RUI MARCOS GROMBONE DE VASCONCELLOS

*Reconstrução de Espaços de Estados Aeroelásticos por
Decomposição em Valores Singulares*

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos, da Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos para a obtenção do
título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Aeronaves
Orientador: Prof. Assoc. Flávio Donizeti
Marques

São Carlos

2007

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Flávio Donizeti Marques pela oportunidade da realização desse trabalho e pela orientação.

A todos os professores, colegas e funcionários que de alguma forma contribuíram para a realização desse trabalho.

À minha família, sempre muito presente, especialmente aos meus pais, Luiz e Amélia, por estarem sempre participando de cada etapa de minha vida, dando conselhos valiosos.

À Flávia, uma pessoa muito especial, sempre motivadora, ao meu lado em todos os momentos.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela bolsa de estudos concedida.

Finalmente a Deus, responsável por todas minhas conquistas.

CONTEÚDO

Resumo

Abstract

Lista de Símbolos e Acrônimos

1-Introdução

1.1- Introdução.	1
1.2- Modelagem aeroelástica não-linear.	3
1.3- Análise experimental de respostas aeroelásticas não-lineares.	4
1.4- Objetivos do trabalho.	7
1.5- Organização da dissertação.	8

2- Dinâmica Não-linear e Reconstrução do Espaço de Estados

2.1- Introdução.	10
2.2- Sistemas dinâmicos lineares e não-lineares.	12
2.3- Sistemas dinâmicos unidimensionais e bidimensionais.	15
2.4- Bifurcação.	21
2.5- Sistemas dinâmicos tridimensionais e caos.	24
2.6- Reconstrução do espaço de estados.	30

3- Decomposição em Valores Singulares: Filtragem e Reconstrução do Espaço de Estados

3.1- Introdução.	35
3.2- Sinais ou séries temporais.	36
3.3- Análise de sinais em tempo e frequência: Análise de Fourier.	38
3.4- Filtros digitais.	43
3.5- O método da decomposição em valores singulares para filtragem e reconstrução do espaço de estados.	47
3.6- Aplicação do SVD na série temporal do modelo de Lorenz.	53

4- Análise de Séries Temporais Aeroelásticas utilizando SVD

4.1- Introdução.	61
4.2- Descrição do experimento.	62
4.3- Análise em frequência de séries temporais aeroelásticas.	72
4.3.1- Evolução do espectro de frequências com a variação da velocidade do escoamento: caso de flexão.	72
4.3.2- Evolução do espectro de frequências com a variação da frequência de oscilação da plataforma: caso de flexão.	75
4.3.3- Evolução do espectro de frequências com a variação da velocidade do escoamento: caso de torção.	78
4.3.4- Evolução do espectro de frequências com a variação da frequência de oscilação da plataforma: caso de torção.	81

4.4- Reconstrução do espaço de estados de séries temporais aeroelásticas utilizando SVD...	83
4.4.1- Evolução do espaço de estados com a variação da velocidade do escoamento: caso de flexão.	84
4.4.2- Evolução do espaço de estados com a variação da frequência de oscilação da plataforma: caso de flexão.	91
4.4.3- Evolução do espaço de estados com a variação da velocidade do escoamento: caso de torção.	99
4.4.4- Evolução do espaço de estados com a variação da frequência de oscilação da plataforma: caso de torção.	107
4.5- Filtragem de séries temporais aeroelásticas usando SVD.	115
 5- Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	 121
 6- Referências Bibliográficas	 123

RESUMO

VASCONCELLOS, R. M. G. (2007). *Reconstrução do Espaço de Estados Aeroelásticos por Decomposição em Valores Singulares*. São Carlos, 2007. 127p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Analisar fenômenos aeroelásticos não-lineares através de dados experimentais é uma poderosa ferramenta para a identificação e controle de comportamentos aeroelásticos adversos. A modelagem matemática de sistemas aeroelásticos não-lineares não é trivial, fato que muitas vezes leva a admissão de simplificações, afastando o modelo da realidade. Desta forma, a análise de sistemas dinâmicos sem a necessidade de um modelo, feita através da análise de séries temporais obtidas de experimentos, pode fornecer melhores resultados. Alguns métodos de análise de séries temporais, como o Método da Defasagem, para reconstrução do espaço de estados, são sensíveis ao ruído, inevitavelmente presente em qualquer série temporal experimental. Este trabalho apresenta a técnica da Decomposição em Valores Singulares (SVD), que reconstrói o espaço de estados eliminando o ruído presente na série temporal em um único processo. O método SVD é aplicado em séries temporais aeroelásticas, obtidas experimentalmente de um modelo de asa ensaiado em túnel de vento. Com os espaços de estados reconstruídos, é feita uma análise qualitativa do sistema aeroelástico, a evolução dos atratores obtidos com a variação de alguns parâmetros é apresentada. Comparações com o método da defasagem são realizadas com a aplicação dos métodos a uma série temporal aeroelástica do experimento. Os resultados mostram que a técnica (SVD) é mais confiável que o método da defasagem, os atratores obtidos revelam a ocorrência de bifurcações e comportamentos complexos, possivelmente caóticos.

Palavras-chave: Fenômenos aeroelásticos, Séries temporais, Reconstrução do espaço de estados, Decomposição em valores singulares.

ABSTRACT

VASCONCELLOS, R. M. G. (2007). *Aeroelastic State Space Reconstruction by Singular Value Decomposition*. São Carlos, 2007. 127p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Nonlinear aeroelastic phenomena analysis by using experimental data is a powerful tool for identification and control of adverse aeroelastic behaviors. Mathematical models for nonlinear aeroelastic systems are not trivial, by this, simplifications are assumed, thereby deviating from reality. Then, the analysis of dynamic systems without the need of a mathematical model, done by the analysis of experimental time series, may provide better results. However, methods of time series analysis, like the Method of Delays, for state space reconstruction are sensitive to noise, unavoidably present in experimental data. This work presents the application of Singular Value Decomposition (SVD) that reconstructs the state space, eliminating noise present in the time series. The SVD method is applied in experimental aeroelastic time series, obtained from a wind tunnel wing model. With the reconstructed state spaces, qualitative analyses are done and the evolutions of the obtained attractors with parametric variation are presented. Comparisons with the Method of Delays are realized by applying MOD and SVD in a same experimental aeroelastic time series. The results show that the SVD method is more reliable than MOD and the obtained attractors reveal the occurrence of bifurcations and complex behavior, possibly chaotic.

Keywords: Aeroelastic phenomena, Time series, State space reconstruction, Singular value decomposition.

LISTA DE SÍMBOLOS

b	Parâmetro do sistema de Lorenz
c	corda da asa ¹
$\mathbf{C}$	Matriz de autovetores da matriz de covariância
$\mathbf{c}_i$	Autovetor da matriz de covariância
c_k	Coefficiente de Fourier
$C(\rho)$	Função de autocorrelação
$C^d(\rho)$	Integral de Correlação
$\mathbf{D}$	Matriz diagonal de valores singulares
d	Dimensão de imersão
E	Operador valor esperado
$\mathbf{e}_i$	Vetor unitário de uma base ortonormal
$e^{-j\theta}$	Representação complexa
f_c	Maior frequência significativa
H	Função degrau
$H [\]$	Operador Filtro digital
$I(\tau)$	Informação mútua em função da defasagem
k	Frequência reduzida
m	massa
n	Janela temporal necessária ao método SVD

1- Todas as unidades estão no Sistema Internacional

n'	Dimensão do sistema dinâmico
N	Número total de pontos em uma série temporal
P	Pontos da secção de Poincaré
r	raio
$\mathbf{S}$	Matriz de autovetores da matriz de estrutura
$\mathbf{s}_i$	autovetor da matriz de estrutura
$s(t)$	Série temporal
$s(n)$	Enésimo termo da série temporal
$s[n]$	Seqüência formada pelas amostras da série temporal
s_{ai}	Medida de uma variável de um sistema
s_{bj}	Medida de uma variável de um sistema
S_a	Sistema
S_b	Sistema
T	Período
T_0	Período fundamental
TrJ	Traço da matriz Jacobiana
T_s	Intervalo de amostragem do sinal ou série temporal
$\mathbf{u}[n]$	Matriz da dinâmica reconstruída
V	Velocidade do escoamento aerodinâmico
X	Variável estatística aleatória

$X(\omega)$ Transformada de Fourier

$\mathbf{X}$ Matriz de trajetória

$\mathbf{x}_i^T$ Vetor de estado transposto

$\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ Matriz de estrutura

$x(t)$ Sinal ou série temporal

$x[t]$ Seqüência formada pelas amostras de um sinal ou série temporal

$\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ Matriz de covariância

Y Variável estatística aleatória

α_A Amplitude de variação no ângulo de ataque em graus

β Parâmetro do sistema de Lorenz

δ Parâmetro de sistema

Δ Determinante da matriz Jacobiana

ε Separação entre duas trajetórias vizinhas no espaço de estados

Γ Função massa de probabilidade

γ Expoente de Lyapunov

η Constante elástica

λ Autovalor

Λ Matriz de covariância

θ Ângulo em graus

ϑ Parâmetro do sistema de Lorenz

Σ Somatória

ρ	Distância mútua entre dois pontos de um atrator
σ	Autovalor da matriz de covariância ou valor singular
σ^2	Variância
σ_{xy}	Covariância
τ	Defasagem ou atraso no tempo
ω	Frequência
Ω	Frequência para tempo discreto
$\langle \xi^2 \rangle$	Perturbação provocada pelo ruído
$\mathfrak{F}\{ \}$	Operador Transformada de Fourier
$*$	Operador Convolução
$[^*]$	Complexo Conjugado

ACRÔNIMOS

DFT	Discrete Fourier Transform (Transformada de Fourier Discreta)
FFT	Fast Fourier Transform (Transformada de Fourier Rápida)
FIR	Finite Impulse Response (Resposta Infinita ao Impulso)
IIR	Infinite Impulse Response (Resposta Finita ao Impulso)
MOR	Modelos de ordem reduzida
MOD	Method of Delays (Método dos Atrasos ou da Defasagem)
SVD	Singular Value Decomposition (Decomposição em Valores Singulares)

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1- Introdução

A aeroelasticidade estuda a interação entre a deformação de uma estrutura elástica em um escoamento aerodinâmico e o esforço inercial resultante.

Fenômenos aeroelásticos podem causar perigosas deformações e instabilidades, sendo por isso, de grande importância prática em aeronáutica. Quando se trata do projeto de aeronaves modernas, caracterizado pela demanda por estruturas leves, a solução de problemas aeroelásticos é um requisito básico para uma relação ótima entre desempenho e segurança.

Pode-se dividir a aeroelasticidade em estática e dinâmica. A aeroelasticidade estática estuda a interação entre o carregamento aerodinâmico induzido por um escoamento estacionário, ou seja, um escoamento onde as medidas dos parâmetros, como velocidade e pressão, não variam com o tempo, e a deformação elástica resultante da superfície sustentadora. A reversão de comando e a divergência são fenômenos aeroelásticos causados por instabilidade estática da superfície sustentadora.

Em aeroelasticidade dinâmica, estuda-se a interação entre o carregamento aerodinâmico, a deformação elástica resultante da superfície de sustentação e os efeitos das forças inerciais. O *flutter* é um fenômeno aeroelástico dinâmico, caracterizado por vibrações auto-excitadas que

aumentam em amplitude, geralmente causando a destruição da superfície afetada (HODGES; PIERCE, 2002).

Teorias clássicas em aeroelasticidade assumem a estrutura da aeronave e aerodinâmica lineares, resultando em um conjunto de equações que podem ser resolvidas com certa facilidade. Durante décadas a abordagem aeroelástica clássica obteve sucesso fornecendo respostas aeroelásticas de aeronaves à rajadas, turbulência e excitações externas. A previsão das condições críticas de *flutter* também era próxima da obtida em ensaios experimentais.

No entanto, quando a velocidade do escoamento aumenta, atingindo os regimes alto-subsônico ou transônico, as hipóteses lineares falham. A separação do escoamento e o surgimento de ondas de choque também introduzem fenômenos não explicados pela aeroelasticidade linear, como as oscilações em ciclo-limite.

Em pás de helicópteros, por exemplo, é muito comum a ocorrência de estol dinâmico. Esse fenômeno ocorre quando o ângulo de ataque aumenta rapidamente, gerando um pico de sustentação seguido de estol. O estol dinâmico coloca limites no envelope operacional de helicópteros militares durante manobras, vôos em alta velocidade e operações em altitudes de alta densidade (MARTIN et al., 2003). A aerodinâmica envolvida no estol dinâmico é muito complexa, não pode ser descrita linearmente e sua modelagem numérica é muito difícil.

A estrutura da aeronave também pode ser fonte de não-linearidades. Efeitos não lineares podem surgir do desgaste das articulações das superfícies de comando, do comportamento do próprio material utilizado na estrutura e de várias outras fontes (LEE; PRICE; WONG, 1999).

Sendo assim, torna-se evidente a importância do estudo dos comportamentos aeroelásticos não-lineares para a segurança e para o desenvolvimento aeronáutico. O estudo de sistemas dinâmicos não-lineares pode ser baseado em modelos matemáticos ou experimentos.

1.2 Modelagem aeroelástica não-linear

A modelagem matemática de sistemas aeroelásticos não-lineares é complexa. Segundo Marques (1997), para aplicações aeroelásticas, o modelo aero-estrutural ideal seria aquele baseado em soluções das equações de mecânica dos fluidos, que considerassem escoamento não-estacionário, compressível e viscoso, simultaneamente com as equações do movimento. No entanto, as soluções das equações da mecânica dos fluidos podem ser obtidas somente por meio de técnicas numéricas ou métodos de Dinâmica de Fluidos Computacional, de alto custo computacional. Isso motivou a aplicação dos chamados Modelos de Ordem Reduzida (MOR).

Segundo Silva (1999), um modelo de ordem reduzida é um modelo matemático desenvolvido para ser uma representação simplificada de um sistema dinâmico. Sua complexidade reduzida diminui o custo computacional (MARQUES, 2002). Incluem-se nessa classe os modelos baseados em métodos semi-empíricos, funcionais e redes neurais artificiais.

Os métodos semi-empíricos utilizam-se de dados experimentais combinados a cálculos matemáticos para modelar um sistema. Esses métodos possuem a vantagem de serem rápidos computacionalmente, precisam, no entanto de dados experimentais precisos e específicos (MARQUES, 1997). Métodos semi-empíricos são largamente utilizados na modelagem aerodinâmica não-estacionária. Tran e Petrot (1981) e Mahajan, Kaza e Dowell (1993) aplicaram esses métodos em seus trabalhos.

A série de Volterra é uma representação funcional importante na identificação de sistemas dinâmicos. Ela descreve a saída de um sistema dinâmico como uma soma de operadores-resposta de ordem crescente, generalizando a série de Taylor para funcionais (VOLTERRA, 1959).

Para sistemas não-lineares, a identificação requer o cálculo dos núcleos de ordem mais elevadas da série de Volterra, o que não é tarefa fácil, fato que leva a aproximações, como

assumir a existência de uma única não-linearidade fraca no sistema. Em aeroelasticidade, esse método foi aplicado por Silva (1999), Silva (2001) e Marzocca, Librescu e Silva (2002).

Redes neurais têm sido utilizadas com sucesso na engenharia e em outras áreas com diversas funções, inclusive na identificação de sistemas. Uma Rede Neural artificial é um conjunto de unidades processadoras que podem adquirir conhecimento através de um treinamento e armazená-los. Para o treinamento de redes neurais são utilizados dados de experimentos ou de simulações numéricas (FALLER; SCHECK, 1996). Marques (1997), Marques (2002) e Silva (2005) aplicaram redes neurais artificiais em estudos envolvendo aerodinâmica não-estacionária.

Modelos matemáticos são muito úteis, pois podem reduzir substancialmente o custo e o tempo de um projeto, no entanto, dados experimentais têm grande importância, pois são necessários para o desenvolvimento de modelos, seja no funcionamento ou na validação dos mesmos.

A modelagem matemática para a resposta aeroelástica associada a fenômenos como o estol dinâmico, são muito difíceis de obter. Nesses casos, dados experimentais podem prover uma base mais sólida para a análise não-linear do sistema dinâmico (MARQUES et al., 2004).

1.3- Análise experimental de respostas aeroelásticas não-lineares

As respostas típicas de sistemas não-lineares podem ser analisadas através de sinais experimentais por análise em frequência ou reconstrução do espaço de estados. A análise em frequência ou análise espectral, além de trazer informações sobre as frequências de oscilação do sistema, pode ser utilizada, com restrições, na identificação de comportamento caótico do sistema (MOON, 1992).

A reconstrução do espaço de estados baseia-se no teorema da imersão de Takens (1981), segundo o qual uma série temporal possui informação sobre todos os estados não observáveis de um sistema. Partindo dessa série temporal pode-se reconstruir um espaço de estados semelhante ao original, preservando invariantes do sistema, como a dimensão do atrator e os expoentes de Lyapunov, indicativos da presença de comportamento caótico.

Existem diferentes métodos para a reconstrução do espaço de estados, entre eles o método da defasagem (MOD) e o método da decomposição em valores singulares (SVD). O método da defasagem é o mais explorado na literatura, tendo sido proposto inicialmente por Ruelle (1979) e posteriormente por Packard et al. (1980) e Takens (1981). Este método adota uma defasagem no tempo (τ), gerando coordenadas defasadas de dimensão d , partindo da série temporal. Tanto a defasagem quanto a dimensão, devem ser pré-determinadas por outros métodos.

Marques et al. (2004) utilizaram o método da defasagem para reconstruir o espaço de estados partindo de séries temporais aeroelásticas obtidas em um ensaio experimental com um modelo de asa em túnel de vento. O método da defasagem tem se mostrado robusto o suficiente para caracterizar sistemas não-lineares, partindo de séries temporais livres de ruído. Porém, a presença inevitável de ruídos em séries experimentais pode levar a imprecisões, deformando o espaço de estados, fato que pode resultar em conclusões arbitrárias (CASDAGLI et al., 1991).

Os efeitos do ruído na reconstrução do espaço de estados podem ser minimizados através de técnicas de filtragem de sinais. A série temporal pode ser filtrada durante a aquisição por filtros analógicos, construídos eletronicamente. Porém, essa filtragem muitas vezes não é suficiente para garantir uma boa relação sinal-ruído. Nesses casos a filtragem digital, realizada posteriormente em um computador, pode produzir bons resultados (SMITH, 1999).

Existem muitos tipos de filtros digitais, cada um com sua característica, vantagens e desvantagens. A aplicação de filtros digitais pode provocar defasagem ou deformações no sinal,

fato que torna necessária a busca por filtros mais robustos e complexos.

Na busca de um método de reconstrução que não estivesse sujeito aos efeitos negativos do ruído, Broomhead e King (1986) desenvolveram uma técnica de reconstrução via decomposição em valores singulares (SVD). Esta técnica permite que, durante um único processo, a série temporal seja filtrada, a dimensão do atrator seja conhecida e o espaço de estados seja reconstruído de maneira eficiente, sem os problemas causados pela filtragem comum.

A técnica da decomposição em valores singulares, também conhecida como análise do espectro singular, tem muitas aplicações em várias áreas tecnológicas como em telecomunicações e no processamento de imagens. Ela pode ser usada simplesmente para a filtragem de um sinal com ruído ou para a reconstrução do espaço de estados em estudos meteorológicos, geofísicos, mecânicos e muitos outros.

Athanasias & Pavlos (2001) utilizaram a decomposição em valores singulares na análise da série temporal do índice auroral magnetosférico. A técnica foi largamente utilizada para extrair a dinâmica de séries contaminadas por ruído, os trabalhos de Broomhead & King (1986), Fraedrich (1986), Vautard & Ghil (1989) e Vautard et al. (1992) são alguns exemplos dessa aplicação. Kugiumtzis e Christophersen (1997) compararam o método da Decomposição em Valores Singulares com o Método da Defasagem para reconstrução do espaço de estados e concluíram que em sinais ruidosos, o método SVD tem desempenho superior ao MOD devido à sua capacidade de filtragem, Allen & Smith (1997) generalizaram essa capacidade para os casos de contaminação por ruído colorido, Moura (1998) utilizou as propriedades da filtragem SVD em seu trabalho para eliminação ou atenuação de ruídos em dados de campo magnético.

A técnica da decomposição em valores singulares para a reconstrução do espaço de estados funciona buscando em uma parte do sinal os estados de maior variância e arranjando-os em uma representação ortogonal. Como resultado, parte do ruído que ocupa todas as dimensões é

descartada e o próprio processo de ortogonalização filtra o ruído das dimensões que não foram descartadas.

Isso torna a decomposição em valores singulares uma poderosa e eficiente ferramenta para a análise experimental de sistemas dinâmicos não-lineares, inclusive sistemas dinâmicos aeroelásticos.

1.4- Objetivos do trabalho

O objetivo do trabalho é reconstruir os espaços de estados de séries temporais aeroelásticas com o método da decomposição em valores singulares, eliminando assim a interferência do ruído, para a análise da dinâmica envolvida. Um modelo de asa equipado com sensores extensométricos é ensaiado em túnel de vento para captação da resposta aeroelástica. O ensaio consiste em expor um modelo de asa fixo a uma plataforma giratória ao escoamento aerodinâmico com variação do ângulo de incidência e da velocidade do escoamento. Não-linearidades são introduzidas através da variação no tempo de valores altos do ângulo de incidência, gerando o fenômeno de estol dinâmico.

As séries temporais aeroelásticas serão filtradas por SVD para uma análise em frequência, através da Transformada de Fourier do sinal. Os espaços de estados das mesmas séries temporais aeroelásticas são reconstruídos via SVD para uma análise qualitativa da dinâmica e para comparação com o resultado da análise em frequência. A evolução dos atratores com a variação de alguns parâmetros também é apresentada.

As respostas aeroelásticas obtidas através dos extensômetros são filtradas pelos filtros de mínimos quadrados, mediana, média móvel e por SVD para comparação. Sem nenhum tipo de filtragem, uma série temporal é exposta aos dois métodos de reconstrução do espaço de estados,

MOD e SVD para efeito de comparação.

Com os resultados obtidos, espera-se demonstrar, como contribuições desse trabalho, que é possível reconstruir o espaço de estados de séries temporais aeroelásticas contaminadas por ruído com segurança e que a técnica da decomposição em valores singulares, tanto para filtragem quanto para reconstrução do espaço de estados, pode ser mais eficiente que o método a defasagem para a análise de sistemas dinâmicos aeroelásticos não-lineares.

1.5- Organização da dissertação

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos. O Capítulo 1 apresenta alguns conceitos da Aeroelasticidade, mostra as abordagens possíveis para o estudo de sistemas aeroelásticos não-lineares: a modelagem matemática e a análise experimental, discutindo as vantagens e desvantagens de cada uma, mostrando por que a análise experimental tem se mostrado tão importante na caracterização de sistemas dinâmicos não-lineares, fato que motiva a busca por métodos mais precisos para a análise experimental.

O Capítulo 2 apresenta conceitos da dinâmica não-linear e da reconstrução do espaço de estados, apresentando o Método da Defasagem (MOD) e as técnicas necessárias para a determinação dos parâmetros exigidos na sua utilização. São discutidas também as deficiências do Método da Defasagem na reconstrução do espaço de estados com séries temporais contaminadas pelo ruído.

No Capítulo 3 são exibidas noções de análise de sinais e filtragem digital. O método da Decomposição em Valores Singulares (SVD) é apresentado e sua utilização na filtragem de séries temporais e na reconstrução do espaço de estados são mostradas com a aplicação do método a uma série temporal obtida do modelo de Lorenz, contaminada por ruído gerado por computador.

O Capítulo 4 descreve o procedimento experimental para a aquisição dos dados aeroelásticos utilizados e mostra os resultados da aplicação do método da decomposição em séries temporais aeroelásticas obtidas do experimento. Comparações entre o Método da Defasagem e o da Decomposição em Valores Singulares são feitas com a aplicação dos dois métodos a uma das séries obtidas experimentalmente.

As conclusões e algumas sugestões para trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 5.

CAPÍTULO 2

DINÂMICA NÃO-LINEAR E RECONSTRUÇÃO DO ESPAÇO DE ESTADOS

2.1- Introdução

Apesar da dinâmica ter grande aplicabilidade em vários ramos da ciência, ela foi originalmente restrita à física. O início foi por volta do meio do século XVII, quando Newton desenvolveu as equações diferenciais, descobriu as leis do movimento, da gravitação universal e combinou-as para explicar as leis de Kepler sobre o movimento dos planetas, resolvendo o problema da interação entre dois corpos.

Gerações subseqüentes de matemáticos e físicos tentaram expandir a teoria de Newton para o problema de três corpos, por exemplo Sol, Terra e Lua, mas esse problema tornou-se muito mais difícil de se resolver. Depois de décadas de esforço em vão, muitos já consideravam esse problema impossível de ser resolvido no sentido de obter equações explícitas que explicassem os movimentos (STROGATZ, 1994).

No final do século XIX, Poincaré introduziu um novo ponto de vista na análise do

problema, ao invés de tentar determinar as posições exatas dos planetas em qualquer instante ele tentaria responder se o sistema solar seria estável para sempre ou não através de uma análise qualitativa. Poincaré desenvolveu uma ferramenta geométrica poderosa para analisar essas questões, resultando na teoria moderna de sistemas dinâmicos. Ele foi também o primeiro a perceber a possibilidade do caos, um comportamento aperiódico que depende sensivelmente das condições iniciais, tornando a previsão em longo prazo impossível (STROGATZ, 1994).

Em 1963, Lorenz descobriu um comportamento caótico em um modelo simplificado de convecção atmosférica. Ele notou que as soluções de suas equações nunca convergiam para o equilíbrio ou para um estado periódico. Além disso, para duas condições iniciais ligeiramente diferentes o comportamento do sistema era totalmente diferente.

Lorenz representou graficamente a solução de suas equações em três dimensões, construindo um espaço de estados, mostrando que há uma certa estrutura no caos. O atrator encontrado tinha o formato de uma borboleta. Desde então, em vários ramos da ciência trabalhos relatam a presença de comportamento caótico, desde turbulência em fluidos até estudos de biologia populacional (STROGATZ, 1994).

Em casos em que a modelagem matemática do sistema dinâmico em questão é muito difícil ou impossível, procura-se analisar sistemas dinâmicos através de experimentos, sem que se conheça previamente sua dinâmica, sem a necessidade de um modelo matemático.

O objetivo deste capítulo é expor conceitos fundamentais para a análise qualitativa de sistemas dinâmicos não-lineares, exibindo ferramentas disponíveis para essa análise, entre elas a reconstrução do espaço de estados partindo de uma série temporal obtida de experimentos.

2.2- Sistemas dinâmicos lineares e não-lineares

Sistemas dinâmicos podem ser descritos por equações diferenciais ou mapas iterativos. Equações diferenciais descrevem a evolução de sistemas em tempo contínuo enquanto mapas iterativos são usados quando o tempo é discreto. Uma das principais utilizações dos mapas é auxiliar na análise de sistemas contínuos (STROGATZ, 1994).

Um sistema dinâmico é um sistema que evolui no tempo, pode ser representado por equações diferenciais, como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde, $\dot{x} \equiv \frac{dx_i}{dt}$ e $x_1, \dots, x_n$ são os estados do sistema.

As funções $f_i(\cdot)$ na Equação (2.1) são determinadas pelo problema em questão. São elas que definem as características do sistema, por exemplo, se o sistema é linear ou não.

Um sistema dinâmico é linear se as funções $f_i(\cdot)$ forem lineares, ou seja, possuem somente termos à primeira potência. Por outro lado, um sistema pode ser não-linear se as funções forem não-lineares.

A definição de linearidade pressupõe o princípio da superposição de efeitos, que estabelece que um dado efeito possa ser avaliado através da superposição de efeitos decorrentes de várias causas. De um modo geral, isto não pode ser considerado em sistemas não-lineares (SAVI, 2006).

Por esse motivo, sistemas lineares podem ser resolvidos facilmente, enquanto a maioria dos sistemas não-lineares, é muito difícil de se resolver analiticamente. Sistemas não-lineares não

podem ser divididos em partes para serem resolvidas separadamente (STROGATZ, 1994).

Sistemas dinâmicos podem ser autônomos ou não-autônomos. Um sistema dinâmico é autônomo se não depende explicitamente do tempo. Um exemplo de sistema autônomo é o oscilador harmônico amortecido linear, representado pela seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem:

$$m\ddot{x} + w\dot{x} + \eta x = 0 \quad (2.2)$$

onde $\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$, m é a massa, w o coeficiente atrito viscoso e η é a constante elástica.

A Equação (2.2) pode ser reescrita na forma da Equação (2.1). Para isso, introduz-se novas variáveis $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$, então:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{w}{m}x_2 - \frac{\eta}{m}x_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde m é a massa, w o coeficiente atrito viscoso e η é a constante elástica.

Sistemas dinâmicos não-autônomos dependem explicitamente do tempo, como exemplo, podemos citar o oscilador harmônico forçado. A equação do movimento para o oscilador harmônico forçado é:

$$m\ddot{x} + w\dot{x} + \eta x = F \cos(t) \quad (2.4)$$

onde m , w , e η são os mesmos parâmetros das equações (2.2) e (2.3) e o termo $F \cos(t)$ é uma força de intensidade que varia com o tempo em ciclos.

Para reescrever a equação na forma da Equação (2.1) introduzimos as variáveis $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ e $x_3 = t$, e então, o sistema de primeira ordem equivalente é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-\eta x_1 - w x_2 + F \cos x_3) \\ \dot{x}_3 &= 1\end{aligned}\tag{2.5}$$

Desta forma, remove-se a dependência temporal adicionando uma dimensão extra ao sistema. O sistema descrito pela Equação (2.5) é exemplo de sistema não-linear, devido ao termo $\cos x_3$.

As soluções de um sistema dinâmico podem ser representadas em um espaço abstrato n' -dimensional, que corresponde à dimensão n' do sistema dinâmico. Se um sistema possui duas dimensões, por exemplo, a solução do sistema dinâmico deve ser um par de funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$, que podem representar, por exemplo, a posição e a velocidade. Ao construir um espaço com as coordenadas (x_1, x_2) , a solução $(x_1(t), x_2(t))$ corresponderá a um ponto movendo-se ao longo de uma curva nesse espaço. A Figura 2.1 ilustra esse espaço.

Figura 2.1- Espaço construído com as coordenadas (x_1, x_2) e a trajetória percorrida pela solução no tempo (STROGATZ, 1994).

A esta curva dá-se o nome de trajetória e o espaço é chamado de espaço de estados do sistema dinâmico. Do espaço de estados é possível retirar informações sobre as soluções do sistema dinâmico. O espaço de estados pode ser obtido resolvendo o sistema dinâmico ou por técnicas de reconstrução do espaço de estados, através de dados de experimentos, sem a necessidade de resolver o sistema dinâmico (STROGATZ, 1994).

A análise de sistemas dinâmicos unidimensionais é muito útil para o desenvolvimento da noção sobre trajetórias, espaço de estados e sobre como retirar informação sobre o sistema a partir deles.

2.3- Sistemas dinâmicos unidimensionais e bidimensionais

Sistemas de dimensão um tem apenas uma variável de estado, por exemplo x . A equação desse sistema dinâmico é:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.6)$$

Chama-se de ponto fixo ou ponto de equilíbrio do sistema os pontos x para os quais $\dot{x} = 0$. Trajetórias que passam próximas a um ponto fixo podem ser atraídas ou repelidas por ele, dependendo do tipo do ponto fixo. Existem três tipos de ponto fixo: poço, fonte e sela. Poços são considerados pontos fixos estáveis, atraem trajetórias próximas para si. Fontes são consideradas instáveis, pois repelem as trajetórias. Selas atraem e repelem, dependendo da direção pela qual a trajetória se aproxima.

Podemos identificar o tipo de ponto fixo que temos analisando o sinal da derivada de

$f(x)$ para o ponto fixo x . O valor dessa derivada é conhecido como valor característico ou autovalor deste ponto fixo, simbolizado por λ . Se o autovalor é negativo o ponto fixo é um poço, portanto estável, se λ é positivo, o ponto fixo é uma fonte, portanto instável. Quando o autovalor é nulo, o ponto fixo é uma sela. A Figura 2.2 ilustra os diferentes tipos de ponto fixo.

Figura 2.2- a) O poço é representado pelo círculo preenchido, a fonte pelo círculo vazio. b) A sela é representada pelo círculo dividido. As setas indicam a direção das trajetórias (STROGATZ, 1994).

Sabendo o tipo de ponto fixo é possível deduzir como as trajetórias evoluem no espaço de estados. No caso unidimensional, as trajetórias só podem ser direcionadas para pontos fixos estáveis ou repelidas de pontos fixos instáveis, sem oscilação ou reversão da direção.

Sistemas dinâmicos com duas dimensões possuem mais variações de comportamento e um novo tipo de atrator deve ser introduzido para explicá-los (HILBORN, 2000).

Sistemas bidimensionais possuem duas variáveis de estado, x_1 e x_2 , podem ser representados pelas equações:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{2.7}$$

O comportamento desse sistema pode ser analisado pelas trajetórias em um espaço de estados bidimensional de coordenadas x_1 e x_2 . No caso bidimensional, os pontos fixos são os pontos (x_{o1}, x_{o2}) que satisfazem a condição:

$$\begin{aligned} f_1(x_{o1}, x_{o2}) &= 0 \\ f_2(x_{o1}, x_{o2}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para saber o tipo de ponto fixo deve-se encontrar o valor numérico para a derivada de f_1 e f_2 para o ponto fixo. Como cada função depende de duas variáveis considera-se quatro derivadas parciais. O comportamento do ponto fixo dependerá dessas quatro derivadas, sendo que cada ponto fixo tem dois autovalores reais ou um par de autovalores complexos (HILBORN, 2000).

Para resolver esse problema, faz-se uma expansão em série de Taylor da Equação (2.7) nas vizinhanças do ponto fixo (x_{o1}, x_{o2}) , ignorando termos de derivada maior que um. Chega-se, então, a um par de equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes. Esses coeficientes são os valores numéricos das derivadas parciais no ponto fixo. Com esses coeficientes constrói-se a matriz Jacobiana do sistema, ou seja:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

onde f_{ij} indica derivada parcial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Sendo TrJ definido como o traço da matriz Jacobiana, dado pela soma dos elementos da diagonal principal e Δ o determinante da matriz Jacobiana, o ponto fixo pode ser identificado de

acordo com o que se resume na Tabela 2.1.

Tabela 2.1- Pontos fixos para espaços de estados bidimensionais

	$TrJ < 0$	$TrJ > 0$
$\Delta > (1/4)(TrJ)^2$	poço espiral (atrator)	fonte espiral (repulsor)
$0 < \Delta < (1/4)(TrJ)^2$	poço (atrator)	fonte (repulsor)
$\Delta < 0$	ponto sela (tipo 1)	ponto sela (tipo 2)

As Figuras 2.3 e 2.4 ilustram esses diferentes tipos de comportamento das trajetórias no espaço de estados. A Figura 2.3 mostra os quatro comportamentos não-oscilatórios das trajetórias nas proximidades dos quatro pontos fixos (poço, fonte, sela tipo1 e sela tipo 2) A Figura 2.4 ilustra os dois comportamentos oscilatórios

Figura 2.3- Comportamento não oscilatório das trajetórias próximas a quatro tipos de pontos fixos em um espaço de estados bidimensional (HILBORN, 2000).

Figura 2.4- Comportamento oscilatório (espiral) próximo a pontos fixos em um espaço de estados bidimensional (HILBORN, 2000).

Quando as trajetórias oscilam em torno de um ponto fixo, como na Figura 2.4, elas podem tender ao ponto fixo (no caso de um poço espiral) ou serem repelidas para longe do ponto fixo (no caso de uma fonte espiral), quando as trajetórias oscilam para longe, elas tendem a continuar oscilando indefinidamente.

Em espaços de estados com duas ou mais dimensões, é possível que exista comportamento cíclico ou periódico. Este tipo importante de comportamento é representado por trajetórias evoluindo em ciclos fechados no espaço de estados. Trajetórias atraídas para esses ciclos continuam oscilando neles por todo o tempo. Esses ciclos são chamados de ciclo limite se trajetórias próximas são atraídas ou repelidas por eles (HILBORN, 2000).

Como o ponto fixo, o ciclo limite pode ser estável ou instável, os tipos de ciclo limite possíveis são: ciclo limite atrator, ciclo limite repulsor e ciclo limite sela. Um método para a identificação do tipo de ciclo limite é o método das seções de Poincaré.

O método das seções de Poincaré funciona analisando a evolução das trajetórias no espaço de estados através de um segmento de linha que corta o ciclo limite em um certo ponto P . Em

seguida, inicia-se uma trajetória próxima ao ciclo limite. Essa trajetória irá então passar pelo segmento de linha em pontos diferentes de P , como $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$. Se a cada passagem o ponto P_i tender a P , o ciclo limite é atrator. Se P_i se afasta de P , o ciclo limite é repulsor. Eventualmente ele pode ser atrator em uma região e repulsor de outra, sendo então um ciclo limite do tipo sela. A Figura 2.5 ilustra essas idéias.

Figura 2.5- a) Seção de Poincaré do ciclo limite. b) Caracterização do tipo de ciclo, as setas indicam se os pontos P_i tendem a P ou se afastam de P (HILBORN, 2000).

A estabilidade de pontos fixos e ciclos limite pode mudar de acordo com os parâmetros do sistema dinâmico, um ponto fixo atrator do tipo poço pode tornar-se um ponto fonte ou sela. O estudo sobre como as características de um ponto fixo ou outros tipos de atratores mudam com a variação de parâmetros do sistema é conhecido como Teoria da Bifurcação.

2.4- Bifurcação

O termo bifurcação é usado para descrever qualquer mudança súbita na dinâmica de um sistema pela variação dos parâmetros desse sistema. Quando um ponto fixo muda sua característica com a variação dos parâmetros, o comportamento das trajetórias na vizinhança desse ponto fixo irá mudar. Estar apto a classificar e entender os vários tipos de bifurcação é muito importante no estudo da dinâmica não-linear (STROGATZ, 1994).

Para exemplificar o conceito, considera-se um sistema composto por uma barra na posição vertical e uma massa em sua extremidade superior, como na Figura 2.6, com a variação do parâmetro massa, a sistema passou de estável para instável.

Figura (2.6)- Sistema massa-barra: de estável para instável com a variação do parâmetro massa (STROGATZ, 1994).

Para perceber o que acontece quando os parâmetros do sistema variam, pode-se utilizar dois tipos de diagramas. Um deles é o diagrama de bifurcação, no qual se faz um gráfico da localização do ponto fixo em função de um parâmetro de controle. No segundo tipo constrói-se um gráfico do autovalor do ponto fixo em função do parâmetro de controle. A Figura 2.7 mostra esses dois tipos de diagramas para o caso unidimensional:

Figura 2.7- a) Diagrama de bifurcação, a linha sólida indica os valores de x (posição do ponto fixo) para poço como função do parâmetro μ , a linha tracejada é para a fonte, a bifurcação ocorre em $\mu=0$. b) Autovalor em função do parâmetro δ , ponto de bifurcação quando o autovalor muda de sinal ($\delta=0$) (HILBORN, 2000).

A bifurcação ilustrada no diagrama de bifurcação da Figura 2.7 (a) é conhecida como bifurcação sela-nó. Existem outros tipos de bifurcações possíveis em espaços de estados unidimensionais. No entanto, a bifurcação sela-nó é a mais comum.

No caso bidimensional, cada ponto fixo terá dois autovalores reais ou um par de autovalores complexos. Se os dois autovalores forem reais, é possível construir um gráfico desses autovalores em função do parâmetro de controle. Se os autovalores são complexos as trajetórias

têm comportamento espiral. Nesses casos a bifurcação ocorre quando os autovalores passam do lado esquerdo do plano complexo para o direito, ou seja, quando a parte real do autovalor vai para zero.

O surgimento e a destruição de ciclos limite são bifurcações. O surgimento de um ciclo limite estável é chamado de bifurcação de Hopf. Uma vez que é possível usar a seção de Poincaré para estudar o ciclo limite e como no caso bidimensional a seção de Poincaré é um segmento de linha, a bifurcação de ciclo limite (tipo Hopf) pode ser determinada com os mesmos métodos utilizados em sistemas dinâmicos unidimensionais.

A bifurcação de Hopf pode ser modelada usando as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_1\{\mu - (x_1^2 + x_2^2)\} \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2\{\mu - (x_1^2 + x_2^2)\}\end{aligned}\tag{2.10}$$

onde μ é um parâmetro.

A forma geométrica das trajetórias fica mais clara com uma mudança de coordenadas para coordenadas polares. A Equação (2.10) em coordenadas polares fica:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r\{\mu - r^2\} \equiv f(r) \\ \dot{\theta} &= 1\end{aligned}\tag{2.11}$$

onde r é o raio, θ o ângulo e μ um parâmetro.

Analisando o sistema representado pela primeira equação do Sistema (2.11), nota-se que para $\mu < 0$ existe apenas um ponto fixo em $r = 0$. Derivando a primeira equação de (2.11) e encontrando o valor numérico para $r = 0$, encontra-se o autovalor igual a μ . Então, para $\mu < 0$, essa derivada é negativa e o ponto fixo é um poço espiral, portanto estável.

Para $\mu > 0$, o ponto fixo é uma fonte espiral, portanto instável. Trajetórias que se iniciam próximo a ele são espirais que tendem para longe dele. No entanto, existe outro ponto fixo para r em $r = \sqrt{\mu}$. Este ponto fixo para r corresponde a um ciclo limite com período 2π . Esse ciclo limite surgiu no ponto de bifurcação $\mu = 0$. A Figura 2.8 mostra o diagrama de bifurcação para a bifurcação de Hopf.

Figura 2.8- Diagrama de bifurcação para bifurcação de Hopf. Para $\mu > 0$, o ponto fixo na origem é um espiral repulsor e o atrator do sistema é um ciclo limite (HILBORN, 2000).

Em sistemas bidimensionais existe um número limitado de tipos de bifurcações e as bifurcações sela-nó e de Hopf são as mais comuns. Em sistemas de dimensões maiores que dois surgem outros tipos de bifurcações e comportamentos, entre eles o caos.

2.5- Sistemas dinâmicos tridimensionais e caos

Sistemas dinâmicos tridimensionais podem ter comportamentos que não são possíveis em sistemas unidimensionais ou bidimensionais. Entre essas novas possibilidades está o caos (HILBORN, 2000).

Um sistema dinâmico tridimensional pode ser representado pelo seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}\tag{2.12}$$

Novamente, pode-se encontrar os pontos fixos do sistema igualando as três derivadas temporais a zero. A natureza de cada ponto fixo dependerá dos três autovalores da matriz Jacobiana, composta pelos valores numéricos das derivadas parciais no ponto fixo em questão.

Existem oito tipos de pontos fixos em espaços de estados tridimensionais, são eles:

1- Poço: todos os autovalores são reais e negativos. Todas as trajetórias na vizinhança de um poço são atraídas para ele sem oscilação.

2- Poço espiral: todos os autovalores têm a parte real negativa, mas dois deles tem parte imaginária não-nula. As trajetórias próximas espiralam em uma superfície, atraídas para o poço.

3- Fonte: todos os autovalores são reais e positivos. Todas as trajetórias próximas são repelidas para longe do ponto fixo.

4- Fonte espiral: todos os autovalores têm a parte real positiva, mas dois deles tem a parte imaginária não-nula. Trajetórias próximas espiralam em uma superfície para longe do ponto fixo.

5- Ponto de Sela 1: todos os autovalores são reais. Um é positivo e os outros dois são negativos. Trajetórias são atraídas pelo ponto fixo em uma superfície de atração e divergem ao longo de uma curva repulsora.

6- Ponto de Sela espiral 1: Os dois autovalores com parte real negativa formam um par complexo conjugado. Trajetórias próximas espiralam para o ponto fixo em uma superfície

atratora e divergem ao longo de uma curva repulsora.

7- Ponto de Sela 2: Todos os autovalores são reais. Dois são positivos e um é negativo. Trajetórias próximas são atraídas ao longo de uma curva atratora e divergem do ponto fixo através de uma superfície repulsora.

8- Ponto de Sela espiral 2: Os dois autovalores com parte real positiva formam um par complexo conjugado. Trajetórias próximas são atraídas ao longo de uma curva atratora e espiralam em uma superfície repulsora, enquanto divergem.

A Figura 2.9 ilustra alguns dos tipos de pontos fixos possíveis em espaços de estados tridimensionais.

Figura 2.9- Alguns tipos possíveis de pontos fixos no caso tridimensional e representação, respectiva a cada tipo, dos três autovalores no plano complexo. (HILBORN, 2000).

Como visto anteriormente, sistemas dinâmicos com duas dimensões ou mais podem convergir para um comportamento periódico, o ciclo limite. Para estudar a estabilidade de ciclos limite em sistemas tridimensionais, é usual utilizar a técnica da seção de Poincaré.

A seção de Poincaré é construída pela escolha de um plano, chamado de plano de Poincaré e gravando nessa superfície os pontos nos quais uma dada trajetória atravessa a mesma. Assume-se um par de funções (F_1 e F_2) que relacionam as coordenadas de um ponto, no qual a trajetória atravessa o plano de Poincaré com as coordenadas do ponto da próxima passagem, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= F_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \\ x_2^{(n+1)} &= F_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde os termos sobrescritos, entre parêntesis, indicam o número do ponto de cruzamento entre a trajetória e o plano.

Os pontos fixos da seção de Poincaré são os pontos que satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(\dot{x}_1, \dot{x}_2) \\ \dot{x}_2 &= F_2(\dot{x}_1, \dot{x}_2) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Cada ponto fixo na seção de Poincaré corresponde a um ciclo limite no espaço de estados tridimensional. Pode-se avaliar a estabilidade desses ciclos limite através dos dois autovalores da matriz Jacobiana associada ao sistema de equações (2.14), como feito no caso de sistemas

dinâmicos bidimensionais. Existem três tipos de ciclo limite, o ciclo limite estável (atrator), o instável (repulsor) e o ciclo limite tipo sela. Como no caso bidimensional, os autovalores podem ser pares complexos, formando um par complexo conjugado. Nesses casos, as trajetórias giram ao redor do ciclo limite enquanto se aproximam ou se afastam dele.

Um novo comportamento, somente possível em sistema de dimensão três ou superior é o caos. Caos é um termo técnico que define um tipo específico de movimento irregular de um sistema determinístico não-linear, pode ser associado à imprevisibilidade e à sensibilidade às condições iniciais (SAVI, 2006).

Pensando em trajetórias no espaço de estados, no movimento caótico elas nunca irão repetir exatamente o mesmo movimento duas vezes. O caos não deve ser confundido com comportamento aleatório. Fenômenos aleatórios dizem respeito a sistemas não determinísticos, ou seja, o sistema apresenta uma resposta aleatória como consequência de uma entrada aleatória. Por outro lado, fenômenos caóticos são determinísticos. Assim para uma entrada totalmente conhecida e determinada surge uma resposta aparentemente aleatória (SAVI, 2006).

Quando os parâmetros de um sistema são alterados, o comportamento caótico pode aparecer ou desaparecer de muitas maneiras, ou seja, para um mesmo sistema podemos ter muitas rotas para o caos.

Uma dessas rotas é a duplicação do período. Ela começa com um comportamento em ciclo limite do sistema. Esse ciclo limite foi provavelmente originado em uma bifurcação envolvendo um ponto fixo. Com a variação dos parâmetros de controle, esse ciclo limite pode tornar-se instável. Se o ciclo limite torna-se instável tendo um de seus autovalores mais negativos que -1 , então, em muitas situações o novo movimento continua periódico, mas o período de oscilação dobra em relação ao período do movimento anterior. Na seção de Poincaré, esse novo ciclo limite apresenta dois pontos, um de cada lado do ponto original, do movimento anterior à

bifurcação. A Figura 2.10 representa essa situação.

Figura 2.10- Seção de Poincaré de uma trajetória que passou por uma bifurcação de duplicação do período.

a) A trajetória inicial cruza a seção em um ponto. b) Após a bifurcação a trajetória passa a cruzar em dois pontos, um de cada lado do ponto inicial (HILBORN, 2000).

Conforme os parâmetros do sistema variam mais adiante, esse ciclo limite de período duplicado pode tornar-se instável, gerando um ciclo período-quatro, com quatro pontos na seção de Poincaré. Isso pode continuar até o período tender ao infinito, ou seja, a trajetória nunca se repetirá. Esse comportamento é o de um sistema caótico.

Detalhes sobre outras rotas para o caos, como a quasi-periodicidade, intermitência e crise e transientes caóticos podem ser encontradas em Hilborn (2000).

A presença de atratores indica que o sistema possui um comportamento assintótico, ou seja, o sistema é dissipativo. Um sistema que apresenta comportamento caótico pode ter comportamento assintótico, ou seja, pode possuir um atrator. Já se conhece alguns atratores, como pontos fixos estáveis e ciclos limite, de dimensão um no primeiro caso e dimensão dois no segundo. No caso de sistemas caóticos o atrator é identificado como atrator estranho, possui sensibilidade às condições iniciais e é um conjunto no espaço de estados de geometria peculiar,

chamado de fractal. Detalhes das propriedades geométricas de atratores estranhos e fractais são encontrados em Strogatz (1994).

Pode-se caracterizar o comportamento caótico pela divergência entre trajetórias vizinhas no espaço de estados e também pela presença de mais de um centro de rotação das trajetórias (YALÇINKAYA; LAI, 1997). Um método que pode quantificar o comportamento caótico é o método dos expoentes de Lyapunov (HILBORN, 2000).

Dada uma condição inicial x_0 , considera-se um ponto próximo $x_0 + \varepsilon_0$ que segue a trajetória conforme o sistema evolui, onde a separação inicial ε_0 é muito pequena. Seja ε_n a separação após um intervalo de tempo dada por $|\varepsilon_n| = |\varepsilon_0|e^{t\gamma}$, γ é denominado expoente de Lyapunov. Se o expoente de Lyapunov for positivo, a trajetória está se separando da trajetória vizinha para uma condição inicial muito próxima, indicando a presença de comportamento caótico.

Sistemas dinâmicos podem ser estudados a partir de experimentos, sem que se conheça suas equações. Através de técnicas de análise de séries temporais, como a reconstrução do espaço de estados, um espaço de estados similar ao original pode ser construído a partir de séries temporais experimentais. Com esse espaço reconstruído, pode-se explorar a dinâmica do sistema sem a necessidade de uma equação de movimento (SAVI, 2006).

2.6- Reconstrução do espaço de estados

Geralmente, um experimento não mede todas as variáveis de estado do sistema. Normalmente tem-se somente a evolução temporal de uma variável, representada pela série temporal $s(t)$. A técnica de reconstrução do espaço de estados usa essa série para extrair informações sobre a dinâmica do sistema.

A técnica baseia-se no teorema de imersão de Takens (1981), segundo o qual essa série temporal $s(t)$ possui informações sobre todos os estados não observáveis. A partir dela, pode-se reconstruir um espaço de estados similar ao original, preservando invariantes do sistema, como a dimensão do atrator e os expoentes de Lyapunov. Este fato foi demonstrado numericamente por Packard et al. (1980) e posteriormente provado por Takens (1981).

Existem diferentes métodos para a reconstrução do espaço de estados, entre eles o método das coordenadas defasadas (MOD) e a decomposição em valores singulares (SVD).

O método das coordenadas defasadas é método de reconstrução mais explorado na literatura, tendo sido proposto por Ruelle (1979), Packard et al. (1980) e posteriormente Takens (1981). Esta técnica adota uma defasagem (τ) e uma dimensão (d), gerando coordenadas defasadas à partir da série $s(t)$, ou seja, se $s(t)$ for representada pela sequência $s[n], n = 1, 2, \dots, N$, onde N é o número total de amostras, mantendo o mesmo intervalo de amostragem, e se d é a dimensão de imersão então a reconstrução por MOD é dada por:

$$\mathbf{u}[n] = \{s[n], s[n + \tau], \dots, s[n(d - 1)\tau]\} \quad (2.15)$$

onde $\mathbf{u}[n]$ representa a dinâmica reconstruída, cada estado reconstruído é um vetor coluna.

Na utilização desse método, a determinação dos parâmetros de imersão, como a dimensão d e a defasagem τ , são de extrema importância. Existem diversos métodos para a determinação desses parâmetros.

Um dos métodos mais utilizados na determinação da dimensão de imersão é o da saturação de um invariante (GRASSBERGER; PROCACCIA, 1983). Esse método procura calcular um invariante geométrico do sistema, variando o valor da dimensão de imersão. Quando

o invariante deixar de depender da dimensão, ou seja, quando o invariante convergir para um valor fixo, a dimensão correspondente é a dimensão mínima de imersão.

Para estimar d , a fração média de pontos de um atrator com distância mútua (invariante) menor que ρ é calculada pela integral de correlação $C^d(\rho)$:

$$C^d(\rho) = \frac{1}{M^2} \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^M H(\rho - |y_i - y_j|) \quad (2.16)$$

onde $M = N - \tau(d - 1)$, sendo N é o número total de amostras da série temporal, H a função degrau e $|y_i - y_j|$ é a distância mútua entre os pontos em questão.

A curva definida por $\log_{10} C^d(\rho)$ versus $\log_{10} \rho$ é calculada como uma função de d . A dimensão de imersão é obtida quando a curva torna-se independente de d (NAYFEH, 1995).

Para determinar a defasagem (τ) existem basicamente dois métodos: o método da autocorrelação (BOX et al., 1994) e o método da informação mútua (FRASER; SWINNEY, 1986).

O método da autocorrelação procura estimar a dependência linear entre dois pontos do sinal separados pela defasagem (τ). O tempo de defasagem ideal é o que corresponde ao zero da função de autocorrelação, que caracteriza uma independência linear entre $s(t)$ e $s(t + \tau)$. A função de autocorrelação é dada por:

$$C(\tau) = \sum_n [s(n) - \bar{s}] [s(n + \tau) - \bar{s}] \quad (2.17)$$

onde $s(n)$ é um elemento da série e $\bar{s} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s(n)$, sendo N o número total de pontos da série.

A dependência linear entre as coordenadas pode ser usada como uma primeira aproximação. Como se trata de problemas não-lineares, é mais efetivo utilizar métodos para estimar a dependência não-linear entre as coordenadas (ABARBANEL et al., 1993).

Com conceitos da teoria da informação foi desenvolvido o método da informação mútua média. Esse método fornece as mesmas informações que a função de autocorrelação para sistemas lineares, sendo na realidade uma generalização para sistemas não-lineares. A teoria da informação procura identificar o quanto de informação de uma medida realizada num instante t se observa no instante $(t + \tau)$ em um mesmo sinal.

Considerando dois sistemas S_a e S_b , sendo s_{ai} e s_{bj} as medidas de uma variável em cada um dos sistemas, considerando ainda que exista uma distribuição probabilística que governa as possibilidades de medições em cada sistema, a quantidade de informação, em bits, que é identificada através da medição s_{ai} sobre a medição s_{bj} é dada por:

$$I(s_{ai}, s_{bj}) = \log_2 \left(\frac{\Gamma_b(s_{ai}, s_{bj})}{\Gamma_b(s_{ai})\Gamma_b(s_{bj})} \right) \quad (2.18)$$

onde $\Gamma_b(s_{ai})$ é a função massa de probabilidade da medida s_{ai} , $\Gamma_b(s_{bj})$ é a função massa de probabilidade da medida s_{bj} , $\Gamma_b(s_{ai}, s_{bj})$ é a função massa de probabilidade combinada entre s_{ai} e s_{bj} e $I(s_{ai}, s_{bj})$ é a informação mútua de s_{ai} e s_{bj} (SAVI, 2006).

Fazendo $s(t)$ como S_a e $s(t + \tau)$ como S_b reescreve-se a Equação (2.18):

$$I(\tau) = \sum \Gamma_b(s(t), s(t + \tau)) \log_2 \left[\frac{\Gamma_b(s(t), s(t + \tau))}{\Gamma_b(s(t)) \Gamma_b(s(t + \tau))} \right] \quad (2.19)$$

onde $\Gamma_b(s(t))$ é a função massa de probabilidade da medida $s(t)$, $\Gamma_b(s(t + \tau))$ é a função massa de probabilidade da medida $s(t + \tau)$ e $\Gamma_b(s(t), s(t + \tau))$ é função massa de probabilidade combinada de $s(t)$ e $s(t + \tau)$ (SAVI, 2006).

Variando τ constrói-se um gráfico, segundo Fraser & Swiney (1986), o valor da defasagem (τ) ideal é o correspondente ao primeiro mínimo local de $I(\tau)$.

O método da defasagem funciona bem para séries temporais livres de ruído. Em sinais experimentais, a presença do ruído é inevitável e o espaço de estados reconstruído pode sofrer deformações, fato que pode resultar em conclusões arbitrárias (CASDAGLI et al., 1991).

Os efeitos do ruído na reconstrução do espaço de estados podem ser minimizados através de técnicas de filtragem de sinais. O sinal pode ser filtrado eletronicamente durante a aquisição, porém, isso muitas vezes não é suficiente para garantir uma boa relação sinal-ruído. Nesses casos, a filtragem digital feita posteriormente no computador, pode produzir melhores resultados (SMITH, 1999).

Filtros digitais podem defasar o sinal e alterar invariantes, por esse motivo precisam ser cuidadosamente projetados (KOSTELICH; SCHREIBER, 1993).

Na busca por um método de reconstrução que não fosse suscetível aos efeitos negativos do ruído, Broomhead & King (1986) desenvolveram um método baseado na decomposição em valores singulares.

CAPÍTULO 3

DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES: FILTRAGEM E RECONSTRUÇÃO DO ESPAÇO DE ESTADOS

3.1- Introdução

O método da defasagem (MOD) para reconstrução do espaço de estados é eficiente quando uma série temporal livre de ruídos é considerada. Na presença de ruído, os atratores podem ficar distorcidos ou alinhados em posições de difícil visualização. Isso ocorre porque os métodos para a determinação do tempo de defasagem são sensíveis ao ruído e a defasagem encontrada pode não ser a ideal.

A filtragem digital de sinais pode ser muito útil para a atenuação do ruído de uma série temporal, no entanto, alguns filtros podem provocar defasagem e distorções na série temporal (SMITH, 1999).

O método de reconstrução por decomposição em valores singulares (SVD), desenvolvido por Broomhead & King (1986) dispensa a determinação do tempo de defasagem. A dimensão de imersão é determinada e o sinal é filtrado sem distorções durante o processo de reconstrução,

reduzindo as chances de erro e o tempo computacional.

Este capítulo apresenta o método SVD para a reconstrução do espaço de estados, fornecendo inicialmente noções de análise de sinais, filtragem digital e alguns conceitos de estatística necessários para o entendimento do método.

O método SVD é aplicado a uma série temporal contaminada com ruído obtida do modelo de Lorenz, para demonstração de sua eficiência. Na mesma série temporal, é aplicado o método da defasagem, para efeito de comparação.

Finalmente, a capacidade de filtrar a série temporal do método SVD é comparada com a de outros filtros digitais.

3.2- Sinais ou séries temporais

Um sinal ou série temporal é uma função representando uma quantidade ou variável, tipicamente, ela contém informação sobre o comportamento ou natureza do sistema dinâmico. Matematicamente, um sinal é representado como uma função de uma variável independente t . Usualmente t representa o tempo, portanto, $x(t)$ é a representação de um sinal.

Um sinal $x(t)$ é contínuo no tempo se t é uma variável contínua. Se t é discreto, isto é, se $x(t)$ é definida em tempo discreto, então $x(t)$ é um sinal discreto no tempo. Assim, um sinal discreto no tempo é identificado como uma seqüência de números, denotados por $\{x_n\}$ ou $x[n]$, onde n é um inteiro (HSU, 1995). Ilustrações de um sinal contínuo no tempo ($x(t)$) e um discreto no tempo ($x[n]$) são mostrados na Figura 3.1.

Figura 3.1- Representação gráfica de sinais: (a) contínuo no tempo e (b) discreto no tempo (HSU,1995).

Um sinal discreto no tempo $x[n]$ pode representar um fenômeno para o qual a variável independente é inerentemente discreta ou pode ser obtido amostrando um sinal contínuo no tempo $x(t)$, tal como: $x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_n), \dots$. De forma simplificada, tem-se: $x[0], x[1], \dots, x[n], \dots$, ou $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, onde entende-se que:

$$x_n = x[n] = x(t_n) \quad (3.1)$$

Os x_n 's são chamados de amostras e o intervalo de tempo entre duas amostras consecutivas é chamado intervalo de amostragem. Quando os intervalos de amostragem são iguais, então:

$$x_n = x[n] = x(nT_s) \quad (3.2)$$

onde a constante T_s é o intervalo de amostragem.

Um sinal é analógico se é contínuo no tempo e pode assumir qualquer valor num intervalo (a, b) . Se um sinal discreto no tempo $x[n]$ pode assumir somente um número finito de valores distintos, então esse sinal é chamado de sinal digital.

Sinais determinísticos são sinais cujos valores são completamente especificados para

qualquer instante dado, Assim, um sinal determinístico pode ser modelado por uma função conhecida do tempo (t). Sinais aleatórios são sinais que assumem valores aleatórios para qualquer instante dado e devem ser tratados estatisticamente.

Séries temporais possuem informações sobre o sistema que representam, sendo que essas informações podem ser acessadas no domínio do tempo ou no domínio da frequência. Para alternar entre esses domínios buscando essa informação existem ferramentas matemáticas chamadas de transformadas.

3.3- Análise de sinais no tempo e frequência: Análise de Fourier

Sinais podem ser analisados em diferentes domínios como o do tempo ou da frequência, de acordo com a conveniência para diferentes propósitos. Para sair de um domínio para outro são necessárias ferramentas matemáticas. Para converter um sinal do domínio do tempo para o da frequência utilizam-se transformações baseadas na Série de Fourier, para sinais periódicos contínuos no tempo e a Transformada de Fourier, para sinais aperiódicos. Além de fornecer a representação espectral do sinal, a análise de Fourier é essencial na descrição de certos tipos de sistemas e suas propriedades no domínio da frequência (HSU, 1995).

Um sinal contínuo no tempo $x(t)$ é periódico se existe um valor positivo T , diferente de zero, tal que:

$$x(t + T) = x(t) \quad \text{para todo } t \quad (3.3)$$

O período fundamental T_0 de $x(t)$ é o menor valor positivo de T para o qual a Equação (3.3) é satisfeita e $1/T_0 = f_0$ é denominada frequência fundamental (HSU, 1995).

A representação exponencial complexa da série de Fourier de um sinal periódico $x(t)$ com

período fundamental T_0 é dada por:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.4)$$

onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ é a frequência e c_k são os coeficientes de Fourier, dados por:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.5)$$

onde $\int_{T_0}$ denota a integração sobre um período, sendo que tipicamente utiliza-se os intervalos de

0 até T_0 ou de $-\frac{T_0}{2}$ até $\frac{T_0}{2}$.

Fazendo $k = 0$ na Equação (3.5), tem-se:

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \quad (3.6)$$

que indica que c_0 é o valor médio de $x(t)$ sobre um período.

Quando $x(t)$ é real, da Equação (3.5) tem-se:

$$c_{-k} = c_k^* \quad (3.7)$$

onde o asterisco indica o complexo conjugado.

Seja $x(t)$ um sinal não-periódico de duração finita, por exemplo:

$$x(t) = 0 \quad |t| > T_1$$

como está representado na Figura 3.2 a) e seja $x_{T_0}(t)$ um sinal periódico formado pela repetição

de $x(t)$ com período T_0 , como mostrado na Figura 3.2 b). Se $T_0 \rightarrow \infty$, tem-se:

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = x(t) \quad (3.8)$$

Figura 3.2 – a)- Sinal não periódico $x(t)$. b)- Sinal periódico formado por repetição periódica de $x(t)$ (HSU, 1995).

A série de Fourier de $x_{T_0}(t)$ é dada por:

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.9)$$

onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

Os coeficientes c_k da Equação (3.9) são dados por:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.10)$$

Desde que $x_{T_0}(t) = x(t)$ para $|t| < T_0/2$ e $x(t) = 0$ fora desse intervalo, a Equação (3.10) pode ser reescrita como:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.11)$$

Define-se $X(\omega)$ como:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.12)$$

A Equação (3.12) é a transformada de Fourier de $x(t)$:

$$X(\omega) = \mathfrak{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.13)$$

De maneira similar, chega-se à transformada de Fourier para um sinal discreto, de duração finita e aperiódico $x[n]$:

$$X(\Omega) = \mathfrak{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (3.14)$$

onde Ω é a frequência para tempo discreto.

Quando trata-se sinais em um computador digital, trabalha-se com sinais discretos e de duração finita, portanto, utiliza-se a Transformada de Fourier Discreta (DFT). A forma mais eficiente e por isso popular de calcular uma DFT é a FFT, esse algoritmo reduz consideravelmente o tempo computacional (SMITH, 1999). Brigham (1988) fornece detalhes sobre essa técnica.

Ao analisar séries temporais obtidas experimentalmente, a FFT pode fornecer instrumentos para uma análise qualitativa da dinâmica do sistema através de técnicas de análise espectral. Para análise espectral de séries temporais faz-se uma transformação na série, trazendo o sinal para o domínio da frequência, normalmente utiliza-se a FFT. Além de fornecer informações sobre as frequências de oscilação, essa técnica pode ser utilizada na caracterização da presença de caos, com algumas restrições. A caracterização de caos por FFT não é recomendada para sistemas com muitos graus de liberdade, sendo mais vantajosa em sistemas com até três dimensões (MOON, 1992).

O caos é caracterizado pela presença de sub-harmônicos e harmônicos de uma frequência principal, formando um espectro contínuo de banda larga, porém limitada. A banda limitada diferencia um sinal caótico de um aleatório. Sinais aleatórios apresentam frequências distribuídas por todo espectro, tendo portanto, uma banda infinita (SAVI, 2006). A Figura 3.3 ilustra essa diferença.

Figura 3.3- Espectro de um sinal caótico (a) e um aleatório (b), um sinal caótico tem banda limitada.

Quando um sinal caótico é contaminado com ruído, muitas vezes torna-se difícil distinguir as frequências do sinal caótico, pois o ruído faz com que a transformada apresente frequências em todo espectro.

Ruídos em séries temporais podem atrapalhar ou até impedir que informações corretas sejam extraídas do sinal. Os efeitos negativos do ruído podem ser minimizados através de técnicas de filtragem, o sinal pode ser filtrado por filtros analógicos, eletronicamente, antes da aquisição, ou digitalmente, após a aquisição no computador.

3.4- Filtros digitais

Em processamento digital de sinais, um sistema é algo que aceita uma ou mais entradas e opera sobre elas para produzir uma ou mais saídas. Um filtro é um exemplo de sistema, representado na Figura 3.4 (RORABAUGH, 1997).

Figura. 3.4- Representação de um filtro digital $H[]$ agindo sobre uma entrada x produzindo uma saída y (RORABAUGH, 1997).

Como mostrado na Figura 3.5, todo filtro linear tem uma resposta a um impulso, resposta a uma entrada degrau e uma resposta em frequência. Cada uma dessas respostas contém informações completas sobre filtro, mas de formas diferentes. Se uma das três é especificada,

pode-se calcular as outras duas. Todas são importantes, pois descrevem como o filtro reage a diferentes circunstâncias.

Fig. 3.5- Respostas de um filtro às entradas impulso, degrau e frequência. A resposta à entrada degrau (b), pode ser encontrada por integração discreta da resposta ao impulso (a). A resposta em frequência (c) pode ser encontrada da resposta ao impulso usando FFT, podendo ser expressa na escala linear, ou em decibéis (d) (SMITH, 1999).

O modo mais direto de utilização de um filtro digital é convoluir o sinal de entrada com a resposta ao impulso do filtro digital.

A convolução é uma operação matemática formal, como a adição, multiplicação ou integração. A adição usa dois números para produzir um terceiro, a convolução faz o mesmo com sinais, usa dois sinais e produz um terceiro. Ela tem utilidade em diversos ramos da matemática, como em probabilidade e estatística. Em análise de sinais, a convolução é usada para descrever a relação entre três sinais de interesse: o sinal de entrada, a resposta ao impulso e o sinal de saída.

Assim, um sinal de entrada $x[n]$ entra em um sistema linear com resposta ao impulso $h[n]$, resultando em um sinal de saída $y[n]$, equacionando:

$$x[n] * h[n] = y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (3.15)$$

onde $*$ indica a operação convolução (HSU, 1995).

Existe outra maneira de construir filtros digitais, chamada implementação de recursão. Quando um filtro é implementado por convolução cada amostra na saída é calculada usando apenas as amostras da entrada. Filtros recursivos usam amostras previamente calculadas da saída juntamente com as amostras da entrada. A resposta ao impulso da maioria dos filtros recursivos é composta por senóides que decaem exponencialmente em amplitude, tornando a resposta infinitamente longa. Por essa característica, filtros recursivos são conhecidos como filtros de Resposta Infinita ao Impulso (IIR). Em comparação, filtros implementados por convolução são filtros de Resposta Finita ao Impulso (FIR) (SMITH, 1999).

Cada tipo de filtro tem vantagens e desvantagens de acordo com a finalidade da aplicação. Em análise de sinais, a finalidade comum é encontrar e extrair a informação de interesse. Essa

informação pode ser acessada no domínio da frequência ou no domínio do tempo. A informação representada no tempo descreve o instante e a amplitude de uma ocorrência. Em contraste, a informação no domínio da frequência descreve em quais frequências o sistema oscila, qual a fase e a amplitude desse movimento periódico (SMITH, 1999).

Dessa forma, torna-se importante analisar o quanto cada filtro altera essa informação tanto no domínio do tempo como no da frequência. Para isso analisam-se as respostas à entrada degrau, no caso do domínio do tempo, e a resposta em frequência, no caso do domínio da frequência. Essa distinção é crítica quando se desenvolve um filtro digital, pois não é possível otimizá-lo para os dois domínios simultaneamente (SMITH, 1999).

Um filtro muito utilizado é o filtro de média móvel. Como o próprio nome indica, esse filtro trabalha colhendo um certo número de pontos na entrada e faz a média desses pontos, gerando uma saída, ou seja:

$$y[i] = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x[i + j] \quad (3.16)$$

onde i é o número da amostra da saída, $x[.]$ é o sinal de entrada, $y[.]$ o de saída e M é o número de pontos da média, conhecida como ordem do filtro.

Apesar da simplicidade, esse filtro pode diminuir os níveis de ruído sem causar defasagem no sinal. No entanto, como esperado, ele não tem um bom desempenho no domínio da frequência, ou seja, ele tem pouca habilidade para separar frequências (SMITH, 1999).

Uma filtragem digital mais eficiente pode ser obtida através da técnica da decomposição em valores singulares (SVD), desenvolvida por Broomhead & King (1986). Além de filtrar a série temporal esse método pode reconstruir o espaço de estados do sistema dinâmico.

3.5- O método da decomposição em valores singulares para filtragem e reconstrução do espaço de estados

O método da decomposição em valores singulares, desenvolvido por Bromhead & King (1986) elimina a necessidade da escolha de uma defasagem. O método utiliza-se das propriedades da matriz de covariância para gerar coordenadas descorrelacionadas.

A variância de uma variável aleatória X , comumente denotada por $\sigma^2 x$ ou simplesmente σ^2 ou ainda $\text{var}(X)$ é a medida da dispersão de uma distribuição sobre sua média:

$$\sigma^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \quad (3.17)$$

onde μ é a média e n o número de elementos da variável X .

Pequenos valores de σ^2 indicam uma concentração da massa da distribuição nas vizinhanças da média, assim, quando $\sigma^2 = 0$, toda massa da distribuição está concentrada na média (SOONG, 2004).

A covariância, comumente denotada por σ_{xy} , mede o grau de independência entre duas variáveis aleatórias. Se X e Y são duas variáveis aleatórias, a covariância entre elas é dada por:

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_x)(Y_i - \mu_y) \quad (3.18)$$

onde n é o número total de amostras, μ_x é a média da variável X e μ_y é a média da variável Y (SOONG, 2004).

O sinal da covariância indica o tipo de relação entre as variáveis, sendo que um sinal negativo indica uma dependência inversa. Quanto maior o valor absoluto, mais forte será a dependência entre as variáveis.

Nos casos em que se tem três ou mais variáveis envolvidas, por exemplo, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma representação conveniente para a variância e a covariância entre cada variável é a matriz de covariância $\mathbf{\Lambda}$, definida por:

$$\mathbf{\Lambda} = E \{ (\mathbf{X} - \mathbf{m}_x)(\mathbf{X} - \mathbf{m}_x)^T \} \quad (3.19)$$

onde $E\{ \}$ é o operador valor esperado (SOONG, 2004), $\mathbf{X}$ é um vetor coluna com componentes $X_1, X_2, \dots, X_n$ e o vetor $\mathbf{m}_x$ representa as respectivas médias.

A matriz $\mathbf{\Lambda}_{n \times n}$ possui uma propriedade importante, os elementos de sua diagonal são as variâncias de cada variável e os elementos fora da diagonal são as covariâncias entre as variáveis. Sua estrutura pode ser representada por:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \text{var}(X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \text{var}(X_2) & \dots & \text{cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \text{cov}(X_n, X_2) & \dots & \text{var}(X_n) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

onde $\text{var}(\)$ indica a variância e $\text{cov}(\)$ a covariância. Desde que $\text{cov}(X_i, X_j) = \text{cov}(X_j, X_i)$, a matriz de covariância é sempre simétrica, ou seja, $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^T$.

Uma série temporal possui informação sobre todos os estados do sistema e cada estado pode ser considerado uma variável estatística. Ao construir uma matriz de covariância a partir da série temporal pode-se encontrar a melhor base para a projeção da trajetória do espaço de estados e separar os estados de maior variância (onde a dinâmica está contida) dos de menor variância (dominados pelo ruído).

A aplicação de uma janela de n elementos à uma série temporal de N pontos resulta em uma seqüência de $N = N_T - (n - 1)$ vetores $\{\mathbf{x}_i \in \mathfrak{R}^n / i = 1, 2, 3, \dots, N\}$ no espaço de imersão.

A matriz de trajetória $\mathbf{X}$ é construída com esta seqüência de vetores da seguinte forma:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{x}_n^T \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

onde $\mathbf{x}_i^T$ é um vetor transposto formado por n elementos da série temporal e $\mathbf{x}_{i+1}^T$ é formado pelos n elementos seguintes.

As colunas da matriz de trajetória constituem os vetores de estado $\mathbf{x}_i$ na trajetória reconstruída no espaço de imersão $\mathfrak{R}^n$. Construídos n vetores de estado no espaço de imersão, procura-se encontrar um conjunto de vetores linearmente independentes em $\mathfrak{R}^n$ que descreva eficientemente o espaço de estado. Esses vetores constituem parte de uma base ortonormal completa $\{\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ em $\mathfrak{R}^n$ e pode ser construída como uma combinação linear dos vetores na trajetória reconstruída em $\mathfrak{R}^n$ usando a relação:

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{X} = \sigma_i \mathbf{c}_i^T \quad (3.18)$$

onde $\mathbf{s}_i$ e $\mathbf{c}_i$ são autovetores e σ_i são autovalores.

De acordo com o teorema da decomposição em valores singulares (MEYER, 2000), pode ser provado que os vetores $\mathbf{s}_i$ e $\mathbf{c}_i$ são autovetores da matriz de estrutura $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ e da matriz de covariância $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ da trajetória, de acordo com as relações:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}\mathbf{X}^T\mathbf{s}_i &= \sigma_i^2 \mathbf{s}_i \\ \mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{c}_i &= \sigma_i^2 \mathbf{c}_i\end{aligned}\tag{3.19}$$

Os vetores $\mathbf{s}_i$ e $\mathbf{c}_i$ são os vetores singulares de $\mathbf{X}$ e σ_i são seus valores singulares. A decomposição em valores singulares de $\mathbf{X}$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{C}^T\tag{3.20}$$

onde $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n]$, $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n]$ e $\mathbf{D} = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$, é uma matriz diagonal, assumindo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$.

Ainda, de acordo com o teorema SVD, o número de autovalores não-nulos da matriz de estrutura é igual ao número de autovalores não-nulos da matriz de covariância. Isso significa que se n' (onde $n' \leq n$) é o número de autovalores não-nulos, então:

$$\text{posto } \mathbf{X}\mathbf{X}^T = \text{posto } \mathbf{X}^T\mathbf{X} = n'\tag{3.21}$$

O número de autovetores independentes $\mathbf{c}_i$ suficientes para descrever a dinâmica é igual ao número n' de autovalores não nulos σ_i . O mesmo número corresponde à dimensão de

imersão. A trajetória pode ser descrita na nova base $\{\mathbf{c}_i, i = 1, 2, \dots, n'\}$ através da projeção da matriz de trajetória $\mathbf{X}$ na base $\{\mathbf{c}_i\}$, dada pelo produto $\mathbf{XC}$. A nova matriz de trajetória $\mathbf{XC}$ é descrita pela relação:

$$(\mathbf{XC})^T (\mathbf{XC}) = \mathbf{D}^2 \quad (3.22)$$

A Equação (3.22) expressa o fato que na base $\{\mathbf{c}_i\}$ as componentes da trajetória não estão correlacionadas, uma vez que $\{\mathbf{c}_i\}$ é obtida da diagonalização da matriz de covariância, fato pelo qual pode-se omitir a escolha de uma defasagem (τ). Esse resultado também mostra que cada σ_i^2 é a projeção da média quadrática da trajetória sobre o correspondente $\mathbf{c}_i$. Então, o espectro $\{\sigma_i^2\}$ possui informação sobre a extensão explorada pela trajetória em cada direção $\mathbf{c}_i$ no espaço de imersão. Pode-se pensar na trajetória explorando um elipsóide n' -dimensional, onde os $\{\mathbf{c}_i\}$ dão as direções e os $\{\sigma_i\}$ os comprimentos dos eixos principais do elipsóide (BROOMHEAD; KING, 1986).

No entanto, quando o sistema é perturbado por ruído, a perturbação externa tende a sobrepor-se ao comportamento determinístico e nas direções associadas aos autovalores σ_i pequenos ou nulos o ruído irá dominar.

No caso em que o sistema é perturbado por ruído branco, os valores singulares de $\mathbf{X}$ são expressos de acordo com a relação:

$$\sigma_i^2 = \bar{\sigma}_i^2 + \langle \xi^2 \rangle, i=1, 2, \dots, n \quad (3.23)$$

onde $\bar{\sigma}_i$ são os autovalores associados com a dinâmica determinística e $\langle \xi^2 \rangle$ é a perturbação da matriz de covariância devido ao ruído.

Deste modo, o ruído faz com que todos os valores singulares da matriz de trajetória sejam não-nulos. Portanto, a trajetória parece explorar todas as dimensões do espaço de imersão. Por isso, um método que possa distinguir essas duas contribuições é necessário. A Equação (3.23) indica que no caso de ruído branco, a existência de um piso constante não nulo, em um diagrama chamado espectro singular, que relaciona o tamanho do valor singular com seu índice, é uma característica que pode ser usada para separar as componentes determinísticas, somente as componentes acima desse piso são utilizadas na formação de uma nova matriz de trajetória:

$$\bar{\mathbf{X}} = \sum_{\sigma_i > \text{ruído}} (\mathbf{X} \mathbf{c}_i) \mathbf{c}_i^T \quad (3.24)$$

onde $\bar{\mathbf{X}}$ é a nova matriz de trajetória, filtrada.

Com esse procedimento pode-se reconstruir o espaço de estados eficientemente, livre dos efeitos do ruído presente na série temporal. Além disso, pode-se recuperar a série temporal filtrada, o que torna o SVD uma técnica de filtragem.

O tamanho da janela (n) aplicado à série temporal deve ser adequado. O seguinte critério é suficiente para a escolha desse número.

$$n = 2\pi / (f_c T_s) \quad (3.25)$$

onde f_c é a maior frequência com intensidade significativa presente no sinal em rad/s e T_s é o intervalo de amostragem (BROOMHEAD; KING, 1986).

3.6- Aplicação do SVD na série temporal do modelo de Lorenz

As equações de Lorenz são resultado de uma modelagem simples do movimento de convecção atmosférica. Para verificar a eficácia do método SVD, será reconstruído o espaço de estados de Lorenz utilizando-se somente a série temporal de uma solução (x), determinada via simulação numérica. As equações de Lorenz são:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \vartheta(y - x) \\ \dot{y} &= \beta x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{3.26}$$

onde ϑ , β e $b > 0$ são os parâmetros do sistema e x , y e z são os estados (STROGATZ, 1994).

A série temporal é contaminada com ruído branco, a Figura 3.6 mostra um trecho da série temporal do modelo de Lorenz sem ruído, e com ruído branco, respectivamente.

Figura 3.6- Série temporal do modelo de Lorenz: a) sem ruído e b) contaminada por ruído branco.

Para determinação da janela n , utiliza-se o espectro de frequências em decibéis:

Figura 3.7- Espectro de frequências para a série temporal do modelo de Lorenz com ruído.

A maior frequência significativa no sinal é aproximadamente 7 Hz. Aplicando a Equação (3.25), encontra-se $n = 14$.

O espectro singular para essa série é construído utilizando os valores singulares obtidos pela Equação (3.19), está representado na Figura 3.8.

Figura 3.8- Espectro singular da série temporal do modelo de Lorenz: três valores singulares acima do piso.

Nota-se da Figura 3.8 a presença de três valores singulares acima do piso de ruído, indicando que a dimensão de imersão é três, de acordo com a dimensão do sistema dinâmico.

Somente esses três valores singulares serão utilizados na reconstrução, conforme a Equação (3.24).

A Figura 3.9 mostra a projeção em duas dimensões do espaço de estados reconstruído por SVD e o original, obtido diretamente por simulação numérica das equações de Lorenz.

Figura (3.9)- Projeção em duas dimensões: a) Espaço de estados reconstruído por SVD. b) Espaço de estados original, obtido diretamente das equações por simulação numérica.

Nota-se a semelhança entre os espaços de estados original e o reconstruído a partir de uma série temporal com ruído, a dimensão encontrada pela Figura 3.8 é a mesma do atrator original.

Para mostrar os efeitos do ruído no Método da Defasagem (MOD), este será aplicado na mesma série temporal, utilizando o método da Informação Mútua para a determinação do tempo de defasagem τ . A série temporal não passou por nenhum tipo de filtro. A Figura 3.10 mostra o gráfico da informação mútua média para a determinação da defasagem.

Figura 3.10- Determinação da defasagem τ por Informação Mútua.

Segundo Fraser & Swiney (1986) o valor da defasagem τ ideal é o correspondente ao primeiro mínimo local de $I(\tau)$. Pela Figura 3.10, esse mínimo ocorre aproximadamente em $\tau = 20$.

O espaço de estados reconstruído das equações de Lorenz (ver Equação (3.26)) pelo MOD com a defasagem obtida pelo método da Informação Mútua é apresentado na Figura 3.11.

Figura 3.11- Espaço de estados do modelo de Lorenz reconstruído pelo Método da Defasagem

Comparando com os resultados apresentados na Figura 3.9 o efeito do ruído fica bem claro nas trajetórias. Além disso, ocorreram deformações, indicando que a defasagem encontrada provavelmente não é a ideal.

O método da Informação Mútua para a determinação do τ é o mais indicado em caso de sistemas não-lineares. No entanto, o Método da Autocorrelação tem sido utilizado (SAVI, 2006). Neste método, a defasagem ideal corresponde ao primeiro zero da função de autocorrelação. Para essa série temporal, o primeiro zero ocorre em $\tau \approx 208$. A Figura 3.12 mostra a determinação de τ por Autocorrelação e o espaço de estados reconstruído pelo Método da defasagem, utilizando a mesma série temporal.

Figura 3.12- a) Determinação da defasagem por autocorrelação. b) Espaço de estados reconstruído pelo Método da Defasagem com τ determinado por autocorrelação.

No caso da Figura 3.12, fica bem claro o efeito do ruído na reconstrução do espaço de estados pelo método da defasagem, uma vez que o atrator encontrado está mal definido. Nota-se também, comparando as Figuras 3.11 e 3.12 que usar a função de Autocorrelação para a

determinação da defasagem é menos confiável que o método da Informação Mútua.

Os efeitos do ruído podem ser minimizados através da filtragem digital do sinal. Na mesma série utilizada nas reconstruções anteriores serão aplicados os filtros de Mínimos Quadrados, Mediana e SVD. Detalhes sobre os filtros de Mínimos Quadrados e Mediana podem ser encontrados em Vaseghi (2000) e Pratt (1991).

A Figura 3.13 mostra a série temporal com ruído e a filtrada por um filtro de Mínimos Quadrados. Nota-se que na filtragem a informação é deslocada no tempo, o mesmo efeito acontece com a aplicação de filtros de Média Móvel.

Figura 3.13- Série temporal de Lorenz sem filtragem e filtrada por um filtro de mínimos quadrados, observa-se o aspecto de defasamento do sinal filtrado.

Um filtro de mediana foi aplicado à série e o resultado é apresentado na Figura 3.14. Como pode ser observado, a informação contida nos picos do sinal é perdida com a filtragem, além disso nota-se a presença de ruído no sinal filtrado.

Figura (3.14)- Série temporal de Lorenz com ruído e filtrada por um filtro de mediana (sobrepostas), apesar de não ocorrer defasagem, a informação nos picos do sinal é perdida.

A mesma série passa pela filtragem via SVD, a Figura 3.14 mostra que o sinal filtrado não sofre defasagem ou perda de informação.

Figura (3.14)- Série temporal de Lorenz original e filtrada por SVD (sobrepostas), a informação não é perdida nos picos e o sinal não está defasado.

Os resultados obtidos pela aplicação do método da decomposição em valores singulares na série temporal de Lorenz mostram que o método SVD é eficaz e menos suscetível a erros que

o método da defasagem para reconstrução do espaço de estados. A série temporal foi filtrada de maneira simples e eficaz utilizando SVD.

A técnica da reconstrução do espaço de estados procura obter um espaço de estados do sistema dinâmico estudado similar ao original, sem um modelo matemático. Desta forma, não tem como comparar com o espaço de estados real. Por isso, quanto menores as chances de erro, melhor, e a reconstrução do espaço de estados por SVD tem se mostrado muito mais segura.

CAPÍTULO 4

ANALISE DE SÉRIES TEMPORAIS AEROELÁSTICAS USANDO DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES

4.1- Introdução

A modelagem de sistemas dinâmicos aeroelásticos não-lineares não é trivial, especialmente quando não-linearidades devido à separação do escoamento aerodinâmico são presentes (MARQUES, 1997). Neste caso, a análise de séries temporais aeroelásticas pode ser mais confiável que a aproximação por modelos de ordem reduzida. Com a aquisição dos sinais de um sistema aeroelástico experimental é possível analisar esse sistema através do espectro de frequências e reconstrução do espaço de estados.

Um modelo de asa foi construído e ensaiado em túnel de vento para a aquisição de séries temporais aeroelásticas. A construção do modelo de asa, bem como a descrição dos equipamentos, instalações do laboratório, procedimentos de aquisição dos dados e os dados obtidos são apresentados nesse capítulo.

Algumas séries temporais aeroelásticas obtidas são analisadas em frequência, via Transformada de Fourier e pelo espaço de estados, reconstruídos via SVD. Algumas comparações com o método da defasagem (MOD) são feitas, como a aplicação do método da

defasagem em uma série temporal aeroelástica filtrada por SVD.

4.2- Descrição do experimento

O modelo para ensaio é representativo de uma asa reta, retangular de baixo alongamento. A estrutura principal é feita de laminado de fibra de vidro e resina epóxi, revestida por espuma de alta densidade (*styrofoam*[®]) e folha de mogno de 2mm de espessura, para adquirir perfil aerodinâmico. O perfil aerodinâmico da asa é baseado no aerofólio NACA0012 da raiz até a ponta, sendo a envergadura de 800mm e a corda de 290mm resultando em um alongamento de 2,76. A estrutura principal possui uma taxa de afilamento de 1:1,67, sendo a largura da raiz igual a 250mm.

A Figura 4.1 mostra detalhes da construção. A Figura 4.2 ilustra a montagem final do modelo. As dimensões do modelo foram determinadas previamente utilizando um modelo em elementos finitos. O modelo em elementos finitos considerou apenas a estrutura principal em termos de uma placa plana afilada em material composto. Foram testadas várias configurações, com diferentes números de camadas de tecido de fibra de vidro e resina. O modelo final considerado tem vinte camadas de fibra de vidro impregnadas com resina epóxi.

Figura 4.1- a) Materiais para laminação da estrutura principal do modelo de asa. b) e c) Styrofoam[®] trabalhado para a carenagem da asa (perfil NACA 0012)

O revestimento da estrutura principal foi segmentado no sentido da corda a cada $100mm$, para evitar a interferência da espuma e do mogno na rigidez estrutural do modelo.

Figura 4.2- Montagem final do modelo

Os ensaios foram realizados no túnel de vento do Laboratório de Aerodinâmica da EESC-USP. O túnel de vento de circuito fechado possui uma câmara de testes com secção transversal de $1300 \times 1400mm$, a velocidade máxima de projeto do escoamento é de $50m/s$, com nível de turbulência de $0,3\%$. A Figura 4.3 ilustra o túnel da EESC-USP.

Figura 4.3- Túnel de vento do Laboratório de Aerodinâmica - EESC-USP

O modelo de asa foi fixado a uma plataforma giratória, comandada por um motor elétrico (THOMSON^{®1} TMC-1000 e amplificador THOMSON[®] TD-50), para propiciar variação do ângulo de incidência. As Figuras 4.4-a e 4.4-b ilustram a montagem.

Figura 4.4- Montagem do motor elétrico no modelo de asa e fixação na parte inferior da seção de testes do túnel.

Foram distribuídos nove extensômetros ao longo de três linhas na superfície da estrutura principal. A primeira e a última linha possuem três extensômetros (KYOWA^{®2} uniaxial KFG-10-120-C1-11) cada, enumerados de 1 a 3 e 7 a 9, respectivamente, todos para captar movimentos de flexão. A linha intermediária possui três extensômetros (KYOWA[®] para torque KFC-2-D2-11), enumerados de 4 a 6, para captar movimentos de torção. A Figura 4.5 mostra a disposição dos extensômetros, na estrutura principal do modelo de asa.

O modelo de asa foi fixado externamente à parte inferior da seção de ensaio do túnel através de um suporte feito de perfis U de aço, projetado para evitar a interferência por ruídos vibratórios externos. Tal suporte foi dimensionado para que a raiz da asa ficasse alinhada com a superfície inferior da seção de testes do túnel. A Figura 4.6 mostra o suporte já instalado na seção de ensaio do túnel.

A Figura 4.7 mostra o modelo de asa já instalado na seção de ensaio e a Figura 4.8 ilustra a montagem completa do modelo de asa no túnel de vento.

Figura 4.5- Distribuição dos extensômetros na estrutura principal, esquema e foto.

¹Thomson Industries, Inc., Port Washington, NY, USA.

²KYOWA Electronics Instruments CO., LTD., 3-5-1, Chofugaoka, Chofu, Tokyo 182-8520, Japan.

Figura 4.6- a) Suporte de aço montado na parte externa inferior da seção de ensaio. b) Visão do interior da seção.

Figura 4.7- Seção de ensaio do túnel com o modelo de asa instalado: Visão frontal (a) e detalhe (b)

Figura 4.8- Ilustração da montagem completa do modelo no túnel de vento.

Com o túnel de vento em funcionamento, o sistema foi excitado, variando a posição da plataforma e conseqüentemente, o ângulo de incidência da asa. A resposta aeroelástica foi obtida dos sinais dos extensômetros. A Figura 4.9 é um diagrama que mostra a seqüência de eventos durante o experimento.

Figura 4.9- Diagrama de blocos que representa a sucessão de eventos no experimento

A aquisição dos dados e o controle do motor elétrico foram realizados por um sistema de aquisição (bloco 1 da Figura 4.9) utilizando uma placa controladora dSPACE^{®3} DS1103, com um processador PowerPC de 400MHz e 128 Mb de memória RAM.

Para programar o sistema de aquisição, foi utilizado o ambiente MATLAB/SIMULINK[®] juntamente com uma interface para tempo real RTI e RTI-MP.

O controle do motor elétrico é baseado em um controlador PID convencional, implementado em ambiente MATLAB/SIMULINK[®] e compilado no processador da placa dSPACE[®] DS1103. Assim, o sinal de excitação ou movimento da plataforma giratória (bloco 2 da Figura 4.9 é produzido, sendo o sinal de realimentação para o controlador enviado através do encoder incluído no motor elétrico (para posição angular). O motor elétrico é acionado pelo

³dSPACE GmbH, Technologiepark 25, D-33100, Paderborn, Germany.

amplificador THOMSON[®] TD-50.

Tendo sido fornecido um sinal para o movimento da plataforma (bloco 4 da Figura 4.9), os movimentos aeroelásticos sofridos pela asa (bloco 5 da Figura 4.9) no escoamento aerodinâmico foram capturados pelos extensômetros colados na estrutura principal (bloco 6 da Figura 4.9). O condicionador e amplificador HBM^{®4} KWS 3073 foi usado para energizar as pontes de extensômetros e para amplificar os sinais oriundos dos mesmos. Por uma limitação de número de pontes para extensômetros, só foi possível a captação de três sinais simultâneos por ensaio, foram então realizados ensaios separados para a aquisição dos sinais de cada linha de extensômetros, tomando todo o cuidado para que os mesmos sinais de excitação e condições do escoamento fossem repetidos para cada conjunto de extensômetros.

Os sinais foram capturados diretamente pelo sistema de aquisição dSPACE[®], com frequência de aquisição de 100 aquisições por segundo e armazenados em um computador (bloco 8 da Figura 4.9). Os equipamentos de aquisição são mostrados na Figura 4.10.

Figura 4.10- Equipamentos utilizados na aquisição dos dados

⁴Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, Im Tiefen See 45, D-64293 Darmstadt, Germany.

A velocidade do escoamento foi variada em uma faixa de 9,0 m/s a 17,0 m/s durante os ensaios através do controle do inversor de frequência do motor elétrico que aciona o ventilador do túnel. A velocidade do escoamento é indicada por um manômetro Betz, conectado a um tubo de Pitot na seção de ensaio e às informações de temperatura e pressão atmosférica local.

O motor elétrico variava o ângulo de incidência com excitações do tipo oscilatórias para condições de altos ângulos de incidência. Nesses casos as oscilações ocorrem em torno de um valor médio de ângulo de incidência igual a 9,5°.

Os parâmetros dos sinais oscilatórios para grandes ângulos de incidência são apresentados nas Tabelas 4.1 e 4.2, onde α_A é a amplitude do movimento da plataforma giratória (ângulo de incidência) em graus, ω é a frequência de oscilação da plataforma giratória em rad/s e k é a frequência reduzida, definida por:

$$k = \frac{\omega c}{V} \quad (4.1)$$

onde c é a corda do perfil aerodinâmico e V é a velocidade do escoamento (em m/s) na seção de ensaio do túnel de vento.

Para velocidades em torno de 11,1 m/s o sistema foi excitado com oscilações de 3 rad/s e 8 rad/s , para velocidades em torno de 13,6 m/s o sistema foi excitado com oscilações de 3 rad/s , 8 rad/s e 10 rad/s e em velocidades em torno de 16,8 m/s , o sistema foi excitado com oscilações de 8 rad/s e 13 rad/s . Em todos os casos, como ilustrado na Figura 4.11, o modelo oscilava partindo de um ângulo inicial de 9,5 graus com $\alpha_A = 5,5^\circ$

Figura 4.11- O modelo oscilava com $\alpha_A = 5,5$ partindo de um ângulo inicial de $9,5^\circ$, atingindo um ângulo de incidência de até 15°

Tabela 4.1- Caso de Flexão: Extensômetros 1-2-3, $\alpha_A = 5,5$

$\omega \left(\frac{rad}{s} \right)$	$V \left(\frac{m}{s} \right)$	k
3,0; 8,0	11,19	0,0778; 0,2073
3,0; 8,0; 10,0	13,58	0,0641; 0,1709; 0,2136
8,0; 13,0	16,89	0,1374; 0,2233

Tabela 4.2- Caso de Torção: Extensômetros 4-5-6, $\alpha_A = 5,5$

$\omega \left(\frac{rad}{s} \right)$	$V \left(\frac{m}{s} \right)$	k
3,0; 8,0	11,12	0,0783; 0,20873
3,0; 8,0; 10,0	13,60	0,0640; 0,1706; 0,2132
8,0; 13,0	16,93	0,1370; 0,2227

Como a amplitude máxima do sinal que comanda o ângulo de ataque é de $5,5^\circ$ e as oscilações ocorrem em torno de $9,5^\circ$, ângulos de ataque de até 15° podem ser alcançados. Nessas condições, os efeitos do escoamento separado certamente estarão presentes. Alguns sinais obtidos nessas condições serão analisados nas próximas seções.

4.3- Análise em frequência de séries temporais aeroelásticas

Uma análise em frequência será aplicada em séries temporais aeroelásticas obtidas no experimento para altos ângulos de ataque. A análise inicial é feita nas séries temporais obtidas do extensômetro 1, que capta movimentos de flexão da asa (ver Figura 4.5), para três velocidades diferentes do escoamento, sem variação da frequência de oscilação da plataforma giratória. Em seguida, a análise será feita com a variação da frequência de oscilação da plataforma para uma velocidade fixa, também para extensômetro 1.

Finalmente, o mesmo procedimento é realizado para o extensômetro 5, que capta os movimentos de torção, inicialmente com variação da velocidade e posteriormente com variação da frequência de oscilação da plataforma. Os parâmetros utilizados estão nas Tabelas 4.1 e 4.2.

4.3.1- Evolução do espectro de frequências com a variação da velocidade do escoamento: caso de flexão

As séries temporais captadas do extensômetro 1 da Figura 4.5, que capta movimento de flexão da asa, com frequência de oscilação de 8 rad/s e velocidades do escoamento de $11,19 \text{ m/s}$, $13,58 \text{ m/s}$ e $16,89 \text{ m/s}$, são apresentadas nas Figuras 4.12 a 4.14.

Figura 4.12- Série temporal para o extensômetro 1, plataforma oscilando a 8 rad/s , velocidade do escoamento $11,19 \text{ m/s}$.

Figura 4.13- Série temporal para o extensômetro 1, plataforma oscilando a 8 rad/s , velocidade do escoamento $13,58 \text{ m/s}$.

Figura (4.14)- Série temporal para o extensômetro 1, plataforma oscilando a 8 rad/s , velocidade do escoamento $16,89 \text{ m/s}$.

Para que o espectro de frequências apresente somente frequências associadas à dinâmica presente em cada série temporal, elas são filtradas por SVD anteriormente à aplicação da FFT. A Figura 4.15 apresenta a evolução do espectro de frequências com a velocidade do escoamento.

Figura 4.15- Evolução do espectro de frequências para o extensômetro 1 (flexão), oscilação de 8 rad/s e velocidades do escoamento de $11,19 \text{ m/s}$, $13,58 \text{ m/s}$ e $16,89 \text{ m/s}$.

Nota-se a existência de uma região de frequências principais, de 1Hz a $1,6\text{Hz}$ nos três casos, o que está condizente com a frequência de oscilação da plataforma giratória, pois $8 \text{ rad/s} \approx 1,3\text{Hz}$. Nota-se também a existência de mais duas regiões de frequências maiores, uma em torno de $2,6\text{Hz}$ e outra em torno de $5,2\text{Hz}$, porém com menor magnitude.

Com o aumento da velocidade, as magnitudes de todos os picos aumentam. Isso ocorre porque com o aumento da velocidade do escoamento, a força de deformação na asa é mais

intensa, resultando em ângulos de ataque mais elevados, que geram picos de sustentação seguidos de estol. No momento do estol, o escoamento próximo à asa torna-se turbulento, gerando oscilações de maior frequência enquanto a asa retorna para ângulos de ataque menores, recuperando a sustentação. Quanto maior a deformação, mais intensa é a turbulência. Apesar do aumento na amplitude dos movimentos, não aparecem novas frequências, isso pode sugerir que o sistema não passou por bifurcações com a variação provocada no parâmetro velocidade.

Pela Figura 4.16, para a velocidade mais alta, nota-se que o espectro tem banda larga e apresenta harmônicos de uma frequência principal. Isso pode ser um indicativo de que o sistema apresenta um comportamento caótico (MOON,1992).

Figura 4.16- Espectro de frequências para o extensômetro 1, oscilação em 8 rad/s e velocidade do escoamento de $16,89 \text{ m/s}$.

4.3.2- Evolução do espectro de frequências com a variação da frequência de oscilação da plataforma: caso de flexão

A análise seguinte será para a série temporal gerada pelo extensômetro 1, com velocidade do escoamento fixa em $13,58 \text{ m/s}$ e com variação da frequência de oscilação do motor para 3 rad/s , 8 rad/s e 10 rad/s , o que resulta, pela Equação (4.1) em $k = 0,0641$, $0,1709$ e $0,2136$.

Os parâmetros usados nessa análise estão na Tabela 4.1. As Figuras 4.17 a 4.19 apresentam as três séries temporais utilizadas.

Figura 4.17- Série temporal aeroelástica no extensômetro 1, $V = 13.58m/s$ e $\omega = 3rad/s$.

Figura 4.18- Série temporal aeroelástica no extensômetro 1, $V = 13.58m/s$ e $\omega = 8rad/s$.

Figura 4.19- Série temporal aeroelástica no extensômetro 1, $V = 13.58m/s$ e $\omega = 10rad/s$.

As séries temporais são filtradas por SVD antes da aplicação da FFT, a Figura 4.20 mostra a evolução do espectro de frequências com o aumento da frequência de oscilação da plataforma em termos da frequência reduzida k , calculada pela Equação (4.1).

Figura 4.20- Evolução do espectro de frequências com a variação da frequência de oscilação da plataforma, extensômetro 1 (flexão), para $V = 13.49 m/s$ e $k = 0,0641$; $0,1709$ e $0,2136$.

Pela Figura 4.20 nota-se que o aumento da frequência de oscilação do motor provoca não só o aumento da magnitude das frequências principais, mas também o desaparecimento e o aparecimento de novas frequências. Para $k = 0,0641$, existe uma faixa de frequências menos intensa logo após a faixa principal, com o aumento de k ela não está mais no local e novos

padrões surgem.

Desta forma, com o aumento da frequência reduzida, pode-se presumir que ocorrem bifurcações e o sistema passa a apresentar novos comportamentos. O aumento da magnitude das frequências provavelmente deve-se ao fato de que a variação mais rápida no ângulo de ataque, principalmente nas extremidades no movimento, onde ele é mais alto, favorece a separação do escoamento, provocando turbulência.

Posteriormente será analisado o movimento de torção da asa, utilizando os mesmos parâmetros usados na análise de flexão.

4.3.3- Evolução do espectro de frequências com a variação da velocidade do escoamento: caso de torção

As séries temporais captadas do extensômetro 5 da Figura 4.5, que capta movimento de torção da asa, com frequência de oscilação fixa em 8 rad/s e velocidades do escoamento de $11,12 \text{ m/s}$, $13,60 \text{ m/s}$ e $16,93 \text{ m/s}$, são apresentadas nas Figuras 4.21 a 4.23. Os parâmetros utilizados estão na Tabela 4.2.

Figura 4.21- Série temporal aeroelástica no extensômetro 5, $V = 11,12 \text{ m/s}$ e $\omega = 8 \text{ rad/s}$.

Figura 4.22- Série temporal aeroelástica no extensômetro 5, $V = 13,60 \text{ m/s}$ e $\omega = 8 \text{ rad/s}$.

Figura 4.23- Série temporal aeroelástica no extensômetro 5, $V = 16,93 \text{ m/s}$ e $\omega = 8 \text{ rad/s}$.

As séries temporais são filtradas por SVD antes da aplicação da FFT, a Figura 4.24 mostra a evolução do espectro de frequências com o aumento da velocidade do escoamento aerodinâmico.

Figura 4.24- Evolução do espectro de freqüências com a velocidade para o extensômetro 5 (torção), oscilação de 8 rad/s e velocidades do escoamento de $11,20 \text{ m/s}$, $13,60 \text{ m/s}$ e $16,93 \text{ m/s}$.

Na evolução do movimento de torção da asa com o aumento da velocidade ocorrem as mesmas alterações que ocorrem com o movimento de flexão. Os picos de freqüência aumentam em magnitude, mas não surgem novos picos. A explicação para o aumento da magnitude é a mesma exposta no caso de flexão, quanto maior a velocidade do escoamento, maior é o carregamento aerodinâmico e conseqüentemente, a deformação e a turbulência no estol, são mais intensas.

A evolução do espectro de freqüências com a variação da freqüência de oscilação da plataforma será estudada na próxima seção.

4.3.4- Evolução do espectro de frequências com a variação da frequência de oscilação da plataforma: caso de torção

A evolução do espectro de frequências, com velocidade do escoamento fixa e variação da frequência de oscilação da plataforma é feita com $V = 13,60 \text{ m/s}$ e $\omega = 3 \text{ rad/s}$, 8 rad/s e 10 rad/s , o que resulta, pela Equação (4.1) em $k = 0,0640$, $0,1706$ e $0,2132$. As séries temporais utilizadas são expostas nas Figuras 4.25 a 4.27.

Figura 4.25- Série temporal aeroelástica no extensômetro 5, $V = 13,60 \text{ m/s}$ e $\omega = 3 \text{ rad/s}$

Figura 4.26- Série temporal aeroelástica no extensômetro 5, $V = 13,60 \text{ m/s}$ e $\omega = 8 \text{ rad/s}$

Figura 4.27- Série temporal aeroelástica no extensômetro 5, $V = 13,60 \text{ m/s}$ e $\omega = 10 \text{ rad/s}$

As séries temporais são filtradas por SVD antes da aplicação da FFT, a Figura 4.28 mostra a evolução do espectro de frequências com o aumento da frequência de oscilação da plataforma em termos de frequência reduzida, obtida pela Equação (4.1).

Figura 4.28- Evolução do espectro de frequências com a variação da frequência de oscilação da plataforma para o extensômetro 5 (torção), velocidade do escoamento de $13,60 \text{ m/s}$, $k = 0,0640$, $0,1706$ e $0,2132$.

Como no caso de movimento de flexão da asa, com a variação da frequência reduzida, além do aumento na amplitude dos picos de frequência, ocorrem alterações significativas, como o surgimento de novos picos. Isso sugere que o sistema passou a apresentar novos comportamentos, ou seja, passou por bifurcações.

Para uma análise mais detalhada sobre a evolução do sistema nos casos analisados utiliza-se a reconstrução do espaço de estados. Através da reconstrução do espaço de estados é possível conseguir mais informações sobre o sistema dinâmico, como a dimensão do sistema e a forma dos atratores presentes.

4.4- Reconstrução do espaço de estados de séries temporais aeroelásticas utilizando SVD

Os espaço de estados de séries temporais aeroelásticas serão reconstruídos pela técnica da decomposição em valores singulares, utilizando as mesmas séries temporais em que foram feitas as análises em frequência, para que seja possível comparar os resultados.

Inicialmente serão estudados casos de flexão, com a evolução das trajetórias no espaço de estados com a variação da velocidade do escoamento aerodinâmico e com variação da frequência reduzida. Em seguida, as mesmas análises serão feitas para movimento de torção.

4.4.1- Evolução do espaço de estados com a variação da velocidade do escoamento: caso de flexão

A determinação da janela n para a aplicação do método SVD de cada série temporal se dá pela análise em frequência da série temporal, com a escala da magnitude em decibéis. As séries temporais utilizadas são as mostradas nas Figuras 4.12 a 4.14 e os parâmetros estão na Tabela 4.1.

As Figuras 4.29 a 4.31 mostram o espectro de frequências para os casos de velocidades do escoamento de $11,19\text{ m/s}$, $13,58\text{ m/s}$ e $16,89\text{ m/s}$, n é calculado pela Equação (3.25).

Figura 4.29- Determinação da janela n para o extensômetro 1, $V = 11,19\text{ m/s}$, $\omega = 8\text{ rad/s}$. A maior frequência considerável é aproximadamente 14 Hz , o que resulta em $n \approx 7$

Figura 4.30- Determinação da janela n para o extensômetro 1, $V = 13,58 m/s$, $\omega = 8 rad/s$. A maior frequência considerável é aproximadamente $15 Hz$, o que resulta em $n \approx 7$.

Figura 4.31- Determinação da janela n para o extensômetro 1, $V = 16,89 m/s$, $\omega = 8 rad/s$. A maior frequência considerável é aproximadamente $16 Hz$, o que resulta em $n \approx 6$.

Para $V = 11,19$ e $V = 13,58$, encontra-se $n \approx 7$, para $V = 16,89$ encontra-se $n \approx 6$.

As Figuras 4.32 a 4.34 mostram o espectro singular para cada série temporal.

Figura 4.32- Espectro singular para o extensômetro 1, $V = 11,19 \text{ m/s}$, $\omega = 8 \text{ rad/s}$. Três valores singulares acima do piso.

Figura 4.33- Espectro singular para o extensômetro 1, $V = 13,58 \text{ m/s}$, $\omega = 8 \text{ rad/s}$. Três valores singulares acima do piso.

Figura 4.34- Espectro singular para o extensômetro 1, $V = 16,89 \text{ m/s}$, $\omega = 8 \text{ rad/s}$. Três valores singulares acima do piso.

Pelos espectros singulares, nota-se a existência de três valores singulares acima do piso de ruído, o que leva à conclusão que o sistema dinâmico é tridimensional. Somente esses três autovalores serão utilizados para a reconstrução dos espaços de estados.

As Figura 4.35 a 4.37 ilustram as projeções nos planos formados pelos eixos e os atratores tridimensionais obtidos pela reconstrução do espaço de estados das séries temporais obtidas do extensômetro 1, com $\omega = 8 \text{ rad/s}$ e variação da velocidade do escoamento.

Figura 4.35- a) Projeções do atrator reconstruído nos três planos formados pelos estados. b) Atrator reconstruído em três dimensões, $\omega = 8 \text{ rad/s}$, $V = 11,19 \text{ m/s}$.

Figura 4.36- a) Projeções do atrator reconstruído nos três planos formados pelos estados. b) Atrator reconstruído em três dimensões, $\omega = 8 \text{ rad/s}$, $V = 13,58 \text{ m/s}$.

Figura 4.37- a) Projeções do atrator reconstruído nos três planos formados pelos estados. b) Atrator reconstruído em três dimensões, $\omega = 8 \text{ rad/s}$, $V = 16,89 \text{ m/s}$.

A projeção nas duas dimensões de maior amplitude facilita a visualização do atrator e será útil na análise da evolução do atrator com o aumento da velocidade do escoamento, que é apresentada na Figura 4.38.

Figura 4.38- Evolução do espaço de estados projetado em duas dimensões com o aumento da velocidade do escoamento, $\omega = 8 \text{ rad/s}$.

Percebe-se que os atratores parecem ter a mesma estrutura para as três velocidades, ocorre somente um aumento na amplitude dos estados, isso confirma a conclusão da análise espectral (Figura 4.15) de que não houve alteração na dinâmica, com o aumento da velocidade. A forma dos atratores também reforça a suspeita de que o movimento é caótico. As trajetórias apresentam mais de um centro de rotação, o que segundo Yalçinkaya & Lai (1997) é típico do comportamento caótico, as trajetórias parecem não se repetir e não se cruzar, ocupando uma grande região no espaço de estados.

As laçadas possuem uma frequência maior que o movimento dominante e tem menor magnitude, esses movimentos são detectados também na análise em frequência, são os picos menores e de maior frequência na Figura 4.15, que podem ser relacionados à oscilação devida à excitação provocada pela turbulência, inerente à separação do escoamento nos pontos onde o ângulo de ataque é maior.

4.4.2- Evolução do espaço de estados com a variação da frequência de oscilação da plataforma: caso de flexão

A análise espectral das séries temporais obtidas com a variação da frequência de oscilação da plataforma mostrou que o sistema dinâmico passou a apresentar novos comportamentos, que resultaram no surgimento de novas frequências. No espaço de estados isso significa uma mudança nos tipos ou na forma dos atratores presentes. A evolução do espaço de estados com a variação da frequência de oscilação será estudada, as séries temporais utilizadas estão nas Figuras 4.17 a 4.19 e os parâmetros estão na Tabela 4.1.

Os espaços de estados serão reconstruídos por SVD, novamente, para a determinação da janela n utiliza-se a análise em frequência.

Figura 4.39- Determinação da janela n para o extensômetro 1, $V = 13,49 \text{ m/s}$, $\omega = 3 \text{ rad/s}$. A maior frequência considerável é aproximadamente 12 Hz , o que resulta em $n \approx 8$.

Figura 4.40- Determinação da janela n para o extensômetro 1, $V = 13,49 \text{ m/s}$, $\omega = 8 \text{ rad/s}$. A maior frequência considerável é aproximadamente 15 Hz , o que resulta em $n \approx 6$.

Figura 4.41- Determinação da janela n para o extensômetro 1, $V = 13,49m/s$, $\omega = 10rad/s$. A maior frequência considerável é aproximadamente $20Hz$, o que resulta em $n \approx 5$.

Utilizando os valores de n encontrados pelas Figuras 4.39 a 4.41, constrói-se o espectro singular para cada série temporal, para a determinação da dimensão do sistema e para a escolha dos autovalores que serão utilizados na reconstrução.

Figura 4.42- Espectro singular para o extensômetro 1, $V = 13,49m/s$, $\omega = 3rad/s$. Três valores singulares acima do piso.

Figura (4.43)- Espectro singular para o extensômetro 1, $V = 13,49m/s$, $\omega = 8rad/s$. Três valores singulares acima do piso.

Figura 4.44- Espectro singular para o extensômetro 1, $V = 13,49m/s$, $\omega = 10rad/s$. Três valores singulares acima do piso.

Pelas Figuras 4.42 a 4.44, encontra-se dimensionalidade 3, somente esses três valores singulares serão utilizados na reconstrução. As Figuras 4.45 a 4.47 exibem os atratores tridimensionais e suas projeções nos três planos formados pelos estados.

Figura 4.45- Flexão: a) Projeções do atrator reconstruído nos três planos formados pelos estados. b) Atrator reconstruído em três dimensões, $\omega = 3 \text{ rad/s}$, $V = 13,49 \text{ m/s}$.

Figura 4.46- Flexão: a) Projeções do atrator reconstruído nos três planos formados pelos estados. b) Atrator reconstruído em três dimensões, $\omega = 8 \text{ rad/s}$, $V = 13,49 \text{ m/s}$.

Figura 4.47- Flexão: a) Projeções do atrator reconstruído nos três planos formados pelos estados. b) Atrator reconstruído em três dimensões, $\omega = 10 \text{ rad/s}$, $V = 13,49 \text{ m/s}$.

A Figura 4.48 mostra a evolução do espaço de estados reconstruídos por SVD projetado em duas dimensões, com a variação da frequência reduzida k , calculada pela Equação (4.1).

Figura 4.48- Flexão: Evolução do espaço de estados com a variação da frequência reduzida para $V = 13.58 \text{ m/s}$, $k = 0,0641$; $0,1709$ e $0,2136$.

Nota-se que houve uma mudança na estrutura do atrator, principalmente entre a menor frequência e as demais, confirmando o que era esperado após a análise espectral.

Com o aumento da frequência de oscilação do motor, conseqüentemente, da frequência reduzida, o sistema dinâmico provavelmente passa por bifurcações, alterando o comportamento das trajetórias no espaço de estados. As regiões onde ocorrem as laçadas correspondem aos picos de maior frequência na Figura 4.20, nota-se que para $k = 0,0641$ (ver Figura 4.20) existe um pico

principal e um menor muito próximo, olhando para a Figura 4.48 pode-se relacionar o pico maior com o movimento mais externo, de maior amplitude e menor frequência e o pico menor com o movimento mais interno, de menor amplitude.

Na mudança de $k = 0,1709$ para $k = 0,2136$ na Figura 4.20 percebe-se um grande aumento na magnitude das frequências próximas a $5Hz$. Isso pode ser observado na Figura 4.48, quando $k = 0,1709$ próximo à $c1 = -0,1$ ocorrem duas pequenas laçadas. Quando $k = 0,2136$ elas desaparecem dando lugar a uma única laçada bem maior. As duas pequenas laçadas não aparecem como dois picos na Figura 4.20 porque provavelmente possuem frequências bem próximas.

Nas duas próximas seções serão estudados os espaços de estados reconstruídos com a série temporal obtida do extensômetro 5, para movimento de torção da asa.

4.4.3- Evolução do espaço de estados com a variação da velocidade do escoamento: caso de torção

A evolução do espaço de estados para torção com a variação da velocidade do escoamento será estudada, as séries temporais utilizadas estão nas Figuras 4.21 a 4.23 e os parâmetros estão na Tabela 4.2.

Os espaços de estados serão reconstruídos por SVD, para a determinação da janela n utiliza-se as Figuras 4.49 a 4.51 e a Equação (3.25).

Figura 4.49- Determinação da janela n para o extensômetro 5, $V = 11,12m/s, \omega = 8rad/s$. A maior frequência considerável é aproximadamente $4Hz$, o que resulta em $n \approx 25$.

Figura 4.50- Determinação da janela n para o extensômetro 5, $V = 13,60m/s, \omega = 8rad/s$. A maior frequência considerável é aproximadamente $7Hz$, o que resulta em $n \approx 14$.

Figura 4.51- Determinação da janela n para o extensômetro 5, $V = 16,93m/s$, $\omega = 8rad/s$. A maior frequência considerável é aproximadamente $9Hz$, o que resulta em $n \approx 14$.

Utilizando os valores de n encontrados pelas Figuras 4.49 a 4.51, constrói-se o espectro singular para cada série temporal, para a determinação da dimensão do sistema e para a escolha dos autovalores que serão utilizados na reconstrução.

Figura 4.52- Espectro singular para o extensômetro 5, $V = 11,12m/s$, $\omega = 8rad/s$. Três valores singulares acima do piso.

Figura 4.53- Espectro singular para o extensômetro 5, $V = 13,60 \text{ m/s}$, $\omega = 8 \text{ rad/s}$. Três valores singulares acima do piso.

Figura 4.54- Espectro singular para o extensômetro 5, $V = 16,93 \text{ m/s}$, $\omega = 8 \text{ rad/s}$. Três valores singulares acima do piso.

Pelas Figuras 4.52 a 4.54, encontra-se dimensionalidade 3, o que confirma o resultado obtido para movimento de flexão. Novamente, somente esses três valores singulares serão utilizados nas reconstruções dos espaços de estados. As Figuras 4.55 a 4.57 exibem os atratores tridimensionais e as respectivas projeções nos três planos formados pelos estados.

Figura 4.55- Torção: a) Projeções do atrator reconstruído nos três planos formados pelos estados. b) Atrator reconstruído em três dimensões, $\omega = 8 \text{ rad/s}$, $V = 11,12 \text{ m/s}$.

Figura 4.56- Torção: a) Projeções do atrator reconstruído nos três planos formados pelos estados. b) Atrator reconstruído em três dimensões, $\omega = 8 \text{ rad/s}$, $V = 13,60 \text{ m/s}$.

Figura 4.57- Torção: a) Projeções do atrator reconstruído nos três planos formados pelos estados. b) Atrator reconstruído em três dimensões, $\omega = 8 \text{ rad/s}$, $V = 16,93 \text{ m/s}$.

A Figura 4.58 mostra a evolução do espaço de estados, para o caso de torção, reconstruídos por SVD e projetado em duas dimensões, com a variação da velocidade do escoamento.

Figura 4.58- Torção: Evolução do espaço de estados com a variação da velocidade do escoamento.
 $\omega = 8 \text{ rad/s}$ e $V = 11,12 \text{ m/s}$, $13,60 \text{ m/s}$ e $16,93 \text{ m/s}$.

Novamente, pela Figura 4.58 confirma-se o que foi encontrado através da análise em frequência (Figura 4.24). Parece não haver alterações significativas na forma do atrator com a variação da velocidade do escoamento, somente a amplitude do movimento aumenta.

4.4.4- Evolução do espaço de estados com a variação da frequência de oscilação da plataforma

A evolução do espaço de estados para torção com a variação da frequência de oscilação da plataforma será estudada, as séries temporais utilizadas estão nas Figuras 4.25 a 4.27 e os parâmetros estão na Tabela 4.2.

Os espaços de estados serão reconstruídos por SVD, para a determinação da janela n utiliza-se as Figuras 4.59 a 4.61 e a Equação (3.25).

Figura 4.59- Determinação da janela n para o extensômetro 5, $V = 13,60 m/s$, $\omega = 3 rad/s$. A maior frequência considerável é aproximadamente 4 Hz, o que resulta em $n \approx 25$.

Figura 4.60- Determinação da janela n para o extensômetro 5, $V = 13,60\text{m/s}$, $\omega = 8\text{rad/s}$. A maior frequência considerável é aproximadamente 7Hz , o que resulta em $n \approx 14$.

Figura 4.61- Determinação da janela n para o extensômetro 5, $V = 13,60\text{m/s}$, $\omega = 10\text{rad/s}$. A maior frequência considerável é aproximadamente 8Hz , o que resulta em $n \approx 12$.

Utilizando os valores de n encontrados pelas Figuras 4.59 a 4.61, constrói-se o espectro singular para cada série temporal, para a determinação da dimensão do sistema e para a escolha dos autovalores que serão utilizados na reconstrução.

Figura 4.62- Espectro singular para o extensômetro 5, $V = 13,60\text{m/s}$, $\omega = 3\text{rad/s}$. Três valores singulares acima do piso.

Figura 4.63- Espectro singular para o extensômetro 5, $V = 13,60\text{m/s}$, $\omega = 8\text{rad/s}$. Três valores singulares acima do piso.

Figura 4.64- Espectro singular para o extensômetro 5, $V = 13,60\text{m/s}$, $\omega = 10\text{rad/s}$. Três valores singulares acima do piso.

Nas Figuras 4.65 a 4.67 os atratores tridimensionais e as projeções nos planos formados pelos eixos para o caso de torção com variação da frequência reduzida são exibidos.

Figura 4.65- Torção: a) Projeções do atrator reconstruído nos três planos formados pelos estados. b) Atrator reconstruído em três dimensões, $\omega = 3 \text{ rad/s}$, $V = 13,60 \text{ m/s}$.

Figura 4.66- Torção: a) Projeções do atrator reconstruído nos três planos formados pelos estados. b) Atrator reconstruído em três dimensões, $\omega = 8 \text{ rad/s}$, $V = 13,60 \text{ m/s}$.

Figura 4.67- Torção: a) Projeções do atrator reconstruído nos três planos formados pelos estados. b) Atrator reconstruído em três dimensões, $\omega = 10 \text{ rad/s}$, $V = 13,60 \text{ m/s}$.

A Figura 4.68 mostra a evolução do espaço de estados, para o caso de torção, reconstruídos por SVD e projetado em duas dimensões, com a variação da frequência de oscilação em termos de frequência reduzida, calculada pela Equação (4.1).

Figura 4.68- Torção: Evolução do espaço de estados com a variação da frequência reduzida.
 $V = 13,60 \text{ m/s}$ e $k = 0,0640, 0,1706$ e $0,2132$.

Pela Figura 4.68, nota-se que a forma do atrator muda com o aumento da frequência reduzida, principalmente de $k = 0,06040$ para $k = 0,1706$.

Esse resultado confirma o ocorrido no caso de flexão, onde também ocorre uma grande mudança entre essas duas frequências. De $k = 0,1706$ para $k = 0,2132$, segundo a análise em frequência (Figura 4.28) também ocorrem alterações, no entanto, pela Figura 4.68 não se nota muita diferença. Provavelmente ocorre o mesmo efeito que ocorreu no caso de flexão da asa (Figura 4.38), ou seja, duas pequenas laçadas tornaram-se uma só, sem muita alteração na forma geral do atrator.

A difícil visualização de pequenas estruturas nos atratores, para o caso de torção é devida à baixa relação sinal-ruído obtida pelos sensores de torção. Nesses casos, o ruído presente na série interfere muito, cobrindo quase que totalmente o comportamento determinístico, somente os movimentos de maior amplitude ficam totalmente visíveis. Isso pode explicar o motivo pelo qual os atratores obtidos das séries temporais de torção não são tão parecidos com os obtidos das séries de flexão, como poderiam ser, pois se trata do mesmo sistema dinâmico.

O método da decomposição em valores singulares para a reconstrução de séries temporais aeroelásticas mostrou-se eficiente, mesmo trabalhando com séries temporais com alto nível de ruído é possível extrair algumas informações.

A decomposição em valores singulares também pode ser utilizada como um filtro que pode ser aplicado às séries temporais sem causar defasagem ou deformação. A aplicabilidade em séries temporais aeroelásticas será testada na próxima seção.

4.5- Filtragem de séries temporais aeroelásticas usando SVD

O método da decomposição em valores singulares pode ser utilizado para a filtragem de uma série temporal. O sinal filtrado pode ser utilizado para diversos fins, como para a aprendizagem de uma rede neural ou para a aplicação de outros métodos de reconstrução do espaço de estados, como o Método da Defasagem.

Utilizando uma série temporal aeroelástica filtrada por SVD, será reconstruído o espaço de estados pelo Método da Defasagem. O espaço de estados reconstruído pelo Método da Defasagem, com a série temporal filtrada por SVD, será comparado com o reconstruído por MOD com a série não filtrada e com o reconstruído por SVD.

A série temporal utilizada será a obtida do extensômetro 3 (ver Figura 4.5), para $V = 16,89 \text{ m/s}$ e $\omega = 8 \text{ Hz}$. O extensômetro 3 foi escolhido pelo fato da relação sinal-ruído ser menor, pois por localizar-se na ponta da asa, o sinal tem menor intensidade devido a menor deformação. A Figura 4.69 mostra a série temporal utilizada e a Figura 4.70 mostra o detalhe da série temporal sem filtro e filtrada por SVD.

Figura 4.69- Série temporal para o extensômetro 3, asa oscilando a 8 rad/s , velocidade do escoamento $16,89 \text{ m/s}$.

Figura 4.70- Detalhe: série temporal aeroelástica sem filtro e filtrada (sobrepostas), extensômetro 3, plataforma oscilando a 8 rad/s , velocidade do escoamento $16,89 \text{ m/s}$.

Nota-se pela Figura 4.69 que o nível de ruído na série temporal é alto, a filtragem por SVD não provocou defasagem ou deformação do sinal.

O espaço de estados para a série temporal sem filtragem será reconstruído pelo Método da Defasagem. A defasagem será determinada por Autocorrelação e Informação Mútua.

O tempo de defasagem encontrado por autocorrelação corresponde ao zero da função autocorrelação, pela Figura 4.71-a), ocorre em $\tau = 23$. Já o obtido por Informação Mútua corresponde ao primeiro mínimo local, no caso $\tau = 8$ (Figura 4.71-b)), o espaço de estados reconstruído com cada uma das defasagens está na Figura 4.72.

Figura 4.71- a) Determinação da defasagem τ por autocorrelação ($\tau \approx 23$). b) Determinação de τ por informação mútua ($\tau = 8$). Série temporal sem filtragem. Extensômetro 3, $\omega = 8 \text{ rad/s}$ e $V = 16,89 \text{ m/s}$.

Figura 4.72- Espaços de estados reconstruídos pelo método da defasagem. a) τ determinado por autocorrelação ($\tau = 23$). b) τ determinado por informação mútua ($\tau = 8$). Extensômetro 3, $\omega = 8 \text{ rad/s}$ e $V = 16,89 \text{ m/s}$.

Nota-se que os dois espaços de estados reconstruídos por defasagem estão completamente corrompidos pelo ruído, não é possível distinguir a dinâmica. Observa-se também a grande diferença na defasagem encontrada por Autocorrelação e Informação Mútua.

Será utilizada agora a série temporal filtrada por SVD (Figura 4.70) para a reconstrução do espaço de estados pelo Método da Defasagem, com τ determinado por Autocorrelação e Informação Mútua.

Figura 4.73- Determinação da defasagem τ . a) Por autocorrelação ($\tau = 23$). b) Por informação mútua ($\tau = 7$). Série temporal filtrada por SVD, extensômetro 3, $\omega = 8 \text{ rad/s}$ e $V = 16,89 \text{ m/s}$.

A defasagem encontrada por Autocorrelação não se alterou com a filtragem, já a obtida por Informação Mútua diminuiu. O espaço de estados reconstruído pelo Método da Defasagem com τ determinado por Autocorrelação e Informação Mútua são apresentados na Figura 4.74.

Figura 4.74- Espaços de estados reconstruídos pelo método da defasagem com a série temporal filtrada por SVD, τ determinado por autocorrelação ($\tau = 23$) e informação mútua ($\tau = 7$). Extensômetro 3, $\omega = 8 \text{ rad/s}$ e $V = 16,89 \text{ m/s}$.

Com a série filtrada, a dinâmica aparece, principalmente no atrator reconstruído com $\tau = 7$. Analisando as duas reconstruções, observa-se que a reconstrução com τ determinado por Informação Mútua mostra mais detalhes do atrator reconstruído, que é parecido com o da Figura 4.37, para $V = 16,89 \text{ m/s}$. O atrator da Figura 4.37 foi obtido pela reconstrução da série temporal do extensômetro 1, que está na mesma linha do extensômetro 3 (Figura 4.5), por estarem localizados na mesma linha e nas mesmas condições de velocidade do escoamento e frequência reduzida, é de se esperar que eles apresentem o mesmo comportamento, porém com amplitudes diferentes, já que o extensômetro 1 localiza-se na raiz da asa e o extensômetro 3 na ponta.

O método da Autocorrelação para a determinação do tempo de defasagem mostrou-se ineficiente. A análise não-linear da dependência, pelo método da Informação Mútua parece mais confiável em séries não-lineares.

O espaço de estados da mesma série temporal será agora reconstruído por SVD, a Figura 4.75 mostra reconstrução por SVD e a por Defasagem com $\tau = 7$ com a série filtrada.

Figura (4.75)- Espaços de estados reconstruídos pelo método SVD e pelo Método da defasagem com a série temporal filtrada por SVD, τ determinado por Informação Mútua ($\tau = 7$). Extensômetro 3, $\omega = 8 \text{ rad/s}$ e $V = 16,89 \text{ m/s}$.

Nota-se que a reconstrução por SVD alinha o atrator de forma que os estados de maior amplitude ficam ortogonais, o atrator reconstruído por Defasagem tem a mesma forma, mas não está alinhado com os eixos.

Os resultados obtidos comprovam a necessidade da filtragem. Dependendo do nível de ruído pode ficar impossível identificar a dinâmica, como observado na Figura 4.72. Os resultados também mostram que a reconstrução do espaço de estados por SVD é mais simples e confiável que por Defasagem, pois diminui as chances de erro e produz um alinhamento melhor do atrator com os eixos.

5- CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A análise não-linear de sistemas dinâmicos aeroelásticos através de modelos ou experimentos ainda é um desafio, principalmente nos dias atuais, em que velocidade, desempenho e leveza estão se tornando fundamentais.

A modelagem matemática de fenômenos não-lineares baseia-se em aproximações, o que pode afastar o modelo da realidade.

Uma saída para esse problema é analisar o sistema aeroelástico através de experimentos, pela análise espectral e reconstrução do espaço de estados partindo de uma série temporal. O problema é que alguns métodos de reconstrução disponíveis nem sempre são úteis, principalmente quando o ruído está presente.

Os resultados obtidos neste trabalho mostram que é possível contornar o problema do ruído através do método da decomposição em valores singulares, proposto por Broomhead & King (1986). Através da aplicação desse método, foi possível identificar o comportamento das trajetórias no espaço de estados e estudar a evolução das trajetórias com a variação de parâmetros, como velocidade do escoamento e frequência da oscilação da plataforma.

Com os resultados obtidos, foi possível concluir que para o modelo de asa utilizado, a variação da frequência de oscilação da plataforma provocou bifurcações, alterando o comportamento do sistema, enquanto a variação da velocidade do escoamento aerodinâmico, ao menos na faixa abrangida pelo experimento, não provocou grandes alterações. As aparências dos espectros de frequências e dos espaços de estados indicam a possibilidade do comportamento ser caótico.

A capacidade de filtragem do método da Decomposição em Valores singulares também

foi testada e foi comprovado que ela é eficiente, pois o espaço de estados reconstruído por Defasagem com a série filtrada por SVD revelou a dinâmica que estava completamente oculta pelo ruído.

Em trabalhos futuros, a presença do comportamento caótico pode ser comprovada através da aplicação do método dos expoentes de Lyapunov nas trajetórias obtidas. Alguns algoritmos para o cálculo dos expoentes de Lyapunov apresentam sensibilidade ao ruído, com a aplicação nas trajetórias obtidas por SVD provavelmente melhores resultados seriam obtidos.

Com informações sobre as bifurcações que ocorrem no sistema, seria possível o desenvolvimento de ferramentas de controle, através de estruturas que possam alterar os parâmetros do sistema, como atuadores na asa que alterem a frequência reduzida, por exemplo, para prevenir efeitos indesejáveis.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABARBANEL, H.; BROWN, R.; SIDOROWICH, J. J.; TSIMRING, L. SH., The Analysis of Observed Chaotic in Physical Systems, **Reviews of Modern Physics**, v.65, p.1331-1392, oct. 1993.

ALLEN, M. R.; SMITH, L. A. Optimal filtering in singular spectrum analysis. **Physics Letters**, v.234, n.6, p. 419-428, oct. 1997.

ATHANASIU, M.A., PAVLOS, G.P., SVD analysis of magnetospheric AE index time series and comparison with low-dimensional chaotic dynamics. **Nonlinear Processes in Geophysics**, v.8, p.95-125, may. 2001.

BRIGHAM, E. O., **The Fast Fourier Transform and its Applications**. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1988.

BOX, G. G. P.; JENKINS, G. M.; REINSEL, G. C., **Time Series Analysis**, Upper Saddle River: Prentice Hall, 1994.

BROOMHEAD, D. S. ; KING, G. P., Extracting Qualitative Dynamics from Experimental Data, **Physica D**, v.20, p. 217-236, june. 1986.

CASDAGLI, M.; EUBANK, S.; FARMER, D.; GIBSON, J., State space reconstruction in the presence of noise. **Physica D**, v. 51, p.52-98, aug. 1991.

FALLER, W.E.; SCHRECK, S.J. Neural networks: applications and opportunities in aeronautics. **Prog. Aerospace Sci.**, v.32, p. 433-456, 1996.

FRAEDRICH, K. Estimating the dimension of weather and climate attractors. **Journal of Atmospheric Sciences**. v.43, p. 419-432, 1986.

FRASER, A. M.; SWINNEY, H. L. Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information, **Physical Review A**, v.33, p.1134-1140, feb. 1986.

GRASSBERGER, P.; PROCACCIA, I., Measuring the strangeness of strange attractors, **Physica D**, v.9, p.189-208, 1983.

HILBORN, R. C., **Chaos and Nonlinear Dynamics**. 2.ed. New York: Oxford U. Press, 2000.

HODGES, D. H.; PIERCE, G. A., **Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity**. Cambridge: Cambridge U. Press, 2002.

HSU, H. P., **Theory and Problems of Signal and Systems**. New York: McGraw-Hill, 1995.

KOSTELICH, E. J.; SCHREIBER, T. Noise Reduction in chaotic time series data: A survey of common methods. **Physical Review E**, v. 48, p.1752-1763, sep.1993.

KUGIUMTZIS, D.; CHRISTOPHERSEN, N. **State Space Reconstruction: Method of Delays vs Singular Spectrum Approach**. Research Report 236, Department of Informatics, University of Oslo, feb.1997.

LEE, B. H. K.; PRICE, S.J.; WONG, Y. S., Nonlinear aeroelastic analysis of airfoils bifurcations and chaos. **Progress in Aerospace Sciences**, v. 35, p. 205-334, apr.1999.

MAHAJAN, A. J.; KAZA, K. R. V.; DOWELL, E. H. Semi-empirical model for prediction of unsteady forces on an airfoil with application to flutter. **Journal of Fluids and Structures**, v. 7, 1993.

MARQUES, F. D. **Multi-layer functional approximation of non-linear unsteady aerodynamic response**. Tese (Doutorado), University of Glasgow, 1997.

MARQUES, F. D. Neural network based unsteady transonic loads reduced-order model. In: **43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ACE Structures, Structural Dynamics and Materials Conference**. [S.I.]: AIAA paper, 2002.

MARQUES, F. D. et al. Non-Linear Phenomena Analysis of Stall-Induced Aeroelastic Oscillations. In: **45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference**, Palm Springs, California, Apr. 2004.

MARTIN, P. B. MCALISTER, K. W.; CHANDRASEKHARA, M. S.; GEISSLER, W., Dynamic Stall Measurements and Computations for a VR-12 Airfoil with a Variable Droop Leading Edge. In: **59th Annual Forum of the American Helicopter Society**, Phoenix, Arizona, May. 2003.

MARZOCCA, P.; LIBRESCU, L.; SILVA, W.A. Aeroelastic response of nonlinear wing sections using a functional series technique. **AIAA**, v.40, n. 5, p. 813-824, 2002.

MEYER, C. D., **Matrix Analysis and Applied Linear Algebra**, Philadelphia: SIAM, 2000.

MOON, F. C., **Chaotic and Fractal Dynamics**. New York: John Wiley & Sons, 1992.

MOURA, H. P.. Singular value decomposition applied to magnetic field data. **Rev. Bras. Geof.**, São Paulo, v. 16, n. 1, 1998.

NAYFEH, A. H.; BALACHANDRAN, B., **Applied Nonlinear Dynamics**, New York: John Wiley & Sons, 1995.

PACKARD, N. J.; CRUTCHFIELD, J. P.; FROMER, J. D.; SHAW, R. S., Geometry from a Time-Series, **Physical Review Letters**, v.45, p.712-716, set. 1980.

PRATT, W. K. **Digital Image Processing**. New York: John Wiley & Sons, 1991.

RORABAUGH, C. B., **Digital Filter Designer's Handbook**. Blue Ridge Summit: TAB Books, 1997.

RUELLE, D., Ergodic Theory of Differentiable Dynamical Systems, **IHES Publications Mathématiques**, v.50, p.275-320, 1979.

SAVI, M. A., **Dinâmica Não-linear e Caos**. Rio de Janeiro: E-papers, 2006.

SILVA, W. A. Reduced-order models based on linear and nonlinear aerodynamic impulse responses. In: **Proc. of the 40th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference**. [S.I.]: AIAA paper, 1999.

SILVA, A. P. C.; KHATER, E. The Levenberg-Marquardt algorithm applied in nonlinear dynamic system. In: **Proc. of the V Brazilian Conference on Neural Networks**; 2001.

SILVA, A. P. C. **Identificação do Funcional da Resposta Aeroelástica via Redes Neurais Artificiais**. 2005, 93p. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2005.

SMITH, S. W., **Digital Signal Processing**. 2. ed. San Diego: California Technical Publishing, 1999.

SOONG, T. T., **Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers**, Chichester: John Wiley & Sons, 2004.

STROGATZ, S.H., **Nonlinear dynamics and chaos**. Reading: Perseus, 1994.

TAKENS, F., Detecting Strange Attractors in Turbulence, **Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics**, v.898, Ed. D. Rand and L.Young, p.366–381, New York: Springer-Verlag, 1981.

TRAN, C. T.; PETROT, D. Semi-empirical model for the dynamic stall of airfoils in view of the applications to the calculations of responses of a helicopter blade in forward flight. **Vertica**, v.5, p.35-53, 1981.

VAUTARD, R.; GHIL, M. Singular Spectrum Analysis in nonlinear dynamics with applications to paleoclimatic time series. **Physica D**, v.35, 395-424, 1989.

VAUTARD, R.; YIOU, P.; GHIL, M. Singular Spectrum Analysis: A toolkit for short, noisy and chaotic series. **Physica D**, v.58, p.95-126, 1992.

VASEGHI, S. V. **Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction**. 2.ed. New York: John Wiley & Sons, 2000.

VOLTERRA, V. **Theory of functionals and of integrals and integro-differential equations**. Dover, 1959.

YALÇINKAYA, T.; LAI, Y.C. Phase Characterization of Chaos. **Physical Review Letters**, v.79, n.20, p.3885-3888, 1997.