UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

ANA LÚCIA GRICI ZACARIN MAMEDE

**Simulações de modelos dinâmicos
com amortecimento não-proporcional**

São Carlos
2008

ANA LÚCIA GRICI ZACARIN MAMEDE

**Simulações de modelos dinâmicos
com amortecimento não-proporcional**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Dinâmica de Sistemas Mecânicos
Orientador: Prof. Dr. Roberto Hideaki Tsunaki

São Carlos
2008

Dedicatória

A memória do meu avô Otaviano que engenhava sementes e coisas dando significado a tudo que não tinha significado só e que através de suas mãos era promovido o encontro e desse encontro um novo muito maior passava a existir. Muitas dessas sementes solitárias ele semeou em mim e tenho certeza que continua acompanhando o germinar de cada uma delas com sua lanterna de sonhos.

Agradecimentos

Meu Deus, agradeço por todos os dons que me destes, com gratidão quero vos devolver para que disponha deles segundo a Vossa vontade.

Minha gratidão ao Prof. Mario Mucheroni pela oportunidade de guerrear quando só havia o invisível e com sua ajuda discernindo o invisível consegui desinventar a desilusão e enxergar em cada equação um sonho a ser deduzido e tornado visível.

Agradeço ao Prof. Roberto Hideaki Tsunaki por aceitar o desfecho dessa minha história.

Todo meu amor e gratidão ao Whisner pela persistência em cultivar uma semente lançada no vazio onde não havia mais sonhos e que precisou do abandono e escuridão para ser germinada e dar frutos.

Com carinho, agradeço aos meus pais Dorival e Maria Augusta pela eterna paciência e apoio em todos os momentos da minha vida.

A minha irmã Giovana agradeço por todo empenho e prontidão dedicados e pela paciência de tantas noites mal dormidas pelo monitor de vídeo sempre ligado.

Ao meu cunhado André agradeço por ter cedido várias vezes o seu tempo para ajudar em um trabalho meu.

Agradeço pelo companheirismo dos meus gatos Zagreus, Isis e Nina, que não me deixaram sozinha nenhum dia e nenhuma noite dedicados a este trabalho.

O meu muito obrigada a todos os professores e funcionários da EESC.

RESUMO

Mamede, A. L. G. Z. (2008). **Simulações de modelos dinâmicos com amortecimento não-proporcional**. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

Alguns métodos aproximados são sugeridos na literatura relacionada para encontrar a resposta de sistemas com amortecimento não-proporcional. Muitas vezes procura-se estabelecer um critério para aproximar o amortecimento não-proporcional por um modelo de amortecimento proporcional. Neste trabalho foram utilizadas simulações de modelos dinâmicos com três graus de liberdade, com amortecimento não proporcional, a fim de analisar os valores obtidos para as frequências naturais, estimados a partir dos autovalores resultantes desses modelos. Os cálculos das frequências naturais e dos amortecimentos modais foram feitos admitindo-se a validade das relações entre estes parâmetros e os autovalores do problema como são bem conhecidas no caso do amortecimento proporcional. Observa-se que, para o caso de amortecimento não-proporcional, este procedimento pode levar a erros significativos na avaliação destes parâmetros. Nos problemas simulados é possível quantificar os erros nas avaliações das frequências naturais, sendo significativos para fatores de amortecimentos altos. Observa-se que para os fatores de amortecimento não é possível quantificar estes erros, sendo que seus valores são apenas aproximações baseadas na teoria de amortecimento proporcional. Este trabalho apresenta dados que possibilitam uma discussão sobre as diferenças encontradas entre os valores das frequências naturais e os valores estimados pelas expressões clássicas do amortecimento proporcional.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos. Vibrações mecânicas. Amortecimento não-proporcional.

ABSTRACT

Mamede, A. L. G. Z. (2008). **Dynamic simulations of mechanical systems with non-proportional damping**. Dissertation (Master) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

Some approximate methods are suggested in the related literature to find the output of mechanical systems with non-proportional damping. Often they try to establish a criterion that approximates the non-proportional damping to proportional damping model. In this work, simulations of dynamics models of three degree of freedom with non-proportional damping were used to examine the values of natural frequencies, estimated from the eigenvalues obtained by these models. The calculations of natural frequencies and modal damping ratio were performed assuming the validity of the relationship between these parameters and the well known eigenvalues of the problem in the proportional damping case. In the simulated problems is possible to quantify the errors in the evaluations of the natural frequencies and this errors are significant for the case where the damping factors are high. It is observed that for the damping factors it is not possible to quantify these errors, and their magnitudes are only approximations based on the theory of proportional damping. This work presents data which enables a discussion about the differences between the magnitude of natural frequencies and the magnitude estimated by the classic equations of proportional damping.

Keywords: Dynamic systems. Mechanical vibrations. Non-proportional damping.

LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1 - Sistema massas-molas-amortecedores com 3GDL	45
Figura 4.2 – Primeira frequência natural ($\tilde{\omega}_{n1}$) estimada em função da variação de c_1	50
Figura 4.3 – Parte real do primeiro autovalor: $\lambda_1 = -a_1 \pm ib_1$	50
Figura 4.4 - Parte imaginária do primeiro autovalor: $\lambda_1 = -a_1 \pm ib_1$	51
Figura 4.5 - Segunda frequência natural ($\tilde{\omega}_{n2}$) estimada em função da variação de c_1	51
Figura 4.6 - Parte real do segundo autovalor: $\lambda_2 = -a_2 \pm ib_2$	52
Figura 4.7 - Parte imaginária do segundo autovalor: $\lambda_2 = -a_2 \pm ib_2$	52
Figura 4.8 - Terceira frequência natural ($\tilde{\omega}_{n3}$) estimada em função da variação de c_1	53
Figura 4.9 - Parte real do terceiro autovalor: $\lambda_3 = -a_3 \pm ib_3$	53
Figura 4.10 - Parte imaginária do terceiro autovalor: $\lambda_3 = -a_3 \pm ib_3$	54
Figura 4.11 – Variação da porcentagem de erro para ω_n	55
Figura 4.12 - Estimativas do primeiro fator de amortecimento modal	57
Figura 4.13 - Estimativas do segundo fator de amortecimento modal.....	57
Figura 4.14 – Estimativas do terceiro fator de amortecimento modal.....	58
Figura 4.15 - Primeira frequência natural ($\tilde{\omega}_{n1}$) estimada em função da variação de c_5	60
Figura 4.16 - Parte real do primeiro autovalor: $\lambda_1 = -a_1 \pm ib_1$	60
Figura 4.17 – Parte imaginária do primeiro autovalor: $\lambda_1 = -a_1 \pm ib_1$	61
Figura 4.18 - Segunda frequência natural ($\tilde{\omega}_{n2}$) estimada em função da variação de c_5	61
Figura 4. 19 - Parte real do segundo autovalor: $\lambda_2 = -a_2 \pm ib_2$	62

Figura 4.20 - Parte imaginária do segundo autovalor: $\lambda_1 = -a_2 \pm ib_2$	62
Figura 4.21 - Terceira frequência natural ($\tilde{\omega}_{n3}$) estimada em função da variação de c_5	63
Figura 4.22 - Parte real do terceiro autovalor: $\lambda_3 = -a_3 \pm ib_3$	63
Figura 4.23 - Parte imaginária do terceiro autovalor: $\lambda_3 = -a_3 \pm ib_3$	64
Figura 4.24 – Variação da porcentagem de erro obtida para ω_n	65
Figura 4.25 - Estimativas do primeiro fator de amortecimento modal.	66
Figura 4.26 - Estimativas do segundo fator de amortecimento modal.	67
Figura 4.27 - Estimativas do terceiro fator de amortecimento modal.	67
Figura 4.28 - Primeira frequência natural ($\tilde{\omega}_{n1}$) estimada em função da variação de c_6	70
Figura 4.29 - Parte real do primeiro autovalor: $\lambda_1 = -a_1 \pm ib_1$	70
Figura 4.30 - Parte imaginária do primeiro autovalor: $\lambda_1 = -a_1 \pm ib_1$..	71
Figura 4.31 - Segunda frequência natural ($\tilde{\omega}_{n2}$) estimada em função da variação de c_6	71
Figura 4.32 - Parte real do segundo autovalor: $\lambda_2 = -a_2 \pm ib_2$..	72
Figura 4.33 - Parte imaginária do segundo autovalor: $\lambda_2 = -a_2 \pm ib_2$..	72
Figura 4.34 - Terceira frequência natural ($\tilde{\omega}_{n3}$) estimada em função da variação de c_6	73
Figura 4.35 — Parte real do terceiro autovalor: $\lambda_3 = -a_3 \pm ib_3$..	73
Figura 4.36 - Parte imaginária do terceiro autovalor: $\lambda_3 = -a_3 \pm ib_3$	74
Figura 4.37 - Variação da porcentagem de erro obtida para ω_n	75
Figura 4.38 - Estimativas do primeiro fator de amortecimento modal..	76
Figura 4.39 - Estimativas do segundo fator de amortecimento modal.....	77
Figura 4.40 -- Estimativas do terceiro fator de amortecimento modal.	77

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Dados utilizados para o caso 1	48
Tabela 4.2 – Valores de $\tilde{\omega}_n$ e ω_n calculados para c_1 variando de 0,0 a 10.....	49
Tabela 4.3 – Erro calculado em porcentagem para $\tilde{\omega}_n - \omega_n$	55
Tabela 4.4 – Fatores de amortecimento estimados em função da variação de c_1	56
Tabela 4.5 – Dados utilizados para o caso 2.....	58
Tabela 4.6 – Valores de $\tilde{\omega}_n$ e ω_n calculados para c_5 variando de 0,0 a 10.....	59
Tabela 4.7 – Erro calculado em porcentagem para $\tilde{\omega}_n - \omega_n$	65
Tabela 4.8 – Fatores de amortecimento estimados em função da variação de c_5	66
Tabela 4.9 - Dados utilizados para o caso 3	68
Tabela 4.10 - Valores de $\tilde{\omega}_n$ e ω_n calculados para c_6 variando de 0,0 a 10	69
Tabela 4.11 – Erro calculado em porcentagem para $\tilde{\omega}_n - \omega_n$	75
Tabela 4.12 - Fatores de amortecimento estimados em função da variação de c_6	76

LISTA DE SÍMBOLOS

m_i	constante de massa modal.
k_i	constante de rigidez modal.
c_i	coeficiente de amortecimento modal.
f	força externa atuante na massa m .
λ_1	raíz da equação característica
λ_2	raíz da equação característica.
a	constante complexa dependente das condições iniciais impostas ao sistema.
b	constante complexa dependente das condições iniciais impostas ao sistema.
ζ	fator de amortecimento.
ω_n	freqüência natural do sistema.
ω_d	freqüência natural amortecida.
$\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$	matriz de massa positiva-definida.
$\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$	matriz de amortecimento.
$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$	matriz de rigidez.
$\mathbf{w}$	vetor deslocamento.

$\dot{\mathbf{w}}$	vetor velocidade.
$\ddot{\mathbf{w}}$	vetor aceleração.
λ_i	autovalores do i-ésimo modo.
$\mathbf{q}_i$	forma de vibrar do i-ésimo modo <i>normal</i> .
$\mathbf{Q}$	matriz modal.
r_i	coordenadas modais ou coordenadas normais do i-ésimo modo.
a_0	constante real.
a_1	constante real.
$\mathbf{y}$	vetor de estado.
$\mathbf{x}$	vetor de estado.
$\mathbf{I}$	matriz identidade.
$\mathbf{D}$	matriz de estado.
$\mathbf{A}$	matriz de estado.
$\mathbf{B}$	matriz de estado.
$c_i^{(k)}$	k -ésimo elemento do vetor $\mathbf{c}$.
$d_i^{(k)}$	k -ésimo elemento do vetor $\mathbf{d}$.
$a_i^{(k)}$	módulo do k -ésimo elemento do vetor $2\mathbf{q}_i$.
$\varphi_i^{(k)}$	fase do k -ésimo elemento do vetor $2\mathbf{q}_i$.
$\tilde{\omega}_n$	freqüência natural estimada.
$\tilde{\zeta}$	fator de amortecimento modal estimado.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	12
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	18
3 TEORIA BÁSICA DE VIBRAÇÕES COM AMORTECIMENTO PROPORCIONAL E NÃO PROPORCIONAL.....	24
4 MODELOS SIMULADOS E RESULTADOS	44
4.1 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE SISTEMAS DINÂMICOS COM VARIAÇÃO DO ELEMENTO c_1 DA MATRIZ DE AMORTECIMENTO – CASO 1	48
4.2 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE SISTEMAS DINÂMICOS COM VARIAÇÃO DO ELEMENTO c_5 DA MATRIZ DE AMORTECIMENTO – CASO 2	58
4.3 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE SISTEMAS DINÂMICOS COM VARIAÇÃO DO ELEMENTO c_6 DA MATRIZ DE AMORTECIMENTO – CASO 3	68
5 CONCLUSÃO.....	80
REFERÊNCIAS.....	84
ANEXOS.....	90

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Em modelos de sistemas dinâmicos com parâmetros agrupados – na literatura identificados por *lumped-parameters* – uma força de excitação externa introduz energia no sistema, que é armazenada pelos parâmetros de massa e de mola e dissipada pelos parâmetros de amortecedor. As massas são modeladas como corpos rígidos que armazenam energia cinética. As molas, que representam elementos elásticos, armazenam a energia potencial. São consideradas ideais com massas desprezíveis. As forças de mola ocorrem quando há um deslocamento relativo entre as suas extremidades e o trabalho feito para comprimir ou estender a mola é armazenado como energia potencial – a energia de deformação armazenada na mola. Os amortecedores são considerados elementos ideais e não possuem massa, nem elasticidade. As forças de amortecimento são produzidas quando ocorrem velocidades relativas entre suas extremidades. Os amortecedores são identificados como elementos não-conservativos porque dissipam a energia mecânica do sistema. Existem vários tipos de modelos de amortecimento, mas o amortecimento viscoso – isto é, força de amortecimento proporcional à velocidade – é o modelo mais usado nos estudos de vibrações mecânicas.

Sistemas mecânicos não amortecidos como descritos acima apresentam movimentos vibratórios com características particulares. Tais movimentos são denominados modos de vibrar, que ocorrem em frequências próprias dos sistemas, denominadas por frequências

naturais. Estas características de sistemas não amortecidos também são próprias de sistemas amortecidos com determinados modelos de amortecimento. Os modos de vibrar, as frequências naturais e os fatores de amortecimento modais são denominados parâmetros modais do sistema. Sua determinação, tanto teórica como experimentalmente são importantes na análise de sistemas dinâmicos.

A análise modal é atualmente um método eficiente para se resolver problemas de vibração em estruturas flexíveis. O conceito de análise modal, aplicado a sistemas não-amortecidos, pode ser estendido a determinados modelos de amortecimento. Os modos de vibrar de sistemas não-amortecidos, também conhecidos como modos clássicos, satisfazem às condições de ortogonalidade entre modos de vibrar. A matriz modal, matriz composta pelos modos de vibrar, é usada como transformação de coordenadas para diagonalizar as matrizes de massa e de rigidez no espaço das configurações $n \times n$, onde n é o número de graus de liberdade do modelo. Esta propriedade traz uma significativa simplificação à análise dinâmica, pois um sistema de múltiplos graus de liberdade pode ser tratado como uma coleção de vários sistemas de um grau de liberdade, todos desacoplados.

Sistemas dinâmicos reais são amortecidos uma vez que sempre possuem algum mecanismo de dissipação de energia, o chamado amortecimento. Para se aplicar técnicas de análise modal de sistemas não-amortecidos aos sistemas amortecidos no espaço $n \times n$, é necessário fazer a hipótese de amortecimento proporcional. Este é um modelo especial de amortecimento viscoso que admite a matriz de amortecimento como uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez. Esse modelo para a matriz de amortecimento é conhecido como “amortecimento de Rayleigh” ou “amortecimento clássico”. Os modos de vibrar de sistemas com amortecimento de Rayleigh são idênticos aos modos de vibrar reais do sistema equivalente não-amortecido. Isto torna também mais simples a análise no espaço de configuração destes sistemas, espaço $n \times n$.

Caughey e O'Kelly, em 1965, propuseram as condições que um sistema dinâmico amortecido deve satisfazer para que possua tais modos clássicos, modos reais. Os pesquisadores propuseram também uma expressão para a matriz de amortecimento, em função das matrizes de massa e de rigidez, tal que o sistema possa ser desacoplado utilizando-se os modos de vibrar não-amortecidos e provaram que o amortecimento de Rayleigh é um caso particular de uma expressão mais geral.

Em resumo, quando a matriz de amortecimento é diagonalizada pela mesma transformação que diagonaliza as matrizes de massa e rigidez, o sistema possuirá os modos de vibrar reais, denominados modos clássicos. Por outro lado, nem sempre a matriz de amortecimento pode ser diagonalizada por esta transformação. Estes modelos de amortecimento são denominados amortecimento não-proporcional, objeto deste trabalho. Neste caso a análise deverá ser conduzida no espaço de estado $2n \times 2n$, onde os autovalores do problema contêm as frequências naturais e os fatores de amortecimento modais (de forma implícita) e os autovetores correspondem ao que na literatura convencionou-se chamar de modos modos complexos.

Muitas estruturas de engenharia possuem um modelo de amortecimento que não é proporcional, mas que pode ser aproximado por modelo proporcional. Nestes casos há aproximações na avaliação especialmente das frequências naturais. Quanto é o erro nesta avaliação ainda é uma questão aberta na literatura.

Para um sistema com amortecimento não-proporcional, as equações de movimento nas coordenadas modais (sistema $n \times n$) são acopladas por meio de termos não nulos fora da diagonal da matriz de amortecimento modal. Nestes casos passa-se a fazer a análise no espaço de estado ($2n \times 2n$), onde surgem os denominados modos complexos. Esta nova matriz

modal, agora complexa e de dimensão $2n \times 2n$, desacoplará o sistema no espaço de estado formado por $2n$ equações diferenciais de primeira ordem.

A bibliografia que trata de amortecimento em sistemas dinâmicos sugere alguns diferentes métodos que podem ser utilizados para se encontrar a resposta para o caso de uma modelagem com amortecimento não-proporcional. A teoria clássica sobre amortecimento proporcional estabelece relações exatas para a obtenção das frequências naturais e dos fatores de amortecimento modal a partir dos autovalores do sistema. Para sistemas com amortecimento não-proporcional estas mesmas relações são ainda utilizadas para todas as aplicações, o que conduz a aproximações nos valores dos parâmetros modais obtidos. Alguns autores – Lallement (1995) e Sondipon (2001) – observam que, para o caso de amortecimento não-proporcional, o método de obtenção dos parâmetros modais que utiliza conceitos consolidados da teoria de amortecimento proporcional, pode levar a erros significativos na magnitude das frequências naturais e dos fatores de amortecimento modal.

1.1 Justificativa

A tendência das pesquisas atuais é a de propor métodos para aproximar como modos reais os modos complexos encontrados para o caso de amortecimento qualquer e de propor hipóteses para se definir quando esta aproximação pode ser feita sem grandes discrepâncias no resultado final. Neste trabalho, pretende-se através de simulações em alguns modelos de sistemas com 3 graus de liberdade, levantar o comportamento dos erros destas aproximações.

1.2 Objetivo

Fazer um estudo qualitativo e quantitativo dos erros que se cometem ao utilizar modelo aproximado de amortecimento proporcional para amortecimento não-proporcional analisando o comportamento de sistemas dinâmicos com amortecimento não-proporcional.

No capítulo 2 deste trabalho é apresentado um histórico das principais pesquisas que versam sobre amortecimento não-proporcional, salientando os aspectos fundamentais da abordagem sobre o tema.

Em seguida, no capítulo 3, são apresentados os principais pontos teóricos da análise modal tanto no espaço de configuração como no espaço de estado, utilizando para tanto diferentes fontes bibliográficas clássicas sobre o tema.

São apresentadas no capítulo 4 as simulações numéricas para três casos diferentes de um modelo dinâmico com três graus de liberdade, com o objetivo de se fazer uma análise quantitativa das frequências naturais de sistemas com amortecimento não-proporcional, avaliados com o modelo de amortecimento proporcional. Estão mostrados os modelos, suas matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez. Uma verificação do erro é feita apenas para as frequências naturais pois em modelos simulados é possível saber o valor exato das mesmas, enquanto que os amortecimentos modais estimados são apresentados sem análise de erro, uma vez que é inacessível o valor correto destes parâmetros.

No capítulo 5 são discutidos os resultados das simulações, mostrando as dificuldades das avaliações destes parâmetros em caso reais. As conclusões baseadas nos três casos simulados e na teoria básica de amortecimento proporcional e não proporcional leva a impossibilidade de se estabelecer um critério para avaliação dos erros na identificação de frequências naturais e fatores de amortecimento modal em casos de estruturas reais.

O ANEXO A mostra uma simulação numérica de um sistema dinâmico com um “fator de proporcionalidade” α de multiplicação alterando todos os valores da matriz de amortecimento e no ANEXO B apenas o primeiro elemento da matriz de amortecimento é alterado.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Várias técnicas de análise modal teórica ou experimental de sistemas dinâmicos têm sido desenvolvidas e aplicadas ao estudo dos fenômenos vibratórios em estruturas mecânicas. Essas técnicas buscam determinar as propriedades dinâmicas da estrutura, descritas através de um conjunto de parâmetros denominados parâmetros modais. São parâmetros modais: as frequências naturais, os fatores de amortecimento modal e os modos de vibrar.

Esses parâmetros quando identificados constituem informações que podem ser utilizadas como ferramenta de projeto e análise de desempenho, sobretudo para corrigir ou validar modelos analíticos, realizar modificação estrutural, detectar a presença de falhas estruturais e efetuar controle de qualidade e monitoramento da vida útil da estrutura em estudo.

Neste contexto, o presente capítulo apresenta uma revisão bibliográfica sobre alguns trabalhos importantes que tratam das diferenças entre os modelos de amortecimento proporcional e não-proporcional.

Caughey (1960) analisa as condições em que um sistema linear amortecido apresenta modos de vibrar clássicos, isto é, modos de vibrar do sistema conservativo. O autor demonstra que a condição necessária e suficiente para a existência de modos de vibrar clássicos é que a matriz de amortecimento seja diagonalizada pela mesma transformação que desacopla o

sistema dinâmico sem amortecimento correspondente. São apresentadas condições suficientes para que as matrizes de amortecimento sejam diagonalizadas e para que o sistema apresente os modos de vibrar clássicos, mesmo que seja amortecido.

Caughey e O'Kelly (1965), ao estenderem o trabalho de Caughey (1960), propõem a determinação de condições necessárias e suficientes para que sistemas dinâmicos lineares amortecidos e discretos possuam modos de vibrar clássicos.

Brandon (1984) sugere uma formulação alternativa à formulação apresentada por Frazer et al. (1952) para sistemas dinâmicos com amortecimento viscoso geral, ou seja, para amortecimento qualquer, proporcional ou não proporcional. A proposta de Brandon envolve a mudança do problema quadrático $n \times n$ de forma equivalente à formulação inicial mas mantendo simetria de matrizes. O procedimento de Brandon (1984) resulta em um problema linear $2n \times 2n$ com matrizes simétricas. O autor compara a formulação básica de Frazer et al. (1952) aplicada a problemas estudados por Pomazal em 1969 e chega à conclusão que tal formulação apresenta algumas desvantagens computacionais para a solução de sistemas dinâmicos com amortecimento não-clássico.

Ibrahimbegovic e Wilson (1988) apresentam um algoritmo para resolver iterativamente as equações modais acopladas de um sistema com amortecimento não-proporcional no espaço das configurações, espaço $n \times n$. O método sugerido é posto à prova em exemplos numéricos e se mostra sempre convergente.

Liang et al. (1992) questionaram a suficiência do critério de Caughey e O'Kelly (1965) para a classificação do amortecimento de sistemas como proporcional ou não-proporcional, através de dois exemplos simulados. De acordo com os autores, a igualdade $C M^{-1} K = K M^{-1} C$, onde M , C e K são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, não pode ser usada como condição para classificação do tipo de amortecimento presente em um sistema. Foi apontada a existência de um modo real em um

dos exemplos do trabalho de Liang et al. (1992) quando o amortecimento era não-proporcional, segundo a classificação de Caughey e O’Kelly (1965). Este exemplo mostra que mesmo se o amortecimento é não-proporcional, é possível a existência de um ou mais modos reais, mas não todos.

Entretanto, como observou Phani (2003), a presença de algum modo no problema com amortecimento não proporcional, não altera a classificação de sistemas não-conservativos em sistemas amortecidos proporcionalmente e não-proporcionalmente de acordo com o critério de Caughey e O’Kelly (1965). Entende-se, segundo Phani (2003), que *todos* os modos de um sistema com amortecimento proporcional devem ser reais, não somente um ou poucos, mas *todos*. Daí que os exemplos sugeridos por Liang et al. (1992) não violam o critério de Caughey e O’Kelly (1965). De fato Caughey e O’Kelly (1965) tratam da matriz modal completa (todos os modos) e não de modos individuais. Proporcionalidade é uma hipótese de conveniência matemática. Sob este ponto de vista, um sistema é definido com amortecimento proporcional quando há uma matriz real que diagonaliza simultaneamente todas as três matrizes do sistema, isto é, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez.

Inman (1995) traz um exemplo bastante interessante para ilustrar a diferença nos valores obtidos para a frequência natural ao se calcular as frequências naturais de um sistema de dois graus de liberdade. O autor criou um “fator de proporcionalidade” α que pode variar de 0 a 1, sendo que o valor α igual a 0 corresponde a um sistema proporcional e igual a 1 corresponde a um sistema com forte não-proporcionalidade no amortecimento. Analisando os resultados, Inman (1995) chegou à conclusão de que a diferença nos resultados das frequências naturais pode chegar a até aproximadamente dez por cento, para o caso mais crítico, em que $\alpha = 1$.

Balmès (1997) relata os resultados obtidos na identificação de modos de vibrar (reais) a partir dos modos complexos experimentais. O autor aponta a necessidade de se obter os

modos de vibrar para comparação com modelos de elementos finitos não-amortecidos e lembra que o amortecimento introduz um acoplamento entre os modos de vibrar e que, em geral, não há uma relação simples entre modos de vibrar reais clássicos e os modos complexos no caso geral de amortecimento. O artigo apresenta resultados experimentais obtidos em um interferômetro e os compara com um modelo em elementos finitos para validar sua teoria.

Prells e Friswell (1999) investigam a diferença entre modelos de amortecimento proporcional e viscoso geral. No caso de amortecimento viscoso geral, a matriz modal depende de uma matriz ortonormal, que representa a fase entre os diferentes graus de liberdade do modelo. Os autores mostram que, no caso do amortecimento proporcional, essa matriz ortonormal torna-se a matriz identidade, que permite uma normalização da matriz modal, que será real. Consequentemente, esta matriz ortonormal pode servir como uma medida da diferença entre modelos de amortecimento viscoso geral e proporcional. Os autores apresentam dois exemplos de simulação, em que discutem as proposições teóricas lançadas por eles. Um dos modelos para simulação apresenta dois graus de liberdade e outro com cinquenta graus de liberdade.

Kefu Liu (2000) propõe três novos índices para quantificar a não-proporcionalidade do amortecimento viscoso. Os três índices fazem uso de modos complexos. O primeiro índice mede a correlação entre partes reais e imaginárias do modo complexo. Para computar o segundo índice, o modo complexo é escalonado de tal forma que as partes imaginárias do modo são minimizadas. Então as magnitudes das partes imaginárias dos modos escalonados são usadas como indicador da não-proporcionalidade do amortecimento. O terceiro índice explora a estrutura da matriz modal complexa. Com uma baixa da não-proporcionalidade do amortecimento, um modo complexo é dominado por modo normal homogêneo ou possui acoplamento modal fraco. Assim, este terceiro índice mede a intensidade do acoplamento

modal quando o modo complexo é representado por uma combinação linear dos modos de vibrar. Os índices propostos têm várias características distintas. Primeiro, eles caracterizam a não-proporcionalidade do amortecimento através de propriedades do modo complexo. Segundo, sua computação é simples. Terceiro, eles são menos sensíveis a ruídos presentes na medição dos dados.

Kasai e Link (2002) propõem uma técnica para determinação da matriz simétrica de amortecimento não-proporcional a partir dos parâmetros modais identificados e compara com os resultados da identificação de sistemas não-amortecidos obtidos por meio de um programa computacional desenvolvido na Alemanha, o ISSPA. Foram apresentados resultados numéricos e experimentais para a validação do método proposto.

Starek e Inman (2004) propõe a solução do problema inverso ou seja a determinação das matrizes de coeficiente simétrica real e positiva definida que representam as matrizes normalizadas de massa velocidade e posição, dados um conjunto de autovalores e autovetores complexos. São apresentadas duas soluções numéricas para um sistema vibratório sub-amortecido com amortecimento não-proporcional.

Kim (2006) discute um novo método iterativo para se obter a solução de um sistema com amortecimento não-proporcional. Por meio de resultados experimentais em um painel veicular, o autor mostra que o método híbrido de Jacobi, proposto no trabalho, é bastante eficiente para a análise da resposta de sistemas com amortecimento não-proporcional.

CAPÍTULO 3

TEORIA BÁSICA DE VIBRAÇÕES COM AMORTECIMENTO PROPORCIONAL E NÃO PROPORCIONAL

No estudo de um sistema dinâmico é importante conhecer o modelo matemático que descreve seu comportamento. Este capítulo traz os conceitos relacionados ao estudo de vibrações com amortecimento proporcional e não-proporcional e sua representação matemática através de modelos no espaço de configuração e no espaço de estado em tempo contínuo.

O estudo do comportamento dinâmico de estruturas mecânicas flexíveis pode ser feito, entre vários métodos, através de sua discretização e da utilização do método da *superposição modal*. O método da superposição modal calcula a resposta de cada modo de vibrar separadamente e a seguir obtém a resposta total por meio da soma das contribuições individuais de cada modo. Desta forma, o comportamento dinâmico do sistema pode ser compreendido através das características dos modos de vibrar e de como cada um contribui para o sistema, a denominada superposição modal. De forma geral, o método da superposição modal proporciona um grande conhecimento sobre o comportamento dinâmico e a sua dependência sobre os parâmetros do sistema estudado.

O conceito de *modos normais* em vibrações de sistemas mecânicos é associado às frequências naturais (ou fundamentais) de um sistema *linear*. Assim, os modos normais são definidos como movimentos particulares, livres e periódicos, que ocorrem sob condições iniciais apropriadas. Pode-se dizer, também, que estes movimentos são movimentos de vibração em *harmonia*. A existência destes modos possibilita a introdução de coordenadas normais que proporcionam o *desacoplamento* do sistema. A metodologia de estudo através da superposição modal é conhecida como *Análise Modal*.

Como a *Análise Modal* se baseia nos *modos normais* de vibrar, que são representados por sistemas discretos com 1 grau de liberdade, inicialmente consideraremos a sua representação matemática:

$$m \ddot{w} + c \dot{w} + k w = f \quad (3.1)$$

em que

m , c e k são as constantes de massa, amortecimento e rigidez do modelo,

$w = w(t)$ é o deslocamento da massa m ,

$\dot{w} = \dot{w}(t) = \frac{dw}{dt}$ é a velocidade,

$\ddot{w} = \ddot{w}(t) = \frac{d^2w}{dt^2}$ é a aceleração e

$f = f(t)$ é a força externa atuante na massa m .

A equação diferencial (3.1) possui a equação característica:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (3.2)$$

cujas raízes λ_1 e λ_2 são

$$\lambda_1 = -\sigma_1 + j\omega_{d1} \quad \lambda_2 = -\sigma_2 + j\omega_{d2} \quad (3.3)$$

Assim, a equação diferencial (3.1) possui a solução homogênea:

$$w = a e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_2 t} \quad (3.4)$$

em que a e b são constantes complexas dependentes das condições iniciais impostas ao sistema.

Para estruturas sub-amortecidas, que é a maior das estruturas reais sem dispositivos de amortecimento ativo ou passivo, as raízes λ_1 e λ_2 , são complexas conjugadas, bem como as constantes a e b são complexas conjugadas uma da outra. Desta forma, para sistemas sub-amortecidos, as raízes da equação característica ficam:

$$\lambda_1 = -\sigma_d + j\omega_d \quad \lambda_2 = \lambda_1^* = -\sigma_d - j\omega_d \quad (3.5)$$

na qual $()^*$ é o complexo conjugado de $()$.

Definindo-se ζ como fator de amortecimento e ω_n como frequência natural do sistema, as raízes (3.5) podem ser reescritas como:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.6)$$

Deve-se também observar que a solução da equação homogênea (3.2) dada em (3.4) pode ser escrita sem a utilização de números complexos, somente utilizando as

funções seno, cosseno e exponencial $w = c e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi)$ onde ω_d é a frequência natural amortecida dada por $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.

Com o conhecimento dos sistemas com 1 grau de liberdade pode estudar sistemas discretos com n graus de liberdade. Para simplificar a notação, todos os vetores ou matrizes serão representados por letras em negrito, maiúsculas representando matrizes e minúsculas representando vetores.

Inicialmente considera-se a equação de movimento livre:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

em que

$\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ é a matriz de massa positiva-definida,

$\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ é a matriz de amortecimento,

$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$ é matriz de rigidez,

$\mathbf{w} = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n]^T$ é o vetor deslocamento,

$\dot{\mathbf{w}} = \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \left[\frac{dw_1}{dt} \quad \frac{dw_2}{dt} \quad \cdots \quad \frac{dw_n}{dt} \right]^T$ é o vetor velocidade e

$\ddot{\mathbf{w}} = \frac{d^2\mathbf{w}}{dt^2} = \left[\frac{d^2w_1}{dt^2} \quad \frac{d^2w_2}{dt^2} \quad \cdots \quad \frac{d^2w_n}{dt^2} \right]^T$ é o vetor aceleração.

Assume-se que a equação (3.7) tenha uma solução da forma

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{q} e^{st} \quad , \quad \mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]^T \quad (3.8)$$

que substituída na equação (3.7) resulta num problema de autovalores quadrático

$$s^2 \mathbf{M} \mathbf{q} + s \mathbf{C} \mathbf{q} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

que, para sistemas *conservativos*, pode ser reduzido ao problema

$$\lambda \mathbf{M} \mathbf{q} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad , \quad \lambda = s^2 \quad (3.10)$$

cujos *autovalores* λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) e *autovetores* $\mathbf{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) são *reais* e cuja matriz modal formada por estes autovetores desacopla o sistema conservativo. Estes autovalores estão associados às *frequências naturais* $\lambda_i = -\omega_i^2$ e os autovetores $\mathbf{q}_i$ são chamados de *modos normais* ou às vezes *modos clássicos*.

Um movimento qualquer do sistema pode ser escrito como uma superposição das contribuições modais, na forma

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{q}_1 r_1(t) + \mathbf{q}_2 r_2(t) + \dots + \mathbf{q}_n r_n(t) = \mathbf{Q} \mathbf{r}(t) \quad (3.11)$$

com

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \dots \quad \mathbf{q}_n] \quad e \quad \mathbf{r}(t) = [r_1(t) \quad r_2(t) \quad \dots \quad r_n(t)]^T$$

onde $\mathbf{Q}$ é a *matriz modal* e $r_i(t)$, ($i=1,2,\dots,n$) são denominadas *coordenadas modais* ou *coordenadas normais*, que correspondem às contribuições de cada modo no movimento final em cada instante.

A dinâmica de cada modo é obtida substituindo-se a equação (3.11) na equação (3.7), pré-multiplicando esta por $\mathbf{Q}^T$. Tal operação resulta no sistema desacoplado livre:

$$m_i \ddot{r}_i + c_i \dot{r}_i + k_i r_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.12)$$

ou

$$\ddot{r}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{r}_i + \omega_i^2 r_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.13)$$

em que

$$m_i = \mathbf{q}_i^T \mathbf{M} \mathbf{q}_i, \quad c_i = \mathbf{q}_i^T \mathbf{C} \mathbf{q}_i = 2\zeta_i \omega_i m_i \quad e \quad k_i = \mathbf{q}_i^T \mathbf{K} \mathbf{q}_i = \omega_i^2 m_i$$

As constantes m_i , c_i e k_i são as chamadas massa modal, coeficiente de amortecimento modal e rigidez modal, respectivamente, e ω_i e ζ_i são a frequência natural e o fator de amortecimento modal, respectivamente, do i -ésimo modo.

Os vetores $\mathbf{q}_i$ representam a forma de vibrar do i -ésimo modo *normal* que neste caso também é denominado de modo *normal clássico*.

Quando ocorre um movimento no i -ésimo modo *normal* ou *clássico*, e somente neste modo:

- i-) o deslocamento em cada coordenada do sistema possui a mesma frequência ω_i ;
- ii-) as amplitudes dos deslocamentos são relacionadas por fatores de escala, que são as componentes do autovetor $\mathbf{q}_i$,
- iii-) existem momentos em que todos os valores dos deslocamentos relacionados com as coordenadas do sistema passam pelo zero simultaneamente, o que neste caso equivale a dizer que também passam por um máximo simultaneamente e periodicamente, desta forma a quando a energia cinética passa pelo seu máximo, a energia potencial (das deformações elásticas) passam pelo seu mínimo,

iv-) *existem pontos que permanecem em repouso indefinidamente, que são denominados de pontos nodais.*

No caso de sistemas com amortecimento, representado pela (3.9), pode-se iniciar o estudo por alguns casos que relacionam a matriz de amortecimento com as matrizes de massa e de rigidez. O denominado amortecimento de Rayleigh,

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K}, \quad a_0 \text{ e } a_1 \text{ constantes reais quaisquer,}$$

é um caso particular da forma proposta por Caughey (1965):

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \sum_i a_i [\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}]$$

Esta forma geral para o *amortecimento proporcional* possibilita, através de um breve desenvolvimento, a montagem de matrizes de amortecimento proporcional em função de fatores de amortecimento modais que se desejam para o sistema.

Sistemas que possuem matrizes de amortecimento como as descritas acima são denominadas, por motivos óbvios, de sistemas com *amortecimento proporcional*. Observa-se que o desacoplamento na segunda parcela da equação (3.13) ocorre para sistemas com *amortecimento proporcional*. Nestes casos é interessante notar que os autovetores que desacoplam o sistema (3.7) são os *mesmos* do sistema conservativo (3.10). Assim, todas as condições de ortogonalidade são idênticas às do sistema conservativo. Também ficam válidas, para sistemas com *amortecimento proporcional*, as características que descrevem os modos de vibrar clássicos com o acréscimo de poucas palavras no final do item iii (destacadas em **negrito**),

iii-) *existem momentos em que todos os valores dos deslocamentos relacionados com as coordenadas do sistema passam pelo zero simultaneamente, o que neste caso equivale a dizer que também passam por um máximo simultaneamente e periodicamente, desta forma a quando a energia cinética passa pelo seu máximo, a energia potencial (das deformações elásticas) passam pelo seu mínimo, **cujos valores decaem com o tempo e são dependentes do fator de amortecimento e frequência natural do modo.***

Na presença de amortecimento que **não** possibilite o desacoplamento da expressão (3.9) é dito que o sistema possui amortecimento *não proporcional*, e a matriz modal $\mathbf{Q}$ da equação (3.10) não desacopla completamente a equação (3.9), não ocorrendo a diagonalização da matriz $\mathbf{C}$.

Para *qualquer* matriz $\mathbf{C}$, uma solução geral através do método da superposição modal pode ser obtida transformando o sistema de n equações de segunda ordem (3.7) em um sistema de $2n$ equações de primeira ordem, incluindo as velocidades como variáveis independentes, definidas por

$$\mathbf{y} = \dot{\mathbf{w}} \quad (3.14)$$

e a equação (3.7) pode ser escrita como

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{C} \mathbf{y} + \mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

Tomando a equação (3.15) e a identidade

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}} - \mathbf{M} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

obtem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

ou, numa forma mais compacta,

$$\overline{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{K}} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

com

$$\overline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \overline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}$$

em que as matrizes $\overline{\mathbf{M}}$ e $\overline{\mathbf{K}}$ não têm significados físicos de massa e rigidez, sendo esta notação usada apenas por conveniência, e foi introduzido o vetor de *estado*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Admitindo uma solução da equação (3.18) na forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{q} e^{\lambda t} \quad , \quad \mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_{2n}]^T \quad (3.20)$$

que, substituída na equação (3.18), resulta no problema de autovalores $2n \times 2n$ dado por

$$\lambda \overline{\mathbf{M}} \mathbf{q} + \overline{\mathbf{K}} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

Uma outra forma de escrever a equação (3.18) é

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D} \mathbf{x} \quad (3.22)$$

em que

$$\mathbf{D} = -\overline{\mathbf{M}}^{-1} \overline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

com

$$\mathbf{A} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \quad , \quad \mathbf{B} = -\mathbf{C}^{-1} \mathbf{K} \quad \text{e} \quad \mathbf{I} \text{ é a matriz identidade} \quad (3.23)$$

É claro que a equação (3.22) admite a solução (3.20), resultando no problema de autovalores $2n \times 2n$ dado por

$$\lambda \mathbf{q} = \mathbf{D} \mathbf{q} \quad (3.24)$$

As equações (3.21) e (3.24) são dois problemas de autovalores equivalentes que, *em geral*, possuem $2n$ autovalores e $2n$ autovetores *distintos*, existindo sistemas em que ocorrem autovalores repetidos (Newland, 1989). Aqui, será analisado somente o caso em que *todos* os autovalores e autovetores são *complexos* e *distintos*; as condições em que isto ocorre podem ser encontradas em Iman e Andry (1980). Como as matrizes $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{K}$ são *reais*, os coeficientes dos polinômios característicos dos problemas (3.21) e (3.24) também são reais e, portanto (Jennings, 1985):

i-) se λ_i é autovalor $\Rightarrow \lambda_i^*$ também é autovalor;

ii-) se $\mathbf{q}_i$ é autovetor $\Rightarrow \mathbf{q}_i^*$ também é autovetor,

onde $()^*$ é o complexo conjugado de $()$.

Usando novamente a superposição modal, pode-se compor um movimento qualquer do sistema (3.21) ou (3.24) na forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{q}_1 r_1(t) + \mathbf{q}_2 r_2(t) + \cdots + \mathbf{q}_{2n} r_{2n}(t) = \mathbf{Q} \mathbf{r}(t) \quad (3.25)$$

em que

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{2n}] \quad \text{e} \quad \mathbf{r}(t) = [r_1(t) \quad r_2(t) \quad \cdots \quad r_{2n}(t)]^T$$

Da equação (3.21) pode-se obter

$$\begin{cases} \lambda_r \bar{\mathbf{M}} \mathbf{q}_r = -\bar{\mathbf{K}} \mathbf{q}_r \\ \lambda_s \bar{\mathbf{M}} \mathbf{q}_s = -\bar{\mathbf{K}} \mathbf{q}_s \end{cases} \quad (3.26)$$

pré-multiplicando a primeira por $\mathbf{q}_s^T$ e a segunda por $\mathbf{q}_r^T$ resulta

$$\begin{cases} \lambda_r \mathbf{q}_s^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{q}_r = -\mathbf{q}_s^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{q}_r \\ \lambda_s \mathbf{q}_r^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{q}_s = -\mathbf{q}_r^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{q}_s \end{cases} \quad (3.27)$$

e, transpondo a primeira, obtém-se

$$\begin{cases} \lambda_r \mathbf{q}_r^T \bar{\mathbf{M}}^T \mathbf{q}_s = -\mathbf{q}_r^T \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{q}_s \\ \lambda_s \mathbf{q}_r^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{q}_s = -\mathbf{q}_r^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{q}_s \end{cases} \quad (3.28)$$

Usando o fato de $\bar{\mathbf{M}}$ e $\bar{\mathbf{K}}$ serem simétricas, ou seja,

$$\bar{\mathbf{M}}^T = \bar{\mathbf{M}} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{K}}^T = \bar{\mathbf{K}}$$

a equação (3.28) fica

$$\begin{cases} \lambda_r \mathbf{q}_r^T \overline{\mathbf{M}} \mathbf{q}_s = -\mathbf{q}_r^T \overline{\mathbf{K}} \mathbf{q}_s \\ \lambda_s \mathbf{q}_r^T \overline{\mathbf{M}} \mathbf{q}_s = -\mathbf{q}_r^T \overline{\mathbf{K}} \mathbf{q}_s \end{cases} \quad (3.29)$$

Subtraindo a segunda equação da primeira na (3.29), obtém-se

$$(\lambda_r - \lambda_s) \mathbf{q}_r^T \overline{\mathbf{M}} \mathbf{q}_s = 0 \quad (3.30)$$

para $\lambda_r \neq \lambda_s$, o que permite a obtenção da relação de ortogonalidade

$$\mathbf{q}_r^T \overline{\mathbf{M}} \mathbf{q}_s = 0 \quad (3.31)$$

e, conseqüentemente de (3.29),

$$\mathbf{q}_r^T \overline{\mathbf{K}} \mathbf{q}_s = 0 \quad (3.32)$$

Por outro lado, multiplicando a primeira equação da (3.26) por $\mathbf{q}_r^T$ obtém-se

$$\lambda_r \mathbf{q}_r^T \overline{\mathbf{M}} \mathbf{q}_r = -\mathbf{q}_r^T \overline{\mathbf{K}} \mathbf{q}_r \quad (3.33)$$

o que proporciona uma expressão para o autovalor

$$\lambda_r = -\frac{\mathbf{q}_r^T \overline{\mathbf{K}} \mathbf{q}_r}{\mathbf{q}_r^T \overline{\mathbf{M}} \mathbf{q}_r} \quad (3.34)$$

Substituindo a (3.25) na (3.18) resulta

$$\overline{\mathbf{M}} \mathbf{Q} \dot{\mathbf{r}} + \overline{\mathbf{K}} \mathbf{Q} \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (3.35)$$

que, multiplicado por $\mathbf{Q}^T$ e utilizando as propriedades de ortogonalidade (3.31) e (3.32), pode-se obter

$$\hat{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{K}} \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (3.36)$$

em que

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{Q}^T \overline{\mathbf{M}} \mathbf{Q} \quad , \quad \hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \hat{m}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{m}_{2n} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{Q}^T \overline{\mathbf{K}} \mathbf{Q} \quad , \quad \hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \hat{k}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{k}_{2n} \end{bmatrix}$$

Portanto, o sistema de equações de primeira ordem (3.36) é desacoplado e suas equações são dadas por

$$\hat{m}_i \dot{r}_i(t) + \hat{k}_i r_i(t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (3.38)$$

cuja solução tem a forma

$$r_i(t) = r_i(0) e^{\lambda_i t} \quad (3.39)$$

em que

$$\lambda_i = -\frac{\hat{k}_i}{\hat{m}_i}$$

Desta maneira, pode-se escrever a equação (3.25) como

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{q}_i r_i(0) e^{\lambda_i t} \quad (3.40)$$

e como os autovalores e autovetores são todos complexos conjugados, a equação (3.34) também pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{q}_i r_i(0) e^{\lambda_i t} + \mathbf{q}_i^* r_i^*(0) e^{\lambda_i^* t} \right] \quad (3.41)$$

Tomando

$$r_i(0) = \rho_{0i} e^{j\theta_{0i}} \quad \text{e} \quad \lambda_i = \sigma_i + j\omega_{di} \text{ com } j = \sqrt{-1} \quad (3.42)$$

a equação (3.41) fica

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \rho_{0i} e^{\sigma_i t} \left[\mathbf{q}_i e^{j(\omega_{di} t + \theta_{0i})} + \mathbf{q}_i^* e^{-j(\omega_{di} t + \theta_{0i})} \right] \quad (3.43)$$

Lembrando que

$$\alpha e^{j\phi} + \alpha^* e^{-j\phi} = a \sin \phi + b \cos \phi \quad , \quad a \text{ e } b \text{ reais} \quad (3.44)$$

e fazendo

$$\mathbf{q}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{c}_i + j\mathbf{d}_i) \quad , \quad \mathbf{c} \text{ e } \mathbf{d} \text{ reais} \quad (3.45)$$

a equação (3.43) fica

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \rho_{0i} e^{\sigma_i t} \left[\mathbf{c}_i \cos(\omega_{di} t + \theta_{0i}) + \mathbf{d}_i \sin(\omega_{di} t + \theta_{0i}) \right] \quad (3.46)$$

e, finalmente,

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^n \rho_{0i} e^{\sigma_i t} a_i^{(k)} \sin(\omega_{di} t + \theta_{0i} + \varphi_i^{(k)}) \quad (3.47)$$

em que

$$a_i^{(k)} = \sqrt{[c_i^{(k)}]^2 + [d_i^{(k)}]^2} \quad , \quad \varphi_i^{(k)} = \arctg \frac{c_i^{(k)}}{d_i^{(k)}} \quad (3.48)$$

sendo $c_i^{(k)}$ e $d_i^{(k)}$ são os k -ésimos elementos dos vetores $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$, respectivamente, $a_i^{(k)}$ é o módulo do k -ésimo elemento do vetor $2\mathbf{q}_i$ e $\varphi_i^{(k)}$ é a fase deste mesmo vetor.

Quando para cada modo i todos os valores $\varphi_i^{(k)}$ são iguais, têm-se o caso do amortecimento proporcional. Se o amortecimento é nulo, então $\varphi_i^{(k)} = 0$ ou π . Deve-se lembrar que no caso de amortecimento proporcional todos os autovetores podem ser reduzidos às correspondentes formas reais, obtidas do sistema $n \times n$ associado (sem amortecimento). Neste caso os fatores de amortecimento modal e as frequências naturais podem ser obtidos através da expressão (3.6).

As dificuldades que podem ocorrer nesta abordagem estão relacionadas sempre com a interpretação dos autovalores e autovetores quando o amortecimento é *não proporcional*. Como os autovetores são números complexos os modos de vibrar são denominados de *modos complexos*. Neste caso a utilização da expressão (3.6) para estimação dos fatores de amortecimento e frequências naturais pode levar a erros expressivos que não podem ser avaliados. O mesmo ocorre para a forma do modo de vibrar, para o qual não existe expressão geral e totalmente segura para extrair a forma do modo quando os autovetores são complexos. Embora a expressão (3.47) que representa a superposição modal, e a expressão (3.48) que representa a contribuição modal, possuam somente valores reais e sejam relativamente simples, não fornecem uma passagem fácil para a obtenção de expressões que possibilitem a obtenção das frequências naturais amortecidas, fatores de amortecimento e formas modais.

A obtenção da forma de vibrar via expressões (3.45), (3.47) e (3.48) pode parecer simples, mas existem dificuldades. À primeira vista pode parecer que as primeiras n valores $a_i^{(k)}$ são as componentes diretas do que seriam as componentes da forma de vibrar, mas deve-se lembrar que os diferentes valores de fase $\varphi_i^{(k)}$ realizam um papel fundamental pois agora a forma do modo muda no tempo dentro de um período modal.

Da mesma forma que no caso conservativo ou com amortecimento proporcional, podemos descrever o comportamento de um sistema que é excitado no seu i -ésimo *modo complexo*, e somente neste modo

- i-) *o deslocamento em cada coordenada do sistema possui a mesma frequência ω_i , portanto existe um movimento em harmonia,*
- ii-) *as amplitudes dos deslocamentos são relacionadas por fatores de escala, que são as componentes $a_i^{(k)}$, mas a **forma varia** ao longo de um ciclo pois os valores de fase $\varphi_i^{(k)}$ são **diferentes** para um dado modo i ,*
- iii-) ***não** existem momentos em que todos os valores dos deslocamentos modais relacionados com as coordenadas do sistema passam pelo zero simultaneamente, o que neste caso equivale a dizer que também **não** passam por um máximo simultaneamente, desta forma **não se pode afirmar** que quando a energia cinética passa pelo seu máximo, a energia potencial (das deformações elásticas) passam pelo seu mínimo, ou vice-versa, pois as forças de amortecimento agora não permitem que se o sistema tenham condições de fase particulares (0^0 ou 180^0),*

iv-) ***não** existem pontos que permanecem em repouso indefinidamente, ou seja, não existem pontos nodais.*

Estas características do comportamento dos ***modos complexos*** colocam em cheque o próprio conceito da forma de vibrar, que no caso dos ***modos clássicos*** equivale à forma da estrutura que, quando excitado em único modo, passa por uma condição de máxima amplitude que também corresponde à condição de máxima energia potencial (das forças elásticas) e à condição de mínima energia cinética (das forças de inércia). Na verdade existe o desejo de se manter o mesmo conceito dos modos clássicos, a dificuldade é de se encontrar expressões que forneçam os principais parâmetros modais (forma de vibrar, fator de amortecimento, frequência natural e frequência natural amortecida) através dos autovalores e autovetores obtidos no sistema $2n \times 2n$.

A denominação de ***modos complexos*** está diretamente associada com o resultado do problema de autovalores. Podemos tirar algumas conclusões do exposto até agora:

- No caso dos ***modos clássicos***, a energia do sistema (cinética e potencial) em qualquer instante de tempo pode ser descrita no espaço de configuração de dimensão n (ou pelos n deslocamentos ou pelas n velocidades)
- No caso dos ***modos complexos***, a energia do sistema (cinética e potencial) em qualquer instante de tempo *não* pode ser descrita no espaço de configuração de dimensão n , pois como não existem relações de fase particulares há a

necessidade de $2n$ variáveis (todos os n deslocamentos e n velocidades) do espaço de fase.

- Os números complexos aparecem na solução do problema de autovalores, pois é a forma de descrever as relações de amplitudes e fases. A forma com números reais utilizando funções transcendentais como seno e cosseno não é uma forma *natural*.
- Não existe a “criação” de informação, pois dos $4n$ números reais obtidos metade deles é redundante ($2n$ números complexos conjugados).

Existem outros métodos da análise modal em outros domínios que possibilitam a extração da informação dos parâmetros modais sem a necessidade de passar pelas representações de fase utilizando números complexos. Shaw e Pierre (1993) originalmente e Mucheroni et al. (1993) e Tsunaki, (1994), desenvolveram pesquisas em métodos para sistemas com amortecimento não proporcional que obtêm diretamente $2n$ constantes reais que definem o modo de vibrar no espaço de fase. Metade destas constantes reais está relacionada diretamente com a forma dos *modos clássicos*. A dificuldade deste método é que é baseada em computação simbólica, não existindo ainda uma vertente numérica que possibilite a solução de sistemas com um grande de graus de liberdade.

A manutenção dos *modos clássicos* como referência para os *modos complexos* também é uma exigência do atual estado da engenharia na área, já que os programas de elementos finitos obtêm somente modos normais clássicos. Pode-se considerar que no estágio atual da tecnologia de computadores que memória e capacidade de processamento, ou seja, o tipo e quantidade de elementos, não são mais os fatores

limitantes na precisão de modelos de elementos finitos, mas a forma com que estes modelos são corrigidos e atualizados com dados experimentais em que se devem sintonizar as frequências naturais, formas de vibrar e fatores de amortecimento. Atualmente estes parâmetros modais são corrigidos através de expressões que não possuem validade totalmente provada e generalizada e de difícil avaliação quanto ao grau de incerteza que introduz nestes modelos.

Os métodos de identificação experimental de parâmetros modais geralmente não oferecem solução para estas questões, pois métodos de identificação modernos como o ERA obtém matrizes representativas do sistema $2n \times 2n$ em que numa fase posterior são realizadas operações de decomposição em autovalores e autovetores ou similares.

Existem alguns métodos de identificação experimental de parâmetros modais que buscam a identificação das frequências naturais não amortecidas e da forma de vibrar de modos normais clássicos em grandes estruturas com amortecimento não proporcional. Estes métodos caem numa classe especial que pode ser denominada de métodos de Apropriação de Força, que é uma subclasse dos métodos de sintonia modal ou ensaio da ressonância em fase. Apesar de algumas variantes destes métodos serem alguns dos métodos mais antigos, Lewis and Wrisley (1950), Asher (1958) e Trail-Nash (1958), da análise modal experimental e existirem variantes e derivações mais novas, Wrigth et al. (1999) e Brilhart and Hunt (1992), são pouco utilizados pois são procedimentos em parte manuais, exigem um alto grau de conhecimento experimental e um grande aparato experimental com grande número de excitadores eletromecânicos, amplificadores e geradores com capacidade de controle de fase

entre eles. Desta forma, em sua fase final estes métodos são baseados na “isolação” experimental de um único modo por meio da excitação da estrutura a cada frequência natural. Cada excitador produz uma excitação senoidal de mesma frequência, mas com fase e níveis de força que “cancelam” as forças de amortecimento da estrutura, “sintonizando” o modo normal já que é uma forma experimental de “retirar” o efeito do amortecimento da estrutura modo a modo. A frequência natural não amortecida é a frequência de excitação que junto com os níveis de excitação e de fase possibilitaram a “sintonia”. Como todos os pontos de resposta na estrutura estão em quadratura, a forma de vibrar está diretamente relacionada com os níveis das respostas.

CAPÍTULO 4

MODELOS SIMULADOS E RESULTADOS

Neste capítulo são apresentadas as simulações numéricas para três casos diferentes de um modelo dinâmico com três graus de liberdade, com o objetivo de se fazer uma análise quantitativa do comportamento das frequências naturais de sistemas com modelo de amortecimento proporcional e não-proporcional. Os resultados apresentados mostram que, ao se aplicar o modelo proporcional para obtenção dos autovalores e autovetores de um sistema com amortecimento qualquer, há uma discrepância nos resultados obtidos para as frequências naturais. O método clássico parte do pressuposto que o sistema possui amortecimento proporcional e até os dias atuais é utilizado em qualquer tipo de sistema como uma boa aproximação. Entretanto, os resultados apresentados nesta dissertação comprovam que há casos de sistemas com amortecimento não-proporcional em que há uma diferença significativa nas magnitudes das frequências naturais devido ao fato de se utilizar um modelo aproximado para o cálculo desses parâmetros.

O modelo de sistema dinâmico estudado possui 3 graus de liberdade, com 3 massas, 6 amortecedores e 4 molas e pode ser representado por um modelo discretizado como mostra a Figura 4.1. Considera-se que as molas assumem um comportamento linear e os amortecedores são do tipo viscoso linear. Este sistema será utilizado para os três casos em estudo neste trabalho.

Figura 4.1. Sistema massas-molas-amortecedores com 3 graus de liberdade.

Os movimentos na direção w dos três pontos de massas são descritos através do seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

A análise modal teórica é desenvolvida fazendo a excitação externa nula, isto é, considerando as vibrações livres. As matrizes de massa, amortecimento e rigidez do modelo acima possuem dimensões 3×3 e são dadas por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_6 & -c_2 & -c_6 \\ -c_2 & c_2 + c_3 + c_5 & -c_3 \\ -c_6 & -c_3 & c_3 + c_4 + c_6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}$$

As frequências naturais de um sistema com amortecimento proporcional estão relacionadas às frequências naturais do sistema não-amortecido através de uma relação bem conhecida, como visto na teoria. No caso de sistemas com amortecimento não-proporcional, a relação não é conhecida. Há uma variação nos valores das frequências naturais calculadas pelas expressões do sistema proporcional, na medida em que se varia o amortecimento. Os

estudos feitos a seguir mostram que há uma variação na magnitude da frequência natural estimada conforme a variação do amortecimento do sistema.

As raízes da equação característica podem ser representadas por:

$$\lambda = -a \pm ib \quad (4.2)$$

Para C proporcional tem-se que

$$a = \zeta \omega_n \quad (4.3)$$

e

$$b = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (4.4)$$

Entretanto, para C não-proporcional estas mesmas expressões são também usadas, mas deve-se ressaltar que: $a \neq \zeta \omega_n$ e $b \neq \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. Portanto, (4.3) e (4.4) são usadas de forma aproximada nestes casos.

Sendo a frequência natural (ω_n) não dependente da matriz de amortecimento, pois depende apenas das matrizes de massa e rigidez, como explicar a mudança no valor da frequência natural obtida nos casos de amortecimento não-proporcional? Observa-se que a influência da não-proporcionalidade do amortecimento parece aumentar a diferença na estimação da frequência natural, mas, isto nem sempre ocorre como se verá a seguir.

Nas identificações de sistemas dinâmicos, um dos parâmetros importantes é a magnitude da frequência natural. Nos casos de amortecimento não proporcional esses valores não são obtidos exatamente. Entretanto, como saber se o valor obtido nas identificações experimentais é um valor da frequência natural com boa aproximação, uma vez que não se têm as matrizes de massa e rigidez, e não se sabe se o amortecimento é proporcional ou não proporcional? É necessário, portanto, que se obtenha aproximações melhores para a estimativa da frequência natural, mesmo para sistemas com amortecimento não-proporcional.

No caso dos autovalores complexos, obtidos para sistemas com amortecimento não-proporcional, como se comportam suas partes real e imaginária? Qual é a diferença entre o valor da frequência natural (ω_n) e o valor da frequência natural calculada para o sistema amortecido não-proporcionalmente utilizando-se as aproximações (4.3) e (4.4)?

As raízes da equação característica de 4.1 são complexas, dadas por :

$$\lambda = -a \pm ib \quad (4.5)$$

Para casos onde a matriz de amortecimento C é não proporcional, freqüentemente faz-se:

$$a = \tilde{\zeta} \tilde{\omega}_n \quad (4.6)$$

e

$$b = \tilde{\omega}_n \sqrt{1 - \tilde{\zeta}^2} \quad (4.7)$$

assim a frequência natural estimada ($\tilde{\omega}_n$) é o valor aproximado da frequência natural do sistema calculado através de hipótese de sistema amortecido proporcionalmente e fator de amortecimento modal estimado ($\tilde{\zeta}$) é o valor do fator de amortecimento modal calculado através de hipótese de sistema amortecido proporcionalmente.

Foram investigados três casos referentes ao modelo da Figura 4.1: um variando-se o amortecedor c_1 , o segundo variado-se o c_5 e um terceiro variando-se o c_6 . As participações destes valores na matriz de amortecimento estão mostradas após 4.1.

4.1 – Simulação numérica de sistemas dinâmicos com variação do elemento c_1 da matriz de amortecimento – Caso 1.

Tabela 4.1– Dados utilizados para o Caso 1

m_j (kg)	c_j N/(m/s)	k_j (N/m)
m_1 1	c_1 0...10	k_1 10
m_2 1	c_2 1	k_2 50
m_3 1	c_3 5	k_3 50
	c_4 5	k_4 50
	c_5 1	
	c_6 1	

Neste caso estudado varia-se somente o amortecedor c_1 , o qual influencia o elemento c_{11} da matriz de amortecimento, o que na prática pode ser mais facilmente implementado com a modificação de apenas um amortecedor variando de 0,0 a 10,0 com incremento de 1,0. Com informações obtidas através dos dados da Tabela 4.1 e da matriz C definidas anteriormente, é possível saber que o elemento c_{11} desta matriz de amortecimento irá variar de 2,0 Ns/m até 12,0 Ns/m. Os valores dos outros elementos continuam os mesmos. Assim a matriz C assumirá os seguintes valores em função da variação de c_{11} .

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & -5 \\ -1 & -5 & 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & -5 \\ -1 & -5 & 11 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 12 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & -5 \\ -1 & -5 & 11 \end{bmatrix}$$

A Tabela 4.2 exibe os ω_n e $\tilde{\omega}_n$ calculados para c_1 variando de 0,0 até 10,0 com incremento de 1,0 para as primeiras, segundas e terceiras frequências naturais do Caso 1. São apresentadas também as diferenças ($\tilde{\omega}_n - \omega_n$) entre elas.

Tabela 4.2 – Valores de $\tilde{\omega}_n$ e ω_n calculados para c_1 variando de 0,0 a 10,0.

	Frequências naturais (ω_n)					
	ω_{n1}		ω_{n2}		ω_{n3}	
	3,8746		9,0263		12,7872	
	Frequências naturais estimadas ($\tilde{\omega}_n$)			$\tilde{\omega}_n - \omega_n$		
c_1	$\tilde{\omega}_{n1}$	$\tilde{\omega}_{n2}$	$\tilde{\omega}_{n3}$	$\tilde{\omega}_{n1} - \omega_{n1}$	$\tilde{\omega}_{n2} - \omega_{n2}$	$\tilde{\omega}_{n3} - \omega_{n3}$
0	3,8955	9,9714	11,5134	0,0209	0,9451	-1,2738
1	3,8841	10,0371	114714	0,0090	1,1080	-0,3158
2	3,8864	10,0679	11,4296	0,0118	1,0416	-1,3576
3	3,9036	10,0491	11,4005	0,0290	1,0228	-1,3867
4	3,9378	9,9362	11,4299	0,0632	0,9099	-1,3573
5	3,9926	9,6590	11,5965	0,1180	0,6327	-1,1907
6	4,0735	9,2854	11,8234	0,1989	0,2591	-0,9638
7	4,1884	8,8867	12,0152	0,3138	-0,1396	-0,7720
8	4,3444	8,4642	12,1619	0,4698	-0,5621	-0,6253
9	4,5310	8,0442	12,2699	0,6564	-0,9821	-0,5173
10	4,6971	7,7120	12,3459	0,8225	-1,3143	-0,4413

A Figuras 4.2 exibe a variação de $\tilde{\omega}_n$ e ω_n obtidas para a primeira frequência natural, observando-se os valores de massa, amortecimento e rigidez apresentados na Tabela 4.1 para o c_1 variando de 0,0 a 10,0 com incremento de 1,0. Observa-se que os valores de $\tilde{\omega}_n$ variam significativamente com a variação de c_1 enquanto o valor de ω_n permanece constante.

Figura 4.2 – Primeira frequência natural ($\tilde{\omega}_{n1}$) estimada em função da variação de c_1 .

A Figura 4.3 mostra a variação da parte real do primeiro autovalor em função de c_1 .

Figura 4.3 – Parte real do primeiro autovalor: $\lambda_1 = -a_1 \pm ib_1$.

A figura 4.4 mostra a variação da parte imaginária do primeiro autovalor em função de c_1 .

Figura 4.4 – Parte imaginária do primeiro autovalor: $\lambda_1 = -a_1 \pm ib_1$

A Figura 4.5 exibe a variação de $\tilde{\omega}_n$ e ω_n obtidas para a segunda frequência natural, observando-se os valores de massa, amortecimento e rigidez apresentados na Tabela 4.1 para o c_1 variando de 0,0 a 10,0 com incremento de 1,0. Observa-se que os valores de $\tilde{\omega}_n$ variaram significativamente. O valor de ω_n permanece constante.

Figura 4.5 – Segunda frequência natural ($\tilde{\omega}_{n2}$) estimada em função da variação de c_1 .

A figura 4.6 mostra a variação da parte real do segundo autovalor em função de c_1 .

Figura 4.6 – Parte real do segundo autovalor: $\lambda_2 = -a_2 \pm ib_2$.

A figura 4.7 mostra a variação da parte imaginária do segundo autovalor em função de c_1 .

Figura 4.7 – Parte imaginária do segundo autovalor: $\lambda_2 = -a_2 \pm ib_2$.

A Figura 4.8 exibe a variação de $\tilde{\omega}_n$ e ω_n obtidas para a terceira frequência natural, observando-se os valores de massa, amortecimento e rigidez apresentados na Tabela 4.1 para

o c_1 variando de 0,0 a 10,0 com incremento de 1,0. Nota-se que houve uma variação significativa dos valores de $\tilde{\omega}_n$. O valor de ω_n permaneceu constante.

Figura 4.8 – Terceira frequência natural ($\tilde{\omega}_{n3}$) estimada em função da variação de c_1 .

A figura 4.9 mostra a variação da parte real do terceiro autovalor em função de c_1 .

Figura 4.9 – Parte real do terceiro autovalor: $\lambda_3 = -a_3 \pm ib_3$.

A figura 4.10 mostra a variação da parte imaginária do terceiro autovalor em função de c_1

Figura 4.10 – Parte imaginária do terceiro autovalor: $\lambda_3 = -a_3 \pm ib_3$.

A Tabela 4.3 mostra o erro (ε) em porcentagem calculado para a diferença: $\tilde{\omega}_n - \omega_n$.

Na primeira linha da tabela são exibidos os valores das freqüências naturais calculadas para o sistema não-amortecido. Na segunda, quarta e sexta colunas são exibidos os valores das primeiras, segundas e terceiras freqüências naturais estimadas calculadas para c_1 variando de 0 a 10. Os erros calculados para cada freqüência estão descritos nas colunas três, cinco e sete. A expressão para o cálculo do erro é descrita abaixo:

$$\varepsilon = \left(\left| \frac{\tilde{\omega}_n - \omega_n}{\omega_n} \right| \right) * 100$$

É observado que, para o Caso 1, a porcentagem de erro (ε) fica entre 0,2% e 21,2% para $\tilde{\omega}_{n1}$, 1,5% e 14,6% para $\tilde{\omega}_{n2}$ e 2,5% a 10,8% para $\tilde{\omega}_{n3}$. Sendo 21,2% o maior erro calculado para o Caso 1.

Tabela 4.3 – Erro, calculado em porcentagem para $\tilde{\omega}_n - \omega_n$.

c_1	ω_{n1}		ω_{n2}		ω_{n3}	
	3,8746		9,0263		12,7872	
	$\tilde{\omega}_{n1}$	ε_1 %	$\tilde{\omega}_{n2}$	ε_2 %	$\tilde{\omega}_{n3}$	ε_3 %
0	3,896	0,5	9,971	10,5	11,513	10,0
1	3,884	0,2	10,04	12,3	11,4714	2,5
2	3,886	0,3	10,07	11,5	11,43	10,6
3	3,904	0,7	10,05	11,3	11,401	10,8
4	3,938	1,6	9,936	10,1	11,43	10,6
5	3,993	3,0	9,659	7,0	11,597	9,3
6	4,074	5,1	9,285	2,9	11,823	7,5
7	4,188	8,1	8,887	1,5	12,015	6,0
8	4,344	12,1	8,464	6,2	12,162	4,9
9	4,531	16,9	8,044	10,9	12,27	4,0
10	4,697	21,2	7,712	14,6	12,346	3,5

A Figura 4.11 mostra o resumo da variação da porcentagem dos erros obtidos para $\tilde{\omega}_n$.

Figura 4.11 – Variação da porcentagem de erro obtida para ω_n .

É mostrada na Tabela 4.4 a variação de $\tilde{\zeta}$ em função do elemento c_1 , variando de 0,0 a 10,0 com incremento de 1,0.

Tabela 4.4 – Fatores de amortecimento estimados em função da variação de c_1 .

c_1	$\tilde{\zeta}_1$	$\tilde{\zeta}_2$	$\tilde{\zeta}_3$
0	0,1935	0,2725	0,5671
1	0,2549	0,3047	0,5625
2	0,3164	0,3395	0,5558
3	0,3787	0,3779	0,5460
4	0,4426	0,4208	0,5316
5	0,5091	0,4618	0,5179
6	0,5800	0,4914	0,5138
7	0,6575	0,5116	0,5160
8	0,7458	0,5227	0,5210
9	0,8488	0,5205	0,5271
10	0,9638	0,5040	0,5335

A Figura 4.12 mostra que houve um aumento para $\tilde{\zeta}_1$ em função do c_1 variando de 0,0 até 10,0. Na Figura 4.13 $\tilde{\zeta}_2$, aumentou com c_1 variando de 0,0 até 8,0 e diminuiu com c_1 maior do que 8,0 e na Figura 4.14 houve diminuição do $\tilde{\zeta}_3$ para c_1 menor do que 6,0 e um aumento para c_1 maior do que 6,0.

Figura 4.12 – Estimativas do primeiro fator de amortecimento modal.

Figura 4.13 – Estimativas do segundo fator de amortecimento modal

Figura 4.14 – Estimativas do terceiro fator de amortecimento modal

4.2 – Simulação numérica de sistemas dinâmicos com variação do elemento c_5 da matriz de amortecimento – Caso 2.

Tabela 4.5– Dados utilizados para o Caso 2

m_j (kg)	c_j N/(m/s)	k_j (N/m)
m_1 1	c_1 1	k_1 10
m_2 1	c_2 1	k_2 50
m_3 1	c_3 5	k_3 50
	c_4 5	k_4 50
	c_5 0 ... 10	
	c_6 1	

Neste caso estudado varia-se somente o amortecedor c_5 , o qual influencia o elemento c_{22} da matriz de amortecimento, o que na prática pode ser mais facilmente implementado com a modificação de apenas um amortecedor variando de 0,0 a 10,0 com incremento de 1,0. Com informações obtidas através dos dados da Tabela 4.5 e da matriz C definida anteriormente, é possível saber que o elemento c_{22} desta matriz de amortecimento irá variar

de 6,0 Ns/m até 16,0 Ns/m. Os valores dos outros elementos continuam os mesmos. Assim a matriz C assumirá os seguintes valores em função da variação de c_{22} :

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -5 \\ -1 & -5 & 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & -5 \\ -1 & -5 & 11 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 12 & -1 & -1 \\ -1 & 16 & -5 \\ -1 & -5 & 11 \end{bmatrix}$$

A Tabela 4.6 exibe os valores de ω_n e $\tilde{\omega}_n$ calculados para c_5 variando de 0,0 até 10,0 com incremento de 1,0 para as primeiras, segundas e terceiras freqüências do Caso 2. São apresentadas também as diferenças ($\tilde{\omega}_n - \omega_n$) entre elas.

Tabela 4.6 – Valores de $\tilde{\omega}_n$ e ω_n calculados para c_5 variando de 0,0 a 10

	Frequências naturais (ω_n)					
	ω_{n1}		ω_{n2}		ω_{n3}	
	3,8746		9,0263		12,7872	
	Frequências naturais estimadas ($\tilde{\omega}_n$)			$\tilde{\omega}_n - \omega_n$		
c_5	$\tilde{\omega}_{n1}$	$\tilde{\omega}_{n2}$	$\tilde{\omega}_{n3}$	$\tilde{\omega}_{n1} - \omega_{n1}$	$\tilde{\omega}_{n2} - \omega_{n2}$	$\tilde{\omega}_{n3} - \omega_{n3}$
0	3,8775	10,1804	11,3292	0,0029	1,1541	1,4580
1	3,8841	10,0371	11,4714	0,0095	1,0108	1,3158
2	3,8987	9,8878	11,6008	0,0241	0,8615	1,1864
3	3,9223	9,7401	11,7061	0,0477	0,7138	1,0811
4	3,9560	9,5974	11,7788	0,0814	0,5711	1,0084
5	4,0018	9,4604	11,8127	0,1272	0,4341	0,9745
6	4,0623	9,3286	11,8011	0,1877	0,3023	0,9861
7	4,1420	9,2007	11,7351	0,2674	0,1744	1,0521
8	4,2477	9,0755	11,6010	0,3731	0,0492	1,1862
9	4,3920	8,9516	11,3750	0,5174	-0,0747	1,4122
10	4,6001	8,8284	11,0120	0,7255	-0,1979	1,7752

A Figura 4.15 exibe a variação de $\tilde{\omega}_n$ e ω_n obtidas para a primeira freqüência natural, observando-se os valores de massa, amortecimento e rigidez apresentados na Tabela 4.5 para

o c_5 variando de 0,0 a 10,0 com incremento de 1,0. Os valores de $\tilde{\omega}_n$ mudaram significativamente com c_5 variando de 0,0 a 10,0 e o valor de ω_n permaneceu constante.

Figura 4.15 – Primeira frequência natural ($\tilde{\omega}_{n1}$) estimada em função da variação de c_5

A Figura 4.16 mostra a variação da parte real do primeiro autovalor em função de c_5 .

Figura 4.16 – Parte real do primeiro autovalor: $\lambda_1 = -a_1 \pm ib_1$.

A Figura 4.17 mostra a variação da parte imaginária do primeiro autovalor em função de c_5

Figura 4.17 – Parte imaginária do primeiro autovalor: $\lambda_1 = -a_1 \pm ib_1$.

A Figura 4.18 exibe a variação de $\tilde{\omega}_n$ e ω_n obtida para a segunda frequência natural, observando-se os valores de massa, amortecimento e rigidez apresentados na Tabela 4.5 para o c_5 variando de 0,0 a 10,0 com incremento de 1,0. Observa-se que os valores de $\tilde{\omega}_n$ tiveram uma variação significativa para c_5 variando de 0,0 a 10,0. O ω_n permaneceu constante.

Figura 4.18 – Segunda frequência natural ($\tilde{\omega}_{n2}$) estimada em função da variação de c_5 .

A Figura 4.19 mostra a variação da parte real do segundo autovalor em função de c_5 .

Figura 4.19 – Parte real do segundo autovalor: $\lambda_2 = -a_2 \pm ib_2$.

A Figura 4.20 mostra a variação da parte imaginária do segundo autovalor em função de c_5 .

Figura 4.20 – Parte imaginária do segundo autovalor: $\lambda_1 = -a_2 \pm ib_2$.

A Figura 4.21 exibe a variação de $\tilde{\omega}_n$ e ω_n obtidas para a terceira frequência natural, observando-se os valores de massa, amortecimento e rigidez apresentados na Tabela 4.5 para

o c_5 variando de 0,0 a 10,0 com incremento de 1,0. Observa-se que os valores de $\tilde{\omega}_n$ variaram com c_5 variando de 0,0 a 10,0. O valor de ω_n permaneceu constante.

Figura 4.21 – Terceira frequência natural ($\tilde{\omega}_{n3}$) estimada em função da variação de c_5 .

A Figura 4.22 mostra a variação da parte real do terceiro autovalor em função de c_5

Figura 4.22 – Parte real do terceiro autovalor: $\lambda_3 = -a_3 \pm ib_3$.

A Figura 4.23 mostra a variação da parte imaginária do terceiro autovalor em função de c_5 .

Figura 4.23 – Parte imaginária do terceiro autovalor: $\lambda_3 = -a_3 \pm ib_3$.

A Tabela 4.7 mostra o erro (ε) em porcentagem calculado para a diferença: $\tilde{\omega}_n - \omega_n$. Na primeira linha da tabela são exibidos os valores das frequências naturais calculadas para o sistema não-amortecido. Na segunda, quarta e sexta colunas são exibidos os valores das primeiras, segundas e terceiras frequências naturais estimadas calculadas para c_5 variando de 0 a 10. Os erros calculados para cada frequência estão descritos nas colunas três, cinco e sete. A expressão para o cálculo do erro é a mesma do Caso 1.

É observado que, para o Caso 2, a porcentagem de erro (ε) fica entre 0,07% e 18,72% para $\tilde{\omega}_{n1}$, 0,5% e 12,8% para $\tilde{\omega}_{n2}$ e 7,6% a 13,9% para $\tilde{\omega}_{n3}$. Sendo 18,72% o maior erro calculado para o Caso 2.

Tabela 4.7 – Erro calculado em porcentagem para $\tilde{\omega}_n - \omega_n$.

C_5	ω_{n1}		ω_{n2}		ω_{n3}	
	3,8746		9,0263		12,7872	
	$\tilde{\omega}_{n1}$	ε_1 %	$\tilde{\omega}_{n2}$	ε_2 %	$\tilde{\omega}_{n1}$	ε_3 %
0	3,8775	0,07	10,18	12,8	11,329	11,4
1	3,8841	0,25	10,037	11,2	11,471	10,3
2	3,8987	0,62	9,8878	9,5	11,601	9,3
3	3,9223	1,23	9,7401	7,9	11,706	8,5
4	3,956	2,10	9,5974	6,3	11,779	7,9
5	4,0018	3,28	9,4604	4,8	11,813	7,6
6	4,0623	4,84	9,3286	3,3	11,801	7,7
7	4,142	6,90	9,2007	1,9	11,735	8,2
8	4,2477	9,63	9,0755	0,5	11,601	9,3
9	4,392	13,35	8,9516	0,8	11,375	11,0
10	4,6001	18,72	8,8284	2,2	11,012	13,9

A Figura 4.24 mostra o resumo da variação da porcentagem dos erros obtidos para $\tilde{\omega}_n$.

Figura 4.24 – Variação da porcentagem de erro obtida para ω_n .

É mostrada na Tabela 4.8 a variação de $\tilde{\zeta}$ em função do elemento c_5 , variando de 0,0 a 10,0 com incremento de 1,0.

Tabela 4.8 – Fatores de amortecimento estimados em função da variação de c_5

c_5	$\tilde{\zeta}_1$	$\tilde{\zeta}_2$	$\tilde{\zeta}_3$
0	0,2048	0,2892	0,5528
1	0,2549	0,3047	0,5625
2	0,3054	0,3173	0,5751
3	0,3567	0,3275	0,5904
4	0,4091	0,3358	0,6077
5	0,4630	0,3427	0,6269
6	0,5191	0,3484	0,6475
7	0,5781	0,3532	0,6695
8	0,6412	0,3571	0,6927
9	0,7103	0,3601	0,7171
10	0,7893	0,3622	0,7421

As Figuras 4.25, 4.26 e 4.27 mostram que houve um aumento para $\tilde{\zeta}$ em função do c_5 variando de 0,0 até 10,0.

Figura 4.25 – Estimativas do primeiro fator de amortecimento modal.

Figura 4.26 – Estimativas do segundo fator de amortecimento modal.

Figura 4.27 – Estimativas do terceiro fator de amortecimento modal.

4.3 – Simulação numérica de sistemas dinâmicos com variação do elemento c_6 da matriz de amortecimento – Caso 3.

Tabela 4.9– Dados utilizados para o Caso 3

m_j (kg)	c_j N/(m/s)	k_j (N/m)
m_1 1	c_1 1	k_1 300
m_2 1	c_2 1	k_2 100
m_3 1	c_3 5	k_3 100
	c_4 5	k_4 100
	c_5 1	
	c_6 0 ... 10	

Neste caso estudado varia-se somente o amortecedor c_6 , o qual influencia os elementos c_{11} , c_{13} , c_{31} e c_{33} da matriz de amortecimento, o que na prática pode ser mais facilmente implementado com a modificação de apenas um amortecedor variando de 0,0 a 10,0 com incremento de 1,0. Com informações obtidas através dos dados da Tabela 4.9 e da matriz $[c]$ definidas anteriormente, é possível saber que a matriz C assumirá os seguintes valores em função da variação de c_6 :

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -0 \\ -1 & 7 & -5 \\ -0 & -5 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & -5 \\ -1 & -5 & 11 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 12 & -1 & -10 \\ -1 & 7 & -5 \\ -10 & -5 & 20 \end{bmatrix}$$

Figura 4.28 – Primeira frequência natural ($\tilde{\omega}_{n1}$) estimada em função da variação de c_6 .

A Figura 4.29 mostra a variação da parte real do primeiro autovalor em função de c_6 .

Figura 4.29 – Parte real do primeiro autovalor: $\lambda_1 = -a_1 \pm ib_1$.

A Figura 4.30 mostra a variação da parte imaginária do primeiro autovalor em função de c_6

Figura 4.30 – Parte imaginária do primeiro autovalor: $\lambda_1 = -a_1 \pm ib_1$.

A Figura 4.31 exibe a variação de $\tilde{\omega}_n$ e ω_n obtidas para a segunda frequência natural, observando-se os valores de massa, amortecimento e rigidez apresentados na Tabela 4.9 para c_6 variando de 0,0 a 10,0 com incremento de 1,0. Observa-se que os valores de $\tilde{\omega}_n$ variaram significativamente e o valor de ω_n permaneceu constante.

Figura 4.31 – Segunda frequência natural ($\tilde{\omega}_{n2}$) estimada em função da variação de c_6 .

A Figura 4.32 mostra a variação da parte real do segundo autovalor em função de c_6 .

Figura 4.32 – Parte real do segundo autovalor: $\lambda_2 = -a_2 \pm ib_2$.

A Figura 4.33 mostra a variação da parte imaginária do segundo autovalor em função de c_6 .

Figura 4.33 – Parte imaginária do segundo autovalor: $\lambda_2 = -a_2 \pm ib_2$.

A Figura 4.34 exibe a variação de $\tilde{\omega}_n$ e ω_n obtidas para a terceira frequência natural, observando-se os valores de massa, amortecimento e rigidez apresentados na Tabela 4.7 para

o c_6 variando de 0,0 a 10,0 com incremento de 1,0. Observa-se que os valores de $\tilde{\omega}_n$ variaram significativamente e o valor de ω_n permaneceu constante.

Figura 4.34 – Terceira frequência natural ($\tilde{\omega}_{n3}$) estimada em função da variação de c_6 .

A Figura 4.35 mostra a variação da parte real do terceiro autovalor em função de c_6 .

Figura 4.35 – Parte real do terceiro autovalor: $\lambda_3 = -a_3 \pm ib_3$.

A Figura 4.36 mostra a variação da parte imaginária do terceiro autovalor em função de c_6

Figura 4.36 – Parte imaginária do terceiro autovalor: $\lambda_3 = -a_3 \pm ib_3$.

A Tabela 4.11 mostra o erro (ε) em porcentagem calculado para a diferença: $\tilde{\omega}_n - \omega_n$.

Na primeira linha da tabela são exibidos os valores das frequências naturais calculadas para o sistema não-amortecido. Na segunda, quarta e sexta colunas são exibidos os valores das primeiras, segundas e terceiras frequências naturais estimadas calculadas para c_6 variando de 0 a 10. Os erros calculados para cada frequência estão descritos nas colunas três, cinco e sete. A expressão para o cálculo do erro é a mesma do Caso 1.

É observado que, para o Caso 3, a porcentagem de erro (ε) fica entre 0,4% e 6,6% para $\tilde{\omega}_{n1}$, 0,2% e 4,79% para $\tilde{\omega}_{n2}$ e 0,6% a 2,8% para $\tilde{\omega}_{n3}$. No Caso 3 são alterados 4 amortecedores e, comparado com o Caso 1 e o Caso 2, o Caso 3 apresenta as menores porcentagens de erro.

Tabela 4.11 – Erro calculado em porcentagem para $\tilde{\omega}_n - \omega_n$.

C_6	ω_{n1}		ω_{n2}		ω_{n3}	
	9,1100		16,3978		21,1688	
	$\tilde{\omega}_{n1}$	%	$\tilde{\omega}_{n2}$	%	$\tilde{\omega}_{n1}$	%
0	9,146	0,4	16,8	2,45	20,58	2,8
1	9,18	0,8	16,58	1,13	20,77	1,9
2	9,226	1,3	16,4	0,02	20,91	1,2
3	9,281	1,9	16,23	1,01	20,99	0,8
4	9,344	2,6	16,09	1,88	21,03	0,6
5	9,411	3,3	15,97	2,62	21,04	0,6
6	9,479	4,1	15,86	3,25	21,03	0,7
7	9,546	4,8	15,78	3,78	21,00	0,8
8	9,608	5,5	15,71	4,20	20,95	1,0
9	9,664	6,1	15,65	4,54	20,9	1,3
10	9,714	6,6	15,61	4,79	20,85	1,5

A Figura 4.37 mostra o resumo da variação da porcentagem dos erros obtidos para $\tilde{\omega}_n$.

Figura 4.37 – Variação da porcentagem de erro obtida para ω_n .

É mostrada na Tabela 4.12 a variação de $\tilde{\zeta}$ em função do elemento c_6 , variando de 0,0 a 1,0 com incremento de 1,0.

Tabela 4.12 – Fatores de amortecimento estimados em função da variação de c_6 .

c_6	$\tilde{\zeta}_1$	$\tilde{\zeta}_2$	$\tilde{\zeta}_3$
0	0,1593	0,3823	0,0787
1	0,1672	0,4122	0,1025
2	0,1743	0,4462	0,1233
3	0,1804	0,4842	0,1413
4	0,1853	0,5261	0,1571
5	0,1889	0,5719	0,1706
6	0,1912	0,6213	0,1822
7	0,1923	0,674	0,192
8	0,1923	0,7294	0,2002
9	0,1915	0,787	0,2071
10	0,1902	0,8463	0,2129

As Figuras 4.38, 4.39 e 4.40 mostram que houve um aumento para $\tilde{\zeta}$ em função do c_6 variando de 0,0 até 10,0

Figura 4.38– Estimativas do primeiro fator de amortecimento modal.

Figura 4.39 – Estimativas do segundo fator de amortecimento modal

Figura 4.40 – Estimativas do terceiro fator de amortecimento modal

Diversas simulações computacionais foram realizadas para outros modelos, variando-se os parâmetros dos amortecimentos como feito neste capítulo e estão apresentados no ANEXO A e ANEXO B.

O exemplo mostrado no ANEXO A foi baseado no exemplo de Inman (1995) com dois graus de liberdade. Foi criado um “fator de proporcionalidade” (α) que multiplicava a matriz inteira de amortecimento. Com α variando de 0,0 a 1,0, o valor de $\alpha = 0$ corresponde a um sistema proporcional e $\alpha \neq 0$ corresponde a um sistema com amortecimento não-proporcional. Inman chegou a conclusão de que a diferença nos resultados das frequências naturais pode chegar até aproximadamente 10% para o caso mais crítico em que $\alpha = 1$. Para o modelo exibido no ANEXO A com 3 graus de liberdade, constatou-se uma diferença nos resultados das frequências naturais estimadas de 4% para o caso mais crítico ($\alpha = 1$). A expressão para o cálculo do erro foi a mesma do Caso 1.

No caso mostrado no ANEXO B apenas o primeiro amortecedor (c_1) sofreu modificação de 0,0 a 5,0. Para $c_1 = 0$ o amortecimento era correspondente a um sistema proporcional e para $c_1 \neq 0$ o amortecimento era correspondente a um sistema não-proporcional. Para o ANEXO B, chegou-se a conclusão de que a diferença nos resultados das frequências naturais pode chegar até aproximadamente 32% para o caso mais crítico em que $c_1 = 5,0$. A expressão para o cálculo do erro foi a mesma do Caso 1.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

Nesta dissertação, procurou-se estudar o comportamento dinâmico de sistemas de três graus de liberdade, variando-se no Caso 1 o amortecedor c_1 , no Caso 2 o amortecedor c_5 e no Caso 3 o amortecedor c_6 a fim de analisar os valores obtidos para as frequências naturais, estimados a partir dos autovalores resultantes desses modelos. Os cálculos das frequências naturais e dos amortecimentos modais foram feitos admitindo-se a validade das relações entre estes parâmetros e os autovalores do problema como são bem conhecidos no caso do amortecimento proporcional.

Foram apresentados dados que possibilitam uma discussão sobre as diferenças encontradas entre os valores das frequências naturais e os valores estimados pelas expressões clássicas do amortecimento proporcional. Para o Caso 1 mostrado no Capítulo 4 a diferença percentual ficou entre 0,2 e 21% para ω_{n1} , 1,5 e 15% para ω_{n2} e 3,5 e 11% para ω_{n3} . Para o Caso 2 a diferença percentual ficou entre 0,07 e 19% para ω_{n1} , 0,5 e 13% para ω_{n2} e 7,6 e 14% para ω_{n3} . Para o Caso 3 a diferença percentual ficou entre 0,3 e 6,6% para ω_{n1} , 0,01 e 4,8% para ω_{n2} e 0,6 e 2,8% para ω_{n3} . No ANEXO A, as diferenças ficaram entre 0,03 e 4% para ω_{n1} , 0,01 e 2,22% para ω_{n2} e 0,02 e 1,53% para ω_{n3} . No ANEXO B, as diferenças ficaram entre 17 e 22% para ω_{n1} , 30 e 31,7% para ω_{n2} e 17 e 19% para ω_{n3} . Notou-se que

as maiores diferenças foram vistas no caso do ANEXO B onde houve apenas variação do elemento c_1 chegando até aproximadamente 40%, no Caso 1 com a variação do amortecedor c_1 chegando a 21% e no Caso 2 com a variação do amortecedor c_1 chegando a 19%. No Caso 3 e no Caso do ANEXO A onde mais de 3 elementos da matriz de amortecimento sofreram modificações, foram apresentadas as menores diferenças. Os fatores de amortecimento variaram numa faixa de 0,04 a 0,71 N/(m/s) para o caso do ANEXO A, 3,6 a 12 N/(m/s) para o caso do ANEXO B, 0,1 e 0,96 N/(m/s) para o Caso 1, de 0,2 a 0,78 N/(m/s) para o Caso 2 e de 0,15 a 0,84 N/(m/s) para o Caso 3, considerando o foco do estudo como sistemas subamortecidos. Não é possível avaliar percentualmente erros nestas estimativas de amortecimento.

Observou-se que para o caso de amortecimento não-proporcional, este procedimento pode levar a erros significativos na avaliação destes parâmetros. Nos problemas simulados é possível quantificar os erros nas avaliações das frequências naturais, sendo significativos para fatores de amortecimentos altos. Observou-se que para os fatores de amortecimento não é possível quantificar estes erros, sendo que seus valores são apenas aproximações baseadas na teoria de amortecimento proporcional.

Os resultados alcançados permitem concluir que existe a necessidade de se realizar pesquisas mais aprofundadas para desenvolver expressões que possibilitem a obtenção das frequências naturais não amortecidas e das formas dos modos clássicos em sistemas com amortecimento não proporcional, já que a precisão das expressões aproximadas utilizadas atualmente está aquém das necessidades atuais, principalmente se pensarmos nas áreas de utilização crítica como na correção e atualização de modelos de elementos finitos e no controle ativo de vibrações em estruturas.

Como trabalho futuro pretende-se estudar uma maneira de quantificar a não proporcionalidade do amortecimento criando-se um índice para dizer se o sistema é fraco ou fortemente amortecido não-proporcionalidade.

BIBLIOGRAFIA

ASHER, G.W., A.(1958). **“A Method of Normal Mode Excitation Using Admittance Measurements,”** *Proceedings of The National Specialist Meeting on Dynamics and Aerolasticity*, Institute of Aeronautical Science, pp. 69-76.

AVITABILE, P. (2002). **What is the difference between a complex mode and real normal mode?** SEM. Experimental Techniques, v.26. Issue 2. March. p. 13-14.

BALMÈS, E.(1997). **New results on the identification of normal modes from experimental complex modes.** Mechanical Systems and Signal Processing. V. 11 . p. 229-243.

BRILLHART, R.D., Hunt, D.L.(1992). **“Multiple Input Excitation Methods for the C-17 Transport Aircraft”** *Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference*, IMAC X.

BRANDON, J. A. (1984). A discussion of alternative duncan formulations of the eigenproblem for the Solution of nonclassically, viscously damped linear systems. **Journal of Applied Mechanics**, v. 51, n°4, p. 904-906.

CAUGHEY, T. K. (1960). Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems. **Journal of Applied Mechanics**. v. 82, p. 269-271.

CAUGHEY, T. K.; O'KELLY, M. E. J. (1965). Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems. **Shock and Vibration Digest**. v. 32, p. 583-588. September.

CHEN, C.T. (1999). **Linear system theory and design**. New York: Oxford University Press.

CLOUGH, R. W., MOJTAHEDI, S. (1976), Earthquake response analysis considering nonproportional damping, **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, 4, pp. 489–496.

CRAIG, R. Jr.(1981) **Structural vibration**. New York: John Wiley & Sons.

FRAZER, R.A; DUNCAM, W. J; COLLAR A.R. (1952). **Elementary Matrices**. Cambridge the University Press.

HURTY W.C.; RUBINSTEIN M. F. (1967). **Dynamics of Structures**. Eastern Economy ed. New Delhi: Prentice-Hall of India.

IBRAHIMBEGOVIC, A.; WILSON, E. L. (1988). Simple numerical algorithms for the mode superposition analysis of linear structural systems with non-proportional damping. **Computers & Structure**, v. 33, n°2, p. 523-531.

INMAN, D.J. and Andry, A.N.(1980). "Some Results on the Nature of Eigenvalues of Discrete Damped Linear Systems", **Journal of Applied Mechanics**, Vol. 47, pp. 927-930.

JENNINGS, A.(1985). **Matrix Computation for Engineers and Scientists**, John Wiley & Sons.

JO, J.S.; et al. (2003). Eigenvalue-counting methods for non-proportionally damped systems. **International Journal of Solids and Structures**. v. 40, p. 6457–6472. November.

KASAI, T.; LINK, M.(2002). Identification of non-proportional modal damping matrix and real normal modes. **Mechanical Systems and Signal Processing**. v. 16, p. 921–934. November.

KIM, C.-W. (2006). A preconditioned iterative method for modal frequency-response analysis of structures with non-proportional damping. **Journal of Sound and Vibration**. Cypress, v. 297, p. 1097–1103, April.

KIM, C.-W.; BENNIGHOF, J.K. (2006). Fast frequency response analysis of partially damped structures with non-proportional viscous damping. **Journal of Sound and Vibration**. Cypress, v.297, p. 1075–108, April.

LALLEMENT, G.; INMAN, D. J. (1995). A tutorial on complex eigenvalues.. **Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference**. p. 490.

LEWIS, R.C., WRISLEY, D.L.(1950). “A System for the Excitation of Pure Natural Modes of Complex Structures”, **Journal of Aeronautical Sciences**, Vol. 17, No. 11, pp 705-722.

MUCHERONI, M.F., BALTHAZAR, J.M. e TSUNAKI, R.H.(1993). **Um Método Numérico para a Determinação de Modos Normais Não Lineares no Plano de Fase**, *Anais do XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - XII COBEM*, Brasília, 7 a 10 de dezembro.

MUCHERONI, M.F. (2006) Vibrações Mecânicas: notas de aula. Novembro.

NEWLAND, D.E.(1989). **Mechanical Vibrations Analysis and Computation**, Longman Scientific and Technical.

PHANI, A. S. (2003). On Necessary and sufficient conditions for the existence of classical normal modes in damped linear dynamic systems.. **Journal of Sound and Vibration**. v. 264, p. 741-745.

PRELLS, V.; FRISWELL, M. I. (2000). Measure of non-proportional damping. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v.14, p. 125-137, March.

SHAW, S.W. and PIERRE, C.(1991). Non-Linear Normal Modes and Invariant Manifolds, **Journal of Sound and Vibrations**, Vol. 150(1), pp. 170-173.

SHAW, S.W. and PIERRE, C.(1993). Normal Modes for Nonlinear Vibratory Systems, **Journal of Sound and Vibrations**, Vol. 164(1), pp. 85-124.

SONDIPON, A. (2000) Calculation of derivative of complex modes using classical normal modes. **Computers and Structures**. V. 77, p. 625-633

SONDIPON A.; WOODHOUSE, J. (2001). Identification of Damping: Part 1, Viscous Damping.. **Journal of Sound and Vibration**. v. 243, p. 43-61.

SONDIPON A.; WOODHOUSE, J. (2001). Identification of Damping: Part 2, Viscous Damping.. **Journal of Sound and Vibration**. v. 243, p. 63-88.

STAREK, L.; INMAN, D. J. (2004). Design of nonproportional damped systems via symmetric positive inverse problems. **Journal of Vibration and Acosustics**, v. 126, p. 212-219, April.

SORRENTINO S.; MARCHESIELLO, S.; PIOMBO, B.A.D.(2003). A new analytical technique for vibration analysis of non-proportionally damped beams. **Journal of Sound and Vibration**. v. 265, p. 765–782. Received 23 May 2002.

SUN, T C; LUO, A C J; HAMIDZADEH, H R (2000). Simple numerical algorithms for the mode superposition analysis of linear structural systems with non-proportional damping. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics**. v.e 214, p. 181-187, March.

TRAIL-NASH, R.W.(1958). On the Excitation of Pure Natural Modes in Aircraft Resonance Testing, **Journal of Aeronautical Sciences**, Vol. 25, pp. 775-778.

TSE F.S.; MORSE I. E.; HINKLE R. T. (1978). **Mechanical vibrations**: theory and applications. 2.ed. Boston: Allyn and Bacon.

TSUNAKI, R.H.(1994). **Determinação de Modos Normais Lineares e Não Lineares no Espaço de Fase**, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, 164 p.

WRIGTH, J.R., COOPER, J. E., DESFORGES, M.J.(1999). Normal Mode Force Appropriation – Theory and Application **Mechanical Systems and Signal Processing**, Vol. 13, No. 2, pp. 217-240.

ANEXOS

ANEXO A - Simulação numérica de sistemas dinâmicos com fator α

de multiplicação alterando os valores da matriz de amortecimento.

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad [c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix} \quad [k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}$$

Os elementos das matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez utilizados nesta simulação possuem os seguintes valores:

m_j (kg)	c_j N/(m/s)	k_j (N/m)
m_1 1	c_1 4	k_1 10
m_2 1	c_2 8	k_2 100
m_3 1	c_3 4	k_3 10
	c_4 5	k_4 100

Considerando um fator α que multiplica a matriz de amortecimento, o sistema possuirá diversas características de amortecimento – que vão desde a ausência de amortecimento até os fatores de amortecimento significativos, com matriz não-proporcional. Seja: $\alpha[c]$.

A tabela abaixo mostra as frequências naturais estimadas em função da variação de α .

α	ω_{n1}	ω_{n2}	ω_{n3}
0.0	3,0824	10,4881	14,5086
	$\tilde{\omega}_{n1}$	$\tilde{\omega}_{n2}$	$\tilde{\omega}_{n3}$
0.1	3,0833	10,4871	14,5056
0.2	3,0862	10,4839	14,4967
0.3	3,0909	10,4780	14,4824
0.4	3,0978	10,4686	14,4632
0.5	3,1070	10,4546	14,4400
0.6	3,1187	10,4344	14,4134
0.7	3,1334	10,4064	14,3843
0.8	3,1517	10,3688	14,3529
0.9	3,1742	10,3194	14,3192
1.0	3,2022	10,2555	14,2824

A Figura abaixo exibe a variação de $\tilde{\omega}_n$ e ω_n obtidas para a primeira frequência natural para o α variando de 0,0 a 1,0 com incremento de 0,1.

A figura abaixo mostra a variação da parte real do primeiro autovalor em função de α .

A figura abaixo mostra a variação da parte imaginária do primeiro autovalor em função de α .

A Figura abaixo exibe a variação de $\tilde{\omega}_n$ e ω_n obtidas para a segunda frequência natural para o α variando de 0,0 a 1,0 com incremento de 0,1.

A figura abaixo mostra a variação da parte real do segundo autovalor em função de α .

A figura abaixo mostra a variação da parte imaginária do segundo autovalor em função de α .

A Figura abaixo exibe a variação de $\tilde{\omega}_n$ e ω_n obtidas para a terceira frequência natural para o α variando de 0,0 a 1,0 com incremento de 0,1.

A figura abaixo mostra a variação da parte real do terceiro autovalor em função de α .

A figura abaixo mostra a variação da parte imaginária do terceiro autovalor em função de α .

É mostrada na abaixo a variação de $\tilde{\zeta}$ em função do elemento α , variando de 0,0 a 1,0 com incremento de 0,1.

α	ζ_1	ζ_2	ζ_3
0.0	0,0000	0,0000	0,0000
	$\tilde{\zeta}_1$	$\tilde{\zeta}_2$	$\tilde{\zeta}_3$
0.1	0,0588	0,0430	0,0701
0.2	0,1178	0,0860	0,1404
0.3	0,1768	0,1288	0,2108
0.4	0,2362	0,1715	0,2816
0.5	0,2958	0,2140	0,3527
0.6	0,3560	0,2563	0,4243
0.7	0,4167	0,2984	0,4963
0.8	0,4782	0,3404	0,5687
0.9	0,5407	0,3824	0,6416
1.0	0,6045	0,4245	0,7149

ANEXO B – Simulação numérica de sistemas dinâmicos com variação do primeiro elemento (c_{11}) da matriz de amortecimento.

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad [c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix} \quad [k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}$$

Neste exemplo apenas o amortecedor c_1 irá variar de 0,0 a 5,0 com incremento de 0,05.

Os elementos das matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez utilizados nesta simulação possuem os seguintes valores:

m_j (kg)	c_j (N/(m/s))	k_j (N/m)
m_1 1	c_1 0 ... 5,0	k_1 10
m_2 1	c_2 5	k_2 50
m_3 2	c_3 5	k_3 50
	c_4 5	k_4 50

A tabela abaixo mostra as frequências naturais estimadas em função da variação de α .

	ω_{n1}	ω_{n2}	ω_{n3}
	3,0824	10,4881	14,5086
c_1	$\tilde{\omega}_{n1}$	$\tilde{\omega}_{n2}$	$\tilde{\omega}_{n3}$
0,0	3,6141	7,3131	11,9645
0,5	3,6086	7,3202	11,9714
1,0	3,6067	7,3225	11,9738
1,5	3,6086	7,3202	11,9711
2,0	3,6146	7,3133	11,9625
2,5	3,6250	7,3017	11,9472
3,0	3,6402	7,2854	11,9241
3,5	3,6607	7,2640	11,8924
4,0	3,6872	7,2370	11,8506
4,5	3,7209	7,2037	11,7975
5,0	3,7631	7,1631	11,7314

A Figura abaixo exibe a variação de $\tilde{\omega}_n$ e ω_n obtidas para a primeira frequência natural para o c_1 variando de 0,0 a 5,0 com incremento de 0,5.

A figura abaixo mostra a variação da parte real do primeiro autovalor em função de c_1 .

A figura abaixo mostra a variação da parte imaginária do primeiro autovalor em função de c_1

A Figura abaixo exibe a variação de $\tilde{\omega}_n$ e ω_n obtidas para a segunda frequência natural para o c_1 variando de 0,0 a 5,0 com incremento de 0,5.

A figura abaixo mostra a variação da parte real do segundo autovalor em função de c_1

A figura abaixo mostra a variação da parte imaginária do segundo autovalor em função de c_1

A Figura abaixo exibe a variação de $\tilde{\omega}_n$ e ω_n obtidas para a terceira frequência natural para o c_1 variando de 0,0 a 5,0 com incremento de 0,5.

A figura abaixo mostra a variação da parte real do terceiro autovalor em função de c_1

A figura abaixo mostra a variação da parte imaginária do terceiro autovalor em função de c_1

É mostrada na abaixo a variação de $\tilde{\zeta}$ em função do amortecedor c_1 , variando de 0,0 a 5,0 com incremento de 0, 5.

c_1	$\tilde{\zeta}_1$	$\tilde{\zeta}_2$	$\tilde{\zeta}_3$
0,0	0,1283	0,3400	0,5892
0,5	0,1545	0,3530	0,5938
1,0	0,1803	0,3661	0,5987
1,5	0,2060	0,3795	0,6038
2,0	0,2316	0,3932	0,6092
2,5	0,2570	0,4072	0,6148
3,0	0,2824	0,4216	0,6206
3,5	0,3078	0,4366	0,6266
4,0	0,3332	0,4522	0,6328
4,5	0,3587	0,4686	0,6391
5,0	0,3843	0,4861	0,6454