Rui Marcos Grombone de Vasconcellos

**Caracterização e detecção da não linearidade
associada à folga em sistemas aeroelásticos**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de
São Carlos, da Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos para a obtenção do
título de Doutor em Engenharia Mecânica.
Área de concentração: Aeronaves

VERSÃO CORRIGIDA. A VERSÃO ORIGI-
NAL ESTÁ DISPONÍVEL JUNTO AO DEPAR-
TAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA
EESC-USP.

Orientador: Prof. Assoc. Flávio Donizeti Marques

São Carlos

2012

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

V331c	<p>Vasconcellos, Rui Marcos Grombone</p> <p>Caracterização e detecção da não linearidade associada à folga em sistemas aeroelásticos / Rui Marcos Grombone Vasconcellos ; orientador Flávio Donizeti Marques. -- São Carlos, 2012.</p> <p>Tese (Doutorado-Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Área de Concentração em Aeronaves) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2012.</p> <p>1. Aeroelasticidade. 2. Caracterização não linear. 3. Não linearidade - folga. 4. Análise de séries temporais. 5. Identificação de sistemas não lineares I. Título.</p>
-------	--

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Licenciado **RUI MARCOS GROMBONE DE VASCONCELLOS**.

Título da tese: "Caracterização e detecção da não linearidade associada à folga em sistemas aeroelásticos".

Data da defesa: 08/08/2012

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Associado **Flávio Donizeti Marques (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Leopoldo Pisanelli Rodrigues de Oliveira**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Titular **Paulo Sergio Varoto**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Associado **Marcelo Amorim Savi**
(Universidade Federal do Rio de Janeiro/UFRJ)

Aprovado

Dr. **Elbert Einstein Nehrer Macau**
(Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais/INPE)

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica:
Prof. Associado **Marcelo Areias Trindade**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família, sempre muito presente, especialmente aos meus pais, Luiz e Amélia, pela educação que me trouxe até aqui e por estarem sempre participando de cada etapa de minha vida.

À minha amada esposa Flávia, ao meu lado em todos os momentos e seus pais, Flávio e Eliana, sempre motivadores e dispostos a ajudar.

Ao Professor Dr. Flávio Donizeti Marques pelo papel fundamental no planejamento e desenvolvimento deste trabalho. Sua orientação e paciência foram essenciais.

A todos os professores e funcionários da Escola de Engenharia de São Carlos que de alguma forma contribuíram para a realização desse trabalho e aos colegas da pós: Caixeta (Paulo R.), Marcelo Ribeiro, Wander, Tarcísio, Ricardo Medeiros, Ricardo Angélico, Douglas, Elmer, Vagner, Alexandre, Daniel Almeida, entre outros, pelos momentos agradáveis e pelas valiosas discussões sobre as pesquisas desenvolvidas.

Aos Professores Dr. Muhammad R. Hajj, Dr. Ali H. Nayfeh e principalmente ao colega Abdessattar Abdelkefi, pelas inestimáveis contribuições a este trabalho. Também aos demais colegas e funcionários do *Department of Engineering Science and Mechanics, Virginia Tech*, onde tive a satisfação de trabalhar por um ano, e aos amigos Brasileiros, em especial aos Professores Jozué Vieira Filho e Paulo Sergio Varoto, que me receberam em Blacksburg, pelo auxílio e companhia.

Finalmente, agradeço à FAPESP (Fundação de Amparo à pesquisa do Estado de São Paulo), pelo suporte financeiro à essa pesquisa através da bolsa concedida. À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela bolsa de estudos durante estágio no exterior e ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) por financiar parte da pesquisa.

Sumário

Resumo

Abstract

Lista de símbolos p. 17

Acrônimos p. 21

1 Introdução p. 23

1.1 Fontes de não linearidades em sistemas aeroelásticos p. 25

1.2 Análise de séries temporais aeroelásticas p. 31

1.3 Objetivos p. 35

1.4 Organização da Tese p. 36

2 Modelo matemático p. 39

2.1 Introdução p. 39

2.2 Modelo aeroelástico p. 39

2.3 Modelo para aerodinâmica não estacionária p. 42

2.4 Sobre a representação das não linearidades estruturais p. 47

3 Identificação e classificação de não linearidades aeroelásticas p. 51

3.1 Introdução p. 51

3.2	Análise de séries temporais	p.51
3.2.1	Testes iniciais para estacionaridade e determinismo não linear . .	p.51
3.2.2	Reconstrução do espaço de estados	p.53
3.2.3	Seções de Poincaré	p.57
3.2.4	Expoentes de Lyapunov	p.58
3.2.5	Análise de Recorrência	p.60
3.3	Técnicas de Identificação	p.62
3.3.1	Espectros de ordem mais alta	p.64
3.3.2	Classificação da bifurcação	p.66
3.3.3	BID - Bifurcação Induzida por Descontinuidade	p.67
4	Descrição dos dispositivos experimentais	p.71
4.1	Introdução	p.71
4.2	Dispositivo utilizado para os testes iniciais	p.71
4.3	Dispositivo base para os testes com não linearidades concentradas	p.72
4.4	Dispositivos com dois graus de liberdade	p.73
4.4.1	Experimento com 2GDL - Folga	p.74
4.4.2	Experimento com 2GDL - <i>Hardening</i>	p.76
4.5	Dispositivo com três graus de liberdade - Folga	p.78
5	Resultados	p.81
5.1	Introdução	p.81
5.2	Verificação do modelo matemático linear	p.82
5.3	Testes iniciais das técnicas de análise	p.84

5.3.1	Aplicação das ferramentas de análise de séries temporais ao modelo	p. 84
5.3.2	Aplicação das ferramentas de análise de séries temporais em dados aeroelásticos experimentais	p. 93
5.4	Efeito de folga na torção para modelo com dois graus de liberdade	p. 99
5.5	Não linearidade cúbica na torção para modelo com dois graus de liberdade	p. 106
5.6	Estudo da validade de diferentes representações para efeito de folga . . .	p. 109
5.6.1	Representações da folga na superfície de comando	p. 110
5.6.2	Análise não linear	p. 111
5.7	Efeito de folga na superfície de comando para modelo com três graus de liberdade	p. 116
5.7.1	Análise linear	p. 116
5.7.2	Análise não linear	p. 119
6	Considerações finais	p. 133
6.1	Conclusões	p. 133
6.2	Sugestões para trabalhos futuros	p. 135
Apêndice A – Funções T de Theodorsen		p. 137
Referências		p. 137
Referências		p. 139

Resumo

VASCONCELLOS, R. M. G. **Caracterização e detecção da não linearidade associada à folga em sistemas aeroelásticos**. 2012. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

A caracterização de não linearidades em aeronaves é fundamental para a solução de problemas aeroelásticos, onde uma relação ótima entre desempenho e segurança é desejável. Sistemas aeroelásticos são inerentemente não lineares. Não linearidades podem ser admitidas no projeto, ou podem surgir a qualquer momento durante a vida útil da aeronave, afetando significativamente a resposta prevista por meios clássicos de análise linear, de forma que instabilidades catastróficas podem ocorrer antes dos limites de operação. Portanto, torna-se importante caracterizar, identificar e incluir tais efeitos não lineares no projeto e desenvolvimento de aeronaves. Neste trabalho, através da utilização de técnicas de análise de séries temporais não lineares e identificação, a não linearidade associada à folga, muito comum em superfícies de comando, é caracterizada de forma a permitir sua detecção em sinais aeroelásticos e inclusão de seus efeitos em modelos. Um modelo matemático de seção típica com folga na superfície de comando é implementado e utilizado para gerar uma base de dados confiável para testar a capacidade dos métodos de análise de séries temporais não lineares. As técnicas são aplicadas também em dados experimentais de uma asa a altos ângulos de ataque, sem um modelo matemático definido, para testar a capacidade de caracterização de comportamentos não lineares. Através de técnicas como reconstrução de espaço de estados, seções de Poincaré e determinação de invariantes, como os maiores expoentes de Lyapunov, os comportamentos e transições são classificados. Finalmente, as técnicas são aplicadas em dados experimentais de seções típicas com dois e três graus de liberdade, com folga nos movimentos de torção e na superfície de comando, respectivamente. Os resultados mostram que a folga pode gerar comportamentos similares aos apresentados por sistemas com não linearidade cúbica *hardening* em condições periódicas. No entanto, o comportamento subcrítico provocado pela folga, bem como a ocorrência de comportamento não linear mais complexo são características que diferenciam essas não linearidades. Em experimento com três graus de liberdade, a folga é localizada e caracterizada na superfície de comando através das técnicas propostas. Um modelo baseado em uma função aproximante para a folga é utilizado para identificar a resposta experimental e incluir a não linearidade no modelo matemático. Os resultados mostram que o modelo identificado é capaz de reproduzir a maior parte da dinâmica apresentada no experimento.

Palavras-chave: Aeroelasticidade. Caracterização Não Linear. Não linearidade Folga. Análise de Séries Temporais. Identificação de sistemas não lineares.

Abstract

VASCONCELLOS, R. M. G. **Characterization and detection of freeplay nonlinearity in aeroelastic systems**. 2012. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

Characterization of nonlinearities in aircraft is critical to the solution of aeroelastic problems where an optimal relation between performance and safety is desirable. Aeroelastic systems are inherently nonlinear. Nonlinearities can be admitted in the project, or may arise at any time during the life of the aircraft, significantly affecting the predicted response by conventional methods of linear analysis and reducing the limits for catastrophic instabilities. Therefore, it is important to characterize, identify and include such nonlinear effects to the design and development of aircraft. In this work, through nonlinear time series analysis and identification techniques, the freeplay nonlinearity, very common in control surfaces, is characterized to permit its detection in aeroelastic signals, and the inclusion of its effects in numerical models. A mathematical model of typical section with control surface freeplay nonlinearity is implemented and used to generate a reliable database to test the ability of nonlinear time series analysis methods. The techniques are also applied to experimental data of a wing at high angles of attack, without a prescribed mathematical model, to test the ability of characterizing non-linear behavior. Through techniques such as state space reconstruction, Poincaré sections and determination of system's invariants, as the largest Lyapunov exponents, non-linear behavior and transitions are classified. Finally, the techniques are applied to experimental data of typical sections with two and three degrees of freedom with freeplay in the torsional spring and in the control surface hinge, respectively. The results show that the freeplay may generate similar behavior to those presented by non-linear systems with cubic hardening nonlinearity under periodic conditions. However, the subcritical behavior caused by freeplay, and the occurrence of complex nonlinear behavior are features that distinguish these nonlinearities. In an experiment with three degrees of freedom, the freeplay is located in the control surface hinge and characterized by the presented techniques. A model based on an approximating function for the freeplay is used to identify the experimental response and include the nonlinearity in the mathematical model. It is shown that the identified model can reproduce the major part of the non-linear dynamics shown in the experiment.

Keywords: Aeroelasticity. Nonlinear characterization. Freeplay. Time series analysis. Identification.

Lista de símbolos

w	deslocamento em flexão
α	deslocamento em ângulo de ataque
β	deslocamento em ângulo da superfície de comando
k_w	rigidez de flexão
k_α	rigidez de torção
k_β	rigidez da superfície de comando
d_w, d_α, d_β	termos de amortecimento
L, M_α, M_β	sustentação e momentos aerodinâmicos
S_α, S_β	momento de massa estático
$F(\beta)$	função não linear
T	Energia cinética
V	Energia Potencial
q_i	coordenadas generalizadas
$C(\bar{k})$	função de Theodorsen
T_i	funções T definidas por Theodorsen
b	semi-corda
a	posição do eixo elástico relativo à semi-corda
c	posição da dobradiça da superfície de controle relativo à semi-corda
ρ	densidade do ar
m_W	massa da asa
m_T	massa da asa e suportes
ω_w	frequência natural desacoplada de flexão
ω_α	frequência natural desacoplada de torção

ω_β	frequência natural desacoplada da superfície de controle
x_α	distância adimensional entre o CG e o eixo elástico
x_β	distância adimensional entre o CG e a dobradiça da superfície de controle
I_α, I_β	Momento de Inércia
r_α	raio de giração da torção
r_β	raio de giração da superfície de controle
μ	razão de massa
ζ_α	fator de amortecimento da torção (decremento logarítmico)
ζ_β	fator de amortecimento da superfície de controle (decremento logarítmico)
ζ_w	fator de amortecimento da flexão (decremento logarítmico)
U	velocidade do escoamento
U_f	velocidade de <i>flutter</i>
δ	tamanho da folga
μ_e	razão entre a massa total m_T e a massa da asa m_W
$\bar{k}$	frequência reduzida
k	passos no tempo
$p(k)$	erro de predição
ω, Ω	frequência
C_n	termos da aproximação de Sears
$\bar{\tau}$	tempo adimensional
$\phi(\tau)$	função aproximante de Sears
x_{a1}, x_{a2}	variáveis aumentadas
β_l, β_u	limites inferior e superior da folga
ε	termo que determina a acurácia da aproximação por tangente hiperbólica
P	pré carga
$\hat{P}(k)$	Espectro
$\hat{B}(k)$	Bispectro
$\hat{T}(k)$	Trispectro
t_s	período de amostragem

λ	maior expoente de Lyapunov
ϕ	fase
τ	defasagem no tempo
$\mathbf{M}_s$	matriz de parâmetros inerciais
$\mathbf{M}_{\text{NC}}$	matriz de contribuição não circulatória à massa
$\mathbf{B}_s$	matriz de parâmetros de amortecimento
$\mathbf{B}_{\text{NC}}$	matriz de contribuição não circulatória ao amortecimento
$\mathbf{R}$	matriz associada a termos circulatórios
$\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$	vetores associados a termos circulatórios
$\mathbf{K}_s$	matriz de parâmetros de rigidez
$\mathbf{K}_{\text{NC}}$	matriz de contribuição não circulatória à rigidez
$\mathbf{X}$	vetor de estados
$\mathbf{A}$	matriz de estados
$\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{D}$	matriz de termos de acoplamento
$\mathbf{F}$	termos aerodinâmicos dos estados aumentados
$C(r)$	soma de correlação
$s(t)$	série temporal
$s[n]$	sequência discreta
d	dimensão de imersão
N	número de amostras
$\hat{\mathbf{X}}$	matriz de trajetória
$\hat{\mathbf{x}}_i$	vetor de estado reconstruído
$\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{C}}$	matriz de vetores singulares
$\hat{\mathbf{D}}$	matriz de valores singulares
$\mathbf{c}_n$	vetores singulares
$\hat{\mathbf{s}}_n$	vetores singulares
σ_n	valores singulares
$\hat{\mathbf{X}}_d$	matriz de trajetória reconstruída
$\{\mathbf{y}^n\}, \{\mathbf{z}^n\}$	trajetórias vizinhas no espaço de estados

$\mathbf{u}^{\mathbf{k}}$	vetor distância
$X_i(k)$	transformada de Fourier discreta
k, l, m	frequências discretas
N_e, a, γ, β_r	parâmetros associados à forma normal da bifurcação

Acrônimos

CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i> (Dinâmica dos fluidos computacional)
LCO	<i>Limit Cycle Oscillation</i> (Oscilação em ciclo limite)
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i> (Decomposição em valores singulares)
MOD	<i>Method of Delays</i> (Método da defasagem)
SDT	<i>Surrogate Data Test</i> (Teste dos dados substitutos)
HOS	<i>Higher Order Spectra</i> (Espectros de ordem elevada)
RQA	<i>Recurrence Quantification Analysis</i> (Análise de quantificação de recorrências)
BID	<i>Bifurcation Induced by Discontinuity</i> (Bifurcação induzida por descontinuidade)
GDL	Grau de Liberdade
RMS	<i>Root Mean Square</i> (Raiz da média quadrática)
CNC	<i>Computer Numerical Control</i> (Controle numérico por computador)
DFT	<i>Discrete Fourier Transform</i> (Transformada de Fourier discreta)
c.g.	Centro de gravidade
e.e.	Eixo elástico

1 *Introdução*

A aeroelasticidade estuda a interação entre a deformação de uma estrutura elástica em um escoamento aerodinâmico e o esforço inercial resultante. Fenômenos aeroelásticos podem causar perigosas deformações, oscilações e instabilidades, sendo por isso, de grande importância prática em aeronáutica. Quando se trata do projeto de aeronaves modernas, caracterizado pela demanda por estruturas leves, a solução de problemas aeroelásticos é um requisito básico para uma relação ótima entre desempenho e segurança (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996).

Sistemas aeroelásticos são inerentemente não lineares, portanto sujeitos à comportamentos distintos dos previstos através de métodos convencionais de aproximação linear das equações de movimento.

A presença de efeitos não lineares resulta em modificações no comportamento aeroelástico, tornando mais complexa a previsão de fenômenos de instabilidade. Por exemplo, sabe-se que na presença de não linearidades, o fenômeno de *flutter* passa a apresentar características muito diferentes àquelas previstas por modelos lineares. Respostas não lineares podem incluir movimentos autosustentados regulares, irregulares além de transições abruptas que podem levar a instabilidades com consequências catastróficas sem aviso. Desta forma, é importante que se entenda a influência das não linearidades em sistemas aeroelásticos (MARQUES et al., 2006; DE MARQUI JR.; MARQUES, 2007).

O tratamento dos problemas aeroelásticos pode ser realizado através de modelos matemáticos do processo físico ou por métodos experimentais para a investigação direta dos fenômenos. Metodologias para desenvolvimento de modelos matemáticos para análise de

problemas aeroelásticos apresentam deficiências principalmente pelo fato de envolver dois meios de comportamento dinâmico diferentes, ou seja: o meio elástico que corresponde à estrutura e o meio fluido que envolve tal estrutura. Modelos matemáticos para análise prática em aeroelasticidade acabam sendo viabilizados tomando-se modelos independentes para tratar o problema da estrutura e da aerodinâmica não estacionária e uma lei de acoplamento para relacionar os estados e esforços nos respectivos modelos (MARQUES, 1997).

A maior dificuldade no desenvolvimento de modelos matemáticos em aeroelasticidade ainda reside na determinação do comportamento aerodinâmico. Essa dificuldade é compreensível quando se examinam as equações básicas que envolvem esse problema (ANDERSON, 1995). Os aspectos físicos de qualquer escoamento são definidos por três princípios fundamentais: conservação de massa, da quantidade de movimento e da energia. Esses princípios fundamentais podem ser expressos em termos de equações matemáticas, as quais podem formar um conjunto de equações diferenciais parciais ou um conjunto de equações integrais. Contudo, a investigação analítica dessas equações de mecânica dos fluidos ainda não produziu resultados que pudessem influenciar significativamente sua aplicação prática. Para aplicações práticas, as soluções das equações de mecânica dos fluidos podem ser conseguidas através de técnicas numéricas. Dinâmica dos fluidos computacional (do inglês *Computational Fluid Dynamics* - CFD) é a ciência da determinação de soluções numéricas para as equações de mecânica dos fluidos (ANDERSON, 1995). O aumento de interesse nesses métodos está diretamente influenciado pelo desempenho cada vez maior dos computadores modernos. Consequentemente, a aplicação atual dos métodos da dinâmica dos fluidos computacional em engenharia têm crescido muito. No entanto, mesmo com os progressos na área da computação, existe muito espaço para pesquisas na determinação de métodos matemáticos e estatísticos alternativos e de ordem reduzida, baseados em dados experimentais e em outras formas de modelagem do comportamento da dinâmica dos fluidos, como é o caso do uso de funcionais (MARQUES, 1997). Dentre os problemas relacionados às metodologias alternativas existentes estão: perdas na análise do fenômeno físico e pouca flexibilidade para avaliar diferentes regimes de escoamento

através do mesmo modelo. Tais problemas podem ser decisivos em estudos da interação entre fluido e corpos elásticos.

Alternativamente, ensaios experimentais possibilitam observar diretamente o comportamento de um sistema sem deixar, em princípio, de contabilizar todos os efeitos importantes. Experimentos em aeroelasticidade necessitam de muitas medidas simultâneas de sinais, tais como: deslocamento de superfícies móveis, aceleração em pontos da estrutura, variações de pressões não estacionárias nas superfícies aerodinâmicas entre outras. Em muitos casos tais medidas podem ser complicadas e encarecem demasiadamente os experimentos. No entanto, para a análise de sistemas dinâmicos não lineares, os ensaios experimentais ainda representam a melhor forma de resgatar características importantes do sistema, através de respostas no tempo de variáveis significativas. Para o estudo de fenômenos aeroelásticos não lineares o uso de técnicas de análise de séries temporais não lineares parece ser conveniente, uma vez que um modelo unificado de interação fluido-estrutura pode ser obtido diretamente de uma base de dados experimental.

Sendo um sistema aeroelástico dependente da estrutura e da aerodinâmica, as fontes de não linearidades podem ser somente estruturais, somente aerodinâmicas ou da estrutura e aerodinâmica simultaneamente.

1.1 Fontes de não linearidades em sistemas aeroelásticos

As principais fontes de não linearidades em sistemas aeroelásticos têm origem, tanto na dinâmica estrutural, quanto no carregamento aerodinâmico não estacionário.

Em termos da aerodinâmica não estacionária, as fontes mais importantes de não linearidades são devido aos efeitos viscosos e de compressibilidade. Ao efeito de compressibilidade associa-se o surgimento de ondas de choque em escoamentos de alta velocidade (ERICSSON; REDING, 1987; LEE; PRICE; WONG, 1999; DOWELL; TANG, 2002). O efeito da viscosidade nos escoamentos aerodinâmicos está tipicamente associado aos problemas de separação e turbulência. Aeronaves militares de alto desempenho, por exemplo, possuem

alta capacidade de manobra e frequentemente, devido a manobras bruscas a aeronave experimenta atitudes de altos ângulos de ataque, induzindo separação do escoamento. Os efeitos viscosos associados apresentam não linearidades fortes, de forma que projetistas precisam estar aptos a estimar os efeitos provocados, que são geralmente adversos.

Não linearidades com origem no comportamento dinâmico-estrutural podem ser devido à grandes deformações, à características particulares dos materiais ou por problemas de junções (articulações, fixações, etc.). As não linearidades estruturais, por sua vez, podem ser classificadas como sendo distribuídas ou concentradas, dependendo da abrangência dos seus efeitos. No caso de não linearidades distribuídas, seus efeitos são considerados espalhados ao longo de uma estrutura, enquanto as concentradas se restringem à efeitos localizados, ou que podem ser supostos como tal (LEE; PRICE; WONG, 1999; DE MARQUI JR.; MARQUES, 2007). Os efeitos de não linearidades concentradas podem ser incorporados nos modelos aeroelásticos em termos de generalizações das forças ou momentos de restauração elástica representados por modelos de molas (rigidez vezes deslocamento). Usualmente, tais molas não lineares são modeladas de forma a expressar um comportamento polinomial para o esforço de restauração elástico com relação ao deslocamento sofrido. Contudo, outros problemas também podem ser tratados com essa metodologia, ou seja, a inclusão de efeitos de folgas e de histerese. Os tipos mais comuns de não linearidades concentradas em sistemas dinâmicos são as associadas à rigidez polinomial, nas quais o comportamento da mola varia com a amplitude do deslocamento, ficando mais rígida (*hardening*) ou menos rígida (*softening*), amortecimento não linear, seguidas por folga (ou *freeplay*, em inglês), fricção e histerese entre outras. A Figura 1 apresenta os tipos mais comuns de não linearidades concentradas presentes em sistemas dinâmicos.

Problemas não lineares de efeito concentrado importantes em aeroelasticidade são os relacionados às articulações das superfícies de controle de aeronaves (ailerões, profundores, etc.). Tipicamente, esses mecanismos apresentam folgas e após anos de uso, uma diminuição na rigidez de todo conjunto de acionamento é observada. Outra causa de não linearidade estrutural em articulações de superfície de comandos de vôo é a fricção

Figura 1: Formas idealizadas de não linearidades comuns em sistemas dinâmicos (WORDEN; TOMLINSON, 2001)

ou atrito seco. Existindo o atrito seco e folgas, aflora o efeito de histerese (LEE; PRICE; WONG, 1999).

As superfícies móveis em aeronaves, quase sempre compreendem mecanismos complexos para o acionamento, tornando quase impossível a inexistência de algum tipo de folga ou outra não linearidade concentrada. Com o deslocamento da aeronave na atmosfera, movimentos autosustentados, como oscilações em ciclo limite (do inglês, *Limit Cycle Oscillation* - LCO) ou caos, por exemplo, podem surgir em uma superfície móvel como efeito dessa não linearidade, e evoluir de forma perigosa, colocando em risco a segurança

de vôo. Tais oscilações são mais comuns do que se imagina e recentemente foram observados LCOs em superfícies de comando de modelos comerciais, como nos A319, A320 e A321 da *Airbus Industries*, bem como em versões mais antigas do *Boeing 737* (TRICKEY; VIRGIN; DOWELL, 2002).

A Figura 2 apresenta detalhes de mecanismos de acionamento de superfícies de controle de uma aeronave Aermacchi MB-326 Xavante, doada à EESC/USP pela Força Aérea Brasileira, onde é possível observar as junções e articulações suscetíveis a desgaste e folga.

(a) Compensador do profundor

(b) flape

Figura 2: Detalhe: mecanismos de acionamento de superfícies de comando de uma aeronave Aermacchi MB-326. (foto: Rui Vasconcellos, 2012)

Uma superfície sustentadora aeroelástica com superfície de comando, por exemplo um conjunto estabilizador horizontal-profundor, pode ser modelada como uma seção típica com três graus de liberdade, podendo apresentar os movimentos de flexão, torção e o movimento da superfície de controle. A seção típica aeroelástica é uma idealização de uma superfície sustentadora de uma aeronave, composta de uma placa rígida com um eixo de rotação (eixo elástico) exposta a um escoamento bidimensional e incompressível. O eixo elástico é sustentado por molas que permitem movimentos de flexão e torção. Superfícies de controle podem ser incluídas com a introdução de articulações e molas adicionais. Algumas aeronaves, como a maioria das aeronaves militares de ataque utilizam-se de sistemas onde uma superfície estabilizadora funciona como uma superfície de controle,

movendo-se inteiramente, podendo ser modeladas como uma seção típica com dois graus de liberdade. Um exemplo é a aeronave F/A-18 Hornet, mostrada na Figura 3, onde é possível observar o profundor/estabilizador totalmente defletido.

Figura 3: F/A-18 Hornet, destaque para as superfícies estabilizadoras e de comando da cauda. (foto: Rui Vasconcellos, 2012)

Os primeiros trabalhos sobre folgas em estruturas aeroelásticas foram realizados por Woolston e colaboradores (WOOLSTON; RUNYAN; BYRSDSONG, 1955; WOOLSTON, 1957). Através de um modelo matemático e experimentos com dois e três graus de liberdade, concluiu-se sobre a importância da inclusão dos efeitos de folga nos estudos de *flutter*. Em seu trabalho, Woolston estudou o efeito de vários tipos de não linearidades estruturais na velocidade de *flutter*, incluindo folgas, utilizando dados experimentais e numéricos. Woolston concluiu que a inclusão de efeitos não lineares era muito importante devido a grandes variações do limite de instabilidade. No caso de folgas, a velocidade de *flutter* era significativamente menor que a prevista por métodos lineares e além disso, era dependente das condições iniciais.

Laurenson e TRN (1980) estudaram o efeito da folga na velocidade de *flutter* em superfícies de comando de mísseis, para tanto utilizou-se do método do balanço harmônico.

A mesma metodologia foi aplicada em vários trabalhos subsequentes, como nos trabalhos de Hauenstein et al. (1992), Price, Alighanbari e Lee (1995), Shen (1959), Tang e H. (1992), Yang e C. (1988). O método do balanço harmônico é uma análise no domínio da frequência para obter a solução de estado estacionário de sistemas não lineares. O método é vantajoso em alguns aspectos, como na possibilidade do estudo da estabilidade do sistema através da análise por técnicas tradicionais lineares, como a análise de autovalores, permitindo a predição de alguns comportamentos não lineares. No entanto, esta técnica apresenta deficiências para incorporar os efeitos não lineares em sua totalidade, como por exemplo a dependência do sistema as condições iniciais, além do fato de assumir que o sistema apresenta apenas soluções periódicas (CONNER et al., 1996).

Estudos numéricos em sistemas aeroelásticos com não linearidades, incluindo folgas, também foram tratados utilizando-se modelos complexos, envolvendo soluções por diferenças finitas, dinâmica dos fluidos computacional ou métodos de vórtices concentrados (UVLM - *Unsteady Vortex Lattice Method*), como nos trabalhos de Price, Alighanbari e Lee (1995), Tang e H. (1992), Yang e C. (1988), Lee e Desrochers (1987), Kousen e Bendiksen (1994), Kuruvila et al. (2007). Estes modelos apesar de precisos são de alta complexidade e de alto custo computacional. Uma alternativa mais simples e eficaz para a solução da aerodinâmica não estacionária em condições subsônicas é baseada no modelo de espaço de estados desenvolvido por Edwards, Ashley e Breakwell (1979), utilizado por Conner et al. (1996), Trickey, Virgin e Dowell (2002), Li, Guo e Xiang (2010) entre outros e aplicado neste trabalho.

A natureza descontínua da não linearidade folga torna a implementação em modelos matemáticos e estudos analíticos trabalhosa. Um método para localizar o ponto exato da descontinuidade é necessário para evitar erros de integração que crescem continuamente enquanto a simulação ocorre, produzindo resultados incorretos. Usando a representação descontínua da folga e seguindo o método de Henon (1982) para integração numérica, Conner et al. (1996) realizou um estudo numérico e experimental de uma seção típica com superfície de comando. Outras técnicas foram desenvolvidas para localizar os pontos

de descontinuidade gerando resultados precisos, no entanto, essas técnicas costumam aumentar o custo computacional (ROBERTS et al., 2002; JONES; ROBERTS; GAITONDE, 2007; KURUVILA et al., 2007). A aproximação da folga por funções contínuas pode reduzir este problema.

A não linearidade causada por folgas em superfícies de comando ou em outros tipos de junções pode levar a todos os tipos de comportamentos indesejáveis, diminuindo consideravelmente a margem de segurança de operação da aeronave, podendo levar a problemas estruturais, fadiga de material e respostas catastróficas (CONNER et al., 1996; FUNG, 1993; LEE; GONG; WONG, 1997; LI; GUO; XIANG, 2010; TANG; DOWELL, 2010). Desta forma, a caracterização da não linearidade folga em sistemas aeroelásticos e o acesso a forma de evolução dos comportamentos através de análise de séries temporais, identificação e modelagem matemática quando possíveis, podem ajudar a evitar condições perigosas e possivelmente controlá-las.

1.2 Análise de séries temporais aeroelásticas

Na tentativa de entender o mundo ao nosso redor, observações são frequentemente feitas de maneira sequencial durante um certo período, valores no futuro podem depender de alguma maneira das observações presentes. Esta dependência torna viável o acesso e o entendimento da dinâmica do sistema, que geralmente está contida nos dados.

Sistemas lineares produzem resultados regulares, pequenas causas levam a pequenos efeitos. Por outro lado, em sistemas não lineares, a resposta pode ser muito irregular, dependente das condições iniciais, apesar de serem resultados de um processo determinístico e não estocástico.

Caos é o termo utilizado para descrever este comportamento complexo que tem influenciado muitos ramos da ciência, visto que sistemas caóticos podem apresentar uma dinâmica rica e surpreendente, que pode explicar os comportamentos irregulares observados em sistemas aparentemente simples e determinísticos nas mais diversas áreas de

pesquisa.

Em termos de dinâmica não linear, a ligação mais direta entre o mundo real e a teoria é a análise de séries temporais não lineares. Alligood, Sauer e Yorke (1997) colocam que obviamente, a idéia de que um experimento real possa ser governado por um conjunto de equações é uma ficção. Um conjunto de equações diferenciais, ou um mapa, pode modelar um sistema apenas da forma suficiente para fornecer resultados úteis (SAVI, 2002).

Desta forma, torna-se importante analisar sistemas dinâmicos sem que se conheça detalhes sobre a sua dinâmica, não possuindo portanto um modelo matemático estabelecido. Para isso, utiliza-se um conjunto de técnicas de análise de séries temporais não lineares. Nela, características fundamentais do sistema podem ser resgatadas à partir de um conjunto discreto, numerável de valores de uma variável de estado de um sistema dinâmico, através de análises no domínio da frequência, reconstrução do espaço de estados, estudo de recorrência, quantificação de invariantes entre outras.

Para um bom aproveitamento da análise de séries temporais, o sinal precisa ser de boa qualidade. A inevitável presença de ruído em sinais experimentais pode tornar a análise mais difícil, podendo acarretar interpretações incorretas dos resultados. É aconselhável, como primeiros passos em análise de séries temporais não lineares, testes para estacionaridade e testes para verificar se o sinal medido é determinístico ou é apenas ruído, além da utilização de técnicas de filtragem e métodos adequados à séries temporais experimentais. O uso de técnicas adequadas é extremamente importante na análise de séries temporais (KANTZ; SHREIBER, 2004; PARLITZ, 1998).

Em um ensaio aeroelástico experimental, geralmente tem-se uma base de dados que compreende a um conjunto de informações de uma variável em um determinado intervalo de tempo de aquisição. Essas séries temporais obtidas dos ensaios podem ser usadas para inferir sobre um modelo de identificação, ou podem ser analisadas diretamente. Séries temporais podem ser usadas para caracterizar um movimento e, por consequência, caracterizar um sistema (MOON, 1987; NAYFEH; BALACHANDRAM, 1995; ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1997; KANTZ; SHREIBER, 2004). A análise de uma série temporal pode ser reali-

zada através de técnicas no domínio do tempo ou da frequência, o que resgata informações sobre periodicidade, nível de ruído presente, dentre outros aspectos. No domínio da frequência, a análise de Fourier é uma das formas mais tradicionais para tratamento de séries temporais, possibilitando a determinação das frequências naturais do sistema, ou detectar acoplamentos não lineares entre diferentes frequências.

Através de uma série temporal, também é possível obter órbitas percorridas no espaço de estados do sistema através da reconstrução espaço de estados (FRASER, 1989; NAYFEH; BALACHANDRAM, 1995; VASCONCELLOS, 2007). O uso de técnicas de reconstrução do espaço de estados através de séries temporais é uma forma conveniente de analisar fenômenos aeroelásticos. Uma vantagem dessa abordagem é que para sistemas aeroelásticos com efeitos não lineares significativos, torna-se mais fácil fazer a análise através de poucas medidas dinâmicas durante um experimento.

Os resultados apresentados por Marques et al. (2003), Marques et al. (2004), Simoni et al. (2005), Marques et al. (2006), Marques, Simoni e Oliveira (2006), Simoni (2008), Marques e Vasconcellos (2009a) têm mostrado que o uso de técnicas de reconstrução do espaço de estados é bastante promissor na identificação de fenômenos aeroelásticos não lineares. A principal razão reside no fato de que os dados obtidos experimentalmente guardam as informações essenciais dos fenômenos. Então, sem as limitações dos atuais modelos matemáticos, o estudo das respostas aeroelásticas obtidas experimentalmente pode levar a um melhor entendimento dos fenômenos não lineares, além de poder identificar possíveis novos problemas. A idéia principal da técnica de reconstrução do espaço de estados (NAYFEH; BALACHANDRAM, 1995; PACKARD et al., 1980; BROOMHEAD; KING, 1986) está na captura da estrutura das órbitas, usando diretamente as variáveis defasadas de um atraso no tempo a ser determinado da série temporal ou através da técnica de decomposição em valores singulares (BROOMHEAD; KING, 1986; VASCONCELLOS, 2007).

Com os espaços de estados aeroelásticos reconstruídos é possível caracterizar o movimento apresentado pelo sistema, como oscilações em ciclo limite ou comportamento caótico. As oscilações em ciclos limite representam uma das mais importantes caracterís-

ticas no comportamento aeroelástico não linear, ocorre quando a solução converge para uma trajetória fechada no espaço de estados (NAYFEH; BALACHANDRAM, 1995). No caso de uma resposta caótica, a propriedade fundamental é a sensibilidade às condições iniciais. Isso significa que para um sistema caótico, condições iniciais muito próximas geram trajetórias inicialmente próximas que, após um certo tempo, passam a apresentar comportamentos aparentemente não correlacionados entre si, assumindo formas complexas no espaço de estados. Daí a dificuldade de se fazer previsões precisas de longa duração baseadas em modelos matemáticos quando se tem um sistema caótico. Hoje já se sabe que o comportamento caótico é observável na natureza, sendo o responsável por importantes fenômenos que ocorrem nas mais diversas áreas, inclusive em aeroelasticidade.

Outras características importantes de um sistema dinâmico, como suas quantidades invariantes, podem ser obtidas da análise de uma série temporal. Dentre as principais quantidades invariantes resgatáveis de uma série temporal destacam-se os expoentes de Lyapunov, informação mútua, entropia e dimensão de correlação entre outras (NAYFEH; BALACHANDRAM, 1995; ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1997; KANTZ; SHREIBER, 2004). Outras técnicas como análise por seções de Poincaré e redes neurais também têm sido amplamente utilizadas para sistemas dinâmicos não lineares (NAYFEH; BALACHANDRAM, 1995).

Muitas vezes, alterando o valor de um único parâmetro de um sistema não linear, o comportamento assintótico da solução pode mudar seu estado. Para certos valores desse parâmetro, um invariante pode perder sua estabilidade e um novo tipo pode ser criado, o qual pode ser estável ou instável, este fenômeno é chamado de bifurcação. Bifurcações são comuns em sistemas aeroelásticos não lineares e o entendimento da evolução do sistema com a variação de parâmetros, como a velocidade do escoamento, é importantíssima para a segurança de vôo, bem como para a otimização do desempenho de uma aeronave.

Quando os parâmetros de um sistema são alterados, o comportamento caótico pode aparecer ou desaparecer de muitas maneiras, ou seja, para um mesmo sistema podemos ter muitas rotas para o caos. Uma dessas rotas é a duplicação do período. Ela começa

com um comportamento em ciclo limite do sistema. Esse ciclo limite foi provavelmente originado em uma bifurcação envolvendo um ponto fixo. Com a variação dos parâmetros de controle, esse ciclo limite pode tornar-se instável e um novo comportamento passa a ocorrer. Em muitas situações o novo movimento continua periódico, mas o período de oscilação dobra em relação ao período do movimento anterior. Conforme os parâmetros do sistema variam mais adiante, esse ciclo limite de período duplicado pode tornar-se instável, gerando um ciclo período-quatro. Isso pode continuar até o período tender ao infinito, ou seja, a trajetória nunca se repetirá. Esse comportamento é o de um sistema caótico. Detalhes sobre outras rotas para o caos, como a quasi-periodicidade, intermitência e crise e transientes caóticos podem ser encontradas em Hilborn (2000).

Trabalhos recentes, como os de Budd (1996), Champneys e Bernardo (2008) entre outros, descrevem bifurcações características de sistemas dinâmicos com descontinuidade, como por exemplo a bifurcação do tipo *grazing*, na qual mudanças súbitas de ordem para caos ocorrem, diferenciando-se completamente das conhecidas rotas para o caos.

1.3 Objetivos

O objetivo deste trabalho de pesquisa é detectar e caracterizar a não linearidade folga em séries temporais experimentais com ou sem conhecimento prévio da dinâmica e estudar seu efeito em diferentes condições e sistemas aeroelásticos. Para isso, um modelo matemático foi implementado e métodos de análise de séries temporais não lineares são empregados a dados experimentais de asas aeroelásticas em túnel de vento com dois e três graus de liberdade (flexão, torção e superfície de comando) com não linearidades, incluindo folga (*freeplay*) e polinomial cúbica (*hardening*). O conjunto de técnicas de análise de séries temporais não lineares e identificação não linear serão utilizados para determinar a ordem da não linearidade relacionada à folga e características de estabilidade que diferenciem a folga de outras não linearidades. Os resultados obtidos experimentalmente podem então ser comparados com resultados do modelo matemático, validando assim a eficiência das técnicas aplicadas.

As contribuições inéditas e originais do presente trabalho são destacadas a seguir:

- Aplicação de técnicas de análise de séries temporais não lineares em dados aeroelásticos experimentais para caracterizar não linearidades presentes;
- Utilização da função aproximante baseada em tangente hiperbólica como aproximação eficaz da folga na superfície de comando;
- Aplicação de análise espectral de ordem elevada para detectar interação não linear provocada por folga em sistemas aeroelásticos;
- Aplicação em conjunto de técnicas de análise de séries temporais e de identificação de sistemas para detectar a não linearidade e gerar um modelo identificado para a folga.

1.4 Organização da Tese

Neste trabalho, discute-se inicialmente as origens e os efeitos de não linearidades em sistemas aeroelásticos, particularmente da não linearidade associada à folga em superfícies de comando. As possíveis abordagens do problema aeroelástico não linear, incluindo análise de séries temporais, são discutidas.

No Capítulo 2, o objeto de estudo é apresentado e o tratamento matemático para modelagem da dinâmica estrutural, para a aerodinâmica não estacionária e para a inclusão das não linearidades no modelo é descrito .

As técnicas de análise de séries temporais não lineares experimentais e identificação são introduzidas no Capítulo 3, cobrindo desde os testes iniciais para estacionaridade e determinismo não linear até a caracterização de comportamentos e identificação da ordem das não linearidades presentes no sistema que gera o sinal.

No Capítulo 4, descreve-se em detalhes os dispositivos experimentais utilizados nos testes iniciais das técnicas de análise de séries temporais e nos experimentos com dois e três graus de liberdade e folga em superfícies móveis.

Os resultados das análises numérica e experimental estão contidos no Capítulo 5,

onde as técnicas apresentadas previamente são aplicadas para caracterização e detecção e identificação não linear. Finalmente, seguem as considerações finais, com as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 *Modelo matemático*

2.1 Introdução

Um modelo matemático capaz de incorporar efeitos não lineares provocados por não linearidades estruturais concentradas sem grande custo computacional é desejável.

O modelo de espaço de estados para uma seção típica com três graus de liberdade proposto por Edwards, Ashley e Breakwell (1979) e utilizado neste trabalho é capaz de cumprir esses requisitos. Este modelo de ordem reduzida, simula uma seção típica aeroelástica apresentando movimentos de flexão, torção e superfície de comando, em um escoamento bidimensional e incompressível.

Neste Capítulo, o modelo aeroelástico é descrito, com ênfase na determinação do carregamento aerodinâmico não estacionário, com a capacidade de incorporar comportamentos não lineares complexos.

2.2 Modelo aeroelástico

Na Figura 4, o esquema de uma seção típica com três graus de liberdade (flexão, torção e superfície de comando) é apresentado. As variáveis de flexão e torção são denotadas por w e α , respectivamente, a variável do movimento da superfície de comando é representada por β . A flexão w e a torção α são medidas no eixo elástico e o ângulo β da superfície de controle é medido na linha da articulação. Adicionalmente ab representa a distância entre o eixo elástico e a corda média, c representa a distância do eixo elástico ao eixo de articulação da superfície de controle e b é a semicorda do aerofólio.

1993). A equação já em sua forma matricial e adimensional, com a introdução de amortecimento é expressa como:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} r_\alpha^2 & r_\beta^2 + (c-a)x_\beta & x_\alpha \\ r_\beta^2 + (c-a)x_\beta & r_\beta^2 & x_\beta \\ x_\alpha & x_\beta & \mu_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{w}/b \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{w}/b \end{bmatrix} + \quad (2.3) \\
 & \begin{bmatrix} r_\alpha^2 \omega_\alpha^2 F(\alpha)/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & r_\beta^2 \omega_\beta^2 F(\beta)/\beta & 0 \\ 0 & 0 & \omega_w^2 F(w)/w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ w/b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_\alpha/m_W b^2 \\ M_\beta/m_W b^2 \\ -L/m_W b \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

onde m_W é a massa de referência utilizada na adimensionalização,

$$x_\alpha = \frac{S_\alpha}{m_W b}; \quad x_\beta = \frac{S_\beta}{m_W b}; \quad r_\alpha^2 = \frac{I_\alpha}{m_W b^2} \text{ e } r_\beta^2 = \frac{I_\beta}{m_W b^2}.$$

Os termos ω_α , ω_β e ω_w são as frequências naturais desacopladas, $d_{i,j}$ são os coeficientes de amortecimento relativos a cada grau de liberdade e suas componentes acopladas. I_α é o momento de inércia da asa em relação ao eixo elástico, I_β é o momento de inércia da superfície móvel em relação à articulação, L e M_α são a sustentação e o momento aerodinâmicos em relação ao eixo elástico e M_β é o momento aerodinâmico na superfície de comando relativo à dobradiça. S_α e S_β são os momentos estáticos e $F(\alpha)$, $F(\beta)$ e $F(w)$ representam funções que caracterizam os termos de rigidez (como lineares ou não lineares e que serão introduzidos futuramente).

O termo μ_e é relacionado com a massa móvel do sistema. Sendo a massa da asa m_W utilizada como referência na adimensionalização, no caso ideal da seção típica, $\mu_e = 1$. Nos experimentos realizados e futuramente descritos, onde a massa móvel em torção é diferente da massa móvel em flexão devido aos suportes que movem-se no sentido de

flexão, o termo é ajustado por $\mu_e = m_T/m_W$, sendo m_T a massa total da asa e suportes e m_W a massa da asa apenas.

Efeitos não lineares aerodinâmicos podem ser incorporados neste modelo, no entanto, para o estudo deste trabalho, estes efeitos serão desconsiderados e a fonte de não linearidade será a mola da superfície de comando, no caso com três graus de liberdade (3GDL) ou a mola de torção, no caso com dois graus de liberdade (2GDL), resultando em um torque não linear.

2.3 Modelo para aerodinâmica não estacionária

A solução deste problema aeroelástico é dependente de um modelo aerodinâmico usado para determinar os carregamentos não estacionários L , M_α e M_β , no lado direito da equação (2.3). Assume-se um escoamento potencial incompressível e o carregamento não estacionário sobre o aerofólio é dado pela solução de Theodorsen. Theodorsen (1935) obteve uma solução analítica para a distribuição de pressão no aerofólio utilizando as simplificações supracitadas, considerando o campo potencial total do fluido como a soma dos potenciais devido ao aerofólio (parte não circulatória) e do potencial devido à um padrão de vórtices sobre o aerofólio e ao longo da esteira (parte circulatória), de maneira que a condição de Kutta (pressão finita tendendo a zero no bordo de fuga) seja satisfeita, ou seja:

$$\begin{aligned} L &= L_{NC} + L_C \\ M_\alpha &= M_{\alpha NC} + M_{\alpha C} \\ M_\beta &= M_{\beta NC} + M_{\beta C} \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde as parcelas com subscrito NC são as relativas aos termos não-circulatórios, enquanto as com subscrito C representam as parcelas circulatórias (TRICKEY, 2000).

As Equações (2.4) podem ser reescritas como (THEODORSEN, 1935):

$$L = -\pi\rho b^2 \left[\ddot{w} + U\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha} - \frac{U}{\pi}T_4\dot{\beta} - \frac{b}{\pi}T_1\ddot{\beta} \right] - 2\pi\rho UbC(\bar{k})f(t) \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} M_\alpha = \pi\rho b^2 \left[ba\ddot{w} - Ub \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} - b^2 \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} - \frac{U^2}{\pi}(T_4 + T_{10})\beta + \right. \\ \left. \frac{Ub}{\pi} \left\{ -T_1 + T_8 + (c - a)T_4 - \frac{1}{2}T_{11} \right\} \dot{\beta} + \frac{b^2}{\pi} \{ T_7 + (c - a)T_1 \} \ddot{\beta} \right] \\ + 2\pi\rho b^2 \left(a + \frac{1}{2} \right) C(\bar{k})f(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} M_\beta = \pi\rho b^2 \left[\frac{b}{\pi}T_1\ddot{w} + \frac{Ub}{\pi} \left\{ 2T_9 + T_1 - \left(a - \frac{1}{2} \right) T_4 \right\} \dot{\alpha} \right. \\ \left. - \frac{2b^2}{\pi}T_{13}\ddot{\alpha} - \left(\frac{U}{\pi} \right)^2 (T_5 - T_4T_{10})\beta \right. \\ \left. + \frac{Ub}{2\pi^2}T_4T_{11}\dot{\beta} + \left(\frac{b}{\pi} \right)^2 T_3\ddot{\beta} \right] - \rho Ub^2 T_{12} C(\bar{k})f(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

sendo:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega = U\alpha + \dot{w} + \dot{\alpha}b \left(\frac{1}{2} - a \right) + \frac{U}{\pi}T_{10}\beta + \frac{b}{2\pi}T_{11}\dot{\beta} \quad (2.8)$$

e as funções T_i são apresentadas no Apêndice A.

Os carregamentos aerodinâmicos são dependentes da função de Theodorsen $C(\bar{k})$ onde $\bar{k}$ é a frequência reduzida do movimento harmônico simples do aerofólio. O sistema não linear considerado neste trabalho, pode gerar movimentos muito mais complexos, de forma que a função $C(\bar{k})$ precisa ser adaptada para movimentos arbitrários.

O estudo de carregamentos não estacionários provocados por movimentos transientes foi proposto por Wagner (apud EDWARDS; ASHLEY; BREAKWELL, 1979)¹ que calculou a resposta da sustentação de um aerofólio à entradas degrau na incidência, concluindo que a superposição de soluções elementares poderia ser utilizada para calcular o carregamento não estacionário para movimentos arbitrários.

¹WAGNER, H. Über die entstehung des dynamischen auftriebs von tragugeln. *Zeitschrift für angewandte Mathematik and Mechanik*, v. 5, n. 1, 1925.

Assumindo que o movimento da seção típica não começa em um tempo remoto no passado, e sim em $t = 0$, permite expressar o carregamento em função da variável de Laplace. A obtenção de uma expressão para a função de Theodorsen em termos da variável de Laplace é descrita em detalhes em Edwards, Ashley e Breakwell (1979).

De maneira geral, uma função indicial de carregamento é desenvolvida determinando o resultado de uma variação degrau no ângulo de ataque. A função indicial pode ser utilizada em uma integral de superposição de Duhamel para determinar o carregamento para um deslocamento arbitrário do aerofólio.

Iniciando com a expressão que descreve os esforços circulatorios no domínio da frequência:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C\left(\frac{\omega b}{U}\right) f(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.9)$$

e prescrevendo uma entada degrau no ângulo de ataque expressa como:

$$f(\omega) = \frac{U}{i\omega}, \quad (2.10)$$

resulta em:

$$\phi(\bar{\tau}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(\bar{k})}{ik} e^{ik\bar{\tau}} dk, \quad (2.11)$$

onde $\bar{\tau} = Ut/b$ e $\bar{k} = \omega b/U$.

A Equação (2.11) é conhecida como função de Wagner. Usando a função de Wagner como uma função indicial de admitância e a integral de superposição de Duhamel, o esforço circulatorio pode ser escrito como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\bar{k}) f(\omega) e^{ik\bar{\tau}} dk = \left(f(0)\phi(\bar{\tau}) + \int_0^{\bar{\tau}} \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} \phi(\bar{\tau} - \sigma) d\sigma \right) \quad (2.12)$$

A conveniente aproximação de Sears (1940) simplifica a Equação (2.12), resultando:

$$\phi(\bar{\tau}) \cong C_0 - C_1 e^{-C_2 \bar{\tau}} - C_3 e^{-C_4 \bar{\tau}}, \quad (2.13)$$

onde $C_0 = 1$, $C_1 = 0.165$, $C_2 = 0.0455$, $C_3 = 0.335$, $C_4 = 0.3$.

A integral de Duhamel é então reescrita utilizando integração por partes e representando o termo integral como uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, usando o método do aproximante de Padé (BAKER, 1974), resultando em:

$$C(\bar{k})f(t) \approx (C_0 - C_1 - C_3)f(t) + C_2 C_4 (C_1 + C_3)\bar{x} + (C_1 C_2 + C_3 C_4)\dot{\bar{x}} \quad (2.14)$$

Detalhes dos passos envolvidos na obtenção da Equação (2.14) podem ser obtidos em Edwards, Ashley e Breakwell (1979) e em Trickey (2000).

Com a introdução das variáveis aumentadas, $x_{a1} = \bar{x}$ e $x_{a2} = \dot{\bar{x}}$, a equação do movimento para o modelo completo (Equação (2.3)) é reescrita como:

$$(\mathbf{M}_s - \mathbf{M}_{NC})\ddot{\mathbf{x}} + \left(\mathbf{B}_s - \mathbf{B}_{NC} - \frac{1}{2}\mathbf{R}\mathbf{S}_2\right)\dot{\mathbf{x}} + \left(\mathbf{K}_s - \mathbf{K}_{NC} - \frac{1}{2}\mathbf{R}\mathbf{S}_1\right)\mathbf{x} - \mathbf{R}\mathbf{S}_3\mathbf{x}_a = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

onde $\mathbf{x} = [\alpha \quad \beta \quad w/b]^T$, $\mathbf{x}_a = [x_{a1} \quad x_{a2}]^T$ e as matrizes da Equação (2.15) são detalhadas como segue:

$$\mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} r_\alpha^2 & r_\beta^2 + (c-a)x_\beta & x_\alpha \\ r_\beta^2 + (c-a)x_\beta & r_\beta^2 & x_\beta \\ x_\alpha & x_\beta & \mu_e \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} r_\alpha^2 \omega_\alpha^2 F(\alpha)/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & r_\beta^2 \omega_\beta^2 F(\beta)/\beta & 0 \\ 0 & 0 & \omega_w^2 F(w)/w \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{B}_s = (\mathbf{\Lambda}^T)^{-1} \begin{bmatrix} 2m_\alpha \omega_\alpha \xi_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2m_\beta \omega_\beta \xi_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 2m_w \omega_w \xi_w \end{bmatrix} \mathbf{\Lambda}^{-1}, \quad (2.18)$$

sendo $\mathbf{\Lambda}$ a matriz de autovetores de $\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}_s \mathbf{x}$, m_α , m_β , m_w as massas modais e ξ_α , ξ_β , ξ_w os fatores de amortecimento, por decaimento logarítmico.

$$\mathbf{M}_{\text{NC}} = -\frac{\rho}{m_W} \begin{bmatrix} \pi b^2 \left(\frac{1}{8} + a^2\right) & -(T_7 + (c - a)T_1)b^2 & -\pi ab^2 \\ 2T_{13}b^2 & -T_3b^2/\pi & -T_1b^2 \\ -\pi ab^2 & -T_1b^2 & \pi b^2 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{B}_{\text{NC}} = -\frac{\rho}{m_W} \begin{bmatrix} \pi \left(\frac{1}{2} - a\right) Ub & T_1 - T_8 - (c - a)T_4 + T_{11}/2 Ub & 0 \\ (-2T_9 - T_1 + T_4 \left(a - \frac{1}{2}\right)) Ub & -T_4 T_{11} Ub / (2\pi) & 0 \\ \pi Ub & -UT_4 b & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{K}_{\text{NC}} = -\frac{\rho}{m_W} \begin{bmatrix} 0 & (T_4 + T_{10})U^2 & 0 \\ 0 & (T_5 - T_4 T_{10})U^2/\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2\pi\rho U \left(a + \frac{1}{2}\right) / m_W & -\rho UT_{12}/m_W & -\frac{2\pi\rho U}{m_W} \end{bmatrix}^T, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} U & T_{10}U/\pi & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} b \left(\frac{1}{2} - a\right) & bT_{11}/2\pi & b \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} c_2 c_4 (c_1 + c_3) U^2 / b & (c_1 c_2 + c_3 c_4) U \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

Na forma de espaço de estados, o sistema aeroelástico é dado por:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{X})\mathbf{X}, \quad (2.26)$$

sendo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_t^{-1} \mathbf{K}_t & -\mathbf{M}_t^{-1} \mathbf{B}_t & \mathbf{M}_t^{-1} \mathbf{D} \\ \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

e

$$\mathbf{M}_t = \mathbf{M}_s - \mathbf{M}_{\text{NC}}, \quad \mathbf{B}_t = \mathbf{B}_s - \mathbf{B}_{\text{NC}} - \frac{1}{2} \mathbf{R} \mathbf{S}_2, \quad \mathbf{K}_t = \mathbf{K}_s - \mathbf{K}_{\text{NC}} - \frac{1}{2} \mathbf{R} \mathbf{S}_1, \quad \mathbf{D} = \mathbf{R} \mathbf{S}_3, \text{ onde:}$$

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ U/b & UT_{10}/(\pi b) & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (1/2 - a) & T_{11}/(2\pi) & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_2 c_4 U^2 / b^2 & -(c_2 + c_4) U / b \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

2.4 Sobre a representação das não linearidades estruturais

A não linearidade estrutural pode ser introduzida na rigidez dos três graus de liberdade do sistema através das funções $F(\alpha)$, $F(\beta)$, e $F(w)$ na Equação (2.3). No presente trabalho foram consideradas as não linearidades folga e polinomial cúbica da rigidez com

o deslocamento (*hardening*).

Para o caso de não linearidade associada à folga, representada na Figura 5 para o caso de folga na superfície de comando, foram consideradas três representações matemáticas distintas:

- A representação descontínua, já utilizada nos trabalhos de Conner et al. (1996) e Dowell e Tang (2002) entre outros;
- A aproximação por função tangente hiperbólica, mais fácil de implementar e mais rápida computacionalmente por ser uma representação contínua e;
- A aproximação polinomial, facilmente identificada por métodos analíticos.

Figura 5: Momento restaurador com presença de folga na superfície de comando

A descrição a seguir exemplifica a introdução da não linearidade na superfície de comando, sendo F função do ângulo de deflexão β .

Na representação descontínua, $F(\beta)$ é escrita como:

$$F(\beta) = \begin{cases} 0, & |\beta| \leq \delta \\ \beta - \delta, & |\beta| > \delta, \end{cases} \quad (2.31)$$

sendo δ o tamanho da folga.

Para integrar as equações de movimento usando a representação descontínua, o método de Henon (HENON, 1982) é utilizado para localizar a descontinuidade e integrar

exatamente sobre ela. Este método é conhecido como técnica da da interpolação inversa e é bem descrito no trabalho de Conner et al. (1996).

Para a representação contínua por tangente hiperbólica, $F(\beta)$ é escrita como:

$$F(\beta) = \frac{1}{2} [1 - \tanh(\varepsilon(\beta - \delta))] (\beta - \delta) + \frac{1}{2} [1 + \tanh(\varepsilon(\beta - \delta))] (\beta - \delta) + P, \quad (2.32)$$

onde δ é o tamanho da folga, P representa uma pré-carga e ε é a variável que influencia a acurácia da aproximação, quanto maior ε mais a representação se aproxima da descontinuidade.

Na terceira representação, a folga é aproximada por uma expansão polinomial, esta representação também é utilizada no caso da não linearidade tipo *hardening*, sendo a diferença entre elas, a relação entre os coeficientes da aproximação (ABDELKEFI et al., 2011):

$$F(\beta) = k_{\beta 0} \beta + k_{\beta 1} \beta^2 + k_{\beta 2} \beta^3 + \dots \quad (2.33)$$

, onde $k_{\beta n}$ são os coeficientes da aproximação. No caso *hardening*, $k_{\beta 0} = 1$.

3 Identificação e classificação de não linearidades aeroelásticas

3.1 Introdução

O emprego de técnicas de análise de séries temporais em conjunto com técnicas de identificação não linear pode facilitar a caracterização e identificação de respostas aeroelásticas não lineares, principalmente quando pouca ou nenhuma informação sobre a origem do sinal está disponível.

Com as técnicas de análise de séries temporais, os sinais são inicialmente testados, de forma a saber se são úteis ou não para a análise desejada. Informações sobre frequências de oscilação e harmônicos, tipo de movimento apresentado, ocorrência de bifurcações, entre outras podem ser resgatadas a partir de poucas medidas. Tais informações podem guiar uma análise de identificação, como na determinação da ordem relacionada com a não linearidade presente no sinal, tipo de bifurcações que ocorrem no sistema entre outras características, ajudando no desenvolvimento de um modelo para a não linearidade presente no sistema.

3.2 Análise de séries temporais

3.2.1 Testes iniciais para estacionaridade e determinismo não linear

É aconselhável, como primeiros passos em análise de séries temporais não lineares, testes para estacionaridade e o teste dos dados substitutos (do inglês, *Surrogate data test*

- SDT). Se uma série temporal é originária de um processo desconhecido a priori, é importante investigar se os parâmetros do sistema permanecem constantes ou não durante o experimento e também se os dados contém ou não dependências não lineares determinísticas (PARLITZ, 1998).

Violações ao fato das propriedades dinâmicas do sistema permanecerem constantes durante o período de observação podem ser checadas simplesmente medindo-as para vários segmentos do sinal (KANTZ; SHREIBER, 2004). Dois testes para estacionaridade são realizados antes de qualquer análise neste trabalho, o teste de iteração (*do inglês, run-test*) e o de arranjos reversos (*do inglês, reverse arrangements test*). Nestes testes, a série temporal é dividida em segmentos, como ilustrado na Figura 6, dependendo da extensão do sinal coletado. Propriedades como a média e desvio padrão são computadas para cada segmento, de forma que para ser considerada estacionária, essas propriedades não podem variar entre os intervalos além das flutuações estatísticas. Mais detalhes sobre essas técnicas podem ser encontradas em Bendat e Piersol (1986).

Para investigar se o sinal contém ou não dependências determinísticas, o SDT pode ser muito útil. A idéia básica sobre o SDT é fazer algumas hipóteses sobre o sinal e então tentar contradizê-las. Uma hipótese amplamente utilizada é que o sinal é um ruído colorido gerado por um processo linear estocástico. Então, o sinal é modificado de tal forma que toda estrutura, exceto para as propriedades assumidas é destruída. Isto pode ser feito, por exemplo, embaralhando aleatoriamente a fase do sinal no domínio da frequência, o espectro de frequências ou equivalentemente, a função de autocorrelação não são afetados. Um novo sinal, com o mesmo espectro e a mesma função de autocorrelação é obtido fazendo a transformação inversa, para o domínio do tempo.

Se o sinal original for apenas ruído colorido, invariantes como dimensão, informação mútua média, expoentes de Lyapunov, dentre outros, devem apresentar resultados semelhantes para o sinal original e para o substituto. Se, no entanto, existirem diferenças significativas, o sinal é mais do que “apenas ruído”(PARLITZ, 1998).

Para aumentar a robustez estatística do teste, várias séries temporais substitutas são

geradas. Adicionalmente, é necessário considerar uma possível transformação não linear do sinal que pode distorcer a distribuição gaussiana do ruído colorido assumido, como feito por Theiler et al. (1992). A ferramenta disponibilizada por Merkwirth, Parlitz e Lauterborn (1998) é utilizada para a realização dos testes.

De maneira geral, a Figura 6 ilustra a metodologia adotada.

Figura 6: Testes iniciais para análise de séries temporais

3.2.2 Reconstrução do espaço de estados

Geralmente, um experimento não mede todas as variáveis de estado do sistema. Normalmente tem-se somente a evolução temporal de uma variável, representada pela série temporal. A técnica de reconstrução do espaço de estados usa essa série para extrair informações sobre a dinâmica do sistema.

A técnica baseia-se no teorema de imersão de Takens (1981), segundo o qual essa série temporal possui informações sobre todos os estados não observáveis. A partir dela, pode-se reconstruir um espaço de estados similar ao original, preservando invariantes do sistema,

como a dimensão do atrator e os expoentes de Lyapunov. Este fato foi demonstrado numericamente por Packard et al. (1980) e posteriormente provado por Takens (1981).

Existem diferentes métodos para a reconstrução do espaço de estados, entre eles o método das coordenadas defasadas e a decomposição em valores singulares. O método das coordenadas defasadas (do inglês, *Method of delays* - MOD) é o método de reconstrução mais explorado na literatura. Esta técnica adota uma defasagem (τ) e uma dimensão de imersão (d), gerando coordenadas defasadas à partir da série $s(t)$, ou seja, se a série for representada pela sequência $s[n], n = 1, 2, \dots, N$, onde N é o número total de amostras, mantendo o mesmo intervalo de amostragem, e se d é a dimensão de imersão então a reconstrução por MOD é escrita como:

$$\mathbf{u}[n] = \{s[n], s[n + \tau], \dots, s[n(d - 1)\tau]\} \quad (3.1)$$

A defasagem τ pode ser determinada, por exemplo, pelo método da informação mútua média (FRASER; SWINNEY, 1986) e a dimensão de imersão d , pelo método de Cao (1997).

O método de reconstrução baseado na decomposição em valores singulares (do inglês, *singular value decomposition* - SVD), foi proposto por Broomhead e King (1986). A metodologia elimina a necessidade da determinação de uma defasagem, utilizando-se das propriedades da matriz de covariância do sinal para gerar coordenadas descorrelacionadas. Uma das vantagens do SVD é sua capacidade de filtrar a série temporal como um resultado do processo de reconstrução. Kugiumtzis e Christophersen (1997) e Vasconcellos (2007) compararam MOD e SVD e concluíram que o SVD é mais confiável em sinais com ruído, pois os métodos para a determinação da defasagem e da dimensão, no caso do MOD são, em geral, sensíveis ao ruído (CASDAGLI et al., 1991; VASCONCELLOS, 2007). Portanto em princípio, o método SVD é mais apropriado para sinais experimentais.

O método SVD para a reconstrução do espaço de estados usa a matriz de covariância construída da série temporal $\mathbf{s}(t)$. Desta forma, cada estado do sistema pode ser considerado uma variável estatística, a diagonalização da matriz de covariância gera co-

ordenadas descorrelacionadas, separando os estados de maior variância, onde a dinâmica está contida, dos de menor variância, dominados pelo ruído. A aplicação de uma janela de tamanho n à série temporal de N_T pontos resulta em uma sequência de $N = N_T - (n - 1)$ vetores no espaço de imersão, ou seja, $\{\hat{\mathbf{x}}_i \in \mathbb{R}^n | i = 1, 2, \dots, N\}$. Esta sequência é utilizada na construção da matriz de trajetória ($\hat{\mathbf{X}}$), dada por:

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1^T & \hat{\mathbf{x}}_2^T & \dots & \hat{\mathbf{x}}_N^T \end{bmatrix} \quad . \quad (3.2)$$

As colunas da matriz de trajetória constituem os vetores de estado $\hat{\mathbf{x}}_i$ na trajetória reconstruída no espaço de imersão. Construídos N vetores de estado no espaço de imersão, procura-se encontrar um conjunto de vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$ que descreva eficientemente o espaço de estado (ATHANASIU; PAVLOS, 2001). A matriz $\hat{\mathbf{X}}$ pode ser decomposta de acordo com a seguinte relação:

$$\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{C}}^T \quad , \quad (3.3)$$

onde $\hat{\mathbf{S}} = [\hat{\mathbf{s}}_1 \quad \hat{\mathbf{s}}_2 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{s}}_n]$ e $\hat{\mathbf{C}} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \dots \quad \mathbf{c}_n]$ são as matrizes de vetores singulares e $\hat{\mathbf{D}} = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$ é uma matriz diagonal dos valores singulares (BROOMHEAD; KING, 1986).

O número de autovetores independentes $\mathbf{c}_i$, relevantes para a descrição da dinâmica do sistema é igual ao número de autovalores não-nulos σ_i , e eles também são a nova base para a projeção das trajetórias através do produto $\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{C}}$, onde $\hat{\mathbf{C}} = \{\mathbf{c}_i, i = 1, \dots, \text{rank}(\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}^T)\}$. A nova matriz de trajetória $\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{C}}$ pode ser descrita então pela relação:

$$(\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{C}})^T(\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{C}}) = \hat{\mathbf{D}}^2 \quad . \quad (3.4)$$

A relação dada pela Equação (3.4) corresponde a diagonalização da nova matriz de covariância, por isso, na base $\mathbf{c}_i$ as componentes da trajetória são descorrelacionadas.

Quando o sistema é perturbado por ruído externo, a trajetória começa a ficar difusa em direções correspondentes a autovalores nulos, onde a perturbação externa domina. A trajetória pode ser reconstruída excluindo todas as dimensões dominadas pelo ruído,

além disso, a projeção da matriz de trajetória na nova base funciona como um filtro passa baixa para toda a trajetória, assim mesmo o ruído presente nas dimensões consideradas é atenuado. A presença de um platô de ruído no espectro singular é suficiente para distinguir componentes determinísticas (BROOMHEAD; KING, 1986).

A trajetória original pode então ser reconstruída por:

$$\hat{\mathbf{X}}_d = \sum_{\sigma_i > \text{ruído}} \{\hat{\mathbf{X}}\mathbf{c}_i\}\mathbf{c}_i^T, \quad (3.5)$$

onde σ_i corresponde a valores singulares acima do platô de ruído.

Com esse procedimento pode-se reconstruir o espaço de estados eficientemente, livre dos efeitos do ruído presente na série temporal. Além disso, pode-se recuperar a série temporal filtrada, o que também torna o SVD uma técnica de filtragem. A Figura 7 apresenta um exemplo onde a projeção bidimensional do atrator de Lorenz é reconstruído por SVD através de uma série temporal contaminada por ruído e o original, obtido diretamente por simulação.

Figura 7: Projeção em duas dimensões: a) Espaço de estados reconstruído por SVD. b) Espaço de estados original, obtido diretamente das equações por simulação numérica (VASCONCELLOS, 2007).

Neste trabalho as duas técnicas serão utilizadas, no caso da saída do modelo matemático o MOD pode ser usado sem problemas. Já nos casos experimentais, será utilizado o SVD preferencialmente.

3.2.3 Seções de Poincaré

Uma ferramenta poderosa para a verificação de dinâmicas complexas, em particular para identificar visualmente padrões caóticos, é a análise por seções de Poincaré. A seção de Poincaré do espaço de estados simplifica a descrição geométrica da dinâmica removendo uma das dimensões do espaço de estados. Por exemplo, um espaço de estados tridimensional apresenta como uma seção de Poincaré um plano escolhido de tal forma que as trajetórias o interceptam transversalmente. O ponto chave é que esta geometria simplificada contém a informação essencial sobre periodicidade, quasi-periodicidade e caos do sistema (HILBORN, 2000). Bifurcações podem ser observadas plotando seções de Poincaré para variações de parâmetros. A Figura 8 representa uma situação onde ocorre bifurcação. Uma trajetória originalmente simples, intercepta a seção de Poincaré em um ponto apenas. Após passar por uma duplicação de período, passa a interceptar a seção de Poincaré em dois pontos distintos.

Figura 8: Seção de Poincaré de uma trajetória que passou por uma bifurcação de duplicação do período. a) A trajetória inicial cruza a seção em um ponto. b) Após a bifurcação a trajetória passa a cruzar em dois pontos, um de cada lado do ponto inicial (HILBORN, 2000).

As seções de Poincaré podem ser obtidas diretamente do espaço de estados reconstruído (MERKWIRTH; PARLITZ; LAUTERBORN, 1998; KANTZ; SHREIBER, 2004). O resultado é um conjunto de vetores $(n-1)$ -dimensional, usados na projeção ortogonal.

Neste trabalho as seções de Poincaré serão computadas a partir do espaço de estados reconstruído para variações nos parâmetros e serão utilizadas para montar diagramas de bifurcação.

3.2.4 Expoentes de Lyapunov

A determinação dos expoentes de Lyapunov fornecem uma indicação importante com respeito a presença de comportamento caótico no sistema. O maior expoente de Lyapunov descreve a divergência exponencial de trajetórias vizinhas no espaço de estados e é invariante com respeito a mudanças no sistema de coordenadas (PARLITZ, 1998). Quando o maior expoente de Lyapunov é positivo, o sistema é dito caótico e portanto, sensível as condições iniciais.

Considere um fluxo de um sistema dinâmico $\phi(x, t)$. Considere uma trajetória particular $\phi(x_1, t)$ e uma vizinhança desta trajetória em um instante inicial. Esta vizinhança pode ser definida através de uma esfera de diâmetro d_0 . Deseja-se avaliar como uma outra trajetória $\phi(x_2, t)$, onde x_2 está suficientemente próximo de x_1 , diverge da trajetória $\phi(x_1, t)$ na medida que o sistema evolui (Figura 9). Desta forma, o expoente de Lyapunov avalia a evolução no tempo dos eixos de uma esfera suficientemente pequena de estados do sistema dinâmico (SAVI, 2002).

Figura 9: Expoente de Lyapunov (SAVI, 2002)

Métodos diretos para a quantificação do maior expoente de Lyapunov estimam o comportamento divergente do espaço de estados reconstruído, sem ajustar um modelo aos dados. Um método direto bastante conhecido é o método de Wolf et al. (1985). Nele, uma órbita de referência $\{\mathbf{y}^n\}$ e uma órbita vizinha $\{\mathbf{z}^n\}$, começando da vizinhança mais próxima $\mathbf{z}^0$ de $\mathbf{y}^0$ são consideradas. Após um transiente, o vetor distância $\mathbf{u}^k = \mathbf{z}^{n-k} - \mathbf{y}^{n+k}$

aponta para a direção correspondente ao maior expoente de Lyapunov λ_1 . Então, $\|\mathbf{u}^k\|$ cresce, em média, exponencialmente com $e^{(\lambda_1 t_s k)}$. Mais detalhes sobre o método, incluindo um código FORTRAN podem ser encontrados em Wolf et al. (1985). Simoni (2008) e Simoni et al. (2005) aplicaram o método de Wolf à dados aeroelásticos.

Um outro método, mais simples e tão robusto quanto o método de Wolf é o método proposto por Sato, Sano e Sawada (1987). Muito semelhante ao método de Wolf, este método considera o crescimento exponencial médio da distância de órbitas vizinhas em uma escala logarítmica através da função:

$$p(k) = \frac{1}{N t_s} \sum_{n=1}^N \log_2 \left(\frac{\|\mathbf{y}^{n+k} - \mathbf{y}^{nn+k}\|}{\|\mathbf{y}^n - \mathbf{y}^{nn}\|} \right), \quad (3.6)$$

onde N é o número de pontos da amostra, t_s é o período de amostragem e $\mathbf{y}^{nn}$ é o vizinho mais próximo de $\mathbf{y}^n$.

A dependência da função $p(k)$ com o número de passos no tempo k pode ser dividida em três fases. O transiente, que corresponde a primeira fase, onde a órbita vizinha converge na direção do maior expoente de Lyapunov. A segunda fase, onde a distância cresce exponencialmente com $e^{(\lambda_1 t_s k)}$ até que ela exceda a faixa de validade da aproximação linear do fluxo ao redor da órbita de referência $\mathbf{y}^{n+k}$. Então a última fase começa, onde a distância aumenta mais lentamente até que ela diminui novamente devido a dobras no espaço de estados (PARLITZ, 1998). Se a segunda fase for suficientemente longa, um segmento linear com inclinação λ aparece no gráfico $p(k)$ vs. k . Este valor (λ) é associado com o maior expoente de Lyapunov. Isto também permite uma verificação direta de divergência exponencial das trajetórias para distinguir caos determinístico de processos estocásticos, onde uma divergência não-exponencial ocorre (ECKMANN; RUELLE, 1985).

A Figura 10 apresenta um exemplo da aplicação do método de Sato a uma série temporal experimental caótica. A linha pontilhada é para uma série temporal não-determinística.

Figura 10: Aplicação do método de Sato, Sano e Sawada (1987) em série temporal caótica, o segmento linear com inclinação $\lambda = 0.16$ presente na linha contínua, corresponde ao maior expoente de Lyapunov. A linha pontilhada com barras de erro mostra a ausência de um segmento linear para séries não-determinísticas obtidas por SDT. (PARLITZ, 1998).

3.2.5 Análise de Recorrência

A análise de recorrência, introduzida por Eckmann, Kamphorst e Ruelle (1987) é um método gráfico utilizado para visualizar recorrências em um espaço de estados m -dimensional através de uma representação bidimensional. Quando a distância entre a passagem anterior e a atual de uma mesma trajetória é menor que um certo limite, significa que a trajetória recorreu à uma mesma região do espaço de estados. Tais recorrências são representadas em uma figura bidimensional onde pontos pretos marcam a recorrência. A Figura 11 apresenta o espaço de estados de Lorenz e o gráfico de recorrência obtido (MARWAN et al., 2007).

Se a série temporal é determinística, o gráfico de recorrência apresentará uma estrutura, composta por linhas ou segmentos de linhas diagonais. Por outro lado, se a série temporal é apenas ruído, o gráfico de recorrência não apresentará estrutura definida. As estruturas apresentadas em um gráfico de recorrência podem revelar informações importantes sobre o comportamento do sistema. A Figura 12 apresenta algumas estruturas

Figura 11: (a) Espaço de estados de Lorenz e (b) respectivo gráfico de recorrência. Um ponto da trajetória j que passa pela vizinhança da trajetória i (círculo cinza em (A)) é considerado um ponto de recorrência (ponto preto) (MARWAN, 2003).

tipicamente observadas em gráficos de recorrência e a Tabela 1 relaciona alguns dos padrões observados e seus significados.

Figura 12: (A) pontos isolados (ruído), (B) linhas contínuas paralelas (periodicidade), (C) apagando nos cantos (processo com tendência, não estacionário) e (D) Linhas diagonais descontínuas e pontos isolados (processo possivelmente caótico). Adaptado de Marwan (2003).

Os gráficos de recorrência podem, portanto ser usados para confirmar os resultados das técnicas apresentadas anteriormente, pois apresenta informações sobre estacionariedade, determinismo, periodicidade e transições. Vale ressaltar o potencial quantitativo resultante desta técnica, pois além de fornecer uma verificação direta de características fundamentais do sistema, é possível extrair informações sobre medidas de complexidade, através da análise de quantificação de recorrências (do inglês *recurrence quantification analysis* - *RQA*), baseada na densidade de pontos e nas linhas diagonais e verticais presentes nos gráficos de recorrência.

Entre essas medidas de complexidade, algumas possibilitam identificar bifurcações no sistema. No caso de uma RQA, a série temporal não precisa ser necessariamente estacio-

Tabela 1: Padrões típicos em gráficos de recorrência (adaptado de Marwan (2003))

	padrão	significado
1	Homogeneidade	O processo é estacionário
2	Apagando gradualmente nos cantos	Processo não estacionário, possui tendência
3	Faixas brancas	Processo não estacionário, transições ocorrem
4	Linhas diagonais contínuas	Movimento periódico, a distância entre as linhas é o período da oscilação. Se as distâncias entre as linhas são diferentes, o movimento pode ser quasi-periódico
5	Pontos isolados	Processo aleatório, ruído
6	Linhas diagonais curtas, acompanhada de pontos isolados	A evolução dos estados é similar em tempos diferentes, o processo é determinístico porém possivelmente caótico, pois a trajetória vizinha diverge após certo tempo

nária, pode-se por exemplo, variar um parâmetro continuamente em busca de bifurcações. Esta série temporal submetida a RQA resulta em um conjunto de medidas de complexidade variando no tempo, que mudam significativamente com transições e podem ser utilizadas para mapear os pontos de bifurcação do sistema (MARWAN et al., 2007).

3.3 Técnicas de Identificação

Os tipos mais comuns de não linearidades encontradas em sistemas dinâmicos são as associadas a rigidez (*hardening* e *softening*) e amortecimento, seguidas por efeitos de folga, fricção e histerese entre outras (WORDEN; TOMLINSON, 2001). Nos casos onde oscilações periódicas ocorrem, harmônicos das frequências naturais são gerados, de acordo com a ordem da não linearidade. Dessa forma, uma não linearidade simétrica, por exemplo, uma rigidez com dependência cúbica, gera harmônicos ímpares apenas. Uma não linearidade assimétrica, com termos quadráticos por exemplo, introduz harmônicos pares (WORDEN;

TOMLINSON, 2001; NAYFEH; BALACHANDRAM, 1995). A Figura 13 ilustra esta situação com a apresentação dos retratos de fase e dos espectros de potência de um sistema com não linearidade cúbica *hardening* simétrica e após a quebra da simetria.

Figura 13: Retratos de fase e espectros de potência para atrator periódico. (a) simétrico e (b) após quebra da simetria (NAYFEH; BALACHANDRAM, 1995).

A presença de sub-harmônicos ou super-harmônicos no espectro de potência do sinal traz informações importantes sobre simetria e pode indicar a ordem da não linearidade, fato que pode ser confirmado com a aplicação de espectros de ordem elevada (do inglês, *Higher Order Spectral analysis, HOS*), quando necessário, de forma a diferenciar frequências naturais do sistema de harmônicos gerados por interação não linear. O coeficiente do termo não linear pode ser obtido através de integração numérica no modelo, quando disponível, variando o termo de modo a obter a mesma amplitude obtida no experimento. A não linearidade devido ao efeito de folga pode gerar efeitos similares ao de uma não linearidade polinomial cúbica, inclusive com a geração de super-harmônicos ímpares, principalmente $\Omega_2 = 3\Omega_1$, devido a simetria semelhante. Este fato ocorre tanto para condições periódicas, com picos bem definidos no espectro de potências, quanto para condições caóticas, onde as bandas de maior intensidade ficam próximas aos harmônicos ímpares. No entanto, características do tipo de bifurcação provocada, apresentadas mais adiante, podem ser utilizadas para diferenciar as não linearidades.

3.3.1 Espectros de ordem mais alta

Técnicas de análise de sinais tradicionais são baseadas em medidas de segunda ordem, como o espectro de potências e função de autocorrelação. Essas medidas são muito utilizadas pois são relativamente fáceis de implementar e permitem uma interpretação direta da distribuição da energia entre frequências. Usando ordens mais elevadas, como terceira e quarta ordem (bispectro e trispectro) é possível acessar informações inacessíveis em medidas de segunda ordem. O bispectro (medida de terceira ordem) é sensível a acoplamentos quadráticos, o trispectro, a acoplamentos cúbicos e assim por diante, no entanto, não é viável obter estimativas de ordem maior que quatro (FACKRELL et al., 1994).

A base para detecção é que se duas ou mais frequências são acopladas por uma interação não linear, existe uma relação de fase entre elas, levando a um valor elevado do autobispectro ou autotrispectro (HAJJ; BERAN, 2008).

Figura 14: Segmentos para estimativa do polispectro (FACKRELL et al., 1994)

Para aplicação de *HOS*, o sinal medido $x(n) = 0, \dots, N-1$ é dividido em K segmentos, como na Figura 14. Cada segmento é então multiplicado por uma janela e então a transformada de Fourier discreta (DFT) de M pontos $X_i(k)$ é calculada. Sua DFT é então multiplicada por ela mesma de diferentes maneiras de modo a produzir o polispectro de segunda, terceira e quarta ordem para este segmento. Uma média é calculada sobre todos os segmentos K , resultando nos polispectros $\hat{P}(k)$, $\hat{B}(k, l)$ e $\hat{T}(k, l, m)$.

Define-se $\hat{P}(k)$, $\hat{B}(k, l)$ e $\hat{T}(k, l, m)$ como:

$$\hat{P}(k) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} X_i(k) X_i^*(k), \quad (3.7)$$

$$\hat{B}(k) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} X_i(k) X_i(l) X_i^*(k+l), \quad (3.8)$$

$$\hat{T}(k) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} X_i(k) X_i(l) X_i(m) X_i^*(k+l+m), \quad (3.9)$$

onde k, l e m são frequências discretas.

Deste modo, o bispectro pode ser visualizado em um gráfico de contorno no plano (k, l) e o trispectro, como isosuperfícies em um espaço tridimensional (k, l, m) . Da mesma forma que no espectro de frequências, tem-se relações de simetria tanto no plano (k, l) quanto no espaço (k, l, m) , como resultado, o polispectro pode ser calculado apenas para a região não redundante.

Para aplicação, utiliza-se a versão normalizada do polispectro, chamadas de bicoerência para o bispectro e tricoerência para o trispectro (FACKRELL et al., 1994). A tabela 2 mostra como cada tipo de não linearidade afeta o polispectro e qual a ferramenta de detecção.

Tabela 2: Interações não lineares e ferramentas para detecção

	interação não-linear	
	quadrática	cúbica
relação de fase	$\phi_{f_1+f_2} = \phi_{f_1} + \phi_{f_2}$	$\phi_{f_1+f_2+f_3} = \phi_{f_1} + \phi_{f_2} + \phi_{f_3}$
ferramenta	bicoerência	tricoerência

A utilização de espectros de ordem elevada pode ajudar nos casos em que não há muita informação do sistema estudado, pois pode diferenciar resultados estocásticos de determinísticos e determinar se diferentes frequências são ou não resultado de interações não lineares e que tipo de interação ocorre. Outra característica importante é que a presença de ruído não afeta o resultado. Nos casos em que as frequências naturais do sistema são conhecidas e um modelo matemático está disponível, o uso do espectro de potências pode ser suficiente para ajudar na identificação da não linearidade.

3.3.2 Classificação da bifurcação

A análise do tipo de bifurcação que ocorre na velocidade crítica não linear pode ser estudada diretamente através de dados experimentais, saídas de modelo matemático ou determinada analiticamente, quando possível através do método das formas normais (NAYFEH, 1993).

De uma forma geral, se o sistema apresenta mais de uma solução logo depois da velocidade de *flutter* não linear, a bifurcação que ocorre é do tipo subcrítica, nesses casos, normalmente a própria velocidade de *flutter* é dependente da condição inicial. Semelhantemente, se o sistema apresenta apenas uma solução, a bifurcação é supercrítica.

O comportamento do sistema pode ser facilmente determinado através da análise de gráficos de bifurcação com variação do parâmetro, no caso velocidade do escoamento, nos sentidos crescente e decrescente. Se existir diferenças de caminho (histerese) entre as amplitudes crescente e decrescente, o sistema apresenta mais de uma solução e a bifurcação é portanto, subcrítica. A Figura 15 ilustra esta situação.

Figura 15: Comportamento aeroelástico supercrítico (a) e subcrítico (b).

O método das formas normais (NAYFEH, 1993), apesar de bem mais trabalhoso, pode ser utilizado para confirmar analiticamente a conclusão sobre o tipo de bifurcação. A forma normal da bifurcação Hopf é determinada através da adição de um termo de perturbação na velocidade de *flutter*. Na forma polar e separada em partes real e imaginária, obtêm-se a forma normal da bifurcação Hopf:

$$a' = \beta_r a + \frac{1}{4} N_{er} a^3 \quad (3.10)$$

$$\gamma' = \beta_i + \frac{1}{4} N_{ei} a^2 \quad (3.11)$$

onde a é a amplitude e γ é o ângulo de deslocamento da solução periódica.

A Equação (3.10) possui três pontos de equilíbrio, sendo eles:

$$a = \begin{cases} 0 \\ \pm \sqrt{\frac{-4\beta_r}{N_{er}}} \end{cases} \quad (3.12)$$

sendo $a = 0$ corresponde ao ponto fixo (0,0) e as outras duas são as soluções não triviais, N_e é um parâmetro que expressa os efeitos da não linearidade no sistema.

A bifurcação é estável (supercrítica) para $\beta_r > 0$ e $N_{er} < 0$ e instável (subcrítica) para $\beta_r < 0$ e $N_{er} > 0$, sendo esses parâmetros, dependentes dos parâmetros do sistema. Detalhes sobre a determinação da forma normal da bifurcação em sistemas aeroelásticos com não linearidades concentradas pode ser encontrada em Abdelkefi et al. (2011).

A não-linearidade nesse caso, fica limitada a aproximações polinomiais, que é válida em algumas condições para simular uma descontinuidade do tipo folga. No entanto, em outras condições essa aproximação não é válida.

3.3.3 BID - Bifurcação Induzida por Descontinuidade

Trabalhos como os de Budd (1996) entre outros e mais recentemente de Bernardo et al. (2008), descrevem bifurcações características de sistemas dinâmicos com descontinuidade. Esta característica pode ser usada na detecção e identificação de não linearidades descontínuas em sistemas aeroelásticos.

A bifurcação do tipo *grazing* é uma das BIDs mais comuns. Ela ocorre quando uma trajetória periódica torna-se tangente à fronteira da descontinuidade. Neste caso, com

a variação de parâmetro, mudanças bruscas de periodicidade para caos e a presença de janelas de periodicidade alternada com caos ocorrem, diferenciando-se completamente das conhecidas rotas para o caos em sistemas contínuos.

A Figura 16 ilustra uma bifurcação *grazing*, com a variação do parâmetro μ a trajetória intercepta a fronteira da descontinuidade Σ , ponto em que ocorre a bifurcação.

Figura 16: Uma órbita periódica passando por uma bifurcação *grazing*: (a) para $\mu - \mu^* < 0$ antes/depois da bifurcação, (b) para $\mu - \mu^* = 0$ na bifurcação e (c) para $\mu - \mu^* > 0$ depois/antes da bifurcação (BERNARDO et al., 2008)

Características da bifurcação *grazing* já foram observadas em sistemas aeroelásticos com folga, como nos trabalhos de Conner et al. (1996) e Trickey, Virgin e Dowell (2002).

De maneira geral, a Figura 17 ilustra a metodologia adotada na classificação e identificação da não linearidade à partir de séries temporais.

Figura 17: Metodologia para classificação e identificação

4 *Descrição dos dispositivos experimentais*

4.1 Introdução

Durante este trabalho de pesquisa foram utilizados dados de cinco experimentos, sendo os dois primeiros realizados nos anos de 2002 e 2004, dos quais as bases de dados foram utilizadas para testes iniciais sobre a utilização das técnicas de análise de séries temporais. Nesses casos, uma asa flexível e finita foi testada em túnel de vento a altos ângulos de ataque.

Os três experimentos subsequentes foram realizados durante o Doutorado, todos simulando seções típicas com dois e três graus de liberdade, com capacidade de introdução de não linearidades concentradas nas molas de torção e superfície de comando.

Neste Capítulo, os dispositivos experimentais serão descritos, bem como a estrutura utilizada nos laboratórios, como túneis de vento e equipamentos para aquisição dos sinais.

4.2 Dispositivo utilizado para os testes iniciais

Para testar a capacidade das ferramentas de análise de séries temporais em dados de experimento, elas foram aplicadas em resultados de um ensaio feito pelo grupo de pesquisa do Laboratório de Aeroelasticidade da EESC-USP em 2002. O experimento consiste de uma asa aeroelástica em túnel de vento, montada em uma plataforma móvel comandada por um motor elétrico que permitia variações no ângulo de ataque. Extensômetros distribuídos pela estrutura da asa foram utilizados para coletar os sinais da estrutura. Maiores

detalhes sobre o aparato experimental podem ser encontrados em Marques, Vasconcellos e Simoni (2009). A Figura 18 ilustra a montagem experimental.

Figura 18: Experimento realizado em 2002: asa finita flexível a altos ângulos de ataque

4.3 Dispositivo base para os testes com não linearidades concentradas

Os modelos experimentais representam uma seção típica, sendo baseados no modelo testado por Conner et al. (1996). O dispositivo consiste de uma asa rígida, montada verticalmente ao longo de sua envergadura, contendo um eixo de alumínio localizado a $1/4$ da corda. Em suas extremidades o eixo principal é conectado, através de rolamentos à placas que permitem o deslocamento angular de torção, com rigidez introduzida através de arames de aço-mola. Esta placa contém peças para a fixação de vigas de flexão, que por sua vez são engastadas em um suporte rígido fixo. A asa pode ser simples, representando o caso da seção típica com dois graus de liberdade (2GDL) ou apresentar superfície de comando, representando o caso de seção típica com 3GDL, com a folga podendo ser introduzida na torção ou na superfície de comando através de batentes ajustáveis.

Foram utilizados três modelos diferentes, o primeiro, com dois graus de liberdade já existente no Laboratório de Aeroelasticidade da EESC para testes de *flutter* (DE MARQUI

JR.; SILVA; VIEIRA, 2008), foi adaptado para a introdução de folga na torção e testado em túnel de seção aberta. O segundo foi construído durante estágio no exterior, também com dois graus de liberdade, neste caso, a não-linearidade introduzida foi do tipo *hardening* na torção e os testes foram realizados em túnel de seção fechada. Finalmente, um modelo com três graus de liberdade foi construído, com folga na superfície de comando, os testes foram realizados no túnel de seção aberta do Laboratório de Aeroelasticidade da EESC.

A suspensão principal é semelhante nos três experimentos e consiste de um par placas centrais suportadas por vigas em paralelo que introduzem a rigidez de flexão, a distância entre as vigas é de $182mm$ e as dimensões das vigas são ajustadas para cada experimento. No centro de cada placa, o eixo elástico é suportado por rolamentos de baixo atrito. As placas possuem suportes para o fio-mola que atravessa o eixo e introduz a rigidez de torção. A Figura 19 exibe detalhes da suspensão utilizada no experimento mais recente.

Em todos os casos, os parâmetros do sistema foram medidos direta ou indiretamente para a introdução no modelo matemático. As frequências naturais foram determinadas nos experimentos através de análise modal do sistema (frequências naturais acopladas) e fixando-se graus de liberdade, de modo a obter a frequência natural desacoplada para cada GDL. Os fatores de amortecimento foram determinados para cada grau de liberdade, através de várias medidas tratadas estatisticamente do decaimento logarítmico, bem como as rigidezes das molas de torção, flexão e da superfície de comando. Os momentos de inércia foram obtidos de forma indireta.

Os parâmetros experimentais referentes a cada experimento serão exibidos no Capítulo 5.

4.4 Dispositivos com dois graus de liberdade

Os dois experimentos iniciais foram realizados com asas sem superfície de comando, apresentado apenas os movimentos de flexão e torção. No primeiro, realizado em 2009, a folga foi introduzida na mola de torção e a primeira tentativa de caracterizar a não lineari-

Figura 19: Esquema com visão geral e detalhes da suspensão, vigas de flexão, fio-mola e suportes para rigidez de torção e mecanismo de ajuste de folga na superfície móvel.

dade foi realizada. Neste caso, observou-se que a folga introduz efeitos semelhantes a uma não linearidade polinomial *hardening* em algumas condições. No segundo experimento realizado durante estágio no exterior, uma não linearidade tipo *hardening* foi introduzida na torção de forma a comprovar os efeitos já observados no modelo que diferenciavam as duas não linearidades.

4.4.1 Experimento com 2GDL - Folga

No primeiro experimento, realizado em 2009 no Laboratório de aeroelasticidade da EESC-USP, um dispositivo constituído de uma asa de Isopor[®] reforçada com madeira no perfil NACA0012, com corda de 250mm e 600mm de envergadura, sustentada por uma suspensão baseada no modelo experimental de Conner et al. (1996) foi adaptado para

apresentar folga no movimento de torção. O fio-mola era engastado ao eixo elástico e simplesmente apoiado na outra extremidade. Para a introdução do folga, o suporte da extremidade simplesmente apoiada foi substituído por um batente ajustável. A Figura 20 apresenta foto do dispositivo montado no túnel de vento e a Figura 21 ilustra o mecanismo do dispositivo de introdução de folga.

Figura 20: Montagem experimental com folga na torção (EESC/USP- 2009)

Figura 21: Esquema do mecanismo de folga

Os dados de torção foram colhidos no eixo através de um encoder óptico de alta resolução USDigital[®] modelo E3 conectado a uma placa controladora DSpace[®], ligada a um computador com interface Matlab/Simulink[®].

O túnel de vento utilizado nos experimentos realizados no Brasil, pertencente ao Laboratório de Aeroelasticidade da EESC/USP é do tipo soprador, com abertura de $500mm \times 500mm$ e velocidade máxima em torno de $15m/s$. A envergadura da asa, maior que a saída do túnel e o posicionamento do dispositivo experimental bem próximo ao bocal de saída minimizam os efeitos indesejáveis da expansão do fluxo de ar.

Dados foram colhidos com variação da velocidade do escoamento e com variação do tamanho da folga.

4.4.2 Experimento com 2GDL - *Hardening*

O segundo experimento foi realizado no laboratório de dinâmica dos fluidos do *Engineering Sciences and Mechanics Department* (ESM), na *Virginia Polytechnic Institute and State University* (Virginia Tech, USA). Neste experimento, uma asa de alumínio maciço, com perfil simétrico foi utilizada. Com corda de $65mm$ e envergadura de $600mm$, foi montada em uma suspensão semelhante a do experimento realizado anteriormente no Brasil. O túnel de vento do ESM é de circuito aberto, seção fechada com $600mm \times 600mm$ de área e velocidade máxima em torno de $30m/s$. O fato do túnel de vento ser de seção fechada dificultou a montagem, pois a suspensão precisava ficar fora do fluxo de ar. Este fato foi contornado com a abertura de canaletas na parte superior e inferior do túnel, para permitir a movimentação do eixo. Duas caixas seladas precisaram ser montadas cobrindo a suspensão no topo e na base da seção de testes para impedir a aspiração de ar pelas canaletas, que poderia interferir no fluxo do túnel.

Neste dispositivo, o mecanismo de folga foi fechado durante os testes utilizados neste trabalho. Como resultado, um torque não linear do tipo *hardening* foi detectado na torção, levando a oscilações em ciclo limite pós *flutter*. Fotos do dispositivo podem ser observadas nas Figuras 22 e 23.

Os dados foram coletados no eixo através de um encoder óptico de alta resolução USDigital® modelo E3 e um encoder linear na flexão, conectados a um sistema de aquisição NIDAQ®, ligado a um computador com interface Labview®.

Figura 22: Mecanismo no túnel (ESM, Virginia Tech - 2011)

Figura 23: Mecanismo para mola de torção

4.5 Dispositivo com três graus de liberdade - Folga

O dispositivo experimental com três graus de liberdade, apesar de baseado nos experimentos anteriores, foi totalmente reprojeto. Um novo suporte e uma nova suspensão rolamentos de baixo atrito foi construída. A asa foi construída em Isopor[®] cortado por computador (CNC) no perfil NACA0012 envolta por uma camada de tecido de fibra de vidro e resina epóxi, garantindo extrema rigidez, sendo a superfície de comando conectada ao restante do perfil através de micro rolamentos. Um arame de aço-mola liga o eixo da superfície de comando restante do perfil, onde um mecanismo de batente ajustável permite a introdução da folga no sistema.

Todo mecanismo foi projetado prevendo futuras instalações em túneis de vento maiores, desta forma, o suporte principal é ajustável em altura e nivelamento. A suspensão também permite ajustes na rigidez de flexão, torção e de superfície de comando, além de ajustes de centro de gravidade e momento de inércia da asa através de contrapesos intercambiáveis. A asa também é desacoplável do restante da suspensão, permitindo inclusive a substituição da asa por uma de outro tipo para estudos futuros.

Figura 24: (a) Esquema do aparato experimental (b) Detalhe da asa

A Figura 24 exhibe um esquema do aparato experimental e detalhes da asa. As Figu-

ras 25 e 26 apresentam fotos da montagem final do dispositivo e detalhes dos mecanismos. Na Figura 25(a) está o novo suporte, projetado com ajustes de altura e nível, na Figura 25(b) observa-se detalhes da suspensão, com a placa central, o perfil e rolamentos.

A Figura 26(a) apresenta a montagem final do dispositivo no túnel. Detalhe do mecanismo de folga pode ser observado na Figura 26(b).

(a)

(b)

Figura 25: (a) Suporte principal (EESC/USP-2012) (b) detalhe da suspensão

(a)

(b)

Figura 26: (a) Montagem final (EESC/USP-2012) (b) Detalhe do mecanismo de ajuste de folga

Os sinais são coletados nos três graus de liberdade utilizando-se encoders ópticos USDigital[®], sendo dois circulares para os movimentos de torção e superfície de comando (Figuras 27 (a) e (b)) e um linear para a flexão (Figura 28). Uma placa controladora DSpace[®] em conjunto com Simulink[®] é utilizada para adquirir os sinais, tratar e armazenar

os dados para posterior análise.

(a)

(b)

Figura 27: (a) Encoder para torção (EESC/USP-2012) (b) Encoder para a superfície de comando

Figura 28: Encoder linear para flexão

5 *Resultados*

5.1 Introdução

Neste capítulo, os resultados obtidos com a utilização das técnicas em dados de modelo matemático e dados experimentais serão apresentados. Antes da realização dos experimentos, o modelo matemático linear foi validado com dados experimentais disponíveis na literatura. Posteriormente utilizou-se dos resultados não lineares do modelo para aplicar e testar as técnicas de análise de séries temporais em dados simulados.

Para testar a eficácia das técnicas em dados experimentais, foram utilizados resultados do experimento descrito na Seção 4.2, onde uma asa flexível finita oscilava a altos ângulos de ataque, não havia um modelo matemático e nenhuma informação sobre as não linearidades estavam disponíveis. Os resultados mostraram que foi possível caracterizar os tipos de comportamento e bifurcações utilizando-se somente das séries temporais coletadas.

As técnicas de análise de séries temporais foram então aplicadas a dados experimentais com efeito de folga no eixo relativo ao movimento de torção, em um sistema com dois graus de liberdade descrito na Seção 4.4.1. Posteriormente, os mesmos dados foram utilizados para a identificação da não linearidade, mostrando que em condições específicas, a folga pode ser modelado como uma não linearidade cúbica que gera um comportamento subcrítico.

Um novo experimento, descrito na Seção 4.4.2, com uma não linearidade tipo *hardening* na torção foi construído e testado durante estágio no exterior, para detectar diferenças entre este tipo de não linearidade e a folga. Neste caso, técnicas de análise de séries

temporais e identificação foram utilizadas em conjunto e um modelo identificado para a não linearidade foi gerado, mostrando que a mesma pode ser identificada como sendo de ordem três, e comportamento supercrítico.

O modelo matemático com três graus de liberdade foi novamente empregado para validar a conveniente aproximação da folga por uma combinação de funções tangente hiperbólica, os resultados foram comparados com dados experimentais disponíveis na literatura, mostrando que a aproximação é válida, permitindo ao modelo detectar os comportamentos e transições apresentados.

Finalmente, o modelo experimental com três graus de liberdade e folga na superfície de comando, descrito na Seção 4.5 foi utilizado. Após os ensaios os dados experimentais foram analisados e a aplicação de análise de séries temporais e identificação permitiu detectar a não linearidade e gerar um modelo identificado para a folga baseado na função tangente hiperbólica.

5.2 Verificação do modelo matemático linear

O modelo matemático apresentado no Capítulo 2 foi validado com os dados experimentais de Conner et al. (1996) e os resultados, tanto para o caso linear quanto para o não linear foram muito satisfatórios. A Figura 29 apresenta os resultados da análise linear com variação da velocidade do escoamento.

Na Figura 29 (a) observa-se a variação da parte real dos autovalores com o aumento da velocidade do escoamento, nela é possível observar que o movimento de flexão é o responsável pela instabilidade, quando a parte real de seu autovalor fica positiva a $24.8m/s$. A Figura 29 (b) mostra a tendência de acoplamento entre as frequências (parte imaginária dos autovalores) de flexão e torção próximo à velocidade de *flutter*. Na Figura 30, a evolução dos autovalores no plano complexo com o aumento da velocidade do escoamento é apresentada, como uma forma alternativa de observar o comportamento de estabilidade dos modos do sistema. A Tabela 3 apresenta os valores das frequências naturais acopla-

das e a velocidade e frequência de *flutter* comparados com os resultados de Conner et al. (1996).

(a) Variação da parte real dos autovalores

(b) Variação das frequências acopladas

Figura 29: Previsão de flutter do modelo linear pela variação das partes real e imaginária dos autovalores dos três graus de liberdade: a parte real do autovalor da flexão fica positiva quando a velocidade do escoamento atinge 24.8 m/s .

Tabela 3: Comparação entre os dados do modelo e os resultados de Conner et al. (1996)

parâmetro	Modelo	Numérico (CONNER et al., 1996)	Experimento (CONNER et al., 1996)
$\omega_{wc} \text{ (Hz)}$	4.38	4.45	4.37
$\omega_{\alpha c} \text{ (Hz)}$	9.15	9.218	9.125
$\omega_{\beta c} \text{ (Hz)}$	18.60	19.44	18.625
$U_f \text{ (m/s)}$	24.8	23.9	20.6
$\omega_f \text{ (Hz)}$	6.16	6.112	5.47

Os resultados mostram que o modelo matemático empregado neste trabalho é válido

Figura 30: Evolução dos autovalores com o aumento da velocidade do escoamento

para as condições experimentais disponíveis nos laboratórios utilizados, visto que valores próximos para as frequências acopladas, frequência e velocidade de *flutter* foram obtidos. A validação para os casos não lineares será apresentada nas seções seguintes, para cada condição testada.

5.3 Testes iniciais das técnicas de análise

5.3.1 Aplicação das ferramentas de análise de séries temporais ao modelo

O modelo matemático descrito no Capítulo 2 fornece como saída a posição w , o ângulo α do aerofólio, o ângulo β da superfície de comando e suas respectivas velocidades e acelerações na forma de séries temporais. Os resultados apresentados nesta seção foram publicados em Marques e Vasconcellos (2009b).

A análise feita a seguir considera os parâmetros do modelo listados na Tabela 4

Uma não linearidade do tipo folga foi considerada na mola da articulação da superfície de comando. Nesta análise a folga foi variada de $\pm 0,1^\circ$ a $\pm 1^\circ$, para uma velocidade do escoamento fixa em $18m/s$.

Para cada condição listada na Tabela 5, o espaço de estados real do modelo foi cons-

Tabela 4: Parâmetros usados durante as simulações

Parâmetro	valor	Parâmetro	valor
$\omega_w(rad/s)$	35	x_α	0,2
$\omega_\alpha(rad/s)$	42	x_β	0,0125
$\omega_\beta(rad/s)$	200	r_α	0,5
a	-0,4	r_β	0,079
c	0,6	μ	40
$b(m)$	0,15	$\rho(kg/m^3)$	1,225

Tabela 5: Casos considerados na análise

velocidade fixa em 18m/s valores da folga (δ) em graus
$\pm 0,10$
$\pm 0,25$
$\pm 0,50$
$\pm 0,75$
$\pm 1,00$

truído, tomando diretamente as saídas $\beta(t)$, $\dot{\beta}(t)$ e $\ddot{\beta}(t)$. A série temporal $\beta(t)$ é utilizada para a análise de séries temporais, desta forma, pode-se comparar os resultados obtidos na reconstrução do espaço de estados a partir de $\beta(t)$ com os resultados diretamente obtidos do modelo. A Figura 31 apresenta uma saída ($\beta(t)$) do modelo matemático.

Inicialmente, todas as séries temporais obtidas passaram pelos testes de estacionariedade, todas foram consideradas estacionárias, com um nível de significância de 0,05. Para justificar o emprego de técnicas de análise não linear, o SDT foi realizado. Utilizando o algoritmo II de Theiler et al. (1992), 99 séries substitutas foram geradas e a soma de correlação foi computada para cada uma, utilizando o algoritmo proposto por Grassberger e Procaccia (1983). A soma de correlação estima o número relativo de pontos vizinhos mais próximos que r (PARLITZ, 1998), e é dada por:

$$C_d(r) = \frac{2}{(N-c)(N-1-c)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-c} H(r - \|\mathbf{y}^i - \mathbf{y}^j\|) \quad , \quad (5.1)$$

onde N é o número total de pontos, H é a função degrau com $H(x) = 1$ para $x > 1$ e nula para $x < 1$, c é uma constante usada para omitir pontos que são vizinhos próximos

Figura 31: Série temporal $\beta(t)$ obtida do modelo matemático, $U = 18m/s$, $\delta = \pm 0,5^\circ$

no tempo, $\| \mathbf{y}^i - \mathbf{y}^j \|$ é a distância mútua dos pontos em questão e d é a dimensão de imersão.

A Figura 32 apresenta a soma de correlação computada para as 99 substitutas, na distribuição com a linha média. A linha contínua representa a soma de correlação da série temporal obtida do modelo, claramente soma de correlação da série temporal está fora da distribuição das substitutas. Este resultado evidencia que o sinal pode ser representativo de um processo não linear determinístico e qualifica a utilização de técnicas de análise de séries temporais.

O espaço de estados do sistema é então reconstruído por método da defasagem, a partir da série temporal $\beta(t)$ de cada condição. O tempo de defasagem τ é determinado pelo método da informação mútua (FRASER; SWINNEY, 1986) e a dimensão de imersão d pelo método de Cao (CAO, 1997), em todos os casos a dimensão de imersão encontrada foi 3. Como exemplo, a Figura 33 apresenta em detalhes o espaço de estados reconstruído para a condição $U = 18m/s$, $\delta = \pm 0,5^\circ$ e a comparação com o espaço de estados obtido

(a) $U = 18m/s$, $\delta = \pm 0,1^\circ$ (b) $U = 18m/s$, $\delta = \pm 0,25^\circ$ (c) $U = 18m/s$, $\delta = \pm 0,5^\circ$ (d) $U = 18m/s$, $\delta = \pm 0,75^\circ$ (e) $U = 18m/s$, $\delta = \pm 1,0^\circ$

Figura 32: Soma de correlação da série temporal $\beta(t)$ e de 99 substitutas (linha média com distribuição), com $U = 18m/s$ e δ variando de $\pm 0,1^\circ$ a $\pm 1,0^\circ$

diretamente do modelo

Como pode ser observado, eles são semelhantes e o atrator reconstruído deve preservar

Figura 33: Espaço de estados real e reconstruído, $U = 18m/s$, $\delta = \pm 0,5^\circ$

os invariantes do sistema. A Figura 34 apresenta uma projeção espaço de estados real, que permite uma análise visual da saída do modelo matemático, nela é possível notar a presença das extremidades da folga, exatamente em $\delta = \pm 0,5^\circ$, a superfície de comando fica alternando entre os extremos da folga em um padrão complexo, possivelmente caótico.

Figura 34: Projeção do espaço de estados real

Seguindo com a análise, um gráfico da evolução do espaço de estados com o aumento da folga na superfície de comando (casos da Tabela 5) é construído e exibido na Figura 35. Além do aumento na amplitude do movimento, alterações leves nas projeções são observadas.

Para uma melhor observação dessas transições, são feitas seções de Poincaré de cada espaço de estados reconstruído e elas são dispostas em um gráfico de evolução, exposto na Figura 36. Como pode ser observado, alterações ocorrem nas seções de Poincaré, principalmente entre os valores de folga $\delta = \pm 0,5^\circ$ e $\delta = \pm 0,75^\circ$, onde um aumento da regularidade do sistema parece ocorrer, no entanto o sistema permanece complexo. Alternativamente, um gráfico semelhante a um diagrama de bifurcação mostrado na Figura 37 pode ser construído projetando as seções de Poincaré em um dos planos, facilitando a visualização das transições.

O passo final na análise das séries temporais é o cálculo dos maiores expoentes de Lyapunov para a confirmação do comportamento caótico. Os expoentes de Lyapunov são calculados nos atratores reais e nos reconstruídos, para comparação, nos casos listados na tabela 5, utilizando a técnica proposta por Sato, Sano e Sawada (1987). A Figura 38 apresenta o procedimento para um dos casos e a Tabela 6 sumariza os resultados.

Tabela 6: Expoentes de Lyapunov calculados pelo método de Sato, Sano e Sawada (1987)

Velocidade do escoamento fixa @ $18m/s$		
folga (δ), em graus	Expoente de Lyapunov (Reconstruído)	Expoente de Lyapunov(real)
$\pm 0,10$	0,065	0,068
$\pm 0,25$	0,053	0,046
$\pm 0,50$	0,063	0,063
$\pm 0,75$	0,063	0,059
$\pm 1,00$	0,053	0,050

Em todos os casos o expoente de Lyapunov é positivo, indicando que o comportamento da superfície de comando é caótico. Além disso, os valores muito próximos obtidos dos espaços de estados reais e reconstruídos mostram o potencial das técnicas propostas na análise de dados experimentais, quando um modelo matemático não é conhecido.

A análise através de gráficos de recorrência (MARWAN et al., 2007), além de fornecer

Figura 35: Evolução do espaço de estados com o aumento da folga na superfície de comando

Figura 36: Evolução das seções de Poincaré com o aumento da folga na superfície de comando

Figura 37: Projeção das seções de Poincaré com o aumento da folga na superfície de comando

Figura 38: Determinação do maior expoente de Lyapunov pelo método de Sato, Sano e Sawada (1987)
 $U = 18m/s$ e $\delta = \pm 0,5^\circ$

uma verificação direta de características fundamentais do sistema permite confirmar os resultados obtidos. Na Figura 39, o gráfico de recorrência de uma série temporal obtida do modelo matemático, para $U = 18m/s$ e uma folga de $0,5^\circ$ na superfície de comando confirma estacionaridade, determinismo e indica o tipo de movimento apresentado.

A presença de linhas diagonais descontínuas ao lado de pontos isolados é característica

Figura 39: Gráfico de recorrência para dados do modelo matemático ($\beta(t)$), $U = 18m/s$ e folga de $0,5^\circ$

do comportamento caótico, o que confirma os resultados anteriores obtidos pelos expoentes de Lyapunov.

5.3.2 Aplicação das ferramentas de análise de séries temporais em dados aeroelásticos experimentais

Durante o experimento descrito na Seção 4.2, movimentos oscilatórios foram introduzidos na plataforma móvel a alto ângulo de ataque, provocando a separação do escoamento, induzindo respostas aeroelásticas complexas que forneceram uma base de dados adequada para a análise não linear.

Tabela 7: Casos considerados na análise experimental

$\omega(\frac{rad}{s})$	$U(\frac{m}{s})$	k
3	13.60	0.0641
8	13.60	0.1709
10	13.60	0.2136

Os casos considerados estão na Tabela 7. Este trabalho analisa a evolução do espaço de estados reconstruído com a variação da frequência reduzida $k = \frac{\omega c}{U}$, onde ω é a frequência de oscilação da plataforma giratória, c é a corda do aerofólio, e U é a velocidade do escoamento.

Figura 40: Série temporal da resposta aeroelástica, $U = 13.60 \frac{m}{s}$ e $\omega = 8 \frac{rad}{s}$

Cada série temporal é filtrada por SVD e testada para estacionaridade antes de qualquer análise. A Figura 40 apresenta a resposta aeroelástica para o caso $\omega = 8 \frac{rad}{s}$ e $U = 13.60 \frac{m}{s}$.

A Figura 41 apresenta a soma de correlação para as 99 substitutas, na distribuição com a linha média. A linha contínua representa a soma de correlação da série temporal experimental, claramente, a soma de correlação da série temporal está fora da distribuição das substitutas. Este resultado evidencia que o sinal pode ser representativo de um processo não linear determinístico e qualifica a utilização de técnicas de análise de séries temporais.

Figura 41: Soma de correlação para os dados experimentais (linha) e para 99 substitutas (linha média com distribuição)

O espaço de estados é então reconstruído por SVD. Como um exemplo, a Figura 42 apresenta o espectro singular para um caso, fica claro a presença de 3 valores singulares acima do platô de ruído, indicando dimensão de imersão 3, encontrada para todos os casos. A Figura 43 apresenta as projeções nos três planos ortogonais formados pelos vetores singulares ($\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$) e a visão tridimensional. Os espaços de estados reconstruídos

apresentam uma forma complexa, a característica espessa das trajetórias e presença de mais de um centro de rotação são indicativos de comportamento caótico (YALCINKAYA; LAI, 1997).

Figura 42: Espectro singular para o caso $k = 0.2136$, $U = 13.60m/s$ e $\omega = 10rad/s$

Figura 43: Espaço de estados reconstruído para o caso $k = 0.2136$, $U = 13.60m/s$ e $\omega = 10rad/s$, projeções nos 3 planos ortogonais e visão 3D

A Figura 44 apresenta a evolução dos espaços de estados reconstruídos com a variação da frequência reduzida, revelando que ocorrem mudanças significativas na dinâmica do

sistema.

Figura 44: Evolução do espaço de estados reconstruído com variação da frequência reduzida:
 $U = 13.60 \frac{m}{s}$, $k_1 = 0.0641$, $k_2 = 0.1709$ e $k_3 = 0.2136$

Os expoentes de Lyapunov são computados para as três condições da Tabela 7, pela técnica de Sato, Sano e Sawada (1987). Em todos os casos foram encontrados expoentes de Lyapunov positivos, indicando comportamento caótico. Os resultados estão na Tabela 8.

Tabela 8: Expoentes de Lyapunov para todos os casos

Condição	$k = 0.0640$	$k = 0.1709$	$k = 0.2136$
Expoente de Lyapunov	0.44	0.41	0.36

Figura 45: Expoentes de Lyapunov calculados pelo método de Sato, Sano e Sawada (1987) :
 $U = 13.60 \frac{m}{s}$, $k_1 = 0.0641$, $k_2 = 0.1709$ e $k_3 = 0.2136$

Uma outra análise também foi feita em dados de um experimento semelhante ao da Seção 4.2, realizado em 2004 no Laboratório de Aeroelasticidade da EESC-USP. Neste caso, uma base de dados mais refinada permitiu a utilização de seções de Poincaré e diagramas para a análise de bifurcações. A análise inicial seguiu o padrão da anterior, ou seja, as séries temporais foram filtradas por SVD, submetidas a testes de estacionaridade e SDT, os espaços de estados foram reconstruídos por SVD e a partir deles foram extraídas as seções de Poincaré e computados os expoentes de Lyapunov. Os resultados foram também publicados em Marques e Vasconcellos (2009a).

As Figuras 46 e 47 ilustram a evolução do sistema com variação da velocidade do escoamento, através das seções de Poincaré e respectivas projeções para formar um diagrama de bifurcação.

Figura 46: Evolução das seções de Poincaré com as velocidades do escoamento: 8.28, 9.97, 11.64, 13.30, e $14.97 \frac{m}{s}$, respectivamente, oscilação da plataforma giratória fixa em $\omega = 10.0 \frac{rad}{s}$.

Os diagramas revelam uma evolução complexa do sistema, com a ocorrência de transições, possivelmente relacionadas a ressonâncias internas. Neste caso, os expoentes de Lyapunov também foram computados, sendo todos positivos.

Figura 47: Projeção das seções de Poincaré com as velocidades do escoamento: 8.28, 9.97, 11.64, 13.30, e $14.97 \frac{m}{s}$, respectivamente, oscilação da plataforma giratória fixa em $\omega = 10.0 \frac{rad}{s}$.

5.4 Efeito de folga na torção para modelo com dois graus de liberdade

O experimento descrito na Seção 4.4.1, foi realizado no Brasil em 2009 na primeira tentativa de identificar a não linearidade folga. Uma asa com dois graus de liberdade foi testada em túnel de vento com folga na mola de torção, os parâmetros concentrados de seção típica são apresentados na Tabela 9, os resultados também foram publicados em Vasconcellos, Marques e Hajj (2010).

Tabela 9: Parâmetros concentrados da asa aeroelástica experimental

	envergadura (m)	0.5
b	semi-corda (m)	0.125
a	posição do eixo elástico	-0.5
ρ_p	densidade do ar (kg/m^3)	1.1
m_w	massa da asa (kg)	1.314
m_T	massa da asa e suportes (kg)	4.46
I_α	momento de inércia no eixo elástico (kgm^2)	0.004836
c_α	coeficiente de amortecimento da torção (kgm^2/s)	0.0184
c_w	coeficiente de amortecimento da flexão (kg/s)	2.6
$k_{\alpha 0}$	rigidez de torção (Nm)	1.4228
k_w	rigidez de flexão (N/m)	4200
x_α	distância adimensional entre o c.g. e o eixo elástico	0.1776

A validação linear do modelo matemático com o experimento (mecanismo de folga

fechado) mostra resultados satisfatórios para as frequências acopladas de flexão, torção e frequência de *flutter*, além de uma boa previsão da velocidade de *flutter*. A Figura 48 apresenta a análise de autovalores e a Tabela 10 sumariza os resultados.

Figura 48: Variação da parte real dos autovalores (a) (w : linha tracejada e α : linha sólida) e da parte imaginária (b) com a velocidade do escoamento. A parte real do autovalor do modo de flexão fica positiva, indicando *flutter* a $U = 8.42m/s$.

Tabela 10: Comparativo entre resultados teórico e experimental para o caso linear

	Teórico	Experimental
Frequência natural acoplada de torção (Hz) a $U = 0m/s$	2.69	2.80
Frequência natural acoplada de flexão (Hz) a $U = 0m/s$	5.02	5.10
Frequência de <i>flutter</i> (Hz)	4.73	4.98
$U_f(m/s)$	8.42	$8.35 < U_f < 8.43$

Durante o experimento com o mecanismo de folga aberto a asa recebia uma condição inicial e o sinal de torção era coletado para diferentes velocidades do escoamento. O sistema apresentava respostas amortecidas para velocidades até aproximadamente $8m/s$, dependendo da condição inicial. Após esta fase, uma pequena faixa de movimento auto-sustentado entre $8m/s$ e $10m/s$ e movimento divergente acima de $U = 10m/s$.

Os casos de oscilação autosustentada, captados no movimento de torção por um encoder óptico foram analisados através de técnicas de análise de séries temporais após testados para estacionaridade e determinismo por SDT. Foram realizadas medidas com variação da velocidade do escoamento para três tamanhos de folga, medidas diretamente na distância entre os batentes. As séries temporais foram captadas por um curto período de tempo e o sistema tinha o movimento cessado após cada medida devido a possibilidade de danos ao dispositivo, visto que a amplitude de oscilação era alta.

O espaço de estados de cada condição foi reconstruído por SVD e os resultados da evolução dos espaços de estados (Figura 49) revelaram oscilações periódicas em todos os casos, sem transições significativas com o aumento da velocidade. Por esta razão, apenas alguns casos foram selecionados para análise. A análise dos espectros de potência (Figura 50) revelou a presença da frequência principal ($\approx 5.8Hz$), do terceiro superharmônico ($\approx 17.4Hz$) e com menor intensidade, do segundo superharmônico ($\approx 11.6Hz$).

Figura 49: Evolução dos espaços de estados (reconstruídos) com aumento da velocidade para diferentes tamanhos de folga

A presença do segundo superharmônico pode ser atribuída à uma assimetria, como posicionamento da asa, deformação da mola de torção ou a efeitos de amortecimento nos rolamentos.

Devido à limitações da série temporal, apenas a bicoerência pode ser aplicada, de-

(a) $U = 9.10\text{m/s}$, folga de 3mm (b) $U = 8.62\text{m/s}$, folga de 4mm (c) $U = 8.40\text{m/s}$, folga de 5mm **Figura 50:** Espectro de potências a diferentes velocidades e tamanhos de folga

tectando que o segundo superharmônico no espectro de frequências foi gerado por uma interação não linear quadrática. Neste caso, ainda não foi possível identificar se a interação cúbica era resultante da folga.

Figura 51: Bicoerência para a condição $U = 9.10 m/s$, folga de $3mm$, detectando interação quadrática entre a frequência fundamental e seu harmônico

Dados deste mesmo experimento foram utilizados posteriormente, e foi possível identificar a não linearidade folga utilizando o modelo matemático, informações obtidas do espectro e o método das formas normais.

Para o caso não linear, baseado na presença de harmônicos cúbicos, uma aproximação polinomial cúbica foi utilizada na rigidez de torção no modelo, o coeficiente do termo cúbico foi determinado por integração numérica no modelo. A Figura 52 apresenta a variação da amplitude da oscilação com o coeficiente do termo cúbico $k_{\alpha 2}$, a comparação com dados experimentais permite encontrar o valor do coeficiente e o tipo de bifurcação, subcrítica, pode ser acessada por formas normais no modelo.

Com a substituição dos parâmetros físicos do sistema, a expressão dos coeficientes da

forma normal são:

$$\beta_r = 1.013\sigma_U$$

$$\alpha_{er} = 0.00166k_{\alpha 2}$$

e com a substituição do termo $k_{\alpha 2}$ igual a 0,11 N m. Obtêm-se que ($\alpha_{er} > 0$), consequentemente, o sistema é subcrítico. Mais detalhes sobre este resultados pode ser obtido em Abdelkefi et al. (2012a) e em Vasconcellos et al. (2011b).

De fato, apesar de na época da realização do experimento, uma análise de incremento e decremento da velocidade do escoamento não ter sido possível, a dependência da velocidade crítica com as condições iniciais havia sido observada. O sistema apresentava movimento amortecido ou periódico para velocidades abaixo da velocidade de *flutter* linear, dependendo da amplitude da condição inicial. A Figura 53 apresenta comparação do modelo identificado com dados experimentais, onde é possível observar boa aproximação entre os resultados obtidos pelo modelo identificado e os resultados experimentais.

Figura 52: Variação da amplitude do movimento de torção com o coeficiente do termo cúbico $k_{\alpha 2}$ a $U = 8.62$ m/s, para determinação do coeficiente, obtido por integração do modelo com $k_{\alpha 2}$ variável.

Figura 53: (a) Variação da amplitude com o aumento da velocidade: experimental (pontos) e numérico (linha) (b,c) Série temporal do modelo identificado (linha) comparado com os dados experimentais (pontos) a $U = 8.62$ m/s

5.5 Não linearidade cúbica na torção para modelo com dois graus de liberdade

O experimento descrito na Seção 4.4.2, com dois graus de liberdade, semelhante ao produzido no Brasil foi executado durante o estágio no exterior. Novamente, um mecanismo para introdução de não linearidade na torção foi construído, de modo a permitir variação do tamanho da folga. Os parâmetros concentrados de seção típica são apresentados na Tabela 11.

Tabela 11: Parâmetros concentrados da asa aeroelástica experimental

	envergadura (m)	0.6
b	semi-corda (m)	0.0325
a	posição do eixo elástico	-0.5
ρ_p	densidade do ar (kg/m^3)	1.204
m_w	massa da asa (kg)	1.0662
m_T	massa da asa e suportes (kg)	3.836
I_α	momento de inércia no eixo elástico (kgm^2)	0.0007728
c_α	coeficiente de amortecimento da torção (kgm^2/s)	1.445×10^{-6}
c_w	coeficiente de amortecimento da flexão (kg/s)	0.1466
$k_{\alpha 0}$	rigidez de torção (Nm)	1.671
k_w	rigidez de flexão (N/m)	961.10
x_α	distância adimensional entre o c.g. e o eixo elástico	0.5

A validação linear do modelo matemático com o experimento mostra resultados satisfatórios para as frequências acopladas de flexão, torção e frequência de *flutter*, além de uma boa previsão da velocidade de *flutter*. A Figura 54 apresenta a análise de autovalores e a Tabela 12 sumariza os resultados.

Figura 54: Variação da parte real dos autovalores (a) (α : linha contínua e w : linha tracejada) e da parte imaginária (b) com a velocidade do escoamento

Durante os testes, com o mecanismo de folga fechado, foi observado a presença de

Tabela 12: Comparativo entre resultados teórico e experimental para o caso linear

	Teórico	Experimental
Frequência natural acoplada de torção (Hz) a $U = 0m/s$	2.50	2.51
Frequência natural acoplada de flexão (Hz) a $U = 0m/s$	7.85	7.81
Frequência de <i>flutter</i> (Hz)	2.61	2.63
$U_f(m/s)$	10.92	$10.9 < U_f < 10.92$

oscilações periódicas acima da velocidade de *flutter* linear, independentemente da condição inicial, o que sugere a presença de uma não linearidade do tipo *hardening*. No entanto, até o momento não era possível saber se a origem era na torção ou na flexão, nem o tipo ou ordem da não linearidade. Em posterior análise dos sinais, foi possível identificar a não linearidade utilizando as técnicas apresentadas.

A análise dos espectros de potência dos movimentos de flexão e torção revelou a presença de termos cúbicos e quadráticos. Os termos quadráticos, de menor intensidade foram desconsiderados na análise. A origem da não linearidade foi identificada pela intensidade dos harmônicos cúbicos, muito mais presentes nos sinais de torção.

Desta forma, utilizando o modelo matemático, um termo cúbico com coeficiente variável ($k_{\alpha 2}$) na torção foi considerado na matriz de rigidez e o sistema foi integrado com variação do coeficiente.

Figura 55: Variação da amplitude (a) flexão e (b) torção, com o coeficiente não linear $k_{\alpha 2}$ para duas velocidades $U = 11.81$ m/s (linha sólida) e $U = 13.68$ m/s (linha pontilhada)

Portanto, da Figura 55 é possível identificar facilmente o coeficiente $k_{\alpha 2}$ comparando

com as amplitudes obtidas experimentalmente. O coeficiente identificado foi então introduzido no modelo matemático.

A Figura 56 apresenta os resultados experimentais e os resultados numéricos obtidos com o modelo não linear identificado. A técnica de reconstrução do espaço de estados foi empregada nos dados experimentais e permite observar de forma mais clara a semelhança entre os dados experimentais e o modelo, reforçando a validade da identificação. Da mesma forma, técnicas como seções de Poincaré e outras podem ser empregadas para auxiliar na identificação quando necessário.

É possível observar nesse caso, que efeito da não linearidade quadrática no sistema é de introduzir uma assimetria no movimento, esse efeito pode ser resultado de, entre muitos outros fatores, amortecimento viscoso, pré-carga (por exemplo, ângulo de ataque inicial não nulo ou assimetria de fluxo no túnel de vento). O termo quadrático apesar de pouco efetivo nessa condição, tende a interferir mais no sistema com o aumento da velocidade do escoamento.

O método das formas normais foi aplicado de modo a confirmar o comportamento supercrítico observado durante o experimento. De fato a parte real do autovalor relacionado à não linearidade efetiva é negativa quando substituídos os parâmetros do sistema.

As Figuras 57 apresentam diagramas de bifurcação para os movimentos de flexão e torção. Nessas Figuras, uma comparação entre os resultados experimentais, numéricos e analíticos baseados na forma normal da bifurcação apresenta resultados muito próximos, particularmente próximo ao ponto de bifurcação onde o resultado analítico é mais preciso. Resultados adicionais desta análise podem ser encontrados em Abdelkefi et al. (2012) e em Abdelkefi et al. (2012b).

Figura 56: Resultados experimentais e numéricos: (a) séries temporais (b) espectros de potência e (c) retratos de fase dos movimentos de flexão e torção quando $U = 11.81$ m/s

5.6 Estudo da validade de diferentes representações para efeito de folga

Como observado nas seções anteriores, aproximações contínuas da folga podem produzir resultados aceitáveis. A presente seção apresenta uma investigação sobre a validade de cada aproximação em diferentes condições utilizando o modelo matemático. Os resultados apresentados nesta seção também foram publicados em Vasconcellos et al. (2012b) e em Vasconcellos et al. (2011a).

Figura 57: Diagramas de bifurcação (a) flexão (RMS) (b) torção (RMS) resultado analítico (linha sólida), numérico (linha pontilhada) e experimental (pontos)

5.6.1 Representações da folga na superfície de comando

Foram consideradas três representações matemáticas para a folga na superfície de comando: a representação descontínua, já utilizada nos trabalhos de Conner et al. (1996) e Dowell e Tang (2002) entre outros, a aproximação por tangente hiperbólica, mais fácil de implementar e mais rápida computacionalmente e aproximação polinomial, facilmente identificada e tratável analiticamente por formas normais.

Na representação descontínua, $F(\beta)$ é escrita como:

$$F(\beta) = \begin{cases} 0, & |\beta| \leq \delta \\ \beta - \delta, & |\beta| > \delta \end{cases} \quad (5.2)$$

Para integrar as equações de movimento usando a representação descontínua, o método de Henon (HENON, 1982) é utilizado para localizar a descontinuidade e integrar exatamente sobre ela. Este método é conhecido como técnica da da interpolação inversa e é bem descrito no trabalho de Conner et al. (1996).

Para a representação contínua por tangente hiperbólica, $F(\beta)$ é escrita como:

$$F(\beta) = \frac{1}{2} [1 - \tanh(\varepsilon(\beta - \delta))] (\beta - \delta) + \frac{1}{2} [1 + \tanh(\varepsilon(\beta - \delta))] (\beta - \delta) + P \quad (5.3)$$

onde δ representa o tamanho da folga, P representa uma pré-carga e ε é a variável que

influencia a acurácia da aproximação. A Figura 58 mostra o deslocamento da superfície de comando β versus o torque para $\delta = 2.12^\circ$, $P = 0$, e para vários valores de ε . Claramente, quanto maior ε mais a representação se aproxima da descontinuidade.

Figura 58: Deslocamento angular da superfície de comando β versus torque obtido com a Equação (5.3), ε aumentando de 0 a 100, $\delta = 2.12^\circ$ e $P = 0$

Na terceira representação, $F(\beta)$ é aproximada por uma expansão polinomial:

$$F(\beta) = k_{\beta 0}\beta + k_{\beta 1}\beta^2 + k_{\beta 2}\beta^3 + \dots, \quad (5.4)$$

sendo $k_{\beta n}$ os coeficientes da aproximação.

5.6.2 Análise não linear

A Figura 59 apresenta a variação da amplitude do movimento da superfície de comando em função da velocidade do escoamento para as três representações consideradas e os dados experimentais de Conner et al. (1996).

Pela Figura, pode-se observar três regiões distintas, antes da velocidade de *flutter* linear, separadas por transições bruscas. Na região I, o movimento é amortecido, a região II é caracterizada por movimentos não-periódicos, reportados por Conner et al. (1996) e finalmente a região III é caracterizada por oscilações periódicas de amplitude elevada. Como observado, as aproximações descontínua e tangente hiperbólica conseguem representar bem o comportamento do sistema em todas as regiões, ao passo que a representação polinomial cúbica, falha na região II.

Figura 59: Variação da amplitude do movimento da superfície de comando com o aumento da velocidade para as três representações: descontínua, tangente hiperbólica e polinomial cúbica comparado com os resultados de Conner et al. (1996)

Uma análise para identificar o comportamento subcrítico é realizada em seguida, para tanto, utilizando as três representações, o modelo é integrado para velocidade variável crescente e decrescente. O resultado observado na Figura 60 apresenta histerese, indicando comportamento subcrítico para as três representações.

Para caracterizar o tipo de movimento nas regiões II e III, utilizou-se inicialmente o gráfico da evolução dos retratos de fase com o aumento da velocidade. A Figura 61 apresenta a evolução para as três representações. Nela, é possível observar a complexidade do movimento na região II, possivelmente caótico para as representações descontínuas e tangente hiperbólica ao passo que a representação polinomial cúbica aparenta apresentar LCO. A transição para ciclo limite com aumento da velocidade também fica visível.

A observação dos espectros de potência na região II utilizando as três representações apresentados nas Figuras 62(a) e 62(b) e das seções de Poincaré nas regiões II e III, apresentadas nas Figuras 63 e 64 confirmam as observações experimentais de Conner et al. (1996) e Dowell e Tang (2002) que identificaram comportamentos caóticos com transição brusca para ciclo limite. Claramente, mesmo nos casos caóticos, os espectros de potência apresentam as maiores amplitudes próximos à frequência principal e seus superharmônicos

(a)

(b)

(c)

Figura 60: Comportamento da amplitude da superfície de comando aumentando e diminuindo a velocidade do escoamento para diferentes representações: (a) tangente hiperbólica, (b) descontínua e (c) polinomial

Figura 61: Evolução dos retratos de fase com a velocidade para as três representações do folga: (a) tangente hiperbólica, (b) descontínua e (c) polinomial

cúbicos.

O movimento apresentado na região II utilizando a aproximação polinomial pode ser caracterizado como periódico pela observação da seção de Poincaré na Figura 65.

Figura 62: Espectro de potência $0.33U_f$ (região II) usando (a) tangente hiperbólica, (b) descontínua e (c) polinomial

Figura 63: Seções de Poincaré utilizando a aproximação tangente hiperbólica (a) na região II ($U = 0.33U_f$) e (b) na região III ($U = 0.93U_f$)

Figura 64: Seções de Poincaré utilizando a aproximação descontínua (a) na região II ($U = 0.33U_f$) e (b) na região III ($U = 0.93U_f$)

Figura 65: Seções de Poincaré utilizando a aproximação polinomial cúbica (a) na região II ($U = 0.33U_f$) e (b) na região III ($U = 0.93U_f$)

Os resultados apresentados nessa análise confirmam que em algumas condições, a folga pode ser identificada como uma não linearidade cúbica subcrítica. No entanto, mostram também que em outras condições essa aproximação não é totalmente válida. Já a aproximação por tangente hiperbólica mostrou-se mais eficiente, sendo capaz de reproduzir os resultados obtidos com a representação descontínua.

5.7 Efeito de folga na superfície de comando para modelo com três graus de liberdade

O modelo experimental definitivo com três graus de liberdade descrito na Seção 4.5 foi montado no túnel de vento do Laboratório de Aeroelasticidade da EESC-USP. Dados foram coletados introduzindo-se a folga na superfície de comando. Técnicas de análise de séries temporais e de identificação foram utilizadas para indicar a localização e o tamanho da folga a ser incluída no modelo matemático. Os dados do modelo identificado são então comparados com os resultados experimentais. Parte dos resultados foi publicada em Vasconcellos et al. (2012a).

5.7.1 Análise linear

O modelo matemático foi utilizado extensivamente para determinar as propriedades do dispositivo experimental, de forma que o mesmo apresentasse os comportamentos esperados considerando-se as limitações do túnel de vento disponível. Novas medidas foram realizadas com o dispositivo montado e os parâmetros medidos foram inseridos no modelo matemático. Uma análise linear do sistema foi então realizada, permitindo a verificação das frequências naturais acopladas, da velocidade de *flutter* linear e dos mecanismos de instabilidade.

A Figura 66 (a) apresentam a variação da parte real dos autovalores com o aumento da velocidade, mostrando que o modo de torção leva o sistema a instabilidade na velocidade de $8,72m/s$.

Da mesma forma, a Figura 66 (b) mostra as frequências naturais, mostrando a tendência de acoplamento entre os modos de flexão e torção próximo ao *flutter*. Na Figura 66 (c), a evolução dos autovalores no plano complexo com o aumento da velocidade do escoamento é apresentada, como uma forma alternativa de observar o comportamento de estabilidade dos modos do sistema.

Durante os testes lineares com o experimento, observou-se uma discrepância significa-

Figura 66: Variação com a velocidade do escoamento: (a) parte real dos autovalores, (b) frequências naturais acopladas e (c) autovalores no plano complexo

tiva entre as velocidades de *flutter* prevista numericamente e a experimental (Tabela 13). No caso experimental, a existência de oscilações periódicas depois da velocidade de *flutter*, indicava a possível existência de uma não linearidade na torção ou na flexão, fato que pode explicar a diferença nas velocidades de *flutter* numérica e experimental. As rigidezes de

Tabela 13: Parâmetros concentrados de seção típica obtidos do modelo experimental

-	Envergadura (m)	0.6
b	Semi-corda (m)	0.125
a	Posição do eixo elástico (relativo à semi-corda)	-0.5
c	Posição da dobradiça da superfície móvel (relativo à semi-corda)	0.5
ρ	densidade do ar (kg/m^3)	1.1
m_W	Massa da asa (kg)	1.500
m_T	Massa da asa e suportes (kg)	3.6733
ω_h	frequência de flexão (desacoplada) (rad/s)	30.7268
ω_α	frequência de torção (desacoplada) (rad/s)	17.1659
ω_β	frequência da superfície de comando (desacoplada) (rad/s)	62.5804
x_α	distância entre o C.G. e o eixo elástico (adimensional)	0.66
x_β	distância entre o C.G. e o eixo do superfície de comando (adimensional)	0.0028
r_α^2	raio de giração ao quadrado (torção)	0.5333
r_β^2	raio de giração ao quadrado (superfície de comando)	0.0055
μ	razão de massa	24.9451
ζ_α	fator de amortecimento da torção (log-dec)	0.0163
ζ_β	fator de amortecimento da superfície de comando (log-dec)	0.0982
ζ_h	fator de amortecimento da flexão(log-dec)	0.013
U_{f_n}	velocidade de <i>flutter</i> linear (numérico) (m/s)	8.72
U_{f_e}	velocidade de <i>flutter</i> experimental (sem folga)(m/s)	$12.16 < U_{f_e} < 12.82$

flexão e torção foram então mapeadas experimentalmente utilizando-se um mecanismo de polia e pesos conhecidos, medindo o deslocamento provocado com a adição de peso.

As Figuras 67 apresentam os gráficos de flexão e torção com as respectivas curvas de ajuste utilizadas no modelo. Como pode ser observado, o mecanismo de torção apresenta uma não linearidade tipo *hardening*. Um polinômio cúbico foi ajustado e incluído no modelo matemático. Para facilitar a comparação entre os resultados numéricos e experimentais, cada velocidade foi normalizada pela respectiva velocidade de *flutter*, U_f .

Figura 67: Mapeamento das rigidezes de flexão e torção (a) flexão (ajuste linear) (b) torção (ajuste cúbico)

A Tabela 13 apresenta os parâmetros concentrados utilizados no modelo matemático.

5.7.2 Análise não linear

Com o mecanismo da folga aberto, o túnel de vento foi ligado a velocidades baixas. Uma condição inicial pré estabelecida era aplicada à flexão e o sistema ficava livre para oscilar. Para velocidades até em torno da velocidade de *flutter*, o movimento era amortecido. Após a velocidade de *flutter*, o sistema entrou em um ciclo limite e sem a interrupção do movimento, os dados eram coletados e a velocidade do túnel era incrementada, o processo repetiu-se até o limite máximo de velocidade do túnel. Nesse ponto, ainda com o sistema em movimento auto-sustentado, iniciou-se o decremento da velocidade, com a coleta de dados a cada mudança de velocidade.

O sistema apresentou movimentos autosustentados até velocidades inferiores às obtidas quando a velocidade era aumentada. Aqui a primeira característica da folga apresenta-se, pois como mostrado nos resultados anteriores, a não linearidade folga provoca uma instabilidade subcrítica, ou seja, a instabilidade pode ocorrer antes ou depois de uma certa velocidade, dependendo das condições iniciais. A Figura 68 apresenta a amplitude do movimento da superfície de comando em função da velocidade do escoamento crescente e decrescente.

Figura 68: Amplitude do movimento da superfície de comando para velocidade crescente e decrescente

O próximo passo é a utilização de técnicas de análise de séries temporais para caracterizar o tipo de movimento apresentado, procurar por possíveis bifurcações e inferir

sobre a possível origem da não linearidade. Para tanto, cada série temporal coletada é inicialmente testada para estacionaridade e para determinismo, utilizando-se para tanto dos testes já mencionados.

Uma inspeção visual nas séries temporais dos três graus de liberdade sugere movimentos periódicos, com maior complexidade no movimento da superfície de comando devido à existência de mais de uma frequência visível, sem alterações significativas na faixa de velocidades varrida no experimento. A Figura 69 apresenta as séries temporais para a condição $U = 1.04U_f$.

A análise em frequência permite a visualização dos possíveis harmônicos gerados pela interação não linear, ao analisar o espectro de frequências de cada série temporal, é possível inferir sobre a fonte da não linearidade mais importante, baseado na intensidade dos harmônicos presentes. O resultado dessa análise feita na condição $U = 1.04U_f$ pode ser observado na Figura 70 e sugere que a principal fonte da não linearidade encontra-se na série temporal da superfície de comando.

Adicionalmente, no sinal da superfície de comando observa-se a presença forte de super-harmônicos ímpares da frequência principal ($3.46Hz$, $10.38Hz$ e $17.3Hz$) e também, super-harmônicos pares, possivelmente relacionados às assimetrias presentes. A presença de harmônicos ímpares fortes associada ao fato do sistema ser subcrítico são indícios da não-linearidade provocada por folga.

A tricoerência computada para a mesma condição mostra que de fato, as frequências presentes são harmônicos cúbicos da frequência principal, devido à presença de níveis elevados. Os acoplamentos cúbicos aparecem na Figura 71 como isosuperfícies com nível 0.9, principalmente na região do ponto $(3.46Hz, 3.46Hz, 10.38Hz)$.

Como a principal fonte de não linearidade do sistema está no movimento da superfície de comando, a reconstrução do espaço de estados para inferir sobre o tipo de comportamento não linear apresentado e possíveis bifurcações será realizada apenas nos sinais relativos ao deslocamento da superfície.

(a) superfície de comando

(b) torção

(c) flexão

Figura 69: Séries temporais para a condição $U = 1.04U_f$

Utilizando a técnica da decomposição em valores singulares, a série temporal coletada para cada velocidade do escoamento considerada é filtrada e o espaço de estados é reconstruído. A Figura 72 apresenta a evolução do espaço de estados com o incremento da velocidade ao passo que a Figura 73 mostra a evolução com o decremento.

Observa-se que com o incremento da velocidade, apesar do aumento da amplitude do movimento, não ocorrem transições passíveis de associação com bifurcações. No caso do decremento, observa-se o aparecimento de uma nova estrutura no espaço de estados.

Figura 70: Espectros de frequência para a condição $U = 1.04U_f$

Para melhor observar esta alteração com o decremento da velocidade, seções de Poincaré para duas condições, uma antes ($1.04U_f$) e outra depois da transição ($0.98U_f$) são apresentadas na Figura 74. Na Figura 74 é possível observar alterações, indicando novas regiões onde a trajetória cruza a seção.

Os espectros de potência mostram, para as duas condições (Figura 75), que surgem picos a $\approx 5.27Hz$ e outro a $\approx 8.73Hz$, enquanto o pico a $13.86Hz$ perde intensidade após

Figura 71: Tricoerência computada para a condição $U = 1.04U_f$, isosuperfícies com nível 0.9

Figura 72: Evolução do espaço de estados com o incremento da velocidade do escoamento

a transição.

A bicoerência mostra primeiramente que uma interação não linear quadrática existe no sistema, visto que picos acima do valor de nível mínimo de contorno (0.95) aparecem, revelando acoplamento de fase entre a maioria dos picos. Além disso, é possível observar mudanças nos acoplamentos causadas pela transição, de fato, o acoplamento entre a frequência principal ($\approx 3.46Hz$) e os harmônicos ($\approx 10.38Hz$ e $\approx 13.86Hz$) da Figura 76(a) deixam de existir e novos acoplamentos a aproximadamente $5.27Hz$, $8.59Hz$ e outro a $17.16Hz$ aparecem na Figura 76(b).

Figura 73: Evolução do espaço de estados com o decremento da velocidade do escoamento

Apesar da ocorrência desta transição, mudanças mais significativas no comportamento do sistema não ocorrem na faixa de velocidades varrida pelo experimento.

De fato, o maior expoente de Lyapunov, acessado pelo método de Sato, Sano e Sawada (1987) e apresentado na Figura 77, mostra a ausência de um segmento linear considerável, indicando que o comportamento não é caótico para todas as séries coletadas.

Outra forma interessante de mostrar este resultado, é utilização de gráficos de recorrência. A Figura 78 apresenta os gráficos de recorrência para o mesmo caso, fica claro a confirmação dos testes de estacionaridade, determinismo e do maior expoente de Lyapunov, uma vez que o gráfico apresenta homogeneidade, linhas diagonais bem definidas e contínuas, que são características de movimentos periódicos, no caso LCO. (MARWAN et al., 2007).

Baseando-se nas informações obtidas com as técnicas de análise das séries temporais, uma não linearidade tipo folga, aproximada por tangente hiperbólica pela Equação (5.3) é introduzida na rigidez da superfície de comando no modelo matemático. Para determinar o tamanho da folga a ser introduzida, o sistema é integrado com velocidade constante para variação no tamanho da folga e a amplitude do movimento é capturada. O resultado obtido, apresentado na Figura 79 é comparado com a amplitude experimental na mesma condição, permitindo inferir sobre o tamanho da folga, no caso, ± 3.72 graus.

Figura 74: Seções de Poincaré para duas condições, uma antes ($1.04U_f$) e outra depois da transição ($0.98U_f$)

Figura 75: Espectro de potência para duas condições, uma antes ($1.04U_f$) e outra depois da transição ($0.98U_f$)

O modelo, agora com a não linearidade identificada é então integrado, simulando as mesmas condições do experimento, ou seja, com incremento e decremento da velocidade do escoamento.

A Figura 80 apresenta lado a lado a variação de amplitude do movimento da superfície de comando com velocidade do escoamento utilizando o modelo matemático identificado e o experimento. Claramente o modelo identificado capturou bem a variação na amplitude, inclusive o efeito subcrítico.

Figura 76: Bicoherência para duas condições, uma antes ($1.04U_f$) e outra depois da transição ($0.98U_f$)

Como na maior parte da faixa de velocidades varridas no experimento não ocorrem transições significativas e a transição observada no experimento não foi captada pelo modelo, uma condição ($U = 1.04U_f$) foi escolhida para comparação entre modelo e experimento. A Figura 81 mostra um comparativo entre as séries temporais. Fica claro que o modelo consegue capturar grande parte da dinâmica apresentada.

A Figura 82 mostra o comparativo no domínio da frequência para a série temporal da superfície de comando, mostrando que todas as principais frequências e harmônicos foram capturados pelo modelo, apenas a amplitude do primeiro harmônico quadrático não foi bem capturada, fato que pode ser explicado pela presença de outras assimetrias no sistema além da introduzida na torção através do polinômio obtido da Figura 67, que pode ser de origem geométrica, de efeitos dinâmicos como amortecimento e fricção ou até aerodinâmica. Esta diferença pode explicar também o motivo da transição observada experimentalmente não ocorrer no modelo.

Novamente, a reconstrução do espaço de estados experimental para comparação com o espaço de estados do modelo mostra-se muito eficiente na visualização da dinâmica para detecção de assimetrias e diferenças. Na Figura 83 compara-se a projeção do espaço de estados reconstruído com o obtido diretamente do modelo. Nota-se que o espaço de estados experimental possui uma assimetria maior que a prevista no modelo matemático, devido provavelmente aos efeitos supracitados.

Desta forma, os resultados mostraram que foi possível inferir sobre o tipo e localização

Figura 77: Maior expoente de Lyapunov, acessado pelo método de Sato, Sano e Sawada (1987)

Figura 78: Gráfico de recorrência para a condição $U = 1.04U_f$.

da não linearidade, além de caracterizar o comportamento apresentado pelo sistema na faixa de velocidades testada. A identificação da folga por integração do modelo levou a uma boa aproximação da resposta apresentada experimentalmente, validando o modelo matemático identificado.

Figura 79: Variação da amplitude do movimento da superfície de comando com a variação do tamanho da folga, condição $U = 1.04U_f$

(a) Modelo

(b) Experimento

Figura 80: Variação da amplitude do movimento da superfície de comando com incremento e decremento da velocidade, modelo e experimento

Figura 81: Comparativo entre as séries temporais da superfície de comando, torção e flexão, para $U = 1.04U_f$

Figura 82: Comparativo no domínio da frequência para $U = 1.04U_f$

Figura 83: Comparativo entre os espaços de estados experimental reconstruído (linha pontilhada) e o obtido do modelo (linha contínua), projeção bidimensional

6 *Considerações finais*

6.1 Conclusões

Neste trabalho de pesquisa, técnicas de análise de séries temporais não lineares e de identificação foram utilizadas para detectar e caracterizar não linearidades estruturais em séries temporais experimentais aeroelásticas de uma seção típica.

O emprego das técnicas de análise temporais não lineares a dados de modelo matemático e experimentais permitiu verificar sua eficácia para analisar o comportamento e evolução do sistema com variação de parâmetros. Também foi possível acessar invariantes que caracterizam o comportamento, como o maior expoente de Lyapunov, mesmo nos casos em que não se tem conhecimento prévio da dinâmica que gerou do sinal ou um modelo matemático não está disponível.

A utilização das técnicas de análise de séries temporais não lineares em conjunto com técnicas de identificação não linear forneceu resultados importantes sobre o tipo de comportamento, forma e propriedades de simetria do atrator, estabilidade, bifurcações entre outras características. Assim, é possível inferir sobre os tipos de não linearidades presentes, localizar e gerar um modelo para a não linearidade a ser introduzida no modelo matemático. A aplicação das análises de recorrência e de espectros de ordem elevada ajudaram na confirmação da qualidade do sinal utilizado, na confirmação dos comportamentos não lineares além dos mecanismos envolvidos nas transições, como na mudança de acoplamentos entre harmônicos.

A aplicação das técnicas em experimento de seção típica com dois graus de liberdade e

folga na torção mostrou que em condições específicas, o efeito de folga pode ser modelado como uma não linearidade polinomial cúbica. De fato, em condições periódicas, a não linearidade associada à folga provoca efeitos similares a uma não linearidade do tipo *hardening*, como a geração de superharmônicos ímpares fortes. Uma característica que as diferencia nesses casos é o fato da não linearidade devido a folga comportar-se como uma não linearidade cúbica que leva à uma instabilidade subcrítica, ao passo que a *hardening* leva à uma instabilidade supercrítica.

Em condições gerais, o efeito da folga tende a provocar uma dinâmica muito mais complexa no sistema, com transições bruscas provocadas pela natureza descontínua. De fato, simulações numéricas do sistema aeroelástico com três graus de liberdade e com a representação descontínua da folga na superfície de comando, revelaram comportamentos complexos, com regiões de movimentos não periódicos e transições bruscas, características de bifurcações induzidas por descontinuidades, como bifurcações tipo *grazing*. Ao passo que a aproximação da folga por uma função polinomial cúbica mostrou-se válida apenas na região periódica.

Já a aproximação por tangente hiperbólica mostrou-se mais eficiente, sendo capaz de reproduzir os resultados obtidos com a representação descontínua. Este resultado é muito importante pois reduz significativamente o custo computacional em relação a caso descontínuo, onde um método de integração, como o método de Hénon, com localização da descontinuidade e alternância entre domínios é necessário. Um outro resultado importante dessa análise é a confirmação do comportamento subcrítico para todas as aproximações, também detectado experimentalmente.

O experimento com três graus de liberdade e folga na superfície de comando foi executado de forma a aplicar as técnicas de análise de séries temporais e identificação, utilizando-se das informações obtidas com os resultados anteriores para localizar, caracterizar e identificar as não linearidades presentes. Os resultados mostraram que foi possível inferir sobre o tipo e localização da não linearidade, além de caracterizar o comportamento apresentado pelo sistema na faixa de velocidades testada. O modelo de identificação para

a folga baseado na função tangente hiperbólica foi determinado através da integração numérica e comparação de amplitudes de oscilação. Uma análise mais completa de comparação modelo/experimento, apresentando transições significativas no comportamento do sistema não foi possível devido à limitações do túnel de vento utilizado. No entanto, na faixa de velocidades coberta pelo experimento, os resultados mostraram que o modelo não linear identificado conseguiu reproduzir a maior parte da dinâmica apresentada.

Como contribuições do presente trabalho, destaca-se a caracterização e detecção dos efeitos de não linearidades, como os provocados por folga, em sistemas aeroelásticos através de técnicas de análise de séries temporais não lineares experimentais. Outra inovação é utilização de uma função aproximante baseada em funções tangente hiperbólica, capaz de representar de maneira eficaz a folga em superfícies móveis de sistemas aeroelásticos, também utilizada como modelo para identificação experimental.

A aplicação de análise espectral de ordem elevada para detectar acoplamentos e transições provocados por folga em superfícies de comando em sistemas aeroelásticos também é uma contribuição inédita do presente trabalho.

Tais resultados podem ajudar na solução de problemas não lineares em aeroelasticidade quando um modelo matemático não está disponível ou não é capaz de prever os fenômenos não lineares apresentados.

6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Em trabalhos futuros, as técnicas apresentadas neste trabalho podem ser aplicadas a dados de experimentos em túneis de vento maiores, propiciando maior faixa útil de velocidades de maneira a produzir as bifurcações observadas nos dados do modelo e em relatos de experimentos na literatura. Também seria interessante a aplicação em dados reais de uma aeronave em voo para detecção e caracterização de comportamentos não lineares.

As técnicas de análise de recorrência podem ser mais exploradas pois a técnica de

quantificação de recorrências (RQA) parece ser muito útil no mapeamento de bifurcações de sistemas aerelásticos.

As bifurcações bruscas causadas por folga, observadas no modelo e nos experimentos parecem ser associadas a bifurcações *grazing*. Uma análise mais detalhada da interação das órbitas nos espaços de estados, numéricos ou reconstruídos de experimentos, com as fronteiras da folga pode ser realizada.

O estudo de como as frequências naturais de oscilação do sistema linear interferem no caso não linear também parece ser bem interessante. Ressonâncias internas (interações não lineares entre os harmônicos gerados e modos da estrutura) podem influenciar muito a evolução do sistema com a velocidade do escoamento.

Por fim, da mesma maneira as técnicas apresentadas neste trabalho podem ajudar na caracterização e classificação de outros tipos de não linearidades em sistemas aeroelásticos, de origem estrutural ou aerodinâmica.

APÊNDICE A – Funções T de Theodorsen

Segundo Theodorsen (1935), têm-se:

$$T_1 = -\frac{2+c^2}{3}\sqrt{1-c^2} + c \cos^{-1} c$$

$$T_2 = c1 - c^2 - \sqrt{1-c^2}(1+c^2) \cos^{-1} c + c(\cos^{-1} c)^2$$

$$T_3 = -\frac{1-c^2}{8}(5c^2+4) + \frac{1}{4}c(7+2c^2)\sqrt{1-c^2} \cos^{-1} c - (\frac{1}{8}+c^2)(\cos^{-1} c)^2$$

$$T_4 = c\sqrt{1-c^2} - \cos^{-1} c$$

$$T_5 = -(1-c^2) - (\cos^{-1} c)^2 + 2c\sqrt{1-c^2} \cos^{-1} c$$

$$T_6 = T_2$$

$$T_7 = c\frac{7+2c^2}{8}\sqrt{1-c^2} - (\frac{1}{8}+c^2) \cos^{-1} c$$

$$T_8 = -\frac{1}{3}(1+2c^2)\sqrt{1-c^2} + c \cos^{-1} c$$

$$T_9 = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{1-c^2}(1-c^2)}{3} + aT_4 \right]$$

$$T_{10} = \sqrt{1-c^2} + \cos^{-1} c$$

$$T_{11} = (2-c)\sqrt{1-c^2} - (1-2c) \cos^{-1} c$$

$$T_{12} = (2+c)\sqrt{1-c^2} - (1+2c) \cos^{-1} c$$

$$T_{13} = -\frac{1}{2} [T_7 + (c-a)T_1]$$

Referências

- ABDELKEFI, A.; VASCONCELLOS, R.; HAJJ, M. R.; NAYFEH, A. H. Experimental identification of concentrated nonlinearity in aeroelastic system. In: *International Conference on Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis, CSNDD 2012*. Marrakech: [s.n.], 2012.
- ABDELKEFI, A.; VASCONCELLOS, R.; MARQUES, F. D.; HAJJ, M. R. Bifurcation analysis of an aeroelastic system with concentrated nonlinearities. *Nonlinear Dynamics*, DOI 10.1007/s11071-011-0245-6, 2011.
- ABDELKEFI, A.; VASCONCELLOS, R.; MARQUES, F. D.; HAJJ, M. R. Modeling and identification of freeplay nonlinearity. *Journal of Sound and Vibration*, doi:10.1016/j.jsv.2011.12.021, 2012.
- ABDELKEFI, A.; VASCONCELLOS, R.; NAYFEH, A. H.; HAJJ, M. R.; BADRAN, O. Nonlinear analysis and identification of limit cycle oscillations in an aeroelastic system. In: *52nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. Hawaii: [s.n.], 2012.
- ALLIGOOD, K.; SAUER, T.; YORKE, J. *Chaos: An Introduction to dynamical systems*. New York, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 1997.
- ANDERSON, J. D. *Computational fluid dynamics: the basics with applications*. 1. ed. [S.l.]: McGraw-Hill series in mechanical engineering, 1995.
- ATHANASIU, M. A.; PAVLOS, G. P. SVD analysis of the magnetospheric ae index time series and comparison with low-dimensional chaotic dynamics. *Nonlinear Processes in Geophysics*, v. 8, n. 1/2, p. 95–125, 2001. ISSN 1023-5809. Disponível em: <<http://www.nonlin-processes-geophys.net/8/95/2001/>>.
- BAKER, G. A. J. *Essentials of Padé Approximants*. [S.l.]: Academic Press, New York, 1974.
- BENDAT, J. S.; PIERSOL, A. G. *Random Data: Analysis & Measurement Procedures*. Second. [S.l.]: New York: John Wiley & Sons, 1986.
- BERNARDO, M. di; BUDD, C. J.; CHAMPNEYS, A. R.; KOWALCZYK, P. *Piecewise-Smooth Dynamical Systems*. [S.l.]: Springer, 2008. ISBN 978-1-84628-039-9.
- BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H.; HALFMAN, R. L. *Aeroelasticity*. [S.l.]: Dover, 1996.
- BROOMHEAD, D. S.; KING, G. P. Extracting qualitative dynamics from experimental data. *Physica D*, v. 20, p. 217–236, 1986.
- BUDD, C. J. Non-smooth dynamical systems and the grazing bifurcation. In: *in Nonlinear Mathematics and its Applications (P. Aston, Ed)*. [S.l.]: University Press, 1996. p. 219–235.
- CAO, L. Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series. *Physica D*, v. 110, p. 43–50, 1997.

- CASDAGLI, M.; EUBANK, S.; FARMER, D.; GIBSON, J. State space reconstruction in the presence of noise. *Physica D*, v. 51, p. 52–98, 1991.
- CHAMPNEYS, A. R.; BERNARDO, M. d. Piecewise smooth dynamical systems. *Scholarpedia*, v. 3, n. 8, p. 4041, 2008.
- CONNER, M. D.; TANG, D. M.; DOWELL, E. H.; VIRGIN, L. N. Nonlinear behavior of a typical airfoil section with control surface freeplay. *Journal of Fluids and Structures*, n. 11, p. 89–109, 1996.
- DE MARQUI JR., C.; MARQUES, F. D. Nonlinear behavior of a typical airfoil section with control surface nonlinearities. In: *Proceedings of the 6th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications – DINCON 2007*. São José do Rio Preto, Brazil: [s.n.], 2007.
- DE MARQUI JR., C.; SILVA, T. M. P.; VIEIRA, W. G. R. Análise aeroelástica teórica e experimental de uma seção típica. In: *Anais do V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2008*. Salvador, Brazil: [s.n.], 2008.
- DOWELL, E.; TANG, D. Nonlinear aeroelasticity and unsteady aerodynamics. *AIAA Journal*, v. 40, n. 9, p. 1187–1196, 2002.
- ECKMANN, J. P.; KAMPHORST, S. O.; RUELLE, D. Recurrence plots of dynamical systems. *Europhysics Letters*, v. 5, p. 973–977, 1987.
- ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*, v. 57, p. 617–656, 1985.
- EDWARDS, J. W.; ASHLEY, H.; BREAKWELL, J. V. Unsteady aerodynamic modeling for arbitrary motions. *AIAA J.*, v. 17, p. 365–374, 1979.
- ERICSSON, L.; REDING, J. Fluid dynamics of unsteady separated flow. Part II: Lifting surfaces. *Progress in Aerospace Sciences*, v. 24, p. 249–356, 1987.
- FACKRELL, J.; MCLAUGHLIN, S.; COLLIS, W.; WHITE, P. *Nonlinearity Detection For Condition Monitoring Using Higher-Order Statistics*. 1994.
- FRASER, A. M. Reconstruction attractors from scalar time series: A comparison of singular system and redundancy criteria. *Physica D*, v. 34, n. 3, p. 391–404, 1989.
- FRASER, A. M.; SWINNEY, H. L. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical Review A*, v. 33, p. 1134–1140, 1986.
- FUNG, Y. C. *An introduction to the theory of Aeroelasticity*. [S.l.]: New York: Dover Publications, 1993.
- GRASSBERGER, P.; PROCACCIA, I. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D*, v. 9, p. 189–208, 1983.
- HAJJ, M. R.; BERAN, P. Higher-order spectral analysis of limit cycle oscillations of fighter aircraft. *Journal of Aircraft*, v. 45, n. 6, November-December 2008.
- HAUENSTEIN, A. J.; ZARA, J. A.; EVERSMAN, W.; QUMEI, I. Chaotic and nonlinear response of aerosurfaces with structural nonlinearities. *AIAA*, v. 92, p. 2547–CP, 1992.
- HENON, M. On the numerical computation of Poincaré maps. *Physica D*, n. 5, p. 412–414, 1982.
- HILBORN, R. C. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. 2nd.. ed. [S.l.: s.n.], 2000.

- JONES, D. P.; ROBERTS, I.; GAITONDE, A. L. Identification of limit cycles for piecewise nonlinear. *Journal of Fluids and Structures*, v. 23, p. 1012–1028, 2007.
- KANTZ, H.; SHREIBER, T. *Nonlinear Time Series Analysis*. Second. [S.l.]: Cambridge: Cambridge U. Press, 2004.
- KOUSEN, K. A.; BENDIKSEN, O. Limit cycle phenomena in computational transonic aeroelasticity. *Journal of Aircraft*, v. 31, n. 6, p. 1257–1263, 1994.
- KUGIUMTZIS, D.; CHRISTOPHERSEN, N. *State Space Reconstruction: Method of Delays vs Singular Spectrum Approach*. Department of Informatics, feb 1997.
- KURUVILA, G.; BARTELS, R. E.; HONG, M. S.; BHATIA, K. Nonlinear aeroelastic analysis using a time-accurate navier-stokes equations solver. In: *International Forum of Aeroelasticity and Structural Dynamics, IFASD*. [S.l.: s.n.], 2007.
- LAURENSEN, R. M.; TRN, R. M. Flutter analysis of missile control surfaces containing structural nonlinearities. *AIAA Journal*, v. 18, n. 10, p. 1245–1251, 1980.
- LEE, B. H. K.; DESROCHERS, J. *Flutter Analysis of a Two-Dimensional Airfoil Containing Structural Nonlinearities*. [S.l.], 1987.
- LEE, B. H. K.; GONG, L.; WONG, Y. S. Analysis and computation of nonlinear dynamic response of a two degree of freedom system and its application in aeroelasticity. *Journal of Fluids and Structures*, v. 11, p. 225–246, 1997.
- LEE, B. H. K.; PRICE, S.; WONG, Y. Nonlinear aeroelastic analysis of airfoils: bifurcation and chaos. *Progress in Aerospace Sciences*, v. 35, n. 3, p. 205–334, 1999.
- LI, D.; GUO, S.; XIANG, J. Aeroelastic dynamic response and control of an airfoil section with control surface nonlinearities. *Journal of Sound and Vibration*, n. 329, p. 4756–4771, 2010.
- MARQUES, F. D. *Multi-layer functional approximation of non-linear unsteady aerodynamic response*. Tese (Doutorado) — University of Glasgow, Escócia, 1997.
- MARQUES, F. D.; BELO, E. M.; OLIVEIRA, V. A.; ROSOLEN, J. R.; SIMONI, A. R. Non-linear phenomena analysis of stall-induced aeroelastic oscillations. In: *Proceedings of the 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*. Palms Springs, CA, USA: [s.n.], 2004.
- MARQUES, F. D.; BELO, E. M.; OLIVEIRA, V. A.; ROSOLEN, J. R.; SIMONI, A. R. On the investigation of state space reconstruction of nonlinear aeroelastic response time series. *Shock and Vibration*, v. 13, p. 393–407, 2006.
- MARQUES, F. D.; ROSOLEN, J. R.; OLIVEIRA, V. A.; BELO, E. M. Non-linear analysis of stall-induced oscillations of an aeroelastic wing. In: *Anais do 2^o. Congresso Temático de Dinâmica e Controle da SBMAC*. Rio Claro, SP: [s.n.], 2003.
- MARQUES, F. D.; SIMONI, A. R.; OLIVEIRA, V. A. Non-linear phenomena analysis and chaos prediction of stall-induced aeroelastic oscillations via Lyapunov exponents. In: *25th International Council of the Aeronautical Sciences – ICAS 2006*. Hamburgo, Alemanha: [s.n.], 2006.
- MARQUES, F. D.; VASCONCELLOS, R. M. G. Chaotic patterns in aeroelastic signals. *Mathematical problems in Engineering*, v. 2009, p. 19 pages, 2009. Article ID 802970, DOI:10.1155/2009/802970.

- MARQUES, F. D.; VASCONCELLOS, R. M. G. Non-linear aeroelastic signals analysis using time series techniques. In: *20th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2009*. Gramado, Brazil: [s.n.], 2009.
- MARQUES, F. D.; VASCONCELLOS, R. M. G.; SIMONI, A. R. Analysis of an experimental aeroelastic system through nonlinear time series. In: *Proceedings of the International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics – DINAME 2009*. Angra dos Reis, RJ, Brazil: [s.n.], 2009.
- MARWAN, N. Encounters with neighbours: Current developments of concepts based on recurrence plots and their applications. *Periódico Desconhecido*, 2003.
- MARWAN, N.; ROMANO, M. C.; THIEL, M.; KURTHS, J. Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics Reports*, v. 438, p. 237–329, 2007.
- MERKWIRTH, C.; PARLITZ, U.; LAUTERBORN, W. TSTOOL – a software package for nonlinear time series analysis. In: SUYKENS, J. A.; VANDEWALLE, J. (Ed.). *Proceedings of the International Workshop on Advanced Black-Box Techniques for Nonlinear Modeling*. Katholieke Universiteit Leuven, Belgium: [s.n.], 1998.
- MOON, F. C. *Chaotic Vibration: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*. New York, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1987.
- NAYFEH, A. H. *Method of Normal Forms*. New York: Wiley, 1993.
- NAYFEH, A. H.; BALACHANDRAM, B. *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995. Wiley Series in Nonlinear Sciences.
- PACKARD, N. J.; CRUTCHFIELD, J. P.; FROMER, J. D.; SHAW, R. S. Geometry from a time series. *Physical Review Letters*, v. 45, p. 712–716, 1980.
- PARLITZ, U. Nonlinear time-series analysis. In: SUYKENS, J.; VANDEWALLE, J. (Ed.). *Nonlinear Modeling-Advanced black-box Techniques*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998. p. 209–239.
- PRICE, S. J.; ALIGHANBARI, H.; LEE, B. The aeroelastic response of a two-dimensional airfoil with bilinear and cubic structural nonlinearities. *Journal of Fluids and Structures*, v. 9, p. 175–193, 1995.
- ROBERTS, I.; JONES, D.; LIEVEN, N.; BERNARDO, M. di; CHAMPNEYS, A. Analysis of piecewise linear aeroelastic systems using numerical continuation. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. [S.l.: s.n.], 2002. v. 216, n. 2, p. 1 – 11.
- SATO, S.; SANO, M.; SAWADA, Y. Practical methods of measuring the generalized dimension and largest Lyapunov exponent in high dimensional chaotic systems. *Progress of Theoretical Physics*, v. 77, p. 1–5, 1987.
- SAVI, M. A. Caos em sistemas mecânicos. In: *Anais do 1º. Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações da SBMAC*. São José do Rio Preto - SP: [s.n.], 2002.
- SEARS, W. R. Operational methods in the theory of airfoils in non-uniform motion. *Journal of the Franklin Institute*, v. 230, p. 95–111, July 1940.
- SHEN, S. F. Approximate analysis of non-linear flutter systems. *Journal of Aerospace Science*, v. 26, p. 25–45, 1959.

- SIMONI, A. R. *Análise de Séries Temporais Aeroelásticas Experimentais Não Lineares*. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, 2008.
- SIMONI, A. R.; MARQUES, F. D.; OLIVEIRA, V. A.; BELO, E. M. Chaos prediction of stall-induced oscillations via Lyapunov exponents. In: *Proceedings of the 18th International Congress of Mechanical Engineering*. Ouro Preto, MG: [s.n.], 2005.
- TAKENS, F. Detecting strange attractors in turbulence. In: RAND, D.; YOUNG, L. (Ed.). *Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics*. New York: Springer-Verlag, 1981. v. 898, p. 366–381.
- TANG, D.; DOWELL, E. H. Aeroelastic airfoil with free play at angle of attack with gust excitation. *AIAA Journal*, v. 48, n. 2, p. 427–442, 2010. Disponível em: <<http://doi.aiaa.org/10.2514/1.44538>>.
- TANG, D. M.; H., D. E. Flutter and stall response of a helicopter blade with structural nonlinearity. *Journal of Aircraft*, v. 29, n. 5, p. 953–960, 1992.
- THEILER, J.; GALDRIKIAN, B.; LONGTIN, A.; EUBANK, S.; FARMER, J. D. Using surrogate data to detect nonlinearity in time series. In: CASDAGLI, M.; EUBANK, S. (Ed.). *Nonlinear Modeling and Forecasting*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1992. (SFI Studies in the Sciences of Complexity, XII), p. 163–188.
- THEODORSEN, T. *General Theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter*. [S.l.], 1935.
- TRICKEY, S. T. *Global and Local Dynamics of an Aeroelastic System with a Control Surface Freeplay Nonlinearity*. Tese (Doutorado) — Department of Mechanical Engineering and Materials Science, Duke University, 2000.
- TRICKEY, T.; VIRGIN, L. N.; DOWELL, H. The stability of limit-cycle oscillations in an nonlinear aeroelastic system. *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 458, n. 2025, p. 2203–2226, Sep. 2002.
- VASCONCELLOS, R.; ABDELKEFI, A.; MARQUES, F. D.; HAJJ, M. R. Modeling and analysis of control surface free-play nonlinearity in an aeroelastic wing. In: *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics 2011 - IFASD2011*. Paris, France: [s.n.], 2011.
- VASCONCELLOS, R.; ABDELKEFI, A.; MARQUES, F. D.; HAJJ, M. R. Modeling and experimental identification of an aeroelastic wing with pitch free-play nonlinearity. In: *Proceedings of the 7th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2011)*. Rome, Italy: [s.n.], 2011. ISBN 978-88-906234-2-4 DOI: 10.3267/ENOC2011Rome.
- VASCONCELLOS, R.; ABDELKEFI, A.; MARQUES, F. D.; HAJJ, M. R. Control surface freeplay nonlinearity: Numerical modeling and experimental study. In: *52st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. Hawaii: [s.n.], 2012.
- VASCONCELLOS, R.; ABDELKEFI, A.; MARQUES, F. D.; HAJJ, M. R. Representation and analysis of control surface freeplay nonlinearity. *Journal of Fluids and Structures*, v. 31, p. 79–91, 2012.
- VASCONCELLOS, R.; MARQUES, F. D.; HAJJ, M. R. Time series analysis and identification of a nonlinear aeroelastic section. In: *51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. 12–15 April 2010, Orlando, Florida: [s.n.], 2010.

- VASCONCELLOS, R. M. G. *Reconstrução de Espaços de Estados Aeroelásticos por Decomposição em Valores Singulares*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo - EESC-USP, 2007. (in portuguese).
- WAGNER, H. Über die entstehung des dynamischen auftriebs von tragflugeln. *Zeitschrift für angewandte Mathematik and Mechanik*, v. 5, n. 1, 1925.
- WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, v. 16, p. 285–317, 1985.
- WOOLSTON, D. S. An investigation of effects of certain types of structural nonlinearities on wing and control surface flutter. *Journal of the Aeronautical Sciences*, v. 24, n. 1, p. 1936–9956, 1957.
- WOOLSTON, D. S.; RUNYAN, H.; BYRSDSONG, T. Some effects of system nonlinearities in the problem of aircraft flutter. *NACA Technical Report*, v. 3539, 1955.
- WORDEN, K.; TOMLINSON, G. *Nonlinearity in Structural Dynamics*. [S.l.]: IOP Publishing, 2001.
- YALCINKAYA, T.; LAI, Y. C. Phase characterization of chaos. *Physical Review Letters*, v. 79, p. 3885–3888, 1997.
- YANG, Z. C.; C., Z. L. Analysis of limit cycle flutter of an airfoil in incompressible flow. *Journal of Sound and Vibration*, v. 123, n. 1, p. 1–13, 1988.