11)$$

Fig.20 – Função de distribuição de carregamento. Adaptado da referência 30

J_{mB} é a função de Bessel. O comportamento da função Bessel de ordem diferente de zero é apresentado na figura 21.

Fig.21 – Comportamento da função Bessel de ordem diferente de zero. No exemplo a ordem da função (mB) é igual a 6.

A função Bessel funciona como fator de eficiência da propagação. Note que a função possui valores próximos de zero para argumentos menores que a ordem da função, atinge o pico em valores próximos a sua ordem e oscila para valores maiores.

4.6 Validação do modelo de previsão de ruído

Conforme pudemos observar no item 4.5, antes do cálculo do ruído, devemos determinar o desempenho e a distribuição de forças aerodinâmicas ao longo do raio das pás. A validação do modelo deve ser feita comparando os resultados obtidos com dados experimentais ou modelos validados.

É relativamente fácil encontrar trabalhos comparando dados de ruído reais com os resultados de modelos, porém quase nunca são publicadas tabelas com as características geométricas e operacionais das hélices testadas, dados necessários para o cálculo do ruído. Encontramos dados para validação em Soderman²³. Esse trabalho avalia o efeito das naceles em hélices do tipo *pusher* e publica dados de ruído da hélice sem interferência como referência. Soderman utiliza código de Worobel^{33,34} modificado para incluir a distorção causada pela nacele. A tabela com as características da hélice utilizada na validação estão no Apêndice C.

A figura 22 apresenta a comparação entre a metodologia deste trabalho e os resultados teóricos e experimentais publicados por Soderman. Os dados são de uma hélice quadripá, com diâmetro de 600 mm e corda de 93 mm, operando a 8200 rpm e Mach 0.14. O ruído foi calculado e medido a uma distância lateral y de 1,4 m e ângulo do observador θ de 75° para frente do plano da hélice. Os quadrados brancos representam nossa previsão, enquanto os triângulos pretos indicam os valores experimentais e triângulos brancos valores calculados por Soderman. Podemos observar uma boa correlação entre os dados em uma grande faixa de frequência. Os resultados são satisfatórios e apesar das condições da validação (características da hélice e condições de operação) serem diferentes das que pretendemos utilizar, concluímos que o modelo proposto neste trabalho pode ser

usado para estimativas preliminares de ruído com boa precisão.

Fig.22 - Comparação entre os valores de ruído calculados com o modelo apresentado e os valores apresentados na referência 23.

5. Resultados

O modelo descrito nos capítulos anteriores permite o projeto de uma hélice com desempenho ótimo, incluindo sua geometria em planta, ângulos de torção, perfis aerodinâmico, bem como informações de desempenho e ruído.

Dadas as condições de operação, número de pás, torque disponível do motor, a primeira parte do modelo calcula a distribuição ótima de torção e a forma em planta da pá, estimada pelo parâmetro adimensional σC_L . Sem a definição do perfil aerodinâmico usado e conseqüentemente suas características aerodinâmicas, ainda não é possível determinar as dimensões das cordas dos elementos.

Considerando o número de Mach e Reynolds locais, podemos definir o perfil mais adequado para cada seção através do acesso a um banco de dados aerodinâmico. Para a escolha do perfil, precisamos calcular o número de Reynolds local, que por sua vez é função da corda da seção. Como valores iniciais, consideramos a corda constante ao longo da pá, com dimensão igual a 1/6 do raio calculado da hélice. Com este valor, é possível calcular o número de Reynolds local e usando o critério de melhor relação C_L/C_D , definir qual o perfil mais adequado. Uma vez escolhido o perfil é possível determinar a corda da seção e por sua vez calcular o novo número de Reynolds. O perfil mais adequado é obtido através de processo iterativo. A escolha considera os valores de desempenho dos perfis nos números de Mach e Reynolds (disponíveis no banco de dados) mais próximos dos calculados.

O banco de dados foi montado usando o código Xfoil e pode ser atualizado com dados experimentais. Para restringir os perfis utilizados escolhemos algumas

famílias projetadas para uso em hélices, como as descritas no item 3.4. Conforme validação do capítulo 3 os valores calculados pelo programa Xfoil fornecem precisão suficiente para uso em projeto preliminar.

Uma vez definidos os perfis aerodinâmicos é possível calcular o desempenho e ruído da hélice projetada pelo sistema. Apresentamos o fluxograma de projeto da hélice na figura 23.

Fig.23 - Fluxograma do cálculo de desempenho e ruído

Inicialmente avaliamos a influência da razão de avanço na forma geral em planta da hélice e torção. Consideramos a razão de avanço variando entre 0,2 e 0,3 para hélices de 2 e 3 pás (figura 24), valores compatíveis com envelope de operação de aeronaves da categoria LSA (*light sport aircraft*). Para altitude de operação compatível com este tipo de aeronave, temos o Mach variando entre 0,14 e 0,2.

Fig.24 - Efeito da razão de avanço na geometria ótima de uma hélice para aviação leve

Notamos a influência praticamente inexistente da torção em hélices de duas ou três pás, pequena influência na forma em planta e visível redução no parâmetro σ_{C_L} com o aumento da razão de avanço. Tal comportamento indica que usando o mesmo perfil, a razão de solidez deve ser menor em hélices com maior razão de avanço para obtermos o mesmo rendimento. Com relação ao número de pás, concluímos

que a área total da hélice deve ser a mesma, mantendo a razão de solidez. Na prática, por motivos estruturais, perfis mais espessos devem ser usados para compensar a menor corda das hélices com maior número de pás.

Em seguida efetuamos o projeto completo da hélice nas condições de operação. Verificamos que os perfis escolhidos automaticamente no banco de dados criaram geometrias de pouca utilidade prática uma vez que havia mistura de famílias de perfis, bem como uso de perfis de baixa espessura próximos a raiz, local que normalmente necessitam grande espessura por razões estruturais. Para evitar essas discrepâncias, criamos algumas condições de contorno.

Fig.25 – Função de espessura mínima da pá

A primeira delas foi a criação de uma função de espessura definida pelo usuário como ilustrado na Figura 25. A função pode ser alterada de acordo com o material utilizado. Para simplificar nosso modelo utilizamos como parâmetro a coordenada radial da pá, definindo um valor máximo de 6% do raio da hélice nas regiões

próximas ao centro até o raio do *spinner* e valor mínimo de 0,4% na ponta da pá.

A segunda condição de contorno foi definirmos uma única família de perfis em toda envergadura da pá. Usamos o critério de escolha da família a partir do perfil usado no maior número de seções. Critérios mais sofisticados considerando perfis de famílias diferentes podem ser implantados desde que se considerem perfis com aproximadamente mesma espessura máxima, evitando a criação de descontinuidades.

Fig.26 - Forma em planta e distribuição de espessura para uma hélice bipá para aeronaves da categoria LSA

A Figura 26 apresenta a forma em planta e ângulo de torção para uma hélice bipá. A linha contínua fina representa a forma em planta sem consideração da função de espessura ou família de perfis. Note que para valores de envergadura em torno de 0,62 há uma mudança abrupta da forma em planta. Tal comportamento ocorre

devido a diferença de espessura do perfil escolhido a partir desta seção. A linha pontilhada foi traçada como referência onde usamos um valor médio do coeficiente de sustentação do perfil. A linha cheia mais grossa indica a forma em planta mais próxima da ótima considerando a função de espessura mínima e a família de perfis ARA-D. No gráfico inferior temos uma comparação entre a espessura calculada sem (linha fina) e com restrições (linha grossa). Note que somente a partir de 60% da envergadura da pá é que os perfis considerados ótimos podem ser usados.

A razão de avanço considerada é $\lambda = 0.2$, diâmetro da hélice é 1,6 m e $K_p = 0.73$, valores compatíveis com uma aeronave da categoria ultraleve avançado. A corda máxima calculada possui aproximadamente 160 mm na região mais larga e 60 mm na ponta. O valor da ponta pode ser reduzido se otimizarmos a função de espessura.

Fig.27 - Forma em planta e distribuição de espessura para uma hélice tripá para aeronaves da categoria LSA

A Figura 27 apresenta os mesmos dados obtidos para uma hélice tripá. Note que há uma redução considerável na área em planta da pá, uma vez que agora temos uma pá a mais.

Definida a distribuição de corda e espessura, e distribuição de carregamento ao longo da pá, os dados de ruído harmônico são automaticamente calculados. A Figura 28 apresenta a comparação do ruído harmônico gerado por hélices de 2 e 3 pás operando nas mesmas condições. A distância lateral considerada foi de 2 m, com ângulo de atraso de 75° .

Fig.28 - Comparação entre o ruído gerado por hélices bipás e tripás projetadas para uso em aeronaves da categoria LSA

Conforme esperado as hélices tripá apresentaram valores de ruído menores do que as bipá, em todas as harmônicas, mas diferenças maiores de até 15 db podem ser observados em frequências mais altas. A redução de rendimento na razão de avanço simulada é de aproximadamente 2%, conforme podemos observar na figura 10 apresentada no capítulo 3. Concluimos que a perda de desempenho associada a pouca redução de ruído obtido com uma hélice tripá, dificilmente justifica a complexidade mecânica e custos associados a sua instalação em aeronaves da categoria LSA. Recomendamos o uso de hélices bipás neste tipo de aeronave e que escolha por hélice tripá ocorra somente em função de critérios subjetivos, como a especificação do usuário ou restrições quanto à geração de ruído.

6. Conclusão

Este trabalho apresentou uma metodologia simples para projeto preliminar de hélices considerando o desempenho e ruído gerado. Boas estimativas de desempenho e ruído podem ser alcançadas em pouco tempo e recursos computacionais. Para cálculo de desempenho utilizamos a teoria de Theodorsen e obtivemos valores satisfatórios para hélices projetadas para uso em pequenas aeronaves. Calculamos o ruído através do método no domínio da frequência, que se mostrou uma ótima ferramenta para estimarmos o ruído harmônico.

Outros trabalhos publicados utilizaram a mesma metodologia para o cálculo do desempenho, mas o grande diferencial deste trabalho foi o acesso a um banco de dados aerodinâmico, que permite o projeto praticamente automático da hélice, usando como dados de entrada as condições de operação e potência disponível do motor.

Com relação ao estudo de caso apresentado concluímos que a perda de desempenho associada a pouca redução de ruído e aumento de complexidade mecânica, demonstra que as hélices bipá apresentam mais vantagens do que as hélices tripa para uso em aeronaves leves.

Como sugestão de trabalhos futuros recomendamos que o método desenvolvido neste trabalho seja integrado com algoritmos de otimização, permitindo o projeto de hélices de passo fixo com melhor relação desempenho em decolagem e cruzeiro. Ainda na área de otimização, algoritmos podem ser integrados para projetar hélices que considerem a relação desempenho / ruído.

Também recomendamos que as rotinas de ruído sejam integradas com métodos mais sofisticados de cálculo de desempenho que considerem os efeitos de enflhecimento, compressibilidade, bem como efeitos de instalação.

Apêndice A – Tabelas de distribuição de circulação de Goldstein

Função de Goldstein $G(x, \lambda_2)$ $B=2$												
$1/\lambda_2$	x											
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,85	0,9	0,925	0,95	0,975
0,25	0,00385	0,00562	0,00719	0,00847	0,00936	0,00972	0,00929	0,00864	0,00754	0,00673	0,00564	0,00405
0,50	0,01500	0,02181	0,02779	0,03258	0,03581	0,03691	0,03502	0,03244	0,02818	0,02512	0,02104	0,0151
0,75	0,03248	0,04703	0,05954	0,06929	0,07548	0,07706	0,07236	0,06668	0,05764	0,05124	0,04283	0,03074
1,00	0,05517	0,07941	0,09976	0,11506	0,1241	0,12538	0,11649	0,10679	0,09186	0,08148	0,06798	0,04879
1,25	0,08188	0,11706	0,14583	0,1666	0,17789	0,17794	0,16376	0,14944	0,128	0,11332	0,0944	0,06775
1,50	0,11152	0,15826	0,19541	0,22114	0,23394	0,23194	0,21172	0,1925	0,16433	0,14526	0,12087	0,08674
1,75	0,14308	0,20148	0,24658	0,27656	0,29011	0,28547	0,25889	0,23471	0,19984	0,17646	0,1467	0,10526
2,00	0,17572	0,24547	0,29782	0,33128	0,34497	0,33735	0,30437	0,27535	0,23399	0,20645	0,17153	0,12307
2,25	0,20873	0,28922	0,34799	0,38419	0,39757	0,38683	0,34766	0,31402	0,26652	0,23501	0,19518	0,14006
2,50	0,24158	0,33198	0,39628	0,43457	0,44732	0,43351	0,38851	0,35055	0,29727	0,26207	0,2176	0,15617
2,75	0,27382	0,37321	0,44215	0,48197	0,49392	0,47721	0,42683	0,38488	0,32625	0,28757	0,23878	0,17141
3,00	0,30518	0,41254	0,48529	0,52617	0,53722	0,51785	0,46262	0,41704	0,35347	0,31158	0,25874	0,18579
3,25	0,33542	0,44974	0,52553	0,56708	0,57722	0,55549	0,49596	0,4471	0,37903	0,33416	0,27755	0,19938
3,50	0,36444	0,48472	0,56284	0,60474	0,614	0,59023	0,52697	0,47518	0,40301	0,35539	0,29529	0,21223
3,75	0,39215	0,51744	0,59725	0,63924	0,6477	0,62222	0,55575	0,50139	0,42551	0,37538	0,31203	0,22438
4,00	0,41854	0,54794	0,62889	0,67076	0,6785	0,65163	0,58248	0,52587	0,44666	0,39422	0,32785	0,23589
4,25	0,44357	0,57628	0,65788	0,69946	0,70657	0,67877	0,6073	0,54874	0,46655	0,41199	0,34283	0,24683
4,50	0,46734	0,60258	0,6844	0,72555	0,73212	0,70341	0,63035	0,57014	0,48528	0,4288	0,35703	0,25724
4,75	0,48989	0,62696	0,70862	0,74923	0,75536	0,72614	0,65178	0,59018	0,50297	0,44472	0,37054	0,26716
5,00	0,5112	0,64953	0,73071	0,77069	0,77646	0,74698	0,67173	0,60898	0,51969	0,45983	0,38342	0,27666
5,25	0,5314	0,67043	0,75086	0,79013	0,79562	0,7661	0,69031	0,62663	0,53552	0,47419	0,39570	0,28575
5,50	0,55052	0,68978	0,76923	0,80773	0,813	0,78363	0,70762	0,64324	0,55055	0,48789	0,40746	0,29449
5,75	0,56869	0,7077	0,78598	0,82366	0,82878	0,79974	0,72379	0,65889	0,56483	0,50096	0,41872	0,30290
6,00	0,58589	0,72432	0,80125	0,83808	0,8431	0,81452	0,73890	0,67365	0,57843	0,51346	0,42954	0,31100
7,00	0,64642	0,77971	0,85021	0,88336	0,8883	0,86263	0,79037	0,72517	0,62703	0,55863	0,46904	0,34087
8,00	0,69603	0,82137	0,88463	0,914	0,91913	0,89725	0,83048	0,76705	0,66816	0,59756	0,50370	0,36751
9,00	0,73713	0,85326	0,90927	0,935	0,94032	0,9224	0,86218	0,79808	0,70357	0,63173	0,53466	0,39168
10,00	0,7715	0,87807	0,92726	0,94964	0,95507	0,94083	0,88748	0,83054	0,73442	0,66209	0,56267	0,41391
11,00	0,80045	0,89762	0,94063	0,96005	0,96545	0,95445	0,90785	0,85487	0,76155	0,68933	0,58825	0,43454
12,00	0,82497	0,91324	0,95078	0,9676	0,97286	0,9646	0,92432	0,87548	0,78557	0,71393	0,61178	0,45384

Tabela 1. Função de circulação de Goldstein para $B=2$

Função de Goldstein $G(x, \lambda_2)$ $B=3$												
$1/\lambda_2$	x											
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,85	0,9	0,925	0,95	0,975
0,25	0,00408	0,00661	0,009	0,01105	0,01257	0,01332	0,01295	0,01213	0,01065	0,00954	0,00804	0,00583
0,50	0,01588	0,02565	0,03476	0,04244	0,04797	0,05049	0,04866	0,04539	0,0397	0,0355	0,02987	0,02165
0,75	0,03433	0,05512	0,07417	0,08985	0,10065	0,10489	0,10006	0,09283	0,08077	0,07205	0,06048	0,04377
1,00	0,05808	0,09254	0,12345	0,14811	0,16425	0,1694	0,15992	0,14762	0,12780	0,11373	0,09527	0,06886
1,25	0,08574	0,1354	0,17885	0,21241	0,23317	0,23814	0,22276	0,20473	0,17652	0,15681	0,13113	0,09468
1,50	0,11604	0,1814	0,23714	0,27879	0,30315	0,30697	0,28501	0,26106	0,22441	0,19907	0,16628	0,11998
1,75	0,1479	0,22867	0,29576	0,34432	0,37123	0,37325	0,34456	0,31485	0,27008	0,23937	0,19978	0,14411
2,00	0,18043	0,27577	0,35287	0,40701	0,43557	0,43544	0,40032	0,36523	0,31290	0,27717	0,23124	0,16679
2,25	0,21301	0,32168	0,40722	0,46565	0,49512	0,49279	0,45179	0,41184	0,35264	0,31232	0,26054	0,18796
2,50	0,24516	0,36565	0,45806	0,5196	0,54944	0,54503	0,49890	0,45466	0,38930	0,34484	0,28773	0,20763
2,75	0,27658	0,40733	0,50504	0,56864	0,59845	0,5922	0,54176	0,49383	0,42306	0,37486	0,31290	0,22593
3,00	0,30703	0,44646	0,54805	0,61282	0,64232	0,63455	0,58062	0,52960	0,45411	0,40259	0,33625	0,24296
3,25	0,3364	0,48298	0,58718	0,65237	0,68136	0,67241	0,61581	0,56225	0,48270	0,42824	0,35794	0,25885
3,50	0,36464	0,51892	0,62261	0,68761	0,71598	0,70617	0,64764	0,59207	0,50908	0,45202	0,37815	0,27373
3,75	0,39172	0,54839	0,65461	0,7189	0,74657	0,73623	0,67646	0,61933	0,53346	0,47412	0,39703	0,28769
4,00	0,4176	0,57751	0,68346	0,74665	0,77356	0,76296	0,70256	0,64431	0,55606	0,49472	0,41106	0,30086
4,25	0,44239	0,60443	0,70944	0,77121	0,79735	0,78672	0,72623	0,66725	0,57708	0,51399	0,43139	0,31332
4,50	0,46604	0,62932	0,73284	0,79297	0,8183	0,80785	0,74773	0,68835	0,59666	0,53208	0,44712	0,32515
4,75	0,48861	0,65232	0,75392	0,81222	0,83675	0,82666	0,76729	0,70782	0,61498	0,54910	0,46200	0,33642
5,00	0,51015	0,6736	0,77292	0,82927	0,853	0,84339	0,78512	0,72580	0,63214	0,56515	0,47615	0,34718
5,25	0,53067	0,69328	0,79008	0,84439	0,86734	0,8583	0,80139	0,74246	0,64827	0,58034	0,48961	0,35749
5,50	0,55025	0,71151	0,80559	0,85782	0,87998	0,87159	0,81626	0,75790	0,66346	0,59475	0,50247	0,36739
5,75	0,56895	0,72841	0,81962	0,86976	0,89115	0,88345	0,82987	0,77226	0,67779	0,60844	0,51477	0,37693
6,00	0,58675	0,74408	0,83235	0,88039	0,90103	0,89405	0,84235	0,78564	0,69134	0,62148	0,52655	0,38613
7,00	0,65005	0,79641	0,87274	0,91281	0,9306	0,92647	0,88294	0,83081	0,73888	0,66807	0,56939	0,42005
8,00	0,70233	0,83581	0,90094	0,93406	0,9493	0,94761	0,91222	0,86559	0,77792	0,70747	0,60666	0,45030
9,00	0,74557	0,86585	0,92114	0,94851	0,96155	0,96165	0,93362	0,89271	0,81042	0,74131	0,63957	0,47772
10,00	0,7814	0,88903	0,93597	0,95869	0,96984	0,97116	0,94941	0,91403	0,83774	0,77067	0,66897	0,50283
11,00	0,81118	0,90712	0,9471	0,96611	0,97567	0,97773	0,96113	0,93090	0,86086	0,79632	0,69542	0,52603
12,00	0,83601	0,9214	0,95562	0,97168	0,97991	0,98237	0,96989	0,94430	0,88050	0,81884	0,71937	0,54758

Tabela 2. Função de circulação de Goldstein para $B=3$

Função de Goldstein $G(x, \lambda_2)$ $B=4$												
$1/\lambda_2$	x											
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,85	0,9	0,925	0,95	0,975
0,25	0,00393	0,00698	0,01007	0,01286	0,01505	0,01628	0,01607	0,01515	0,01339	0,01204	0,01018	0,00742
0,50	0,01530	0,02707	0,03882	0,04926	0,05725	0,06150	0,06023	0,05655	0,04976	0,04464	0,03768	0,02745
0,75	0,03308	0,05803	0,08251	0,10378	0,11949	0,12711	0,12322	0,11509	0,10075	0,09015	0,07592	0,05519
1,00	0,05595	0,09706	0,13652	0,16990	0,19356	0,20378	0,19555	0,18176	0,15837	0,14138	0,11882	0,08624
1,25	0,08255	0,14134	0,19638	0,24159	0,27230	0,28391	0,27009	0,25005	0,21706	0,19345	0,16232	0,11768
1,50	0,11166	0,18842	0,25834	0,31408	0,35043	0,36232	0,34233	0,31603	0,27365	0,24361	0,20421	0,14796
1,75	0,14231	0,23638	0,31960	0,38403	0,42452	0,43588	0,40983	0,37766	0,32655	0,29053	0,24343	0,17634
2,00	0,17371	0,28379	0,37826	0,44940	0,49265	0,50304	0,47148	0,43409	0,37516	0,33375	0,27963	0,20261
2,25	0,20533	0,32969	0,43322	0,50912	0,55397	0,56322	0,52699	0,48515	0,41942	0,37323	0,31282	0,22678
2,50	0,23674	0,37350	0,48390	0,56281	0,60835	0,61649	0,57654	0,53107	0,45955	0,40919	0,34320	0,24899
2,75	0,26766	0,41491	0,53013	0,61056	0,65607	0,66325	0,62057	0,57225	0,49593	0,44195	0,37102	0,26946
3,00	0,29790	0,45373	0,57200	0,65272	0,69766	0,70406	0,65959	0,60914	0,52893	0,47186	0,39659	0,28837
3,25	0,32734	0,49002	0,60974	0,68976	0,73374	0,73957	0,69414	0,64224	0,55892	0,49926	0,42016	0,30593
3,50	0,35583	0,52375	0,64368	0,72222	0,76495	0,77040	0,72475	0,67198	0,58630	0,52444	0,44199	0,32231
3,75	0,38340	0,55507	0,67414	0,75063	0,79191	0,79716	0,75190	0,69875	0,61136	0,54768	0,46229	0,33766
4,00	0,40995	0,58412	0,70148	0,77548	0,81519	0,82038	0,77601	0,72292	0,63437	0,56921	0,48126	0,35211
4,25	0,43547	0,61102	0,72601	0,79725	0,83531	0,84053	0,79747	0,74481	0,65559	0,58923	0,49906	0,36578
4,50	0,45996	0,63592	0,74805	0,81634	0,85272	0,85805	0,81658	0,76466	0,67521	0,60791	0,51580	0,37874
4,75	0,48344	0,65896	0,76787	0,83310	0,86780	0,87329	0,83366	0,78272	0,69340	0,62541	0,53161	0,39108
5,00	0,50595	0,68029	0,78570	0,84787	0,88089	0,88657	0,84894	0,79918	0,71031	0,64183	0,54660	0,40287
5,25	0,52742	0,70003	0,80180	0,86091	0,89230	0,89817	0,86263	0,81422	0,72609	0,65729	0,56083	0,41416
5,50	0,54795	0,71831	0,81633	0,87245	0,90225	0,90831	0,87492	0,82799	0,74082	0,67186	0,57438	0,42500
5,75	0,56752	0,73523	0,82948	0,88269	0,91096	0,91721	0,88597	0,84061	0,75460	0,68564	0,58731	0,43543
6,00	0,58619	0,75092	0,84140	0,89180	0,91862	0,92501	0,89592	0,85219	0,76753	0,69870	0,59966	0,44548
7,00	0,65240	0,80308	0,87922	0,91968	0,94132	0,94806	0,92690	0,89001	0,81192	0,74467	0,64423	0,48252
8,00	0,70668	0,84195	0,90561	0,93819	0,95573	0,96239	0,94772	0,91745	0,84704	0,78258	0,68244	0,51539
9,00	0,75108	0,87127	0,92454	0,95104	0,96536	0,97165	0,96192	0,93758	0,87513	0,81425	0,71566	0,54500
10,00	0,78746	0,89365	0,93846	0,96027	0,97211	0,97875	0,97173	0,95247	0,89778	0,84092	0,74483	0,57196
11,00	0,81733	0,91097	0,94893	0,96713	0,97702	0,98218	0,97858	0,96354	0,91612	0,86352	0,77059	0,59667
12,00	0,84197	0,92456	0,95698	0,97235	0,98072	0,98532	0,98343	0,97181	0,93106	0,88276	0,79348	0,61948

Tabela 3. Função de circulação de Goldstein para $B=4$

Função de Goldstein $G(x, \lambda_2)$ $B=5$												
$1/\lambda_2$	x											
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,85	0,9	0,925	0,95	0,975
0,25	0,00367	0,00703	0,01066	0,01410	0,01694	0,01871	0,01876	0,01781	0,01583	0,01427	0,01211	0,00886
0,50	0,01433	0,02724	0,04099	0,05388	0,06429	0,07047	0,07011	0,06626	0,05866	0,05277	0,04468	0,03266
0,75	0,03106	0,05834	0,08687	0,11302	0,13350	0,14491	0,14273	0,13422	0,11823	0,10610	0,08962	0,06538
1,00	0,05266	0,09745	0,14315	0,18393	0,21481	0,23071	0,22503	0,21065	0,18474	0,16544	0,13946	0,10158
1,25	0,07792	0,14170	0,20492	0,25974	0,29980	0,31883	0,30845	0,28771	0,25151	0,22490	0,18934	0,13776
1,50	0,10578	0,18864	0,26825	0,33520	0,38251	0,40330	0,38777	0,36085	0,31485	0,28131	0,23666	0,17213
1,75	0,13535	0,23640	0,33027	0,40684	0,45933	0,48082	0,46036	0,42791	0,37310	0,33330	0,25834	0,20424
2,00	0,16593	0,28366	0,38919	0,47273	0,52847	0,54996	0,52529	0,48817	0,42578	0,38048	0,32021	0,23306
2,25	0,19701	0,32951	0,44401	0,53203	0,58941	0,61049	0,58254	0,54172	0,47306	0,42305	0,35634	0,25961
2,50	0,22816	0,37336	0,49429	0,58463	0,64237	0,66283	0,63262	0,58906	0,51536	0,46140	0,38910	0,28385
2,75	0,25912	0,41491	0,53997	0,63087	0,68389	0,70776	0,67624	0,63083	0,55324	0,49601	0,41890	0,30605
3,00	0,28964	0,45400	0,58124	0,67128	0,72701	0,74613	0,71416	0,66768	0,58725	0,52733	0,44610	0,32651
3,25	0,31953	0,49061	0,61835	0,70649	0,76035	0,77884	0,74714	0,70025	0,61787	0,55582	0,47107	0,34545
3,50	0,34862	0,52474	0,65168	0,73713	0,78879	0,80668	0,77583	0,72911	0,64555	0,58184	0,49411	0,36308
3,75	0,37688	0,55647	0,68156	0,76381	0,81305	0,83040	0,80083	0,75475	0,67067	0,60570	0,51547	0,37959
4,00	0,40422	0,58593	0,70837	0,78706	0,83379	0,85063	0,82266	0,77758	0,69356	0,62769	0,53535	0,39511
4,25	0,43056	0,61323	0,73240	0,80737	0,85157	0,86792	0,84176	0,79796	0,71448	0,64802	0,55394	0,40979
4,50	0,45588	0,63849	0,75398	0,82516	0,86684	0,88272	0,85850	0,81622	0,73365	0,66688	0,57139	0,42369
4,75	0,48016	0,66185	0,77338	0,84077	0,88002	0,89543	0,87321	0,83261	0,75129	0,68445	0,58781	0,43693
5,00	0,50345	0,68346	0,79083	0,85452	0,89142	0,90637	0,88616	0,84735	0,76756	0,70083	0,60333	0,44955
5,25	0,52569	0,70342	0,80656	0,86667	0,90134	0,91583	0,89757	0,86062	0,78258	0,71616	0,61802	0,46164
5,50	0,54689	0,72187	0,82075	0,87744	0,91000	0,92402	0,90766	0,87260	0,79648	0,73054	0,63194	0,47323
5,75	0,56712	0,73892	0,83358	0,88701	0,91759	0,93114	0,91658	0,88344	0,80938	0,74404	0,64520	0,48437
6,00	0,58638	0,75469	0,84521	0,89555	0,92427	0,93736	0,92449	0,89325	0,82135	0,75674	0,65781	0,49509
7,00	0,65444	0,80681	0,88202	0,92183	0,94429	0,95556	0,94829	0,92420	0,86155	0,80075	0,70286	0,53446
8,00	0,70979	0,84530	0,90764	0,93947	0,95728	0,96686	0,96344	0,94540	0,89206	0,83600	0,74084	0,56919
9,00	0,75471	0,87409	0,92601	0,95183	0,96619	0,97427	0,97330	0,96011	0,91547	0,86457	0,77326	0,60022
10,00	0,79119	0,89595	0,93951	0,96079	0,97256	0,97939	0,97986	0,97042	0,93355	0,88787	0,80118	0,62826
11,00	0,82094	0,91281	0,94969	0,96748	0,97729	0,98308	0,98435	0,97771	0,94756	0,90699	0,82537	0,65378
12,00	0,84530	0,92601	0,95753	0,97259	0,98088	0,98583	0,98749	0,98291	0,95847	0,92272	0,84643	0,67711

Tabela 4. Função de circulação de Goldstein para $B=5$

Função de Goldstein $G(x, \lambda_2)$ $B=6$												
$1/\lambda_2$	x											
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,85	0,9	0,925	0,95	0,975
0,25	0,00343	0,00693	0,01093	0,01493	0,01840	0,02072	0,02110	0,02015	0,01802	0,01629	0,01386	0,01018
0,50	0,01341	0,02685	0,04202	0,05693	0,06960	0,07779	0,07861	0,07479	0,06660	0,06009	0,05102	0,03741
0,75	0,02915	0,05753	0,08886	0,11899	0,14388	0,15919	0,15929	0,15082	0,13368	0,12032	0,10193	0,07459
1,00	0,04963	0,09614	0,14606	0,19275	0,23014	0,25186	0,24965	0,23537	0,20778	0,18665	0,15783	0,11533
1,25	0,07378	0,13991	0,20854	0,27078	0,31904	0,34555	0,33985	0,31941	0,28122	0,25232	0,21313	0,15561
1,50	0,10067	0,18647	0,27228	0,34758	0,40419	0,43378	0,42418	0,39795	0,34993	0,31383	0,26500	0,19346
1,75	0,12948	0,23400	0,33448	0,41973	0,48201	0,51322	0,50001	0,46881	0,41226	0,36983	0,31238	0,22817
2,00	0,15959	0,28120	0,39344	0,48543	0,55095	0,58274	0,56659	0,53149	0,46791	0,42008	0,35515	0,25968
2,25	0,19043	0,32716	0,44814	0,54407	0,61077	0,64245	0,62427	0,58634	0,51726	0,46496	0,39363	0,28824
2,50	0,22160	0,37130	0,49831	0,59572	0,66210	0,69315	0,67386	0,63411	0,56095	0,50504	0,42829	0,31418
2,75	0,25275	0,41325	0,54385	0,64087	0,70574	0,73592	0,71632	0,67567	0,59967	0,54092	0,45964	0,33788
3,00	0,28363	0,45284	0,58497	0,68016	0,74273	0,77186	0,75263	0,71185	0,63412	0,57320	0,48814	0,35965
3,25	0,31400	0,48993	0,62196	0,71428	0,77405	0,80205	0,78372	0,74341	0,66486	0,60235	0,51419	0,37979
3,50	0,34366	0,52459	0,65516	0,74392	0,80059	0,82742	0,81033	0,77101	0,69242	0,62882	0,53814	0,39850
3,75	0,37253	0,55683	0,68492	0,76969	0,82313	0,84876	0,83319	0,79521	0,71722	0,65295	0,56027	0,41600
4,00	0,40051	0,58674	0,71159	0,79214	0,84232	0,86679	0,85284	0,81649	0,73961	0,67505	0,58080	0,43245
4,25	0,42746	0,61443	0,73549	0,81175	0,85876	0,88205	0,86980	0,83525	0,75990	0,69537	0,59993	0,44797
4,50	0,45338	0,64003	0,75694	0,82892	0,87287	0,89502	0,88446	0,85184	0,77835	0,71411	0,61782	0,46267
4,75	0,47827	0,66367	0,77619	0,84401	0,88505	0,90609	0,89715	0,86652	0,79516	0,73143	0,63461	0,47664
5,00	0,50210	0,68549	0,79349	0,85732	0,89561	0,91559	0,90818	0,87956	0,81052	0,74751	0,65039	0,48995
5,25	0,52485	0,70562	0,80907	0,86908	0,90482	0,92377	0,91778	0,89116	0,82457	0,76244	0,66529	0,50268
5,50	0,54653	0,72418	0,82311	0,87953	0,91288	0,93085	0,92616	0,90148	0,83745	0,77635	0,67936	0,51487
5,75	0,56719	0,74130	0,83579	0,88883	0,91999	0,93700	0,93348	0,91071	0,84929	0,78931	0,69269	0,52656
6,00	0,58684	0,75711	0,84727	0,89713	0,92626	0,94238	0,93991	0,91894	0,86017	0,80143	0,70532	0,53780
7,00	0,65602	0,80912	0,88353	0,92275	0,94525	0,95821	0,95879	0,94414	0,89583	0,84266	0,74996	0,57888
8,00	0,71198	0,84727	0,90872	0,94005	0,95776	0,96825	0,97043	0,96059	0,92179	0,87469	0,78689	0,61482
9,00	0,75711	0,87570	0,92677	0,95220	0,96645	0,97500	0,97789	0,97149	0,94089	0,89983	0,81780	0,64673
10,00	0,79357	0,89722	0,94005	0,96103	0,97271	0,97978	0,98284	0,97884	0,95504	0,91968	0,84390	0,67531
11,00	0,82314	0,91379	0,95008	0,96764	0,97738	0,98328	0,98626	0,98389	0,96557	0,93544	0,86603	0,70109
12,00	0,84727	0,92677	0,95781	0,97272	0,98095	0,98594	0,98871	0,98740	0,97343	0,94797	0,88487	0,72446

Tabela 5. Função de circulação de Goldstein para $B=6$

Apêndice B – Tabelas de coeficientes de Theodorsen

Coeficiente de massa κ					
B					
$1/\lambda_2$	2	3	4	5	6
0,25	0,00762	0,01027	0,01239	0,01412	0,01553
0,50	0,02893	0,03892	0,04678	0,05310	0,05827
0,75	0,06047	0,08088	0,09670	0,10920	0,11920
1,00	0,09865	0,13090	0,15520	0,17410	0,18910
1,25	0,14060	0,18460	0,21700	0,24140	0,26050
1,50	0,18390	0,23890	0,27810	0,30700	0,32900
1,75	0,22740	0,29170	0,33620	0,36760	0,39220
2,00	0,27010	0,34190	0,39030	0,42420	0,44540
2,25	0,31110	0,38880	0,43960	0,47450	0,49970
2,50	0,35000	0,43210	0,48420	0,51930	0,54430
2,75	0,38680	0,47180	0,52430	0,55870	0,58350
3,00	0,42130	0,50790	0,56010	0,59420	0,61800
3,25	0,45350	0,54070	0,59220	0,62540	0,64830
3,50	0,48330	0,57050	0,62090	0,65290	0,67500
3,75	0,51110	0,59740	0,64650	0,67750	0,69870
4,00	0,53670	0,62170	0,66950	0,69930	0,71960
4,25	0,56050	0,64400	0,69010	0,71880	0,73830
4,50	0,58240	0,66420	0,70870	0,73630	0,75500
4,75	0,60270	0,68240	0,72550	0,75200	0,76990
5,00	0,62140	0,69920	0,74070	0,76620	0,78340
5,25	0,63870	0,71440	0,75450	0,77900	0,79560
5,50	0,65490	0,72840	0,76710	0,79070	0,80660
5,75	0,66970	0,74110	0,77850	0,80130	0,81660
6,00	0,68350	0,75290	0,78910	0,81110	0,82580
7,00	0,72980	0,79160	0,82330	0,84240	0,85530
8,00	0,76520	0,82040	0,84840	0,86530	0,87670
9,00	0,79220	0,84240	0,86760	0,88270	0,89270
10,00	0,81450	0,85960	0,88260	0,89600	0,90510
11,00	0,83230	0,87350	0,89420	0,90660	0,91480
12,00	0,84690	0,88470	0,90370	0,91510	0,92260

Tabela 6. Coeficiente de massa de Theodorsen

Coeficiente ε/κ					
B					
$1/\lambda_2$	2	3	4	5	6
0,75	0,122	0,132	0,143	0,152	0,159
1,00	0,179	0,198	0,215	0,231	0,242
1,25	0,237	0,263	0,286	0,305	0,323
1,50	0,289	0,324	0,354	0,382	0,394
1,75	0,334	0,380	0,414	0,441	0,485
2,00	0,379	0,431	0,470	0,495	0,518
2,25	0,422	0,478	0,520	0,550	0,550
2,50	0,459	0,520	0,563	0,596	0,619
2,75	0,493	0,558	0,603	0,632	0,654
3,00	0,525	0,594	0,637	0,663	0,686
3,25	0,556	0,624	0,667	0,696	0,715
3,50	0,583	0,653	0,695	0,722	0,739
3,75	0,608	0,680	0,719	0,744	0,761
4,00	0,632	0,701	0,740	0,765	0,781
4,25	0,654	0,720	0,759	0,782	0,797
4,50	0,674	0,741	0,776	0,798	0,812
4,75	0,693	0,757	0,791	0,812	0,825
5,00	0,711	0,771	0,805	0,824	0,836
5,50	0,740	0,799	0,828	0,845	0,857
6,00	0,766	0,821	0,847	0,863	0,873
7,00	0,807	0,854	0,877	0,890	0,898
8,00	0,840	0,878	0,897	0,909	0,916
9,00	0,862	0,897	0,912	0,923	0,930
10,00	0,878	0,911	0,926	0,934	0,940

Tabela 7. Coeficiente ε/κ

Apêndice C – Valores utilizados da validação do modelo de ruído

$x=r/R$ [adm]	Corda[mm]	B_0 [adm]	t [mm]	t_b [adm]	MCA[mm]	MCA/D[adm]	C_L	C_d	C_T/dr	C_P/dr	C_Q/dr
0,00	0,00	0,000	0,00	0,000	0,0000	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,05	30,48	0,052	17,66	0,580	0,0000	0	0,05940	0,00600	0,00020	0,00030	0,00005
0,10	76,20	0,129	17,66	0,232	0,0000	0	0,13830	0,00880	0,00390	0,00380	0,00060
0,15	91,44	0,155	17,66	0,193	0,0000	0	0,17760	0,01090	0,01030	0,00990	0,00158
0,20	92,96	0,157	17,66	0,190	0,0000	0	0,15260	0,00950	0,01360	0,01270	0,00202
0,25	93,22	0,158	15,15	0,163	0,0000	0	0,14990	0,00940	0,01890	0,01760	0,00280
0,30	93,22	0,158	9,20	0,099	0,0000	0	0,12490	0,00820	0,02110	0,01960	0,00312
0,35	93,22	0,158	6,92	0,074	0,0000	0	0,15770	0,00980	0,03450	0,03240	0,00516
0,40	93,22	0,158	5,55	0,059	0,0000	0	0,13590	0,00870	0,03760	0,03540	0,00563
0,45	93,22	0,158	4,89	0,050	0,0000	0	0,17790	0,01100	0,06050	0,05830	0,00928
0,50	93,22	0,158	4,03	0,043	0,0000	0	0,19980	0,01230	0,08220	0,08080	0,01286
0,55	93,22	0,158	3,49	0,037	0,0000	0	0,21430	0,01330	0,10500	0,10510	0,01673
0,60	92,71	0,157	3,08	0,033	0,0000	0	0,20610	0,01280	0,11840	0,11950	0,01902
0,65	92,71	0,157	2,74	0,030	0,0000	0	0,20990	0,01300	0,13910	0,14250	0,02268
0,70	91,44	0,155	2,42	0,026	0,0000	0	0,20340	0,01260	0,15460	0,16000	0,02546
0,75	89,66	0,152	2,16	0,024	0,0000	0	0,19440	0,01200	0,16560	0,17280	0,02750
0,80	88,39	0,150	1,94	0,022	0,0000	0	0,16790	0,01040	0,16000	0,16740	0,02664
0,85	85,09	0,144	1,71	0,020	0,0000	0	0,16340	0,01010	0,16870	0,17890	0,02847
0,90	80,26	0,136	1,50	0,019	0,0000	0	0,16500	0,01020	0,17940	0,19410	0,03089
0,95	70,87	0,120	1,35	0,019	0,0000	0	0,14380	0,00910	0,15340	0,16890	0,02688
1,00	0,00	0,000	0,00	0,000	0,0000	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Tabela 8. Valores utilizados na validação do modelo de ruído. Extraído de Soderman²³

Fig. 29 - Derivadas aerodinâmicas da hélice usada na validação do modelo aerodinâmico. Extraído de Soderman²³

Referências

1. NGATS – Next Generation Air Transportation System – Integrated Plan, Joint Planning and Development Office, 2004.
2. NGATS – Next Generation Air Transportation System – 2005 Progress Report to the Next Generation Air Transportation System Integrated Plan, Joint Planning and Development Office, 2005.
3. Hanson, Donald B. Compressible lifting surface theory for propeller performance calculation. *Journal of Aircraft*, v.22, n.1, p.19-27, AIAA Paper 82-0020, 1984.
4. Betz A. Schraubenpropeller mit geringstem energieverlust. *Göttinger Nachrichten*, Göttingen, p.193-217, 1919.
5. Theodorsen T. *Theory of propellers*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1948.
6. Ribner, H. S.; Foster, S. P. Ideal efficiency of propellers: Theodorsen revisited. *Journal of Aircraft*, v.27, n.9, p.810-819, 1990.
7. Wald, Quentin R. The aerodynamics of the propellers. *Progress in Aerospace Sciences*, v.42, p.85-128, 2006.
8. Glauert, H. Airplane propellers. In: Durand, W. F. *Aerodynamic theory*. Berlin: Julius Springer, 1935. V. iv, div. L, p.167-268.
9. Froude, R. E. On the part played in propulsion by differences of fluid pressure. *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects*, v.30, p.390-405, 1889.
10. Drzewiecki, S. Du Choix des elements determinant les helices propulsives permettant leur facile comparaison entre elles. *Bulletin de l'Association Technique Maritime*. Paris, n.12, 1901.
11. Glauert, H. An aerodynamic theory of the airscrew. *ARC R&M 786*, Jan 1922.
12. Drela, M. XFOIL: An Analysis and Design System for Low Reynolds Number Airfoils. *Lecture notes in engineering (Volume 54, Low Reynolds Number Aerodynamics)*, Springer-Verlag, New York.
13. Larrabee, E. E. Practical design of minimum induced loss propellers, *SAE Technical Paper 790585*, 1979.
14. D'Angelo, S. et al. Aerodynamic performance of propellers with parametric considerations on the optimal design. *The Aeronautical Journal*, june 2002, p.313-320.

15. Sabzehparvar, Mehdi. In-Flight thrust measurements of propeller-driven airplanes. *Journal of Aircraft*, v.42, n. 6, November – December 2005, AIAA-12837-588.
16. Prandtl, L. Appendix. In: Betz A. Schraubenpropeller mit geringstem energieverlust. *Göttinger Nachrichten*, Göttingen, p.193-217, 1919.
17. Goldstein, S. On the vortex theory of screw propellers. *Proceedings of the Royal Society of London*, v.123, n.792, p. 440-465, 1929.
18. Tiberly, C. L.; Wrench, Jr. J. W. Tables of the Goldstein factor. *David Taylor Model Basin, Report 1534*, Applied Mathematics Laboratory, Washington, 1964.
19. Hartman, Edwin P. and Bierman, David. The aerodynamic characteristics of the full scale propeller having 2, 3 and 4 blades of Clark Y and RAF 6 airfoil sections. *NACA, report TR-640*, Washington, 1938.
20. Magliozzi, B. and Hanson, D. B. Cap. 1 - Propeller and propfan noise. In: Hubbard, Harvey H., editor. *Aeroacoustics of flight vehicles: theory and practice*. NASA technical report 90-3052, v.1, p.1-64, 1991.
21. Worobel, R. Computer program user's manual for advanced general aviation propeller study, *NASA CR-2066*, 1972.
22. Generalized Method of Propeller Performance Estimation. *Hamilton Standard Report PDB 6101 A*, United Aircraft Corporation, Junho 1963.
23. Soderman, P. T., Horne, W. Clifton. Acoustic and aerodynamic study of a pusher-propeller aircraft model, *NASA Technical Paper 3040*, 1990.
24. Marte, J. E. A review of aerodynamic noise from propellers, rotors and lift fans. *Technical Report 32-1462*, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, January, 1970.
25. Prediction procedure for near-field and far-field propeller noise, *Aerospace Information Report – AIR 1407*, SAE, Maio 1977.
26. Woan, C. J. Propeller Study, Part II: design of propeller for minimum noise. *NASA CR-155005*, July 1977.
27. Ffowcs Williams, J. E.; and Hawkings, D. L. Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Philos. Trans. Royal SOC. London*, ser. A, v.264, n.1151, p. 321-342, 1969.
28. Farassat, F.: Linear Acoustic Formulas for Calculation of Rotating Blade Noise. *AIAA Journal*, v.19, n.9, p.1122-1130, 1981.
29. Gutin, L. On the sound field of a rotating propeller. *NACA TM 1195*, 1948.

30. Hanson, Donald B. Helicoidal surface theory for harmonic noise of propellers in the far field. AIAA Journal, v.18, n.10, p.1213-1219, 1980.
31. Hanson, Donald B. Influence of propeller design parameters on far field harmonic noise in forward flight. AIAA Journal, v.18, n.11, p.1313-1319, 1980.
32. Hanson, Donald B. Near-field frequency-domain theory for propeller noise. AIAA Journal, v.23, n.4, p.499-504, 1985.
33. Worobel, R. and Mayo, M. Advanced General Aviation Propeller Study. NASA Report CR 114289, April 1971.
34. Worobel, R. and Mayo, M. Advanced General Aviation Propeller Study. NASA Report CR 114399, Jan. 1972.