Ricardo Afonso Angélico

***AVALIAÇÃO DE MODELOS DE FALHAS
PROGRESSIVAS PARA ESTRUTURAS EM MATERIAL
COMPÓSITO***

Dissertação apresentada Escola de Engenharia
de São Carlos, da Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos para obtenção do tí-
tulo de Mestre em Engenharia Mecânica. Área
de concentração: Aeronaves.

Orientador: Prof. Dr. Volnei Tita

São Carlos

2009

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro RICARDO AFONSO ANGÉLICO

Dissertação defendida e julgada em 26/03/2009 perante a Comissão Julgadora:

Prof. Dr. **VOLNEI TITA (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

Prof. Titular **SERGIO PERSIVAL BARONCINI PROENÇA**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

Prof. Dr. **WALTER LIBARDI**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO

Prof. Associado **JONAS DE CARVALHO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica

Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**
Presidente da Comissão da Pós-Graduação da EESC

*Aos meus pais, Luis (“in memoriam”) e Elisabete,
e minha irmã, Raphaele.*

Agradecimentos

Ao Professor Dr. Volnei Tita, orientador, pela amizade, apoio e orientação do trabalho.

Aos familiares pelo constante apoio desde os primeiros passos.

À Bruna, pelo companherismo e apoio.

À Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, pela infra-estrutura disponibilizada.

Aos professores, funcionários e alunos do Departamento de Engenharia de Materiais, Aeronáutica e Automobilística pela amizade e apoio.

Aos doutores Rodrigo Bresciani Canto e Rodrigo Ribeiro Paccola, pela amizade e diversas discussões relacionadas a este trabalho.

Ao Prof. Associado Reginaldo Teixeira Coelho pela concessão de uso da licença do pacote de elementos finitos Abaqus[®].

Aos amigos de república: Breganon, Gawa, Márcio, Ivan e Gianluca pelo companheirismo.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pela bolsa de estudo e reserva técnica concedida.

Por fim, a todos que contribuíram construtivamente para o desenvolvimento deste trabalho, meus agradecimentos.

Sumário

Resumo	xi
Abstract	xiii
Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	1
1 Introdução, motivação e objetivos	1
1.1 Materiais compósitos	1
1.1.1 Classificação	4
1.1.2 Aplicações	6
1.2 Motivação	8
1.3 Objetivos	9
1.4 Organização do texto	9
2 Critérios de falha e leis de degradação aplicadas a compósitos	11
2.1 Análise de tensões	12
2.1.1 Análise de tensões de uma lâmina	12
2.1.2 Análise de tensões de um laminado	18

2.2	Critérios de falha e leis de degradação	24
2.2.1	Critério da Máxima Tensão	26
2.2.2	Critério de Tsai-Hill	28
2.2.3	Critério da Tsai-Wu	30
2.2.4	Critério de Hashin	31
2.2.5	Modelo de Tita (2003)	32
2.2.6	Modelo de Puck	34
2.2.7	Lei de Degradação de Matzenmiller	37
3	Materiais e Métodos	39
3.1	Resultados experimentais	39
3.2	Modelo de material avaliado	44
3.3	Sub-rotinas UMAT	49
3.4	Controle de simulações por programa em Matlab®	52
4	Resultados e Discussões	55
4.1	Descrição do problema	55
4.2	Modelo em elementos finitos	56
4.3	Empilhamento 1 ($[0^\circ]_{10}$)	58
4.4	Empilhamento 2 ($[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]_5$)	62
4.5	Considerações sobre os parâmetros de solução	64
5	Conclusões e perspectivas futuras	67
	Referências	69

Anexo A – Sub-rotinas UMATs	73
A.1 Umat 1	73
A.2 Umat 2	74
A.3 Umat 3	75
 Anexo B – Programa em Matlab®	 81

Resumo

ANGÉLICO, R. A. *Avaliação de modelos de falhas progressivas para estruturas em material compósito*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009, 102p.

Este trabalho é uma contribuição à análise progressiva de falhas em materiais compósitos poliméricos. Esses materiais combinam as propriedades de seus constituintes (fibra, resina polimérica e interface) de forma a melhorar o desempenho frente à utilização das fases isoladamente. A combinação de fases permite obter características como baixa densidade e elevada rigidez, que são almejadas pelo segmento aeronáutico, pois podem proporcionar um aumento de autonomia ou da capacidade de carga das aeronaves. A anisotropia inerente aos compósitos torna possível projetá-los de forma a obter-se a rigidez e a resistência desejada. Por outro lado, a anisotropia dificulta a previsão precisa dos mecanismos de falha, e conseqüentemente, do comportamento global da estrutura. Apresenta-se, assim, com base numa revisão bibliográfica criteriosa, bem como, através de resultados experimentais, a avaliação de um modelo de material fenomenológico, onde se identificam modos de falhas intralaminares. Uma vez verificada a falha por algum critério, degradam-se as propriedades do material. O modelo de material foi implementado junto ao pacote de elementos finitos Abaqus® através de uma sub-rotina UMAT (“User Material”), escrita em Fortran. Em seguida, estudou-se o problema de um laminado em duas configurações de empilhamento ($[0^\circ]_{10}$ e $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]_S$) sob flexão 3-pontos. Os resultados das simulações foram comparados com resultados experimentais, observando erros da ordem de 10%. Sendo que estes foram obtidos em função de um estudo dos parâmetros associados a solução do problema não-linear, tais como: tamanho de incremento de iteração e parâmetros associados à lei de degradação de material. Por fim, concluiu-se que o modelo de material avaliado é adequado para previsão da falha da primeira camada, bem como, da redução da rigidez estrutural e da resistência residual. Sendo que, a resposta teórica obtida se manteve parcialmente dentro dos limites inferior e superior do envelope experimental.

Palavras chave: materiais compósitos, modelos de material, análise por elementos finitos, critério de falha, falha progressiva.

Abstract

ANGÉLICO, R. A. *Evaluation of progressive failure models for composite material structures*. Thesis (Master) — School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, SP, Brazil, 2009, 102p.

This work is a contribution to the progressive failure analysis in polymer composite materials. These materials combine the properties of its constituents (fiber, resin and interface) in order to improve the performance against the use of phases alone. The combination of the phases can provide characteristics such as low density and high strength, which are desired in the aeronautical segment, because it can increase the autonomy or aircraft payload. The anisotropy inherent in composites turns possible to design the material for a desired stiffness and strength. Furthermore, it turns difficult the prediction of failure mechanisms, and consequently, the overall behavior of the structure. This study presents, based on a review and experimental results, the evaluation of a phenomenological material model, which identify intralaminar failure modes. Once verified the failure by any criterion, the material properties are reduced by a degradation law. The material model was implemented in a UMAT (User Material) subroutine which linked to the finite element package Abaqus[®]. It was applied in the study of 3-point bending problem for two stacking sequences ($[0^\circ]_{10}$ e $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]_S$). The results were compared with experimental tests, presenting a error in the order of 10%. Since that these were obtained by a study of the parameters associated to the solution of the nonlinear problem, such as: time step, and parameters associated to the material degradation laws. Finally, it was concluded that the material model is judged suitable for predicting the failure of the first ply, the reduction of structural stiffness and the residual strength. Besides, a part of the theoretical response obtained is maintained within the lower and upper limits of the experimental tests envelope.

Keywords: composite materials, material model, finite element analysis, failure criteria, progressive failure.

Lista de Figuras

1	Fases de um material compósito.	1
2	Modos de falha intralaminares (ANDERSON, 1995).	3
3	Classificação dos compósitos poliméricos (CALLISTER, 2007).	4
4	Níveis de observação e abordagens para compósitos (DANIEL; ISHAI, 2006). . .	5
5	Aplicações de compósitos em diversos segmentos da indústria.	6
6	Distribuição de materiais do Boeing 787.	8
7	Estado de tensões num ponto material do contínuo.	13
8	Lâmina de material compósito nos sistemas de coordenadas local do material (eixos 1, 2 e 3) e global de aplicação de esforços (eixos x, y e z).	16
9	Empilhamento.	18
10	Plano de referência.	19
11	Laminado na configuração não-deformada e deformada sob as hipóteses da teoria de primeira ordem. (REDDY, 2004)	19
12	Esforços atuantes em um laminado.	21
13	Superfície de falha segundo Critério da Máxima Tensão para $\sigma_{12} = 0$	28
14	Superfície de falha do Critério de Tsai-Hill para $\sigma_{12} = 0$	29
15	Superfície de falha do critério de Tsai-Wu para $\sigma_{12} = 0$	31
16	Tensões no plano de fratura e ângulo de fratura (KNOPS, 2008).	34

17	Superfície de falha (Plano σ_2, σ_{12})	36
18	Curva experimental σ_{12} vs. γ_{12}	41
19	Resultados experimentais de flexão 3-pontos do Empilhamento 1 (TITA, 2003).	42
20	Resultados experimentais de flexão 3-pontos do Empilhamento 2 (TITA, 2003).	43
21	Processo de evolução de falhas intralaminares e interlaminares (AGARWAL; BROUNT-MAN, 1990).	44
22	Esquema simplificado do modelo de material.	45
23	Comportamento não-linear do módulo de cisalhamento.	46
24	Ajuste dos parâmetros de Matzenmiller sob tração e compressão.	48
25	Influência dos parâmetros de Matzenmiller na evolução da lei de degradação.	49
26	Degradação devido falha entre-fibras (IFF).	50
27	Processo de solução utilizando sub-rotina UMAT.	51
28	Controle de simulações em elementos finitos via Matlab®.	53
29	Flexão 3-pontos.	56
30	Modelo de elementos finitos.	57
31	Pontos de análise.	58
32	Curva força versus deslocamento do Empilhamento 1 ($[0^\circ]_{10}$) sob flexão 3-pontos: experimental versus numérico	59
33	Curva força versus deslocamento para Empilhamento 1: análise detalhada	60
34	Distribuição da componente de tensão σ_{11} ao longo da espessura.	61
35	Curva força versus deslocamento do Empilhamento 2 sob flexão 3-pontos: experimental versus numérico	63
36	Curva força versus deslocamento para o Empilhamento 2: análise detalhada	64

37	Distribuição da componente de tensão σ_{11} ao longo da espessura do Empilhamento 2.	65
38	Influência do tamanho do incremento (“ <i>step size</i> ”) na resposta.	66

Lista de Tabelas

1	Comparação de propriedades mecânicas.	2
2	Características exibidas entre as teorias abordadas no WWFE (SODEN et al., 2004).	27
3	Degradação de propriedades mecânicas devido falha da matriz.	33
4	Degradação de propriedades mecânicas devido falha da fibra.	33
5	Valores típicos de inclinações	36
6	Valores típicos de resistências (Puck et al. (2002)).	36
7	Degradação de propriedades elásticas devido falha entre-fibras.	37
8	Propriedades mecânicas de uma lâmina de material compósito unidirecional de fibra de carbono com resina epóxi (prepreg M10 - Hexcel) numa fração volumétrica de 63 % (TITA, 2003).	40
9	Sequências de empilhamento e espessuras dos CDPs.	41
10	Degradação de propriedades devido falha de fibras ($f_{FF} > 1$).	47
11	Degradação de propriedades devido falha entre-fibras ($f_{IFF} > 1$).	48
12	Parâmetros e e m para comportamento sob compressão.	49
13	Resultados de flexão 3-pontos - Empilhamento 1.	59
14	Resultados de flexão 3-pontos - Empilhamento 2.	63

Introdução, motivação e objetivos

1.1 Materiais compósitos

Materiais compósitos consistem de materiais multifásicos que exibem uma proporção significativa de propriedades das fases que o constituem, de forma a obter um melhor desempenho quando comparado às fases constituintes isoladamente (CALLISTER, 2007). As fases constituintes são materiais monolíticos, os quais se classificam em três grandes grupos: metais, cerâmicas, e polímeros. Segundo Daniel e Ishai (2006), em geral, tem-se uma das fases rígida e resistente, a qual denomina-se: reforço ou fase dispersa, e uma fase menos rígida e menos resistente, a qual denomina-se: matriz ou fase contínua (Figura 1). Por vezes, considera-se uma terceira fase distinta localizada entre a fase dispersa e a fase contínua, denominada interface.

Figura 1: Fases de um material compósito.

Os materiais compósitos destacam-se em relação aos materiais monolíticos pela alta resistência, alta rigidez, baixa densidade e adaptabilidade a função da estrutura (DANIEL; ISHAI, 2006). A Tabela 1 compara algumas propriedades de materiais convencionais e compósitos

aplicados a estruturas de elevado desempenho.

Tabela 1: Comparação de propriedades mecânicas.

Material	Densidade (g/cm^3)	Módulo de Young (GPa)	Resistência a tração (MPa)
Alumínio 2024 T3	2,80	73	414
Titânio-6Al4Vn	4,40	116	930
Fibra de carbono / resina epóxi (unidirecional) ¹	1,60	147	2280
Fibra de vidro / resina epóxi (unidirecional) ¹	1,97	41	1140

¹Propriedades na direção paralela às fibras

Dentre as vantagens e limitações dos materiais compósitos, segundo Daniel e Ishai (2006), podem-se citar alguns aspectos, tais como:

- **Micromecânicos:** a introdução de fibras em uma matriz confere elevada rigidez e resistência na direção das fibras, porém, na direção transversal, devido à concentração de tensão ao redor das fibras, tem-se uma redução significativa das propriedades mecânicas;
- **Macromecânicos:** a análise de meios anisótropos é mais complexa e, em geral, depende de recursos computacionais;
- **Sobre a caracterização mecânica:** requer a determinação de diversas constantes elásticas e valores de resistência. Tem-se um número elevado de corpos de prova com diversas configurações de empilhamento, sob ação de diferentes tipos de carregamentos (tração, compressão e cisalhamento). Por vezes, são necessários outros ensaios que visam a determinação de parâmetros associados a modelos de Falhas Progressivas, da Mecânica de Fratura ou da Mecânica do Dano;
- **Sobre projeto, análise e otimização:** tem-se a potencialidade de projetar-se o material, o processo de manufatura e a estrutura numa única etapa. O grande número de variáveis

envolvidas permite a otimização estrutural perante critérios como: mínimo peso ou estabilidade estrutural. Em geral, em materiais convencionais, a otimização é possível através de um ou dois parâmetros geométricos, pois poucos são os graus de liberdade existentes;

- **Sobre a manufatura:** os processos existentes permitem a fabricação de componentes maiores, o que reduz o número de montagens e junções. Contudo, são dependentes de mão de obra qualificada e, em geral, são processos cuja automatização e normalização são limitadas.

Dentre as principais vantagens e limitações, destaca-se o alinhamento aleatório ou orientado dos reforços na fase dispersa que confere diferentes propriedades mecânicas em diferentes direções, ou seja, constitui-se um meio anisótropo. A anisotropia inerente aos materiais compósitos possuem aspectos negativos e positivos. Negativamente, destaca-se a dificuldade de previsão do comportamento mecânico, o que é consequência dos diversos modos de falha.

Figura 2: Modos de falha intralaminares (ANDERSON, 1995).

A dificuldade de previsão dos modos de falha devido a anisotropia inerente ao material reflete-se diretamente na confiabilidade dos componentes fabricados, implicando no uso de elevados coeficientes de segurança, subutilizando as potencialidades do mesmo (TITA, 2003). A Figura 2 apresenta os principais mecanismos intralaminares associados a estes materiais. O mecanismo 1, conhecido como *pull-out*, consiste do arrancamento da fibra. Antes do fenômeno de *pull-out*, pode ocorrer o fenômeno de *fiber-bridging* (mecanismo 2). Uma fraca interação

reforço-matriz pode levar a falha por *debonding* (mecanismo 3). O mecanismo 4 consiste da fratura da fibra. Por fim, o mecanismo 5, a danificação da fase contínua (matriz polimérica). Além dos mecanismos intralaminares, têm-se os mecanismos interlaminares, onde se destacam os modos de falha por delaminação. Nesses modos, camadas adjacentes separam-se fisicamente devido a elevada intensidade de tensões ortogonais ao plano da lâmina. Vale ressaltar que neste trabalho não serão considerados modos de falha interlaminares.

1.1.1 Classificação

Callister (2007) classifica os compósitos em três grandes grupos: reforçados por partículas, reforçados por fibras e estrutural, conforme mostrado no fluxograma da Figura 3. Neste trabalho, é abordado os *compósitos estruturais laminados*, os quais são constituídos de duas ou mais lâminas empilhadas com orientações de reforços específicas. Neste trabalho, a sequência de empilhamento e orientação das camadas do laminado é descrita através da notação utilizada por Daniel e Ishai (2006), nessa notação, por exemplo, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ representa um laminado de 4 camadas; $[(0^\circ/90^\circ)_4]$, um laminado de 8 camadas alternando-se camadas a 0° e 90° ; e $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_S$, um laminado de seis camadas com orientações simétricas em relação ao plano de referência (plano médio do laminado).

Figura 3: Classificação dos compósitos poliméricos (CALLISTER, 2007).

Segundo Daniel e Ishai (2006), os compósitos podem ser analisados sob a ótica de diferentes escalas de observação (Figura 4). Sob uma ótica micromecânica, a análise dos estados

de deformações e tensões é local e realizada considerando-se a interação entre as fases, além disso, permite prever o comportamento de uma lâmina ortotrópica em função das propriedades de seus constituintes. Observando-se macromecanicamente, os compósitos são considerados meios anisótropos quasi-homogêneos, sob esta ótica, o estado de deformações e tensões é associado a lâmina, não mais focalizando em seus constituintes. E, numa escala de análise estrutural, tem-se o acoplamento entre teorias de estruturas laminadas e métodos computacionais, como Método dos Elementos Finitos, para análise do comportamento global da estrutura.

Figura 4: Níveis de observação e abordagens para compósitos (DANIEL; ISHAI, 2006).

A combinação dos diversos tipos de compósitos classificados por Callister (2007) analisados pelas diversos níveis de observação de Daniel e Ishai (2006) proporcionam inúmeros trabalhos e um extenso campo de estudo quanto a análise de tensões desses materiais, desde a modelagem de volumes elementares representativos até uma análise global da estrutura (por exemplo, flambagem), envolvendo compósitos particulados e laminados sanduíche.

1.1.2 Aplicações

É cada vez mais frequente o uso dos compósitos em componentes estruturais de elevada responsabilidade de diversos segmentos da indústria: energia eólica, automobilística, naval, construção civil, e principalmente, aeronáutica e aeroespacial (Figura 5).

(a) Geração de energia

(b) Automobilística

(c) Naval

(d) Construção civil

(e) Aeronáutica

(f) Aeroespacial

Figura 5: Aplicações de compósitos em diversos segmentos da indústria.

Do ponto de vista das estruturas aeronáuticas, a combinação de materiais é interessante, pois permitem obter elevadas propriedades mecânicas específicas, características almejadas no projeto aeronáutico. A possibilidade de projetarem-se materiais com essas características permite uma redução de peso dos componentes estruturais das aeronaves, consequentemente, um aumento da carga paga transportada, ou ainda, um aumento da autonomia em função da redução

do consumo de combustível. Quanto aos custos, é interessante considerar o fator de utilização de material que é expresso pela razão entre o peso de matéria-prima utilizada pelo peso do componente final. Enquanto que para metais tem-se um fator de utilização de material de 15 - 25, para materiais compósitos esse fator é de aproximadamente 1,2 - 1,3 (JONES, 1999).

A utilização de compósitos em engenharia, assim como qualquer nova tecnologia de material, teve que vencer as barreiras das tecnologias consolidadas, no caso, a mentalidade de projeto de componentes metálicos. Em particular, no segmento aeronáutico, pode-se atribuir o início dessa mudança de conceitos ao projeto ACEE ("Aircraft Energy Efficiency") da década de 70, coordenado pela NASA ("National Aeronautics and Space Administration") (NIU, 1992). Nesse projeto, três estruturas aeronáuticas primárias (cuja falha é catastrófica) e três secundárias (cuja falha não é catastrófica) foram fabricadas em compósitos e comparadas com as estruturas originalmente metálicas. As novas estruturas deveriam atender ao mesmo envelope de cargas, transferir cargas iguais ou inferiores a estruturas adjacentes, requerer nenhuma ou pequenas alterações nos pontos de fixação, e por fim, não alterar as características de manobrabilidade da aeronave (em particular, mudanças adversas no envelope aeroelástico). Os resultados desse programa comprovaram aos fabricantes de aeronaves as potencialidades dos compósitos e sua aplicabilidade em componentes estruturais. Como resultado, teve-se uma redução de 30% em peso dos componentes estudados (NIU, 1992). Atualmente, as atenções voltam-se ao Boeing 787 (Figura 6) cuja maior parcela de estruturas primárias da aeronave utiliza compósitos poliméricos de fibra de carbono e resina epóxi.

Futuramente, análogo ao ocorrido com os metais, modelos de previsão do comportamento mecânico dos compósitos, juntamente com a evolução dos processos de produção (garantindo-se uma menor variabilidade durante o processo), permitirão uma redução dos elevados coeficientes de segurança exigidos pelos requisitos dos órgãos certificadores. Quando isso ocorrer, possivelmente, novas tecnologias serão introduzidas e ocuparão posição similar aos compósitos em relação aos metais atualmente. A intersecção desses conceitos leva à área de estruturas híbridas, que combinam compósitos e metais. Dentre os estudos realizados, destaca-se o uso de

Figura 6: Distribuição de materiais do Boeing 787.

compósitos na reparabilidade de estruturas aeronáuticas metálicas (BAKER, 2008).

1.2 Motivação

Como previamente citado, têm-se dificuldades a serem vencidas para essas novas tecnologias de materiais no que diz respeito à *previsão do comportamento mecânico*. De forma que, atualmente, as potencialidades desses materiais não são amplamente exploradas, por isso, acarretando em elevados coeficientes de segurança. Entretanto, mesmo assim, o emprego de materiais compósitos propicia estruturas mais leves e de rigidez e resistência igual ou superior, ou seja, maiores propriedades específicas que estruturas monolíticas similares, assim, justificando seu uso.

Nesse contexto, motiva-se este trabalho como uma contribuição ao estudo de falhas em compósitos, em particular, os compósitos laminados estruturais, principalmente, com ênfase à avaliação de modelos de falha progressiva capazes de prever o comportamento mecânico de estruturas em material compósito. Modelos estes que consistem de um *critério de falha*, bem como, de uma *lei de degradação* das propriedades da lâmina, uma vez que, esta tenha apresentado um dado modo de falha identificado previamente pelo critério.

1.3 Objetivos

Em vista das potencialidades e dificuldades citadas anteriormente, o objetivo geral do presente trabalho consiste numa avaliação de modelos de material compósito com ênfase à análise de falhas progressivas em estruturas laminadas. Este objetivo geral pode ser subdividido nos seguintes objetivos específicos:

1. Estudar modelos de falhas progressivas (critérios de falha e leis de degradação) aplicados aos compósitos unidirecionais;
2. Selecionar e implementar os modelos de falha progressiva através de sub-rotinas computacionais, em linguagem Fortran, para serem compiladas junto ao pacote de elementos finitos Abaqus®, possibilitando, assim, a análise via Método dos Elementos Finitos (MEF) de estruturas em material compósito;
3. Avaliar as potencialidades e limitações dos modelos implementados, comparando os resultados computacionais com os resultados experimentais de ensaios realizados por Tita (2003).

1.4 Organização do texto

No Capítulo 1, apresentou-se uma breve introdução aos materiais compósitos, elucidando-se suas vantagens e desvantagens, classificação, aplicações, bem como, os objetivos e a motivação deste estudo.

No Capítulo 2, são abordados critérios de falha e leis de degradação aplicadas a compósitos, ou seja, os Modelos de Falha Progressiva. Para que esses tópicos sejam abordados, introduz-se inicialmente uma breve revisão de análises de tensões.

No Capítulo 3, “Materiais e Métodos”, apresenta-se o desenvolvimento das sub-rotinas baseados nos modelos evidenciados no Capítulo 2 e a forma com que os resultados serão analisados. Deve-se ressaltar que as sub-rotinas desenvolvidas no referido capítulo estão disponíveis

no Anexo A.

No Capítulo 4, “Resultados e Discussões”, detalham-se os modelos de elementos finitos e os resultados obtidos discutindo-se vantagens, desvantagens e limitações dos critérios de falha e leis de degradação apresentados.

Por fim, no Capítulo 5, “Conclusões e Perspectivas Futuras”, apresentam-se as conclusões pertinentes do trabalho, bem como, perspectivas para futuros trabalhos.

Critérios de falha e leis de degradação aplicadas a compósitos

Este capítulo visa aproximar o leitor dos principais tópicos, correlatos e necessários, para a compreensão da metodologia e resultados apresentados neste trabalho. Para isso, importantes contribuições da literatura são sintetizadas e relacionadas com o objetivo de organizar os conceitos e esclarecer a linha de pensamento adotada pelo autor no desenvolvimento deste estudo.

As estruturas, em geral, são submetidas a carregamentos de diversas naturezas (mecânicos, elétricos, térmicos, intempéries, entre outros) que as danificam, reduzindo a capacidade de suportar carga. A perda de capacidade de carga está associada ao surgimento de micro-defeitos, à ruptura de matriz, à ruptura de fibras e às falhas por delaminações.

A análise progressiva de falhas tem como objetivo contabilizar os efeitos causados pelo acúmulo de descontinuidades do meio, porém, sob uma ótica fenomenológica, que estabelece leis de degradação baseando-se em observações experimentais macromecânicas. Neste trabalho, como anteriormente colocado, são abordados modelos fenomenológicos aplicados na análise progressiva de falhas em estruturas de compósitos. Segundo Puck e Shürmann (1996), a análise progressiva de falhas em compósitos requerem:

1. Análise de deformações e tensões para cada camada do laminado;

2. Critério de falha aplicado a cada camada;
3. Leis de degradação que considerem fenômenos de falha parcial, que em geral, não levam a falha última do laminado;
4. Um programa que simule o processo gradativo de falhas através da aplicação dos itens anteriores (1, 2 e 3) iterativamente.

Os tópicos a seguir exploram individualmente cada item acima citado. Inicialmente, apresentam-se as análises de tensões em uma lâmina e um laminado, onde são deduzidas as equações que regem o comportamento mecânico. Em seguida, os modelos de falha adotados para compósitos, onde são apresentados critérios tidos como clássicos, bem como, novos critérios elucidando-se suas vantagens e desvantagens (limitações).

2.1 Análise de tensões

Diversos livros-textos, os quais podem-se citar: Hyer (1998); Kollár e Springer (2003); Reddy (2004) e Daniel e Ishai (2006) abordam a mecânica dos materiais compósitos. De forma que neste trabalho, serão apresentadas as principais equações que regem a determinação do estado de tensões em cada lâmina a partir dos esforços atuantes no laminado, juntamente com as hipóteses adotadas no desenvolvimento. Entretanto, não é o objetivo deste texto apresentar as deduções e passagens utilizadas na obtenção das equações apresentadas.

Divide-se a análise em duas partes: análise de tensões em uma lâmina e análise de tensões em um laminado. Por fim, apresenta-se de forma esquemática, através de um fluxograma, o procedimento de análise de um laminado.

2.1.1 Análise de tensões de uma lâmina

Equações constitutivas

As equações constitutivas para uma lâmina são desenvolvidas baseadas em duas hipóteses:

- a lâmina é contínua e ortotrópica, ou seja, macro-mecanicamente considera-se que a lâmina é homogênea;
- a lâmina comporta-se como um material linear elástico, dessa forma, respeitando a lei de Hooke generalizada.

Seja um corpo contínuo deformável sob vinculações e carregamentos genéricos, o estado de tensões triplo em um ponto material desse corpo é definido por seis componentes de tensões σ_{ij} (Figura 7). A relação entre deformações e tensões neste ponto material é escrita através da lei de Hooke que se expressa de acordo com a equação 2.1 para um material anisótropo sob condições isotérmicas em notação indicial.

Figura 7: Estado de tensões num ponto material do contínuo.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (2.1)$$

Onde:

σ_{ij} : tensor das tensões em notação indicial;

ϵ_{kl} : tensor das deformações em notação indicial;

C_{ijkl} : tensor constitutivo para um meio anisótropo (21 constantes elásticas independentes).

Considerando-se uma lâmina de material compósito unidirecional, a qual pode ser idealizada como um material ortotrópico, o número de constantes elásticas independentes do tensor constitutivo do sistema de equações em 2.1 reduz-se a 9, como escrito no sistema de equações 2.2.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

É interessante notar a independência entre fenômenos normais e cisalhantes. Deformações normais não geram tensões cisalhantes, da mesma forma que, deformações cisalhantes não geram tensões normais. E ainda, as tensões cisalhantes são independentes entre si, cada qual em seu plano de ação.

O sistema de equações 2.2 ainda pode ser simplificado. Segundo Daniel e Ishai (2006), na maioria das aplicações estruturais, os compósitos são usados na forma de laminados finos nos quais a ação das cargas ocorre no plano do laminado. Sob essas condições, contempladas pela Teoria Clássica de Laminados, considera-se um estado plano generalizado de tensões, que reduz a zero qualquer componente de tensão normal ao plano da lâmina ($\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$) e reduzindo o sistema 2.2 a três equações. Embora as componentes transversais de tensão σ_{13} , σ_{23} , σ_{33} são pequenas quando comparadas às componentes atuantes no plano 1-2, as mesmas podem induzir falha, pois o material possui menor resistência na direção transversal (REDDY, 2004). Por isso, as componentes de tensão transversais não são desprezíveis nas teorias de deformação por cisalhamento de primeira ordem ou de ordens superiores. Entretanto, em geral, a componente transversal σ_{33} é desprezada no cálculo. Os efeitos das tensões cisalhantes transversais tornam-se relevantes ao aproximar-se de arestas livres, nesse caso, as tensões cisalhantes do plano reduzem, enquanto que, as tensões cisalhantes transversais aumentam (KEUNINGS, 1992). Considerando-se somente a nulidade da deformação normal na direção z, tem-se os sistemas de equações em 2.3 e 2.4.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Os coeficientes das equações 2.3 e 2.4 são escritos em função das constantes de engenharia, determinadas através de ensaios mecânicos ou de modelos micromecânicos.

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (2.5a)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (2.5b)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (2.5c)$$

$$Q_{44} = G_{23} \quad (2.5d)$$

$$Q_{55} = G_{13} \quad (2.5e)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (2.5f)$$

Onde:

E_1, E_2 : módulos de Young nas direções 1 e 2, respectivamente;

G_{12}, G_{13} e G_{23} : módulo de cisalhamento no plano 1-2, 1-3 e 2-3, respectivamente;

ν_{12}, ν_{21} : coeficientes de Poisson por deformação na direção transversal (direção 2) devido uma tensão aplicada na direção longitudinal (direção 1), e análogo.

Pela Lei de Reciprocidade de Betty, escreve-se:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (2.6)$$

Transformações entre Sistema Local e Global de Coordenadas

No item anterior, estabeleceram-se as relações (2.3, 2.4 e 2.5) que determinam o estado de tensões de uma lâmina a partir do estado de deformações, ambos escritos em relação a um sistema local de coordenadas (1,2,3) (Figura 8). Contudo, em geral, os eixos principais do material (sistema local) não coincidem com o sistema de aplicação de esforços, sistema de coordenadas global (x,y,z) (Figura 8). Nota-se que o eixo z do sistema de coordenadas global é paralelo ao eixo 3 do sistema de coordenadas local.

Figura 8: Lâmina de material compósito nos sistemas de coordenadas local do material (eixos 1, 2 e 3) e global de aplicação de esforços (eixos x, y e z).

É possível relacionar o estado de deformações e tensões em um ponto material escrito em sistemas de coordenadas diferentes através da matriz de mudança de base $[T]$ entre os sistemas. De forma que, as tensões e deformações escrevem-se na equação 2.7.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{23} = \gamma_{23} \\ 2\epsilon_{13} = \gamma_{13} \\ 2\epsilon_{12} = \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{yz} = \gamma_{yz} \\ 2\epsilon_{xz} = \gamma_{xz} \\ 2\epsilon_{xy} = \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

A matriz $[T]$ é calculada a partir do ângulo θ entre as direções 1 (sistema local) e x (sistema global), como colocado na equação 2.8.

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 2mn \\ 0 & 0 & m & n & 0 \\ 0 & 0 & -n & m & 0 \\ mn & -mn & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} m &= \cos(\theta) \\ n &= \sin(\theta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Utilizando-se 2.3, 2.4, 2.7, e 2.8 determinam-se as relações entre tensões e deformações em relação ao sistema global, conforme equação 2.9 .

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & 0 & 0 & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & 0 & 0 & \overline{Q_{26}} \\ 0 & 0 & \overline{Q_{44}} & \overline{Q_{45}} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{Q_{45}} & \overline{Q_{55}} & 0 \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & 0 & 0 & \overline{Q_{33}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \overline{Q_{11}} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\ \overline{Q_{12}} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \\ \overline{Q_{22}} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\ \overline{Q_{16}} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})mn^3 \\ \overline{Q_{26}} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})mn^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})m^3n \\ \overline{Q_{66}} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{66}(m^4 + n^4) \\ \overline{Q_{44}} &= Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2 \\ \overline{Q_{45}} &= (Q_{55} - Q_{44})mn \\ \overline{Q_{55}} &= Q_{55}m^2 + Q_{44}n^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.1.2 Análise de tensões de um laminado

Um laminado é formado pelo empilhamento de duas ou mais lâminas, não necessariamente do mesmo material, cada qual com sua espessura e orientação (Figura 9), que visam as especificações de projeto. Anteriormente, definiram-se as equações de uma lâmina, sejam escritas no sistema local (sistema de coordenadas do material) ou no sistema global (sistema de coordenadas do laminado). As lâminas empilhadas formam um meio anisótropo cujo comportamento mecânico pode ser descrito a partir da combinação das propriedades de cada lâmina (camada).

Figura 9: Empilhamento.

Aqui são apresentadas as equações que regem esse comportamento mecânico de um meio anisótropo linear, porém antes disso, são importantes algumas premissas. Considera-se o laminado formado pelo empilhamento de k lâminas ao longo da direção do eixo z , e seccionado por um plano normal a direção z que divide ao meio a espessura do laminado, denominado plano de referência ou plano médio (Figura 10). É a partir desse plano de referência que as coordenadas na direção z das faces superior e inferior de cada lâmina serão estabelecidas, de forma que, faces abaixo do plano de referência apresentam coordenada z negativa, e faces acima, coordenadas z positivas.

A Teoria Clássica dos Laminados é baseada na cinemática de Kirchhoff, as quais não contabilizam os efeitos por deformações transversais. Entretanto, no presente trabalho, serão desenvolvidas as equações baseadas numa Teoria de Primeira Ordem, pois o pacote de elementos finitos utilizado (Abaqus[®]) na determinação de uma solução numérica aproximada adota esta

Figura 10: Plano de referência.

formulação para os elementos de casca.

Na Teoria de Primeira Ordem, as deformações transversais são consideradas, o que implica que as seções transversais ao plano médio antes ortogonais a este, após ação dos carregamentos, não necessariamente permanecem ortogonais. A Figura 11 apresenta as configurações da estrutura não-deformada e deformada considerando-se as hipóteses da Teoria de Primeira Ordem.

Figura 11: Laminado na configuração não-deformada e deformada sob as hipóteses da teoria de primeira ordem. (REDDY, 2004)

Equações de Compatibilidade

Observando-se a Figura 11, é possível escrever as relações em 2.11 para o campo de deslocamentos (u , v e w) da estrutura.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Onde:

u_0 , v_0 e w_0 : são os deslocamentos do plano de referência em relação aos eixos x , y e z , respectivamente;

ϕ_x e ϕ_y : os giros em relação aos eixos y e x , respectivamente

Sob a hipótese de laminados finos, os giros em relação aos eixos x e y podem ser aproximados pela inclinação da deflexão transversal, de forma que:

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (2.12)$$

Em geral, as deformações podem ser relacionadas ao campo de deslocamento de acordo com as relações não-lineares 2.13.

$$\begin{aligned} E_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ E_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ E_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ E_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ E_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ E_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Considerando-se pequenas deformações e rotações moderadas (entre 10 e 15 graus), o estado de deformações em um ponto de coordenada z é calculado por 2.14 a partir dos deslocamentos e giros do plano de referência (REDDY, 2004).

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^1 \\ \epsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Equações de Equilíbrio do Laminado

Em geral, laminados podem estar submetidos a carregamentos mecânicos normais, fletores, torsores e cisalhantes, conforme indicado na Figura 12. A intensidade desses carregamentos devem estar em equilíbrio com as tensões internas, de forma a satisfazer as equações 2.15, 2.16 e 2.17.

Figura 12: Esforços atuantes em um laminado.

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (2.15)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (2.16)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (2.17)$$

Onde:

N_{xx} , N_{yy} e N_{xy} : são as forças normais resultantes no plano do laminado;

M_{xx} , M_{yy} e M_{xy} : são os momentos resultantes;

Q_x e Q_y : são as forças cortantes resultantes;

Uma vez que as deformações cisalhantes transversais são constantes ao longo da espessura do laminado, tem-se que as tensões serão constantes. Todavia, com base na literatura, tem-se que a distribuição de tensões ao longo da espessura segue uma distribuição parabólica. Computacionalmente, essa discrepância é corrigida multiplicando-se a integral em 2.17 por um coeficiente de correção de cisalhamento K. Esses fatores de correção não seriam necessários se a formulação adotada fosse em terceira ordem ou superior, como discutido em Reddy (2004).

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (2.18)$$

Os coeficientes de correção de cisalhamento são função das propriedades da lâmina e da sequência de empilhamento (REDDY, 2004). É importante a compreensão desses parâmetros, pois estes influenciam os parâmetros de rigidez transversal ao cisalhamento, e são requeridos pelo pacote de elementos finitos utilizado na análise de estruturas de casca com modelos de material implementados pelo usuário.

O estado de tensão no sistema global pode ser escrito em função das deformações, conforme 2.9; e o estado de deformações, em função dos deslocamentos e giros, conforme 2.14.

Combinando-se estas equações com as equações 2.15, 2.16 e 2.18, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

De forma que os termos das matrizes A, B e D, são calculados em função das constantes elásticas de cada lâmina:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \overline{Q_{ij}^{(k)}} (z_{k-1} - z_k) (i, j = 1, 2, 4, 5, 6) \quad (2.22a)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \overline{Q_{ij}^{(k)}} (z_{k-1}^2 - z_k^2) (i, j = 1, 2, 6) \quad (2.22b)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \overline{Q_{ij}^{(k)}} (z_{k-1}^3 - z_k^3) (i, j = 1, 2, 6) \quad (2.22c)$$

Onde:

A_{ij} : matriz de rigidez de membrana

B_{ij} : matriz de acoplamento entre a rigidez no plano e a rigidez à flexão / torção

D_{ij} : matriz de rigidez à flexão ou torção

Por fim, conhecendo-se as deformações, e consequentemente através de 2.9 as tensões, em relação ao sistema global, determinam-se as deformações e tensões no sistema local de uma lâmina k , conforme 2.23.

$$\begin{aligned}\{\sigma\}_{1,2}^k &= T^k \{\sigma\}_{x,y}^k \\ \{\epsilon\}_{1,2}^k &= T^k \{\epsilon\}_{x,y}^k\end{aligned}\tag{2.23}$$

2.2 Critérios de falha e leis de degradação

Sob posse das tensões e/ou deformações calculadas num sistema local de coordenadas (sistema 1-2), utiliza-se um Critério de Falha para avaliar a capacidade do laminado resistir a um determinado conjunto de esforços.

A análise de falha de um laminado pode guiar-se por dois conceitos: falha da primeira camada (FPF - “*first ply failure*”) ou falha última do laminado (ULF - “*ultimate laminate failure*”). Numa abordagem FPF, considera-se que a falha do laminado ocorre quando a primeira camada (ou grupo de camadas) falha. Por outro lado, a abordagem ULF considera que a falha do laminado ocorrerá para a máxima carga suportada (carga última). A abordagem FPF, mais conservadora, requer somente a aplicação de um critério de falha. Verificando-se a ocorrência de falha, considera-se a falha total do componente. Num conceito ULF, além dos critérios de falha, são necessárias leis de degradação das propriedades mecânicas em decorrência do processo de falha, uma vez que o processo de falha é progressivo, iterativo com redistribuição dos esforços pelas camadas. Sendo este último, o conceito empregado neste trabalho.

De acordo com Daniel e Ishai (2006), as teorias de falha podem ser classificadas em três

grupos:

- **Limites ou não-interativos:** modos de falha são determinados comparando-se componentes individuais de tensão ou deformação com os valores de resistência, por exemplo, têm-se os Critérios da Máxima Tensão e Máxima Deformação.
- **Interativos:** todas as componentes de tensão ou deformação estão incluídas numa única expressão. Em geral, não se tem uma identificação do modo de falha.
- **Baseados em modos de falha:** nestes critérios separam-se modos de falha de fibra e matriz. Este grupo, principalmente, é estudado no presente trabalho.

Por fim, vale ressaltar que ao longo das últimas décadas, diversos critérios de falha foram criados sob várias considerações para representar a falha dos materiais compósitos. Um exemplo desses critérios, tem-se o relatório de Paris (2001) que apresenta 53 referências sob a aplicação de critérios de danificação/falha para compósitos poliméricos reforçados. Além disso, deve-se destacar que é possível encontrar na literatura uma gama de outros trabalhos que buscam prever o dano e a falha de estruturas em compósitos (DÁVILA et al., 2001) (WILLIAMS; VAZIRI, 2001) (TITA et al., 2002) (KOSTOPOULOS, 2002) (TITA, 2003). Mais recentemente, têm-se os trabalhos de (TURON et al., 2006) que propuseram um modelo de delaminação progressiva baseado em conceitos da Mecânica do Dano. Renard e Thionnet (2006) apresentam uma lei de evolução do dano para degradar as componentes da matriz constitutiva. Paepegen et al. (2006a) realizaram ensaios experimentais de cisalhamento, e posteriormente, desenvolveram um modelo de degradação para o módulo de cisalhamento no plano da lâmina (G_{12}) (PAEPEGEN et al., 2006b). Stephen e Wisnom (2006) estudaram a análise progressiva de dano de corpos-de-prova de tração em material compósito com a finalidade de avaliar o efeito de entalhes na evolução de danos inter e intralaminar. Ianucci (2006) avaliou placas planas laminadas sob impacto, empregando o método dos elementos finitos e modelando a degradação das propriedades mecânicas. O modelo de falha progressiva proposto por Tita et al. (2008) foi avaliado através de ensaios de endentação e de impacto de baixa velocidade em placas.

Apesar de a seguir serem apresentados somente quatro critérios e três modelos diferentes, o presente trabalho irá fazer uma avaliação mais detalhada sobre o Critério de Hashin, o Modelo de Puck e a Lei de Degradação de Matzenmiller. A Lei de Degradação de Matzenmiller tem o objetivo de suprir o Modelo de Puck nos modos de falha da fibra. E este, foi selecionado por ter destacado-se no “*World Wide Failure Exercise*” (WWFE), um exercício mundial onde diversas teorias foram confrontadas com resultados experimentais (SODEN et al., 1998) (HINTON et al., 2002) (SODEN et al., 2004). A Tabela 2 compara os critérios deste exercício quanto as potencialidades apresentadas pelos mesmos.

Como apresentado, há uma gama de critérios na literatura. Dessa forma, segue-se com uma breve descrição de alguns aplicados na análise de estruturas laminadas: Critério da Máxima Tensão, Critério de Tsai-Hill, Critério de Tsai-Wu, Modelo de Tita (2003) e Modelo de Puck e Lei de Degradação de Matzenmiller. É importante ressaltar que os critérios apresentados são colocados sobre a hipótese de estado plano de tensões, o que reduz o tensor das tensões em três componentes independentes: σ_{11} , σ_{22} e σ_{12}

Nos critérios a seguir são utilizados os valores de resistência do material, os quais são expressos através das variáveis:

F_{1T} e F_{2T} : limite de resistência à tração nas direções 1 e 2, respectivamente;

F_{1C} e F_{2C} : limite de resistência à compressão nas direções 1 e 2, respectivamente;

F_{12} , F_{13} e F_{23} : limite de resistência ao cisalhamento no plano 1-2, 1-3 e 2-3, respectivamente.

2.2.1 Critério da Máxima Tensão

Neste critério, a falha ocorre quando qualquer das componentes de tensão exceder os valores de resistência correspondente aos eixos do material. De acordo com este critério, têm-se as condições de falha nas equações 2.24 e a superfícies de falha indicada na Figura 13. O critério identifica o modo de falha, porém, as componentes de tensão não interagem.

Tabela 2: Características exibidas entre as teorias abordadas no WWFE (SODEN et al., 2004).

Contributor	Lamina strength prediction	Nonlinear analysis	Elastic laminate constants	Laminate strength prediction	Large deformation prediction	Capturing features	Crack density prediction	Initial strength prediction	Micro- mechanics	Fibre failure prediction	3-D stress analysis	Computer Code availability	Linkage to FE code
Chamis	✓		✓	✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓
Eckold	✓		✓										
Edge	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓		✓		✓	
Hart-Smith(1)	✓		✓	✓		✓				✓			
Hart-Smith(2)	✓		✓	✓						✓			
Hart-Smith(3)	✓			✓						✓			
McCartney(A)			✓				✓	✓	✓		✓	✓	
McCartney(B)			✓	✓			✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Puck	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓		✓	✓	✓	✓
Rotem	✓	✓	✓	✓				✓					
Sun(L)	✓		✓	✓		✓		✓		✓			
Sun(NL)		✓	✓				✓	✓			✓	✓	
Tsai(A)	✓		✓	✓		✓		✓				✓	
Tsai(B)	✓		✓	✓	✓	✓		✓			✓	✓	
Wolfe	✓	✓	✓	✓		✓		✓					
Wolfe(B)	✓	✓	✓	✓		✓		✓				✓	
Zinoviev	✓		✓	✓	✓	✓		✓		✓		✓	
Bogetti	✓	✓	✓	✓		✓		✓		✓	✓	✓	
Mayes	✓	✓	✓	✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓
Mayes(B)	✓	✓	✓	✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓
Cuntze(A)	✓	✓	✓	✓		✓		✓					
Cuntze(B)	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓		✓	✓	✓	
Huang	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓		✓	✓	

$$|\sigma_{11}| = \begin{cases} F_{1T} & (\sigma_{11} > 0) \\ F_{1C} & (\sigma_{11} < 0) \end{cases} \quad (2.24a)$$

$$|\sigma_{22}| = \begin{cases} F_{2T} & (\sigma_{22} < 0) \\ F_{2C} & (\sigma_{22} > 0) \end{cases} \quad (2.24b)$$

$$|\sigma_{12}| = F_{12} \quad (2.24c)$$

Figura 13: Superfície de falha segundo Critério da Máxima Tensão para $\sigma_{12} = 0$.

Embora este seja um critério simples, é interessante que distingue-se a direção de ocorrência da falha (direção 1 ou 2) e a natureza do carregamento (tração, compressão ou cisalhamento). Considerando a ação de tensões num plano, o estado de tensões de um ponto material é representado geometricamente por um ponto num sistema de coordenadas cujos os eixos são as componentes de tensão σ_1 , σ_2 e σ_{12} .

2.2.2 Critério de Tsai-Hill

Muitos autores propuseram critérios de falha para materiais dúcteis isotrópicos baseados na energia de distorção. Dentre os quais, tem-se o critério de Mises que para um estado plano de tensões escreve-se:

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2 = \sigma_{yp}^2 \quad (2.25)$$

Onde σ_{yp} é a tensão de escoamento do material.

Hill (1948) modificou o critério de Mises através da introdução da anisotropia. Posteriormente, Azzi e Tsai (1965) adaptaram o Critério de Hill para uma lâmina ortotrópica de um material compósito, obtendo o critério em 2.26 cuja superfície de falha está representada na Figura 14.

$$\frac{\sigma_{11}^2}{F_1^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{F_2^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{F_{12}^2} + \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{F_1^2} = 1 \quad (2.26a)$$

$$F_1 = \begin{cases} F_{1T} & (\sigma_{11} > 0) \\ F_{1C} & (\sigma_{11} < 0) \end{cases} \quad (2.26b)$$

$$F_2 = \begin{cases} F_{2T} & (\sigma_{22} > 0) \\ F_{2C} & (\sigma_{22} < 0) \end{cases} \quad (2.26c)$$

Figura 14: Superfície de falha do Critério de Tsai-Hill para $\sigma_{12} = 0$.

Neste critério, tem-se a desvantagem de não identificar-se o modo de falha ocorrido. Por outro lado, tem a vantagem de calcular-se o índice de falha a partir de única expressão que reúne todas as componentes que definem o estado de tensão num ponto material da estrutura, portanto, o critério é interativo.

2.2.3 Critério da Tsai-Wu

Outro critério interativo amplamente difundido e utilizado, é o Critério de Tsai-Wu (TSAI; WU, 1971), cuja falha ocorre de acordo com as equações em 2.27.

$$f_1\sigma_{11} + f_2\sigma_{22} + f_{11}\sigma_{11}^2 + f_{22}\sigma_{22}^2 + 2f_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + f_{66}\sigma_{12}^2 = 1 \quad (2.27a)$$

Onde:

$$f_1 = \frac{1}{F_{1T}} + \frac{1}{F_{1C}} \quad (2.27b)$$

$$f_2 = \frac{1}{F_{2T}} + \frac{1}{F_{2C}} \quad (2.27c)$$

$$f_{11} = -\frac{1}{F_{1T}F_{1C}} \quad (2.27d)$$

$$f_{22} = -\frac{1}{F_{2T}F_{2C}} \quad (2.27e)$$

$$f_{66} = \frac{1}{F_{12}^2} \quad (2.27f)$$

Em geral, neste critério, a dificuldade concentra-se na determinação do fator f_{12} , o qual é determinado experimentalmente através de ensaios biaxiais. A equação 2.28 apresenta uma aproximação segundo Hyer (1998).

$$f_{12} \approx -\frac{1}{2}\sqrt{f_{11}f_{22}} \quad (2.28)$$

Assim como o critério anterior, este critério reúne as componentes do estado de tensão em uma única expressão, o que impossibilita a identificação do modo de falha ocorrido.

Figura 15: Superfície de falha do critério de Tsai-Wu para $\sigma_{12} = 0$.

2.2.4 Critério de Hashin

Diferentemente dos critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu, os quais não permitem uma identificação dos modos de falha; o Critério de Hashin (1980) considera modos de falha da fibra e entre fibras, distinguindo-se entre carregamentos de tração e de compressão. Considerando-se um estado plano de tensões, este critério é escrito pelas equações de 2.29 a 2.32.

1. Falha da fibra sob tração ($\sigma_{11} > 0$):

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{F_{1T}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{F_{12}}\right)^2 = 1 \quad (2.29)$$

2. Falha da fibra sob compressão ($\sigma_{11} < 0$):

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{F_{1C}}\right)^2 = 1 \quad (2.30)$$

3. Falha da matriz sob tração ($\sigma_{22} > 0$):

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{F_{2T}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{F_{12}}\right)^2 = 1 \quad (2.31)$$

4. Falha da matriz sob compressão ($\sigma_{22} < 0$):

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{2F_{2T}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{F_{12}}\right)^2 = 1 - \left[\left(\frac{F_{1C}}{2F_{23}}\right)^2 - 1\right] \quad (2.32)$$

2.2.5 Modelo de Tita (2003)

Tita (2003) propôs um modelo de falha progressiva aplicados a compósitos poliméricos, ou seja, um Critério de Falha e uma Lei de Degradação. Assim como no critério do item anterior, distinguindo-se entre modos de falha da fibra e matriz, bem como, da natureza do carregamento (tração ou compressão). Tem-se os critérios de 2.33 a 2.36, os quais são baseados em Chang e Chang (1987).

1. Falha da fibra sob tração ($\sigma_{11} > 0$):

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{F_{1T}}\right)^2 + \frac{F_1}{F_2} = 1 \quad (2.33)$$

2. Falha da fibra sob compressão ($\sigma_{11} < 0$):

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{F_{1C}}\right)^2 = 1 \quad (2.34)$$

3. Falha da matriz sob tração ($\sigma_{22} > 0$):

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{F_{2C}}\right)^2 + \frac{F_1}{F_2} = 1 \quad (2.35)$$

4. Falha da matriz sob compressão ($\sigma_{22} < 0$):

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{2F_{2T}}\right)^2 + \left[\left(\frac{F_{2C}}{2F_{12}}\right)^2 - 1\right] + \left(\frac{\sigma_{22}}{F_{2C}}\right)^2 + \frac{F_1}{F_2} = 1 \quad (2.36)$$

Onde:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{2\frac{\sigma_{12}^2}{G_{12}} + 3\alpha\sigma_{12}^4}{2\frac{F_{12}^2}{G_{12}} + 3\alpha F_{12}^4} \quad (2.37)$$

O parâmetro α está associado ao comportamento não linear do módulo de cisalhamento G_{12} demonstrado por Hahn e Tsai (1973). Vale ressaltar que a superfície de falha é similar à proposta por Hashin (1980).

Tita (2003) dividiu as leis de degradação das propriedades em dois grupos referentes a danos da fibra e danos da matriz. Os parâmetros necessários para calibrar esses modelos foram obtidos através de um processo de análise inversa, onde o próprio ensaio experimental da estrutura é utilizado na determinação de parâmetros associados ao material. Se os danos forem referentes a uma falha da matriz, as propriedades são degradadas de acordo com a Tabela 3, por outro lado, se a falha for referente as fibras, as propriedades são degradadas de acordo com a Tabela 4.

Tabela 3: Degradação de propriedades mecânicas devido falha da matriz.

Propriedades elásticas	Propriedades degradadas
E_{11}	$\overline{E_{11}} = E_{11}$
E_{22}	$\overline{E_{22}} = 0$
ν_{12}	$\overline{\nu_{12}} = 0$
G_{12}	$\overline{G_{12}} = \frac{1}{1/G_{12} + 3\alpha\sigma_{12}^2}$

Tabela 4: Degradação de propriedades mecânicas devido falha da fibra.

Propriedades elásticas	Propriedades degradadas
E_{11}	$\overline{E_{11}} = (\exp[-(A/A_0)H] - B\bar{\epsilon}) E_{11}$
E_{22}	$\overline{E_{22}} = 0$
ν_{12}	$\overline{\nu_{12}} = 0$
G_{12}	$\overline{G_{12}} = (\exp[-(A/A_0)H] - B\bar{\epsilon}) G_{12}$

Onde:

A : área danificada prevista pelo critério de danificação;

A_0 : área de interação de falha da fibra associada com a medida de resistência a tração da mesma, sendo função do comprimento crítico;

H : parâmetro que controla o grau de degradação da propriedade;

B : parâmetro de ajuste da função de degradação;

$\bar{\epsilon}$: segundo invariante das deformações desviadoras.

2.2.6 Modelo de Puck

Dentre os trabalhos da literatura atual de análise de falhas em compósitos, podem-se destacar os trabalhos de Puck: Puck e Shürmann (1996), Puck e Shürmann (2002) e Puck et al. (2002), que consistem de um modelo de material fenomenológico. A maior contribuição destes trabalhos está na previsão e degradação de propriedade devido falhas entre-fibras (IFF - “*inter fiber failure*”). Além dos artigos citados, destaca-se o trabalho de Knops (2008), o qual relaciona e integra o conteúdo abordado nos artigos de forma a esclarecer o equacionamento utilizado, bem como, os experimentos para determinação de parâmetros e avaliação do modelo.

Considera-se que a falha entre-fibras ocorra num plano de inclinação θ_{fp} em relação aos sistemas de eixos globais (Figura 16).

Figura 16: Tensões no plano de fratura e ângulo de fratura (KNOPS, 2008).

Nesse plano, o critério de Puck identifica a ocorrência de três modos de falha, identificados pelas letras A, B e C, de acordo com as equações de 2.38 a 2.40. É importante ressaltar que procurou-se manter a notação utilizada nos trabalhos desenvolvidos por Puck.

1. Modo A:

$$f_{IFF} = \sqrt{\left[\left(\frac{1}{R_{\perp}^t} - \frac{p_{\perp||}^t}{R_{\perp||}} \right) \cdot \sigma_{22} \right]^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{R_{\perp||}} \right)^2} + \frac{p_{\perp||}^t}{R_{\perp||}} \sigma_{22}, \quad \sigma_{22} \geq 0 \quad (2.38)$$

2. Modo B:

$$f_{IFF} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{12}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(\frac{p_{\perp\parallel}^c}{R_{\perp\parallel}}\sigma_{22}\right)^2} + \frac{p_{\perp\parallel}^c}{R_{\perp\parallel}}\sigma_{22}, \sigma_{22} < 0 \text{ e } \left|\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{12}}\right| \leq \left|\frac{R_{\perp\perp}^A}{\sigma_{12,c}}\right| \quad (2.39)$$

3. Modo C:

$$f_{IFF} = \left[\left(\frac{\sigma_{12}}{2(1+p_{\perp\perp}^c)R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{R_{\perp}^c}\right)^2 \right] \frac{R_{\perp}^c}{-\sigma_{22}}, \sigma_{22} < 0 \text{ e } \left|\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{12}}\right| \geq \left|\frac{R_{\perp\perp}^A}{\sigma_{12,c}}\right| \quad (2.40)$$

Onde:

$R_{\parallel}^t$: resistência longitudinal à tração, sob ação uniaxial de $\sigma_{\parallel}^t$;

$R_{\perp}^t$: resistência transversal à tração, sob ação uniaxial de $\sigma_{\perp}^t$;

$R_{\perp}^c$: resistência transversal à compressão, sob ação uniaxial de $\sigma_{\perp}^c$;

$R_{\perp\parallel}$: resistência longitudinal ao cisalhamento, sob ação de cisalhamento puro de $\tau_{\perp\parallel}$;

$R_{\perp\perp}^A$: resistência do plano de ação contra a fratura devido ação de $\tau_{\perp\perp}$ atuante neste plano;

$p_{\perp\parallel}^t, p_{\perp\parallel}^c$: inclinações da superfície de falha.

$$R_{\perp\perp}^A = \frac{R_{\perp}^c}{2(1+p_{\perp\perp}^c)} \quad (2.41)$$

$$R_{\perp\parallel} = \frac{p_{\perp\parallel}^c}{p_{\perp\perp}^c} R_{\perp\perp}^A \quad (2.42)$$

$$\tau_{12,c} = R_{\perp\parallel} \cdot \sqrt{1 + 2p_{\perp\perp}^c} \quad (2.43)$$

A Figura 17 apresenta as superfícies de falha dos modos descritos de 2.38 a 2.40 no plano (σ_2, σ_{12}) . Nos modos A e B, tem-se um ângulo de falha (θ_{fp}) nulo, enquanto que, no modo C esse ângulo varia entre 0° e 55° e pode ser calculado de acordo com a equação 2.44.

$$\cos \theta_{fp} = \sqrt{\frac{1}{2(1+p_{\perp\perp}^c)} \left[\left(\frac{R_{\perp\perp}^A \sigma_{12}}{R_{\perp\parallel} \sigma_{22}}\right)^2 + 1 \right]} \quad (2.44)$$

Figura 17: Superfície de falha (Plano σ_2, σ_{12})

O critério de resistência do plano de ação de Puck depende de sete parâmetros independentes, dos quais três são parâmetros de resistência e quatro são valores de inclinações. Puck et al. (2002) apresenta como os parâmetros de resistência podem ser determinados e valores recomendados para as inclinações. Resumidamente, tem-se na Tabela 6 os valores típicos de resistência e na Tabela 5, valores de inclinação para compósitos fibra de vidro / resina epóxi e fibra de carbono / resina epóxi com 60% em fração volumétrica.

Tabela 5: Valores típicos de inclinações

$\phi = 60\%$	$p_{\perp\parallel}^t$	$p_{\perp\parallel}^c$	$p_{\perp\perp}^t$	$p_{\perp\perp}^c$
	(-)	(-)	(-)	(-)
Fibra de vidro / resina epóxi	0,30	0,25	0,20 a 0,25	0,20 a 0,25
Fibra de carbono / resina epóxi	0,35	0,30	0,25 a 0,30	0,25 a 0,30

Tabela 6: Valores típicos de resistências (Puck et al. (2002)).

$\phi = 60\%$	$R_{\perp\parallel}$ (MPa)	$R_{\perp}^t$ (MPa)	$R_{\perp}^c$ (MPa)
Fibra de vidro / resina epóxi	45	65	145
Fibra de carbono / resina epóxi	50	100	230

Uma vez ocorrida a falha, as propriedades mecânicas devem ser degradadas. De acordo com

Puck e Shürmann (2002), adota-se 2.45 como relação empírica de degradação. Os parâmetros η_r , c e ξ ajustam-se de acordo com resultados experimentais.

$$\eta = \frac{1 - \eta_r}{1 + c(f_{IFF} - 1)^\xi} + \eta_r \quad (2.45)$$

Dessa forma, as propriedades mecânicas são atualizadas de acordo com a Tabela 7.

Tabela 7: Degradação de propriedades elásticas devido falha entre-fibras.

Propriedades elásticas	Propriedades degradadas
E_{22}	$\overline{E}_{22} = \eta_E E_{22}$
ν_{12}	$\overline{\nu}_{12} = \nu_{12}$
G_{12}	$\overline{G}_{12} = \eta_G G_{12}$

2.2.7 Lei de Degradação de Matzenmiller

Matzenmiller et al. (1995) desenvolveu um modelo constitutivo de dano anisotrópico aplicado a materiais compósitos. Em particular, no referido trabalho, os autores aplicaram o modelo no estudo de caso de compósito unidirecional sobre carregamento uniaxial, chegando as relações expressas em 2.46 e 2.47.

$$\sigma_{11} = (1 - \omega) E_{11} \epsilon_{11} \quad (2.46)$$

Sendo ω a variável de dano que degrada o módulo de elasticidade longitudinal de acordo com 2.47.

$$\omega = 1 - \exp \left[-\frac{1}{me} \left(\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_f} \right)^m \right] \quad (2.47)$$

Onde:

ϵ : deformação longitudinal;

ϵ_f : deformação na falha; e

m e e : parâmetros de ajuste.

Posteriormente, as relações anteriores serão utilizadas como leis de degradação para os modos de falha de fibra sob tração e sob compressão.

Materiais e Métodos

Os critérios de falha e modelos abordados no final do Capítulo 2 confluirão num único modelo de material para Análise Progressiva de Falhas, cujas metodologias de obtenção de dados de entrada, implementação e avaliação serão descritas nesse capítulo.

Inicialmente, apresenta-se uma síntese dos resultados experimentais de Tita (2003), os quais fornecem os parâmetros para o modelo de material, bem como, dados para fins de avaliação do mesmo. Em seguida, descreve-se o modelo de material implementado, expondo-se as relações referentes aos critérios de falha, as leis de degradação e os efeitos de não-linearidades.

Uma vez descrito o modelo de material, detalha-se a implementação deste junto ao pacote de elementos finitos Abaqus[®] através da sub-rotina UMAT (*“User Material”*). Por fim, esquematiza-se uma estratégia de automatização do processo de análise com auxílio de um programa desenvolvido em Matlab[®], dessa forma, evitando a realização de procedimentos repetitivos pelo usuário.

3.1 Resultados experimentais

Este trabalho utiliza os resultados experimentais de Tita (2003) como dados para alimentar o modelo de material e identificar os parâmetros associados ao mesmo, assim como, para avaliar os resultados obtidos a partir do modelo de material. Os ensaios foram realizados no *Leuven*

Composites Processing Centre da Katholieke Universiteit Leuven (Blgica). Foram ensaiados corpos-de-prova (CDPs) de compósitos de resina epóxi com reforços unidirecionais de fibra de carbono numa fração volumétrica de 63% em diversas sequências de empilhamento.

Ensaio de tração e compressão uniaxiais, bem como, cisalhamento foram realizados seguindo orientações das normas ASTM D3039 (1 mm/min), D3410 (1,5 mm/min) e D3518 (2 mm/min) para diversas sequências de empilhamento ($[0^\circ]_n$, $[90^\circ]_n$ e $[+45^\circ/-45^\circ]_n$) visando a determinação das constantes elásticas e valores de resistência do material, os quais estão dispostos na Tabela 8. As velocidades anteriormente citadas, referem-se às velocidades utilizadas por Tita (2003) na realização de seus ensaios.

Tabela 8: Propriedades mecânicas de uma lâmina de material compósito unidirecional de fibra de carbono com resina epóxi (prepreg M10 - Hexcel) numa fração volumétrica de 63 % (TITA, 2003).

Propriedades elásticas	
Módulo de Young	$E_1 = 100 \text{ GPa}; E_2 = E_3 = 10 \text{ GPa}$
Módulos de Cisalhamento	$G_{12} = G_{13} = 5,4 \text{ GPa}; G_{23} = 3,05 \text{ GPa}$
Coefficientes de Poisson	$\nu_{12} = \nu_{13} = 0,34; \nu_{23} = 0,306$
Valores de resistência	
Resistência à tração	$F_{1T} = 1400 \text{ MPa}; F_{2T} = F_{3T} = 47 \text{ MPa}$
Resistência à compressão	$F_{1C} = 700 \text{ MPa}; F_{2C} = F_{3C} = 130 \text{ MPa}$
Resistência ao cisalhamento	$F_{12} = F_{13} = 53 \text{ MPa}; F_{23} = 89 \text{ MPa}$

Dentre essas propriedades, como estudado por Hahn e Tsai (1973), evidencia-se o comportamento não-linear do módulo de cisalhamento do plano 1-2 observado através da curva σ_{12} versus γ_{12} , conforme Figura 18.

Além de ensaios de tração e compressão, realizaram-se ensaios de flexão 3-pontos segundo as orientações da Norma ASTM D790 (2,8 mm/min) para as sequências de empilhamento e espessuras que estão da Tabela 9.

Figura 18: Curva experimental σ_{12} vs. γ_{12} .

Tabela 9: Sequências de empilhamento e espessuras dos CDPs.

Sequências de empilhamento		Espessura média
Empilhamento 1	$[0^\circ]_{10}$	1,73 mm
Empilhamento 2	$[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]_S$	1,77 mm

Ensaaiaram-se oito corpos de prova para cada sequência de empilhamento da Tabela 9 com uma taxa de deslocamento de 2,8 mm/min do aplicador de carga. A Figura 19(a) apresenta os resultados obtidos para cada CDP do Empilhamento 1. A partir desses dados, estabelecem-se a média e o envelope da Figura 19(b), onde pode-se destacar duas regiões. Na Região I, delimitada pela redução do nível de carga em 4 mm de deslocamento, observa-se uma pequena discrepância entre os CDPs, de forma que a média pode ser adotada como referência. Nota-se na Região I, que há um comportamento praticamente linear, somente próximo aos 4 mm de deslocamento perde-se a linearidade devido a ocorrência de danos na matriz. Na Região II, tem-se maior variabilidade entre os corpos de prova devido a aleatoriedade dos fenômenos de falha após a perda de carga abrupta de aproximadamente 1100 N a 600 N que ocorre entre deslocamentos de 4 a 4,4 mm. Para deslocamentos superiores a 6 mm, o envelope é mais restrito, porém, não se pode considerar representativo, pois o número de amostras existentes para esse nível de deslocamento pequeno.

(a) Todos os CDPs

(b) “Envelope dos resultados”

Figura 19: Resultados experimentais de flexão 3-pontos do Empilhamento 1 (TITA, 2003).

Análise análoga realizou-se para os CDPs do Empilhamento 2. A Figura 20(a) apresenta as curvas de força por deslocamento para cada CDP ensaiado. A Figura 20(b) apresenta a média e o envelope, com a ressalva que as últimas perdas abruptas de resistência foram desconsideradas, pois comprometeriam a média e o envelope, por exemplo, desconsidera-se a resposta do CDP 2 para deslocamentos superiores a 8,3 mm. Analogamente ao Empilhamento 1, na Região I do Empilhamento 2 (at 5 mm de deslocamento), não se tem grande variabilidade entre os CDPs, de forma que, pode-se considerar a média como referência. Porém, na Região II, tem-se uma maior

Figura 20: Resultados experimentais de flexão 3-pontos do Empilhamento 2 (TITA, 2003).

variabilidade, em algumas regiões chegando a 200 N (aproximadamente 7,8 mm), o que representa 25% da intensidade máxima de força registrada no ensaio. A variabilidade observada decorrente da combinação de diversos fatores, dentre os quais, podem-se citar: o fabricação manual dos corpos de prova, a aleatoriedade dos vazios, as condições ambiente. Segundo Tita (2003), as quedas abruptas de força observadas nos CDPs (Figura 20(a)) são seguidas por delaminações. Delaminações, em geral, são decorrentes de diversas falhas intralaminas (Figura 21). Apesar do modelo aqui proposto não contemplar falhas interlaminas, no próximo capí-

tulo, verifica-se que o mesmo é representativo das quedas de resistência e da rigidez residual devido o acúmulo de falhas intralaminares.

Figura 21: Processo de evolução de falhas intralaminares e interlaminares (AGARWAL; BROUNTMAN, 1990).

3.2 Modelo de material avaliado

O fluxograma da Figura 22 esquematiza o modelo de material implementado.

Na etapa (1) (Figura 22), a partir do estado de deformações e variáveis de estado, calcula-se uma previsão do tensor constitutivo e do estado de tensões num ponto do laminado, conforme 2.3. Importante ressaltar, que antecedente a montagem do tensor constitutivo, o módulo de cisalhamento no plano (G_{12}) deve ser atualizado devido seu comportamento não-linear (HAHN; TSAI, 1973). Neste trabalho, adota-se o módulo de cisalhamento secante, o qual obtido pela curva experimental σ_{12} vs. γ_{12} (Figura 18). Curva esta que foi aproximada por um polinômio de terceiro grau, como sugerido por Puck e Shürmann (1996). A Figura 23(a) apresenta as curvas experimentais e a aproximação polinomial juntamente com os coeficientes do polinômio (A_1 , A_2 e G_{12}^0). Com isso, o módulo de cisalhamento secante, escreve-se de acordo com 3.1.

$$G_{12} = A_1 \gamma_{12}^2 + A_2 \gamma_{12} + G_{12}^0 \quad (3.1)$$

Na etapa (2) (Figura 22), o estado de tensões verificado por um Critério de Falha, o qual divide-se em FF (falha da fibra - “Fiber failure”) e IFF (falha entre fibras - “Inter-fiber failure”).

Figura 22: Esquema simplificado do modelo de material.

Como critério FF, utiliza-se o Critério de Hashin (HASHIN, 1980), enquanto que, para o critério IFF, o Critério de Puck (PUCK; SHÜRMANN, 1996) (PUCK; SHÜRMANN, 2002) (KNOPS, 2008), ambos estão detalhados no Capítulo 2. As equações de 3.2 a 3.6 descrevem os critérios de falha para os modos de falha considerados.

(a) Curva tensão vs. deformação: τ_{12} por γ_{12}

(b) Módulo de cisalhamento secante.

Figura 23: Comportamento não-linear do módulo de cisalhamento.

FF - T: falha da fibra sob tração ($\sigma_{11} > 0$):

$$f_{FF} = \left(\frac{\sigma_{11}}{F_{1T}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{F_{12}} \right)^2 \quad (3.2)$$

FF - C: falha da fibra sob compressão ($\sigma_{11} < 0$):

$$f_{FF} = \left(\frac{\sigma_{11}}{F_{1C}} \right)^2 \quad (3.3)$$

IFF - A: falha entre-fibras por modo A ($\sigma_{22} \geq 0$):

$$f_{IFF} = \sqrt{\left[\left(\frac{1}{R_{\perp}^t} - \frac{p_{\perp\parallel}^t}{R_{\perp\parallel}} \right) \cdot \sigma_{22} \right]^2} + \left(\frac{\sigma_{12}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 + \frac{p_{\perp\parallel}^t}{R_{\perp\parallel}} \sigma_{22} \quad (3.4)$$

IFF - B: falha entre-fibras por modo B ($\sigma_{22} < 0$ e $|\sigma_{22}/\sigma_{12}| \leq |R_{\perp\perp}^A/\sigma_{12,c}|$):

$$f_{IFF} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{12}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(\frac{p_{\perp\parallel}^c}{R_{\perp\parallel}}\sigma_{22}\right)^2} + \frac{p_{\perp\parallel}^c}{R_{\perp\parallel}}\sigma_{22} \quad (3.5)$$

IFF - C: falha entre-fibras por modo C ($\sigma_{22} < 0$ e $|\sigma_{22}/\sigma_{12}| \geq |R_{\perp\perp}^A/\sigma_{12,c}|$):

$$f_{IFF} = \left[\left(\frac{\sigma_{12}}{2(1 + p_{\perp\perp}^c)R_{\perp\parallel}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{R_{\perp\perp}^c} \right)^2 \right] \frac{R_{\perp\perp}^c}{-\sigma_{22}} \quad (3.6)$$

Identificando-se a falha por algum dos critérios anteriores, as propriedades elásticas do material são degradadas de acordo com as Leis de Degradação (Etapa (3), Figura 22). Os modos de falha FF são predominantes em relação aos modos IFF, uma vez que, tratam-se de modos mais severos, implicando numa perda maior de rigidez e resistência da estrutura. Numa falha FF, as propriedades no plano da lâmina e propriedades transversais são levadas a zeros e o módulo de elasticidade na direção das fibras (E_1) degradado, de acordo com Matzenmiller et al. (1995), conforme mostrado na Tabela 10. Numa falha IFF, as propriedades são degradadas de acordo com a Tabela 11, seguindo as orientações dos trabalhos de Puck.

Tabela 10: Degradação de propriedades devido falha de fibras ($f_{FF} > 1$).

Propriedades não-degradadas	Propriedades degradadas	
E_1	$\overline{E_1} = (1 - \omega)E_1$	$\omega = 1 - \exp \left[-\frac{1}{me} \left(\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_f} \right)^m \right]$
E_2	$\overline{E_2} = 0$	
G_{12}	$\overline{G_{12}} = 0$	
ν_{12}	$\overline{\nu_{12}} = 0$	

O fator de degradação ω ajustado por dois parâmetros e e m . Estes parâmetros foram calibrados a partir das respostas uniaxiais obtidas por Tita (2003). Os parâmetros e e m para o comportamento sob tração puderam ser devidamente ajustados, chegando-se aos valores de $e = 9,5$ e $m = 3,8$ (Figura 24, primeiro quadrante). Sob compressão, devido a ausência das curvas experimentais, adotaram-se um conjunto de parâmetros, os quais estão dispostos na Tabela 12. O comportamento mecânico associado a esses valores de parâmetros respeitam a

Tabela 11: Degradação de propriedades devido falha entre-fibras ($f_{IFF} > 1$).

Propriedades não-degradadas	Propriedades degradadas	
E_1	$\overline{E}_1 = E_1$	$\eta = \frac{1-\eta_r}{1+c(f_{IFF}-1)^\xi} + \eta_r$
E_2	$\overline{E}_2 = \eta_E E_2$	
G_{12}	$\overline{G}_{12} = \eta_G G_{12}$	
ν_{12}	$\overline{\nu}_{12} = \nu_{12}$	

tensão máxima experimental de 930 MPa (TITA, 2003). No terceiro quadrante apresenta-se a resposta em compressão, adotando-se $e = 16$ e $m = 4, 7$

Figura 24: Ajuste dos parâmetros de Matzenmiller sob tração e compressão.

As Figuras 25 mostram a influência dos parâmetros na evolução da lei de degradação.

Similarmente aos modos FF, verificando-se falha por IFF, as propriedades são degradadas de acordo com a teoria de Puck. A Figura 26 mostra a evolução dos parâmetros de degradação η em função do índice de falha calculado, de acordo com 2.45.

Retornando-se ao fluxograma (Figura 22), uma vez que as propriedades foram degradadas,

Tabela 12: Parâmetros e e m para comportamento sob compressão.

e	m
$e = 15,0$	$m = 4,9$
$e = 16,0$	$m = 4,7$
$e = 17,0$	$m = 4,5$

Figura 25: Influência dos parâmetros de Matzenmiller na evolução da lei de degradação.

há necessidade de atualizar o tensor constitutivo e o estado de tensões (etapa (4)). Enfim, na etapa (5), atualizam-se as variáveis de estado.

3.3 Sub-rotinas UMAT

Por vezes, os modelos de material, tipos de condições de contorno e formulações implementadas nos pacotes de elementos finitos (sejam comerciais ou não) não atendem às necessidades

Figura 26: Degradação devido falha entre-fibras (IFF).

do usuário. As limitações são contornadas por alguns pacotes, dentre esses o Abaqus[®], permitindo um maior controle de etapas do processo de solução do problema através de *rotinas do usuário* (“*user sub-routines*”). No Abaqus[®], diversos tipos de sub-rotinas podem ser implementadas pelo usuário (ABAQUS, 2007), em particular, a sub-rotina UMAT (“User material”), utilizada neste trabalho, que possibilita empregar um modelo de comportamento mecânico de um material genérico.

A sub-rotina UMAT, implementada em Fortran, compilada e vinculada ao executável principal do Abaqus[®]. A partir daí, esta passa a ser acionada em cada incremento do processo de resolução para cada ponto de integração dos elementos finitos utilizados. A Figura 27 esquematiza o processo de solução de um problema utilizando sub-rotinas UMAT.

Em cada incremento do processo, para cada ponto de integração, são enviadas à sub-rotina UMAT informações referentes às propriedades do material, ao tensor das deformações, aos incrementos de deformação e aos valores das variáveis de estado. A partir desses dados, sob o controle do usuário, é realizada uma previsão do tensor constitutivo e do estado de tensões. O estado de tensões é verificado quanto aos critérios de falha. Não se identificando falha, segue-se para a atualização das variáveis de estado. Entretanto, na existência de falha, aplicam-se as leis de degradação pertinentes, atualizando-se o tensor constitutivo e o estado de tensão no ponto, e em seguida, as variáveis de estado. São fornecidos ao pacote de elementos finitos: a matriz

Figura 27: Processo de solução utilizando sub-rotina UMAT.

constitutiva atualizada, o tensor das tensões e as variáveis de estado. Retornando-se ao controle principal do Abaqus®, calcula-se o resíduo, o qual é obtido comparando-se o vetor de forças internas com as forças externas, o qual deve ser menor que uma tolerância para prosseguir com a solução.

Com o intuito de auxiliar o leitor futuramente no desenvolvimento de sub-rotinas, no anexo deste trabalho, estão disponíveis três exemplos de UMATs. No primeiro, foi implementado um modelo elástico ortotrópico linear sob estado plano generalizado de tensões. No segundo, análogo ao primeiro, acrescenta-se o efeito de não-linearidade associado ao módulo de cisalhamento no plano 1-2. Por fim, o terceiro, apresenta a sub-rotina desenvolvida neste trabalho, a qual contempla efeitos de não-linearidade, critérios de falha, leis de degradação e manipulação de variáveis de estado.

3.4 Controle de simulações por programa em Matlab®

O desenvolvimento de sub-rotinas UMAT, em geral, requerem dedicação do usuário na realização de um grande número de análises a fim de verificar a implementação. O tempo de processamento de cada análise é função da densidade de malha, do tamanho de iteração, do grau de não-linearidade do problema em estudo (necessitando-se um número maior de iterações). Ao final de cada análise, o usuário dispende tempo no pós-processamento e geração de resultados, como: tabelas, gráficos, entre outros. Dado o grande número de análises, esse é um processo que automatizado pode poupar horas, dias de trabalho repetitivo do usuário, uma vez que, o mesmo exerce procedimento análogo para cada uma das simulações realizadas.

O Abaqus® têm diversas rotinas que permitem controlar desde a geração de geometria à interpretação do arquivo de resultados. Essas rotinas estão a disposição do usuário possibilitando que este desenvolva programas escritos em C++ que gerenciem o pacote de elementos finitos. Esta solução requer grande conhecimento de programação e dos recursos do pacote. Apresenta-se aqui uma solução não tão completa quanto a anterior, porém, capaz de atender parte das necessidades, com a vantagem de permitir a construção de gráficos e relatórios sem exigir conhecimentos avançados de programação.

A solução proposta implementada em Matlab®, onde o usuário tem a disposição diversas funções que facilitam e agilizam a resolução de problemas. A Figura 28 apresenta a metodologia adotada.

Inicialmente, constrói-se os N conjuntos de parâmetros que serão analisados. Tem-se o início de um processo de N iterações, onde cada iteração corresponde a análise do modelo desde o pré-processamento geração de dados para posterior análise pelo usuário.

Para cada conjunto de dados, constrói-se um arquivo de entrada do Abaqus® (*.inp). Esse processo via Matlab® é viável para problemas onde deseja-se alterar parâmetros associados ao material (módulo de elasticidade, resistência, densidade), propriedades geométricas (espessuras, inércias), condições de contorno e controles de análise não-linear (tolerâncias, tamanho

Figura 28: Controle de simulações em elementos finitos via Matlab®.

de passo de iteração, número de passos). Uma vez o arquivo de entrada preparado, inicia-se a análise pelo “Prompt de comando” através da seguinte linha:

abaqus job=arquivo-de-entrada user=sub-rotina-UMAT

Enquanto o pacote processa o problema, o programa em Matlab® gerencia em segundo plano quando a análise foi finalizada através da árvore de processos do sistema operacional. Finalizada a análise, tem-se o pós-processamento do arquivo de resultados (*.odb). Nesta etapa, geram-se todos os resultados que serão “avaliados” pelo Matlab®. Isso é realizado através de uma rotina escrita em Python, a qual é acionada pela seguinte linha:

abaqus viewer noGUI=rotina-python

Assim como na fase de processamento do problema, o programa em Matlab® gerencia a árvore de processos visando identificar o fim da execução da rotina em Python. Uma vez extraído do arquivo de resultados os dados de interesse, esses dados são tratados no Matlab® junto com outros dados (experimentais, outros modelos, entre outros) gerando relatórios (tabelas, figuras, gráficos), que armazenados, agilizam o procedimento de análise pelo usuário, evitando a realização de atividades repetitivas. Essa etapa finaliza a metodologia de análise de um conjunto de dados, seguindo-se para o próximo conjunto.

Vale destacar que a metodologia de controle de simulações em elementos finitos via Matlab® permite a avaliação de inúmeros parâmetros associados a um dado modelo de material. Dessa forma, a mesma foi exaustivamente empregada para a obtenção dos resultados apresentados no Capítulo 4.

Resultados e Discussões

A partir das propriedades do material, bem como, da sub-rotina UMAT desenvolvida, aplica-se o modelo de material implementado na simulação do comportamento de uma estrutura sob flexão 3-pontos. Os tópicos a seguir descrevem o modelo em elementos finitos utilizado, bem como, os resultados obtidos, os quais são comparados com os resultados experimentais e computacionais de Tita (2003). Ao final do capítulo, apresentam-se algumas considerações sobre os parâmetros envolvidos no processo de solução do modelo.

4.1 Descrição do problema

Analisa-se o comportamento da estrutura sob flexão 3-pontos. O laminado é suportado por dois apoios e solicitado por um aplicador de carga no plano médio entre os apoios. A Figura 29 representa geometricamente o estudo de caso, assim como, apresenta os diagramas de esforços cortantes e momentos fletores.

A distância entre apoios (a) é de 58 mm. A estrutura apresenta 80 mm de comprimento (L) por 25 mm de largura, de acordo com a média das dimensões dos CDPs de Tita (2003). A região de contato dos apoios e do aplicador de carga são semi-circulares de diâmetro igual 8 mm. A espessura da estrutura está disposta na Tabela 9. Para fins de modelagem, consideram-se que as camadas constituintes do laminado têm a mesma espessura, a qual corresponde a décima parte do valor indicado na Tabela 9, ou seja, para o Empilhamento 1 tem-se 0,173 mm

para cada camada e para o Empilhamento 2, 0,177 mm para cada camada.

Figura 29: Flexão 3-pontos.

4.2 Modelo em elementos finitos

A Figura 30 apresenta o modelo em elementos finitos desenvolvido. A estrutura foi discretizada em elementos de casca laminado de 4 nós (Figura 30(a)), com integração completa (2×2), e três pontos de integração distribuídos na direção da espessura de cada camada (Figura 30(a)). Dessa forma, totalizando-se $12n$ pontos de integração por elemento (sendo n o número total de camadas). Os elementos adotados são denominados S4 pelo Abaqus®.

As condições de contorno estão representadas na Figura 30(b), as quais consistem de: simetria em relação ao plano xz (analisa-se meio modelo), restrição de deslocamentos dos apoios, deslocamento prescrito do aplicador na direção z e restrição de translação em x dos nós contidos no plano yz de atuação do aplicador. Por tratar-se de corpos rígidos, o aplicador de carga e os apoios têm suas condições de contorno estabelecidas através de pontos de referência (Figura 30(a)). A interação entre os apoios, aplicador e estrutura é modelada através de contato rígido (“*hard contact*”) entre superfícies. Neste contato, as superfícies do aplicador e dos apoios são

(a) Malha de elementos finitos

(b) Condições de contorno

Figura 30: Modelo de elementos finitos.

consideradas rígidas, enquanto que, a superfície que representa geometricamente o laminado é deformável.

Adota-se um incremento inicial de 1% (deve-se adotar incrementos iniciais pequenos para garantir a convergência do contato entre apoios, aplicador e estrutura) e máximo de 3% do deslocamento total prescrito ao aplicador. Aplica-se um deslocamento prescrito de 8 mm ao

Empilhamento 1 e 10 mm ao Empilhamento 2.

Os tópicos a seguir apresentam os resultados obtidos para as duas configurações de empilhamentos citadas. Como exposto no capítulo anterior, comparam-se os resultados dos modelos computacionais com os resultados experimentais obtidos por Tita (2003) através das curvas de força versus deslocamento. Além disso, verifica-se a distribuição de tensões ao longo da espessura antes e após quedas abruptas nas curvas de força versus deslocamento. Neste estudo de tensões, consideram-se dois pontos de análise: P1 (localizado no plano yz de ação do aplicador) e P2, ambos localizados no plano de simetria xz (Figura 31). Sendo que os erros são calculados em relação aos resultados experimentais através da equação 4.1.

Figura 31: Pontos de análise.

$$erro = \left| \frac{exp. - comp.}{exp.} \right| \% \quad (4.1)$$

4.3 Empilhamento 1 ($[0^\circ]_{10}$)

A Figura 32 apresenta os resultados das simulações numéricas, realizadas neste trabalho e por Tita (2003), juntamente com a média e o envelope dos resultados experimentais.

Experimentalmente, pela média dos CDPs, tem-se uma perda abrupta de rigidez e resistência num deslocamento de 4 mm para uma força de 1100 N. Após 4 mm tem-se uma maior dispersão dos CDPs. Para maiores deslocamentos (aproximadamente 8 mm) nota-se que a

Figura 32: Curva força versus deslocamento do Empilhamento 1 ($[0^\circ]_{10}$) sob flexão 3-pontos: experimental versus numérico

rigidez é praticamente nula, e que a intensidade de força atuante na estrutura reduz de 1100 N para 535 N (perda de 51,3%).

A Tabela 13 compara a força do aplicador e o deslocamento correspondente imediatamente antes da primeira perda abrupta de rigidez e resistência da estrutura capturados pelo modelo.

Tabela 13: Resultados de flexão 3-pontos - Empilhamento 1.

Parâmetros		Deslocamento (mm)			Força (N)		
Tração	Compressão	MEF	Exp.	Erro	MEF	Exp.	Erro
e = 15,0; m = 4,4	e = 15,0; m = 4,9	3,8	4,0	5,0%	1055	1100	4,1 %
	e = 16,0; m = 4,7	3,8		5,0%	1056		4,0 %
	e = 17,0; m = 4,5	3,8		5,0%	1057		4,0 %

Os modelos computacionais estudados identificaram as intensidades de força e deslocamento com erros máximos de 7 %. Entretanto, para deslocamentos maiores (acima de 6 mm), não houve uma perda de rigidez acentuada como observado experimentalmente. Observa-se ainda, que as análises não conseguiram evoluir além de 5,2 mm, onde constatarem-se proble-

mas de convergência.

A fim de compreender melhor os resultados obtidos pelas simulações, analisa-se em detalhe a segunda combinação de parâmetros ($e = 16$ e $m = 4,7$). De forma análoga ao realizado no capítulo anterior para os resultados experimentais, divide-se a resposta em duas regiões: Região I e Região II (Figura 33).

Figura 33: Curva força versus deslocamento para Empilhamento 1: análise detalhada

Na Região I (de 0 a 4 mm de deslocamento), as simulações acompanharam os resultados experimentais, mantendo proximidade com a média experimental e entre os máximos e mínimos do envelope. O modelo identificou um erro de 5 % para o deslocamento correspondente à intensidade máxima de força alcançado durante os ensaios (considerando-se a média dos CDPs como referência).

Na Região II, o modelo registrou uma queda acentuada de força, porém, não permanece dentro dos limites do envelope como ocorrido na Região I. A condição de equilíbrio, imediatamente após 4 mm, é restabelecida para uma intensidade de força de aproximadamente 600 N para ambos resultados (experimental e computacional). A análise prossegue até 5,2 mm de deslocamento, quando é interrompida por não atender os critérios de convergência do Abaqus®. A interrupção da análise é atribuída as leis de degradação do material e/ou problemas de locali-

zação devido a grandes gradientes entre os elementos finitos logo abaixo ao aplicador de carga.

As quedas observadas nos gráficos estão relacionadas a redistribuição de tensões do laminado em busca de uma nova configuração de equilíbrio compatível com o deslocamento imposto pelo aplicador. A Figura 34 apresenta a distribuição de tensões para os pontos A e B indicados na Figura 33. O ponto A, localizado na Região I, corresponde a um deslocamento de 3,6 mm, enquanto que o ponto B, localizado na Região II, a 4,8 mm.

Figura 34: Distribuição da componente de tensão σ_{11} ao longo da espessura.

Em A, para ambos as seções P1 (próxima ao aplicador de carga) e P2 indicadas na Figura 31, predomina o comportamento linear de distribuição de tensões. Em B, nota-se uma mudança significativa do comportamento de σ_{11} , havendo redução significativa das tensões nas camadas superiores (devido a redução das propriedades mecânicas nesses pontos) e na primeira camada

do laminado, decorrente de uma falha sob tração. No ponto P2 (condição B), as tensões atuantes são reduzidas 30 % em relação ao mesmo ponto na condição A.

4.4 Empilhamento 2 ($[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]_S$)

Os resultados para o empilhamento $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]_S$ são analisados de forma análoga ao empilhamento anterior. Experimentalmente, as curvas experimentais para esse empilhamento mostram maior variabilidade em relação ao empilhamento anterior, principalmente para deslocamentos superiores a 5,1 mm.

A Figura 35 mostra as respostas de força versus deslocamento. Inicialmente, os modelos são representativos do comportamento elástico inicial, de forma que, todos permanecem próximo a curva experimental média e entre os limites do envelope. Após 5,1 mm de deslocamento, o modelo de material deste trabalho apresenta duas perdas sucessivas, chegando a 500 N de força em 6,4 mm de deslocamento (região fora dos limites do envelope). O modelo de (TITA, 2003), nessa mesma região, conserva-se dentro do envelope, no entanto, sem registrar perdas abruptas de rigidez, mas sim, um decaimento exponencial consequente da lei de degradação utilizada.

A Tabela 14 compara os resultados das simulações com os resultados experimentais, sendo que o erro é calculado através da equação 4.1.

De acordo com a Tabela 14, as simulações realizadas identificaram erros máximos de 13,7 %, as intensidades de força e deslocamento da primeira queda abrupta de rigidez e resistência. Detalham-se os resultados para o segundo conjunto de parâmetros ($e = 16$ e $m = 4, 7$), os quais apresentaram erros inferiores a 8%, de acordo com a Figura 36.

Na Região I, como colocado, o modelo é representativo do comportamento da estrutura. Além disso, identifica a falha da primeira camada com 3,7 mm de deslocamento, o que corresponde ao deslocamento de mudança de inclinação da resposta experimental.

Na Região II, inicialmente, tem-se a queda de força e rigidez para magnitudes de deslo-

Figura 35: Curva força versus deslocamento do Empilhamento 2 sob flexão 3-pontos: experimental versus numérico

Tabela 14: Resultados de flexão 3-pontos - Empilhamento 2.

Parâmetros		Deslocamento (mm)			Força (N)		
Tração	Compressão	MEF	Exp.	Erro	MEF	Exp.	Erro
$e = 15,0; m = 4,4$	$e = 15,0; m = 4,9$	4,4	5,1	13,7%	815,0	825,0	1,2 %
	$e = 16,0; m = 4,7$	4,7		7,8%	859,2		4,1 %
	$e = 17,0; m = 4,5$	4,7		7,8%	866,8		5,1 %

camento entre 5,1 e 6,5 mm, faixa esta que o modelo não conseguiu prever conservando o envelope de resultados experimentais. Para deslocamentos superiores a 8 mm, a proximidade com os resultados experimentais é maior, seja pela rigidez ou resistência. Diferente dos resultados do modelo para o Empilhamento 1 ($[0^\circ]_{10}$), no Empilhamento 2 ($[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]_S$), conseguiu-se estimar a rigidez final da estrutura, como observado para os deslocamentos entre 8 mm e 9 mm.

A Figura 37 mostra a distribuição de tensões σ_{11} , respectivamente, para as seções P1 e P2 (Figura 31) em três condições de deslocamento: A (4 mm), B (5,5 mm) e C (8,0 mm),

Figura 36: Curva força versus deslocamento para o Empilhamento 2: análise detalhada

indicados na Figura 36. No ponto P1, na condição A, tem-se uma condição de distribuição de maior solicitação da primeira camada. Essa distribuição, após 5,1 mm, é novamente linear, no entanto, com mudança da linha neutra do laminado. No ponto P2, permanece uma distribuição linear, havendo uma redução no nível de solitação entre as condições A e B.

4.5 Considerações sobre os parâmetros de solução

Durante a realização deste trabalho, um grande número de análises em elementos finitos foi realizada. Através dessas, verificou-se a influência dos parâmetros de solução na obtenção da resposta numérica. Dentre esses parâmetros, destacam-se o tamanho do incremento e os critérios de convergência do Abaqus®.

A fim de verificar a influência do tamanho do incremento (“*step size*”) na solução não-linear do problema, análises via elementos finitos foram realizadas com os seguintes incrementos: 0,1; 0,05; 0,03; 0,02; 0,01 e 0,001. A Figura 38 apresenta os resultados obtidos no problema em estudo com sequência de Empilhamento 2 ($[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]_S$). O tamanho do incremento refere-se a porcentagem máxima do deslocamento prescrito que o Abaqus® pode adotar no pro-

Figura 37: Distribuição da componente de tensão σ_{11} ao longo da espessura do Empilhamento 2.

cesso de solução. Em todos os casos, partiu-se de um incremento inicial de 0,01, tamanho esse suficiente para garantir a convergência do contato. Os resultados mostraram que um incremento inferior ou igual a 0,05 convergem para uma mesma curva força versus deslocamento. Entretanto, para incrementos de 0,02 e 0,005, a análise não avança além de 6 mm de deslocamento do aplicador (75 % da análise).

Figura 38: Influência do tamanho do incremento (*“step size”*) na resposta.

O Abaqus® tem diversos controles associados a resolução de problemas não-lineares. Esses controles interrompem a análise quando a tolerância não é alcançada, quando o número de iterações é excessivo, além de estabelecerem as taxas de aumento / redução de incremento, entre outros (ABAQUS, 2007). A partir da análise do histórico de resíduos (em força e momento), verificou-se a existência de convergência, porém, numa taxa baixa de acordo com as opções pré-definidas no Abaqus®. Dessa forma, o número de iterações máximo permitido para um dado tamanho de incremento foi aumentado, conservando-se as tolerâncias pré-definidas no pacote. Os parâmetros são controlados através do comando **Controls, parameters=time incrementation*.

Conclusões e perspectivas futuras

Neste trabalho, avaliou-se um modelo de material quanto a análise progressiva de falhas. Para isso, inicialmente, apresentaram-se as principais relações que definem a análise de tensões em um laminado. Por seguinte, os critérios de falha e leis de degradação correspondentes aos modos de falha. Através desse estudo, um modelo fenomenológico de material foi desenvolvido. Utilizando-se resultados experimentais, as propriedades elásticas, valores de resistência e parâmetros de degradação foram determinados. Então, uma vez estabelecidos os parâmetros associados ao material, o modelo foi implementado numa sub-rotina UMAT (“User Material”), a qual foi compilada e vinculada ao pacote de elementos finitos Abaqus[®]. O modelo implementado foi aplicado na análise de laminados $[0^\circ]_{10}$ e $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]_S$ sob flexão 3-pontos. Os resultados das simulações foram então, comparados a resultados experimentais. Os modelos conseguiram identificar a perda abrupta inicial, decorrentes do processo de falha em compósitos, que são observadas nas curvas experimentais força por deslocamento. Principalmente para o empilhamento $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]_S$, o modelo conseguiu representar a rigidez e a magnitude de força final da estrutura.

Houve dificuldades em convergência do processo de solução, o qual mostrou-se dependente de parâmetros do material (associados às leis de degradação) e do tamanho do incremento. Com o objetivo de investigar os parâmetros, desenvolveu-se um programa simples em Matlab[®] visando a automatização de análises.

Como perspectivas de trabalhos futuros, duas linhas complementares podem ser seguidas. A primeira, de abordagem experimental, está diretamente relacionada a realização de experimentos para determinação de parâmetros do material. Ensaio de carregamento, descarregamento e recarga, sob diversos casos de carga e para diversas sequências de empilhamento possibilitam um melhor entendimento sobre o comportamento mecânico do material, em particular, um melhor entendimento dos processos de ruptura, principalmente, dos parâmetros associados às leis de degradação de propriedades. Resultados experimentais são aplicados desde a determinação de parâmetros até a validação / verificação de simulações computacionais. Seguindo-se uma segunda linha, de abordagem computacional, tem-se a continuidade do presente trabalho com a implementação do modelo para elementos sólidos e adequação para problemas explícitos. Essas atividades proporcionarão explorar o modelo sob a ação de outros carregamentos. As ferramentas desenvolvidas durante este trabalho, UMATs e programa em Matlab[®], são contribuições aos próximos trabalhos do Grupo de Estruturas Aeronáuticas (GEA).

Referências

- ABAQUS. *Abaqus Version 6.7 Documentation*. [S.l.], 2007.
- AGARWAL, B. D.; BROUNTMAN, L. J. Analysis and performance of fiber composites. John Wiley, 1990.
- ANDERSON, T. L. *Fracture mechanics - fundamentals and applications*. 2. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, Inc, 1995.
- AZZI, V. D.; TSAI, S. W. Anisotropic strength of composites. *Experimental mechanics*, v. 5, p. 283–288, 1965.
- BAKER, A. *Structural Health Monitoring of a Bonded Composite Patch Repair on a Fatigue-Cracked F-111C Wing*. [S.l.], March 2008.
- CALLISTER, W. D. *Material science and engineering: an introduction*. 7. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, Inc, 2007.
- CHANG, F. K.; CHANG, F. Y. Post-failure analysis of bolted composite joints in tension or shear-out mode failure. *Journal of Composite Materials*, v. 21, p. 809–833, 1987.
- DANIEL, I. M.; ISHAI, O. *Engineering mechanics of composite materials*. 2. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 2006.
- DÁVILA, C.; CAMANHO, P.; MOURA, M. Progressive damage analyses of skin/stringer debonding. In: AMERICAN SOCIETY OF COMPOSITES ANNUAL TECHNICAL CONFERENCE, 2001, Blacksburg. *Proceedings...* [S.l.], 2001.
- HAHN, H.; TSAI, S. W. Nonlinear elastic behavior of unidirectional composite laminae. *Journal of Composite Materials*, v. 7, 1973.
- HASHIN, Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites. *Journal of Applied Mechanics*, v. 47, p. 329–334, 1980.
- HILL, R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings of the Royal Society, Series A*, v. 58-80, 1948.
- HINTON, M. J.; KADDOUR, A. S.; SODEN, P. D. A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates, judged against experimental evidence. *Composite Science and Technology*, v. 62, p. 1725–1797, 2002.
- HYER, M. W. *Stress analysis of fiber-reinforced composite materials*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1998.

- IANUCCI, L. Progressive failure modeling of woven carbon composite under impact. *International Journal of Impact Engineering*, v. 32, p. 1013–1043, 2006.
- JONES, R. M. *Mechanics of composite materials*. 2. ed. [S.l.]: Taylor & Francis, 1999.
- KEUNINGS, R. Macromechanics of composites. In: K. U. LEUVEN, Leuven. *European Post-graduate Education in Polymer and Composites Engineering (EUCOPO)*. [S.l.], 1992.
- KNOPS, M. *Analysis of failure in fiber polymer laminates: the theory of Alfred Puck*. [S.l.]: Springer, 2008.
- KOLLÁR, L. P.; SPRINGER, G. S. *Mechanics of composite structures*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003.
- KOSTOPOULOS, V. e. a. Finite element analysis of impact damage response of composite motorcycle safety helmets. *Composites: part B*, v. 33, p. 99–107, 2002.
- MATZENMILLER, A.; LUBLINER, J.; TAYLOR, R. L. A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites. *Mechanics of materials*, v. 20, p. 125–152, 1995.
- NIU, M. C. Y. *Composite airframe structures: practice design information and data*. [S.l.]: Adaso Adastra Engineering Center, 1992.
- PAEPEGEN, V. W.; BAERE, I.; DEGRIECK, J. Modeling the nonlinear shear stress-strain response of glass fibre-reinforced composites. part i: Experimental results. *Composites Science and Technology*, v. 66, p. 1455–1464, 2006.
- PAEPEGEN, V. W.; BAERE, I.; DEGRIECK, J. Modeling the nonlinear shear stress-strain response of glass fibre-reinforced composites. part ii: Model development and finite element simulations. *Composites Science and Technology*, v. 66, p. 1465–1478, 2006.
- PARÍS, F. *A study of failure criteria of fibrous composite materials*. [S.l.], March 2001.
- PUCK, A.; KOOP, J.; KNOPS, M. Guidelines for the determination of the parameters in Puck's action plane strength criterion. *Composite Science and Technology*, v. 52, p. 371–378, 2002.
- PUCK, A.; SHÜRMANN, H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. *Composite Science and Technology*, v. 58, p. 1045–1067, 1996.
- PUCK, A.; SHÜRMANN, H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. *Composite Science and Technology*, v. 62, p. 1633–1662, 2002.
- REDDY, J. N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. 2. ed. [S.l.]: CRC Press, 2004.
- RENARD, J.; THIONNET, A. Damage in composites: From physical mechanisms to modeling. *Composite Science and Technology*, v. 66, p. 642–646, 2006.
- SODEN, P. D.; KADDOUR, A. S.; HINTON, M. J. A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates. *Composite Science and Technology*, v. 58, p. 1225–1254, 1998.
-

SODEN, P. D.; KADDOUR, A. S.; HINTON, M. J. Recommendations for designers and researchers resulting from world-wide failure exercise. *Composite Science and Technology*, v. 64, p. 589–604, 2004.

STEPHEN, R. H.; WISNOM, M. Numerical investigation of progressive damage and the effect of layup in notched tensile tests. *Journal of Composite Materials*, v. 40, p. 1229–1245, 2006.

TITA, V. *Contribuição ao estudo de danos e falhas progressivas em estruturas de material compósito polimérico*. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

TITA, V.; CARVALHO, J.; SANTOS, N. Modelagem do comportamento mecânico de materiais compósitos utilizando o método dos elementos finitos. In: CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 2002, João Pessoa. *Anais...* [S.l.], 2002.

TITA, V.; CARVALHO, J.; VANDEPITTE, D. Failure analysis of low velocity impact on thin composite laminates: experimental and numerical approaches. *Composite Structures*, v. 83, p. 413–428, 2008.

TSAI, S. W.; WU, E. M. A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, v. 5, p. 329–334, 1971.

TURON, A.; CAMANHO, P.; COSTA, J.; DÁVILA, C. A damage model for the simulation of delamination in advanced composites under variable-mode loading. *Mechanics of Materials*, v. 38, p. 1072–1089, 2006.

WILLIAMS, K.; VAZIRI, R. Application of a damage mechanics model for predicting the impact response of composite materials. *Computer & Structures*, v. 79, p. 997–1011, 2001.

ANEXO A – SUB-ROTINAS UMATS

A.1 Umat 1

```

subroutine umat(stress,statev,ddsdde,sse,spd,scd,
1  rpl,ddsddt,drplde,drpldt,
2  stran,dstran,time,dtime,temp,dtemp,predef,dpred,cmname,
3  ndi,nshr,ntens,nstatv,props,nprops,coords,drot,pnewdt,
4  celent,dfgrdo,dfgrd1,noel,npt,layer,kspt,kstep,kinc)

include 'ABA_PARAM.INC'

character*80 cmname
dimension stress(ntens),statev(nstatv),
1  ddsdde(ntens,ntens),ddsddt(ntens),drplde(ntens),
2  stran(ntens),dstran(ntens),time(2),predef(1),dpred(1),
3  props(nprops),coords(3),drot(3,3),dfgrd0(3,3),dfgrd1(3,3)

double precision E11, E22, G12, v12, v21

c    Propriedades do material
E11 = props(1)
E22 = props(2)
v12 = props(3)
G12 = props(4)

c    Montagem do tensor constitutivo
v21 = v12 * E22 / E11
ddsdde(1,1) = E11 / (1.D0 - (v12 * v21))
ddsdde(1,2) = (v12 * E22) / (1.D0 - (v12 * v21))
ddsdde(2,2) = E22 / (1.D0 - (v12 * v21))
ddsdde(2,1) = (v12 * E22) / (1.D0 - (v12 * v21))
ddsdde(3,3) = G12

c    Cálculo das tensões
stress(1) = ddsdde(1,1) * (stran(1) + dstran(1)) +
1          ddsdde(1,2) * (stran(2) + dstran(2)) +

```

```

2          ddsdde(1,3) * (stran(3) + dstran(3))
stress(2) = ddsdde(2,1) * (stran(1) + dstran(1)) +
1          ddsdde(2,2) * (stran(2) + dstran(2)) +
2          ddsdde(2,3) * (stran(3) + dstran(3))
stress(3) = ddsdde(3,1) * (stran(1) + dstran(1)) +
1          ddsdde(3,2) * (stran(2) + dstran(2)) +
2          ddsdde(3,3) * (stran(3) + dstran(3))

return
end

```

A.2 Umat 2

```

subroutine umat(stress,statev,ddsdde,sse,spd,scd,
1  rpl,ddsddt,drplde,drpldt,
2  stran,dstran,time,dtime,temp,dtemp,predef,dpred,cmname,
3  ndi,nshr,ntens,nstatv,props,nprops,coords,drot,pnewdt,
4  celent,dfgrdo,dfgrd1,noel,npt,layer,kspt,kstep,kinc)

include 'ABA_PARAM.INC'

character*80 cmname
dimension stress(ntens),statev(nstatv),
1  ddsdde(ntens,ntens),ddsddt(ntens),drplde(ntens),
2  stran(ntens),dstran(ntens),time(2),predef(1),dpred(1),
3  props(nprops),coords(3),drot(3,3),dfgrd0(3,3),dfgrd1(3,3)

double precision E11, E22, G12, v12, v21

c  Propriedades do material
E11 = props(1)
E22 = props(2)
v12 = props(3)

c  Cálculo de G12 secante
G12 = 5.4E3 - 1.796E5 * abs(stran(3) + dstran(3))
1  + 1.935E6*(stran(3)+dstran(3))*(stran(3)+dstran(3))

c  Montagem do tensor constitutivo
v21 = v12 * E22 / E11
ddsdde(1,1) = E11 / (1.D0 - (v12 * v21))
ddsdde(1,2) = (v12 * E22) / (1.D0 - (v12 * v21))
ddsdde(2,2) = E22 / (1.D0 - (v12 * v21))
ddsdde(2,1) = (v12 * E22) / (1.D0 - (v12 * v21))
ddsdde(3,3) = G12

```

```

c      Cálculo das tensões
      stress(1) = ddsdde(1,1) * (stran(1) + dstran(1)) +
1          ddsdde(1,2) * (stran(2) + dstran(2)) +
2          ddsdde(1,3) * (stran(3) + dstran(3))
      stress(2) = ddsdde(2,1) * (stran(1) + dstran(1)) +
1          ddsdde(2,2) * (stran(2) + dstran(2)) +
2          ddsdde(2,3) * (stran(3) + dstran(3))
      stress(3) = ddsdde(3,1) * (stran(1) + dstran(1)) +
1          ddsdde(3,2) * (stran(2) + dstran(2)) +
2          ddsdde(3,3) * (stran(3) + dstran(3))

      return
      end

```

A.3 Umat 3

```

      subroutine umat(stress,statev,ddsdde,sse,spd,scd,
1  rpl,ddsddt,drplde,drpldt,
2  stran,dstran,time,dtime,temp,dtemp,predef,dpred,cmname,
3  ndi,nshr,ntens,nstatv,props,nprops,coords,drot,pnewdt,
4  celent,dfgrdo,dfgrd1,noel,npt,layer,kspt,kstep,kinc)

      include 'ABA_PARAM.INC'

      character*80 cmname
      dimension stress(ntens),statev(nstatv),
1  ddsdde(ntens,ntens),ddsddt(ntens),drplde(ntens),
2  stran(ntens),dstran(ntens),time(2),predef(1),dpred(1),
3  props(nprops),coords(3),drot(3,3),dfgrd0(3,3),dfgrd1(3,3)

c      Declaração de parâmetros e variáveis
      parameter(XT = 1400, XC = 1050, YT = 47, YC = 130, SC12 = 53)
      parameter(p_t_nt=0.35,p_c_nt=0.3,
1  p_t_nn=0.3,p_c_nn=0.3)
      parameter(ONE = 1.D0)

      parameter(etar_E1 = 0.3, etar_Ea = 0.03,etar_Ebc = 0.67,
1  csi_E = 1.3, c_E = 5.3)
      parameter(etar_G = 0.67, csi_G = 1.17, c_G = 0.95)
      parameter(FAILURE = 1.0)

      double precision E11, E22, G12, v12, v21,
1  R_t_n, R_c_n, R_nt, R_nn

```



```

double precision ff, iff_a, iff_b, iff_c, eta_E, omega, eta_G,
1 tau_12_c

c    Propriedades do material
E11 = props(1)
E22 = props(2)
v12 = props(3)

c    Cálculo do módulo de cisalhamento secante
if (statev(1) .eq. FAILURE) then
    G12 = statev(5)
else
    G12 = 5.4E3 - 1.796E5 * abs(stran(3) + dstran(3))
1    +1.935E6*(stran(3)+dstran(3))*(stran(3)+dstran(3))
endif

c    Montagem do tensor constitutivo
v21 = v12 * E22 / E11
ddsdde(1,1) = E11 / (1.D0 - (v12 * v21))
ddsdde(1,2) = (v12 * E22) / (1.D0 - (v12 * v21))
ddsdde(2,2) = E22 / (1.D0 - (v12 * v21))
ddsdde(2,1) = (v12 * E22) / (1.D0 - (v12 * v21))
ddsdde(3,3) = G12

c    Cálculo do estado de tensões
stress(1) = ddsdde(1,1) * (stran(1) + dstran(1)) +
1          ddsdde(1,2) * (stran(2) + dstran(2)) +
2          ddsdde(1,3) * (stran(3) + dstran(3))
stress(2) = ddsdde(2,1) * (stran(1) + dstran(1)) +
1          ddsdde(2,2) * (stran(2) + dstran(2)) +
2          ddsdde(2,3) * (stran(3) + dstran(3))
stress(3) = ddsdde(3,1) * (stran(1) + dstran(1)) +
1          ddsdde(3,2) * (stran(2) + dstran(2)) +
2          ddsdde(3,3) * (stran(3) + dstran(3))

c    Critério de falha

R_t_n = YT;
R_c_n = YC;
R_nt = SC12;

R_nn = R_c_n / (2 * (1 + p_c_nn));
tau_12c = R_nt * sqrt(1 + 2 * p_c_nn);

c    Falha da fibra
c    Tração
if (stress(1) .gt. 0) then
    ff=(stress(1)/XT)*(stress(1)/XT)+

```

```

1      (stress(3)/SC12)*(stress(3)/SC12)
c      Compressão
      else if (stress(1) .lt. 0) then
          ff = abs(stress(1)/XC)
      endif

c      Modo A
      if (stress(2) .ge. 0.0) then
          iff_a=sqrt(((1.0/R_t_n-p_t_nt/R_nt)*stress(2))**2.0 +
1      (stress(3)/R_nt)**2.0) + (p_t_nt/R_nt) * stress(2)
c      Modo B
      else
          if (stress(3) .ne. 0.0) then
              if (abs(stress(2)/stress(3)) .le.
1      abs(R_nn/tau_12c)) then
                  iff_b=sqrt((stress(3)/R_nt)**2.0+
1      (p_c_nt*stress(2)/R_nt)**2.0)+
2      (p_c_nt/R_nt) * stress(2)
c      Modo C
              elseif (abs(stress(2)/stress(3)) .gt.
1      abs(R_nn/tau_12c)) then
                  iff_c=((stress(3)/(2*(1+p_c_nn)*R_nt))**2.0 +
1      (stress(2)/R_c_n)**2.0) * R_c_n/(-stress(2))
              endif
              else
                  iff_c=((stress(3)/(2*(1+p_c_nn)*R_nt))**2.0 +
1      (stress(2)/R_c_n)**2.0) * R_c_n/(-stress(2))
              endif
          endif

c      Leis de degradação
      if (ff .gt. ONE) then
          if ((stran(1) + dstran(1)) . gt. 0) then
              omega = 1.0 - exp((-1 / (props(8) * props(7)))
1      * (abs(stran(1) + dstran(1)) / 0.018)**props(8))
          else
              omega = 1.0 - exp((-1 / (props(6) * props(5)))
1      * (abs(stran(1) + dstran(1)) / 0.0105)**props(6))
          endif

      statev(1) = FAILURE
      statev(5) = G12

      E11 = (1 - omega) * props(1);
      E22 = 10
      v12 = 0.0
      G12 = 10

```

```

    else if (iff_a .gt. ONE) then
        eta_E = (1 - etar_Ea) / (1 + c_E *
1      (iff_a - 1)**csi_E) + etar_Ea
        eta_G = (1 - etar_Ga) / (1 + c_G *
1      (iff_a - 1)**csi_G) + etar_Ga

        statev(1) = FAILURE
        statev(5) = G12

        E22 = eta_E * props(2)
        G12 = eta_G * G12
    else if (iff_b .gt. ONE) then
        eta_E = (1 - etar_Ebc) / (1 + c_E *
1      (iff_b - 1)**csi_E)+etar_Ebc
        eta_G = (1 - etar_Gbc) / (1 + c_G *
1      (iff_b - 1)**csi_G)+etar_Gbc

        statev(1) = FAILURE
        statev(5) = G12

        E22 = eta_E * props(2)
        G12 = eta_G * G12
    else if (iff_c .gt. ONE) then
        eta_E = (1 - etar_Ebc) / (1 + c_E *
1      (iff_c - 1)**csi_E)+etar_Ebc
        eta_G = (1 - etar_Gbc) / (1 + c_G *
1      (iff_c - 1)**csi_G)+etar_Gbc

        statev(1) = FAILURE
        statev(5) = G12

        E22 = eta_E * props(2)
        G12 = eta_G * G12
    endif

    if (time(1) .gt. 0.0) then
        if (E11 .gt. statev(2)) then
            E11 = statev(2)
        endif

        if (E22 .gt. statev(3)) then
            E22 = statev(3)
        endif

        if (v12 .gt. statev(4)) then
            v12 = statev(4)
        endif

```

```

        if (G12 .gt. statev(6)) then
            G12 = statev(6)
        endif
    endif

c    Montagem do tensor constitutivo - atualizado
    v21 = v12 * E22 / E11
    ddsdde(1,1) = E11 / (1.D0 - (v12 * v21))
    ddsdde(1,2) = (v12 * E22) / (1.D0 - (v12 * v21))
    ddsdde(2,2) = E22 / (1.D0 - (v12 * v21))
    ddsdde(2,1) = (v12 * E22) / (1.D0 - (v12 * v21))
    ddsdde(3,3) = G12

c    Cálculo do estado de tensões - atualizado
    stress(1) = ddsdde(1,1) * (stran(1) + dstran(1)) +
1             ddsdde(1,2) * (stran(2) + dstran(2)) +
2             ddsdde(1,3) * (stran(3) + dstran(3))
    stress(2) = ddsdde(2,1) * (stran(1) + dstran(1)) +
1             ddsdde(2,2) * (stran(2) + dstran(2)) +
2             ddsdde(2,3) * (stran(3) + dstran(3))
    stress(3) = ddsdde(3,1) * (stran(1) + dstran(1)) +
1             ddsdde(3,2) * (stran(2) + dstran(2)) +
2             ddsdde(3,3) * (stran(3) + dstran(3))

c    Atualização das variáveis de estado
    statev(2) = E11
    statev(3) = E22
    statev(4) = v12

    statev(6) = G12

    statev(7) = ff
    statev(8) = iff_a
    statev(9) = iff_b
    statev(10) = iff_c

    return
end

```

ANEXO B - PROGRAMA EM MATLAB®

```
% Dados do problema
% Compressão
e_c_vet = [10];
m_c_vet = [4];

% Tração
e_t_vet = [10];
m_t_vet = [4];

for i = 1:size(e_c_vet,2)
    for j = 1:size(m_c_vet,2)
        for k = 1:size(e_t_vet,2)
            for l = 1:size(m_t_vet,2)
                e_c = e_c_vet(i)
                m_c = m_c_vet(j)
                e_t = e_t_vet(k)
                m_t = m_t_vet(l)

                % Montagem do arquivo de entrada do Abaqus (*.inp)
                inp_dados = fopen('inp_dados.txt','w');
                fprintf(inp_dados,'100000.,10000., 0.34, ...
                    5400., %6.2f, %6.2f, %6.2f, %6.2f\n',e_c,m_c,...
                    e_t,m_t);
                file_name = ['bending_0_90_' int2str(i) ...
                    '_' int2str(j) '_' int2str(k) '_' int2str(l) '.inp'];

                dos(['type inp_Part1.txt >' file_name]);
                dos(['type inp_dados.txt >>' file_name]);
                dos(['type inp_Part2.txt >>' file_name]);

                fclose(inp_dados);

                % Início da análise utilizando Abaqus
                dos(['abq ' file_name ' umat.for']);
                pause(20);
```

```
% Monitoramento de andamento da análise
while 1
    [aux_1, aux_2] = dos('tasklist /fi "IMAGENAME eq ...
        standard.exe" /fo TABLE /NH');
    k1 = strfind(aux_2, 'standard.exe');
    if (size(k1,1) == 0)
        disp('Fim de análise!');
        break;
    end
    pause(30);
end

% ``Setup`` do pós-processamento
files = [[file_name(1:(size(file_name,2)-4)) '.odb'];...
    [file_name(1:(size(file_name,2)-4)) '.txt']];

temp_file = fopen('rst.tmp','w');
fprintf(temp_file, files(1,:));
fclose(temp_file);

temp_file = fopen('rst2.tmp','w');
fprintf(temp_file, files(2,:));
fclose(temp_file);

% Pós-processamento
if exist([file_name(1:(size(file_name,2)-4)) '.odb'])

    dos('abaqus viewer noGUI=results_post.py');
    pause(20);

    while 1
        [aux_1, aux_2] = dos('tasklist /fi "IMAGENAME eq ...
            ABQvwrK.exe" /fo TABLE /NH')
        k1 = strfind(aux_2, 'ABQvwrK.exe');
        if (size(k1,1) == 0)
            disp('Fim do pós!')
            break;
        end
        pause(30);
    end

    % Análise de resultados - Curva: F vs. d
    results_file = fopen(files(2,:), 'r');
    dados = textscan(results_file, '%f %f %f', ...
        'headerlines', 3);

    figure();
    plot(-dados{3}, -2*dados{2}, '-ro', 'LineWidth', 1.2);
```

```
xlabel('Deslocamento(mm)');
ylabel('Força (N)');
axis([0 10 0 inf]);
fclose(results_file);

hold on;

results_file = fopen('Resultado_Experimental.txt', 'r');
dados = textscan(results_file, '%f %f');
plot(dados{1},1000*dados{2},'k','LineWidth',1.2);
fclose(results_file);

set(gcf,'Color',[1 1 1]);
set(gcf,'Position',[600 400 300 250]);
set(gcf,'PaperPositionMode','auto');
set(gca,'Box','off');
set(gca,'LineWidth',1.2);
set(get(gca,'xlabel'),...
    'FontName','Times New Roman');
set(get(gca,'xlabel'),'FontSize',12);
set(get(gca,'ylabel'),'FontName',...
    'Times New Roman');
set(get(gca,'ylabel'),'FontSize',12);

% Exportação da curva força vc. deslocamento
% em imagem do formato JPEG
print('-djpeg90',[file_name(1:(size(...
    file_name,2)-4)) '.jpg']);
close all
else
    disp('Erro!!!');
end

pause(5);

% Exclusão de arquivos temporários
dos('del *.tmp');
dos(['del ' file_name(1:(size(file_name,2)-4))...
    '.log']);
dos(['del ' file_name(1:(size(file_name,2)-4))...
    '.com']);
dos(['del ' file_name(1:(size(file_name,2)-4))...
    '.dat']);
dos(['del ' file_name(1:(size(file_name,2)-4))...
    '.prt']);
dos('del abaqus.rp*');

clear k1 k2 aux_1 aux_2
```

```
        end
    end
end
end
```