UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

REINALDO CESAR

***Modelo em Elementos Finitos para
Simulação de Geradores Piezelétricos
de Energia***

São Carlos - SP

2010

REINALDO CESAR

***Modelo em Elementos Finitos para
Simulação de Geradores Piezelétricos
de Energia***

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Aeronaves.

Orientador: Prof. Dr. Carlos De Marqui Junior

São Carlos - SP

2010

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADO A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

	Cesar, Reinaldo
C421m	<p>Modelo em elementos finitos para simulação de geradores piezelétricos de energia / Reinaldo Cesar; orientador Carlos De Marqui Junior. -- São Carlos, 2010. 80f.: il.</p> <p>Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Área de Concentração em Aeronaves) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2010.</p> <p>1. Geração de energia elétrica. 2. Vibrações Mecânicas. 3. Piezeletricidade. 4. Elementos Finitos.</p> <p>I. Título.</p>

Nome: CESAR, Reinaldo

Título: Modelo em Elementos Finitos para Simulação de Geradores Piezelétricos de Energia

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato(a): Licenciado REINALDO CESAR.

Dissertação defendida e julgada em 05/07/2010 perante a Comissão Julgadora:

Prof. Dr. CARLOS DE MARQUI JUNIOR – (Orientador)
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

Prof. Dr. LEOPOLDO PISANELLI RODRIGUES DE OLIVEIRA
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

Prof. Dr. VICENTE LOPES JUNIOR
(Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho"/UNESP/Campus de Ilha Solteira)

Aprovado

Prof. Associado JONAS DE CARVALHO
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica

Prof. Titular GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA
Presidente da Comissão da Pós-Graduação da EESC

DEDICATÓRIA

Dedico
este desafio
a minha tão
adorada mamãe
Luiza Aurea,
que mesmo
sabendo
dos desafios
da vida
fez seu
máximo
em nome
dos filhos,
e desta
lutadora
serão todas
minhas
conquistas!!!

A evolução do conhecimento
esta na sabedoria das escolhas,
no aprendizado contínuo
e na disposição permanente de
transformar o meio que vivemos!
(Reinaldo Cesar)

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Luiza Áurea e José Francisco, aos meus irmãos Lidia, João, Osvaldo e Andréia, aos sobrinhos Murilo, Larissa, Dante, Vitória, Pedro Henrique e cunhados Silvana, Daniela, Danilo e Jorge pelo carinho e apoio. Não esquecendo o meu avô João Batista que já ultrapassou a casa dos 80 anos, e familiares distantes.

A Daniela Testa pelo apoio, carinho e muitíssima paciência em todos os momentos alegres e difíceis no desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos e colegas, Paulo, Célia, Richard, Sorriso, Carina, Adriano, Edgar, Dú, Verá Lucrécio, Fer, Debora, Conceição, Flexa, Felipe, Manuel, João Durval, Bispo, Daniel, Bobinão, Marcos, Olivia, Aline, Adalberto Lima, Beto, Marcio Bortoloti, Atenagoras, Marreco, André, Toninho, Ingrid, Lucas, DJ (Washington).

A minha inesquecível professora Vera Alves Cepeda (Sociais UFSCar), pelas melhores aulas que presenciei até hoje e que contribuíram para minha formação como docente.

Aos professores do Departamento de Física (UFSCar), Hamilton, Paulo Daniel, César Carlão, Nelson, Adilson, Gilmar, Cesar, Odila, Polvoa e Dulcinéia.

Aos Funcionários da UFSCar pelo companheirismo e luta, Carlinhos (SINTUScar), Marco Zanni, Sonia e Olga (SAC), Gilson (DCE-Livre UFSCar), Bigodinho, Bigodão, Bidu e Fernando (RU), e a amiga e bibliotecária exemplar Terezinha (Física).

Aos professores do Departamento da Engenharia Mecânica (USP), Flavio de Marques, Marcelo Trindade, Paulo Greco e Volnei Tita.

Ao professor do Departamento de Engenharia Elétrica (USP), Gerado R. M. da Costa.

Aos colegas de laboratório, Tati, Caixeta, Rui, Wander, Eduardo, Ricardo, Alessandro, Ash, Braga e Edson. Não se esquecendo do pessoal da vigilância e limpeza.

Ao meu orientador Prof. Dr. Carlos De Marqui Junior, por toda paciência e dedicação ao logos destes dois anos de trabalhos.

À Escola de Engenharia de São Carlos e o Departamento de Engenharia Mecânica, pela oportunidade de realização do curso de mestrado.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ), pelo investimento e suporte financeiro em meu trabalho.

Conteúdo

i	Resumo	
ii	Abstract	
iii	Lista de Símbolos	
iv	Lista de Siglas	
v	Listas de Figuras	
vi	Lista de Tabelas	
1	Introdução.....	16
2	Revisão da Literatura.....	21
3	Modelo Numérico.....	30
3.1	Conceitos da Piezeletricidade Linear.....	30
3.2	Equações Variacionais Eletromecânicas para Meios Piezelétricos.....	35
3.3	Modelos por Elementos Finitos Eletromecanicamente Acoplado.....	37
4	Estudos de casos.....	51
4.1	Introdução.....	51
4.2	Modelagem de um Gerador Unimorph com Circuito Resistivo.....	54
4.3	Modelagem de um Gerador Bimorph em Série com Circuito Resistivo.....	62
4.4	Modelagem de um Gerador Bimorph em Paralelo com Circuito Resistivo.....	67
5	Conclusões	72
5.1	Trabalhos Futuros.....	74
6	Referências	75

Resumo

CESAR, R. **Modelo em Elementos Finitos para Simulação de Geradores Piezelétricos de Energia**. 2010. 80f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2010.

A conversão de energia de vibração disponível no ambiente em energia elétrica tem sido investigada por diversos pesquisadores nos últimos anos. O objetivo é alimentar sistemas de baixo consumo convertendo energia mecânica disponível no ambiente em energia elétrica. A literatura recente mostra que a transdução piezelétrica tem recebido a maior atenção para a conversão de vibrações em eletricidade. Na prática, vigas e placas engastadas com camadas de piezocerâmicas são utilizadas como geradores piezelétricos de energia. Os geradores têm dimensões de placas em alguns casos e a previsão da potência elétrica devido à excitação de base requer uma formulação de placas. Neste trabalho, um modelo por elementos finitos (EF) eletromecanicamente acoplado é apresentado para a previsão da potência elétrica obtida a partir de geradores piezelétricos de energia. Para corpos eletroelásticos, o princípio generalizado de Hamilton é utilizado e o modelo EF é obtido a partir das hipóteses de placas de Kirchhoff, já que os geradores piezelétricos de energia são estruturas tipicamente finas. A presença de eletrodos contínuos é levada em conta no modelo EF. As previsões do modelo EF são verificadas a partir de uma solução analítica para um gerador unimorph e também a partir de resultados analíticos e experimentais para um gerador bimorph em série com uma massa concentrada encontrados na literatura. Nestes casos uma carga resistiva é utilizada no domínio elétrico. O comportamento piezo-elástico de um gerador bimorph em paralelo é investigado com um circuito resistivo no domínio elétrico.

Palavras-chave: Vibrações Mecânicas, Piezeletricidade, Elementos Finitos, Geração de Energia.

Abstract

CESAR, R. **Finite Element Modeling of a Piezoelectric Energy Harvesting**. 2010. 80f. Dissertação (Mestrado) – Engineering School of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, Brazil, 2010.

Vibration-based energy harvesting has been investigated by several researchers over the last ten years. The goal is to power small electronic components by converting the waste mechanical energy available in their environment into electrical energy. Recent literature shows that piezoelectric transduction has received the most attention for vibration-to-electricity conversion. In practice, cantilevered beams and plates with piezoceramic layers are employed as piezoelectric energy harvesters. Aspect ratios of piezoelectric energy harvesters in several cases are plate-like and predicting the power output to base excitations requires a plate-type formulation. In this work, an electromechanically coupled finite element (FE) plate model is presented for predicting the electrical power output of piezoelectric energy harvesters. For electroelastic bodies the generalized Hamilton's principle is used and the FE model is based from the Kirchhoff plate assumptions as typical piezoelectric energy harvesters are thin structures. Presence of conductive electrodes is taken into account in the FE model. The predictions of the FE model are verified against the analytical solution for a unimorph cantilever and then against the experimental and analytical results of a bimorph in series cantilever with a tip mass reported in the literature. A load resistance is considered in the electrical domain. The piezoelastic behavior of a bimorph in parallel harvester is investigated for energy generation using a load resistance in the electrical domain.

Keyword: Mechanical Vibrations, Piezoelectricity, Finite Element, Energy Harvesting.

Lista de Símbolos

a_B	Aceleração de base engastada
$\mathbf{A}$	Matriz de transformação
$\mathbf{B}_k$	Vetor de função transformação para curvatura
$\mathbf{B}_\eta$	Vetor de função transformação para deslocamentos
c_p	Capacitância interna da piezocerâmica
$\mathbf{c}_{ij}$	Matriz de rigidez elástica
$\mathbf{C}$	Matriz global de amortecimento mecânico
$\mathbf{C}_p$	Matriz diagonal de capacitância global
$\mathbf{D}$	Componentes do vetor de deslocamento elétrico
$\mathbf{e}_{ij}$	Matriz de constante piezelétrica
E	Sobrescrito denota que os valores são medidos em campo elétrico constante
$\mathbf{E}$	Componentes do vetor de campo elétrico
$\mathbf{f}$	Vetor das componentes das forças mecânicas externas
$\mathbf{F}$	Vetor global das forças mecânicas
h_s	Espessura da subestrutura
h_p	Espessura do elemento piezelétrico
H	Densidade de entalpia elétrica do material
$ijkl$	Índice da notação contraída (reduzida) de Voigt
$\mathbf{K}$	Matriz elementar de rigidez
$\mathbf{K}$	Matriz global de rigidez

m^*	Massa por unidade de área do elemento finito
$\mathbf{m}$	Matriz elementar de massa
$\mathbf{M}$	Matriz global de massa
n_e	Número de graus de liberdade elétrico
n_m	Número de graus de liberdade mecânico
n_f	Número de forças mecânicas discretas aplicadas
n_q	Número de pares de eletrodos discretos
p	Subscrito denota camada piezocerâmica
P_i	Componentes do vetor de polarização
$\mathbf{P}$	Termo polinomial
q	Carga elétrica
$\mathbf{Q}$	Vetor global de saída de cargas elétricas
R_l	Resistência elétrica
s	Subscrito denota as camadas de subestrutura
S	Sobrescrito denota que os valores são medidos em deformação constante
$\mathbf{S}$	Componente do vetor de deformação mecânica
t	Sobrescrito representa à transposta
t	Denota tempo
$\mathbf{T}$	Componente do vetor de tensão mecânica
T	Energia cinética total
u, v, w	Componentes de deslocamento
U	Energia potencial total
v_p	Voltagem elétrica através do eletrodo
$\mathbf{v}_p$	Vetor global de saída de voltagem elétrica
V	Volume

ν_s	Coeficiente de Poisson da subestrutura
x, y, z	Coordenadas Cartesianas
Y	Admitância
Y_s	Módulo de Young da subestrutura
ω_i	Frequências naturais
W_e	Energia elétrica
W	Trabalho total das forças externas não conservativas
θ	Matriz elementar do acoplamento eletromecânico
Θ	Matriz global de acoplamento eletromecânico
ε	Matriz permissividade
ξ_i	Fator de amortecimento
μ	Vetor das coordenadas generalizadas
ψ	Vetor das variáveis nodais
Ψ	Vetor global de coordenadas mecânicas
ϕ_j	Potencial elétrico escalar
α	Constantes de proporcionalidade da massa
β	Constantes de proporcionalidade de rigidez
∇	Divergente
ρ	Densidade de massa

Lista de Siglas

AC	Alternating Current (Corrente Alternada)
AFCs	Active Fiber Composites (Fibras Ativas Compósitas)
DC	Direct Current (Corrente Contínua)
D.D.P.	Diferença de Potencial
FRF	Função Resposta em Frequência
MAV	Micro Air Vehicle (Micro Veículo Aéreo)
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEMS	Micro-Electro-Mechanical Systems (Sistemas Micro-Elétron-Mecânicos)
MFCs	Macro Fiber Composites (Macro Fibra Compósitas)
PVDF	Polyvinylidene Fluoride (Polifluoreto de Vinilideno)
PZT	Lead Zirconate Titanate (Titanato Zirconato de Chumbo)
RC	Resistive Circuit (Circuito Resistivo)
SHM	Structural Health Monitoring (Monitoramento de Saúde Estrutural)
UAV	Unmanned Aerial Vehicle (Veículo Aéreo não Tripulado)
2-D	Duas Dimensões
3-D	Três Dimensões

Listas de Figuras

Figura 1.1 - Representação esquemática da conversão de energia no efeito piezelétrico.....	18
Figura 1.2 - Esquema de um gerador piezelétrico conectado ao circuito elétrico externo.....	18
Figura 2.1 - Algumas formas possíveis para a geração de energia a partir de vibração.....	22
Figura 2.2 - a) Modo normalizado e b) Distribuição de deformação para os três primeiros modos de uma viga com uma massa na extremidade livre... ..	23
Figura 2.3 - Elementos básicos para ensaio de um gerador piezelétrico.....	25
Figura 2.4 - Asa geradora e seção transversal da região com eletrodos embutidos.....	26
Figura 2.5 - Potência elétrica gerada na condição de flutter para diversos valores de resistência externa.....	27
Figura 2.6 - a) FRF de movimento relativo e b) potência elétrica para várias velocidades....	28
Figura 3.3.1 - Um gerador unimorph com condição de contorno livre-engastada, com eletrodos conectados ao circuito elétrico resistivo.....	39
Figura 3.3.2 - Elemento finito piezelétrico com 12 graus de liberdade mecânico e 1 grau de liberdade elétrico.....	39
Figura 3.3.3 - Deslocamento de um ponto sobre a normal ao plano neutro dos eixos de simetria.....	40
Figura 3.3.4 - Monômios de um polinômio de grau p (Triângulo de Pascal).....	42
Figura 4.2.1 - Gerador piezelétrico unimorph com condições de contorno livre-engastado, conectadas em um circuito elétrico resistivo.....	54
Figura 4.2.2 - FRFs de voltagem elétrica do modelo piezelétrico unimorph conectado a um circuito elétrico resistivo.....	55
Figura 4.2.3 - Variação da saída de voltagem elétrica contra resistência elétrica com excitação de base na frequência de ressonância de curto circuito e circuito aberto do primeiro modo de vibrar.....	56

Figura 4.2.4 - FRFs de corrente elétrica do modelo piezelétrico unimorph conectado a um circuito elétrico resistivo.....	57
Figura 4.2.5 - Variação da saída de corrente elétrica contra a variação de resistência elétrica para a excitação de base na frequência de ressonância de curto circuito e circuito aberto do primeiro modo de vibrar.....	58
Figura 4.2.6 - FRFs de potência elétrica do modelo piezelétrico unimorph conectado a um circuito elétrico resistivo.....	59
Figura 4.2.7 - Variação da saída de potência elétrica por meio de resistência elétrica com a excitação base na frequência de ressonância de curto circuito e circuito aberto do primeiro modo de vibrar.....	60
Figura 4.2.8 - FRFs de vibração mecânica do modelo piezelétrico unimorph conectado a um circuito resistivo.....	61
Figura 4.2.9 - Variação do deslocamento relativo na extremidade por deslocamento de base contra a resistência elétrica com a excitação de base na frequência de ressonância de curto circuito e circuito aberto do primeiro modo de vibrar.....	62
Figura 4.3.1 - Uma gerador piezelétrico bimorph em série, na condição de contorno livre-engastada com uma massa concentrada na extremidade livre, conectado em um circuito elétrico resistivo.....	63
Figura 4.3.2 - FRFs de voltagem elétrica do modelo piezelétrico bimorph em série conectado a um circuito elétrico resistivo.....	65
Figura 4.3.3 - FRFs de corrente elétrica do modelo piezelétrico bimorph em série conectado a um circuito elétrico resistivo.....	65
Figura 4.3.4 - FRFs de potencia elétrica do modelo piezelétrico bimorph em série conectado a um circuito elétrico resistivo.....	66
Figura 4.3.5 - FRFs de vibração mecânica do modelo piezelétrico bimorph em série conectado a um circuito elétrico resistivo.....	67
Figura 4.4.1 - Um gerador piezelétrico bimorph em paralelo na condição de contorno livre-engastado com uma massa concentrada na extremidade livre, conectadas em um circuito elétrico resistivo.....	68

Figura 4.4.2 - FRFs de voltagem elétrica do modelo piezelétrico bimorph em paralelo conectado a um circuito elétrico resistivo.....	69
Figura 4.4.3 - FRFs de corrente elétrica do modelo piezelétrico bimorph em paralelo conectado a um circuito elétrico resistivo.....	70
Figura 4.4.4 - FRFs de potencia elétrica do modelo piezelétrico bimorph em paralelo conectado a um circuito elétrico resistivo.....	70
Figura 4.4.5 - FRFs de vibração mecânica do modelo piezelétrico bimorph conectado a um circuito elétrico resistivo em paralelo.....	71

Lista de Tabelas

Tabela 3.1.1 - Notação Matricial de Voigt's.....	33
Tabela 4.1.1 - Propriedades materiais e eletromecânicas do PZT-5A.....	52
Tabela 4.1.2 - Geometria e propriedades materiais de um gerador unimorph.....	52
Tabela 4.3.1 - Geometria e propriedades materiais de um gerador bimorph.....	63

Capítulo 1 - Introdução

O desenvolvimento de estruturas multifuncionais tem sido objeto de várias pesquisas nos últimos anos. Tais estruturas são caracterizadas pela capacidade de realizar tarefas adicionais, além de sua função primária, sem alterações significativas de suas características originais (DODEMANT, 2007). Estruturas aeronáuticas capazes de desenvolver tarefas adicionais, além de função original de suportar cargas, vêm sendo apontada como uma das tendências que deverá ter um impacto significativo no projeto de aeronaves autônomas não-tripuladas (PINES; BOHORQUEZ, 2006). Estas estruturas multifuncionais poderiam minimizar o efeito das severas restrições de massa e volume a que estas aeronaves estão sujeitas, ampliando sua capacidade de carga e gerando fontes adicionais de energia.

A utilização de materiais inteligentes pode viabilizar a atribuição de funções adicionais à estrutura de um Veículo Aéreo não Tripulado (UAV - Unmanned Aerial Vehicle) ou Micro Veículo Aéreo (MAV - Micro Air Vehicle). Alguns materiais como as fibras piezelétricas em compósito (MFCs - Macro Fiber Composites, ou AFCs - Active Fiber Composites) e/ou ligas com memória de forma que têm sido utilizadas com êxito como atuadores para a variação da geometria de superfícies de sustentação de aeronaves autônomas (morphing aircraft). Assim, associa-se a função de comando da aeronave e a possibilidade de adaptação de sua configuração para missões diversas (BILGEN et al., 2007). Esta tecnologia permitirá a eliminação de superfícies de comando articuladas nas asas de um UAV, ou MAV, resultando em benefícios aerodinâmicos e estruturais devido à possibilidade de controle do carregamento. Outra possibilidade é a utilização de materiais piezelétricos (fibras piezelétricas em compósito e piezocerâmicas) colados sobre a estrutura ou como elementos estruturais de um UAV, ou MAV, atribuindo-lhe a função extra de converter energia de vibração em energia elétrica (ERTURK; INMAN, 2009a; ANTON; INMAN, 2008; DE MARQUI; ERTURK; INMAN, 2009a). Esta fonte adicional de energia poderá ser utilizada para a alimentação de sistemas eletrônicos de baixo consumo ou para recarregar baterias da aeronave. Recentemente o conceito de uma estrutura multifuncional self-charging foi proposto por Anton et al. (2009). Uma estrutura multi-camadas composta por uma subestrutura, piezocerâmicas e camadas de baterias de filmes finos foi associada a um circuito

elétrico externo (condicionamento e conversão AC-DC). Esta estrutura é capaz de gerar energia e de armazená-la nas camadas de baterias e disponibilizá-la para tarefas pertinentes.

A conversão de energia de vibração disponível no ambiente em energia elétrica é a definição para o termo *Vibration Based Energy Harvesting*, ou geração de energia a partir de vibrações. Este conceito é particularmente importante para sistemas remotamente operados e com fontes limitadas de energia, como os UAVs e MAVs anteriormente citados. Possíveis fontes de energia para estas aeronaves são: vibração mecânica devido à interação entre motor e estrutura (ANTON; INMAN, 2008), vibrações durante movimentos em solo ou pouso sobre fontes de excitação (MAGOTEAUX; SANDERS; SODANO, 2008; ERTURK; RENNO; INMAN, 2009c), ou oscilações aeroelásticas de superfícies de sustentação durante o voo (DE MARQUI; ERTURK; INMAN, 2009b). Diferentes mecanismos de transdução podem ser utilizados para a conversão eletromecânica, como por exemplo, a piezelétrica (ROUNDY; WRIGHT; RABAEY, 2003; SODANO; PARK; INMAN, 2004b; DuTOIT; WARDLE, 2006; ERTURK; INMAN, 2008a), eletromagnética (WILIAMS; YATES, 1996; GLYNNE-JONES et al., 2004; BEEBY et al., 2007; MANNA; SIMS, 2009) e eletrostática (ROUNDY; WRIGHT; RABAEY, 2002; MITCHESON et al., 2004). Entretanto, a literatura recente mostra que a transdução piezelétrica tem recebido a maior atenção devido à elevada densidade de potência que proporciona (SODANO; INMAN; PARK, 2004a; PRIYA, 2007; ALTON; SODANO, 2007; COOK-CHENNAUT; THAMBI; SASTRY, 2008).

A definição de piezeletricidade na literatura vem da capacidade que alguns tipos de materiais inorgânicos como o quartzo, turmalina, cerâmicos, e materiais orgânicos, como os polímeros e tecidos biológicos, tais como osso, cabelo e pele, de poder gerar corrente elétrica pela polarização residual do material em resposta a uma pressão mecânica. O termo é originário da palavra grega “*piezo*”, quer dizer pressão. O efeito piezelétrico é reversível pois os cristais piezelétricos, quando sujeitos a uma diferença de potencial (D.D.P.) externa, podem sofrer variações de forma. As primeiras descobertas do efeito da piezeletricidade ocorreu em meados de 1880 em cristais de quartzo por Pierre Currie e o seu irmão mais velho Jacques Currie. Demonstraram ser possível a geração de um potencial elétrico quando comprimiam cristais de quartzo, efeito esse que ficou muito conhecido como “piezeletricidade” (CURIE; CURIE, 1880). No ano seguinte, em 1881, o efeito inverso da piezeletricidade foi teoricamente confirmada através de análises termodinâmicas por (LIPPMANN, 1881).

Maiores informações sobre o desenvolvimento das teorias e propriedades piezelétricas podem ser encontrados em (CADY, 1946; TIRSTEN; MINDLIN, 1962).

Os materiais piezelétricos têm a capacidade única de intercâmbio de energia elétrica com a energia mecânica. O efeito piezelétrico direto é definido como a conversão de energia mecânica em energia elétrica. A conversão de energia elétrica em energia mecânica define o efeito piezelétrico inverso. Uma característica interessante desses materiais é a possibilidade de uso simultâneo como sensores (efeito direto) e atuadores (efeito inverso). Estes efeitos são apresentados no esquema da Fig. 1.1.

Figura 1.1 - Representação esquemática da conversão de energia no efeito piezelétrico

Geradores piezelétricos podem converter energia de vibrações mecânicas a partir do efeito piezelétrico direto. Sua configuração mais simples é composta por vigas ou placas metálicas engastadas, completamente cobertas por uma ou mais camadas de material piezocerâmico e excitadas a partir do movimento de sua base. A camada piezelétrica é completamente coberta em sua superfície superior e inferior por eletrodos contínuos e condutivos, que são conectados a um circuito elétrico gerador externo, representado na Fig. 1.2. Na condição mais simplificada, um elemento resistivo é considerado no domínio elétrico para a avaliação da potência elétrica gerada a partir das oscilações mecânicas. Estes geradores devem ser acoplados a uma estrutura principal que é a fonte de excitação mecânica para o mesmo. Assim, esta energia de vibração que originalmente seria desperdiçada poderá ser convertida em energia elétrica.

Figura 1.2 - Esquema de um gerador piezelétrico conectado ao circuito elétrico externo (DE MARQUI; ERTURK; INMAN, 2009a).

O estudo destes geradores tem contribuído para o desenvolvimento de sistemas em escala reduzida (Micro-Electro-Mechanical Systems, MEMS, DuTOIT, 2005a) ou aplicações em estruturas de maior escala, como por exemplo, casos aeronáuticos (DE MARQUI; ERTURK; INMAN, 2009a; ERTURK; RENNO; INMAN, 2009c). Um dos desafios das pesquisas na área é a obtenção de geradores que possam converter energia em uma ampla faixa de frequências de excitação, facilitando sua adequação as variadas fontes de excitação disponíveis em seu ambiente. Usualmente os geradores são dimensionados para que a frequência de ressonância de um de seus modos de vibrar possa ser excitado a partir da faixa de frequências das fontes de vibrações disponíveis no ambiente. A amplitude da saída elétrica de um gerador será máxima quando o mesmo for excitado em uma de suas frequências de ressonância (ERTURK; INMAN, 2008c). Em alguns casos massas são instaladas na extremidade livre de um gerador para o ajuste das frequências de ressonância (ERTURK; INMAN, 2009b). A conversão mais eficiente se dá a partir do modo fundamental de vibrar da estrutura, primeiro modo de flexão. A distribuição de deformações ao longo de uma viga engastada para o modo fundamental explica tal fato. A presença de nós de deformação para modos mais elevados resulta em cancelamento da saída elétrica quando eletrodos contínuos são utilizados.

Neste trabalho é apresentada a modelagem em elementos finitos de geradores piezelétricos de energia. O modelo é desenvolvido de forma a possibilitar a investigação do efeito de diferentes circuitos elétricos externos sobre o comportamento eletromecânico de diferentes configurações de geradores unimorph (um gerador com uma camada de subestrutura completamente coberta por uma camada de piezocerâmica na superfície superior) ou bimorph (um gerador com uma camada de subestrutura completamente coberta por uma camada de piezocerâmica na superfície superior e outra na inferior) piezelétricos de energia.

O objetivo é a geração de energia, porém, o efeito shunt damping (amortecimento introduzido devido ao efeito do acoplamento eletromecânico) resultante da conversão de energia também é analisado.

A dissertação esta organizada em 5 capítulos, contanto com o presente. No capítulo 2, é apresentado uma revisão da literatura. No capítulo 3, uma descrição detalhada dos conceitos físicos e teóricos básicos que serão empregados nas equações constitutivas da piezeletricidade linear e também para o desenvolvimento das equações eletromecânicas acopladas utilizando o princípio generalizado de Hamilton. No mesmo capítulo será apresentada a formulação em elementos finitos (EF) para geradores piezelétricos de energia baseada nas hipóteses de placa

de Kirchhoff. Aqui também serão apresentadas as definições de FRFs eletromecanicamente acopladas e a possibilidade de se considerar diferentes configurações dos geradores. No capítulo 4 um primeiro estudo de caso é apresentado. O comportamento eletromecânico no domínio da frequência de um gerador unimorph engastado é apresentado. As FRFs de voltagem, corrente, potência elétrica e deslocamento relativo da extremidade livre são analisadas para o caso de um circuito resistivo (R_1) e verificadas a partir da solução analítica e de resultados experimentais encontrados na literatura (ERTURK; INMAN, 2008c). O segundo estudo de caso apresenta a investigação do comportamento eletromecânico de um gerador bimorph, com as camadas piezocerâmicas conectadas em série e com uma massa concentrada na extremidade livre. As FRFs eletromecânicas para um circuito resistivo (R_1) são comparadas com resultados analíticos e experimentais. Posteriormente um gerador bimorph em paralelo é investigado. Para finalizar, o capítulo 5, apresenta as conclusões gerais dos resultados numéricos do trabalho e algumas sugestões para continuidade da pesquisa.

Capítulo 2 - Revisão da Literatura

A exploração dos recursos energéticos disponíveis no meio ambiente tem sido alvo de muitos estudos nos últimos anos. Dentre as diferentes fontes de energia destacam-se a solar, térmica, eólica, salinidade e gradientes energia cinética. Fontes de grande escala tais como sol, vento e marés, são amplamente disponíveis no meio ambiente, mas a conversão é complexa e com custos elevados. Alguns meios para a conversão de energia são amplamente dependentes de condições ambientais. Por exemplo, as placas de energia solar geram uma densidade de potência de 15 mW/cm^2 , muito interessantes comparado com outras fontes, mas não eficaz em regiões com baixa luminosidade. A conversão de vibrações mecânicas em energia elétrica vem se destacando como uma forma de se alimentar sistemas de baixo consumo. Nestes casos pode se gerar uma densidade de potência em torno de $300 \mu\text{W/cm}^2$ e ambientes com grande fluxo de ar $360 \mu\text{W/cm}^2$ (ROUNDY; WRIGHT; RABAEY, 2003; ROUNDY et al., 2005; STARNER; PARADISE, 2004).

A principal motivação para as pesquisas relacionadas com a geração de energia a partir de vibrações é o consumo reduzido de alguns componentes eletrônicos, tais como sensores sem fio de sistema de verificação de integridade estrutural (SHM - *Structural Health Monitoring*). Geralmente, estes sistemas são utilizados em localizações remotas e possuem uma fonte limitada de energia (baterias). A associação da conversão de energia de vibração em energia elétrica com sistemas SHM é torná-los completamente autônomos energeticamente (não dependentes de baterias ou de sua troca periódica).

A idéia de gerar energia elétrica a partir de vibrações foi inicialmente proposta por Williams e Yates (1996). Eles apresentaram um modelo de parâmetros concentrados para investigar a conversão de energia utilizando a transdução eletromagnética. Três mecanismos de transdução podem ser utilizados para a conversão de vibrações em energia elétrica: a piezelétrica (ROUNDY; WRIGHT; RABAEY, 2003; SODANO; PARK; INMAN, 2004b; JEON et al., 2005); eletrostática (ROUNDY; WRIGHT; RABAEY, 2002; MITCHESON, et al, 2004) e eletromagnética (WILLIAMS; YATES, 1996; GLYNNE-JONES et al., 2004, BEEBY et al., 2007; ARNOLD, 2007). A transdução piezelétrica é a que tem recebido maior atenção nos últimos cinco anos. Exemplos de dispositivos que utilizam cada uma das formas de transdução são apresentados na Fig. 2.1.

Figura 2.1 - Algumas formas possíveis para a geração de energia a partir de vibração (Courtesy of Shad Roundy, LV Sensors, Inc.).

Uma das vantagens de se utilizar materiais piezelétricos está no fato de uma saída de voltagem elétrica ser obtida diretamente a partir de um estímulo mecânico. Na conversão eletrostática, por exemplo, uma voltagem de entrada se faz necessária (ROUNDY; WRIGHT; RABAEY, 2002; MITCHESON, 2004). No caso piezelétrico uma voltagem elétrica externa não é necessária, o que pode ser verificado a partir das expressões da relação constitutiva da piezeletricidade. Além disso, diferentemente de casos de transdução eletromagnética, os dispositivos piezelétricos podem ser fabricados em escala reduzida (MEMS) ou não. Outro atrativo é a facilidade de uso dos piezelétricos. Eles podem ser colados sobre uma estrutura ou embutidos em outro material e funcionarem como elemento estrutural.

As pesquisas na área de geração piezelétrica de energia envolvem a compreensão da mecânica de vibração estrutural, comportamento constitutivo de materiais piezelétricos, teoria de circuitos elétricos, modelos analíticos e por elementos finitos. Esta forma promissora de gerar energia para pequenos componentes eletrônicos, baterias e sensores remotos de baixo consumo tem atraído pesquisadores de diferentes áreas da engenharia, incluindo mecânica, elétrica e civil, bem como do campo da ciência dos materiais (ERTURK; INMAN, 2009b).

Os geradores piezelétricos podem gerar energia elétrica a partir de vibrações mecânicas devido ao efeito piezelétrico direto. Estes geradores têm sido estudados como alternativas eficientes e de baixo custo. Pesquisadores têm proposto modelos para se representar o comportamento eletromecânico de geradores piezelétricos, geralmente vigas engastadas compostas por um substrato com uma ou mais camadas de material piezocerâmico. Um

modelo confiável pode permitir o estudo de diferentes aspectos da geração de energia, como a previsão energia gerada e a maximização das saídas elétricas para entradas conhecidas. Estes modelos variam desde modelos de parâmetros concentrados (ROUNDY; WRIGHT; RABAEY, 2003; DuTOIT; WARDLE; KIM, 2005b), a modelos de parâmetros distribuídos (SODANO; PARK; INMAN, 2004b; DuTOIT; WARDLE; KIM, 2005b; LU; LEE; LIM, 2004; CHEN; WANG; CHIEN, 2006). Alguns destes trabalhos incluem verificações experimentais e validações (DuTOIT; WARDLE, 2006; ERTURK e INMAN, 2008c).

Os modelos de parâmetros concentrados consideram uma viga engastada como um sistema massa-mola-amortecedor, o que é bastante conveniente para se acoplar a parte mecânica do gerador com um circuito elétrico gerador. Estes modelos resultam em soluções com expressões simples e fornecem uma razoável aproximação inicial ao problema. Entretanto, eles representam uma aproximação limitada a um único modo de vibrar, o que exclui alguns aspectos físicos importantes como uma distribuição acurada de deformação ao longo da viga e a participação de outros modos de vibrar, como representado na Fig. 2.2 (ERTURK; INMAN, 2008a).

Figura 2.2 - (a) Modo normalizado e (b) Distribuição de deformação para os três primeiros modos de uma viga com uma massa na extremidade livre (ERTURK; INMAN, 2008a).

Sodano, Park e Inman (2004) e DuToit e Wardle (2006) apresentam a combinação do Princípio Variacional com o método Rayleigh-Ritz baseado nas hipóteses de uma viga Euler-Bernoulli. Este modelo permite a previsão do comportamento eletromecânico incluindo o efeito de modos de vibrar mais elevados, porém ainda não são modelos exatos apesar de fornecerem uma boa aproximação do problema.

A literatura também apresenta algumas soluções analíticas para a questão. Lu, Lee e Lim (2004) usam um único modo de vibrar na relação constitutiva da piezeletricidade para relacionar saídas elétricas com modos mecânicos ao invés de considerarem a expansão de todos os modos. Assim, eles ignoram, ou simplificam inapropriadamente, o acoplamento elétrico na equação mecânica (lembrando que um gerador deve ser representado por uma equação mecânica com acoplamento elétrico e uma equação elétrica com acoplamento mecânico) e desconsideram a contribuição de outros modos. Apesar de estar claro que seu modelo é válido (aproximadamente) para a vizinhança do modo considerado, eles apresentam resultados para uma ampla faixa de frequências, o que é pouco significativo. Chen, Wang e Chien (2006) apresentam um modelo semelhante, porém considerando todos os modos de vibrar. Por outro lado, eles representam o efeito do acoplamento eletromecânico na equação mecânica por um coeficiente de amortecimento viscoso. Se representado desta forma o efeito do acoplamento piezelétrico na equação mecânica resultaria somente na atenuação de amplitudes de movimento. Este efeito é mais sofisticado e resulta também na variação de frequências naturais além de variação de amplitudes (ERTURK; INMAN, 2008a). A discussão sobre modelos já desenvolvidos para geradores piezelétricos de energia é apresentada em Erturk e Inman (2008c). Ajitasria et al. (2007) propõem um modelo para um gerador piezelétrico bimorph engastado (substrato entre duas camadas piezelétricas). Porém, eles tentaram combinar um modelo estático para os piezelétricos (com raio de curvatura constante) com um modelo dinâmico de uma viga Euler-Bernoulli e excitação de base (onde a curvatura varia).

Mais recentemente Erturk e Inman (2008b), apresentaram a solução eletromecânica analítica de um gerador piezelétrico engastado para vibrações transversais baseado em hipóteses de viga Euler-Bernoulli. O gerador é excitado através de sua base, onde se demonstra que a fonte de excitação nada mais é que a própria inércia do corpo. O circuito elétrico gerador consiste de uma carga resistiva ligada aos eletrodos da camada piezocerâmica, que juntamente com a capacitância interna do piezelétrico formam um circuito RC de primeira ordem. Expressões para saída de voltagem, corrente e potência elétrica são apresentadas, assim como resposta mecânica quando excitação harmônica é considerada. Estas expressões analíticas são utilizadas em um estudo de caso onde funções resposta em frequência eletromecânicas são apresentadas. O comportamento do sistema é verificado para uma vasta faixa de resistores, desde condições de curto circuito até circuito aberto é apresentado. Esta solução exata é uma referência para a verificação dos modelos numéricos,

como modelos em elementos finitos eletromecânicos, em casos onde estes se fazem necessários, como no presente trabalho. A maior vantagem do modelo em EF é permitir modelagem de estruturas com geometria simples ou complexas. A solução analítica foi estendida para o caso de um gerador bimorph (ERTURK; INMAN, 2009a). Neste trabalho a solução é verificada com sucesso contra resultados experimentais. A representação experimental básica para o ensaio de um gerador piezelétrico é mostrada na Fig. 2.3. A base do gerador (ou uma de suas extremidades) é engastada em um dispositivo mecânico que é conectado no *shaker*, e excitada harmonicamente. Um vibrômetro laser é utilizado para medir a velocidade da resposta na extremidade livre e um mini-acelerômetro utilizado para medir a aceleração de base na extremidade engastada. Massas simétricas ou assimétricas podem ser facilmente adicionadas à ponta livre do gerador.

Figura 2.3 - Elementos básicos para ensaio de um gerador piezelétrico (ERTURK; INMAN, 2009a).

Mais recentemente, Elvin e Elvin (2008) observaram a convergência da solução Rayleigh-Ritz formalmente introduzidas por Hagood, Chung e Von Flotow (1990) em relação a solução analítica dada por Ertuk e Inman (2008c) quando um número suficiente de modos de vibração é usado com funções admissíveis apropriadas.

Encontram-se na literatura modelos em elementos finitos (EF) para sensoriamento e atuação com elementos piezelétricos. Apesar destes modelos não terem sido utilizados para o estudo de um problema de geração de energia eles consideram o tratamento formal necessário para se modelar um gerador piezelétrico. Analisando a literatura de modelo em EFs, observa-se que alguns modelos não consideram a presença de eletrodos condutores envolvendo toda a

camada piezocerâmica (TZOU; TSENG, 1990), apesar de na prática estes apresentarem camadas de eletrodos altamente condutivos. Quando a presença de eletrodos condutores não é levada em consideração, uma distribuição contínua de potencial elétrico é obtida ao longo da superfície da cerâmica piezoeletrica, resultando em um potencial elétrico diferente para cada elemento finito. Outros autores consideram corretamente a presença de eletrodos (HAWANG; PARK, 1993; DETWILER et al., 1995). Entretanto, as maiorias destes modelos encontrados na literatura focam na atuação estrutural e amortecimento, não em geradores de energia.

Algumas aplicações práticas para o problema de geração piezoeletrica de energia têm aparecido na literatura. Em De Marqui, Erturk e Inman (2009d) associa-se um modelo em elementos finitos eletromecanicamente acoplado (estrutura + piezocerâmicas para geração de energia) ao método de malha de vórtices não-estacionário (BENINI; BELO; MARQUES, 2004), para análise piezo-aerelástica de uma asa geradora de energia elétrica. Uma carga resistiva é considerada no domínio elétrico. Uma asa retangular de alumínio é utilizada nas simulações. Piezocerâmicas são embutidas na região da raiz da asa (uma placa na superfície superior e outra na superfície inferior) cobrindo toda a corda e 30% da envergadura. As piezocerâmicas são ligadas em série a carga resistiva do circuito elétrico gerador e duas configurações de eletrodos são testadas, como apresentado nas Figs. 2.4a-b. Na Fig. 2.4a, verifica-se o resultado para eletrodos contínuos e na Fig. 2.4b para eletrodos segmentados na metade da corda.

Figura 2.4 - Asa geradora e seção transversal da região com eletrodos embutidos, a) eletrodos contínuos e b) eletrodos segmentados (DE MARQUI; ERTURK; INMAN, 2009d).

As Figs. 2.5a-b apresentam a potência elétrica gerada para os dois casos na velocidade de flutter (40 m/s). Em ambos os casos pode se observar que existe uma resistência elétrica ótima (entre as testadas) que fornece a potência máxima e ainda introduz o efeito shunt damping, alterando as condições de estabilidade de sistema. No caso da Fig. 2.5b, o uso de

eletrodos segmentados evita o cancelamento da saída elétrica dos modos de torção (movimentos que são tipicamente observados na condição de flutter), o que implica em maior pico de potência gerada e maior efeito shunt damping.

Figura 2.5 - Potência elétrica gerada na condição de flutter para diversos valores de resistência elétrica externa: a) eletrodos contínuos; b) eletrodos segmentados (DE MARQUI; ERTURK; INMAN, 2009d).

O cancelamento da saída elétrica com o uso de eletrodos contínuos nos problemas de flutter pode ser mais claramente verificada a partir da solução piezo-aeroelástica proposta em Vieira et al. (2010). Os autores apresentam a combinação do modelo EF de placas anteriormente citados com a solução aerodinâmica de malha de dipolos. São definidas FRFs piezo-aeroelásticas provenientes da combinação da excitação de base com o efeito aerodinâmico não-estacionário. As Figs. 2.6a-b apresentam as FRFs de deslocamento relativo e potência elétrica para a asa da Fig. 2.4a com um resistor de 100Ω desde baixas velocidades até a velocidade de flutter. Para a velocidade 0 m/s tem-se o problema de excitação de base, e como a asa em questão é uma estrutura com distribuição uniforme de massa não se tem a excitação de modos de torção (primeiro modo de torção em $16,6 \text{ Hz}$ para a asa). À medida que a velocidade do escoamento aumenta os modos se acoplam aeroelasticamente. Por esta razão um pico é observado em torno de 16 Hz para a velocidade de 20 m/s na Fig. 2.5a. Nesta velocidade este pico representa um modo flexo-torsional dominado por movimentos de torção. Assim o mesmo pico não é observado na Fig. 2.6a devido ao cancelamento da saída elétrica com eletrodos contínuos. Para 35 m/s este modo é dominado por movimentos de flexão e verifica-se alguma saída elétrica na FRF de potência Fig. 2.6b. Na velocidade de flutter, 40 m/s , observa-se um pico e a máxima saída elétrica. O uso de eletrodos segmentados poderia otimizar a saída elétrica já que evitaria cancelamento de saída elétrica relativa os movimentos de torção nas oscilações acopladas. Esta solução no domínio da frequência permite ainda a determinação da resistência elétrica ótima para se obter a máxima saída elétrica em qualquer velocidade, conforme apresentado em Vieira et al. (2010).

Figura 2.6 – a) FRF de movimento relativo e b) potência elétrica para várias velocidades (VIEIRA et al., 2010).

Seguindo a linha de utilizar instabilidades aeroelásticas para o problema de geração de energia, Elvin e Elvin (2009) apresentaram a modelagem de uma tubulação com escoamento interno de água. O problema de *flutter* ocorre para dadas condições de escoamento da água dentro da tubulação (volume e velocidade do líquido). Os autores posicionaram piezocerâmicas na tubulação para a conversão de energia a partir das oscilações devido ao *flutter*. Foi demonstrado que a geração de energia modifica as condições de estabilidade do sistema.

Erturk, Renno e Inman (2009c) apresentam a modelagem eletromecânica de um gerador constituído por vigas em L (L-shaped beam). A possibilidade de se obter as duas frequências naturais bastante próximas é demonstrada. Desta forma, o estudo abre caminho para um gerador que tenha bom desempenho na conversão de energia em uma faixa mais ampla de vibrações. Uma aplicação proposta pelos autores é o uso deste tipo de gerador como trens de pouso de UAVs ou MAVs elétricos. As aeronaves pousariam sobre uma fonte de vibração e a energia convertida com os trens de pouso eletromecânicos seria utilizada para alimentar suas baterias.

Outro aspecto interessante no estudo de geração de energia a partir de vibrações são os problemas de otimização. Dietl e Garcia (2010) mostram que o ajuste da forma (seção transversal) do gerador afeta significativamente a transdução piezelétrica e conseqüentemente a geração de energia. Os geradores são modelados como vigas Euler-Bernoulli utilizando modelo Rayleigh-Ritz e um algoritmo de otimização heurística foi utilizado. A idéia é adicionar material piezelétrico nas regiões onde há mais deformação e removê-lo das regiões de menor deformação (mecânica). A otimização considera também a otimização de massas concentradas na ponta do gerador.

Recentemente o conceito de uma estrutura multifuncional *self-charging* foi proposto por Anton et al. (2009). Uma estrutura multi-camadas composta por uma subestrutura, piezocerâmicas e camadas de baterias de filmes finos foi associada a um circuito elétrico externo (condicionamento e conversão AC-DC). A modelagem do gerador multicamada foi realizada através da formulação eletromecânica por Rayleigh-Ritz para uma viga Euler-Bernoulli. Os autores demonstram a validade de seu modelo a partir de comparações com resultados experimentais. Testes em laboratório mostram a capacidade de carregar a bateria de filme fino quando o gerador é excitado a partir do movimento harmônico de sua base engastada.

Outros materiais podem ser utilizados na conversão de energia. O polifluoreto de vinilideno (PVDF) também tem sido investigado na literatura para geração de energia. O PVDF possui a aparência de filmes plásticos e podem ser cortados e colados em qualquer tamanho e forma. Eles são usados frequentemente como sensores, mas são menos indicados para usos como atuadores devido à sua baixa rigidez (SANTANA, 2007). Em alguns trabalhos, o prognóstico de saída de energia de um gerador bimorph (PVDF) foi pequeno e que não era possível gerar energia suficiente para armazenar em baterias (SCHIMIDT, 1986). Este resultado causou um lapso na geração de energia piezelétrica utilizando o PVDF. Entretanto, Akaydin, Elvin e Andreopoulos (2010) apresentam uma aplicação interessante para o uso de PVDFs na geração piezelétrica de energia. Eles posicionaram uma viga engastada com uma camada metálica completamente coberta por uma camada de PVDF (conectada a um circuito resistivo) na esteira de um cilindro sob ação de um escoamento. O sistema foi modelado, projetado e verificado experimentalmente de forma que a frequência de ressonância do primeiro modo de vibrar da viga coincidissem com a frequência dos vórtices da esteira do cilindro, maximizando a geração de energia.

O estudo de modelos teóricos e experimentais para o desenvolvimento de geradores piezelétricos de energia aproveitando as vibrações mecânicas do ambiente tem se mostrado muito promissor. É importante ressaltar que existe uma eficiência limitada devido à limitação inerente dos materiais piezelétricos para a conversão de energia. Estas perspectivas tem tornado os estudos científicos e tecnológicos desafiadores para o problema de geração piezelétrica de energia nas áreas de mecânica, materiais e elétrica.

Capítulo 3 - Modelo Numérico

3.1 – Conceitos da Piezeletricidade Linear

Segundo a teoria da piezeletricidade linear as equações elásticas lineares e as equações das cargas eletrostáticas são acopladas por meio das constantes piezelétricas. Entretanto as variáveis elétricas não são puramente estáticas, mas quase-estáticas, devido ao acoplamento com as equações mecânicas dinâmicas (IEEE, 1987). Assim o campo de variáveis elétricas e mecânicas relevantes no problema aqui tratado serão brevemente descritas.

Em relação às considerações mecânicas, podem-se definir as componentes Cartesianas dos deslocamentos mecânicos infinitesimais dos pontos materiais denotados por u_i, v_i, w_i . As partes simétricas do gradiente espacial dos componentes do deslocamento mecânico (u_i) determinam o tensor de deformação (S_{ij}) definido como,

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}) \quad (3.1.1a)$$

onde

$$u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.1.1b)$$

a velocidade de um ponto do contínuo é dada por,

$$\dot{u}_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (3.1.1c)$$

onde t denota o tempo.

A interação mecânica entre duas porções do contínuo, separados por uma superfície arbitrária é assumida como dada por um vetor tração, no qual é definido como a força por unidade de área (T_i) atuando através da superfície em um ponto e dependente da orientação na superfície no ponto. A existência do vetor de tensão mecânica com componentes (T_{ij}), o qual é relacionada com o vetor tração (T_j) pela relação,

$$T_j = n_i T_{ij} \quad (3.1.2a)$$

onde n_i denota as componentes da direção normal através da qual o vetor tração age. Da equação (3.1.2a) e da forma integral das equações de balanceamento de quantidade de momento linear resultam as equações de movimento (tensão),

$$T_{ij,i} = \rho \ddot{u}_j \quad (3.1.2b)$$

onde ρ é a densidade de massa.

Já quanto às considerações elétricas, pode-se assumir que na teoria piezelétrica não necessitamos de todas as equações eletromagnéticas.

As componentes Cartesianas da intensidade do campo elétrico e deslocamento elétrico são denotados, respectivamente, por (E_i) e (D_i) . Nas unidades internacionais estes dois vetores são relacionados pela equação,

$$D_i = \epsilon_0 E_i + P_i \quad (3.1.3a)$$

onde ϵ_0 é a permissividade do espaço livre ($\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$), P_i as componentes do vetor de polarização. A polarização é definida como a densidade volumétrica dos momentos de dipolos elétricos (p_k^i) induzidos no material na forma,

$$P_i = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N p_k^i}{\Delta V} \quad (3.1.3b)$$

onde N é o número de dipolos elétricos localizados no volume V do material dielétrico, com $i = 1, 2, 3$. Neste caso, os efeitos elétricos da polarização de um material piezelétrico ocorrem quando um campo elétrico é aplicado e produz uma reorientação, induzindo um alinhamento da polarização global dos momentos dos dipolos elétricos.

O vetor do campo elétrico (E_i) é derivado de um potencial elétrico escalar (ϕ_i) ,

$$E_i = -\phi_i \quad (3.1.3c)$$

O vetor de deslocamento elétrico (D_i) satisfaz a equação eletrostática para um dado material dielétrico,

$$D_{i,i} = 0 \quad (3.1.3d)$$

As equações de campo elétrico aparentemente são estáticas, no entanto, elas dependem do tempo porque são acopladas com as equações mecânicas dinâmicas (3.1.1a) e (3.1.2b).

Para adentrarmos nos estudos da piezeletricidade linear é necessário analisar algumas condições físicas oriundas das leis de conservação de energia, através da primeira lei da termodinâmica (TIERSTEN, 1969) descritas como,

$$U = T_{ij}S_{ij} + E_i D_i \quad (3.1.4a)$$

onde U é a densidade de energia armazenada para o material piezelétrico. Esta energia potencial está relacionada com a densidade de entalpia elétrica (H) do material (MASON, 1950) e pode ser definida como,

$$H = U - E_i D_i \quad (3.1.4b)$$

substituindo a equação (3.1.4a) na (3.1.4b) tem-se,

$$H = T_{ij}S_{ij} - E_i D_i \quad (3.1.4c)$$

e o desenvolvimento da equação (3.1.4c) implica,

$$H = H(S_{kl}, E_k) \quad (3.1.4d)$$

das equações (3.1.4c) e (3.1.4d) resulta,

$$T_{ij} = \frac{\partial H}{\partial S_{ij}} \quad (3.1.4e)$$

$$D_i = - \frac{\partial H}{\partial E_i} \quad (3.1.4f)$$

onde deve-se notar que,

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial S_{ji}} = 0, \text{ onde } i \neq j \quad (3.1.4g)$$

tomando as derivadas ligadas pela equação (3.1.4e).

Na teoria da piezeletricidade linear a forma tomada pelo H é,

$$H = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E S_{ij} S_{kl} - e_{kij} E_k S_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^S E_i E_j \quad (3.1.4h)$$

onde c_{ijkl}^E é a constante de rigidez elástica, e_{kij} a constante piezelétrica e ϵ_{ij}^S é a constante de permissividade elétrica.

Das equações (3.1.4e), (3.1.4f) e (3.1.4h) com a equação (3.1.4g) obtêm-se as equações constitutivas da piezeletricidade (IEEE, 1987),

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \quad (3.1.5)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ij}^S E_k \quad (3.1.6)$$

onde a primeira equação é uma equação mecânica com o acoplamento elétrico e a segunda uma equação elétrica com acoplamento mecânico. Nestas equações os subscritos k e l referem-se à direção do campo elétrico aplicado e a direção da polarização, respectivamente. Os tensores elásticos e piezelétricos podem ser escritos na forma matricial. Assim, a notação contraída (reduzida) de Voigt é introduzida no lugar da notação de tensores. Esta notação matricial consiste de uma realocação ij ou kl por p ou q onde i, j, k tem os valores de 1, 2 e 3 de nove componentes, e p, q toma os valores de seis componentes contraídos de 1, 2, 3, 4, 5 e 6 de acordo com a Tab. 3.1.1.

Tabela 3.1.1 - Notação matricial de Voigt's.

ij ou kl	p ou q
11	1
22	2
33	3
23 ou 32	4
31 ou 13	5
12 ou 21	6
$S_{ij} = S_p$ quando $i = j$, $p = 1, 2, 3$ $2S_{ij} = S_p$ quando $i \neq j$, $p = 4, 5, 6$	

Utilizando as notações da contração indicial de Voigt das componentes dos tensores em função dos índices (i, j, k) nas coordenadas (x, y, z), podem-se apresentar na forma matricial os vetores de tensões, deformações mecânicas, deslocamentos e campos elétricos.

A matriz permissividade piezelétrica relaciona as variáveis de deslocamento e campo elétrico de um sistema eletrostático de material piezelétrico (NEY, 1957), expresso como,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^s = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^s & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^s & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3^s \end{bmatrix} \quad (3.1.7)$$

onde o índice sobrescrito S denota que os valores são medidos em deformação constante.

A matriz de rigidez elástica da piezocerâmica tem a forma,

$$\mathbf{c}^E = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{55}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \quad (3.1.8)$$

onde o índice sobrescrito E denota que os valores são medidos na condição de campo elétrico constante (curto-circuito).

Para as piezocerâmicas, a matriz de constantes (coeficientes) piezelétricos tem a forma,

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.9)$$

onde o primeiro termo subscrito refere-se ao eixo elétrico, enquanto o segundo refere-se ao mecânico. Assim, e_{31} , refere-se à deformação desenvolvida na direção 1 em resposta do campo elétrico na direção 3 (paralelo ao sentido da polarização), (HAGOOD; VON FLOTOW, 1991). Note que (equações 3.1.8 e 3.1.9) a piezocerâmica polarizada aqui considerada é assumida como monolítica, conseqüentemente, as simetrias de um material transversalmente isotrópico são diretamente utilizadas ($c_{11}^E = c_{22}^E$, $e_{31} = e_{32}$, etc). Assume-se então que o plano de isotropia é assumido como o plano 12. O material piezelétrico por esta razão apresenta simetria em torno da direção 3, que é a direção de polarização do material. Assim, a equação constitutiva da piezeletricidade pode ser dada na forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^E & -\mathbf{e}^t \\ \mathbf{e} & \boldsymbol{\varepsilon}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} \quad (3.1.10)$$

3.2 - Equações Variacionais Eletromecânicas para Meios Piezelétricos

As equações eletromecânicas acopladas para um gerador piezelétrico de energia podem ser obtidas a partir do Princípio Generalizado de Hamilton para um corpo eletroelástico. Utilizando-se as equações constitutivas elásticas lineares e a relação constitutiva linear eletrostática para um material piezelétrico obtém-se o *Princípio Variacional Eletromecânico para Meios Piezelétricos*. A partir dessas relações, pode-se modelar um gerador piezelétrico de energia utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF). Assim, o princípio generalizado de Hamilton para um corpo eletroelástico (CRANDALL et al., 1968) é definido como,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta[(T - U + W_e) + W] dt = 0 \quad (3.2.1)$$

onde t_1 e t_2 são o tempo inicial e final, respectivamente, T é a energia cinética total do sistema, U é a energia potencial ou de deformação mecânica total do sistema, W_e é a energia elétrica, W é o trabalho total das forças externas não conservativas atuando no sistema.

A energia cinética do sistema é dada por,

$$T = \int_{V_s} \frac{1}{2} \rho_s \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{u}} dV_s + \int_{V_p} \frac{1}{2} \rho_p \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{u}} dV_p \quad (3.2.2)$$

onde $\mathbf{u}$ é o vetor do deslocamento mecânico, ρ_s a densidade da subestrutura, ρ_p a densidade do piezelétrico, V_s o volume elementar da subestrutura, V_p o volume elementar do piezelétrico e t representa a transposta quando usado como sobrescrito. Deve ficar claro que deste ponto em diante o subscrito s e p denotam camadas de subestrutura e de piezocerâmicas, respectivamente.

Da mesma forma a energia potencial inclui a contribuição das camadas de subestrutura e de piezocerâmicas e é dada na forma,

$$U = \int_{V_s} \frac{1}{2} \mathbf{S}^t \mathbf{T} dV_s + \int_{V_p} \frac{1}{2} \mathbf{S}^t \mathbf{T} dV_p \quad (3.2.3)$$

A energia elétrica surge das forças de deslocamento de cargas elétricas da superfície e campo elétrico ocorridos no material piezelétrico (NUSSENZVEIG, 1997), expresso como,

$$W_e = \int_{V_p} \frac{1}{2} \mathbf{E}^t \mathbf{D} dV_p \quad (3.2.4)$$

A última parcela de energia vem do trabalho de forças mecânicas aplicadas nos pontos (x_i, y_i) e de um conjunto de cargas elétricas discretas extraídas nos pontos (x_j, y_j) da superfície,

$$\delta W = \sum_{k=1}^{nf} \delta \mathbf{u}(x_i, y_i, t) \cdot \mathbf{f}(x_i, y_i, t) + \sum_{j=1}^{nq} \delta \phi(x_j, y_j, t) \cdot q(x_j, y_j, t) \quad (3.2.5)$$

onde $\mathbf{f}$ é o vetor das componentes das forças mecânicas externas, ϕ é o potencial elétrico escalar, q é a carga elétrica de superfície, nf é o número de forças mecânicas discretas aplicadas e nq é o número de pares de eletrodos discretos.

Substituindo as equações (3.2.2)-(3.2.5) na equação (3.2.1) (princípio variacional), obtêm-se a equação,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left[\left(\int_{V_s} \rho_s \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{u}} dV_s + \int_{V_p} \rho_p \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{u}} dV_p - \int_{V_s} \mathbf{S}^t \mathbf{T} dV_s - \int_{V_p} \mathbf{S}^t \mathbf{T} dV_p + \int_{V_p} \mathbf{E}^t \mathbf{D} dV_p \right) \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{nf} \mathbf{u}(x_i, y_i, t) \cdot \mathbf{f}(x_i, y_i, t) + \sum_{j=1}^{nq} \phi(x_j, y_j, t) \cdot q(x_j, y_j, t) \right] dt = 0 \quad (3.2.6)$$

É importante mencionar que o último termo da equação (3.2.6) apresenta sinal positivo para o problema de geração de energia. Em um caso de atuação estrutural, oposto de um caso de geração piezelétrica de energia, a carga elétrica é a entrada do problema e, assim, este termo teria sinal negativo (HAGOOD; CHUNG; VON FLOTOW, 1990). O termo de amortecimento mecânico não foi considerado até este ponto e será introduzido posteriormente na forma de um amortecimento proporcional.

A relação constitutiva elástica-linear para a subestrutura pode ser escrita como,

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}_s \mathbf{S} \quad (3.2.7)$$

e a relação constitutiva eletroelástica linear para materiais piezelétricos é dada por (IEEE Std 176, 1978),

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}_p^E \mathbf{S} - \mathbf{e}^t \mathbf{E} \quad (3.2.8)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{eS} + \boldsymbol{\epsilon}^S \mathbf{E} \quad (3.2.9)$$

Agora podemos incorporar as propriedades piezelétricas do PZT substituindo as equações constitutivas (3.2.2)-(3.2.9) na (3.2.1) obtem-se assim a equação do *Princípio Variacional Eletromecânico para Meios Piezelétricos*,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left[\left(\int_{V_s} \rho_s \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{u}} dV_s + \int_{V_p} \rho_p \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{u}} dV_p - \int_{V_s} \mathbf{S}^t \mathbf{c}_s \mathbf{S} dV_s - \int_{V_p} \mathbf{S}^t \mathbf{c}_p^E \mathbf{S} dV_p + \int_{V_p} \mathbf{S}^t \mathbf{e}^t \mathbf{E} dV_p + \int_{V_p} \mathbf{E}^t \mathbf{e} \mathbf{S} dV_p + \int_{V_p} \mathbf{E}^t \boldsymbol{\epsilon}^S \mathbf{E} dV_p \right) + \left(\sum_{k=1}^{nf} \mathbf{u}(x_i, y_i, t) \cdot \mathbf{f}(x_i, y_i, t) + \sum_{j=1}^{nq} \varphi(x_j, y_j, t) \cdot q(x_j, y_j, t) \right) \right] dt = 0 \quad (3.2.10)$$

Esta equação pode ser utilizada para se obter as equações do movimento de qualquer sistema mecânico contendo elementos piezelétricos.

3.3 - Modelos por Elementos Finitos Eletromecanicamente Acoplado

O objetivo deste item é utilizar a formulação da equação geral do Princípio Variacional para Meios Piezelétricos obtido no capítulo 3 item 2 para desenvolver um modelo numérico e aplicá-lo nos estudos de casos do capítulo 4.

As equações desenvolvidas para as modelagens numéricas são soluções aproximadas de equações diferenciais parciais e descrevem a dinâmica de um sistema eletromecânico. Uma forma eficiente de resolvê-las é utilizar um método numérico conhecido como Método dos Elementos Finitos (MEF), uma ferramenta matemática detalhada para materiais tipo sólidos, cascas, placas e vigas (BATHE, 1996). A maior vantagem do MEF é permitir modelagem de estruturas com geometria simples ou complexas. A idéia básica é dividir a região em um número finito de elementos e assumir que estes elementos são interconectados por nós.

De modo geral, os elementos finitos podem ser de uma, duas ou três dimensões conforme o número de parâmetros necessários para descrever a geometria dos elementos, podendo também ser lineares ou de grau superior. Os princípios de criação e desenvolvimento

do MEF são descritos por (MEIROVITCH, 1970; CLOUG, 1975; BATHE; WILSON, 1976; CRAIG, 1981;) como:

- Decomposição de uma dada estrutura continua em diversos segmentos finitos.
- Os elementos são conectados por um número finito de nós.
- Possibilidade de refinamento através da diminuição sucessiva do tamanho dos elementos.
- Forças internas aplicadas na estrutura são substituídas por forças equivalentes aplicadas nos nós.
- A deflexão da estrutura é expressa em termos de coordenadas generalizadas.
- O uso de funções de interpolação polinomial apropriadas descreve o campo deslocamento desconhecido da combinação linear, dos valores dos deslocamentos dos nós.
- As incógnitas dos valores dos deslocamentos e suas derivadas nos nós são determinadas como graus de liberdade elementares.
- Estruturas com materiais piezelétricos incluem a grandeza de graus de liberdade elétricos (potenciais elétricos).
- As equações de movimento ou de equilíbrio que regem as leis físicas são determinadas no domínio de cada nó e suas incógnitas são conhecidas como variáveis nodais.
- As condições de contorno das equações são descritas pelas equações de movimento ou de equilíbrio elementares, quando combinadas geram as equações globais com incógnitas e variáveis nodais de todos os nós do modelo.
- Os elementos bidimensionais são superfícies curvas, quando o grau dos polinômios for maior que 1 ou tiver faces planas e poligonais, e suas equações forem lineares.

A formulação de um modelo em EF eletromecanicamente acoplado, baseado nas hipóteses de placa de Kirchhoff, é apresentado para caso de um gerador piezelétrico de energia. Um gerador com duas camadas, uma camada de metal (subestrutura) completamente coberta por outra camada de piezocerâmica (configuração *unimorph*), como demonstrado na Fig. (3.3.1), na condição de contorno livre-engastada é utilizado para a derivação do modelo. A subestrutura e a camada piezocerâmica são assumidas perfeitamente coladas uma na outra.

Figura 3.3.1 - Um gerador unimorph com condição de contorno livre-engastada, com eletrodos conectados ao circuito elétrico resistivo

A configuração do gerador unimorph pode ser estendida facilmente para um gerador bimorph, um gerador com uma camada de metal (subestrutura) completamente coberta por uma camada de piezocerâmica na superfície superior e outra na inferior. Posteriormente serão apresentados os comentários pertinentes para a modificação do modelo para o caso *bimorph*.

O elemento finito é representado por uma estrutura retangular tipo placa, com quatro nós nas extremidades e três graus de liberdade por cada nó, onde u , v e w são os eixos de deslocamento, nas direções x , y e z , sendo w o deslocamento vertical (referente à base engastada) e $\theta_{x_i}, \theta_{y_i}$ são as rotações da seção transversal, quando ocorre uma deformação. Assumindo que cada elemento finito da camada piezelétrica é coberto com eletrodos perfeitamente condutivos (sobre as camadas superiores e inferiores) do elemento piezelétrico. Temos então, 12 graus de liberdade mecânico e 1 grau de liberdade elétrico (voltagem elétrica que atravessa os eletrodos), totalizando 13 graus de liberdade para um elemento finito, como demonstrado na Fig. (3.3.2). Neste caso, somente um grau de liberdade é suficiente para modelar a resposta elétrica do elemento finito.

Figura 3.3.2 - Elemento finito piezelétrico com 12 graus de liberdade mecânico e 1 grau de liberdade elétrico.

Com base nas hipóteses de Kirchhoff, no princípio variacional eletromecânico para meios piezelétricos, obtemos as relações cinemáticas para o modelo de placa apresentada na Fig. 3.3.3.

Figura 3.3.3 - Deslocamento de um ponto sobre a normal ao plano neutro dos eixos de simetria (LIMA JR, 1999).

Na Fig. 3.3.3 verifica-se que o plano normal ao eixo neutro antes da deformação permanece normal ao eixo neutro após a deformação, ou seja, os segmentos das normais ficam com os mesmos comprimentos, não havendo variação de espessura durante a deformação (DA ROCHA, 2004). Esta consideração permite dizer que os efeitos da deformação de cisalhamento transversal e inercial rotacional θ_{x_i} e θ_{y_i} podem ser negligenciados. Nos planos deslocamentos u e v são assumidos devido à flexão (rotação da seção transversal) da placa (DE MARQUI; ERTURK; INMAN, 2009a). Assim, o deslocamento u na coordenada x sobre a linha neutra representa a diferença entre o deslocamento u no plano distante z da linha neutra e o deslocamento devido à rotação na flexão da placa.

Segundo as hipóteses de Kirchhoff, todos os componentes de deformação na direção normal a superfície de referência serão desprezados. Portanto, o quarto postulando de Love determina que os deslocamentos devam apresentar variações lineares ao longo da espessura w na direção z da casca (LIMA JR, 1999). O estado de tensões é definido pelas componentes (T_z, T_{yz}, T_{xz}) ao longo da espessura e pelas demais componentes de tensões $(T_x, T_y, T_{xy} = 0)$. A tensão normal T_z pode ser obtida em função de tensões normais T_x e T_y . Respeitando as hipóteses de Kirchhoff, será desenvolvido o modelo em EF baseado no estado plano de

tensões, por apresentar as condições e dimensões ideais para um gerador piezelétrico de energia.

A discretização em elementos finitos acontece quando definimos a malha dos elementos em questão e assim determinamos sua solução a partir de um conjunto de variáveis desconhecidas de cada elemento, aproximando de uma função continua expressa em termos de variáveis nodais e suas derivadas. Utiliza-se um pressuposto das teorias de Kirchhoff, que diz que o campo de deslocamentos é contínuo e linear, ao longo da espessura da placa e desprezíveis no plano horizontal. Portanto, para pequenas deformações, o deslocamento $\mathbf{u}$ pode ser escrito em termos de valores nodais através de uma função de interpolação para um determinado elemento finito (ALLIK; HUGHES, 1970), sendo o campo de deslocamentos de uma variável nodal dada por,

$$\mathbf{u} = \{u \quad v \quad w\}^t \quad (3.3.1a)$$

A equação (3.3.1a) pode ser expressa pelo deslocamento vetorial a seguir (REDDY, 1997),

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial w}{\partial x} & -z \frac{\partial w}{\partial y} & w \end{Bmatrix}^t \quad (3.3.1b)$$

As componentes de deslocamento u , v e w com espessura na coordenada z a partir da referência (linha neutra) da superfície são dadas nos termos da deflexão transversal w da superfície de referência (DE MARQUI; ERTURK; INMAN, 2009a). Como os efeitos de deformação de cisalhamento não são considerados nesta modelagem, as componentes de deformação mecânica na posição ocupada pelo eixo de simetria da Fig. 3.3.3 podem ser escritas em termos das componentes de deslocamento transversal w , segundo a expressão,

$$\begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ 2S_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}^t = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}^t \quad (3.3.1c)$$

As funções de interpolação ou função de forma para o caso de um elemento tipo placa podem ser representadas pelo triângulo de Pascal da Fig. 3.3.4, que apresenta os monômios de um polinômio completo de grau p da interpolação (BATHE, 1996).

Figura 3.3.4 - Monômios de um polinômio de grau p (Triângulo de Pascal)

Segundo Bathe (1996), De Marqui, Erturk e Inman (2009), para esse elemento tipo placa é necessário usar uma função de interpolação polinomial com 12 parâmetros. Para o campo de deslocamento transversal do nó no índice k do elemento finito retangular mostrado na Fig. 3.3.3, sendo assumido como,

$$w_k = w|_{x_k, y_k} = d_1 + d_2x + d_3y + d_4x^2 + d_5xy + d_6y^2 + d_7x^3 + d_8x^2y + d_9xy^2 + d_{10}y^3 + d_{11}x^3y + d_{12}xy^3 \quad (3.3.2a)$$

e suas derivadas parciais nas demais coordenadas em função do índice k a seguir:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x_k, y_k} = d_2 + 2d_4x_k + d_5y_k + 3d_7x_k^2 + 2d_8x_ky_k + d_9y_k^2 + 3d_{11}x_k^2y_k + d_{12}y_k^3 \quad (3.3.2b)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{x_k, y_k} = d_3 + d_5x_k + 2d_6y_k + d_8x_k^2 + 2d_9x_ky_k + 3d_{10}y_k^2 + d_{11}x_k^3 + 3d_{12}x_ky_k^2 \quad (3.3.2c)$$

onde d_i são os coeficientes da função polinomial.

Os elementos são definidos pelos termos polinomiais e podem ser representado como,

$$\mathbf{P} = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ xy^3] \quad (3.3.2d)$$

e o vetor das coordenadas generalizadas é dado por,

$$\boldsymbol{\mu} = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6 \ d_7 \ d_8 \ d_9 \ d_{10} \ d_{11} \ d_{12}]^t \quad (3.3.2e)$$

O deslocamento transversal do nó pode ser definido matricialmente em função dos termos polinomiais na direção das coordenadas generalizadas dadas pela equação,

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{w}|_{x_k, y_k} = \mathbf{P}|_{x_k, y_k} \boldsymbol{\mu} \quad (3.3.2f)$$

e conseqüentemente suas rotações dos eixos Cartesianos (x, y), respectivamente, devido à flexão da placa (SARAVANOS; HEYLIGER; HOPKINS, 1997), podem ser dadas como a derivação dos deslocamentos:

$$\theta_{x_k} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} \bigg|_{x_k, y_k} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y} \bigg|_{x_k, y_k} \boldsymbol{\mu} \quad (3.3.2g)$$

$$\theta_{y_k} = -\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \bigg|_{x_k, y_k} = -\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} \bigg|_{x_k, y_k} \boldsymbol{\mu} \quad (3.3.2h)$$

Considerando os 4 nós por elemento tipo placa e 3 graus de liberdade por nó, pode ser definido como um vetor das variáveis nodais (12x1) como,

$$\boldsymbol{\psi} = \{w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3} \ w_4 \ \theta_{x4} \ \theta_{y4}\}^t \quad (3.3.2i)$$

que pode ser expresso na forma,

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{A} \boldsymbol{\mu} \quad (3.3.2j)$$

onde $\mathbf{A}$ é a matriz transformação (12x12) (BATHE, 1996),

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2 x_1 & x_1 y_1^2 & y_1^3 & x_1^3 y_1 & x_1 y_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1 y_1 & 3y_1^2 & x_1^3 & 3x_1 y_1^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_1 & -y_1 & 0 & -3x_1^2 & -2x_1 y_1 & -y_1^2 & 0 & -3x_1^2 y_1 & -y_1^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & y_4^3 & x_4^3 y_4 & x_4 y_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 3x_4 y_4^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_4 & -y_4 & 0 & -3x_4^2 & -2x_4 y_4 & -y_4^2 & 0 & -3x_4^2 y_4 & -y_4^3 \end{bmatrix} \quad (3.3.2k)$$

da substituição da equação (3.3.2j) na equação (3.3.2f),

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{w}|_{x_k, y_k} = \mathbf{P}|_{x_k, y_k} \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\psi} \quad (3.3.2l)$$

onde,

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{P}|_{x_k, y_k} \mathbf{A}^{-1} \quad (3.3.2m)$$

tem-se então, as aproximações nodais para deflexão transversal como função de variáveis nodais, definidas como,

$$w \cong w_k = \mathbf{\Gamma} \boldsymbol{\psi} \quad (3.3.2n)$$

Para o elemento estrutural tipo placa, a relação entre o vetor de deslocamento transversal e as rotações da seção transversal com o vetor das variáveis nodais, é definido como,

$$\left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad w \right\}^t = \mathbf{B}_\eta \boldsymbol{\psi} \quad (3.3.3a)$$

onde

$$\mathbf{B}_\eta = \left\{ \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial y} \quad \mathbf{\Gamma} \right\}^t \quad (3.3.3b)$$

De forma similar o vetor de curvatura pode ser expresso em termos de variáveis nodais como,

$$\left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^t = \mathbf{B}_k \boldsymbol{\psi} \quad (3.3.3c)$$

onde,

$$\mathbf{B}_k = \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{\Gamma}}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{\Gamma}}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 \mathbf{\Gamma}}{\partial x \partial y} \right\}^t \quad (3.3.3d)$$

As expressões de função de forma $\mathbf{B}_\eta$ do vetor deslocamento e função de forma $\mathbf{B}_k$ do vetor curvatura são matrizes (3x12). As relações anteriores constituem a cinemática do problema. As componentes de deslocamento e também as componentes de deformação expressas como função de variáveis nodais podem então ser utilizadas no princípio de Hamilton, dada pela equação geral (3.2.10) do Princípio Variacional Eletromecânico para Meios Piezelétricos.

Assumindo que o vetor campo elétrico $\mathbf{E}_i$ pode ser considerado simplesmente o operador gradiente negativo do potencial elétrico escalar (φ_i) (HWANG; PARK, 1993), sendo ($i = x, y, z$) temos,

$$\mathbf{E}_i = -\nabla\varphi_i \quad (3.3.3e)$$

Admitindo-se que o piezelétrico é polarizado na direção da espessura (direção-z), e conseqüentemente o campo elétrico é assumido uniforme ao longo da espessura, o componente não nulo do campo elétrico se torna,

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{v_p}{h_p} \quad (3.3.3f)$$

onde o potencial elétrico é assumido como variando linearmente através dos pares de eletrodos da camada piezocerâmica. Assim, o vetor de campo elétrico do problema aqui tratado se torna,

$$\mathbf{E} = -\mathbf{B}_E \mathbf{v}_p \quad (3.3.3g)$$

sendo

$$\mathbf{B}_E = \left\{ 0 \quad 0 \quad \frac{1}{h_p} \right\}^t \quad (3.3.3h)$$

onde h_p é a espessura do elemento piezelétrico.

A partir do princípio generalizado pode se definir a matriz elementar de massa (12x12), com a colaboração da camada de subestrutura e camada piezelétrica,

$$\mathbf{m} = \int_{V_s} \rho_s \mathbf{B}_\eta^t \mathbf{Z}^t \mathbf{B}_\eta \mathbf{Z} dV_s + \int_{V_p} \rho_p \mathbf{B}_\eta^t \mathbf{Z}^t \mathbf{B}_\eta \mathbf{Z} dV_p \quad (3.3.4a)$$

sendo,

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} -z & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.4b)$$

Convém também recordar que o termo z nas respectivas integrais é medido a partir da superfície de referência da placa na direção da espessura (BEER; JOHNSTON JR., 1992; ERTURK; INMAN, 2008c).

A matriz elementar de rigidez (12x12), para uma camada de subestrutura e material piezelétrico, é obtida como,

$$\mathbf{K} = \int_{V_s} z^2 \mathbf{B}_k^t \bar{\mathbf{c}}_s \mathbf{B}_k dV_s + \int_{V_p} z^2 \mathbf{B}_k^t \bar{\mathbf{c}}_p^E \mathbf{B}_k dV_p \quad (3.3.5a)$$

Para a camada de subestrutura constituída por um material isotrópico, a matriz de rigidez elástica $\bar{\mathbf{c}}_s$ para a condição do estado plano de tensão é representada na forma,

$$\bar{\mathbf{c}}_s = \frac{Y_s h_s^3}{12(1-\nu_s^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_s & 0 \\ \nu_s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu_s)}{2} \end{bmatrix} \quad (3.3.5b)$$

onde Y_s é modulo de Young da subestrutura, h_s é a espessura da subestrutura, ν_s é o coeficiente de Poisson da subestrutura.

A matriz elementar do acoplamento eletromecânico (12x1) combina os campos dos deslocamentos mecânicos e elétricos através das propriedades piezelétricas para um corpo elástico,

$$\boldsymbol{\theta} = \int_{V_p} z \mathbf{B}_k^t \bar{\mathbf{e}}^t \mathbf{B}_E dV_p \quad (3.3.6)$$

A capacitância interna da piezocerâmica do sistema é definida em termos da permissividade dielétrica,

$$c_p = \int_{V_p} \mathbf{B}_E^t \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^S \mathbf{B}_E dV_p \quad (3.3.7)$$

O termo de excitação mecânica é um vetor com dimensão (12x1) da forma,

$$\mathbf{f} = \int_s \boldsymbol{\Gamma}^t \mathbf{F}_w dS \quad (3.3.8a)$$

Como comentado anteriormente, a excitação de base é usualmente utilizada em um problema de geração piezelétrica de energia a partir de vigas ou placas engastadas. Se uma estrutura é excitada a partir do movimento transversal de sua base engastada (direção z), a fonte mecânica de excitação nada mais é do que a sua própria inércia na mesma direção. Por esta razão, o termo forçante da equação (3.3.8a) deve ser representado como,

$$F_w = -m^* a_B \quad (3.3.8b)$$

onde m^* é a massa por unidade de área do elemento finito (incluindo as camadas piezocerâmica e subestrutura) e a_B é a aceleração de base engastada. O sinal negativo na equação (3.3.8b) indica a movimentação oposta do corpo em relação ao movimento da base.

As equações constitutivas para a camada piezocerâmica para estado plano de tensões é dada por,

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_6 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11}^E & \bar{c}_{12}^E & 0 & -\bar{e}_{31} \\ \bar{c}_{12}^E & \bar{c}_{22}^E & 0 & -\bar{e}_{32} \\ 0 & 0 & \bar{c}_{66}^E & 0 \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{32} & 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3.3.9a)$$

Este modelo reduzido (2-D) fornece o termo de tensão mecânica como uma variável independente, muito importante para modelar a resposta da estrutura sob uma carga aplicada (TIMOSHENKO; GOODIER, 1951). Os termos das componentes elásticas, piezelétricas e dielétricas na equação (3.3.9a) são dadas utilizando a notação contraída de Voigt.

Em geral, as cerâmicas piezelétricas polarizadas (PZT-5A e PZT-5H) exibem um comportamento transversalmente isotrópico (isotrópico no plano-12, ou plano xy) e, portanto, as componentes reduzidas no plano de tensão (2-D) da equação (3.3.9a) podem ser obtidas em termos das componentes (3-D) (BENT, 1994) como,

$$\bar{c}_{11}^E = c_{11}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E}, \quad \bar{c}_{12}^E = c_{12}^E - \frac{c_{13}^E c_{23}^E}{c_{33}^E}, \quad \bar{c}_{22}^E = c_{22}^E - \frac{(c_{23}^E)^2}{c_{33}^E}, \quad \bar{c}_{66}^E = c_{66}^E \quad (3.3.9b)$$

$$\bar{e}_{31} = e_{31} - \frac{c_{13}^E e_{33}}{c_{33}^E}, \quad \bar{e}_{32} = e_{32} - \frac{c_{23}^E e_{33}}{c_{33}^E}, \quad \bar{\epsilon}_{33}^S = \epsilon_{33}^S + \frac{e_{33}^2}{c_{33}^E} \quad (3.3.9c)$$

Usando esta forma da rigidez elástica no estado plano de tensões, propriedades piezelétricas e dielétricas da camada piezocerâmica (DE MARQUI; ERTURK; INMAN, 2009a), os respectivos integrandos das camadas piezocerâmicas nas equações (3.3.4a)-(3.3.7) podem ser expressos na forma,

$$\mathbf{B}_\eta^t \mathbf{Z}^t \rho_p \mathbf{B}_\eta = \rho_p \left[z^2 \frac{\partial \Gamma^t}{\partial x} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + z^2 \frac{\partial \Gamma^t}{\partial y} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} + \Gamma^t \Gamma \right] \quad (3.3.10a)$$

$$z^2 \mathbf{B}_k^t \bar{\mathbf{c}}_p^E \mathbf{B}_k = z^2 \left[\bar{\mathbf{c}}_{11}^E \left(\frac{\partial^2 \Gamma^t}{\partial x^2} \right)^2 + 2\bar{\mathbf{c}}_{12}^E \left(\frac{\partial^2 \Gamma^t}{\partial x \partial y} \right)^2 + \bar{\mathbf{c}}_{22}^E \left(\frac{\partial^2 \Gamma^t}{\partial y^2} \right)^2 + 4\bar{\mathbf{c}}_{66}^E \left(\frac{\partial^2 \Gamma^t}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \quad (3.3.10b)$$

$$z \mathbf{B}_k^t \bar{\mathbf{e}}^t \mathbf{B}_E = -\frac{z}{h_p} \left[\bar{\mathbf{e}}_{31} \frac{\partial^2 \Gamma^t}{\partial x^2} + \bar{\mathbf{e}}_{32} \frac{\partial^2 \Gamma^t}{\partial y^2} \right] \quad (3.3.10c)$$

$$\mathbf{B}_E^t \bar{\mathbf{e}}^S \mathbf{B}_E = \frac{\bar{\mathbf{e}}_{33}^S}{h_p^2} \quad (3.3.10d)$$

As equações globais de movimento são então obtidas a partir da montagem das matrizes elementares dadas pelas equações (3.3.4a)-(3.3.8a),

$$\mathbf{M}\ddot{\Psi} + \mathbf{C}\dot{\Psi} + \mathbf{K}\Psi - \mathbf{\Theta}\mathbf{v}_p = \mathbf{F} \quad (3.3.11a)$$

$$\mathbf{C}_p \mathbf{v}_p + \mathbf{Q} + \mathbf{\Theta}^t \Psi = 0 \quad (3.3.11b)$$

onde $\mathbf{M}$ é a matriz global de massa ($n_m \times n_m$), $\mathbf{C}$ é a matriz global de amortecimento mecânico ($n_m \times n_m$), $\mathbf{K}$ é a matriz global de rigidez ($n_m \times n_m$), $\mathbf{\Theta}$ é a matriz global de acoplamento eletromecânico ($n_m \times n_e$), $\mathbf{C}_p$ é a matriz global diagonal de capacitância ($n_e \times n_e$), Ψ é o vetor global de coordenadas mecânicas ($n_m \times 1$), $\mathbf{F}$ é o vetor global das forças mecânicas ($n_m \times 1$), $\mathbf{Q}$ é o vetor global de saída de cargas elétricas ($n_e \times 1$), $\mathbf{v}_p$ é vetor global de saída de voltagem elétrica ($n_e \times 1$), n_m e n_e são os números de graus de liberdade mecânico e elétrico, respectivamente.

As equações (3.3.11a) e (3.3.11b) definem as equações eletromecanicamente acopladas de um gerador piezelétrico de energia. O amortecimento do gerador piezelétrico é importante para caracterização e modelagem desse dispositivo. A matriz de amortecimento é assumida ser proporcional as matrizes de massa e rigidez,

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (3.3.11c)$$

onde α e β são constantes de proporcionalidade da massa e rigidez (BATHE, 1987; INMAN, 2001), determinadas por,

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3.11d)$$

onde ξ_i é o fator de amortecimento desejado, ω_i são as frequências naturais.

Para incorporar a dissipação de energia na equação eletromecânica, podemos recorrer à lei de Ohm e utilizar uma resistência elétrica (R_i) conectada a eletrodos (assumidos perfeitamente condutores) que cobrem toda a superfície superior e inferior da camada piezocerâmica. O resistor fornecerá um meio efetivo para dissipar a energia do gerador piezelétrico. A condição de contorno elétrica do problema é então definida como,

$$v_p(t) = R_i \dot{Q}(t) \quad (3.3.12a)$$

onde o termo $i(t) = \dot{Q}(t)$ provém da saída de corrente elétrica do elemento piezelétrico.

A dimensão do vetor global das saídas das voltagens elétricas nas equações (3.3.11a) e (3.3.11b) é igual ao número de elementos finitos (n_e) usados no modelo da malha da camada piezelétrica. Este é um caso geral, no qual assumimos que cada elemento finito eletromecânico tem seu próprio par de eletrodos, isolados um do outro. Apesar de esta condição ser correta matematicamente ela não é aceitável na prática, já que a camada piezocerâmica é coberta por eletrodos condutivos. Assim, uma matriz transformação pode ser determinada para modelar a presença de eletrodos condutivos. É assumido que todos os elementos do vetor $\mathbf{v}$ são iguais, resultando em,

$$\mathbf{v}_p = \{v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_{n_e}\}^t = \{1 \ 1 \ \cdots \ 1\}^t v_p \quad (3.3.12b)$$

assim, a diferença de potencial elétrico entre estes dois eletrodos é simplesmente v_p .

Definindo o vetor de acoplamento eletromecânico através da transformação da equação (3.3.12b) obtêm-se,

$$\tilde{\Theta} = \{1 \ 1 \ \cdots \ 1\}^t \Theta \quad (3.3.13a)$$

onde a matriz global de acoplamento eletromecânico ($n_m \times n_e$) foi transformada em um vetor ($n_m \times 1$). Realizando a derivação no tempo da equação (3.3.11b) e pré-multiplicando pelo vetor unitário $\{1 \ 1 \ \cdots \ 1\}$ de dimensão ($1 \times n_e$) pode-se então obter a seguinte equação escalar,

$$C_p \dot{V}_p + \dot{Q} + \tilde{\Theta}^t \dot{\Psi} = 0 \quad (3.3.13b)$$

onde $C_p = \text{traço}(\mathbf{C}_p)$.

Utilizando a condição de contorno elétrico quando uma resistência elétrica é utilizada no circuito externo (R_l) (definida pelo termo $\dot{Q} = v_p/R_l$) na equação (3.3.13b) obtem-se as equações eletromecanicamente acopladas para um gerador unimorph,

$$\mathbf{M}\ddot{\Psi} + \mathbf{C}\dot{\Psi} + \mathbf{K}\Psi - \tilde{\Theta}v_p = \mathbf{F} \quad (3.3.14a)$$

$$C_p \dot{v}_p + \frac{v_p}{R_l} + \tilde{\Theta}^t \dot{\Psi} = 0 \quad (3.3.14b)$$

A configuração do gerador unimorph pode ser estendida facilmente para uma configuração bimorph (um gerador com uma camada de subestrutura completamente coberta por uma camada de piezocerâmica na superfície superior e outra na inferior). Para a representação desta nova configuração as matrizes de massa, rigidez e conseqüentemente a matriz de amortecimento, devem ser modificadas para levar em conta a presença da nova camada. É importante ressaltar que os limites de integração dos termos de rigidez e acoplamentos eletromecânicos devem ser respeitados. Na configuração bimorph é possível conectar os pares de eletrodos de cada camada piezocerâmica em série ou em paralelo. Na configuração em série obtêm maior saída de voltagem elétrica, já em paralelo otimiza-se a corrente elétrica, e as camadas piezelétricas são polarizadas em direções opostas (direção-z), o vetor do acoplamento eletromecânico efetivo é igual o de uma camada piezocerâmica e sua capacitância efetiva é a metade da capacitância de uma camada piezocerâmica. Na configuração em paralelo as camadas piezelétricas são polarizadas mesma direção, o vetor do acoplamento eletromecânico efetivo é a soma da contribuição individual de cada camada e conseqüentemente a capacitância efetiva é a soma de cada capacitância individual.

Capítulo 4 - Estudo de Casos

4.1 - Introdução

Neste capítulo são apresentados dois estudos de casos utilizando o modelo em EF eletromecanicamente acoplado descrito no capítulo 3. No primeiro estudo de caso, os resultados numéricos (funções resposta em frequência -FRFs- eletromecanicamente acopladas obtidas a partir do modelo em EF) para um gerador unimorph com uma carga resistiva no circuito gerador são verificados em função dos resultados analíticos apresentados por Erturk e Inman (2008c). No segundo caso, os resultados numéricos do modelo em EF são comparados com os resultados analíticos e experimentais apresentados por Erturk e Inman (2009a) para um gerador bimorph em série com uma massa concentrada na extremidade livre e uma carga resistiva no domínio elétrico. Posteriormente o gerador bimorph em paralelo é investigado no segundo estudo de caso.

As propriedades materiais e eletromecânicas das piezocerâmicas utilizadas em todos os casos (PZT-5A) estão apresentadas na tabela (4.1.1). Os fabricantes de materiais piezelétricos fornecem um número limitado de propriedades de piezocerâmicas. No caso do modelo analítico de um gerador unimorph desenvolvido por Erturk e Inman (2008c) os dados são fornecidos pelo fabricante (Piezo Systems Inc.) das propriedades físicas e geométricas apresentados na Tab. 4.1.2, foram suficiente para a formulação da viga. No entanto, a formulação por elementos finitos tipo placa apresentada neste trabalho requer mais que os dados fornecidos pelo fabricante para as simulações numéricas (as propriedades para o cálculo das componentes elásticas, piezelétricas e dielétricas no estado plano de tensões), dados pela equação (3.3.9a). Portanto, as propriedades (3-D) do PZT-5A encontradas no site (<http://www.efunda.com>) e fornecidas na Tab. 4.1.1 são utilizadas neste trabalho.

Tabela 4.1.1 - Propriedades materiais e eletromecânicas do PZT-5A

Densidade de massa do PZT, ρ_p (kg / m ³)	7800
Permissividade, ϵ_{33}^s (nF / m)	1800 x ϵ_0
Permissividade no vácuo, ϵ_0 (nF / m)	8.854
c_{11}^E, c_{22}^E (GPa)	120.3
c_{12}^E (GPa)	75.2
c_{13}^E, c_{23}^E (GPa)	75.1
c_{33}^E (GPa)	110.9
c_{66}^E (GPa)	22.7
e_{31}, e_{32} (C/m ²)	-5.2
e_{33} (C/m ²)	15.9

Tabela 4.1.2 - Geometria e propriedades materiais de um gerador unimorph

Comprimento da viga, L (mm)	100
Largura da viga, b (mm)	20
Espessura da subestrutura, h_s (mm)	0.5
Espessura do PZT, h_p (mm)	0.4
Módulo de Young da subestrutura, Y_s (Gpa)	100
Densidade de massa da subestrutura, ρ_s (kg / m ³)	7165
Constante de proporcionalidade - α (rad / s)	4.886
Constante de proporcionalidade - β (s / rad)	1.2433x10 ⁻⁵

Em todos os estudos de casos serão apresentadas FRFs eletromecânicas (voltagem elétrica através do resistor, corrente elétrica passando pelo resistor, potência elétrica e movimento relativo da extremidade livre) obtidas a partir das equações apresentadas no final do capítulo 3 (equações 3.3.14a e b). A malha utilizada no caso unimorph foi (12x8) e no caso bimorph (25x10).

A fonte de excitação dos geradores é assumida devido ao movimento harmônico da base engastada na direção transversal (z),

$$w_B(t) = Y_0 e^{j\omega t} \quad (4.1.1a)$$

sendo w_B o deslocamento da base, Y_0 a amplitude de translação da base, j o número imaginário ($j = \sqrt{-1}$), ω a frequência de excitação.

A FRF de deslocamento é aqui definida como a razão entre a amplitude do deslocamento na ponta do gerador (relativo ao deslocamento da base) e a amplitude do deslocamento da base (transmissibilidade). Assim, a partir das equações (3.3.14a e b) define-se,

$$\frac{\mathbf{w}_{rel}}{Y_0 e^{j\omega t}} = \omega^2 \left(-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} + j\omega \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_p \right)^{-1} \tilde{\Theta} \tilde{\Theta}^t \right)^{-1} \mathbf{m}^* \quad (4.1.1b)$$

a qual define um vetor para a resposta de vibração de todas as coordenadas. A componente de interesse no vetor definido pela equação (4.1.1b) é o deslocamento transversal w na coordenada z da estrutura. Aqui $\mathbf{m}^*$ é vetor de massa ($n_m \times 1$) obtido do termo forçante global $\mathbf{F}$ para o problema de excitação de base. Verifica-se na literatura (ERTURK; INMAN, 2008c) que o termo forçante no caso de excitação de base nada mais é do que a própria inércia da estrutura multiplicada por sua aceleração de base.

A FRF de voltagem é aqui definida como a razão entre a saída de voltagem elétrica e a aceleração de base, apresentada como,

$$\frac{v_p(t)}{a_B(t)} = \frac{v_p(t)}{-\omega^2 Y_0 e^{j\omega t}} = j\omega \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_p \right)^{-1} \tilde{\Theta}^t \left(-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} + j\omega \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_p \right)^{-1} \tilde{\Theta} \tilde{\Theta}^t \right)^{-1} \mathbf{m}^* \quad (4.1.2c)$$

A FRF de corrente elétrica é obtida dividindo-se a FRF de voltagem pelo resistor elétrico considerado no circuito gerador. A FRF de potência elétrica é obtida como o produto da FRF de voltagem elétrica e FRF de corrente elétrica, sendo assim definida como a razão da potência elétrica pela aceleração da base ao quadrado. Por esta razão, a potência elétrica obtida é a potência de pico, sendo a amplitude média da potência elétrica a sua metade da potência de pico.

É importante ressaltar que as expressões apresentadas para as FRFs eletromecânicas foram determinadas para o caso em que uma carga resistiva está presente no circuito elétrico externo (ou circuito gerador). Além disso, qualquer circuito elétrico externo com componentes lineares pode ser representado. Para isso basta utilizar a admitância equivalente do mesmo nas expressões das FRFs.

4.2 - Modelagem de um Gerador Unimorph com Circuito Resistivo

No presente estudo de caso, as FRFs eletromecânicas obtidas a partir do modelo em EF serão verificadas contra os resultados analíticos apresentados por Erturk e Inman (2008c). Um gerador piezelétrico unimorph (uma camada de subestrutura completamente coberta por uma camada de piezocerâmica) na condição de contorno livre-engastado é conectado a um circuito elétrico resistivo, como apresentado na Fig. 4.2.1.

Figura 4.2.1 – Gerador piezelétrico unimorph com condições de contorno livre-engastado e conectados a um circuito elétrico resistivo.

As FRFs de saída de voltagem elétrica para diversos valores de resistências elétricas (aumentando em ordem de magnitude para cada caso) no domínio elétrico são apresentadas na Fig. 4.2.1. As linhas cheias representam os resultados obtidos a partir do modelo em elementos finitos eletromecanicamente acoplado aqui apresentado, enquanto que as linhas tracejadas são os resultados obtidos analiticamente por Erturk e Inman (2008c). Vale ressaltar que os resultados numéricos reproduzem com sucesso os resultados analíticos. Observa-se na figura que a amplitude da saída de voltagem elétrica aumenta monotonicamente com o aumento da resistência elétrica para todas as frequências de excitação aqui analisadas. É possível também verificar que com o aumento da resistência elétrica o pico de ressonância do primeiro modo de vibrar que oscilava na frequência de (47,8 Hz), passa a oscilar na frequência de (48,8 Hz). Define-se aqui a primeira frequência como a frequência de ressonância de curto circuito (obtida para uma carga resistiva baixa, ou praticamente em curto circuito) e a segunda a frequência de circuito aberto.

Figura 4.2.2 - FRFs de tensão elétrica do modelo piezoelétrico unimorph conectado a um circuito elétrico resistivo.

Uma investigação interessante para o comportamento do sistema pode ser feita excitando-se o gerador em uma frequência de interesse e variando-se a resistência externa. A frequência fundamental do sistema (primeiro modo de vibrar) é a mais importante para o caso de geração de energia. Neste modo, devido à distribuição de deformação, não há cancelamento de saída elétrica.

A variação da saída de tensão elétrica com a variação da resistência elétrica é apresentada na Fig. 4.2.3. O gerador foi excitado na frequência de curto circuito e circuito aberto. Para valores baixos de resistência elétrica, a saída de tensão elétrica nestas duas particulares frequências de excitação aumenta paralelamente (mesma inclinação na escala log-log), sendo maior para a condição de curto circuito já que o sistema está próximo a esta condição. Existe um ponto de intersecção das curvas, a partir do qual a saída de tensão elétrica torna-se menor. Perto da condição de circuito aberto a tensão elétrica torna-se menos sensível a variações de resistências elétricas.

Figura 4.2.3 - Variação da saída de tensão elétrica em função da resistência elétrica com excitação de base na frequência de ressonância de curto circuito e circuito aberto do primeiro modo de vibrar.

As FRFs de saída de corrente elétrica são apresentadas na Fig. 4.2.4. A amplitude da corrente elétrica é reduzida com o aumento da resistência elétrica considerada no circuito externo, para toda faixa de frequência de excitação aqui analisada. Portanto, possui um comportamento monotônico, porém inverso aos obtidos nas FRFs de saídas de tensão elétrica. O valor da máxima amplitude de corrente elétrica ocorre na frequência de ressonância de curto circuito (47,7 Hz) e decresce até frequência de ressonância de circuito aberto (48,8 Hz). Deste modo, para toda frequência de excitação do sistema, a máxima saída de corrente elétrica ocorre quando esta na condição de curto circuito. No entanto, para valores muito baixos de resistência elétrica, as variações de corrente elétrica não são muito visíveis.

Figura 4.2.4 - FRFs de corrente elétrica do modelo piezelétrico unimorph conectado a um circuito elétrico resistivo.

A variação da saída da corrente elétrica em função da variação das resistências elétrica para a excitação na frequência de ressonância de curto circuito e circuito aberto do primeiro modo é apresentada na Fig. 4.2.5. Nas regiões de baixas resistências elétricas, a saída de corrente elétrica é mais alta na frequência de excitação de curto circuito. Novamente, ocorre uma intersecção das curvas um valor de resistência elétrica. Para valores de resistência elétrica alta superiores ao ponto de intersecção e a partir deste ponto, a saída de corrente elétrica para excitação na frequência de ressonância de circuito aberto torna-se maior já que o sistema se aproxima da condição de circuito aberto.

Figura 4.2.5 - Variação da saída de corrente elétrica em função da variação de resistência elétrica para a excitação de base na frequência de ressonância de curto circuito e circuito aberto do primeiro modo de vibrar.

A FRF de potência elétrica para diversos valores de cargas resistivas são apresentadas na Fig. 4.2.6. Neste caso, as amplitudes da potência elétrica não apresentam um comportamento monotônico com o aumento ou diminuição das resistências elétricas em uma frequência fixa, o que é observado pelas intersecções entre as curvas em determinadas frequências e para diferentes resistências elétricas. Tal comportamento é explicado pelo fato da FRF de potência elétrica ser obtida a partir de duas FRFs (voltagem e corrente elétrica) que apresentam comportamentos monotônicos, porém opostos. Para valores de resistência elétrica de $R_1 = 10^2 \Omega$ (curto circuito) até $R_1 = 10^4 \Omega$ o sistema oscila na frequência de ressonância de curto circuito (47,8 Hz). Quando $R_1 = 10^5 \Omega$ e $R_1 = 10^6 \Omega$ o sistema passa a oscilar na frequência de ressonância de circuito aberto. Observa-se que o valor da máxima saída de potência elétrica ocorre para $R_1 = 10^5 \Omega$ na frequência de ressonância de circuito aberto. É importante ressaltar que esta é a resistência ótima para máxima potência elétrica entre as testadas neste estudo de caso. A determinação da resistência elétrica ótima global para um determinado modo de vibrar pode ser obtida excitando-se o sistema na frequência de interesse e buscando-se pelo resistor que fornecerá a máxima potência elétrica.

Figura 4.2.6 - FRFs de potência elétrica do gerador piezelétrico unimorph conectado a um circuito elétrico resistivo.

A variação da saída de potência elétrica em função da variação de resistência elétrica para a excitação na frequência de ressonância de curto circuito e circuito aberto do primeiro modo é apresentada na Fig. 4.2.7. Como observado na figura, o ponto de intersecção das curvas é o mesmo das outras variações das saídas elétricas. A saída de potência elétrica é mais alta depois deste ponto para a excitação na frequência de ressonância de circuito aberto. O comportamento para baixos valores de resistências elétricas é similar ao comportamento das saídas de tensão elétrica da Fig. 4.2.3, que aumenta paralelamente na mesma inclinação (na escala log-log) com o aumento da resistência elétrica. Após a intersecção dos gráficos a potência de saída é maior para a excitação na frequência de circuito aberto. Tanto na frequência de ressonância de curto circuito como de circuito aberto, a saída de potência elétrica aumenta progressivamente até a resistência elétrica chegar a um valor ótimo e diminuir a partir deste ponto. Nos dois casos, os picos de potência elétrica correspondem aos valores de resistência elétrica ótima na frequência de ressonância na excitação. Um ponto interessante é que, para as duas frequências de excitação, apesar de a carga resistiva ótima ser diferente, a potência máxima de saída é a mesma.

Figura 4.2.7 - Variação da saída de potência elétrica em função da resistência elétrica com a excitação base na frequência de ressonância de curto circuito e circuito aberto do primeiro modo de vibrar

A FRF de vibração mecânica (transmissibilidade) é apresentada na Fig. 4.2.8. Os resultados numéricos também representam bem os resultados analíticos para o caso das FRFs mecânicas. As amplitudes de ressonância para saída vibração mecânica não apresentam um comportamento monotônico com o aumento ou diminuição da resistência elétrica em toda faixa de frequência de excitação. O sistema oscila na frequência de ressonância de curto circuito com o aumento da carga resistiva até $R_1 = 10^4 \Omega$. Quando a carga resistiva é aumentada para $R_1 = 10^5 \Omega$ e $R_1 = 10^6 \Omega$ o sistema passa a oscilar na frequência de circuito aberto. É interessante observar também o comportamento da amplitude de vibração mecânica. Fica clara que a amplitude diminui com o aumento da carga resistiva até o valor de $R_1 = 10^5 \Omega$, voltando a aumentar com $R_1 = 10^6 \Omega$. Essa variação de amplitude é causada pelo efeito shunt damping resistivo associado com a geração de energia. A FRF de vibração mecânica eletromecanicamente acoplada tende a convergir para uma FRF desacoplada (puramente mecânica) quando o sistema estiver perto da condição de curto circuito ($R_1 \rightarrow 0$).

Figura 4.2.8 - FRFs de vibração mecânica do modelo piezelétrico unimorph conectado a um circuito resistivo.

A variação da saída de vibração mecânica (variação da amplitude de deslocamento na extremidade) em função da resistência elétrica para a excitação na frequência de ressonância de curto circuito e circuito aberto do primeiro modo é apresentada na Fig. 4.2.9. A vibração relativa na extremidade não é sensível a variação da carga resistiva para baixos valores de resistências elétricas, e a amplitude é maior para a excitação na frequência de curto circuito para esta região. Quando a resistência elétrica é aumentada, devido a efeitos eletromecânicos, a amplitude de vibração na frequência de ressonância de curto circuito é atenuada. O efeito da variação da carga resistiva sobre o comportamento do sistema é mais complexo do que uma simples variação de amortecimento (o que resultaria somente na variação de amplitude). Considerando a ampliação do primeiro modo da Fig. 4.2.8, pode-se notar que o pico que oscilava na frequência de ressonância de curto circuito (47,8 Hz) passa a oscilar na do circuito aberto (48,8 Hz), sendo este o motivo para a atenuação da amplitude de vibração na excitação em curto circuito. Neste ponto, na frequência de circuito aberto (48,8 Hz), observa-se um aumento na amplitude de vibração. Na Fig. 4.2.9 observa-se que à medida que aumenta a resistência elétrica, o pico, que estava na frequência de ressonância de curto circuito deslocava-se em direção da frequência de ressonância de circuito aberto, causando não apenas a atenuação da frequência de curto circuito, mas ao mesmo tempo ocorre um aumento da vibração na frequência de ressonância de circuito aberto. Esta variação de amplitude é causada pelo efeito shunt damping associado à geração de energia.

Analisando simultaneamente as Figs. 4.2.8 e 4.2.9 é possível notar que o comportamento do sistema quando excitado na frequência de curto circuito e de circuito aberto, em termos de amplitude de vibrações, é oposto. A medida que se aproxima da resistência elétrica ótima para o caso de curto circuito (máxima potência gerada) a amplitude de oscilação diminui, enquanto que o oposto é observado no caso de excitação do sistema na frequência de circuito aberto.

Figura 4.2.9 – Variação do deslocamento relativo na extremidade por deslocamento de base em função da resistência elétrica com a excitação de base na frequência de ressonância de curto circuito e circuito aberto do primeiro modo de vibrar.

4.3 - Modelagem de um Gerador Bimorph em Série com Circuito Resistivo

O gerador piezelétrico aqui analisado possui a configuração bimorph (uma camada de metal (subestrutura) completamente coberta por duas camadas piezocerâmicas em sua superfície superior e inferior) em série, com uma massa concentrada na extremidade livre, como representado na Fig. 4.3.1.

Figura 4.3.1 - Um gerador piezelétrico bimorph em série, na condição de contorno livre-engastada com uma massa concentrada na extremidade livre, conectado em um circuito elétrico resistivo.

Um circuito elétrico resistivo é considerado no domínio elétrico do problema para 8 diferentes resistências elétricas. Assumindo também que neste caso que as camadas piezocerâmicas são idênticas, e seus eletrodos condutivos cobrem integralmente as respectivas camadas piezelétricas. O gerador, representado na configuração livre-engastada é excitado a partir do movimento harmônico de sua base engastada.

As propriedades materiais e eletromecânicas para o PZT-5A e da subestrutura do gerador estão apresentadas na Tabs. 4.1.1 e 4.3.1.

Tabela 4.3.1 - Geometria e propriedades materiais de um gerador bimorph

Comprimento da viga, L (mm)	50.8
Largura da viga, b (mm)	31.8
Espessura da subestrutura, h (mm)	0.14
Espessura do PZT, h_p (mm)	0.26(cada)
Modulo de Young da subestrutura, Y_s (Gpa)	105
Densidade de Massa da subestrutura, ρ_s (Kg / m ³)	9000
Massa da extremidade, M_{ext} (Kg)	0.012
Constante de proporcionalidade – α (rad / s)	14.65
Constante de proporcionalidade – β (s / rad)	10^{-5}

Para a representação de um gerador bimorph as matrizes de massa, rigidez e de amortecimento devem ser modificadas em relação à derivação do modelo apresentado no capítulo anterior. A contribuição de uma nova camada de piezocerâmica deve ser levada em

conta. Não esquecendo que a representação de uma massa concentrada deve ser considerada na composição da matriz de massa e vetor forçante no problema de excitação de base.

Para a configuração em série as camadas piezocerâmicas são polarizadas em sentidos opostos, evitando-se assim o cancelamento da saída elétrica. A capacitância equivalente é a metade da capacitância de uma camada piezocerâmica ($C_p = 1/2C_{p1}$) e o vetor de acoplamento eletromecânico equivalente é igual de uma camada piezocerâmica equivalente ($\Theta = \Theta_1$) (DuTOIT, 2005a).

Aplicando estas condições elétricas e mecânicas para as duas camadas, as equações de movimento (3.3.14a) e (3.3.14b) podem ser reescrita como,

$$\mathbf{M}\ddot{\Psi} + \mathbf{C}\dot{\Psi} + \mathbf{K}\Psi - \tilde{\Theta}\mathbf{v}_p = \mathbf{F} \quad (4.3.1)$$

$$\frac{1}{2}C_p\dot{v}_p + \frac{v_p}{R_1} + \tilde{\Theta}'\dot{\Psi} = 0 \quad (4.3.2)$$

Para este caso, serão comparados os resultados do modelo em EF com os resultados analíticos e experimentais das FRFs de voltagem elétrica e vibração mecânica de um gerador piezelétrico bimorph apresentado por Erturk e Inman (2009a), representado na Fig. 4.3.1.

As FRFs de saída de voltagem elétrica para 8 diferentes valores de resistência elétrica no domínio elétrico são apresentados na Fig. 4.3.2. Neste caso, a FRF de voltagem elétrica é apresentada em termos da aceleração da gravidade ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$) para estar em conformidade com os resultados analíticos e experimentais de Erturk e Inman (2009a). Observam-se na figura que as amplitudes das saídas de voltagem elétrica aumentam monotonicamente com o aumento da resistência elétrica para todas as frequências de excitação aqui analisadas. Neste caso, pode se verificar com o aumento da resistência elétrica o pico de ressonância (modo fundamental) desloca-se da frequência de ressonância (45,6 Hz) de curto circuito para a frequência de ressonância (48,4 Hz) de circuito aberto. As FRFs de voltagem elétrica obtidas analiticamente, experimentalmente e a partir do modelo em EF apresentam boa concordância, como apresentado na Fig. 4.3.2. Para efeito de comparação, as frequências de ressonância da saída da voltagem elétrica experimental têm valor entre os dois extremos de frequência (45,6 e 48,4 Hz) e para o modelo analítico (entre 45,7 e 48,2 Hz respectivamente).

Figura 4.3.2 - FRFs de tensão elétrica do modelo piezelétrico bimorph em série conectado a um circuito elétrico resistivo.

As FRFs de saída de corrente elétrica são apresentados na Fig. 4.3.3, para várias cargas resistivas. As amplitudes de corrente elétrica apresentam comportamento monotônico inverso com o aumento da resistência elétrica para todas as frequências de excitação aqui analisadas, comportamento esse inverso obtido nas FRFS de tensão elétrica. Desse modo, para toda frequência de excitação do sistema, a máxima saída de corrente elétrica ocorre quando está na condição de curto circuito.

Figura 4.3.3 - FRFs de corrente elétrica do modelo piezelétrico bimorph em série conectado a um circuito elétrico resistivo.

Os módulos das FRFs de potência elétrica são mostrados na Fig. 4.3.4. A FRF de potência elétrica é obtida a partir da multiplicação das FRFs de tensão e corrente elétrica. Possuem comportamentos opostos (em relação à amplitude) com a variação da carga resistiva. Neste caso, as amplitudes de ressonância não apresentam um comportamento monotônico com o aumento ou diminuição das resistências elétricas em todas as frequências de excitação aqui analisadas. Neste caso, as frequências de ressonância do sistema variam desde a frequência de curto circuito até a frequência de circuito aberto. O valor da máxima saída de potência elétrica no modelo em EF ocorre na frequência de ressonância (47,4 Hz) (entre a frequência de ressonância de curto circuito e circuito aberto) na resistência elétrica ótima $R_1 = 100 \text{ K}\Omega$ e diminui para a frequência de ressonância (48,4 Hz) do circuito aberto com o aumento da resistência elétrica $R_1 = 470 \text{ K}\Omega$.

Figura 4.3.4 - FRFs de potência elétrica do modelo piezelétrico bimorph em série conectado a um circuito elétrico resistivo

A FRFs de vibração mecânica (transmissibilidade) da Fig. 4.3.5 são aqui definidas como a razão da amplitude da velocidade do movimento relativo da extremidade livre da viga pela aceleração gravitacional (g), utilizando a expressão $[-jg / (1 + w_{rel}(L, t) / Y_0)]$ na equação (4.1.1b). A máxima amplitude de vibração mecânica ocorre na faixa de frequência de ressonância (45,6 Hz) de curto circuito e diminui com o aumento da resistência elétrica até $R_1 = 100 \text{ K}\Omega$ (onde apresenta o seu valor mínimo), devido ao efeito shunt damping resistivo associado com a geração piezelétrica de energia. A amplitude volta a aumentar com o

aumento da carga resistiva acima $R_1 = 100 \text{ K}\Omega$ até $R_1 = 470 \text{ K}\Omega$, oscilando na frequência de ressonância de circuito aberto. Como observado na Fig. 4.3.5, as FRFs mecânicas obtidas a partir do modelo em EF representam com sucesso as FRFs obtidas analítica e experimentalmente.

Figura 4.3.5 - FRFs de vibração mecânica do modelo piezelétrico bimorph em série conectado a um circuito elétrico resistivo

4.4 - Modelagem de um Gerador Bimorph em Paralelo com Circuito Resistivo

Os parâmetros geométricos e propriedades materiais apresentados no gerador bimorph em série com circuito resistivo podem ser estendidos para a conexão em paralelo, representado pela Fig. 4.4.1. No entanto, é importante analisar e aplicar as condições apresentadas para esta configuração em paralelo.

Figura 4.4.1 – Um gerador piezelétrico bimorph em paralelo na condição de contorno livre-engastado, com uma massa concentrada na extremidade livre e conectado em um circuito elétrico resistivo.

Na configuração em paralelo as camadas piezelétricas são polarizadas na mesma direção (direção z). O vetor do acoplamento eletromecânico equivalente é igual a duas vezes o vetor de acoplamento de uma camada piezocerâmica ($\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 = 2\Theta_1$) e conseqüentemente a capacitância equivalente é igual a duas vezes a capacitância de uma camada piezocerâmica ($C_p = C_{p1} + C_{p2} = 2C_{p1}$) (DuTOIT, 2005a).

Aplicando estas condições elétricas para as duas camadas nas equações de movimento (3.3.14a) e (3.3.14b) pode ser reescrita como,

$$\mathbf{M}\ddot{\Psi} + \mathbf{C}\dot{\Psi} + \mathbf{K}\Psi - 2\tilde{\Theta}\mathbf{v}_p = \mathbf{F} \quad (4.4.1)$$

$$2\tilde{\Theta}\dot{\Psi} + 2C_p\dot{v}_p + \frac{v_p}{R_1} = 0 \quad (4.4.2)$$

De posse das equações de movimento para o caso de um gerador bimorph em paralelo com uma massa concentrada na extremidade livre, pode-se determinar as FRFs de voltagem, corrente, potência elétrica e vibração mecânica.

As FRFs de saída de voltagem elétrica em torno do primeiro modo de vibrar são apresentadas na Fig. 4.4.2, para oito diferentes valores de resistências elétricas externas. Aqui também, a FRF é definida em termos da aceleração da gravidade (g). Pode-se observar que a amplitude da saída de voltagem elétrica aumenta com o aumento da carga resistiva no domínio elétrico, para toda a frequência de excitação aqui analisada. A frequência de ressonância em curto circuito (ou próxima a condição de curto circuito) é de 45,6 Hz, enquanto a frequência de ressonância de circuito aberto é de 48,4 Hz. As FRFs de voltagem elétrica do modelo EF da configuração em paralelo apresentam grande similaridade, mas com amplitude menores que as FRFs de voltagem elétrica do modelo EF da configuração em série.

Figura 4.4.2 - FRFs de tensão elétrica do modelo piezelétrico bimorph em paralelo conectado a um circuito elétrico resistivo.

As FRFs de saída de corrente elétrica são apresentadas na Fig. 4.4.3 para diferentes resistências elétricas. As amplitudes de correntes elétricas (modo fundamental) diminuem com o aumento da resistência elétrica em todas as faixas de frequência de excitação aqui analisadas, comportamento esse inverso obtido nas FRFs de tensão elétrica. As FRFs de corrente elétrica do modelo em EF da configuração em paralelo apresentam grande similaridade, mas com amplitudes maiores que as apresentadas pelas FRFs de corrente elétrica do modelo em EF da configuração em série.

Figura 4.4.3 - FRFs de corrente elétrica do modelo piezelétrico bimorph em paralelo conectado a um circuito elétrico resistivo.

As FRFs de potência elétrica são apresentadas na Fig. 4.4.4. Novamente a frequência de ressonância do sistema varia desde a frequência de curto circuito até a frequência de circuito aberto. Portanto, valor da máxima saída de potência elétrica ocorre entre a frequência de ressonância de curto circuito e circuito aberto, quando a amplitude aumenta até resistência elétrica ótima $R_1 = 22 \text{ K}\Omega$ e volta a diminuir com aumento da resistência elétrica até $R_1 = 470 \text{ K}\Omega$ na frequência de ressonância (48,4 HZ) do circuito aberto.

Figura 4.4.4 - FRFs de potência elétrica do modelo piezelétrico bimorph em paralelo conectado a um circuito elétrico resistivo

A FRFs de vibração mecânica (transmissibilidade) da Fig. 4.4.5 do gerador bimorph em paralelo são aqui também definidas como relação da amplitude da velocidade relativa da extremidade livre (em relação a velocidade da base engastada) pela aceleração gravitacional (g). A amplitude diminui desde $R_1 = 1 \text{ K}\Omega$ até $R_1 = 22 \text{ K}\Omega$ (onde apresenta valor mínimo) devido ao efeito shunt damping resistivo associado à geração piezelétrica de energia. A amplitude volta a aumentar com o aumento da resistência elétrica acima de $R_1 = 22 \text{ K}\Omega$, oscilando na frequência de ressonância (48,4 Hz) de circuito aberto.

Figura 4.4.5 - FRFs de vibração mecânica do modelo piezelétrico bimorph conectado a um circuito elétrico resistivo em paralelo.

Capítulo 5 - Conclusão

Um modelo por elementos finitos eletromecanicamente acoplado, baseado nas hipóteses de Kirchhoff, é apresentado para a representação de geradores piezelétricos de energia. Um circuito elétrico simplificado, composto por uma carga resistiva, é considerado no domínio elétrico do problema com o intuito de se estimar a potência elétrica gerada a partir das vibrações mecânicas do gerador piezelétrico. Vale ressaltar, porém, que qualquer circuito elétrico externo com componentes lineares pode ser representado no modelo apresentado. Para isso a admitância equivalente deve ser utilizada no lugar da admitância do circuito elétrico resistivo aqui considerado.

O modelo foi derivado a partir do Princípio Generalizado de Hamilton para corpos eletroelásticos. Neste ponto é importante destacar a correta diferenciação entre um problema de atuação e geração de energia. No primeiro a carga elétrica é à entrada do problema e no segundo a saída, alterando o sinal do trabalho elétrico no problema. Outro ponto relevante no modelo é o efeito dos eletrodos contínuos. A formulação apresentada forneceria um vetor de saídas elétricas (voltagem elétrica). Entretanto, uma transformação foi apresentada para modelar o efeito dos eletrodos, resultando em uma saída elétrica para o problema, um vetor de acoplamento eletromecânico e uma capacitância (escalar). Além de representar corretamente o problema tal transformação facilita a representação do sistema com várias camadas (bimorph) e mesmo a representação de eletrodos segmentados.

O modelo foi verificado com sucesso através da comparação com os resultados analíticos e experimentais encontrados na literatura para o problema de excitação harmônica de base para o caso de um gerador unimorph e de um gerador bimorph em série com uma massa concentrada e conectados a uma carga resistiva. Um ponto importante é a correta representação do termo forçante no problema de excitação de base (inércia da própria estrutura). Ainda, como o objetivo é gerar na frequência de ressonância (principalmente no modo fundamental) o amortecimento da estrutura é um fator importante para a precisão do modelo. A partir dos resultados apresentados (para os casos verificados na literatura) foi possível investigar o comportamento eletromecânico do sistema para diversas condições no domínio elétrico. Com a definição das funções resposta em frequência eletromecanicamente acopladas o sistema foi investigado desde a condição de curto circuito até circuito aberto. A

variação da condição de contorno elétrica induz a variação das propriedades mecânicas, resultando em uma frequência de ressonância em curto circuito e outra em circuito aberto. O efeito do acoplamento eletromecânico para o caso resistivo também implica em variação de amortecimento (efeito shunt damping resistivo). Assim, o efeito do acoplamento piezelétrico no domínio mecânico é mais sofisticado do que somente variação de amortecimento.

A conexão em paralelo dos pares de eletrodos cobrindo as camadas piezocerâmicas conectados externamente a uma carga resistiva favorece a maior saída de corrente elétrica, como observado no estudo de casos. Este caso pode ser vantajoso para se obter maior potência elétrica, já que a geração piezelétrica de energia fornece alta voltagem elétrica e baixa corrente elétrica. O comportamento eletromecânico do sistema (das saídas elétricas e mecânicas) foi analisado no domínio da frequência para o modo fundamental. Este modo de vibrar fornece a maior saída elétrica devido à maior amplitude de vibração e distribuição de deformação a ele associado.

O problema de geração piezelétrica de energia tem chamado a atenção de diversos grupos de pesquisa. As investigações aqui apresentadas devem auxiliar a análise do problema e abrem caminho para diversas aplicações que vêm surgindo na literatura. Particularmente no grupo de pesquisas do qual o autor faz parte. O modelo apresentado começa a ser utilizado para análises piezo-aeroelásticas, ou seja, geração piezelétrica de energia a partir de estruturas elásticas excitadas por um escoamento, o que abre caminho para aplicações aeronáuticas ou para o projeto de um gerador para ser associado com sistemas de baixo consumo em aplicações específicas.

5.2 - Sugestões para Trabalhos Futuros

O presente trabalho contribui nos fundamentos básicos para muitos outros trabalhos futuros, inicialmente como uma proposta promissora na análise da geração de energia empregando o método dos elementos finitos, o que contribui para o estudo de uma vasta gama de possíveis modelos de geradores piezelétricos de energia.

Os trabalhos futuros aqui propostos visam à associação de sistemas de geração piezelétrica de energia a sistemas de baixo consumo com fontes limitadas de energia. É claro que para estes casos circuitos elétricos mais elaborados devem ser desenvolvidos para a disponibilização apropriada da energia para alimentação de sistemas autônomos ou baterias, por exemplo.

Uma das propostas promissoras decorrentes deste trabalho é geração de energia através de geradores com eletrodos segmentados. O objetivo é otimizar a saída elétrica a partir de qualquer modo de vibrar da estrutura evitando-se o cancelamento da saída elétrica em modos diferentes do modo fundamental. Outra possibilidade é a geração piezo-aeroelástica com o conceito de uma asa geradora piezelétrica para aeronaves autônomas não-tripuladas (MAV ou UAV). O objetivo é atribuir uma função extra para a estrutura na conversão de energia de vibração em energia elétrica. Esta fonte adicional de energia poderá ser utilizada para a alimentação de sistemas eletrônicos de baixo consumo ou para recarregar baterias das aeronaves.

Outra possibilidade interessante é a associação da geração piezelétrica de energia com sistemas de verificação da integridade de estruturas (SHM). Tal associação poderá tornar os sistemas de SHM energeticamente autônomos, evitando a necessidade de trocas de baterias ou manutenções quando instalados em lugares remotos.

Capítulo 6 - Referências

- AJITSARIA, J.; CHOE, S. Y.; SHEN, D.; KIM, D. J. (2007). Modeling and analysis of a bimorph piezoelectric cantilever beam for voltage generation. *Smart Materials and Structures*, v. 16, p. 447-454.
- AKAYDIN, H. D.; ELVIN, N.; ANDREOPOULOS, Y. (2010). Energy harvesting from highly unsteady fluid flows using piezoelectric materials. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, City College of New York, NY, USA.
- ALLIK, H.; HUGHES, T. J. R. (1970). Finite element method for piezoelectric vibration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 2, p. 151-157.
- ANTON, S. R.; SODANO, H. A. (2007). A Review of power harvesting using piezoelectric materials 2003-2006. *Smart Mater. Struct.*, v. 16, p. R1-R21.
- ANTON, S. R.; INMAN, D.J. (2008). Vibration energy harvesting for unmanned air vehicles, smart structures and materials: *Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems II, Proceedings of the SPIE*, v. 6928, San Diego, CA, March p. 10-13.
- ANTON, S. R.; ERTURK, A.; KONG, N.; HA, D. S.; INMAN, D.J. (2009). Self-charging structures using piezoceramics and thin-film batteries. *Proceedings of the ASME Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems*, Oxnard, CA, p. 20-24, September
- ARNOLD, D.P. (2007). Review of microscale magnetic power generation. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 43, p. 3940-3951.
- BATHE, K.; WILSON, E.L. (1976). *Numerical methods in finite element analysis*. New Jersey, Prentice Hall. 1976.
- BATHE, K. J. (1996). *Finite element procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, p.363-1051.
- BEEBY, S. P.; TORAH, R. N.; TUDOR, M. J.; GLYNNE-JONES, P.; O'DONNELL, T.; SAHA, C. R.; ROY, S. (2007). A micro electromagnetic generator for vibration energy harvesting. *Journal of Micro-electromechanical Engineering*, v. 17, p. 1257-1265.
- BEER, F.P.; JOHNSTON JR. E.R. (1992). *Mechanics of materials*. McGraw-Hill, New York, 1992.
- BENINI, G. R.; BELO, E. M.; MARQUES, F. D. (2004). Numerical model for the simulation of fixed wings aeroelastic response. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences & Engineering*, v. 26, p. 129-136.

- BENT, A. A. (1994). *Piezoelectric fiber composites for structural actuation*. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, EUA.
- BILGEN, O.; KOCHERSBERGER, K.; DIGGS, E.; KURDILA.; A.; INMAN, D. J. (2007). Morphing wing micro-air-vehicles via macro-fiber-composite actuators. 48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, *Structural Dynamics, and Materials Conference*, Honolulu, Hawii.
- CADY, W. G. (1946). *Piezoelectricity: an introduction to the theory and applications of electromechanical phenomena in crystal*. McGraw-Hill Book Company - N. York and London.
- CHEN, S. N.; WANG, G. J.; CHIEN, M. C. (2006). Analytical modeling of piezoelectric vibration induced micro power generator. *Mechatronics*, v. 16, p. 387-397.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. (1975). *Dynamics of structure*. New York. McGraw-Hill International Editions.
- COOK-CHENNAUT, K. A.; THAMBI, N.; SASTRY, A. M. (2008). Powering MEMS portable devices - A review of nonregenerative and regenerative power supply systems with emphasis on piezoelectric energy harvesting systems. *Smart Materials and Structures*, v. 17, p. 1-33.
- CRAIG JR., R. R. (1981). *Structural Dynamics - An introduction to computer methods*. John Wiley and Sons, New York, pg. 542.
- CRANDALL S. H.; KARNOPP, D. C.; KURTZ JR E. F.; PRIDMORE-BROWN D. C. (1968). *Dynamics of mechanical and electromechanical systems*. McGraw-Hill, New York.
- CURIE, J.; CURIE, P. (1880). Développement, par pression, de l'électricité polaire dans les cristaux hémiedres à faces inclinées. *Comptes Rendus de l'Académie Sciences*, v. 91, p. 294-5.
- DA ROCHA, T. L. (2004). *Modelagem de estruturas inteligentes*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista, Campus Ilha Solteira, SP, Brasil.
- DE MARQUI, C.; ERTURK, A.; INMAN, D. J. (2009a). An electromechanical finite element model for piezoelectric energy harvester plates. *Journal of Sound and Vibration*, v. 327, p. 9-25.
- DE MARQUI, C.; ERTURK, A.; INMAN, D.J. (2009b). Piezoaeroelastically coupled modeling and analysis of electrical power generation and shunt damping for a cantilevered plate. *Proceedings of the 17th International Conference on Composite Materials*, Edinburgh, UK, p. 27-31.
- DE MARQUI, C.; ERTURK, A.; INMAN, D. J. (2009c). Finite element analysis of a UAV wing spar with piezoceramics for vibration energy harvesting. 50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, *Structural Dynamics, and Materials Conference*.

- DE MARQUI, C.; ERTURK, A.; INMAN, D.J. (2009d). Effect of segmented electrodes on piezo-elastic and piezo-aero-elastic responses of generator plates. *Proceedings of the ASME 2009 Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems*, SMASIS2009, September 20-24, Oxnard, California, USA.
- DETWILER, D. T.; SHEN, M. H. H.; VENKAYA, V. B. (1995). Finite element analysis of laminated composite structures containing distributed piezoelectric actuators and sensors. *Finite elements in analysis and design*, v. 20, p. 87-100.
- DIETL, J. M.; GARCIA, E. (2010). Beam shape optimization for power harvesting. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures OnlineFirst*, published on March 1.
- DODEMANT, L. R. (2007). *Multifunctional structures for spacecraft: embedded lithium-ion batteries*. MSc Thesis Cranfield University.
- DUTOIT, N. E., (2005a). *Modeling and design of a MEMS piezoelectric vibration energy harvester*. Master of Science in Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, USA.
- DUTOIT, N. E.; WARDLE, B. L.; KIM, S. G. (2005b). Design considerations for MENS-Scale piezoelectric mechanical vibration energy Harvesters. *Integrated Ferroelectric*, v. 71, p. 121-160.
- DUTOIT, N. E.; WARDLE, B. L. (2006). Experimental verifications of models for microfabricated piezoelectric vibration energy harvesters. *AIAA Journal*, v. 45, p. 1126-1137.
- ELVIN, N. G.; ELVIN, A. A. (2009). A General equivalent circuit model for piezoelectric generators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 20(1), p. 3-9.
- ERTURK, A.; INMAN, D. J. (2008a). On mechanical modeling of cantilevered piezoelectric vibration energy harvesters. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* In press, v.1, p. 1-12.
- ERTURK, A.; INMAN, D. J. (2008b). Issues in mathematical modeling of piezoelectric energy harvesters. *Smart Materials and Structure in Press*. v. 131.
- ERTURK, A.; INMAN, D. J. (2008c). A Distributed parameter electromechanical model for cantilevered piezoelectric energy harvesters. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, v.130.
- ERTURK, A.; INMAN, D. J. (2009a). An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations. *Smart Materials and Structures*, v.18.
- ERTURK, A.; INMAN, D. J. (2009b). Electromechanical modeling of cantilevered piezoelectric energy harvester for persistent base motions. *Energy Harvesting Technologies*, Ed. Springer Science-Business Media, p. 41-76.

- ERTURK, A.; RENNO, J. M.; INMAN, D. J. (2009c). Modeling of piezoelectric energy harvesting from an l-shaped beam-mass structure with an application to UAVs. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 20, p. 529-544.
- GLYNNE-JONES, P.; TUDOR, M. J.; BEEBY, S. P.; WHITE, N. M. (2004). An electromagnetic, vibration-powered generator for intelligent sensor systems. *Sensors and Actuators*, v. 110, p. 344-349.
- HAGOOD, N. W.; CHUNG, W. H.; VON FLOTOW, A. (1990). Modelling of piezoelectric actuator dynamics for active structural control. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 1, p. 327-354.
- HAGOOD, N. W.; VON FLOTOW, A. (1991). Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical network. *Journal of Sound and Vibration* v.146 (2), p. 243-268.
- HWANG, W. S.; PARK, H. C. (1993). Finite element modelling of piezoelectric sensors and actuators. *AIAA Journal*, v. 31p. 930-937.
- IEEE Std 176. (1978). *Standard on Piezoelectricity*. The Institute of Electrical and Electronics Engineers, p. 9-14.
- IEEE. (1987). *Standard on Piezoelectricity*. The institute of electrical and electronics Engineers, New York.
- JEON , Y. B.; SOOD, R.; JEONG, J. H.; KIM, S. (2005). MEMS power generator with transverse mode thin film PZT. *Sensors and Actuators, A*, v. 122, p. 16-22.
- LIMA JR, J. J. *Modelagem de sensores e atuadores piezelétricos com aplicações em controle ativo de estruturas*. Tese de Doutorado. Departamento de Mecânica Computacional, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Brasil, 1999.
- LIPPMAN, G. (1881). Principe de la conservation de L'electricité. *Ann. Chim. (Paris)*. v. 24, p. 145-178.
- LU, F.; LEE, H.; LIM, S. (2004). Modeling and analysis of micro piezoelectric power generators for micro-electromechanical-systems applications. *Smart Materials and Structures*, v.13, p.57-63.
- MAGOTEAUX, K. C.; SANDERS, B.; SODANO, H. A. (2008). Investigation of energy harvesting small unmanned air vehicle. *Smart Structures and Materials, Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems II, Proceedings of the SPIE*, v. 6928, San Diego, CA, March, p. 10-13.
- MANNA, B. P.; SIMS, N. D. (2009). Energy harvesting from the nonlinear oscillations of magnetic levitation. *Journal of Sound and Vibration*, v.319, p.515-530.
- MASON, W. P. (1950). *Piezoelectric crystals and their applications to ultrasonic's*. New York. Van Nostrand, p.34.

- MASON, W. P. (1984). Electrostrictive effect in barium titanate ceramics. *Physical Review*, v.74, p.1134.
- MEIROVITCH, L. (1970). *Methods of analytical dynamics*. New York. McGraw-Hill Company.
- MITCHESON, P.; MIAO, P.; START, B.; YEATMAN, E.; HOLMES, A.; GREEN, T. (2004). MEMS electrostatic micro-power generator for low frequency operation. *Sensors and Actuators, A* v.115, p. 523-529.
- NEY, J. F. (1957). *Physical properties of crystals*. Clarendon Press, Oxford.
- NUSSENZVEIG, H. M. (1997). *Curso de física básica : 3 - Eletromagnetismo*. Editora Edgard Blucher Ltda cap. 4, p. 41-73.
- OTTOMAN G. K.; HOLFMANN H. F.; LESIEUTRE G A. (2002). Optimized piezoelectric energy harvesting circuit using step-down converter in discontinuous conduction mode. *Proc. of IEEE's 33rd, Annual Power Electronics Specialists Conf.* (Cairns, Queensland, Australia, June, p. 23-27).
- OTTOMAN G. K.; HOLFMANN H. F.; BHATT A. C.; LESIEURE G. A. (2003). Adaptive piezoelectric energy harvesting circuit for wireless remote Power Supply. *IEEE Transactions on Power Electronics*, v.17, p.669-676.
- PINES, D. J.; BOHORQUEZ, F. (2006). Challenges facing future micro-air-vehicle development. *Journal of Aircraft*, v.43, p.290-305.
- PRIYA, S. (2007). Advance in energy harvesting using profile piezoelectric transducers. *Journal of Electroceramics*, v.19, p.167-184.
- REDDY, J. N. (1997). *Mechanics of laminated plates: theory and analysis*. (Boca Raton, FL: Chemical Rubber Company).
- ROUNDY, S.; WRIGHT, P. K.; RABAEY, J. M. (2002). Micro-electrostatic vibration-to-electricity converters. *Proceedings of the ASME 2002 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*.
- ROUNDY, S.; WRIGHT, P. K.; RABAEY, J. M. (2003). A Study of low level vibrations as a power Source for wireless sensor nodes. *Comput. Commun.*, v. 26, p. 1131-1144.
- ROUNDY, S.; LELAND, E. S.; BAKER, J.; CARLETON, E.; REILLY, E.; LAY, E., OTIS, R.; RABAEY, J. M.; WRIGTH, P. K.; SUNDARARAJAN, V. (2005). Improving power output for vibration-based energy scavengers. *Pervasive Computer.*, January-March, v. 4, p. 28-36.
- SANTANA, D. C. (2007). *Modelagem numérica e otimização de shunts piezelétricos aplicados ao controle passivo de vibrações*. Doutorado em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Uberlândia, p. 11-36.

- SARAVANOS, D. A.; HEYLIGER, P. R.; HOPKINS, D. A. (1997). Layerwise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plates. *International Journal of Solids and Structures*, v. 34 (3), p. 359-378.
- SCHIMIDT, V. (1986). Theoretical electrical power output per unit volume of PVF 2 and mechanical-to-electrical conversion efficiency as functions of frequency. *186 IEEE International Symposium on Applications of Ferroelectrics*, Bethlehem PA, IEEE, Piscataway, NJ USA, p. 538-42.
- SODANO, H. A.; INMAN, D. J.; PARK, G. (2004a). A review of power harvesting from vibration using piezoelectric materials. *Shock and Vibration Digest*, v. 36, n. 3, p. 197-205.
- SODANO, H. A.; PARK, G.; INMAN, D. J. (2004b). Estimation of electric charge output for piezoelectric energy harvesting. *Strain*, v. 40, p. 49-58.
- STANER, T.; PARADISO, J. A. (2004). Energy scavenging for mobile and wireless electronics. *Energy Harvesting and Conservation*, Published by IEEE CS and IEEE ComSoc, Pervasive computing, p. 18-27.
- TIERSTEN, H. F.; MINDLIN, R. D. (1962). Forced vibration of piezoelectric crystal plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 20, n. 2, p. 107-119.
- TIERSTEN, H. F. (1969). Hamilton's principle for linear piezoelectric media. in *Proceedings of the IEEE*, p.1523-1524.
- TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. (1951). *Theory of elasticity*. 2nd Edition, McGrawHill, New York.
- TZOU, H. S.; TSENG, C. I. (1990). Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement/control of distributed parameter systems: A Piezoelectric Finite Element Approach. *Journal Sound and Vibration*, v. 138(1), p. 17-34.
- VIEIRA, W. G. R.; DE MARQUI, JR. C.; ERTURK, A.; INMAN, D. J. (2010). Modeling and analysis of piezoelectric energy harvesting from Aeroelastic vibrations using the doublet-lattice method. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*.
- WILLIAMS, C. B.; YATES, R. B. (1996). *Analysis of a micro-electric generator for microsystems*. *Transducers 95/Eurosensors*, v. 9, p. 369-72.

São Carlos, 5 de julho de 2010.

Reinaldo Cesar

Orientador - Prof. Dr. Carlos De Marqui Junior