VANDA MARIA LUCHESI

**Estudo Teórico da Condução de Calor e Desenvolvimento de um
Sistema para a Avaliação de Fluidos de Corte em Usinagem¹²**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de
São Carlos da Universidade de São Paulo
para obtenção do Título de Doutor em
Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Manufatura

Orientador:
Prof. Associado Reginaldo Teixeira Coelho

SÃO CARLOS

2011

¹Apoio financeiro Fapesp, processo 2007/00338-0

²Tese corrigida. Tese original encontra-se disponível no Departamento de Engenharia Mecânica

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTES
TRABALHOS, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO,
PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

L936e Luchesi, Vanda Maria
 Estudo teórico da condução de calor e desenvolvimento
de um sistema para a avaliação de fluidos de corte em
usinagem / Vanda Maria Luchesi ; orientador Reginaldo
Teixeira Coelho. -- São Carlos, 2011.

 Tese (Doutorado-Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Mecânica. Área de Concentração em
Manufatura) -- Escola de Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo, 2011.

 1. Usinagem. 2. Condução de calor. 3. Coeficiente de
transferência convectiva. 4. Problema inverso. 5. Aço
AISI 4340. 6. EDP. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato(a): Licenciada **VANDA MARIA LUCHESI**.

Tese defendida e julgada em 30/03/2011 perante a Comissão Julgadora:

APROVADO

Prof. Associado **REGINALDO TEIXEIRA COELHO - (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

Prof. Dr. **ERALDO JANNONE DA SILVA**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

Prof. Dr. **ALESSANDRO ROGER RODRIGUES**
(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/UNESP/campus de Ilha Solteira)

APROVADO

Prof^a. Dr^a. **ELÍRIS CRISTINA RIZZIOLLI**
(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/UNESP/campus de Rio Claro)

APROVADO

Prof. Associado **GILMAR GUIMARÃES**
(Universidade Federal de Uberlândia/UFU)

Prof. Associado **MARCELO AREIAS TRINDADE**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica

Prof. Associado **PAULO CÉSAR LIMA SEGANTINE**
Presidente da Comissão da Pós-Graduação da EESC

Dedicatória

À minha filha Layla e
ao meu irmão Valdemir,
com todo amor e carinho

Agradecimentos

À Deus, por estar sempre presente em todos os momentos da minha vida.

À minha amada filha Layla pelo amor, carinho, paciência e incentivo que me deu em todos os momentos. "Filhos... Filhos? (...) que coisa Que coisa louca Que coisa linda Que os filhos são!" (Vinícius de Moraes)

Aos meus pais, José e Julia, pelos ensinamentos, amor e apoio. Aos meus irmãos, Valdemir e Valter, cunhadas Solange e Elisabeth e sobrinhos Amanda, Larissa, Leticia, Livia, Sofia e Tiago, pelo amor, apoio, dedicação, carinho e principalmente, pela confiança durante todos esses anos. "Ainda que eu falasse a língua dos homens, e falasse a língua dos anjos sem vocês, eu nada seria..."

Ao Prof. Reginaldo Teixeira Coelho, pelo apoio, incentivo, dedicação e orientação durante este trabalho. " O sábio não é o homem que fornece as verdadeira respostas, é o que formula as verdadeiras pergunta". (Claude Lévi-Strauss)

Aos professores da banca: Prof. Assoc. Gilmar Guimarães, Prof. Dra. Eliris Cristina Rizzioli, Prof. Dr. Alessandro Roger Rodrigues e Prof. Dr. Eraldo Jannone Silva, pelo apoio e sugestões para o refinamento deste trabalho. Aos professores da banca de qualificação: Prof. Tit. Paulo Seleglim Júnior e Prof. Dr. Marcelo José Dias Nascimento, pelas valiosas observações sobre o tema de pesquisa. Aos orientadores: Prof. Assoc. João Carlos Sampaio (IC), Prof. Dr. Sadao Massago (IC) e Prof. Dra. Roberta Godoi Wik Atique (mestrado) pelo apoio em meu desenvolvimento acadêmico e por me acompanharam no inicio da minha caminhada nesta extensa estrada da pesquisa científica.

Aos amigos e companheiros do Laboratório OPF: Aldo, Alex, André, Arai, Cláudia, Cleiton, José Eduardo, Marcelo, Mary, Rodrigo, Rossana e Vinícius. Muito obrigada à todos pelo constante apoio durante esta pesquisa. Ao técnico Adolfo pela disponibilidade, competência e profissionalismo durante a aquisição dos dados experimentais, sem

sua ajuda este trabalho seria muito mais difícil. Aos amigos que encontrei durante toda a minha vida acadêmica, em especial, Ana Paula, Andréa, Branco, Camila, Carol, Christiane, Elenice, Eliris, Sr. Federico, Grace, Janaína, Juliana, Lie, Lilian, Mariana, Nuncio e Olivia. À minha querida amiga Cris Matos que me ouviu, orientou e incentivou em todos os momentos. ” Depois de algum tempo você aprende que o que importa não é o que você tem na vida, mas quem você tem na vida. E que bons amigos são a família que nos permitiram escolher.” (William Shakepeare)

Aos funcionários e professores da EESC-USP, em especial às secretárias: Irene, Ana Paula e Juliana pela constante ajuda na parte burocrática deste trabalho e aos técnicos do Laboratório de termodinâmica: Roberto e Jorge pelas sugestões e esclarecimentos sobre a aquisição de dados e os experimentos térmicos.

Á Fapesp, processo 2007/00338-0, pelo apoio financeiro concedido a este trabalho.

A todos, que de alguma forma, ajudaram na realização deste trabalho.

Epígrafe

”Abençoado seja o que inventou o sono, a manta que cobre todos os pensamentos humanos, o alimento que satisfaz a fome, a bebida que apazígua a sede, *o fogo que aquece o frio, o frio que modera o calor*, e, finalmente, a moeda corrente que compra todas as coisas, a balança e os pesos que igualizam o pastor e o rei, o ignorante e o sábio.”

Dom Quixote de La Mancha

Miguel de Cervantes (1547-1616)

”Embora isso possa parecer um paradoxo, toda a ciência exata é dominado pela ideia de aproximação.”

Bertrand Russell (1872-1970)

Resumo

LUCHESI, V. M. **Estudo teórico da condução de calor e desenvolvimento de um sistema para a avaliação de fluidos de corte em usinagem.** 2011. 252 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

Em decorrência ao grande crescimento e evolução dos processos de usinagem e a demanda para adequação ambiental, novos fluidos de corte tem sido aplicados. Uma comprovação de sua eficiência em refrigerar a peça, e a ferramenta melhorando a produtividade do processo ainda é necessária. O presente trabalho propõe o estudo e o desenvolvimento de um sistema para avaliar a eficácia de fluidos de corte em operações de usinagem. Inicia-se com uma abordagem matemática da modelagem do processo de dissipação de calor em operações de usinagem. Em seguida prossegue-se com uma investigação de diferentes maneiras de solução do modelo proposto. Experimentos práticos foram realizados no laboratório de Otimização de Processos de Fabricação - OPF. A partir dos dados obtidos foi realizada uma análise assintótica das equações diferenciais parciais que governam o modelo. Finalizando, o modelo selecionado foi aplicado no fresamento do aço AISI 4340 endurecido usinado sob alta velocidade.

Palavras-chave: Usinagem; Condução de Calor; Coeficiente de Transferência Convectiva; Problema Inverso; Aço AISI 4340; EDP.

Abstract

LUCHESI, V. M. **Theoretical study of heat conduction and development of a system for evaluation of cutting fluids in machining.** 2011. 252 p. Thesis (Ph.D.) - School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Paulo, 2011.

Due to the rapid growth and development of machining processes there has been a demand for environmental sustainability and new cutting fluids have been applied. A reliable assessment of their efficiency in cooling the workpiece, tools and improving productivity is still a requirement. The present thesis presents a theoretical study and a proposal of a system to assess the effectiveness of cutting fluids applied to machining operation. It begins using a mathematical approach to model the heat propagation during machining operations. Then, it continues with an investigation into different ways to solve the proposed theoretical model. Machining experiments using realistic cutting operations were also conducted at the Laboratory for Optimization of Manufacturing Processes - OPF. From the experimental data, was carried out an asymptotic analysis of partial differential equations, which govern the mathematical model. Finally, the selected model will be applied to a milling operation using High Speed Machining (HSM) technique on hardened steel AISI 4340

Keywords: Machining; Heat conduction; Convective Coefficient; Inverse Problem; AISI 4340 Steel; PDE.

Lista de Figuras

Figura 2.1	Fresas de topo	6
Figura 2.2	Fresamento Discordante, Concordante e Combinado	6
Figura 2.3	Geometria do Corte Ortogonal	9
Figura 2.4	Exemplo de Corte Ortogonal no processos de fresamento	10
Figura 2.5	Seção Transversal do corte ortogonal	11
Figura 2.6	Força de usinagem e suas decomposições no plano de cisalhamento, na superfície de saída e nas direções de corte e de avanço, Círculo de Merchant	11
Figura 2.7	Decomposição das velocidades no corte ortogonal	14
Figura 2.8	Diagrama da deformação do cavaco no corte ortogonal	14
Figura 2.9	Geometria e formação do cavaco no processo de fresamento	17
Figura 2.10	Variação da distribuição do fluxo total de calor dissipada entre o cavaco a ferramenta e a peça em relação ao número de Peclet	21
Figura 2.11	Variação das três intensidades da distribuições de calor	24

Figura 2.12 Variação da intensidade de calor de uma fonte de calor elíptica (a) e de uma fonte retangular (b) com distribuição parabólica	26
Figura 2.13 Variação da intensidade de calor de uma fonte de calor elíptica (a) e de uma fonte retangular (b) com distribuição Normal	28
Figura 2.14 Esquema para medição da temperatura de corte pelo método do termopar ferramenta-peça	30
Figura 2.15 Esquema de medição de temperatura usando termopar	31
Figura 2.16 Montagem experimental para medir a distribuição de temperatura pelo método PVD	33
Figura 3.1 Dissipação de calor pela superfície de contorno de acordo com a Lei de Newton	51
Figura 3.2 Gráfico da função tangente versus a função racional para $H = 2000/38$ e $l_1 = 0,05$	57
Figura 3.3 Representação Esquemática da Relação entre Problemas Inverso e Direto	84
Figura 4.1 Geometria da fresa e Pastilha	98
Figura 4.2 Accue-Lubre: 1. Reservatório de óleo com capacidade de 300 ml; 2. Conector; 3. Saída para o bico aspersor de Ar; 4. Saída para o bico aspersor de fluido; 5. Válvula de controle do fluxo de Ar 6. Caixa Metálica; 7. Controle da entrada de fluido; 8. Filtro de Ar e Manômetro; 9. Bomba de pressão; 10. Válvula de controle manual (liga/desliga); 11. Entrada de Ar; 12. Regulador de frequência de gota de fluido.	99

Figura 4.3	Vista superior com os furos de alocação dos termopares	101
Figura 4.4	Geometria do corpo de prova	102
Figura 4.5	Posicionamento e Movimento da Fresa em relação a Peça e Termopares	102
Figura 4.6	Diagrama esquemático do Ensaio: 1. Eixo, 2. Bico Aspersor (Saída de fluido) 3. Fresa, 4. Peça, 5. Mesa da Máquina, 6. Dinamômetro, 7. Amplificador Digital, 8. Termopares 9. Transmissor TxBlock, 10.Filtro passa Baixa, 11.Interface, 12. Computador.	103
Figura 4.7	Transmissor Tx-Block	104
Figura 4.8	Diagrama esquemático do Ensaio para a obtenção do coeficiente de transferência convectiva: 1. Placa de aço 4340, 2. Caixa isolante, 3. Sistema de refrigeração, 4. Termopares, 5. Transmissor TxBlock, 6. Filtro Passa baixa, 7. Interface, 8. Computador, 9. Resistência, 10. Variac, 11. Multímetro.	107
Figura 4.9	Geometria da placa de aço 4340 e localização dos furos de inserção dos termopares	108
Figura 4.10	Geometria da Fonte de Calor	109
Figura 4.11	Diagrama Esquemático do Cálculo da Área da Fonte de Calor no Plano	110
Figura 4.12	Posicionamento da aquisição de Forças	111
Figura 4.13	Gráficos da aquisição de dados das Forças F_x , F_y e F_z durante o Ensaio E1	112

Figura 4.14 Gráfico do coeficiente de sensibilidade no sensor 3 para o ensaio E1	... 119
Figura 4.15 Gráfico do coeficiente de sensibilidades da função teste do termo fonte de calor no sensor T3	 119
Figura 4.16 Gráfico do coeficiente de sensibilidades do coeficiente de transferência convectiva de calor no sensor T3	 120
Figura 5.1 Exemplo das curvas de temperatura em função do tempo durante o ensaio E1 com velocidade de corte v_{100} e distância do termopar $d_{2,6}$	 123
Figura 5.2 Temperatura nos Termopares da Lateral 1 durante os ensaios E1 a E3	124
Figura 5.3 Temperatura nos Termopares Centrais durante os ensaios E1 a E3	.. 125
Figura 5.4 Temperatura nos Termopares da Lateral 2 durante os ensaios E1 a E3	125
Figura 5.5 Temperatura nos Termopares da Lateral 1 durante os ensaios E4 a E6	127
Figura 5.6 Temperatura nos Termopares Centrais durante os ensaios E4 a E6	.. 127
Figura 5.7 Temperatura nos Termopares da Lateral 2 durante os ensaios E4 a E6	128
Figura 5.8 Gráficos do aumento de temperatura dos ensaios com velocidade de 100 m/min na distância dos termopares ao plano de corte $d_{2,6}$	 129
Figura 5.9 Gráficos do Aumento de Temperatura dos ensaios com velocidade de 100 m/min na distância dos termopares ao plano de corte $d_{1,4}$	 130
Figura 5.10 Gráficos do aumento de temperatura dos ensaios com velocidade de 150	

m/min na distâncias dos termopares ao plano de corte $d_{2,2}$	131
Figura 5.11 Gráficos do aumento de temperatura dos ensaios com velocidade de 150 m/min na distâncias dos termopares ao plano de corte $d_{1,0}$	132
Figura 5.12 Gráficos do aumento de temperatura dos ensaios com velocidade de 200 m/min na distâncias dos termopares ao plano de corte $d_{1,8}$	133
Figura 5.13 Gráficos do aumento de temperatura dos ensaios com velocidade de 150 m/min na distâncias dos termopares ao plano de corte $d_{0,6}$	134
Figura 5.14 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E1	136
Figura 5.15 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor	136
Figura 5.16 Gráfico do Coeficiente de Transferência Convectiva versus Diferença de Temperatura $T_s - T_\infty$	142
Figura B.1 Painel frontal do programa de aquisição dos experimentos	161
Figura B.2 Painel frontal durante a aquisição do ensaios	162
Figura C.1 Curva de calibração do termopar 1	163
Figura C.2 Curva de calibração do termopar 2	163
Figura C.3 Curva de calibração do termopar 3	164
Figura C.4 Curva de calibração do termopar 4	164

Figura C.5	Curva de calibração do termopar 5	165
Figura C.6	Curva de calibração do termopar 6	165
Figura C.7	Curva de calibração do termopar 7	165
Figura C.8	Curva de calibração do termopar 8	165
Figura C.9	Curva de calibração do termopar 9	166
Figura C.10	Curva de calibração do termopar 10	166
Figura C.11	Curva de calibração do termopar 11	167
Figura C.12	Curva de calibração do termopar 12	167
Figura D.1	Gráfico do Coeficiente de Transferência Convectiva Experimental versus Diferença de Temperatura $T_s - T_\infty$ para o Sistema sem refrigeração	170
Figura D.2	Gráfico do Coeficiente de Transferência Convectiva Experimental versus Diferença de Temperatura $T_s - T_\infty$ para o Sistema MQL	171
Figura D.3	Gráfico do Coeficiente de Transferência Convectiva Experimental versus Diferença de Temperatura $T_s - T_\infty$ para o Sistema Inundado	172
Figura E.1	Gráfico das forças F_x , F_y e F_z nos ensaios sem refrigeração (a Seco)	174
Figura E.2	Gráfico das forças F_x , F_y e F_z nos ensaios com o MQL1	175

Figura E.3 Gráfico das forças F_x , F_y e F_z nos ensaios com o MQL2	176
Figura E.4 Gráfico das forças F_x , F_y e F_z nos ensaios com o Fluido 1	177
Figura E.5 Gráfico das forças F_x , F_y e F_z nos ensaios com o Fluido 2	178
Figura F.1 Gráficos dos coeficientes de sensibilidade nos sensores da Lateral 1	179
Figura F.2 Gráficos dos coeficientes de sensibilidade nos sensores da Lateral 2	180
Figura F.3 Gráficos dos coeficientes de Sensibilidade nos Sensores Centrais	180
Figura F.4 Gráficos dos coeficientes de sensibilidade da função teste do termo fonte de calor nos sensores da Lateral 1	181
Figura F.5 Gráficos dos coeficientes de sensibilidade da função teste do termo fonte de calor nos sensores da Lateral2	181
Figura F.6 Gráficos dos coeficientes de sensibilidade da função teste do termo fonte de calor nos sensores centrais	182
Figura F.7 Gráficos dos coeficientes de sensibilidade do coeficiente de transferência convectiva de calor nos sensores da Lateral 1	182
Figura F.8 Gráficos dos coeficientes de sensibilidade do coeficiente de transferência convectiva de calor nos sensores da Lateral 2	183
Figura F.9 Gráficos dos coeficientes de sensibilidade do coeficiente de transferência convectiva de calor nos sensores centrais	183

Figura H.1 Gráfico do Erro de aproximação, E_{sq} , para o Sistema sem Refrigeração	189
Figura H.2 Gráfico do Erro de aproximação, E_{sq} , para o Sistema com Refrigeração em MQL	190
Figura H.3 Gráfico do Erro de aproximação, E_{sq} , para o Sistema com Refrigeração Inundado	190
Figura I.1 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E2	192
Figura I.2 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E2	192
Figura I.3 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E3	193
Figura I.4 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E3	194
Figura I.5 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E4	195
Figura I.6 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E4	196
Figura I.7 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E5	197
Figura I.8 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E5	198

Figura I.9	Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E6	199
Figura I.10	Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E6	200
Figura J.1	Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E7	202
Figura J.2	Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E7	202
Figura J.3	Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E8	203
Figura J.4	Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E8	204
Figura J.5	Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E9	205
Figura J.6	Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E9	206
Figura J.7	Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E10	207
Figura J.8	Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E10	208
Figura J.9	Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experi-	

mental versus estimada do Ensaio E11	209
Figura J.10 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E11	210
Figura J.11 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experi- mental versus estimada do Ensaio E12	211
Figura J.12 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E12	212
Figura K.1 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experi- mental versus estimada do Ensaio E13	214
Figura K.2 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E13	214
Figura K.3 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experi- mental versus estimada do Ensaio E14	215
Figura K.4 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E14	216
Figura K.5 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experi- mental versus estimada do Ensaio E15	217
Figura K.6 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E15	218
Figura K.7 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experi- mental versus estimada do Ensaio E16	219

Figura K.8 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E16	220
Figura K.9 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E17	221
Figura K.10 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E17	222
Figura K.11 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E18	223
Figura K.12 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E18	224
Figura L.1 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E19	226
Figura L.2 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E19	226
Figura L.3 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E20	227
Figura L.4 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E20	228
Figura L.5 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E21	229
Figura L.6 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte	

de calor do Ensaio E21	230
Figura L.7 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experi- mental versus estimada do Ensaio E22	231
Figura L.8 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E22	232
Figura L.9 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experi- mental versus estimada do Ensaio E23	233
Figura L.10 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E23	234
Figura L.11 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experi- mental versus estimada do Ensaio E24	235
Figura L.12 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E24	236
Figura M.1 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experi- mental versus estimada do Ensaio E25	238
Figura M.2 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E25	238
Figura M.3 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experi- mental versus estimada do Ensaio E26	239
Figura M.4 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E26	240

Figura M.5 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E27	241
Figura M.6 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E27	242
Figura M.7 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E28	243
Figura M.8 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E28	244
Figura M.9 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E29	245
Figura M.10 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E29	246
Figura M.11 Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E30	247
Figura M.12 Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E30	248
Figura N.1 Foto ilustrando as posições do dinamômetro, peça, bico aspersores e termopares	249
Figura N.2 Foto dos instrumentos de aquisição de dados	250

Lista de Tabelas

Tabela 2.1	Vantagens e aplicações da HSC	8
Tabela 2.2	Calor dissipado para $v = 100m/min$	20
Tabela 2.3	Equações para a determinação do fração do fluxo de Calor, B , que flui para o objeto estacionário	22
Tabela 2.4	Determinação da fração de fluxo de Calor B que flui para a peça durante a usinagem em corte ortogonal de aço AISI 1113	22
Tabela 2.5	Tipos e características dos óleos emulsificadores	37
Tabela 2.6	Tipos e características dos fluidos sintéticos	38
Tabela 2.7	Classificação e características dos óleos de corte, (ELBARADIE, 1996) ..	40
Tabela 2.8	Valores típicos do coeficiente de transferência convectiva de calor	44
Tabela 3.1	Coeficiente de transferência convectiva h e número de Biot Bi calculados por meio do Método da Capacitância Global, Sales et al. (2002)	83
Tabela 4.1	Dimensões da Figura 4.1	98
Tabela 4.2	Propriedades dos Fluidos	100

Tabela 4.3	Composição química do aço AISI 4340	100
Tabela 4.4	Propriedades Térmicas do aço AISI 4340	100
Tabela 4.5	Posicionamento e nomenclatura dos Termopares	102
Tabela 4.6	Nomenclatura das condições de usinagem de acordo com o sistema de refrigeração, as velocidade de corte e de avanço e do tempo de corte	106
Tabela 4.7	Variação da Corrente e Tensão dos Ensaios	109
Tabela 4.8	Dimensões da geometria da fonte	110
Tabela 5.1	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E1	135
Tabela 5.2	Resultados obtidos para a estimativa do fluxo de calor entrando na peça utilizando a distribuição de intensidade parabólica	137
Tabela 5.3	Fração do fluxo de Calor B que flui para a peça durante os ensaios utilizando as equações da tabela 2.3	138
Tabela 5.4	Termo fonte de calor com distribuição de intensidade parabólica otimizada pelo MGC	141
Tabela 5.5	Valores dos Coeficiente de Transferência Convectiva de Calor utilizando as Equações (4.19) e (4.20) versus Experimental (item 4.7.2)	143
Tabela C.1	Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 1	164

Tabela C.2 Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 2	164
Tabela C.3 Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 3	164
Tabela C.4 Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 4	164
Tabela C.5 Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 5	165
Tabela C.6 Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 6	165
Tabela C.7 Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 7	166
Tabela C.8 Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 8	166
Tabela C.9 Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 9	166
Tabela C.10 Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 10	166
Tabela C.11 Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 11	167
Tabela C.12 Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de cali-	

bração do termopar 12	167
Tabela D.1 Coeficiente de transferência convectiva experimental sem refrigeração	169
Tabela D.2 Coeficiente de transferência convectiva experimental com refrigeração MQL para o fluido MQL 1	170
Tabela D.3 Coeficiente de transferência convectiva experimental com refrigeração MQL para o fluido MQL 2	170
Tabela D.4 Coeficiente de transferência convectiva experimental com refrigeração por Inundação para o Fluido 1	171
Tabela D.5 Coeficiente de transferência convectiva experimental com refrigeração por Inundação para o Fluido 2	172
Tabela G.1 Coeficiente de transferência convectiva Analítico dos ensaios sem refrigeração	185
Tabela G.2 Coeficiente de transferência convectiva analítico dos ensaios com refrigeração em MQL	186
Tabela G.3 Coeficiente de transferência convectiva analítico dos ensaios com refrigeração	187
Tabela H.1 Erro de Aproximação do Cálculo Analítico do Coeficiente de Transferência Convectiva	189
Tabela I.1 Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E2	191
Tabela I.2 Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E3	193

Tabela I.3	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E4	 195
Tabela I.4	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E5	 197
Tabela I.5	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E6	 199
Tabela J.1	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E7	 201
Tabela J.2	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E8	 203
Tabela J.3	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E9	 205
Tabela J.4	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E10	 207
Tabela J.5	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E11	 209
Tabela J.6	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E12	 211
Tabela K.1	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E13	 213
Tabela K.2	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E14	 215
Tabela K.3	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E15	 217
Tabela K.4	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E16	 219
Tabela K.5	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E17	 221
Tabela K.6	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E18	 223

Tabela L.1	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E19	 225
Tabela L.2	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E20	 227
Tabela L.3	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E21	 229
Tabela L.4	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E22	 231
Tabela L.5	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E23	 233
Tabela L.6	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E24	 235
Tabela M.1	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E25	 237
Tabela M.2	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E26	 239
Tabela M.3	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E27	 241
Tabela M.4	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E28	 243
Tabela M.5	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E29	 245
Tabela M.6	Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E30	 247

Lista de Siglas

AISI	American Iron and Steel Institute
MQL	Minimal quantity lubrication
HSM	High Speed Machining
HSC	High Speed Cutting
APC	Aresta postiça de corte
EDP	Equação Diferencial Parcial
EDO	Equação Diferencial Ordinária
PD	Problema direto
PI	Problema inverso
MGC	Método do gradiente conjugado
PS	Problema de Sensibilidade
PA	Problema Adjunto
CP	Corpo de Prova
CTC	Coefficiente de Transferência Convectiva

Lista de Símbolos

n	Frequência de rotação, $[rpm]$
v_c	Velocidade de Corte, $[m/min]$
f_n	Avanço, $[mm/rot]$
f_z	Avanço por dente, $[mm/dente]$
v_f	Velocidade de Avanço, $[mm/min]$
D	Diâmetro da ferramenta, $[mm]$
z	Número total de dentes da fresa
a_p	Profundidade de usinagem, $[mm]$
a_e	Penetração de trabalho, $[mm]$
t_c	Tempo de corte, $[min]$
h	Espessura de Corte, $[mm]$
b'	Largura do cavaco, $[mm]$
b	Largura de corte, $[mm]$
F_U	Força de usinagem, $[N]$
ρ	Ângulo de atrito
γ	Ângulo de saída da aresta de corte
ϕ	Ângulo de cisalhamento
F_Z	Força de cisalhamento, $[N]$
F_{ZN}	Força normal de cisalhamento, $[N]$
F_c	Força de corte, $[N]$
F_f	Força de avanço, $[N]$
τ_Z	Tensão de cisalhamento, $[N/mm^2]$
A_Z	Área do plano de cisalhamento, $[mm^2]$
σ_Z	Tensão normal de cisalhamento, $[N/mm^2]$

v_{cav}	Velocidade do cavaco, $[m/min]$
P_Z	Energia de cisalhamento, $[J]$
L_c	Comprimento do "plano" de cisalhamento, $[mm]$
$\hbar_c$	Espessura do cavaco cortado
Δd	Espessura de cisalhamento, $[mm]$
F_N	Força normal, $[N]$
F_T	Força tangencial, $[N]$
P_T	Energia de atrito, $[J]$
P_{total}	Energia total gerada no corte, $[J]$
F_t	Força tangencial do processo fresamento, $[N]$
F_r	Força radial, $[N]$
ϕ_{im}	Ângulo instantâneo de imersão da fresa
$\hbar_m$	Espessura média do cavaco por revolução
ϕ_{int}	Ângulo inicial de imersão da fresa
ϕ_{ex}	Ângulo final de imersão da fresa
To	Torque, $[N \cdot m]$
ϕ_p	Ângulo entre os dentes da fresa
q_Z	Taxa de calor na zona de primária deformação, $[W]$
q_T	Taxa de calor na zona de secundária deformação, $[W]$
Q_{cav}	Fluxo de calor dissipado pelo cavaco, $[W/m^2]$
Q_f	Fluxo de calor dissipado pela ferramenta, $[W/m^2]$
Q_{peca}	Fluxo de calor dissipado pela peça, $[W/m^2]$
Pe	Número de Peclet
Γ_z	Tensão de média de atrito no cavaco, $[N/mm^2]$
R_c	Grau de recalque
q_0	Fluxo de calor liberado de uma fonte, $[W/m^2]$
q_{pl}	Taxa de calor de uma fonte móvel/estacionária plana, $[W]$

A_{pl}	Área da fonte plana, $[m^2]$
x_i	Coordenada da fonte de calor
y_i	Coordenada da fonte de calor
b_0	Eixo menor da fonte de calor elíptica ou metade do lado menor da fonte retangular
l_{y_i}	Metade do comprimento da faixa diferencial com uma distância do centro da fonte elíptica y_i , $[m]$
q_{ell}	Taxa de calor de uma fonte móvel/estacionária elíptica, $[W]$
q_c	Taxa de calor de uma fonte móvel/estacionária circular, $[W]$
A_c	Área da fonte circular (πr_0^2)
a_0	Eixo maior da fonte de calor elíptica ou metade do lado maior da fonte retangular
q_r	Taxa de calor de uma fonte móvel/estacionária retangular, $[W]$
A_r	Área da fonte retangular ($4a_0b_0$)
q_q	Taxa de calor de uma fonte móvel/estacionária quadrada, $[W]$
A_q	Área da fonte quadrada ($4a_0^2$)
T_0	Temperatura Inicial, $[^\circ C]$
t	Tempo, $[s]$
$g(x, y, t)$	Termo-fonte de calor bidimensional, $[W/m^2]$
T_∞	Temperatura Ambiente, $[^\circ C]$
ρ	Densidade, $[kg/m^3]$
c_p	Calor específico, $[J/kg \cdot K]$
q	Calor, $[J]$
k	Condutividade térmica do sólido, $[W/m^\circ C]$
α	Difusibilidade térmica, $[m^2/s]$
r_s	Ponto da superfície S_i
$f_i(r_s)$	Função condição de contorno
S_i	Superfície de contorno na posição i , $i = 1, 2, 3, 4$.

k_i	Condutividade térmica na superfície de contorno S_i
h_i	Coefficiente de transferência convectiva na superfície de contorno S_i
T	Temperatura, $[^{\circ}C]$
h	Coefficiente de transferência convectiva, $[W/m^2{}^{\circ}C]$
$\chi(\beta_n, x)$	Autofunções do problema de autovalores unidimensional
β_n	Autovalores
r	Variável espacial, (x, y, z)
H_i	$\frac{h_i}{k_i}$
R	Região do espaço R^3
$G(r, t \mid \bar{r}, \tau)$	Função de Green
τ	Variável tempo
$K(r, t)$	Autofunção normalizada solução do problema de autovalores na variável r
He	Função de Heaviside
$\Psi(\lambda_m, r)$	Autofunção do problema de autovalores
λ_m	Autovalores
L	Dimensão característica do sólido
(ξ, η)	Variáveis adimensionais, $(\frac{x}{L}, \frac{y}{L})$
Θ	Temperatura adimensional, $\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}$
Φ	Variável geração de calor adimensional (ou termo-fonte de calor adimensional)
Nu	Número de Nusselt, $\frac{hL}{k_f}$
k_f	Condutividade térmica do fluido, $[W/m^{\circ}C]$
T_s	Temperatura na superfície do sólido, $[^{\circ}C]$
Bi	Número de Biot
F_0	Número de Fourier
$\delta(\cdot)$	Delta de Dirac
T_{max}^i	Temperatura máxima do termopar Ti

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	4
1.2	Estrutura do Trabalho	4
2	Teoria de Usinagem	5
2.1	Fresamento	5
2.1.1	HSM - Usinagem em Alta Velocidade	8
2.2	Termomecânica do Corte Ortogonal	9
2.2.1	Zona Primária de Deformação	12
2.2.2	Zona Secundária de Deformação	15
2.2.3	Termomecânica do Fresamento	16
2.2.4	Fatores Geradores de Calor no Processo de Usinagem	18
2.2.4.1	Fonte de calor e distribuição do fluxo de calor	23
2.3	Técnicas Experimentais de Medição de Temperatura	28
2.3.1	Técnicas de Medição por Condução Direta	29
2.3.2	Técnicas de Medição por Radiação	32
2.3.3	Metalografia	32
2.4	Fluidos de Corte	34
2.4.1	Redução da Intensidade das Fontes de Calor do Processo de Usinagem	35
2.4.2	Classificação dos Fluidos de Corte	35
2.4.2.1	Gases	36
2.4.2.2	Fluidos Miscíveis em Água	36

2.4.2.3	Óleos emulsificadores	37
2.4.2.4	Fluidos Sintéticos	38
2.4.2.5	Fluidos Semi-Sintéticos	38
2.4.2.6	Óleos de Corte Puros	39
2.4.3	Escolha do Fluido de Corte no Processo de Fresamento	41
2.4.4	Métodos de Aplicação do Fluido de corte	42
2.5	Coeficiente de transferência Convectiva	43
3	Problema Físico e Modelagem Matemática	47
3.1	Modelagem Matemática	47
3.1.1	Condições de Contorno	49
3.2	Métodos Analíticos para a Solução do Problema Direto	52
3.2.1	Método das Variáveis Separáveis	53
3.2.1.1	Problema unidimensional homogêneo	53
3.2.1.2	Resolução da equação Transcendental (3.39)	56
3.2.2	Método da Função de Green	58
3.2.2.1	Solução do Problema não Homogêneo	58
3.2.2.2	Determinação da Função de Green	63
3.2.2.3	Problema Unidimensional não Homogêneo	64
3.2.2.4	Solução Produto	65
3.2.3	Técnica da Transformada Integral	67
3.2.3.1	Solução do problema de condução de calor em regiões finitas	68
3.2.3.2	Solução Alternativa	73
3.3	Parâmetros Adimensionais	76
3.4	Coeficiente de Transferência Convectiva Analítico	79
3.5	Métodos para a Solução do Problema Inverso	83
3.5.1	Método do Gradiente Conjugado com Problema Adjunto	85

3.5.1.1	Problema Direto	85
3.5.1.2	Problema Inverso	86
3.5.1.3	Problema de Sensibilidade	86
3.5.1.4	Problema Adjunto	88
3.5.1.5	Equação Gradiente	89
3.5.1.6	Processo Iterativo	90
3.5.1.7	Critério de Parada	91
3.5.1.8	Algoritmo Computacional	91
3.5.1.9	Uso de Múltiplos Sensores	92
3.5.2	Análise de Sensibilidade	93
3.5.2.1	Método para Determinar o Coeficiente de Sensibilidades ..	94
4	Materiais e Métodos	97
4.1	Máquina Ferramenta	97
4.2	Ferramenta	97
4.3	Equipamento Utilizado no Sistema de Refrigeração por Névoa - MQL	97
4.3.1	Fluidos	98
4.4	Corpo de Prova	100
4.5	Equipamentos para Medição de Temperatura	103
4.6	Equipamentos para Medição de Força	104
4.7	Planejamento Experimental	105
4.7.1	Ensaio Experimental de Usinagem	105
4.7.2	Ensaio para a Estimativa do Coeficiente de Transferência Convec- tiva de Calor (h)	107
4.8	Modelagem da Fonte de Calor	109
4.9	Estimativa do Coeficiente de Transferência convectiva pelo Método Analítico	114
4.10	Análise da Sensibilidade dos Parâmetros Estimados	118

4.11 Método do Gradiente Conjugado (MGC)	121
5 Resultados e Discussões	123
5.1 Resultados dos Testes Experimentais de Usinagem	123
5.1.1 Análise dos Experimentos sem refrigeração (a seco)	124
5.1.2 Análise dos Sistemas de Refrigeração	128
5.2 Estimativas do Termo Fonte de Calor	135
5.3 Estimativa do Coeficiente de Transferência Convectiva	140
6 Conclusões e Perspectivas	145
Referências	149
Apêndice A – Série de Funções	157
A.1 Série de Fourier	158
A.2 Aproximação de Funções, Spiegel (1976)	159
A.3 Delta de Dirac, Figueiredo e Neves (2007)	160
Apêndice B – Labview	161
Apêndice C – Calibração dos Termopares	163
Apêndice D – Coeficiente de transferência convectiva experimental descrito no capítulo 4.7.2	169
Apêndice E – Forças	173
Apêndice F – Análise dos Coeficientes de Sensibilidade	179
Apêndice G – Coeficiente de transferência convectiva analítico	185
Apêndice H – Cálculo do Erro de Aproximação utilizando a Equação (4.18)	189

Apêndice I – Ensaios sem refrigeração.....	191
I.1 Ensaio E2	191
I.2 Ensaio E3	193
I.3 Ensaio E4	195
I.4 Ensaio E5	197
I.5 Ensaio E6	199
 Apêndice J – Ensaios com MQL 1.....	201
J.1 Ensaio E7	201
J.2 Ensaio E8	203
J.3 Ensaio E9	205
J.4 Ensaio E10	207
J.5 Ensaio E11	209
J.6 Ensaio E12	211
 Apêndice K – Ensaios com Fluido 1.....	213
K.1 Ensaio E13	213
K.2 Ensaio E14	215
K.3 Ensaio E15	217
K.4 Ensaio E16	219
K.5 Ensaio E17	221
K.6 Ensaio E18	223
 Apêndice L – Ensaios com MQL 2.....	225
L.1 Ensaio E19	225
L.2 Ensaio E20	227
L.3 Ensaio E21	229
L.4 Ensaio E22	231

L.5	Ensaio E23	233
L.6	Ensaio E24	235
Apêndice M – Ensaaios com Fluido 2		237
M.1	Ensaio E25	237
M.2	Ensaio E26	239
M.3	Ensaio E27	241
M.4	Ensaio E28	243
M.5	Ensaio E29	245
M.6	Ensaio E30	247
Apêndice N – Fotos dos ensaios		249

1 Introdução

O calor gerado no corte de metais tem sido um dos tópicos primordiais na pesquisa do processo de usinagem desde seu surgimento. O trabalho pioneiro desta área foi devido a Benjamin Thomson, que em 1798 investigou o calor gerado na perfuração de um canhão e desenvolveu o conceito de energia mecânica equivalente a calor, sendo a mesma relação estabelecida por Joule em 1850.

Posteriormente, Taylor, no artigo "On the art of cutting metals", identifica a importância do calor em acelerar o desgaste da ferramenta e desenvolve uma relação empírica entre a velocidade de corte e a vida da ferramenta a qual ainda é utilizada atualmente.

Até meados do século XX, grande parte das pesquisas no aspecto térmico tem sido de enfoque experimental, usando métodos colorimétricos, como os termopares, para medir a temperatura em várias posições da ferramenta ou da peça. No final do ano 1930 a meados de 1940, Rosenthal, Blok e Jaeger concluem produtivas contribuições para o problema de fontes móveis de calor. Estes estudos formam a base para muitas das atuais investigações analíticas da temperatura gerada no processo de usinagem.

Os trabalhos pioneiros, com enfoque analítico, na área de temperatura gerada na usinagem em regime permanente foram as contribuições de Hahn (1951), [Chao e Trigger](#) (1951), [Trigger e Chao](#)(1953), e [Loewen e Shaw](#) (1954). Outras importantes contribuições com estudos analíticos foram os trabalhos de Leone (1954), Rapier (1954), Weiner (1955), Nakayama (1956), Boothroyd (1963), Dutt and Brewer (1964), e [Dawson e Malkin](#)(1984).

Segundo [Komanduri e Hou](#) (2000b), as diferenças encontradas nestes modelos decorrem das hipóteses simplificadoras assumidas, tais como a natureza da fonte de calor, a estimativa da taxa de partição de calor, a direção do movimento da fonte de calor, e as condições de contorno. Estes modelos envolvem análise da condução de calor com fontes de calor móveis ou estacionárias associadas com os aspectos geométricos, cinemáticos e energéticos do processo de usinagem. O método inverso tem sido utilizado onde os valores

desconhecidos de fluxo de calor nas fronteiras são obtidos a partir de uma distribuição de temperatura conhecida no interior de um sistema de condução de calor.

Ao longo das últimas décadas, o cálculo da distribuição de temperatura em sólidos com atrito tornou-se de grande interesse científico. Desde os primeiros trabalhos citados anteriormente, relativo a sólidos semi-infinitos com fronteiras adiabáticas aquecidos por uma fonte de calor em movimento, vários outros estudos têm sido desenvolvidos. Eles lidam com corpos semi-infinitos, e cilindros rotativos submetidos a fontes de calor e de resfriamento da superfície. Estes estudos mostram a evolução das temperaturas instantâneas (conceito introduzido por H. Blok, (1938)) utilizando parâmetros adimensionais característicos, por exemplo, os números de Peclet e Biot, [Alilat, Baýri e Laraqi \(1999\)](#), [Cortes, Campo e Arauzo \(2003\)](#), [Liu et al. \(2004\)](#) e [Haji-Sheikh, Beck e Cole \(2010\)](#).

Abordando uma análise crítica das publicações correntes verifica-se que a maioria dos trabalhos publicados na área de condução de calor em usinagem considera os experimentos fora da realidade dos processos de usinagem efetivos. Geralmente o modelo é analisado com a peça isolada ou com temperaturas constantes na fronteira, isto ocorre devido às hipóteses simplificadoras do modelo, as quais o tornam mais fácil de ser resolvido matematicamente. No entanto, estas hipóteses podem ocasionar prejuízos na análise qualitativa do experimento. Outra hipótese simplificadora bem comum na literatura é considerar a peça usinada como sendo um sólido infinito ou semi-infinito, cuja solução é bem mais simples e fácil de ser manipulada. Veja por exemplo as bibliografias [Nguyen et al. \(1999\)](#), [Zubair e Chaudhry \(1996\)](#) e [Bekir e Sami \(1997\)](#).

Tais simplificações não só prejudicam as análises dos efeitos do calor sobre o desgaste da ferramenta, ou sobre a integridade superficial das peças, como também na ação dos fluidos de corte sobre o processo. Sabe-se que o fluido de corte melhora o desempenho das ferramentas de corte conforme comprovado por Taylor. No entanto, o seu uso intenso e indiscriminado tem prejudicado a adequação ambiental dos processos de usinagem, aumentando seus custos de forma considerável. O surgimento constante de novos fluidos, com composições e aditivos das mais variadas naturezas, e novos sistemas de aplicação desses fluidos (MQL, Mínima Quantidade de Fluido, por exemplo) requer um maior entendimento dos processos de distribuição de calor na região de formação de cavacos. Tal conhecimento pode proporcionar avanços significativos na avaliação da eficiência dos fluidos de corte na refrigeração dos processos de usinagem e, conseqüentemente facilitando a adequação dos mesmos às normais atuais de sustentabilidade e desenvolvimento.

A otimização dos processos de usinagem e de controle de desgaste de ferramentas de corte seria muito facilitada se existissem teorias de usinagem que permitissem a predição com maior precisão de fatores como consumo de energia, vida da ferramenta e acabamento superficial em termos das propriedades do material (e ferramenta) e das condições de corte, [Oxley \(1988\)](#). Atualmente, é comum utilizar relações empíricas para esta finalidade e, conseqüentemente, bancos de dados sobre usinagem devem ser montados com as constantes para tais relações experimentais. Os trabalhos de [Sales et al. \(2002\)](#), [Richardson, Keavey e Dailami \(2006\)](#), [Aneiro, Coelho e Brandão \(2008\)](#), [Brandão, Coelho e Rodrigues \(2008\)](#) e [Brandão, Malavolta e Coelho \(2010\)](#) são exemplos de análises experimentais sobre a distribuição de temperatura em processos de usinagem. Existem vários trabalhos que prescrevem modelos de predição de forças e velocidade na formação de cavaco, como por exemplo, [Altintas e Budak \(2002\)](#), [Altintas \(2000\)](#) e [Baro, Joshi e Kapoor \(2005\)](#) os quais podem ser usados para a estimativa analítica de energia gasta nos processos de usinagem. Poucos trabalhos estabelecem a predição das fontes de calor para um determinado processo de usinagem. Nesse sentido vale ressaltar os trabalhos de [Komanduri e Hou \(2000a\)](#), [Komanduri e Hou \(2001b\)](#), [Radulescu e Kapoor \(1994\)](#) e [Kidawa-Kukla \(2008\)](#) os quais modelam analiticamente as fontes de calor utilizando as forças de corte como variáveis de entrada do problema. No âmbito da análise inversa os problemas de estimativa de fontes de calor são bastante recentes e quase nulos no contexto da resolução de problemas de estimativa das fontes de calor em processos de usinagem. Os artigos [Yvonnet, Chinesta e Micari \(2006\)](#) e [Carvalho et al. \(2006\)](#) exemplificam o caso, no sentido da estimativa de fontes que influenciam o processo, o fluxo de calor que flui para a ferramenta. Na estimativa do coeficiente de transferência convectiva os artigos também são recentes e dentre eles destacam-se, [Cheroto et al. \(1999\)](#), [Cancillo et al. \(2000\)](#), [Cossali \(2004\)](#), [Khachfe e Jarny \(2001\)](#), [Sadat \(2006\)](#), [Colaço e Orlande \(2004\)](#), [Wang e Tan \(2006\)](#), [Fguiri et al. \(2007\)](#), [Umbrello et al. \(2007\)](#), [Chen, Yang e Lee \(2007\)](#) e [Heidrich et al. \(2008\)](#).

O presente trabalho propõe a modelagem analítica da condução de calor em um sólido finito em regime transiente para o processo de usinagem, com condições de contorno convectivas, mais adequado a descrever a usinagem com fluidos de corte. Utilizando o modelo proposto são estimados o fluxo de calor fluindo para a peça e o coeficiente de transferência convectiva por meio da solução do problema inverso. O problema inverso utiliza os dados experimentais do fresamento aplicado ao aço AISI 4340. Três diferentes condições de refrigeração são avaliadas: a seco, com sistema de refrigeração inundado e com o sistema em MQL.

1.1 Objetivos

Para desenvolver um sistema para avaliar a eficácia de fluidos de corte, este trabalho de pesquisa tem por objetivos:

- Propor um modelo matemático para a propagação de calor estudando o termo fonte de calor durante a condução de calor, o qual seja o mais próximo possível do processo de fresamento;
- Com base nesse modelo desenvolver um sistema para avaliar a eficácia de fluidos de corte em refrigerar a peça no processo de usinagem;
- Testar experimentalmente o modelo e o sistema de avaliação proposto em uma operação de fresamento, avaliando a eficácia de diferentes fluidos de corte.

1.2 Estrutura do Trabalho

A seguir apresenta-se a estrutura deste trabalho de pesquisa

- **Capítulo 2 - Teoria de Usinagem:** Neste capítulo aborda-se os tópicos de processos de usinagem relacionados ao tema deste trabalho. Nesta revisão são apresentadas de forma sucinta a base necessária para o desenvolvimento dos objetivos propostos.
- **Capítulo 3 - Problema Físico e Modelagem Matemática:** Este capítulo descreve a teoria matemática utilizada na elaboração do sistema de avaliação de fluidos.
- **Capítulo 4 - Materiais e Métodos:** Neste capítulo descreve-se os materiais utilizados, o planejamento experimental e a metodologia executada na elaboração do sistema de avaliação de fluidos de corte.
- **Capítulo 5 - Resultados e Discussões:** Este capítulo apresenta e analisa os resultados obtidos neste trabalho.
- **Capítulo 6 - Conclusões e Perspectivas:** Neste capítulo são apresentadas algumas conclusões e sugestões relativas a trabalhos futuros.
- **Referências:** Menciona todas as fontes da literatura citadas na elaboração deste trabalho.

2 Teoria de Usinagem

2.1 Fresamento

Como operação de usinagem entende-se aquelas que, ao conferir à peça a forma, ou as dimensões, ou o acabamento, ou ainda uma combinação qualquer destes três itens, remove-se material produzindo-se cavaco. Define-se cavaco, a porção de material, retirada pela ferramenta, caracterizando-se por apresentar forma geométrica irregular, [Ferraesi \(1982\)](#).

Os processos de usinagem mais comuns são torneamento, fresamento e retificação. Toda operação de corte de metais compartilha dos mesmos princípios mecânicos, porém a geometria e a cinemática destes processos podem ser diferentes, [Altintas \(2000\)](#).

Fresamento é o processo mecânico de usinagem destinado à obtenção de superfícies quaisquer com o auxílio de ferramentas multicortantes. Para tanto, a ferramenta gira e a peça ou a ferramenta se deslocam segundo uma trajetória qualquer, [ABNT \(1971\)](#).

Distinguem-se dois tipos básicos de fresamento:

- Fresamento Cilíndrico Tangencial ou Periférico - Processo de fresamento destinado à obtenção de superfície plana paralela ao eixo de rotação da ferramenta.
- Fresamento Frontal - Processo de fresamento destinado à obtenção de superfície plana perpendicular ao eixo de rotação da ferramenta.

O fresamento de topo é um processo de fresamento periférico e frontal que emprega uma fresa de topo. Ele é utilizado com vantagem na execução de superfícies de forma livre, bem como rasgos e cortes de todos os tipos e tamanhos. As fresas de topo possuem gumes tanto na sua periferia quanto na sua face. Podem ser produzidas com topo simples ou duplo, haste e corpo cilíndricos ou cônicos, em diversos diâmetros e comprimentos, possuir dois, três, quatro, seis ou mais canais, sendo que na maioria estes são helicoidais e, em alguns casos, retos. O topo pode ser reto, semiesférico ou toroidal.

Construtivamente as fresas de topo podem ser inteiriças, com insertos ou gumes brasados, ou ainda com insertos intercambiáveis. A figura 2.1 ilustra alguns tipos de fresas de topo, Stemmer (1992).

Figura 2.1: Fresas de topo

Fonte: Adaptado de Stemmer (1992)

De acordo com a direção de corte e de avanço, distinguem-se ainda o fresamento concordante e o fresamento discordante. No fresamento concordante os movimentos de corte e de avanço têm o mesmo sentido, iniciando-se o corte com a espessura máxima de cavaco. No fresamento discordante os movimentos de corte e avanço têm sentidos opostos, iniciando-se o corte com a espessura mínima de cavaco. No caso do eixo da fresa interceptar a peça, tem-se o fresamento concordante e discordante combinados. A figura 2.2 ilustra estes tipos fresamento, Stemmer (1992).

Figura 2.2: Fresamento Discordante, Concordante e Combinado

Fonte: Adaptado de Stemmer (1992)

No processo de fresamento considera-se dois movimentos, o de rotação da ferramenta e o de avanço da peça. Os parâmetros de corte a considerar no processo de fresamento descrevem quantitativamente os movimentos, as dimensões e outras características da operação de corte. Os parâmetros que descrevem o movimento da ferramenta e/ou peça são: frequência de rotação, velocidade de corte e velocidade de avanço.

As definições, os símbolos e as unidades desses parâmetros para o fresamento são os seguintes:

- Frequência de rotação (n) [rpm]: é o número de voltas por unidade de tempo que a fresa realiza em torno do seu eixo.
- Velocidade de corte (v_c) [m/min]: é a velocidade instantânea do ponto selecionado sobre o gume, no movimento de corte, em relação à peça. O movimento de corte é proporcionado pela rotação da ferramenta. A velocidade de corte é, então, uma velocidade tangencial.
- Avanço por revolução (f_n) [mm/rot]: o avanço é a distância linear percorrida por um conjunto de dentes que compõe uma ferramenta durante uma rotação completa dessa ferramenta. É medido no plano de trabalho. As grandezas relacionadas ao movimento de avanço recebem índice f .
- Avanço por dente (f_z) [$mm/dente$]: é a distância linear percorrida por um dente da ferramenta no intervalo em que dois dentes consecutivos entram em corte. Também é medido no plano de trabalho.
- Velocidade de avanço (v_f) [mm/min]: é a velocidade instantânea do ponto selecionado sobre o gume, no movimento de avanço, em relação à peça. No fresamento, o movimento de avanço é provocado pela translação da ferramenta sobre a peça ou vice-versa. A direção da velocidade de avanço é, então, radial ao eixo da ferramenta.
- Diâmetro (D) [mm]: é o diâmetro da ferramenta.
- Número de dentes (z): é o número total de dentes que a fresa contém.
- Profundidade de usinagem (Penetração passiva) (a_p) [mm]: é a quantidade que a ferramenta penetra na peça, medida perpendicularmente ao plano de trabalho (na direção do eixo da fresa). No fresamento frontal, a_p é a profundidade de usinagem e no fresamento periférico, a largura de corte.

- Penetração de trabalho (a_e) [mm]: é a quantidade que a ferramenta penetra na peça, medida no plano de trabalho e perpendicular à direção de avanço.
- Tempo de corte (t_c) [min]: é o tempo em que a ferramenta está efetivamente em corte,

$$t_c = \frac{L}{v_f} = \frac{L}{f_n \cdot n} \quad (2.1)$$

onde L = distância percorrida pela ferramenta

2.1.1 HSM - Usinagem em Alta Velocidade

Usinagem em alta velocidade (HSM) ou alta velocidade de corte (HSC) é geralmente associada ao fresamento com alta velocidade de rotação entre 10.000 e 100.000 *rpm*. Este processo foi inicialmente utilizado na indústria aeroespacial, para a usinagem de ligas de alumínio. Posteriormente, é utilizado na usinagem de ligas de níquel-titânio e superligas, [Coldwell et al. \(2003\)](#).

A tecnologia de usinagem a altas velocidades vem sendo desenvolvida principalmente para operações de fresamento e retificação, onde se concentram os seus maiores campos de utilização. O fresamento atende duas áreas da manufatura: desbaste e acabamento de materiais não-ferrosos, visando às altas taxas de remoção de material, e o semi-acabamento e acabamento de materiais ferrosos, visando à qualidade do acabamento superficial [Schültzer e Souza \(1999\)](#). A faixa de aplicação está orientada principalmente às suas vantagens tecnológicas, tabela 2.1, [Schultz e Moriwaki \(1993\)](#).

Tabela 2.1: Vantagens e aplicações da HSC

Vantagens Tecnológicas	Campo de Aplicação	Exemplos
Grandes volumes de usinagem	Ligas leves, aço e Fofo	Indústria aeronáutica e de moldes
Alta qualidade superficial	a Usinagem de precisão e peças especiais	Indústria óptica e de mecânica fina
Baixas forças de usinagem	Usinagem de paredes finas	Indústria aeronáutica e automobilística
Alta frequência de excitação	Usinagem fora de frequências críticas	Mecânica de precisão e indústria óptica
Remoção de calor para o cavaco	Usinagem de peças que não devem ser aquecidas	Mecânica de precisão e ligas de Mg

Fonte: Adaptado de [Schultz e Moriwaki \(1993\)](#)

De acordo com [Abukhshim, Mativenga e Sheikh \(2006\)](#), durante a usinagem em HSM pode se observar os seguintes fatos:

- Maior quantidade de calor gerado;
- Calor é concentrado em uma pequena área;
- O curto tempo de contato pode proporcionar a natureza adiabática do processo.

2.2 Termomecânica do Corte Ortogonal

No processo de usinagem em corte ortogonal o material da peça é removido por uma aresta cortante que é perpendicular a direção do movimento relativo entre a peça e a ferramenta. Desta forma a aresta de corte é uma reta, normal à direção de corte e à direção de avanço, de maneira que a formação do cavaco pode ser considerada um fenômeno bidimensional. Uma representação esquemática do corte ortogonal pode ser observada na figura 2.3

Figura 2.3: Geometria do Corte Ortogonal

Fonte: Adaptado de [Altintas \(2000\)](#)

A figura 2.4 ilustra um exemplo de usinagem aproximando-se do corte ortogonal nos processos de fresamento.

Com o intuito de estabelecer um tratamento matemático simplificado do corte ortogonal, são assumidas as seguintes simplificações:

Figura 2.4: Exemplo de Corte Ortogonal no processos de fresamento

Fonte: Adaptado de Machado et al. (2009)

- Os cavacos formados são contínuos, sem a formação de aresta postiça de corte (APC);
- Não há contato entre a superfície de folga da ferramenta e a superfície usinada;
- A espessura de corte, $\bar{h}$, equivalente ao avanço f , é suficientemente pequena em relação à largura de corte b .
- A largura da aresta de corte é maior que a largura de corte, b ;
- A largura de corte b e a largura do cavaco b' são idênticas;
- A aresta de corte é idealmente afiada e perpendicular ao plano de trabalho.

Existem três zonas de deformação no processo de corte (figura 2.5). Quando cada aresta da ferramenta penetra na peça, o material na frente da ferramenta é cisalhado sobre a zona primária de deformação para então formar o cavaco. Na figura 2.3 o cavaco com largura de corte b e espessura de corte $\bar{h}$ é cisalhado. O material cisalhado, o cavaco, que se forma parcialmente move-se ao longo da face inclinada da ferramenta. Esta região onde o cavaco se move é denominada zona secundária de deformação. A área de atrito onde o flanco da ferramenta atrita a superfície recentemente usinada é denominada zona terciária de deformação.

O modelo bidimensional da formação de cavacos permite uma análise vetorial das forças agindo nas partes envolvidas: ferramenta, cavaco e peça. A figura 2.6 ilustra

Figura 2.5: Seção Transversal do corte ortogonal

Fonte: Adaptado de Altintas (2000)

a força de usinagem F_U , agindo sobre a cunha cortante e sua decomposição em diversas direções.

Figura 2.6: Força de usinagem e suas decomposições no plano de cisalhamento, na superfície de saída e nas direções de corte e de avanço, Círculo de Merchant

Fonte: Adaptado de Shaw (1984)

A decomposição da força de usinagem, F_U , nas diversas direções obedece a um teorema da geometria que permite representar todas as componentes em um círculo, onde F_U é o seu diâmetro. Essa representação é chamada de círculo de Merchant, pesquisador o qual foi seu primeiro idealizador, Merchant (1945).

Usando as relações geométricas permitidas pelo círculo de Merchant, pode-se estabelecer as seguintes equações para as forças ilustradas na figura 2.6, Machado et al. (2009):

- Força tangencial

$$F_T = F_U \text{sen}(\rho) \quad (2.2)$$

- Força Normal

$$F_N = F_U \cos(\rho) \quad (2.3)$$

- Força de Corte

$$F_c = F_U \cos(\rho - \gamma) \quad (2.4)$$

- Força de Avanço

$$F_f = F_U \text{sen}(\rho - \gamma) \quad (2.5)$$

- Força de Cisalhamento

$$F_Z = F_U \cos(\phi + \rho - \gamma) \quad (2.6)$$

- Força Normal de Cisalhamento

$$F_{NZ} = F_U \text{sen}(\phi + \rho - \gamma) \quad (2.7)$$

onde ρ é o ângulo de atrito entre a superfície de saída da ferramenta e o cavaco se movendo, γ é o ângulo de saída da aresta de corte e ϕ é o ângulo de cisalhamento, formado entre o plano de corte e o plano de cisalhamento.

A seguir aborda-se a mecânica do corte ortogonal para as zonas primária e secundária de deformações.

2.2.1 Zona Primária de Deformação

As forças atuando na zona primária de deformação são F_Z e F_{ZN} e podem também ser expressas em função das componentes de corte, F_c , e de avanço, F_f , da seguinte forma:

$$F_Z = F_c \cos(\phi) - F_f \text{sen}(\phi) \quad (2.8)$$

$$F_{NZ} = F_c \text{sen}(\phi) + F_f \cos(\phi) \quad (2.9)$$

Assumindo uma distribuição uniforme da tensão no plano de cisalhamento, a tensão de cisalhamento, τ_Z , pode ser calculada por:

$$\tau_Z = \frac{F_Z}{A_Z} \quad (2.10)$$

onde A_Z é a área do plano de cisalhamento.

$$A_Z = b \frac{\hbar}{\text{sen}(\phi)} \quad (2.11)$$

onde b é a largura do corte, $\hbar$ é a espessura de corte.

A tensão normal no plano de cisalhamento, σ_Z , é dada por:

$$\sigma_Z = \frac{F_{NZ}}{A_Z} \quad (2.12)$$

Portanto, a força necessária para formar cavacos depende da resistência ao cisalhamento do material e da área do plano de cisalhamento, nas condições particulares de corte.

Como o material é recalcado para que o cavaco se forme, há uma desaceleração do mesmo quando passa pela região de cisalhamento. Essa desaceleração pode ser calculada, uma vez que o volume não se altera durante o processo. A figura 2.7 mostra a relação geométrica entre as velocidades envolvidas, ou seja, de saída do cavaco (v_{cav}) e a de cisalhamento (v_Z) com relação à de corte (v_c).

Portanto, as velocidades do cavaco, v_{cav} , e de cisalhamento, v_Z , podem ser expressas como:

$$v_{cav} = v_c \frac{\text{sen}(\phi)}{\cos(\phi - \gamma)} \quad \text{e} \quad v_Z = v_c \frac{\cos(\gamma)}{\cos(\phi - \gamma)} \quad (2.13)$$

De acordo com Altintas (2000), a energia de cisalhamento, P_Z , consumida no plano de cisalhamento pode ser calculado pela seguinte equação:

$$P_Z = F_Z v_Z \quad (2.14)$$

A geometria de deformação do cavaco é apresentada na figura 2.8. Assume-se que a seção do cavaco sem deformação $A_0B_0A_1B_1$ está se movendo com velocidade da peça v .

Figura 2.7: Decomposição das velocidades no corte ortogonal

Fonte: Adaptado de Machado et al. (2009)

Figura 2.8: Diagrama da deformação do cavaco no corte ortogonal

Fonte: Adaptado de Altintas (2000)

O material da peça é deformado plasticamente no plano de cisalhamento, segmento (A_1B_1) da figura 2.8, e o cavaco cortado desliza sobre a face da ferramenta com velocidade v_{cav} . Depois de um tempo de aderência Δt a faixa de metal não cortada $A_0B_0A_1B_1$ torna-se o cavaco com geometria $A_1B_1A_2B_2$. Para isso, o cavaco é deslocado da posição esperada $B'_2A'_2$ para a posição de deformação B_2A_2 devido ao cisalhamento ocorrido no plano de cisalhamento com ângulo de cisalhamento ϕ .

O comprimento do "plano" de cisalhamento, o segmento (A_1B_1) da figura 2.8, será

denominado L_c e pode ser calculado com dados do diagrama da distribuição das forças da figura 2.6 com as seguintes fórmulas:

$$L_c = \frac{\hbar}{\text{sen}(\phi)} = \frac{\hbar_c}{\cos(\phi - \gamma)} \quad (2.15)$$

onde $\hbar_c$ é a espessura do cavaco cortado, ou seja, o segmento (A_2B_2) da figura 2.8.

Segundo Altintas (2000) a espessura de cisalhamento Δd , observada na figura 2.8 pode ser aproximada por uma fração do comprimento do plano de cisalhamento, ou seja:

$$\Delta d \approx 0,15 - 0,2L_c \quad (2.16)$$

Para uma análise mais precisa, a espessura de cisalhamento Δd deve ser medida experimentalmente com um microscópio.

2.2.2 Zona Secundária de Deformação

Existem duas componentes da força F_N e F_T atuando na superfície de saída da ferramenta (figura 2.6), as quais podem ser escritas pela decomposição geométrica como:

$$F_T = F_C \text{sen}(\gamma) + F_f \cos(\gamma) \quad (2.17)$$

$$F_N = F_C \cos(\gamma) - F_f \text{sen}(\gamma) \quad (2.18)$$

A energia fornecida pelo atrito na face de contato ferramenta cavaco, P_T , pode ser calculada por:

$$P_T = F_T v_{cav} \quad (2.19)$$

A energia total, P_{total} , gerada no corte é a soma das energias produzidas nas zonas de cisalhamento e atrito e pode ser calculado por:

$$P_{total} = P_Z + P_T \quad (2.20)$$

O calor gerado na zona terciária de deformação, a interface peça-ferramenta, é devido ao trabalho feito pelo atrito, o qual ocorre no contato de fricção entre o flanco da

ferramenta e a superfície recém usinada. A geração de calor e as temperaturas nas zonas primárias e secundárias são altamente dependentes das condições de corte, enquanto a geração de calor na zona terciária é fortemente influenciada pelo desgaste do flanco da ferramenta, [Abukhshim, Mativenga e Sheikh \(2006\)](#).

Em resumo, o consumo de energia e a geração de calor em processos de corte de metal são dependentes de uma combinação das condições de corte, da geometria da ferramenta de corte e das propriedades físicas e químicas do material da peça e da ferramenta.

Para equilibrar a energia envolvida na formação de cavaco em corte ortogonal esta soma de energias deve ser igual aquela fornecida pelo motor elétrico, desprezando-se a energia de atrito na zona terciária de deformação e as perdas mecânicas e elétricas esta pode ser calculada por:

$$P_{total} = F_c v_c \quad (2.21)$$

2.2.3 Termomecânica do Fresamento

Nesta seção será abordada a termomecânica para a operação de faceamento, a mecânica para outras operações de fresamento são modeladas geometricamente a partir desta. O faceamento é o processo de fresamento no qual o ângulo de entrada e de saída da fresa em relação peça é não nulo. A geometria da formação de cavaco neste processo é ilustrada na figura 2.9, na qual a força de corte será chamada de força tangencial, F_t e a força de avanço, F_f , de força radial, F_r por conveniência de nomenclatura. Diferente do torneamento, no processo de fresamento a espessura do cavaco $\bar{h}$ varia periodicamente como uma função dependente da variação da imersão da fresa na peça.

A variação da espessura do cavaco pode ser aproximada pela seguinte equação, [Altintas \(2000\)](#):

$$\bar{h}_c(\phi) = f_z \text{sen}(\phi_{im}) \quad (2.22)$$

onde f_z é o avanço ($mm/dente$) e ϕ_{im} é o ângulo instantâneo de imersão da fresa. A espessura média do cavaco por revolução, $\bar{h}_m$, é calculada a partir da zona percorrida como:

$$\bar{h}_m(\phi_i) = \frac{\int_{\phi_{ex}}^{\phi_{int}} f_z \text{sen}(\phi_{im}) d\phi_{im}}{\phi_{ex} - \phi_{int}} = -f_z \frac{\cos(\phi_{ex}) - \cos(\phi_{int})}{\phi_{ex} - \phi_{int}} \quad (2.23)$$

Figura 2.9: Geometria e formação do cavaco no processo de fresamento

Fonte: Adaptado de Altintas (2000)

onde ϕ_{int} é o ângulo inicial de imersão da fresa e ϕ_{ex} é o ângulo final de imersão da fresa.

O torque, T_o , no faceamento pode ser equacionado por:

$$T_o = F_t \frac{D}{2} \quad (2.24)$$

onde D é o diâmetro da fresa.

As componentes das forças de corte agindo sobre a fresa são derivadas do diagrama de equilíbrio das forças da figura 2.9 e podem ser calculadas pelas seguintes decomposições:

$$\begin{aligned} F_x(\phi) &= -F_t \cos(\phi) - F_r \sin(\phi) \\ F_y(\phi) &= F_t \sin(\phi) + F_r \cos(\phi) \\ F_z(\phi) &= F_a \end{aligned} \quad (2.25)$$

Deve-se observar que as forças de corte são produzidas apenas quando o inserto da fresa esta na zona de corte, ou seja:

$$F_x(\phi), F_y(\phi), F_z(\phi) > 0 \text{ quando } \phi_{int} \leq \phi \leq \phi_{ext}$$

onde ϕ_{int} e ϕ_{ext} são os ângulos de corte de entrada e saída da fresa, respectivamente, denominados também como ângulos de imersão de entrada e de saída. O ângulo entre os dentes da fresa é denotado por ϕ_p e calculado pela seguinte fórmula:

$$\phi_p = \frac{2\pi}{N} \quad (2.26)$$

onde N é o número de dentes da fresa.

As forças de avanço total, normal e axial podem ser formuladas como, [Altintas \(2000\)](#):

$$\begin{aligned} F_x(\phi) &= \sum_{j=1}^N F_{x_j}(\phi_j) \text{ Força Avanço} \\ F_y(\phi) &= \sum_{j=1}^N F_{y_j}(\phi_j) \text{ Força Normal} \\ F_z(\phi) &= \sum_{j=1}^N F_{z_j}(\phi_j) \text{ Força Axial} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Para $\phi_{int} \leq \phi_j \leq \phi_{ext}$ onde cada termo na somatória representa a contribuição de cada dentes para as forças de corte.

O torque é formulado então, considerando a contribuição de cada dente da fresa, como:

$$To = \frac{D}{2} \sum_{j=1}^N F_{t_j}(\phi_j) \quad (2.28)$$

Portanto a potência de corte desenvolvida pelo motor para a operação de fresamento pode ser calculado por:

$$P_c = v_c \sum_{j=1}^N F_{t_j}(\phi_j) \text{ para } \phi_{int} \leq \phi_j \leq \phi_{ext} \quad (2.29)$$

onde $v_c = \pi D n$ é a velocidade de corte e n é a rotação do eixo do motor.

2.2.4 Fatores Geradores de Calor no Processo de Usinagem

As principais fontes de calor no processo de corte durante a usinagem são consequências dos seguintes fatores:

- Deformação plástica do cavaco na região de cisalhamento;
- Atrito do cavaco com a superfície de saída da ferramenta;

- Atrito da peça com a superfície de incidência da ferramenta.

A quantidade de calor produzida por estes fatores é dissipada através do cavaco, da peça, da ferramenta e do meio ambiente (ar, fluido refrigerante, etc).

A fonte de calor na zona primária de deformação (figura 2.5) ocorre devido à deformação plástica do material que está sendo usinado. Esta fonte afeta todo o volume do cavaco formado e a peça. A fonte de calor devido ao atrito do cavaco com a superfície de saída da ferramenta ocorre na zona secundária de deformação (figura 2.5) e afeta uma face do cavaco e uma face da ferramenta, onde o cavaco desliza sobre a superfície de saída da ferramenta. A terceira fonte de calor ocorre na zona de interface ferramenta-peça, zona terciária de deformação (figura 2.5), onde ocorre o atrito entre a ferramenta e a superfície usinada da peça.

Das três fontes de calor descritas, a fonte de calor na zona primária e terciária afetam diretamente a peça em usinagem. O aquecimento da peça pode acarretar os seguintes fatos indesejáveis na operação de usinagem, [Ferraresi \(1982\)](#):

- Deformação da peça em usinagem devido às tensões provenientes de grande aquecimento local ou mesmo total;
- Falseamento das medidas da peça em trabalho. Em operações onde as medidas são tomadas automaticamente pelas trajetórias das ferramentas, ocorre uma discordância entre a medida feita durante a ação da ferramenta e após essa ação; acontece que a peça apresenta medidas diferentes quando aquecida em relação ao estado de temperatura ambiente;
- Dificuldade para o operador manusear a peça usinada.

O calor gerado no processo de corte de metais pode ser estimado por métodos calorímetros ou usando a força de corte. Usando a força de corte, tem-se que a energia consumida é igual ao trabalho,

$$W_c = P_c = F_c v_c \quad (2.30)$$

Assumindo que todo trabalho mecânico realizado no processo é convertido em calor então a taxa de calor q_Z na zona de primária deformação pode ser calculada como:

$$q_Z = W_Z = F_Z v_Z \quad (2.31)$$

A taxa de calor devido ao trabalho na zona secundária de deformação através da superfície de saída da ferramenta, q_T é calculada da energia de atrito e formulada como:

$$q_T = F_T v_{cav} \quad (2.32)$$

Porém, verifica-se experimentalmente que quase todo o trabalho de usinagem (87 a 90 %) se transforma em calor. Portanto pode-se calcular aproximadamente a quantidade de calor por meio do trabalho realizado durante a usinagem.

A Tabela 2.2 apresenta um exemplo da variação das proporções da distribuição de calor entre o cavaco a ferramenta e a peça.

Tabela 2.2: Calor dissipado para $v = 100m/min$

Material	Cavaco	Peça	Ferramenta
Aço	71 %	26 %	1,9 %
Alumínio	21 %	73 %	2,2%

Fonte: Adaptado de Ferraresi (1982)

Vernaza-Pena (apud ABUKSHIM; MATIVENGA; SHEIKH, 2006) relatam que 17% do calor gerado na zona primária do corte ortogonal de uma liga de alumínio flui para a peça. No entanto, para baixa remoção de metal esta quantidade geralmente é por volta de 50%.

Moriwaki, Sugimura e Luan (apud ABUKSHIM; MATIVENGA; SHEIKH, 2006) assumem que, no corte ortogonal de peças de cobre, metade do calor gerado devido ao atrito ferramenta-peça é transmitido para a peça e a outra metade para a ferramenta como um fluxo de calor.

A variação da distribuição do fluxo total de calor (zona primária e secundária) dissipada entre o cavaco, Q_{cav} , a ferramenta, Q_f , e a peça, $Q_{peça}$, em relação ao número de Peclet, $Pe = \frac{vL_c}{\alpha}$ (onde v é a velocidade do objeto, L_c o comprimento característico do objeto e α a difusividade térmica) é abordada no livro Chandra e Mukherjee (1996) por meio da relação ilustrada na figura 2.10.

Analisando a figura 2.10, pode-se observar que para o número de Peclet, $Pe=1$, 50% do fluxo de calor flui para a peça e 25% para o cavaco, por outro lado para $Pe=50$, apenas 4% do fluxo de calor flui para a peça e 90% para o cavaco.

Figura 2.10: Variação da distribuição do fluxo total de calor dissipado entre o cavaco a ferramenta e a peça em relação ao número de Peclet

Fonte: Adaptado de Chandra e Mukherjee (1996)

Muitos modelos analíticos para a determinação do fluxo de calor usam a partição de energia originalmente introduzida por Blok (1963) e a solução do modelo pelo método da fonte móvel proposta por Jaeger (1942). O modelo de partição de Blok é válido somente para dois corpos em movimento relativo, ou seja, um estacionário enquanto o outro está em movimento com velocidade relativa. O princípio da partição de calor formulada por Blok pode ser resumido como: a taxa de calor gerada por unidade de área na interface de deslizamento é conduzida para o objeto parado e o corpo em movimento na taxa B e $(B - 1)$, respectivamente, assumindo que toda a perda de calor é negligenciada. Destas hipóteses é retirada a temperatura média sobre área de contato dos corpos, considerando a fonte de calor estacionária de intensidade Bq . E outra expressão da temperatura média sobre a mesma área é derivada considerando uma fonte móvel de intensidade $(B - 1)q$ com velocidade relativa. Os dois valores médios de temperatura são igualados para determinar B (a fração de calor que flui para o objeto estacionário).

A tabela 2.3 é um resumo das equações utilizadas por vários pesquisadores para calcular a fração de calor B ou $(B - 1)$ em um processo típico de usinagem.

A tabela 2.4 mostra um exemplo do cálculo da fração de fluxo de Calor B e $(B - 1)$ durante o processo de usinagem em corte ortogonal do aço AISI 1113 utilizando as equações da tabela 2.3.

A partir do estudo das equações derivadas do procedimento de Blok, citadas na tabela 2.3, os autores de Komanduri e Hou (2000a) estabelecem a seguinte relação para a

Tabela 2.3: Equações para a determinação do fração do fluxo de Calor, B , que flui para o objeto estacionário

Fonte	Equação para determinar a fração do fluxo de Calor
Chao e Trigger (1951)	$B = 0, 1$
Loewen e Shaw (1954)	$(B - 1) = 1 / \left(1 + 1, 328 \sqrt{\frac{\alpha \Gamma_z}{v_c \hbar}} \right)$
Leone (1954)	$B = 1 / \left(1 + 1, 13 R_c \sqrt{\frac{L_f v_f}{\alpha}} \right)$

Fonte: Adaptado de Komanduri e Hou (2000b)

onde α é a difusividade térmica do material do objeto parado, Γ_z é tensão de média de atrito no cavaco, $\Gamma_z = \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\phi) \cos(\phi - \gamma)}$ (γ e ϕ ângulos de saída da ferramenta e do plano de cisalhamento, respectivamente), v_c é a velocidade de corte, v_f é a velocidade de avanço, $\hbar$ é a espessura do cavaco ou profundidade de corte, $R_c = \frac{\hbar'}{\hbar}$ é o grau de recalque ($\hbar'$ é a espessura do cavaco deformado), L_f é a largura da fonte de calor.

Tabela 2.4: Determinação da fração de fluxo de Calor B que flui para a peça durante a usinagem em corte ortogonal de aço AISI 1113

Método	Chao e Trigger (1951)	Loewen e Shaw (1954)	Leone (1954)
B	0,1	0,375	0,362
(B - 1)	0,9	0,625	0,638

Fonte: Adaptado de Shaw (1984)

dados de corte: $\phi = 30, 1^\circ$, $\gamma = 20^\circ$, $v_c = 139, 2 m/min$, $\hbar = 0, 06 mm$, $\alpha = 1, 48 \cdot 10^{-5} m^2/s$, $k = 56, 7 W/m \cdot ^\circ C$, $b = 3, 84 mm$ (largura de corte), $F_c = 356 N$ e $F_f = 125 N$.

variação da partição de calor para o objeto estacionário, $B_{aparente}$, devido à fonte de calor no plano de cisalhamento:

$$B_{aparente} = 0, 60361 \times N_{th}^{-0, 37109} \quad (2.33)$$

onde $N_{th} = \frac{\hbar v_c}{\alpha}$ é denominado número térmico.

De acordo com Abukhshim, Mativenga e Sheikh (2006), a principal preocupação sobre o procedimento de Blok é a hipótese irreal de que a distribuição do fluxo de calor é uniforme sobre a região de contato. A maioria dos modelos usando esta técnica assume condições em regime permanente quando particionam o calor gerado nas zonas primárias e secundárias. Isto significa que o calor fluindo para as componentes do processo são constantes durante o processo. No entanto, isto permite uma subestimação da partição de calor indo para a ferramenta especialmente em período transiente de condução.

A base para as soluções usando o método de fonte de calor é a solução da condução de calor para uma fonte de calor pontual e instantânea, descrita pela seguinte equação, Carslaw e Jaeger (1959):

$$T = \frac{Q}{c_p \rho (4\pi \alpha t)^{3/2}} e^{-\frac{R^2}{4\alpha t}} \quad (2.34)$$

onde Q é o fluxo de calor fluindo para o sólido, c_p é a calor específico, ρ é a densidade, α é a difusividade térmica do sólido e R é a dimensão do sólido.

A equação (2.34) é conhecida como a solução de Jaeger e também é utilizada para uma fonte pontual de calor em movimento aplicável somente para a condição de estado quase-estacionário.

Komanduri (1993) afirma que é necessário desenvolver uma solução geral (para ambos os estados transiente e quase-estacionário) com uma abordagem alternativa. O mesmo autor, em Komanduri e Hou (2000a), salienta que as soluções de problemas com fontes plana de calor (fontes fixas e móveis de vários formatos e diferentes distribuições de intensidade), os quais utilizam diretamente o método de equações diferenciais parciais (EDP) não são simples e claras, pois se deparam com fronteiras (condições de contorno), onde as temperaturas são desconhecidas e apenas os fluxos de calor são conhecidos (um valor constante ou uma função desconhecida). Assim, as expressões matemáticas de tais soluções não podem ser simples. Além disso, ainda não foi estabelecido se seria possível determinar os coeficientes nas soluções da EDP relevantes ao modelo de condução de calor. Os autores Komanduri e Hou (2000a, p. 1680) afirmam que não é possível obter uma solução da resolução do problema de fonte de calor contínua pontual e estacionária usando o método EDP, com a fonte de calor como condição de contorno, embora seja um dos mais simples problemas de fontes fixas de calor. Portanto, estas são as justificativas para que os autores utilizem a solução de Jaeger como solução do modelo proposto. Por outro lado, a análise da distribuição e a modelagem da fonte de calor que eles utilizaram é bastante coerente e aborda-se a seguir.

2.2.4.1 Fonte de calor e distribuição do fluxo de calor

No processo de usinagem de metais a principal fonte de calor que afeta a peça ocorre na zona de deformação primária devido ao contato do cavaco com a peça. A área de contato do cavaco com a peça pode ter diferentes formatos. O formato da fonte de calor difere de acordo com a composição do material, com o tipo de ferramenta e

processo de usinagem. Além disso, a propagação (distribuição) do fluxo de calor também varia de acordo com o experimento. Por exemplo, no trabalho de [Nguyen et al. \(1999\)](#) a transferência de calor por uma solda em uma peça de aço é modelada com uma fonte de calor no formato de um elipsóide com distribuição gaussiana.

No artigo de [Komanduri e Hou \(2000a\)](#), são apresentadas soluções para os problemas de condução de calor para fontes móveis e estacionárias de vários formatos (elíptico, circular, retangular e quadrado) e diferentes intensidade de distribuição (uniforme, parabólica e normal). A figura 2.11 é uma comparação das três distribuições de calor, uniforme, parabólica e normal. Ela ilustra que com a mesma taxa de calor q_{pl} a distribuição de intensidades uniforme tem a maior uniformidade e portanto o menor valor máximo da intensidade de calor. A distribuição normal tem a uniformidade menor e o maior valor máximo da intensidade de calor. A distribuição parabólica está entre as distribuições uniforme e a normal.

Figura 2.11: Variação das três intensidades da distribuições de calor

Fonte: Adaptado de [Komanduri e Hou \(2000a\)](#)

Distribuição uniforme: O fluxo de calor para vários formatos de fontes de calor com distribuição de intensidade uniforme q_0 é constante e dada pela seguinte equação:

$$q_0 = \frac{q_{pl}}{A_{pl}} \quad (2.35)$$

onde q_{pl} é a taxa de calor de uma fonte móvel/estacionária plana e A_{pl} é a área da fonte plana (área da elipse, do círculo, do retângulo ou do quadrado).

Distribuição Parabólica: A figura 2.12(a) mostra a variação do fluxo de calor (bidimensional) de uma fonte de calor de formato elíptico com distribuição parabólica. A relação entre o fluxo de calor q_0 e a distância x_i e y_i do centro é dada pela seguinte equação:

$$q_0 = C(1 - \frac{y_i^2}{b_0^2})(1 - \frac{x_i^2}{l_{y_i}^2}) \quad (2.36)$$

onde b_0 é o Eixo menor da fonte de calor elíptica l_{y_i} é metade do comprimento da faixa diferencial com uma distância do centro da fonte elíptica y_i . A taxa de calor $d q_{ell}$ na área diferencial $dx_i dy_i$ é dada por:

$$dq_{ell} = q_0 dx_i dy_i \quad (2.37)$$

Depois de apropriadas substituições e integração tem-se que o fluxo de calor de uma fonte de calor de formato elíptico com distribuição parabólica é:

$$q_0 = \frac{q_{ell}}{0,5A_{ell}}(1 - (x_i/a_0)^2)[1 - (y_i/b_0)^2/(1 - (x_i/a_0)^2)] \quad (2.38)$$

Analogamente, o fluxo de calor para uma fonte de formato circular ($a_0 = b_0$) com distribuição parabólica é dada por:

$$q_0 = \frac{q_c}{0,5A_c}(1 - (x_i/a_0)^2)[1 - (y_i/b_0)^2/(1 - (x_i/a_0)^2)] \quad (2.39)$$

onde q_c é Taxa de calor de uma fonte móvel/estacionária circular e A_c é a área da fonte circular

Para uma fonte de calor retangular (figura 2.12(b)), a relação entre o fluxo de calor q_0 e as distâncias x_i e y_i do centro é dada pela seguinte equação:

$$q_0 = C(1 - \frac{y_i^2}{b_0^2})(1 - \frac{x_i^2}{a_0^2}) \quad (2.40)$$

onde a_0 é metade do lado maior da fonte retangular.

O fluxo de calor de uma fonte de calor retangular com distribuição parabólica é:

$$q_0 = \frac{q_r}{4/9A_r}(1 - (x_i/a_0)^2)(1 - (y_i/b_0)^2) \quad (2.41)$$

onde q_r é taxa de calor de uma fonte móvel/estacionária retangular e A_r é a área da fonte

Figura 2.12: Variação da intensidade de calor de uma fonte de calor elíptica (a) e de uma fonte retangular (b) com distribuição parabólica

Fonte: Adaptado de Komanduri e Hou (2000a)

retangular.

Analogamente, o fluxo de calor de uma fonte de calor quadrada com distribuição parabólica é:

$$q_0 = \frac{q_q}{4/9A_q} (1 - (x_i/a_0)^2)(1 - (y_i/a_0)^2) \quad (2.42)$$

onde q_q é taxa de calor de uma fonte móvel/estacionária quadrada e A_q é a área da fonte quadrada.

Distribuição Normal: A figura 2.13(a) mostra a variação do fluxo de calor (bidimensional) de uma fonte de calor elíptica com distribuição normal (ou gaussiana). A relação entre o fluxo de calor q_0 e a distância x_i e y_i do centro é dada pela seguinte equação:

$$q_0 = C e^{(-\frac{3y_i}{b_0})^2} e^{(-\frac{3x_i}{l_{y_i}})^2} \quad (2.43)$$

Pode-se mostrar que o fluxo de calor liberado por uma fonte elíptica com uma distribuição normal é descrita pela seguinte equação:

$$q_0 = \frac{q_{ell}}{0,1079A_{ell}} e^{-(\frac{3y_i}{b_0})^2} e^{-\left(\frac{3x_i}{a_0\sqrt{1-(y_i/b_0)^2}}\right)^2} \quad (2.44)$$

Substituindo, $a_0 = b_0 = r_0$, o fluxo de calor de uma fonte circular com distribuição normal é determinada pela seguinte equação:

$$q_0 = \frac{q_c}{0,1079A_c} e^{-(\frac{3y_i}{r_c})^2} e^{-\left(\frac{3x_i}{r_c\sqrt{1-(y_i/r_c)^2}}\right)^2} \quad (2.45)$$

Para uma fonte de calor retangular (figura 2.13(b)), a relação entre o fluxo de calor q_0 e as distâncias x_i e y_i do centro é dada pela seguinte equação:

$$q_0 = C e^{(-\frac{3y_i}{b_0})^2} e^{(-\frac{3x_i}{a_0})^2} \quad (2.46)$$

Após apropriadas substituições e integração, pode-se mostrar que o fluxo de calor liberado por uma fonte retangular com distribuição normal é descrita pela seguinte equação:

$$q_0 = \frac{q_r}{\pi/36A_r} e^{-(\frac{3y_i}{b_0})^2} e^{-(\frac{3x_i}{a_0})^2} \quad (2.47)$$

Substituindo, $a_0 = b_0$, a intensidade de uma fonte quadrada com distribuição normal é determinada pela seguinte equação:

$$q_0 = \frac{q_q}{\pi/36A_q} e^{-(\frac{3y_i}{a_0})^2} e^{-(\frac{3x_i}{a_0})^2} \quad (2.48)$$

Figura 2.13: Variação da intensidade de calor de uma fonte de calor elíptica (a) e de uma fonte retangular (b) com distribuição Normal

Fonte: Adaptado de Komanduri e Hou (2000a)

2.3 Técnicas Experimentais de Medição de Temperatura

Diversas técnicas foram desenvolvidas ao longo do tempo para a medição de calor e temperaturas geradas no processo de manufatura. Uma revisão das técnicas experimentais mais comuns para medir a temperatura em corte de metais revela que estas técnicas podem ser classificadas como:

- **Condução Direta :** termopares (termopar inserido) e o termopar ferramenta-peça;
- **Radiação Direta :** Fotografia infravermelho, infravermelho e pirômetros ópticos;

- **Metalografia** : tintas térmicas, materiais de temperaturas de fusão conhecidas, na forma de pó ou de um filme fino.

Estas técnicas foram revisadas por Barrow (apud ABUKHSHIM; MATIVENGA; SHEIKH, 2006, p. 785)¹, DaSilva e Wallbank (apud ABUKHSHIM; MATIVENGA; SHEIKH, 2006, p. 785)², e mais recentemente por Komanduri e Hou (2001a), O'Sullivan e Cotterell (apud ABUKHSHIM; MATIVENGA; SHEIKH, 2006, p. 785)³ e Sutter et al. (apud ABUKHSHIM; MATIVENGA; SHEIKH, 2006, p. 785)⁴.

Cada técnica tem suas vantagens e desvantagens. A técnica adequada para um determinado problema térmico depende do contexto do processo de usinagem, como a facilidade de acesso, tamanho do ponto, a dinâmica do processo, a precisão necessária, o custo de instrumentação, avanços na tecnologia.

De acordo com Silva e Wallbank (1999), a maioria dos métodos utilizados para medir a temperatura estão preocupados com a temperatura da interface cavaco-ferramenta, e para estas medidas a técnica do termopar na ferramenta de trabalho é o melhor método. Ele dá o aspecto da tendência da temperatura com os parâmetros de corte, como a redução de velocidade, avanço e profundidade de usinagem.

2.3.1 Técnicas de Medição por Condução Direta

A técnica do termopar na ferramenta-peça é baseada no fato em que a ferramenta e a peça são de materiais diferentes. A área de contato entre estes dois corpos de diferentes materiais em atrito produz calor, o qual, por sua vez, gera uma força termoelétrica. A figura mostra um esquema de como seria a medição de temperatura usando a ferramenta e a peça como um termopar.

O ponto Q de contato da peça-ferramenta representa a junção quente. Os pontos F1, F2, F3 e F4 representam as junções frias. A cuba é preenchida com mercúrio até que seja estabelecido o contato elétrico do disco com o elemento E, garantindo desta forma o fechamento do circuito. Os fios A1 e A2 fazem a conexão do sistema com o milivoltímetro

¹G. Barrow, A review of experimental and theoretical techniques for assessing cutting temperatures, *Ann. CIRP*, v.22, p.203, 1973.

²M.B., Da Silva, J. Wallbank. Cutting temperature - prediction and measurement methods-a review, *J. Mater. Process. Technol.*, v. 88, p.195, 1999.

³D. O Sullivan, M. Cotterell. Temperature measurement in single point turning, *J. Mater. Process. Technol.*, v. 118, p. 301, 2001.

⁴G. Sutter, et. al., An experimental technique for the measurement of temperature fields for the orthogonal cutting in high speed machining, *Int. J. Mach. Tools Manufac.*, v. 43, p. 671, 2003.

Figura 2.14: Esquema para medição da temperatura de corte pelo método do termopar ferramenta-peça

Fonte: Adaptado de DeMelo (1998)

V que indica o valor da f.e.m. (força eletromotriz) gerada. O sistema deve ser calibrado para fornecer valores de temperatura em graus Celsius.

As principais preocupações apresentadas por diferentes pesquisadores sobre o método termopar ferramenta-peça foram:

- Não pode ser utilizado fluido refrigerante no processo;
- Necessita de uma calibração cuidadosa;
- Produz ruído no sinal;
- A peça e a ferramenta devem ser condutores elétricos;
- Fornece um valor médio da temperatura através da interface cavaco-ferramenta inteira;
- A temperatura elevada que ocorre por um curto período de tempo pode não ser registrada.

Segundo Abukhshim, Mativenga e Sheikh (2006) a aplicação do método termopar ferramenta-peça em HSM pode ser limitada pela fragilidade e resistência elétrica da ferramenta. Além disso, a incapacidade deste método de registrar os aspectos transientes da distribuição de temperatura e a impossibilidade para medir a temperatura quando o material da peça funde-se torna-o inadequado para HSM.

Termopar pode ser definido como formado por dois condutores metálicos, de natureza distinta, A e B, na forma de metais puros ou de ligas homogêneas. Os fios são

soldados em um extremo ao qual se dá o nome de junta quente ou junta de medição. A outra extremidade dos fios é levada ao instrumento de medição de f.e.m., fechando um circuito elétrico por onde flui a corrente. O ponto onde os fios que formam o termopar se conectam ao instrumento de medição é chamado de junta fria ou de referência. A Figura 2.15 mostra esquematicamente um termopar com seu sistema de medição de f.e.m., Machado et al. (2009).

Figura 2.15: Esquema de medição de temperatura usando termopar

Fonte: Adaptado de Machado et al. (2009)

A técnica do termopar inserido usa termopares que são implantados e montados na inserção do corte para medir a temperatura em um ou em vários pontos através da ferramenta ou da peça. Este método requer a perfuração de vários furos na ferramenta ou na peça para a inserção dos termopares. A fim de obter uma boa precisão, a profundidade dos furos precisa ser o mais próximo possível da superfície onde a temperatura é medida.

Apesar desta técnica ter sido amplamente utilizada, especialmente para a estimativa da temperatura da ferramenta, existem várias limitações e aspectos questionáveis relativo à colocação dos termopares no sólido a ser medido a temperatura. Estes aspectos e limitações são:

- O fluxo de calor pode ser modificado com a presença do termopar no sólido;
- A força da ferramenta pode ser limitada com a presença do termopar na ferramenta;
- O tempo de resposta é lento (depende do diâmetro do fio e da massa da junção);
- Dificuldade de furar o canal de inserção do termopar em materiais de difícil usinagem, tais como a cerâmica;

Apesar dessas limitações e dos aspectos questionáveis, até o presente momento, não foram desenvolvidos sensores de temperatura com tecnologia mais avançada que superam essas falhas.

2.3.2 Técnicas de Medição por Radiação

As técnicas de radiação são métodos termográficos de não contato para medir a temperatura na superfície do corpo baseado na energia térmica emitida. Possui vantagens sobre a técnica termoeletrica devido à resposta rápida, nenhum efeito desfavorável para a temperatura e para o material, pois não possui contato físico. Permite medições de objetos de difícil acesso. [Abukhshim, Mativenga e Sheikh \(2006\)](#) afirmam que esta técnica pode ser a mais adequada em aplicações HSM onde altas temperaturas podem ser capturadas facilmente quando não existe contato direto com a fonte de calor. De acordo com [Machado et al. \(2009\)](#), a medição de temperatura por meio de radiação utilizando sensores infravermelhos, ou pirômetros, é bastante utilizada para obtenção da temperatura da superfície da peça, do cavaco ou da ferramenta. A posição de medição deve ser selecionada cuidadosamente para evitar a obstrução da medida pelo cavaco. Além disso, a superfície de emissividade deve ser conhecida, pois esta afeta a temperatura medida. [Silva e Wallbank \(1999\)](#) relatam que o método de infravermelho dá uma boa indicação da temperatura máxima da peça de trabalho, bem como sua taxa de resfriamento.

2.3.3 Metalografia

A distribuição da temperatura na ferramenta de corte pode ser obtida pela inspeção metalográfica da mesma. A dureza do aço carbono endurecido à temperatura ambiente, assim como a do aço-rápido, decresce após seu reaquecimento, e a redução na dureza depende da temperatura e do tempo de aquecimento. Calibrando-se a dureza versus temperatura e o tempo de aquecimento, uma família de curvas pode ser obtida para cada material de ferramenta. Essas curvas podem ser usadas para se inferir a temperatura em ferramentas de corte.

Sais com diferentes temperaturas de fusão: Esta técnica consiste da utilização de sais com ponto de fusão bem definido tais como NaCl, KCl, CdCl, PbCl₂, AgCl, KNO₃, para determinação da distribuição da temperatura no corpo da ferramenta de corte. Em primeiro lugar, procede-se a divisão do inserto em duas partes de iguais dimensões. Geralmente, esta etapa é realizada por processo de abrasão (retificação) dos

insertos, até que estes alcancem a metade do tamanho original. Dois deles são montados de maneira a formarem um bipartido (uma ferramenta bipartida com o plano de partição perpendicular à superfície de saída). Com a ferramenta bipartida em mãos, a próxima etapa consiste em umedecer as superfícies retificadas com uma solução de silicato de sódio para melhorar a adesão do sal que será posteriormente espalhado sobre estas superfícies. Terminadas estas etapas, as partes são unidas e processa-se a usinagem durante um tempo suficiente, até que o sistema entre em regime permanente. Após o corte, a ferramenta é novamente separada e a isotérmica gerada pela fusão do sal é observada. Esta pode ser identificada pela linha gerada entre o sal que sofreu fusão e o que permaneceu sem transformação. Se este processo for repetido com vários tipos de sais (com pontos de fusão diferentes), e com ferramentas de um mesmo material, pode-se determinar a distribuição de temperatura no plano ortogonal à aresta da ferramenta de corte, [Machado et al. \(2009\)](#).

Filmes depositados por PVD: Este método consiste da deposição de finas camadas de diversos materiais com pontos de fusão específicos numa superfície perpendicular à superfície de saída de insertos. Após a deposição do filme de um determinado material, as partes da ferramenta são unidas e posta para usinar um disco num processo de corte ortogonal como mostra a figura 2.16. A obtenção das curvas de temperatura ocorre da mesma forma descrita no item anterior para o caso do uso de sais.

Figura 2.16: Montagem experimental para medir a distribuição de temperatura pelo método PVD

Fonte: Adaptado de [Machado et al. \(2009\)](#)

2.4 Fluidos de Corte

O primeiro pesquisador que constatou e mediu a influência do fluido de corte durante a usinagem foi Frederick W. Taylor em 1894. Taylor observou que um grande fluxo de água na região de corte peça-ferramenta-cavaco permitia o aumento de 33% da velocidade de corte v_c sem prejuízo para a vida da ferramenta, [Ruffino \(1977\)](#). A intenção da utilização da água surgiu na busca de diminuir o efeito da alta temperatura sobre a ferramenta. Posteriormente, a fim de melhorar o atrito do cavaco sobre a ferramenta surgem os óleos graxos aplicados em todos os processos de usinagem. Os óleos minerais surgem inicialmente aplicados na usinagem de latão, ligas não-ferrosas e em operações leves com aço.

O êxito de melhores materiais para ferramentas, possibilitando maiores velocidades de corte proporcionou o estudo e desenvolvimento de novos fluidos de corte. Estes foram obtidos com aditivos químicos, dosados nos fluidos de corte para satisfazer necessidade particulares nas operações mais pesadas de usinagem .

As pesquisas levaram à utilização das mais variadas combinações de óleos minerais, óleos graxos e aditivos (enxofre, cloro, fósforo, etc.). Cada combinação com sua utilização específica. Nessa ocasião surgem os óleos emulsionáveis, os quais aproveitam a alta propriedade refrigerante da água.

Mais recentemente surgem os fluidos químicos de corte, constituídos de uma combinação de agentes químicos com a água. Sua aplicação atualmente é bastante grande, tendo em vista que sua composição é estudada e preparada de acordo com o fim a que se destina.

Uma das principais funções do fluido de corte é introduzir uma melhoria no processo de usinagem dos metais. Segundo [Ferraresi \(1982\)](#), [Machado et al. \(2009\)](#), as principais melhorias na utilização dos fluidos de cortes são lubrificação e refrigeração do corte, mas também outras melhorias podem ser oferecidas pelos fluidos como:

- redução do coeficiente de atrito nas zonas de interfaces peça-ferramenta-cavaco;
- facilidade da remoção dos cavacos da região de corte;
- melhor acabamento superficial da peça em usinagem;
- refrigeração da máquina-ferramenta;
- Prevenção contra a soldagem cavaco-ferramenta (formação de arestas postiças);

- redução do consumo de energia de corte;
- redução do custo da ferramenta na operação;
- impedimento da corrosão da peça em usinagem;
- Redução da dilatação térmica da peça.

2.4.1 Redução da Intensidade das Fontes de Calor do Processo de Usinagem

A melhoria introduzida no processo pela utilização do fluido, especialmente quando o fluido tem caráter lubrificante, é a redução da intensidade das três fontes de calor. Na zona de cisalhamento secundário e na zona de interface ferramenta-peça a aplicação de lubrificante diminui o coeficiente de atrito entre a ferramenta e o cavaco e entre a ferramenta e a peça, respectivamente, decorrendo assim menor quantidade de calor gerado pelo atrito. Na zona de cisalhamento primário o uso de lubrificante afasta mais rapidamente o cavaco da superfície de saída da ferramenta, diminuindo assim o tempo de transmissão de calor do cavaco (considerado fonte móvel de calor) para a superfície da ferramenta. Porém, segundo [Silva e Wallbank \(1999\)](#), a aplicação de um fluido de corte para o sistema acrescenta mais dificuldade para o cálculo do problema da medição da temperatura.

E ainda, [Trent e Wright \(2000\)](#) afirmam que fluidos refrigerantes não podem impedir que o calor seja gerado, e não têm acesso direto às zonas de deformação as quais são as fontes de calor do processo. O calor gerado na zona primária de cisalhamento (deformação) é mais levado no cavaco e apenas uma pequena porção é conduzida para a peça. Fluidos refrigerantes à base de água atuam eficientemente na redução da temperatura tanto da peça como do cavaco, após a saída da ferramenta. O resfriamento do cavaco é de menor importância, mas manter as temperaturas baixas na peça é essencial para a precisão dimensional.

2.4.2 Classificação dos Fluidos de Corte

Os fluidos de corte podem ser classificados em três tipos de fluidos básicos: Gases, fluidos miscíveis em água e óleos de corte puros, [ElBaradie \(1996\)](#).

2.4.2.1 Gases

O ar é o mais comum dos fluidos gasosos. O ar pode ser comprimido para melhorar a sua capacidade de refrigeração; um jato de ar direcionado para a zona de corte pode remover o calor por convecção forçada. No entanto possui baixa capacidade de refrigeração comparando-o com os refrigerantes líquidos. O ar comprimido é utilizado no processo de fresamento em operações de desbastes de canais e cavidades, para remover cavacos gerados na zona de corte, Braghini (2002). A remoção do cavaco contribui para o não aquecimento local da peça e impede que os mesmos sejam usinados novamente pela ferramenta, evitando o lascamento da aresta de corte.

Gases como o argônio, hélio e nitrogênio podem ser usados para prevenir a oxidação da peça. A vantagem dos gases inertes incluem boa capacidade de refrigeração, aumento da vida da ferramenta, visão clara da operação, eliminação da névoa e nenhuma contaminação da peça, cavaco ou lubrificante da máquina.

Gases como o freon ou dióxido de carbono (CO_2) com ponto de ebulição abaixo da temperatura ambiente, podem ser comprimidos e injetados na zona de corte para promover refrigeração.

2.4.2.2 Fluidos Miscíveis em Água

Os fluidos de corte miscíveis em água são principalmente utilizados em algumas operações de usinagem em altas velocidades. Estes fluidos são também os melhores para a refrigeração da usinagem minimizando a deformação.

Os fluidos solúveis em água são misturados com água em diferentes proporções dependendo da operação de usinagem. Por exemplo, para operações que produzem cavaco sob altas velocidade, estes são normalmente misturados na proporção 1:20, isto é, 1 parte de concentrado para 20 partes de água, ou 1:30. Para muitas operações de abrasão onde é desejável um fluido com maior ação refrigerante, a razão é 1:40 ou 1:50. Fluidos hidrossolúveis formam misturas variando de emulsões para soluções quando misturados com água. Devido às características térmicas da água, estes fluidos se destacam pela eficiência de refrigeração. Quando misturados com água fornecem a combinação refrigerante e moderada lubrificação necessária para a remoção de metal nas operações conduzidas a altas velocidades e altas pressões. Os fluidos solúveis em água podem ser classificados em óleos emulsificadores (óleos solúveis), fluidos químicos (sintéticos), ou semi-químicos (semi-sintéticos).

2.4.2.3 Óleos emulsificadores

Os óleos emulsificadores são também denominados óleos solúveis, emulsões ou fluidos de corte emulsificadores. A emulsão é uma suspensão das gotas de óleo na água feita pela mistura do óleo com agentes emulsificantes e outros materiais. Estes emulsionantes (sabão) quebram o óleo em partículas minúsculas e mantém as partículas dispersas na água por longos períodos de tempo.

Geralmente bactericidas são adicionados ao fluido para o controle do crescimento de microorganismos tais como bactérias, algas e fungos. Os sabões, agentes molhantes e acopladores usados como emulsionantes em fluidos solúveis em água reduzem significativamente a tensão na superfície de corte. Como resultado, o líquido tem uma maior tendência a espuma quando submetido ao cisalhamento e turbulência. No entanto, fluidos miscíveis em água às vezes causam problemas de espuma em operações de furação e abrasão.

Óleos emulsificadores combinam a ação lubrificante e a propriedade de prevenção contra ferrugem com a excelente propriedade refrigerante da água. As emulsões, com suas propriedades refrigerante e lubrificante, são mais eficientemente usadas em operações de corte de metais sujeita a altas velocidades e baixa pressão de corte acompanhada de considerável geração de calor.

A tabela 2.5 descreve os tipos e as características dos óleos emulsificadores.

Tabela 2.5: Tipos e características dos óleos emulsificadores

Tipos	Características
Óleo emulsionável geral	São fluidos leitosos com gotas de óleo mineral de 0,005 a 0,2 mm de diâmetro. Usados na diluição de 1:10 a 1:40 para usinagem geral.
Óleo emulsionável translúcido	Contém menos óleo e mais emulsificador que a emulsão leitosa. Consiste de uma dispersão de óleo com menor tamanho de gota, as quais são amplamente distribuídas. A diluição varia de 1:20 a 1:60. Usado em operações de abrasão ou usinagem de baixa performance.
Óleos emulsionáveis graxos	São óleos, gorduras animais ou vegetais adicionados no óleo mineral produzindo uma ampla variedade de fluidos com propriedades lubrificantes realçadas. A diluição varia de 1:10 a 1:40.
Óleo emulsionável de extrema pressão	Óleos solúveis EP contem aditivos a base de enxofre, cloro e fósforo para suportar maiores pressões. Usados em proporções de 1:10 a 1:20.

As vantagens dos óleos emulsificadores sobre alguns óleos de cortes incluem uma maior redução do calor, condições de trabalho mais limpo, economia resultante da diluição com água, menores riscos em relação à segurança e à saúde. Podem ser usadas para praticamente todas as operações de corte leves, moderadas e na maioria das operações mais pesadas, exceto envolvendo extrema dificuldade de usinar o material.

2.4.2.4 Fluidos Sintéticos

Os fluidos sintéticos são soluções químicas constituídas de sais orgânicos e inorgânicos dissolvidos em água, não contendo óleo mineral. Proporcionam rápida dissipação de calor, excelente poder detergente e visibilidade da região de corte, facilidade no preparo da solução, elevada resistência à oxidação do fluido e à ferrugem. O baixo poder lubrificante, a formação de compostos insolúveis e de espuma para determinadas operações de usinagem podem ser algumas desvantagens na utilização deste tipo de fluido.

A tabela 2.6 descreve os tipos e as características dos fluidos sintéticos.

Tabela 2.6: Tipos e características dos fluidos sintéticos

Tipos	Características
Solução pura	São essencialmente soluções de produtos químicos inibidores da ferrugem na água. Usados diluídos nas proporções 1:50 a 1:100 no processo de retificação do ferro e do aço.
Fluido sintético de baixa tensão superficial	Contém principalmente produtos químicos inibidores de ferrugem na água e aditivos. Estes fluidos têm razoável lubricidade, baixa tensão superficial, boas propriedades inibidoras de ferrugem, usualmente deixa um resíduo que é removido facilmente. Usados diluídos na proporção 1:10 a 1:40 em operações de corte e maior proporção de diluição para retificação. A maioria são adequadas para ambos os metais ferrosos e não ferrosos.
Fluido sintético de baixa tensão superficial EP	Possui características similares aos fluido sintético de baixa tensão superficial mas contém aditivos EP para oferecer maior performance no processo de usinagem. Usados diluídos na proporção 1:5 a 1:30.

2.4.2.5 Fluidos Semi-Sintéticos

Os fluidos semi-sintéticos ou fluidos semi-químicos são essencialmente uma combinação de fluidos químicos e óleos emulsificadores. Estes fluidos são compostos de fluidos sintéticos que contém somente uma pequena porcentagem de óleo mineral emulsionável,

variando de 5 a 30% do total do fluido concentrado, o qual é adicionado a fim de propiciar uma emulsão estável, translúcida e composta de minúsculas gotículas de óleo. Os óleos semi-sintéticos combinam algumas das propriedades dos fluidos sintéticos e dos óleos emulsionáveis. As principais desvantagens são a lubrificação insuficiente em determinadas operações, bem como a formação de compostos insolúveis, porém possuem um melhor controle de oxidação que as emulsões convencionais.

2.4.2.6 Óleos de Corte Puros

O termo óleo de corte puro refere-se à qualidade de serem predominantemente óleos minerais e usados como soluções puras, ou seja, soluções não misturadas em água. Podem ser usados totalmente puro ou combinado (misturado com aditivos). De modo geral estes fluidos têm excelente propriedade lubrificantes, bom controle da ferrugem e vida longa, mas não refrigeram de forma similar aos fluidos miscíveis em água.

Os óleos de corte minerais tendem a ser misturas complexas de vários hidrocarbonetos. Os dois principais óleos de base minerais usados para misturar os fluidos de corte são naftênicos ou parafínicos, os quais são refinados a partir do óleo natural cru. Os óleos parafínicos oferecem melhor estabilidade oxidativa e tendem a ser menos reativos. Contudo, os óleos naftênicos proporcionam uma mistura mais homogênea, [Alves \(2005\)](#).

Os óleos vegetais são preferidos sobre os óleos a base de petróleo pelos requisitos ambientais mais rígidos e devido à sua biodegradabilidade, embora estes óleos sejam considerados mais caros quando comparados aos derivados do petróleo. Apesar dos muitos benefícios ambientais, os óleos vegetais são mais suscetíveis à degradação por reações de oxidação ou hidrólise. Portanto, a seleção correta da substância de origem vegetal, o pH da solução resultante e seu controle são questões importantes, [Alves e Oliveira \(2006\)](#).

No intuito de melhorar o desempenho do óleo de corte vários tipos de aditivos são adicionados ao mesmo. Os mais utilizados são os aditivos polares que produzem um filme orgânico para ligar-se quimicamente à superfície da ferramenta e da peça. Este filme aumenta a capacidade umectante e proporciona maior resistência á abrasão da ferramenta, [ElBaradie \(1996\)](#).

Os óleos de corte puro apresentam risco de incêndio, consequentemente, não são adequados o uso destes em sistemas com grandes volumes. Estes óleos podem ser reprocessados por destilação e reutilizados ou queimados.

A tabela [2.7](#) contém uma divisão detalhada dos óleos de corte puros.

Tabela 2.7: Classificação e características dos óleos de corte, (ELBARADIE, 1996)

Tipo	Característica
Óleos minerais	Óleos minerais sem aditivos. Possuem baixa propriedade lubrificante, porém são de baixo custo. Restritos para operações leves em metais de fácil usinagem onde a necessidade de lubrificação e refrigeração não é grave.
Óleos graxos	Os tipos mais comuns são os óleos a base de banha de porco e os obtidos de bagaço de sementes de plantas. Possuem alto desempenho anti atrito e pobre anti-soldagem. Eles oxidam facilmente e apresentam uma tendência à formação de gases os quais emitem odores desagradáveis
Combinação de óleo mineral e óleo graxo	Denominado também por óleo combinado, não possui grandes vantagens. Utilizados na usinagem de acabamento de aço de corte médio, bronze, cobre e alumínio.
Combinação de óleo mineral e óleo graxo sulfurizado	Óleos graxos sulfurizados são aditivos usados para produzir os óleos de corte de extrema pressão (EP) inativos. Durante a usinagem o ácido sulfúrico reage com o meio metálico formando uma película de sulfureto de muito baixa resistência ao cisalhamento.
Combinação de óleo mineral, óleo graxo sulfurizado e enxofre elementar	A adição de enxofre elementar em óleo graxo sulfurizado inativo transforma-o em ativo. O óleo sulfurizado ativo tem melhores propriedades de EP que os não ativos e auxiliam a usinagem de ligas ferrosas mais resistentes.
Combinação de óleo mineral e óleo mineral sulfurizado	Estes óleos têm boas propriedade de EP, são ativos e mais baratos que os óleos graxos sulfurizados.
Combinação de óleo mineral, óleo graxo sulfurizado e óleo mineral sulfurizado	Estes óleos combinam a oleosidade dos óleos graxos sulfurizados com as propriedades de EP dos óleos minerais sulfurizados. Eficientes na usinagem pesada de materiais ferrosos.
Combinação de óleo mineral e Parafina clorada	Óleos de corte produzidos a partir das parafinas cloradas têm propriedades de EP mais baixas que os óleos combinados com enxofre, mas têm melhores características anti atrito. Usados na usinagem de ligas de níquel.
Combinação de óleo mineral, Parafina clorada e óleo graxo sulfurizado	Estes óleos de corte combinam as melhores propriedades dos óleos de parafina cloradas e dos óleos graxos sulfurizados. Usados em ampla categoria de materiais e operações.
Combinação de óleo mineral e óleo graxo clorado	São produzidos pela combinação de cloro com um éster graxo sintético, são capazes de auxiliar a usinagem de uma grande quantidade de materiais.
Combinação de óleo mineral, óleo graxo clorado e óleo graxo sulfurizado	Possuem boas propriedade anti atrito e anti-soldagem. Estes fluidos são adequados para uma ampla variedade de materiais e operações.
Combinação de óleo mineral e óleo graxo sulfo clorado	Nos óleos graxos sulfo clorados ambos os elementos enxofre e cloro são combinados na mesma molécula. Estes óleos são adequados para a usinagem de materiais mais resistentes.
Óleo de corte puro claro	A principal característica destes óleos é permitir que o operador veja a peça através do lubrificante.

2.4.3 Escolha do Fluido de Corte no Processo de Fresamento

Ao se aplicar um fluido de corte, ele pode proporcionar vantagens, não interferir ou prejudicar, dependendo do processo, das condições de corte, do material da peça e do material da ferramenta, Machado e Diniz (2004).

- **Aplicações vantajosas:** Na Usinagem com ferramentas de geometria definida, principalmente onde o acabamento superficial ocorre com tolerâncias dimensionais críticas, o não uso de fluido de corte torna-se impraticável ou economicamente inviável. Neste sentido a usinagem com ferramentas com menores resistências ao cisalhamento, como o aço rápido, exige a utilização de um fluido de corte. Furação, brochamento, fresamento e rosqueamento com ferramenta de aço rápido são exemplos clássicos de operações com utilização vital de fluidos de corte.
- **Aplicações sem interferência no processo:** O fluido sempre vai interferir no processo de corte, no entanto em termos de vida da ferramenta existem algumas aplicações em que o fluido não contribui ou contribui inexpressivamente para aumentar a eficiência do processo. Exemplos clássicos são a usinagem de ferro cinzento (exceto furação profunda), materiais plásticos (ou resinas) e usinagem de magnésio e alumínio.
- **Aplicações prejudiciais:** A usinagem com ferramentas cerâmicas (devido aos possíveis choques térmicos), o corte interrompido com ferramenta de metal duro (evitando os sulcos de origem térmica) e a usinagem de materiais endurecidos (reduzindo o amolecimento da peça) são exemplos clássicos de usinagem onde a aplicação do fluido de corte prejudica o processo.

Segundo Ferraresi (1982), a lista de fluidos de corte recomendados no fresamento segundo o material a usinar é:

Aço: óleos emulsionáveis, óleos minerais sulfurados;

Aço inoxidável: óleos emulsionáveis (comum e do tipo extrema pressão); óleos minerais sulfurados, óleos graxos-minerais;

Ferro fundido: óleos emulsionáveis;

Níquel: óleos graxos-minerais sulfurados (leves), óleos emulsionáveis;

Cobre: óleos graxos-minerais inativos, óleos emulsionáveis;

Latão, bronze: óleos emulsionáveis, óleos minerais cloro-sulfurados;

Alumínio e suas ligas: óleos emulsionáveis, óleos graxos-minerais inativos;

Magnésio e suas ligas: óleos graxos-minerais inativos.

O fresamento de materiais ferrosos é usualmente realizado com óleos minerais sulfurados ou óleos graxos-minerais. Emulsões, óleos sulfurados e óleos minerais podem ser usados nos materiais não-ferrosos. Os fluidos com base em água não devem ser usados na usinagem de magnésio devido ao perigo da reação química violenta entre a água e o magnésio.

2.4.4 Métodos de Aplicação do Fluido de corte

Os métodos de aplicação dos fluidos de corte podem ser divididos em três tipos, [Kalpakjian \(1991\)](#), [Boothroyd e Knight \(1989\)](#) e [Braghini \(2002\)](#):

Aplicação Manual - Utilizada em pequenos lotes. A aplicação feita através de escova, pelo operador, sendo o método mais fácil e de menor custo. Este método tem a desvantagem de a aplicação ser intermitente, o acesso do fluido à região de corte ser limitado e ter pouca contribuição para a remoção do cavaco.

Aplicação por Inundação - É o método mais comum, inunda toda região de corte. A aplicação é feita por um, ou vários, bocais apropriadamente direcionados. Este método permite um fluxo contínuo de fluido na região de corte e ajuda a remover o cavaco da mesma. Com esta finalidade, a maioria das máquinas-ferramentas são equipadas com um sistema para controlar o fluido de corte. Bombas de circulação, encanamento, bocais direcionadores de fluido e filtros para a limpeza são usados com este propósito.

Aplicação por Névoa ou MQL - O fluido é levado até a região de corte com a ajuda de ar comprimido. A aplicação por névoa é utilizada em processos nos quais as velocidades de corte são altas. A principal desvantagem é o risco à saúde do operador, devido à inalação de gotas muito pequenas de fluido. Portanto, boa ventilação ou enclausuramento da máquina é requerido. Além disso, sua capacidade de refrigeração é limitada. Entretanto a visibilidade da peça sendo usinada é melhorada.

Na técnica com mínima quantidade de lubrificante (MQL) uma quantidade mínima de óleo (na faixa de 10ml/h a 200ml/h, [Machado et al. \(2009\)](#)) é pulverizada em um fluxo de ar comprimido. Estas mínimas quantidades de óleos são suficientes para reduzir o atrito da ferramenta e ainda evitar aderências de materiais, [DÖrr e Sahm \(2000\)](#).

[Rahman, Kumar e Salam \(2002\)](#) afirmam que existe uma redução considerável nas componentes da força de corte utilizando a técnica de MQL, em comparação com o corte a seco e por inundação. Porém esta técnica possui vantagens e desvantagens em relação à usinagem com fluido abundante, as vantagens são: redução do volume de descarte, produção de peças e cavacos mais limpos, redução de custos de processamento, limpeza e acondicionamento. Contudo, possuem desvantagens como a névoa de óleo gerada durante o uso da mínima quantidade de lubrificante na usinagem podem ser considerados subprodutos indesejáveis, pois contribuem para aumentar o índice de poluentes em suspensão do ar e torna-se fator de preocupação. Embora, o uso de quantidade mínima de fluido não exija preocupação com o descarte e reciclagem do óleo e do cavaco, é necessário que se tenha um bom sistema de exaustão na máquina. Também com a utilização da MQL tem-se em alguns processos um maior desgaste da ferramenta, [Machado e Diniz \(2004\)](#).

2.5 Coeficiente de transferência Convectiva

Fluidos de corte, quando devidamente aplicados, reduzem a temperatura de corte, aumentando a dissipação de calor (com base em propriedades de resfriamento) e minimizando a geração de calor (com base em suas propriedades de lubrificação).

[Machado et al. \(2009\)](#) salientam que para classificar fluidos de corte de acordo com sua capacidade de refrigeração, as temperaturas de corte são normalmente determinadas experimentalmente e usadas como critério de comparação. [Braghini \(2002\)](#) relata que o coeficiente de transferência de calor por convecção mostra-se sensível à variações de temperatura entre o fluido e a superfície sendo refrigerada. Em uma experiência, o autor imergiu em água, á temperatura ambiente, um bloco de aço variando a temperatura do bloco de $300^{\circ}C$ a $700^{\circ}C$ estimou-se a variação do coeficiente de convecção entre valores de $2 \times 10^4 W/m^2 \cdot K$ e $2 \times 10^3 W/m^2 \cdot K$, respectivamente.

A transferência convectiva de calor pode ser classificada de acordo com a natureza do escoamento do fluido. Desta forma, tem-se os seguintes processos de transferência convectiva de calor:

- **Convecção Forçada:** Movimento do fluido é provocado por meios externos, por exemplo, um ventilador ou uma bomba.
- **Convecção Natural ou livre:** O escoamento do fluido é provocado pelas forças de empuxo que se originam das diferenças de densidade devida às variações de temperatura no fluido.
- **Convecção com Mudança de Fase:** processo onde ocorre a troca de calor latente. Dois casos especiais são o da Ebulição e da Condensação.

Independente da natureza particular do processo de calor por convecção, a taxa apropriada tem a forma:

$$\dot{q} = h(T_s - T_\infty) \quad (2.49)$$

Na equação (refq), $\dot{q}$, o fluxo de calor convectivo (W/m^2), é proporcional à diferença entre as temperaturas da superfície T_s e do fluido T_∞ . Esta expressão é conhecida como a Lei de Newton do resfriamento e h ($W/m^2 \cdot K$) é o coeficiente de transferência convectiva de calor. Neste coeficiente estão incluídos todos os parâmetros que influenciam a transferência convectiva de calor. Em particular, h depende das condições na camada limite, que são influenciadas pela geometria da superfície, pela natureza do movimento do fluido e por um conjunto de propriedades termodinâmicas e de transporte do fluido. Além disso, qualquer investigação sobre a convecção se reduz, essencialmente, á investigação sobre os métodos de determinação de h .

Os valores típicos de h aparecem na tabela 2.8 para diferentes situações do fluido.

Tabela 2.8: Valores típicos do coeficiente de transferência convectiva de calor

Condição	Fluido	h ($W/m^2 \cdot K$)
Convecção Livre	Gases	5 - 30
	Água	100 - 900
Convecção Forçada	Gases	10 - 300
	Água	300 - 11.500
	Óleos	60 - 1300
Mudança de Fase	Líquidos em ebulição	3000 - 57.000
	Vapores em condensação	5.700 - 114.000

Fonte: Adaptado de [Arpaci \(1966\)](#)

[Kops e Arenson \(1999\)](#) calcularam o valor do coeficiente de transferência convectiva de calor para o processo de torneamento de um aço com propriedades térmicas ($\rho =$

7800 kg/m^3 , $c_p = 473 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$ e $k = 43 \text{ W/m}^\circ\text{C}$) bem parecidas com as do aço AISI 4340 utilizando procedimento iterativo de otimização numérica. Para os ensaios sem sistema de refrigeração, o valor de $h = 22,6 \text{ W/m}^2^\circ\text{C}$, com a diferença de temperatura mínima média, menos de 1°C para o caso com o mandril isolado. E também, $h = 240 \text{ W/m}^2^\circ\text{C}$ para mandril não-isolado. No caso do mesmo processo utilizando o sistema de refrigeração por inundação com um fluido a base de água encontram o valor máximo do coeficiente de transferência convectiva por $h = 2500 \text{ W/m}^2^\circ\text{C}$.

Radulescu e Kapoor (1994) determinaram o coeficiente de transferência convectiva de calor do ar usando a seguinte relação:

$$h_{ar} = \frac{\bar{Nu}k_{ar}}{D} \quad (2.50)$$

onde D é o diâmetro da ferramenta (ou o comprimento característico do objeto, por exemplo, o lado do quadrado, se o objeto tiver este formato), k_{ar} é a condutividade térmica do ar e $\bar{Nu}$ é o número médio de Nusselt.

Para calcular o número médio de Nusselt os autores utilizaram a equação de Churchill e Bernstein:

$$\bar{Nu} = 0,3 + \frac{0,62Re^{1/2}Pr^{1/3}}{[1 + (\frac{0,4}{Pr})^{2/3}]^{1/4}} [1 + (\frac{Re}{28200})^{5/8}]^{4/5} \quad (2.51)$$

onde $Re = \frac{vD}{\nu}$ é o número de Reynolds, sendo ν a viscosidade do ar e v a velocidade do fluido e Pr o número de Prandtl. Todas as propriedades térmicas foram tomadas a $300K$.

A equação (2.51) é aplicável para escoamento externo em torno de um cilindro com diâmetro D . Para uma placa plana em escoamento externo paralelo o número de Nusselt pode ser calculado pela equação, Incropera e Witt (1992), Lienhard (2008):

$$\bar{Nu} = CRe^mPr^n \quad (2.52)$$

onde $C = 0,664$, $m = 1/2$ e $n = 1/3$, para o número de Prandtl variando de $0,6 \leq Pr \leq 50$. Churchill e Ozoe (1973) recomendam a seguinte equação aplicável para qualquer número de Prandtl,

$$\bar{Nu} = \frac{0,62Re^{1/2}Pr^{1/3}}{[1 + (\frac{0,4}{Pr})^{2/3}]^{1/4}}, \quad Pe \geq 100 \quad (2.53)$$

onde $Pe = Re \cdot Pr$ é denominado número de Peclet ($Pe = \frac{vL_c}{\alpha}$, onde v a velocidade do

objeto, L_c o comprimento característico do objeto e α a difusividade térmica do objeto).

A equação (2.53) é consequência de medições experimentais sendo uma correlação empírica, os valores dos coeficientes C , m e n variam com a natureza da geometria da superfície e com o tipo de escoamento. É importante observar que as propriedades do fluido variam com a temperatura, através da camada limite e que esta variação pode influenciar a taxa de transferência de calor. Porém, com o avanço da tecnologia e utilização de fluidos "não agressivos" ao meio ambiente, nem sempre conhecemos as propriedades térmicas dos fluidos e consequentemente estas equações não são aplicáveis.

A fim de classificar os novos fluidos de corte no mercado, de acordo com suas propriedades refrigerante e lubrificante no processo de usinagem estamos especialmente interessados na transferência de calor por convecção que ocorre entre um fluido e uma superfície limitante. Assim neste trabalho, a transferência de calor será abordada apenas como uma condição de contorno na resolução de problemas de condução. Esta condição de contorno é denominada condição do Tipo III, descrita na seção 3.1.1, e corresponde à existência de resfriamento (ou aquecimento) convectivo na superfície. A equação que descreve esta condição provém da aplicação da conservação de energia à superfície do volume de controle, considerando apenas os fenômenos que ocorrem na superfície do meio.

3 Problema Físico e Modelagem Matemática

Neste capítulo apresenta-se o problema físico (processo de formação de cavaco em usinagem) objeto deste estudo e a teoria matemática essencial para o desenvolvimento e aplicação da estimativa dos parâmetros analisados. Apresenta-se também métodos para a solução do equacionamento matemático do problema físico e o estudo de um método analítico para a obtenção do coeficiente de transferência convectiva.

3.1 Modelagem Matemática

O problema físico estudado refere-se à determinação de uma fonte móvel de calor em um sólido com transferência convectiva de calor nas suas fronteiras. A fonte de calor e o coeficiente de transferência convectiva são ambos estimados por meio da medição de temperatura no corpo. O problema físico foi modelado para um domínio bidimensional, finito nas direções x e y , assumindo-se que essas condições planas sejam mantidas através da direção z . Assume-se que toda a região em estudo está, inicialmente, a uma temperatura T_0 . Para tempos $t > 0$, um termo-fonte $g(x, y, t)$ gera energia no sólido e ocorre dissipação por convecção através das superfícies de contorno para o meio que o envolve a uma temperatura constante T_∞ . Supõe-se que a transferência de calor no interior do sólido se dá apenas por condução e que as propriedades do meio são constantes.

Considere a equação que descreve o balanço de energia para um elemento de controle de área superficial infinitesimal A

$$\left(\begin{array}{c} \text{Taxa de energia} \\ \text{acumulada} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Taxa de calor entrando/saindo} \\ \text{em A através das} \\ \text{superfícies de fronteira} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Taxa de geração} \\ \text{de energia em A} \end{array} \right) \quad (3.1)$$

O termo da energia acumulada, assumindo que a densidade ρ e o calor específico

c_p são variáveis independentes do tempo, é descrito pela seguinte equação:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Taxa de energia} \\ \text{acumulada} \end{array} \right) = \int_A \rho c_p \frac{\partial T(\bar{x}, \bar{y}, t)}{\partial t} dA \quad (3.2)$$

O termo de calor entrando no elemento de controle infinitesimal A através da superfície de fronteira é:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Fluxo de calor entrando em A} \\ \text{através das superfícies de fronteira} \end{array} \right) = - \int_A \text{div } \dot{q} dA \quad (3.3)$$

O calor gerado no elemento de controle infinitesimal A é:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Taxa de geração} \\ \text{de energia em A} \end{array} \right) = \int_A g(\bar{x}, \bar{y}, t) dA \quad (3.4)$$

onde $g(\bar{x}, \bar{y}, t)$ é a função que descreve a geração transiente de calor dentro do elemento de controle.

Substituindo as equações (3.2), (3.3) e (3.4) na equação (3.1), obtém-se:

$$\int_A \left[\rho c_p \frac{\partial T(\bar{x}, \bar{y}, t)}{\partial t} + \text{div } \dot{q}(\bar{x}, \bar{y}, t) - g(\bar{x}, \bar{y}, t) \right] dA = 0 \quad (3.5)$$

Como a integral da equação (3.5) é nula e derivada de um elemento arbitrário e pequeno de área A do sólido este elemento de área pode ser escolhido tão pequeno que pode ser removido da integral, obtendo-se assim a seguinte equação:

$$\rho c_p \frac{\partial T(\bar{x}, \bar{y}, t)}{\partial t} = -\text{div } \dot{q}(\bar{x}, \bar{y}, t) + g(\bar{x}, \bar{y}, t) \quad (3.6)$$

O vetor $\dot{q}(\bar{x}, \bar{y}, t)$, chamado de vetor fluxo de calor, denota o fluxo de calor na posição $(\bar{x}, \bar{y})$ para qualquer instante t . A relação entre o fluxo de calor e o gradiente de temperatura para um sólido estacionário, homogêneo e isotrópico é formulada pela Lei de Fourier, e pode ser escrita como:

$$\dot{q}(\bar{x}, \bar{y}, t) = -k \nabla T(\bar{x}, \bar{y}, t) \quad (3.7)$$

onde k é a condutividade térmica. Substituindo a equação (3.7) na equação (3.6) obtém-se

$$\rho c_p \frac{\partial T(\bar{x}, \bar{y}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot [k \nabla T(\bar{x}, \bar{y}, t)] + g(\bar{x}, \bar{y}, t) \quad (3.8)$$

A equação (3.8) é chamada de equação diferencial da condução de calor para um sólido estacionário, homogêneo e isotrópico com geração de calor.

Quando a condutividade térmica é uniforme, ou seja, independe da posição e da temperatura, a equação (3.8) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(\bar{x}, \bar{y}, t)}{\partial t} = \nabla^2 T(\bar{x}, \bar{y}, t) + \frac{g(\bar{x}, \bar{y}, t)}{k} \quad (3.9)$$

onde $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ é a difusibilidade térmica.

A equação diferencial de condução de calor terá um número grande de soluções a menos que se estabeleça um conjunto de condições de contorno e uma condição inicial.

3.1.1 Condições de Contorno

Para determinar a distribuição de temperatura em um sólido, além de resolver a apropriada equação da condução do calor, deve-se analisar as condições físicas que existem nas fronteiras do sólido. As condições de contorno que prescrevem as condições das superfícies de fronteira da região podem ser lineares ou não-lineares. Com o intuito de simplificar a solução do modelo, abordam-se apenas as condições de contorno lineares. Estas são divididas em três casos:

- **Condição de contorno do tipo I, ou de Dirichlet:** A temperatura nas superfícies de contorno é uma função dependente do tempo e da posição, ou seja,

$$T = f_i(r_s, t) \quad \text{na superfície de contorno} \quad S_i \quad (3.10)$$

onde r_s é um ponto da superfície S_i .

Pode-se ter casos especiais, nos quais a função é apenas em relação à posição $f_i(r_s)$, ou apenas em relação ao tempo $f_i(t)$, ou ainda uma constante. Se a temperatura se anula na fronteira, tem-se:

$$T = 0 \quad \text{na superfície de contorno} \quad S_i \quad (3.11)$$

Este caso é denominado condição de contorno homogênea do tipo I. A superfície de

contorno da região que é mantida a temperatura zero satisfaz a condição de contorno do tipo I.

- **Condição de contorno do tipo II, ou de Neumann:** A derivada de temperatura na direção do vetor normal à superfície da região é estabelecida nas superfícies de contorno como uma função dependente do tempo e da posição, ou seja,

$$\frac{\partial T}{\partial \eta_i} = f_i(r_s, t) \quad \text{na superfície de contorno} \quad S_i \quad (3.12)$$

onde $\frac{\partial}{\partial \eta_i}$ denota a diferencial ao longo do vetor normal à superfície de contorno S_i . Esta condição é equivalente a determinar a grandeza do fluxo de calor através da superfície de contorno, visto que o lado esquerdo da equação (3.12) torna-se a intensidade de fluxo de calor na superfície de contorno S_i quando ambos os lados são multiplicados pela condutividade térmica do material. Casos especiais da equação (3.12) ocorrem quando a função é apenas em relação à posição $f_i(r_s)$, ou apenas em relação ao tempo $f_i(t)$, ou ainda uma constante. Se a derivada normal da temperatura se anula na fronteira, tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial \eta_i} = 0 \quad \text{na superfície de contorno} \quad S_i \quad (3.13)$$

Este caso é denominado Condição de contorno homogênea do tipo II. A superfície de contorno da região isolada satisfaz a condição de contorno do tipo II.

- **Condição de contorno do tipo III, ou de Robin:** É a combinação linear da temperatura e de sua derivada em relação ao vetor normal η prescrita nas superfícies de contorno como uma função dependente do tempo e da posição. Para uma superfície de contorno em um sistema de coordenadas ortogonal, esta relação é estabelecida por:

$$k_i \frac{\partial T}{\partial \eta_i} + h_i T = f_i(r_s, t) \quad \text{na superfície de contorno} \quad S_i \quad (3.14)$$

As condições de contorno dos tipos I e II são obtidas escolhendo k_i e h_i iguais a zero (Considera-se ' $k_i = 0$ ' ou ' $h_i = 0$ ', como uma não-influência da condutividade ou fronteiras adiabáticas, respectivamente, visto que não existe condutividade nula e ou convecção nula). O significado físico da equação (3.14) é que na face da superfície de contorno considera-se dissipação de calor por convecção de acordo com a Lei de Newton, ou seja, a transferência de calor é proporcional a diferenças de temperatura para uma temperatura ambiente que varia com o tempo e a posição.

O balanço de energia para as superfícies de contorno S_i , ilustrado na figura 3.1 escreve-se da seguinte forma:

$$k_i \frac{\partial T}{\partial \eta_i} + h_i T = h_i T_\infty = f_i(r_s, t) \quad \text{ou} \quad (3.15)$$

$$k_i \frac{\partial T}{\partial \eta_i} = h_i (T - T_\infty) \quad (3.16)$$

Um caso especial da equação (3.14) é:

$$k_i \frac{\partial T}{\partial \eta_i} - h_i T = 0 \quad (3.17)$$

Este caso é denominado condição de contorno homogênea do tipo III. A situação física descrita na equação (3.17) é a dissipação de calor por convecção através da superfície de contorno da região para o meio ambiente o qual se encontra a temperatura de zero grau.

Figura 3.1: Dissipação de calor pela superfície de contorno de acordo com a Lei de Newton

A fim de descrever a dissipação de calor no processo de usinagem por convecção através das superfícies de contorno para o meio que o envolve a temperatura constante T_∞ , adota-se a condição de contorno do tipo III dada pela equação (3.16).

Assumindo uma geometria retangular e uma região finita do sólido, a formulação matemática do problema físico bidimensional da distribuição de calor no processo de usinagem pode ser descrita por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{g(x, y, t)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2 \quad (3.18)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} + h(T - T_\infty) = 0 \quad x = 0 \quad (3.19)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x} + h(T - T_\infty) = 0 \quad x = l_1 \quad (3.20)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} + h(T - T_\infty) = 0 \quad y = 0 \quad (3.21)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial y} + h(T - T_\infty) = 0 \quad y = l_2 \quad (3.22)$$

$$T(x, y, 0) = T_0 \quad (3.23)$$

Portanto tem-se um problema de valor de contorno linear não homogêneo de condução de calor. A não homogeneidade decorre devido ao termo geração de calor $g(x, y, t)$. As condições de contorno são homogêneas e lineares.

3.2 Métodos Analíticos para a Solução do Problema Direto

Quando a geometria, as propriedades físicas, o termo-fonte de energia, a condição inicial e as condições de contorno são conhecidas, tem-se o Problema Direto (PD) em Condução de Calor, cuja solução fornece o campo de temperaturas em todo o domínio temporal e espacial. Desta forma, o objetivo do Problema Direto é a determinação da distribuição de temperatura em todo o domínio temporal e espacial da região que será estudada, ou seja a solução do problema dado pelas equações (3.18), (3.19), (3.20), (3.21), (3.22) e (3.23).

Na literatura existem métodos exatos, aproximados e numéricos de solução do problema de condução de calor. A seguir encontra-se uma descrição de alguns dos métodos analíticos abordados no contexto desta pesquisa. A teoria e aplicação destes e de vários métodos de solução do problema de condução de calor abordada aqui podem ser encontradas em vários textos como Carslaw e Jaeger (1959), Özisik (1980), Özisik (1968), Strauss (1992) e Duffy (2001).

3.2.1 Método das Variáveis Separáveis

O método das variáveis separáveis é o método mais comum de solução de equações diferenciáveis. Introduzido no meio do século XVIII por Euler, d'Alembert e Bernoulli. A aplicação deste método para a solução de problemas de valores de contorno linear homogêneo de condução de calor é relativamente simples, do ponto de vista matemático. A Equação Diferencial Parcial (EDP) de condução de calor em n variáveis independentes é separada em n equações diferenciais ordinárias (EDO) e nesta separação $n - 1$ constantes são estabelecidas. As EDOs são resolvidas e a solução completa é construída por superposição linear de todas as soluções. Os coeficientes desconhecidos associados com a superposição são então determinados pelas condições de contorno. O modelo n -dimensional de condução de calor sem geração de calor pode ser resolvido com este método se apenas uma das condições de contorno é não homogênea. Problemas envolvendo mais de uma condição não homogênea podem ser divididos em vários problemas mais simples cada um contendo apenas uma condição de contorno não homogênea. Este método não é conveniente para problemas não homogêneos devido à presença do termo de geração de calor na equação (caso da equação (3.18)) ou devido a não-homogeneidade das condições de contorno, ou ambas. Esta seção irá abordar a solução do problema homogêneo de condução de calor em coordenadas cartesianas de um sólido retangular usando variáveis separáveis, ou seja, determinando as soluções elementares, as normas e os auto-valores do problema que deverá ser usado em outros métodos abordados em seções posteriores.

3.2.1.1 Problema unidimensional homogêneo

Para facilitar o entendimento dos conceitos básicos associados com o método das variáveis separáveis, considera-se primeiramente o problema unidimensional homogêneo de condução de calor, designado pelas seguintes equações:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 < x < l_1 \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + H_1(T - T_\infty) = 0 \quad x = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + H_2(T - T_\infty) = 0 \quad x = l_1 \quad (3.26)$$

$$T(x, 0) = F(x), \quad 0 < x < l_1 \quad (3.27)$$

onde $H_1 = \frac{k_1}{h_1}$ e $H_2 = \frac{k_2}{h_2}$, sendo k_1 e k_2 a condutividade térmica na fronteira $x = 0$ e $x = l_1$, respectivamente, e h_1 e h_2 o coeficiente de transferência convectiva na fronteira $x = 0$ e $x = l_1$, respectivamente.

A fim de resolver o problema assume-se a separação da função $T(x, t)$ em funções dependentes do espaço e do tempo na forma:

$$T(x, t) = \chi(x)\Gamma(t) \quad (3.28)$$

Substituindo (3.28) na equação (3.24) obtém-se:

$$\frac{1}{\alpha}\chi(x)\Gamma'(t) = \chi''(x)\Gamma(t) \quad \text{e} \quad \frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = \frac{1}{\alpha} \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = -\beta^2 \quad (3.29)$$

Reescrevendo a equação (3.29) e utilizando as condições de contorno (3.25) e (3.26) obtém-se as seguintes EDOs e as suas respectivas condições de contorno:

$$\begin{aligned} \chi'' + \beta^2\chi &= 0 & 0 < x < l_1 \\ \chi'(0) - H_1\chi(0) &= 0 \\ \chi'(l_1) + H_2\chi(l_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\Gamma' + \alpha\beta^2\Gamma = 0 \quad (3.31)$$

A equação (3.31) tem solução $\Gamma(t) = e^{-\alpha\beta^2 t}$ e o problema auxiliar descrito pelas equações (3.30) é chamado de problema de autovalores, pois tem solução somente para certos valores de parâmetros $\beta = \beta_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, os quais são chamados de autovalores. As soluções são denominadas autofunções. Quando β não é um autovalor, o problema tem solução trivial. ($\beta \neq \beta_n \Rightarrow \chi = 0$). Supõe-se que $\chi(\beta_n, x)$ e β_n são conhecidos então pode-se construir a solução de (3.24) por superposição linear e é escrita como:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi(\beta_n, x) e^{-\alpha\beta_n^2 t} \quad 0 < x < l_1 \quad (3.32)$$

A equação (3.32) satisfaz a equação (3.24) e suas condições de contorno (3.25) e (3.26), mas não satisfaz necessariamente a condição inicial (3.27). A fim de que (3.27) seja satisfeita deve ser imposta a seguinte condição:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi(\beta_n, x) \quad 0 < x < l_1 \quad (3.33)$$

Os coeficientes c_n podem ser determinados utilizando a ortogonalidade das autofunções dadas por:

$$\int_0^{l_1} \chi(\beta_n, x) \chi(\beta_m, x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ N(\beta_n) & m = n \end{cases} \quad (3.34)$$

onde a integral normalizada, ou a norma, $N(\beta_n)$ é definida por:

$$N(\beta_n) = \int_0^{l_1} [\chi(\beta_n, x)]^2 dx \quad (3.35)$$

Multiplicando igualdade (3.33) por $\chi(\beta_n, x)$ e integrando o resultante de 0 a l_1 e utilizando a propriedade de ortogonalidade (3.34) obtêm-se:

$$c_n = \frac{1}{N(\beta_n)} \int_0^{l_1} \chi(\beta_n, \bar{x}) F(\bar{x}) d\bar{x} \quad (3.36)$$

A substituição de (3.36) em (3.32) fornece a solução para a temperatura como:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \beta_n^2 t} \frac{1}{N(\beta_n)} \int_0^{l_1} \chi(\beta_n, x) \chi(\beta_n, \bar{x}) F(\bar{x}) d\bar{x} \quad (3.37)$$

A auto-função, solução do problema de autovalores (3.30), é dada por:

$$\chi(\beta_n, x) = \cos(\beta_n x) + \frac{H_1}{\beta_n} \sin(\beta_n x) \quad (3.38)$$

os autovalores β_n são raízes da seguinte equação transcendental

$$\frac{(\beta_n^2 - H_1 H_2)}{\beta_n} \tan(\beta_n l_1) = H_1 + H_2 \quad (3.39)$$

a norma $N(\beta_n)$ pode ser calculada por, [Özisik \(1968, pag. 47\)](#) :

$$N(\beta_n) = \frac{1}{2} \left[\frac{(\beta_n^2 + H_1 H_2)}{\beta_n^2} \left(l_1 + \frac{H_2}{\beta_n^2 + H_2^2} \right) + \frac{H_1}{\beta_n^2} \right] \quad (3.40)$$

Caso a condição de contorno fosse do tipo I, ou seja, ' $k = 0$ ' então as autofunções, a norma e os autovalores são dados pelas seguintes equações, respectivamente:

$$\chi(\beta_n, x) = \text{sen}(\beta_n x) \quad (3.41)$$

$$N(\beta_n) = \frac{1}{2}l_1 \quad (3.42)$$

$$\text{sen}(\beta_n l_1) = 0 \quad (3.43)$$

A simplicidade das equações (3.41), (3.42) e (3.43) comparadas com as equações (3.38), (3.40) e (3.39) explica o porque da hipótese simplificadora de vários modelos de condução de calor na literatura tomar as fronteiras do sólido a ser usinado com temperatura zero.

E ainda, caso a condição de contorno fosse do tipo II, ou seja, ' $h = 0$ ' então as autofunções, a norma e os autovalores são dados pelas seguintes equações

$$\chi(\beta_n, x) = \cos(\beta_n x) \quad (3.44)$$

$$N(\beta_n) = \frac{1}{2}l_1 \quad (3.45)$$

$$\text{sen}(\beta_n l_1) = 0 \quad (3.46)$$

Novamente a simplicidade das equações (3.44), (3.45) e (3.46) comparadas com as equações (3.38), (3.40) e (3.39) explica o porque da hipótese simplificadora de vários modelos de condução de calor na literatura tomar as fronteiras do sólido a ser usinado isoladas.

Observa-se também que a solução da equação (3.39) para encontrar o autovalor β_n , que será estudada na próxima seção, é muito mais complicada que as soluções de (3.43) cuja solução é simplesmente:

$$\beta_n = \frac{n\pi}{l_1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.47)$$

3.2.1.2 Resolução da equação Transcendental (3.39)

Resolver a equação transcendental (3.39) para β_n não é muito simples. Uma das formas é calcular as raízes numericamente, por exemplo, pelo método de Newton. Outro caminho é uma análise gráfica, na qual como alternativa, fornece várias informações

qualitativas do autovalor. Este é o método usado neste trabalho. Reescreve-se a equação (3.39), tomando $H_1 = H = H_2$ e $B = \beta$:

$$\tan(Bl_1) = 2H\left(\frac{B}{B^2 - H^2}\right) \quad (3.48)$$

Este método consiste em esboçar os gráficos da função tangente $y = \tan(Bl_1)$ e da função racional

$$y = 2H\left(\frac{B}{B^2 - H^2}\right) \quad (3.49)$$

Ambas como função de $B > 0$ e encontrar os pontos de intersecção dos gráficos.

No gráfico que se encontra na figura 3.2 cada ponto de intersecção fornece um autovalor $B[n]$. Os autovalores resultantes dependem de $H = h/k$. As situações excepcionais ocorrem quando $\cos Bl_1 = 0$ e $B = H$, ou seja, quando o gráfico da função tangente e da função racional se "interceptam no infinito".

Figura 3.2: Gráfico da função tangente versus a função racional para $H = 2000/38$ e $l_1 = 0,05$

Com auxílio do software MapleTM12 e conhecendo-se graficamente as variações de cada autovalor elaborou-se um algoritmo para o cálculo dos autovalores $B[n]$.

3.2.2 Método da Função de Green

O método da função de Green é uma elegante ferramenta para a solução de EDPs lineares que descrevem várias coleções de problemas físicos tais como difusão, transporte de partículas, calor, etc. O uso da Função de Green na solução de EDP de física matemática pode ser encontrado em várias referências como Carslaw e Jaeger (1959), Özisik (1968), Duffy (2001) e Beck et al. (2010).

Neste trabalho apresenta-se o método de solução da Equação de condução de calor dependente do tempo sujeito a condições de contorno não-homogêneas e uma condição inicial em termos da função de Green. Neste método a temperatura é obtida em uma expressão integral que envolve as condições de contorno, condições iniciais e a Função de Green. O método é suficientemente geral em que todos os problemas não homogêneos são tratados da mesma forma e a solução para o problema 1-2-3-dimensionais são representados formalmente em forma compacta. A principal dificuldade no uso da Função de Green ocorre na determinação da Função de Green apropriada para um dado problema, pois esta depende do tipo de sistema de coordenadas, das condições de contorno e da extensão da região (finita, semi-infinita ou infinita). Quando a função de Green é conhecida e a integral pode ser calculada, então o método da Função de Green é uma ferramenta poderosa para a resolução de uma coleção muito ampla de problemas.

A seguir apresenta-se uma simples e sistemática aproximação para a construção da função de Green. Mostra-se que a construção da função de Green para um dado problema é associada à solução da parte homogênea do problema. Portanto os métodos de solução do problema homogêneo (Método da Separação de Variáveis) formam a base para a construção da função de Green.

3.2.2.1 Solução do Problema não Homogêneo

Considera-se o seguinte problema de condução de calor sujeito às seguintes condições de contorno não homogêneas.

$$\nabla^2 T(r, t) + \frac{g(r, t)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} \quad \text{na região R} \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta_i} + H_i T = f_i(r, t) \quad \text{na fronteira} \quad S_i \quad (3.51)$$

$$T(r, 0) = F_r \quad \text{na região R} \quad (3.52)$$

Assume-se que o termo gerador (ou fonte de calor) $g(r, t)$ e a função condição de contorno $f_i(r, t)$ variam ambas com a variável espacial r e o tempo t .

Neste caso $H_i = \frac{h_i}{k_i}$ e as propriedades térmicas k_i e h_i são consideradas constantes. Tomando $k_i = 0$ obtém-se a condição de contorno do tipo I. Para $h_i = 0$ obtém-se a condição de contorno do tipo II.

Para resolver o problema dado pelas equações (3.50) considera-se o seguinte problema auxiliar para a mesma região:

$$\nabla^2 G(r, t \mid \bar{r}, \tau) + \frac{1}{k} \delta(r - \bar{r}) \delta(t - \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial t} \quad t > \tau \quad \text{na região R} \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \eta_i} + H_i G = 0 \quad t > \tau \quad \text{na fronteira } S_i \quad (3.54)$$

Sujeito à seguinte condição inicial:

$$G(r, t \mid \bar{r}, \tau) = 0 \quad \text{se} \quad t < \tau \quad (3.55)$$

onde $\delta(r - \bar{r})$ é o delta de Dirac, equação (A.17), para a variável espacial, por exemplo, no caso bidimensional $\delta(r - \bar{r}) = \delta(x - \bar{x})\delta(y - \bar{y})$ e $\delta(t - \tau)$ é a função delta para a variável tempo.

A função $G(r, t \mid \bar{r}, \tau)$ é denominada função de Green. Observa-se que o problema auxiliar que deve satisfazer a função de Green tem condição de contorno homogênea, as quais são similares à versão homogênea do problema (3.50), ou seja, a equação (3.54) com $f_i(r, t) = 0$ e tem um impulso de fonte ($g(r, t)$) e condição inicial zero, isto é, o meio ambiente está a temperatura zero para tempo $t < \tau$.

Assim a função de Green que satisfaz o problema (3.53) representa a distribuição de temperatura na Região R, que esta inicialmente a temperatura zero e sujeita a condições de contorno homogêneas, devido a uma fonte pontual impulsiva de calor de unidade de força localizada em r e realizando calor espontaneamente no tempo t . O significado da notação $G(r, t \mid \bar{r}, \tau)$ é:

- A primeira parte do argumento, r, t , refere-se ao efeito, denominada, temperatura no local r no tempo t do sólido;
- A segunda parte, $\bar{r}, \tau$, refere-se ao impulso, denominado fonte impulsiva de calor (instantâneo) localizado em $\bar{r}$ realizando calor espontâneo no tempo τ .

O significado físico desta notação pode ser ilustrado simbolicamente escrevendo-a da seguinte forma:

$$G(r, t \mid \bar{r}, \tau) \equiv G(\text{efeito} \mid \text{impulso})$$

Na equação (3.50), a fonte de calor $g(r, t)$ é uma fonte instantânea e pontual de calor de unidade de potência em graus centígrados x metro cúbico.

O significado físico da fonte pontual instantânea em relação ao termo $\frac{g(r, t)}{k}$ tem diferentes formas:

$$\begin{aligned}
 S(r, t) &= \frac{g(r, t)}{k} \\
 &= \frac{g_i(r)}{k} \delta(t - \tau) \\
 &= \frac{g_{ip}}{k} \delta(t - \tau) \delta(r - \bar{r}) \\
 &= \frac{1}{\alpha \rho C_p} g_{ip} \delta(t - \tau) \delta(r - \bar{r})
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

$g(r, t)$ = fonte de calor distribuída, $[W/m^3]$;

$g_i(r)$ = fonte de calor distribuída instantaneamente, $[W \cdot s/m^3]$;

g_{ip} = fonte pontual de calor instantânea, $[W \cdot s]$;

$\frac{g_{ip}}{\rho C_p}$ = fonte pontual instantânea $[^\circ C m^3]$.

Esta definição tem a vantagem de que uma distribuição inicial de temperatura $T(r, 0) = F(r)$ em um meio pode ser considerada como uma fonte de calor distribuída instantaneamente realizando seu aquecimento no tempo $t = 0$ na quantidade $g_i(r) \equiv \rho C_p F(r) [J/m^3]$, sobre toda a região. Reciprocamente uma fonte instantânea $g_i(r) [J/m^3]$

realizando seu aquecimento no tempo pode ser considerada como uma distribuição inicial $F(r) = \frac{g_i(r)}{\rho C_p} = \frac{\alpha g_i(r)}{k}$.

Suponha que a função de Green $G(r, t \mid \bar{r}, \tau)$ satisfazendo o problema auxiliar é conhecida. Então o objetivo nesta análise é expressar a solução do problema não homogêneo de condução de calor dependente do tempo (3.50) em termos da função de Green que satisfaz o problema auxiliar (3.53).

Devido à propriedade de reciprocidade da função de Green pode-se escrever a equação (3.53) nos termos da função $G(\bar{r}, -\tau \mid r, -t)$ e esta toma a seguinte forma:

$$\nabla_0^2 G(\bar{r}, \tau \mid r, t) + \frac{1}{k} \delta(\bar{r} - r) \delta(\tau - t) = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial t} \quad (3.57)$$

onde ∇_0^2 é o laplaciano na variável $\bar{r}$ e o sinal de menos do lado direito da equação (3.57) é resultado da substituição de t por $-\tau$.

$$\nabla_0^2 T(\bar{r}, \tau) + \frac{g(\bar{r}, \tau)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(\bar{r}, \tau)}{\partial \tau} \quad (3.58)$$

Multiplicando-se a equação (3.57) por T e a equação (3.58) por G e subtraindo-se tem-se:

$$(G \nabla_0^2 T - T \nabla_0^2 G) + \frac{g(\bar{r}, \tau)}{k} G - \frac{1}{k} \delta(\bar{r} - r) \delta(\tau - t) T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} G + \frac{\partial G}{\partial \tau} T \quad (3.59)$$

Integrando a equação (3.59) com respeito a $\bar{r}$ sobre a região R e com respeito a τ de 0 a $t^* = t + \epsilon$, onde ϵ é arbitrariamente pequeno, tem-se:

$$\int_{\tau=0}^{t^*} \int_R (G \nabla_0^2 T - T \nabla_0^2 G) d\bar{r} d\tau + \frac{1}{k} \int_{\tau=0}^{t^*} \int_R g(\bar{r}, \tau) G d\bar{r} d\tau - \frac{1}{\alpha} T(r, t^*) = \frac{1}{\alpha} \int_R [GT]_{\tau=0}^{\tau=t^*} d\bar{r} \quad (3.60)$$

A primeira integral do lado esquerdo em (3.60) sobre o volume é transformada em uma integral de superfície usando o Teorema de Green, assim obtém-se:

$$\int_R (G \nabla_0^2 T - T \nabla_0^2 G) d\bar{r} = \sum_{i=1}^s \int_{S_i} \left(G \frac{\partial T}{\partial \eta_i} - T \frac{\partial G}{\partial \eta_i} \right) dS_i \quad (3.61)$$

onde $\frac{\partial}{\partial \eta_i}$ denota a diferencial ao longo do vetor normal apontando para fora da superfície

de contorno S_i , $i = 1, 2, \dots, S$ e S é o número de superfície de contorno contínuas da Região R.

O termo $[GT]$ do lado direito da equação (3.60) calculado nos limites torna-se:

$$[GT]_{\tau=0}^{\tau=t^*} = -(GT) |_{\tau=0} = -G |_{\tau=0} F(r) \quad (3.62)$$

Desde que $T |_{\tau=0} = F(r)$ e para o limite superior $t^* = t + \epsilon$, tem-se $G(r, t | \bar{r}, t^*) = 0$ por definição, isto é, para $t^* > t$, $G(r, t | \bar{r}, t^*)$ é zero, pois, o tempo para o efeito é anterior ao tempo para o impulso.

Substituindo essas equações na equação (3.60) e tomando $\epsilon \rightarrow 0$ obtém-se:

$$\begin{aligned} T(r, t) = \int_R G |_{\tau=0} F(\bar{r}) d\bar{r} + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_R g(\bar{r}, \tau) G d\bar{r} d\tau \\ + \alpha \int_{\tau=0}^t \sum_{i=1}^s \int_{S_i} \left(G \frac{\partial T}{\partial \eta_i} - T \frac{\partial G}{\partial \eta_i} \right) d\bar{S}_i \end{aligned} \quad (3.63)$$

onde $G \equiv G(r, t | \bar{r}, \tau)$ e $G |_{\tau=0} \equiv G(r, t | \bar{r}, 0)$.

O último termo do lado direito da equação (3.63) é agora calculado usando as condições de contorno (3.51) e (3.54). Multiplicando a equação (3.51) por G e a equação (3.54) por T e subtraindo-as obtém-se;

$$G \frac{\partial T}{\partial \eta_i} - T \frac{\partial G}{\partial \eta_i} = \frac{1}{k_i} G |_{S_i} f_i(r, t) \quad (3.64)$$

onde $G |_{S_i}$ refere-se ao valor da função de Green calculado na superfície de contorno S_i . Substituindo a equação (3.64) na equação (3.63) encontra-se a solução do problema (3.50) em termos da função de Green $G(r, t | \bar{r}, \tau)$ que satisfaz o problema (3.53) como:

$$\begin{aligned} T(r, t) = \int_R G(r, t | \bar{r}, \tau) |_{\tau=0} F(\bar{r}) d\bar{r} \\ + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_R g(\bar{r}, \tau) G(r, t | \bar{r}, \tau) d\bar{r} d\tau \\ + \alpha \int_{\tau=0}^t \sum_{i=1}^s \int_{S_i} G(r, t | \bar{r}, \tau) |_{\bar{r}=r_i} \frac{f_i(\bar{r}, \tau)}{k_i} d\bar{S}_i \end{aligned} \quad (3.65)$$

3.2.2.2 Determinação da Função de Green

Considere o seguinte problema homogêneo de valor de contorno de condução de calor:

$$\nabla^2 T(r, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} \quad \text{na região } R \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta_i} + H_i T = f_i(r, t) \quad \text{na fronteira } S_i \quad (3.67)$$

$$T(r, 0) = F_r \quad \text{na região } R \quad (3.68)$$

A função de Green $G(r, t \mid \bar{r}, \tau)$ precisa ser solução do seguinte problema auxiliar:

$$\nabla^2 G(r, t \mid \bar{r}, \tau) + \frac{1}{k} \delta(r - \bar{r}) \delta(t - \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial t} \quad t > \tau \quad \text{na região } R \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \eta_i} + H_i T = 0 \quad t > \tau \quad \text{na fronteira } S_i \quad (3.70)$$

$$G(r, t \mid \bar{r}, \tau) = 0 \quad \text{para } t < \tau \quad (3.71)$$

De acordo com a equação (3.65) a solução $T(r, t)$ do problema (3.66) é:

$$T(r, t) = \int_R G(r, t \mid \bar{r}, \tau)|_{\tau=0} F(\bar{r}) d\bar{r} \quad (3.72)$$

Por outro lado, o problema homogêneo (3.66) também pode ser resolvido pelo método das variáveis separáveis, o qual foi abordado na seção 3.2.1. Suponha que o problema seja resolvido usando variáveis separáveis, então a solução pode ser expressa da seguinte forma:

$$T(r, t) = \int_R K(r, \bar{r}, t) F(\bar{r}) d\bar{r} \quad (3.73)$$

onde $K(r, \bar{r}, t) = K(r, t)K(\bar{r}, t)$ sendo $K(r, t)$ a autofunção solução do problema de autovalores na variável r .

Compara-se a equação (3.72) e a equação (3.73) e conclui-se que:

$$G(r, t \mid \bar{r}, \tau)|_{\tau=0} = K(r, \bar{r}, t)$$

$G(r, t \mid \bar{r}, \tau)$ pode ser determinada resolvendo a parte homogênea do problema de condução de calor, reordenando na forma dada pela equação (3.73) e comparando a expressão resultante com a equação (3.72).

3.2.2.3 Problema Unidimensional não Homogêneo

Esta seção concentra-se em resolver o problema unidimensional não homogêneo de condução de calor com fronteiras convectivas utilizando o método da Função de Green. Reescrevendo o problema (3.66) para uma dimensão tem-se:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 < x < l_1 \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + H_1(T - T_\infty) = 0 \quad x = 0 \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + H_2(T - T_\infty) = 0 \quad x = l_1 \quad (3.76)$$

$$T(x, 0) = F(x), \quad 0 < x < l_1 \quad (3.77)$$

A fim de resolver a equação toma-se o problema homogêneo, ou seja, a equação (3.50) com $x = r$ e $g(x, t) = 0$. A solução é dada pela equação (3.37) e pode ser escrita da seguinte forma:

$$T_h(x, t) = \int_0^{l_1} \sum_{n=1}^{\infty} \exp^{-\alpha \beta_n^2 t} \frac{1}{N(\beta_n)} \chi(\beta_n, x) \chi(\beta_n, \bar{x}) F(\bar{x}) d\bar{x} \quad (3.78)$$

$$N(\beta_n) = \frac{1}{2} \left[(\beta_n^2 + H_1 H_2) \left(l_1 + \frac{H_2}{\beta_n^2 + H_2^2} \right) + H_1 \right] \quad (3.79)$$

$$\chi(\beta_n, x) = \cos(\beta_n x) + \frac{H_1}{\beta_n} \sin(\beta_n x) \quad (3.80)$$

onde β_n são raízes da equação transcendental:

$$\frac{(\beta_n^2 - H_1 H_2)}{\beta_n} \tan(\beta_n l_1) = H_1 + H_2 \quad (3.81)$$

Observando que a série infinita da equação (3.78) deve ser uniformemente convergente. A solução do mesmo problema utilizando função de Green, de acordo com a equação (3.65) é

$$T_h(x, t) = \int_0^{l_1} \sum_{n=1}^{\infty} G(r, t | \bar{r}, \tau)|_{\tau=0} F(\bar{x}) d\bar{x} \quad (3.82)$$

Comparando (3.82) com (3.78) tem-se que:

$$G(x, t | \bar{x}, \tau)|_{\tau=0} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \beta_n^2 t} \frac{1}{N(\beta_n)} \chi(\beta_n, x) \chi(\beta_n, \bar{x}) \quad (3.83)$$

Substituindo t por $(t - \tau)$ tem-se:

$$G(x, t | \bar{x}, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \beta_n^2 (t - \tau)} \frac{1}{N(\beta_n)} \chi(\beta_n, x) \chi(\beta_n, \bar{x}) \quad (3.84)$$

Assim a solução do Problema não homogêneo (3.74) é:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \int_{\bar{x}=0}^{l_1} G(x, t | \bar{x}, \tau)|_{\tau=0} F(\bar{x}) d\bar{x} \\ &+ \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{\bar{x}=0}^{l_1} g(\bar{x}, \tau) G(x, t | \bar{x}, \tau) d\bar{x} d\tau + \underbrace{0}_{f_1=0} + \underbrace{0}_{f_2=0} \end{aligned} \quad (3.85)$$

3.2.2.4 Solução Produto

Considere a Função de Green em um sistema de coordenadas retangulares bidimensional

$$\nabla^2 G(x, y, t | \bar{x}, \bar{y}, \tau) + \frac{1}{k} \delta(x - \bar{x}) \delta(y - \bar{y}) \delta(t - \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G}{\partial t} \quad t > \tau \quad (3.86)$$

com condições de contorno lineares e $G(x, y, t | \bar{x}, \bar{y}, \tau) = 0$.

Pode-se encontrar a função de Green resolvendo-se o seguinte problema auxiliar:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \quad (3.87)$$

Sobre o mesmo domínio com $\Omega(x, y, \tau) = \delta(x - \bar{x})\delta(y - \bar{y})$ e mesma condição de contorno.

Resolvendo-se a equação (3.87) pelo método das variáveis separáveis, assume-se que $\Omega(x, y, t) = \Omega_1(x, t)\Omega_2(y, t)$ e pela substituição direta tem-se:

$$\Omega_2 \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\Omega_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x^2} \right) + \Omega_1 \left(\frac{\Omega_2}{\frac{1}{\alpha} \partial t} - \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.88)$$

Assumindo que Ω_1 e Ω_2 satisfazem a seguintes equações:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\Omega_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x^2} = 0 \quad (3.89)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\Omega_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial y^2} = 0 \quad (3.90)$$

Considerando a condição inicial expressa pela substituição direta tem-se que $\Omega(x, y, \tau) = \Omega_1(x, \tau)\Omega_2(y, \tau) = \delta(x - \bar{x})\delta(y - \bar{y})$ é satisfeita se $\Omega_1(x, \tau) = \delta(x - \bar{x})$ e $\Omega_2(y, \tau) = \delta(y - \bar{y})$.

Substituindo-se $\Omega(x, y, t) = \Omega_1(x, t)\Omega_2(y, t)$ nas condições de contorno:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_{x=x_i} + H_i(\Omega) \Big|_{x=x_i} = 0 \quad (3.91)$$

Deve-se ter:

$$\Omega_2 \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} \Big|_{x=x_i} + H_i(\Omega_1) \Big|_{x=x_i} \right) = 0 \quad (3.92)$$

ou seja:

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} \Big|_{x=x_i} + H_i(\Omega_1) \Big|_{x=x_i} = 0 \quad (3.93)$$

Analogamente para a variável y tem-se:

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial y} \Big|_{y=y_i} + H_i(\Omega_2) \Big|_{y=y_i} = 0 \quad (3.94)$$

Consequentemente, encontra-se $\Omega(x, y, t)$ resolvendo-se a EDO (3.89) com condição

inicial $\Omega_1(x, \tau) = \delta(x - \bar{x})$ e condição de contorno dada pelas equações (3.93) e a EDO (3.90) com condição inicial $\Omega_2(y, \tau) = \delta(y - \bar{y})$ e condição de contorno dada pelas equações (3.94).

Correspondendo assim a encontrar a função de Green para o problema:

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + \frac{1}{k} \delta(x - \bar{x}) \delta(t - \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G_1}{\partial t} \quad t > \tau \quad (3.95)$$

com condições de contorno:

$$\left. \frac{\partial G_1}{\partial x} \right|_{x=x_i} + H_i(G_1) \Big|_{x=x_i} = 0 \quad (3.96)$$

e

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2} + \frac{1}{k} \delta(y - \bar{y}) \delta(t - \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial G_2}{\partial t} \quad t > \tau \quad (3.97)$$

com condições de contorno

$$\left. \frac{\partial G_2}{\partial y} \right|_{y=y_i} + H_i(G_2) \Big|_{y=y_i} = 0 \quad (3.98)$$

Portanto $G(x, y, t | \bar{x}, \bar{y}, \tau) = \Omega(x, y, t) He(t - \tau) = G_1(x, t | \bar{x}, \tau) G_2(y, t | \bar{y}, \tau)$, onde He é denominada função de Heaviside dada por

$$He(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > \tau \\ 0 & \text{se } t < \tau \end{cases}, \quad \tau \geq 0 \quad (3.99)$$

3.2.3 Técnica da Transformada Integral

A técnica da transformada integral fornece uma aproximação da solução de certas classes de equações diferenciais parciais lineares. O método é particularmente conveniente para a solução de problemas homogêneo e não homogêneo de condução de calor sujeito a valores de contorno, desde que a segunda derivada parcial seja removida da equação diferencial por este método. Neste sentido, no problema de condução de calor a transformada integral é aplicada para remover a derivadas parciais com respeito às variáveis espaciais.

Por exemplo, na equação (3.18), o problema nas variáveis x, y e t é reduzido a uma EDO na variável t por sucessivas aplicações da transformada integral para a remoção da derivada parcial com respeito as variáveis x e y . A EDO resultante é então resolvida

sujeita às condições iniciais transformadas para o problema. A transformada dupla da função temperatura determinada deste modo é invertida sucessivamente com respeito às variáveis x e y obtendo-se a solução desejada do problema. O processo de inversão é simples desde que as fórmulas de inversão sejam acessíveis para o problema em questão.

A resolução do problema transiente de condução de calor é comumente feita por meio da transformada de Laplace para remover a variável t da EDP. No entanto, em muitos problemas é mais conveniente aplicar uma transformada integral que remove a variável espacial da EDP. A técnica da transformada integral é especialmente atrativa para problemas de calor em regime permanente e transiente no qual todas as variáveis são tratadas da mesma forma. Esta técnica não tem dificuldades de inversão como no caso da transformada de Laplace, pois a transformada integral e a fórmula de inversão são definidas na deficiência do problema. Para um dado problema, entretanto, o tipo de transformada integral e a fórmula de inversão dependem do domínio da variável espacial (finito, semi-infinito e infinito) e do tipo de condição de contorno.

Neste contexto estaremos apenas abordando o domínio finito e retangular. A técnica da transformada integral é derivada do método das variáveis separáveis. Os pares de transformadas necessários para a solução de um dado problema são desenvolvidos considerando a representação de funções arbitrárias, definidas na mesma região do problema, em termos de soluções separadas para a parte homogênea do problema. Desta forma, o método das variáveis separáveis estudado na seção 3.2.1 fornece as autofunções que serão utilizadas na solução do problema não homogêneo por meio da técnica da transformada integral.

Devido à eficiência da aplicação deste método, o uso deste por engenheiros e cientistas cresceu durante a década de 1960, [Özisik \(1968\)](#). Atualmente vários autores utilizam desta técnica para a resolução de problemas térmicos, [Cheroto et al. \(1999\)](#), [Cossali \(2004\)](#) e [Monteiro et al. \(2009\)](#)

3.2.3.1 Solução do problema de condução de calor em regiões finitas

O problema de condução de calor estudado nesta seção é o mesmo estudado no método da função de Green, equações (3.50), (3.51) e (3.52), e será reescrito aqui pelas seguintes equações:

$$\nabla^2 T(r, t) + \frac{g(r, t)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} \quad \text{na região R} \quad (3.100)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta_i} + H_i T = f_i(r, t) \quad \text{na fronteira } S_i \quad (3.101)$$

$$T(r, 0) = F(r) \quad \text{na região } R \quad (3.102)$$

onde $i = 1, 2, \dots, S$ é o número de superfícies de contorno contínuas do sólido e $\frac{\partial}{\partial \eta_i}$ é a diferencial ao longo do vetor normal a superfície da fronteira.

Com o intuito de resolver o problema (3.100), é considerado o seguinte problema auxiliar homogêneo de autovalores para a variável espacial

$$\begin{cases} \nabla^2 \Psi(r) + \lambda^2 \Psi(r) = 0 & \text{na região } R \\ \frac{\partial \Psi(r)}{\partial \eta_i} + H_i \Psi(r) = 0 & \text{na superfície } S_i \end{cases} \quad (3.103)$$

Observe que o problema de autovalores descrito pela equação (3.30) é a versão unidimensional do problema (3.103). Sejam $\Psi_m(r) \equiv \Psi(\lambda_m, r)$ as autofunções e λ_m os autovalores do problema (3.103), tomando as autofunções como a função núcleo define-se a transformada integral bidimensional da função temperatura $T(r, t)$ pela seguinte equação:

$$\bar{T}(\lambda_m, t) = \int_R \Psi(r) T(r, t) dr \quad (3.104)$$

E a fórmula inversa da transformada integral como:

$$T(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \Psi_m(r) \bar{T}(\lambda_m, t) d\bar{r} \quad (3.105)$$

onde a soma é tomada sobre todos os autovalores e os coeficientes C_m podem ser determinados pela ortogonalidade das autofunções, ou seja,

$$\int_R \Psi_m(r) \Psi_n(r) dr = 0 \quad \text{quando } m \neq n \quad (3.106)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (3.105) por $\Psi_m(r)$, integrando sobre a região e fazendo uso da ortogonalidade das autofunções, obtém-se

$$C_m = \frac{1}{\int_R \Psi_m^2(r) dr} \equiv \frac{1}{N} \quad (3.107)$$

O coeficiente C_m é igual ao inverso da norma N . A auto-função normalizada será

denominada por $K(\lambda_m, r)$ e definida por:

$$K(\lambda_m, r) = \frac{\Psi_m(r)}{\sqrt{N}} \quad (3.108)$$

Usando a auto-função normalizada $K(\lambda_m, r)$ como o núcleo, a transformada integral e a fórmula da inversão da temperatura é definida como:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Transformada} \\ \text{Integral} \end{array} \right) \bar{T}(\lambda_m, t) = \int_R K(\lambda_m, \bar{r}) T(\bar{r}, t) d\bar{r} \quad (3.109)$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Fórmula} \\ \text{Inversa} \end{array} \right) T(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} K(\lambda_m, r) \bar{T}(\lambda_m, t) \quad (3.110)$$

Para solucionar o problema de condução de calor em estudo aplica-se a definição de transformada integral, equação (3.109), na equação (3.100), obtendo a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \int_R K(\lambda_m, r) \nabla^2 T(r, t) dr + \frac{1}{k} \int_R K(\lambda_m, r) g(r, t) dr = \\ \frac{1}{\alpha} \int_R K(\lambda_m, r) \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dr \end{aligned} \quad (3.111)$$

A qual pode ser escrita como:

$$\int_R K(\lambda_m, r) \nabla^2 T(r, t) dr + \frac{1}{k} \bar{g}(\lambda_m, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}(\lambda_m, t)}{\partial t} \quad (3.112)$$

onde as quantidades escritas com barras, $\bar{g}$, $\bar{T}$ referem-se à transformada integral de g e T , respectivamente, dada pela equação (3.109).

A primeira integral do lado esquerdo da equação (3.112) é a transformada de integral de $\nabla^2 T(r, t)$. Esta integral pode ser calculada usando o teorema de Green, e escrita na seguinte forma:

$$\int_R K_m \nabla^2 T dr = \int_R T \nabla^2 K_m dr + \sum_{i=1}^s \int_{S_i} \left(K_m \frac{\partial T}{\partial \eta_i} - T \frac{\partial K_m}{\partial \eta_i} \right) dS_i \quad (3.113)$$

onde $K_m = K(\lambda_m, r)$ e a soma é tomada sobre as superfícies do contorno S_i , $i = 1, 2, \dots, S$ da região finita R .

O primeiro termo do lado direito da equação (3.113) é calculado multiplicando a equação auxiliar (3.103) por T e integrando sobre a região R , obtendo desta forma a seguinte equação:

$$\int_R T \nabla^2 K_m dr = -\lambda_m^2 \int_R K_m T dr \equiv -\lambda_m^2 \bar{T}(\lambda_m, t) \quad (3.114)$$

O segundo termo do lado direito da equação (3.113) é calculado usando as condições de contorno (3.101) e (3.102) e pode ser reescrito como:

$$\left(K_m \frac{\partial T}{\partial \eta_i} - T \frac{\partial K_m}{\partial \eta_i} \right) = \frac{K(\lambda_m, r_i)}{k_i} f_i(r, t) \quad (3.115)$$

Substituindo as equações (3.114) e (3.115) na equação (3.113), obtém-se

$$\int_R K_m \nabla^2 T dr = -\lambda_m^2 \bar{T}(\lambda_m, t) + \sum_{i=1}^s \int_{S_i} \frac{K(\lambda_m, r_i)}{k_i} f_i(r, t) dS_i \quad (3.116)$$

Substituindo a equação (3.116) na equação (3.112) conclui-se que:

$$\frac{\partial \bar{T}(\lambda_m, t)}{\partial t} = \alpha \lambda_m^2 \bar{T}(\lambda_m, t) = A(\lambda_m, t) \quad (3.117)$$

onde:

$$A(\lambda_m, t) = \frac{\alpha}{k} \bar{g}(\lambda_m, t) + \alpha \sum_{i=1}^s \int_{S_i} \frac{K(\lambda_m, r_i)}{k_i} f_i(r, t) dS_i \quad (3.118)$$

$$\bar{g}(\lambda_m, t) = \int_R K(\lambda_m, \bar{r}) g(\bar{r}, t) d\bar{r} \quad (3.119)$$

Assim a técnica da transformada integral remove da EDP de condução de calor, equação (3.100), a segunda derivada parcial com respeito à variável espacial, e reduz a EDP em uma EDO linear de primeira ordem para a transformada integral da temperatura $\bar{T}(\lambda_m, t)$ dada pela equação (3.117).

A transformada integral deve satisfazer a condição inicial, ou seja:

$$\bar{T}(\lambda_m, 0) = \int_R K(\lambda_m, r) F(r) dr \equiv \bar{F}(\lambda_m) \quad (3.120)$$

A solução da EDO expressa pela equação (3.117) e sujeita à condição inicial (3.120) é dada pelas equações:

$$\bar{T}(\lambda_m, t) = e^{-\alpha\lambda_m^2 t} \left(\bar{F}(\lambda_m) + \int_0^t e^{\alpha\lambda_m^2 \bar{t}} A(\lambda_m, \bar{t}) d\bar{t} \right) \quad (3.121)$$

Substituindo a transformada integral expressa pela equação (3.121) na fórmula da inversão (3.110) obtém-se a solução do problema de contorno da condução de calor:

$$T(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_m^2 t} K(\lambda_m, r) \left(\bar{F}(\lambda_m) + \int_0^t e^{\alpha\lambda_m^2 \bar{t}} A(\lambda_m, \bar{t}) d\bar{t} \right) \quad (3.122)$$

onde:

$$A(\lambda_m, t) = \frac{\alpha}{k} \bar{g}(\lambda_m, t) + \alpha \sum_{i=1}^s \int_{S_i} \frac{K(\lambda_m, r_i)}{k_i} f_i(r, t) \quad (3.123)$$

$$\bar{F}(\lambda_m) = \int_R K(\lambda_m, r) F(\bar{r}) d\bar{r} \quad (3.124)$$

A soma em (3.122) é tomada sobre todos os autovalores e é escrita para a condição de contorno do tipo III, ou seja,

$$\frac{\partial T}{\partial \eta_i} + H_i T = f_i(r, t) \quad t > 0 \quad \text{na fronteira } S_i \quad (3.125)$$

a qual descreve o modelo de usinagem do contexto de estudo deste trabalho, pois $H_i = \frac{h_i}{k_i}$ onde h_i é o coeficiente de convecção que fornece a propriedade do fluido refrigerante. A maioria dos modelos encontrados na literatura utiliza-se de outras condições de contorno. A fim de comparar a complexidade do modelo utilizando a condição de contorno de Tipo III com as outras se verifica que:

- Quando a temperatura é prescrita como função de posição e tempo na superfície de contorno do sólido, reescrevendo a equação (3.125) da seguinte forma:

$$k_i \frac{\partial T}{\partial \eta_i} + h_i T = f_i(r, t) \quad t > 0 \quad \text{na fronteira } S_i \quad (3.126)$$

Toma-se $k_i = 0$ na equação, então a condição de contorno se reduz a condição de contorno do tipo I, ou seja, $T = \frac{f_i(r, t)}{h_i}$ na superfície de fronteira i .

- Quando o fluxo de calor é um valor pré-determinado na superfície de fronteira i ,

toma-se h_i igual a zero na equação (3.126) e a condição de contorno se reduz a condição de contorno do tipo II, ou seja, $\frac{\partial T}{\partial \eta_i} = \frac{f_i(r,t)}{k_i}$ na superfície de fronteira

Na solução (3.122) o parâmetro está no denominador da equação (3.118) portanto, deve-se substituir

$$\frac{K(\lambda_m, r_i)}{k_i} \text{ por } \frac{1}{h_i} \frac{\partial K(\lambda_m, r_i)}{\partial \eta_i}$$

A validade desta relação é manifestada da condição de contorno do problema auxiliar (3.103).

3.2.3.2 Solução Alternativa

A solução do problema de condução de calor dada pela equação (3.122) não é sempre uniformemente convergente, Özisik (1968). Para obter uma solução alternativa convergente Ölçer (1969) considera a função temperatura quase-permanente $T_{0j}(r, t)$, satisfazendo o seguinte sistema.

$$\nabla^2 T_{0j}(r, t) + \delta_{0j} \frac{g(r, t)}{k} = 0 \quad \text{na região R} \quad (3.127)$$

$$\frac{\partial T_{0j}}{\partial \eta_i} + H_i T_{0j} = \delta_{ij} f_i(r, t) \quad \text{na fronteira } S_i, \quad (3.128)$$

onde o Delta de Kroneker é definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq j \\ 1 & \text{para } i = j \end{cases} \quad j = 0, 1, 2, \dots, S, \quad (3.129)$$

onde $i = 1, 2, \dots, S$ é o número de superfícies de contorno contínuas do sólido.

Aqui assume-se que todos os h_i não se anulam simultaneamente.

Neste caso, considere a transformada integral e a fórmula da inversão definida como:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Transformada} \\ \text{Integral} \end{array} \right) \bar{T}_{0j}(\lambda_m, t) = \int_R K(\lambda_m, \bar{r}) T_{0j}(\bar{r}, t) d\bar{r} \quad (3.130)$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Fórmula} \\ \text{Inversa} \end{array} \right) T_{0j}(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} K(\lambda_m, r) \bar{T}_{0j}(\lambda_m, t) \quad (3.131)$$

A transformada integral do sistema de equações (3.127) e (3.128) obtida aplicando a transformação (3.130) é descrita pela seguinte equação:

$$\lambda_m^2 \bar{T}_{0j}(\lambda_m, t) = \frac{\delta_{0j} \bar{g}(\lambda_m, t)}{k} + \sum_{i=0}^s \int_{S_i} \frac{K(\lambda_m, \bar{r}_i)}{k_i} \delta_{ij} f_i(\bar{r}_i, t) dS_i \quad j = 0, 1, \dots, S. \quad (3.132)$$

A equação (3.132) pode ser reescrita na forma:

$$\bar{T}_{00}(\lambda_m, t) = \frac{\bar{g}(\lambda_m, t)}{k \lambda_m^2} \quad (3.133)$$

$$\bar{T}_{0j}(\lambda_m, t) = \int_{S_j} \frac{K(\lambda_m, \bar{r}_i)}{k_j} f_j(\bar{r}_i, t) dS_j \quad j = 1, 2, \dots, S. \quad (3.134)$$

Invertendo as equações (3.133) e (3.134) pela fórmula da inversão (3.131) a solução do sistema quase-permanente (3.127) é dada da seguinte forma:

$$T_{00}(r, t) = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^2} K(\lambda_m, r) \bar{g}(\lambda_m, t) \quad (3.135)$$

$$T_{0j}(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} K(\lambda_m, r) \int_{S_j} \frac{K(\lambda_m, \bar{r}_j)}{k_j} f_j(\bar{r}_j, t) dS_j \quad j = 1, 2, \dots, S. \quad (3.136)$$

Da transformada (3.132) obtém-se

$$\lambda_m^2 \sum_{j=1}^s \bar{T}_{0j}(\lambda_m, t) = \frac{\bar{g}(\lambda_m, t)}{k} + \sum_{i=0}^s \int_{S_i} \frac{K(\lambda_m, \bar{r}_i)}{k_i} f_i(\bar{r}_i, t) dS_i \quad (3.137)$$

Comparando o lado direito da equação (3.137) com a equação (3.123) nota-se que a equação (3.137) é igual a $\frac{A(\lambda_m, t)}{\alpha}$. Sendo assim a equação (3.137) é escrita da seguinte forma:

$$\alpha \lambda_m^2 \sum_{j=1}^s \bar{T}_{0j}(\lambda_m, t) = A(\lambda_m, t) \quad (3.138)$$

Substituindo a equação (3.138) na equação (3.121)

$$\bar{T}(\lambda_m, t) = e^{-\alpha\lambda_m^2 t} \left(\bar{F}(\lambda_m) + \sum_{j=1}^s \int_0^t e^{\alpha\lambda_m^2 \bar{t}} \bar{T}_{0j}(\lambda_m, \bar{t}) d\bar{t} \right) \quad (3.139)$$

A integral do lado direito da equação (3.139) é resolvida por partes e assim tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{T}(\lambda_m, t) = e^{-\alpha\lambda_m^2 t} & \left(\bar{F}(\lambda_m) + \sum_{j=0}^s \int_0^t e^{\alpha\lambda_m^2 \bar{t}} \bar{T}_{0j}(\lambda_m, \bar{t}) d\bar{t} \right. \\ & \left. - \sum_{j=0}^s \bar{T}_{0j}(\lambda_m, 0) - \sum_{j=0}^s \int_0^t e^{\alpha\lambda_m^2 \bar{t}} \frac{\partial \bar{T}_{0j}}{\partial \bar{t}}(\lambda_m, \bar{t}) d\bar{t} \right) \end{aligned} \quad (3.140)$$

As fórmulas da inversão (3.110) e (3.131) são combinadas para chegar à seguinte fórmula de inversão:

$$T(r, t) = \sum_{j=0}^s \bar{T}_{0j}(r, t) + \sum_{m=1}^{\infty} K(\lambda_m, r) \left(\bar{T}(\lambda_m, t) - \sum_{j=0}^s \bar{T}_{0j}(\lambda_m, \bar{t}) \right) \quad (3.141)$$

Invertendo a equação (3.140) pela fórmula da inversão (3.141) obtém-se

$$\begin{aligned} T(r, t) = \sum_{j=0}^s \bar{T}_{0j}(r, t) + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_m^2 t} K(\lambda_m, r) & \left(\bar{F}(\lambda_m) - \sum_{j=0}^s \bar{T}_{0j}(\lambda_m, 0) \right) \\ + \sum_{j=0}^s \left(\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_m^2 t} K(\lambda_m, r) \int_0^t e^{\alpha\lambda_m^2 \bar{t}} \frac{\partial \bar{T}_{0j}}{\partial \bar{t}}(\lambda_m, \bar{t}) d\bar{t} \right) \end{aligned} \quad (3.142)$$

onde:

$$\bar{F}(\lambda_m) = \int_R K(\lambda_m, \bar{r}) F(\bar{r}) d\bar{r} \quad (3.143)$$

$$\bar{T}_{0j}(\lambda_m, 0) = \int_R K(\lambda_m, \bar{r}) T_{0j}(\bar{r}, 0) d\bar{r} \quad (3.144)$$

$$\frac{\partial \bar{T}_{0j}}{\partial \bar{t}}(\lambda_m, 0) = \int_R K(\lambda_m, \bar{r}) \frac{\partial T_{0j}}{\partial \bar{t}}(\bar{r}, 0) d\bar{r} \quad (3.145)$$

A equação (3.142) é a forma alternativa da solução (3.122) do problema de condução de calor equação (3.100). Ela pode ser expressa na forma que inclui expli-

citamente a geração de calor e as condições de contorno. Tal resultado é obtido substituindo a equação (3.132) na equação (3.142) e as expressões equivalentes para os termos $\sum_{j=0}^s \bar{T}_{0j}(\lambda_m, 0)$ e $\sum_{j=0}^s \frac{\partial T_{0j}}{\partial t}(\lambda_m, \bar{t})$.

$$\begin{aligned}
 T(r, t) = & \sum_{j=0}^s \bar{T}_{0j}(r, t) + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha \lambda_m^2 t} K(\lambda_m, r) \left\{ \bar{F}(\lambda_m) \right. \\
 & - \frac{1}{\lambda_m^2} \left[\bar{g}(\lambda_m, 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{S_i} \frac{K(\lambda_m, r_i)}{k_i} f_i(\bar{r}, t) dS_i \right] \\
 & \left. - \frac{1}{\lambda_m^2} \int_0^t e^{-\alpha \lambda_m^2 \bar{t}} \left[\frac{1}{k} \frac{\partial \bar{g}}{\partial t}(\lambda_m, \bar{t}) + \sum_{i=1}^s \int_{S_i} \frac{K(\lambda_m, r_i)}{k_i} \frac{\partial f_i}{\partial t}(r_s, \bar{t}) \right] d\bar{t} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.146}$$

Ölçer (1969) observa que a convergência uniforme da serie infinita da equação (3.142) é assegurada pela exigência de que as funções $F(\bar{r})$ e $g(\bar{r}, t)$ possuam primeira e segunda derivada parcial contínua na variável espacial e que $g(\bar{r}, t)$ possua derivada parcial contínua de primeira ordem na variável tempo t .

3.3 Parâmetros Adimensionais

O número das variáveis na solução do problema de condução de calor pode ser reduzido introduzindo variáveis adimensionais. A fim de reescrever a equação (3.18) na forma adimensional dividi-se as variáveis que descrevem o comprimento da peça por um comprimento característico L (isto é, a dimensão característica do sólido calculada pelo quociente entre o volume do sólido e a área de sua superfície), e define-se as seguintes variáveis adimensionais:

$$\xi = \frac{x}{L} \quad \eta = \frac{y}{L} \tag{3.147}$$

onde $\frac{\partial}{\partial N} \equiv$ diferencial em relação ao vetor normal nas novas variáveis adimensionais (ξ, η) .

A temperatura adimensional, Θ , é tomada como:

$$\Theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \tag{3.148}$$

onde T_{∞} é a temperatura ambiente e T_0 é a temperatura inicial do sólido.

Substituindo as equações (3.147) e (3.148) na equação (3.18), obtém-se:

$$\frac{T - T_\infty}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} \right) + \frac{g}{k} = \frac{T - T_\infty}{\alpha} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \quad \text{em } R, \quad t > 0 \quad (3.149)$$

$$\frac{k_i}{L} \frac{\partial \Theta}{\partial N_i} + h_i \Theta = 0 \quad \text{em } s_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.150)$$

$$\Theta = 1 \quad \text{em } R, \quad t = 0 \quad (3.151)$$

A equação (3.149) torna-se adimensional reorganizando os parâmetros e reescrevendo-a da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} \right) + \Phi = \frac{\partial \Theta}{\partial F_0} \quad \text{em } R, \quad F_0 > 0 \quad (3.152)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial N_i} + B_i \Theta = 0 \quad \text{em } s_i, \quad F_0 > 0 \quad (3.153)$$

$$\Theta = 1 \quad \text{em } R, \quad F_0 = 0 \quad (3.154)$$

onde os parâmetros adimensionais são definidos como:

$$F_0 = \frac{\alpha t}{L^2} \quad \text{variável tempo adimensional} \quad (3.155)$$

$$\Phi = \frac{gL^2}{k(T_0 - T_\infty)} \quad \text{variável geração de calor adimensional} \quad (3.156)$$

$$Bi = \frac{hL}{k} \quad \text{variável condução de calor adimensional} \quad (3.157)$$

Quando o sistema adimensional (3.152) é comparado com o sistema original (3.18), pode-se notar que o número de variáveis é menor no sistema adimensional. O significado físico das variáveis F_0 , Φ e Bi é extremamente relevante para o entendimento e uso deste modelo na usinagem e qualificação das propriedades térmicas do processo.

A variável tempo adimensional F_0 , denominada Número de Fourier, é a razão entre a taxa de calor transferido por condução e a taxa de energia acumulada, isto se torna evidente quando se escreve F_0 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{\alpha t}{L^2} \\ &= \frac{\left(\frac{k}{L}\right) \cdot L}{(\rho c_p L^2 / t)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(\text{taxa de condução de calor através de } L \text{ em relação à área } L^2)}{(\text{taxa de energia acumulada em relação à área } L^2)} \quad (3.158)$$

O número de Fourier é o parâmetro utilizado para comparar a taxa de mudança de temperatura do sólido durante problemas transientes de condução de calor. Um número de Fourier grande significa uma grande quantidade de calor conduzido através do sólido quando comparada com a energia acumulada no mesmo, ou a penetração mais profunda da temperatura no sólido por um dado período de tempo ou ainda uma mudança rápida de temperatura em uma determinada profundidade no sólido.

A variável geração de calor adimensional Φ é a razão da taxa de geração de calor pela taxa de condução de calor em relação à área L^2 . A evidência desta observação ocorre quando se reescreve Φ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{gL^2}{k(T_0 - T_\infty)} \\ &= \frac{gL^2}{\frac{k}{L}L(T_0 - T_\infty)} \\ &= \frac{\left(\begin{array}{c} \text{taxa de geração de calor} \\ \text{em relação a área } L^2 \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} \text{taxa de condução de calor através} \\ \text{de } L, \text{ em relação à área } L^2, \text{ com} \\ \text{diferença de temperatura } (T_0 - T_\infty) \end{array} \right)} \end{aligned} \quad (3.159)$$

O parâmetro adimensional Bi , denominado número de Biot, é semelhante ao número de Nusselt $Nu = \frac{hL}{k_f}$ para transferência de calor por convecção forçada, exceto pela condutividade térmica. No número de Nusselt é usada a condutividade térmica do fluido k_f enquanto no número de Biot é usada a condutividade térmica do sólido. Reordenando os termos do número de Biot tem-se:

$$\begin{aligned} Bi &= \frac{hL}{k} \\ &= \frac{h}{k/L} \end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\begin{array}{c} \text{coeficiente de transferência de calor} \\ \text{na superfície de contorno do sólido} \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} \text{unidade de condutância do sólido} \\ \text{através da espessura L} \end{array} \right)} \quad (3.160)$$

O número de Biot é interpretado como a razão do coeficiente de transferência de calor na superfície de contorno do sólido pela unidade interna de condutância do sólido.

3.4 Coeficiente de Transferência Convectiva Analítico

O escoamento de um fluido sobre uma superfície deve desenvolver uma camada limite térmica quando a temperatura do fluxo livre e a temperatura da superfície forem diferentes. Existe uma relação entre as condições nessa camada limite e o coeficiente de transferência convectiva de calor. O fluxo local de calor pode ser obtido mediante a lei de Fourier aplicada ao fluido em qualquer ponto da superfície, e pode ser expresso por, [Incropera e Witt \(1992\)](#):

$$\dot{q} = -k_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (3.161)$$

onde k_f é a condutividade térmica do fluido.

Esta expressão é apropriada, pois na superfície não há movimento do fluido e a transferência de energia ocorre somente por condução. Combinando a equação (3.161) com a lei de resfriamento de Newton, obtém-se a seguinte expressão para o coeficiente de transferência convectiva, h :

$$h = \frac{k_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{T_s - T_\infty} \quad (3.162)$$

onde T_s é temperatura na superfície do sólido e T_∞ é a temperatura ambiente, que neste caso, é o fluido que envolve o sólido.

Então, as condições na camada limite térmica, que influenciam fortemente o gradiente de temperatura $\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$ na parede determinam a taxa de transferência de calor através da camada limite. Pode-se antecipar, intuitivamente, que h depende das seguintes propriedades do fluido: velocidade e escala de comprimento, e da geometria da superfície de escoamento. No entanto, a equação (3.162) sugere a forma simplificada desta

dependência quando combinada com a equação (3.161) a qual será adotada como condição de contorno do problema estudado.

Um método analítico para avaliar a eficácia dos fluidos de corte em refrigerar o sólido consiste basicamente em encontrar o coeficiente de transferência convectiva h que qualifica o fluido em um processo de usinagem. Por exemplo, considerando como solução do modelo de transferência de calor a equação (3.85), Carslaw e Jaeger (1959) afirmam que para valores grandes do tempo t , a série dada pela equação (3.84) converge rapidamente e a distribuição de calor pode ser aproximada pelo primeiro termo da série, ou seja:

$$T(x, t) = \int_{\bar{x}=0}^{l_1} G(x, t \mid \bar{x}, \tau)|_{\tau=0} F(\bar{x}) d\bar{x} + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{\bar{x}=0}^{l_1} g(\bar{x}, \tau) G(x, t \mid \bar{x}, \tau) d\bar{x} d\tau + \underbrace{0}_{f_1=0} + \underbrace{0}_{f_2=0} \quad (3.163)$$

onde:

$$G(x, t \mid \bar{x}, \tau) = e^{-\alpha\beta_1^2(t-\tau)} \frac{1}{N(\beta_1)} \chi(\beta_1, x) \chi(\beta_1, \bar{x}) \quad (3.164)$$

$$N(\beta_1) = \frac{1}{2} \left[(\beta_1^2 + H_1 H_2) \left(l_1 + \frac{H_2}{\beta_1^2 + H_2^2} \right) + H_1 \right] \quad (3.165)$$

$$\chi(\beta_1, x) = \cos(\beta_1 x) + \frac{H_1}{\beta_1} \operatorname{sen}(\beta_1 x) \quad (3.166)$$

Além disso, Carslaw e Jaeger (1959) afirmam também que o coeficiente de transferência convectiva h pode ser determinado para valores grandes de t , quando a curva $\ln T(x, t)$ versus t é linear, onde $T(x, t)$ é dada pela equação (3.163). Desta forma, a razão entre a temperatura calculada no centro, isto é, na coordenada $x = 0$, e a temperatura calculada em qualquer ponto conveniente x_i , fornece o autovalor β_1 da equação (3.166). A partir do autovalor β_1 encontra-se o valor de h pela equação transcendental:

$$\frac{(\beta_1^2 - \frac{h^2}{k})}{\beta_1} \tan(\beta_1 l_1) = 2 \frac{h}{k} \quad (3.167)$$

Vários valores de h podem ser encontrados variando os pontos x_i e um coeficiente médio de transferência convectiva pode ser calculado.

Relata-se a seguir o método da Capacitância Global que utiliza a teoria encon-

trada em Carslaw e Jaeger (1959) citada acima. Este processo é encontrado em Incropera e Witt (1992) e Bejan (1996) e servirá de base para encontrar o coeficiente de transferência convectiva no modelo estudado neste trabalho. O método da Capacitância Global é aplicado para um modelo unidimensional simétrico com fronteira isolada em $x = 0$, porém para $x = l_1$ a fronteira satisfaz a lei de Newton de resfriamento descrita pela equação (3.162).

Toma-se o modelo adimensional da equação unidimensional de condução de calor com condições de contorno do tipo II em $x = 0$ e do tipo III em $x = l_1$ o qual pode ser expresso pelas equações:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^*} = \frac{\partial \theta}{\partial F_0} \quad (3.168)$$

com condições iniciais e de contorno expressas pelas equações:

$$\theta(x^*, 0) = 1 \quad (3.169)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x^*} \right|_{x^*=0} = 0 \quad (3.170)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x^*} \right|_{x^*=1} = -Bi \cdot \theta(1, t^*) \quad (3.171)$$

onde o número de Biot é definido por $Bi \equiv \frac{hl}{k}$, a coordenada espacial adimensional é $x^* = \frac{x}{l}$, a variável dependente adimensional que representa a temperatura é definida por $\theta = \frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}$ e o número de Fourier é definido como $F_0 \equiv t^* = \frac{\alpha t}{l^2}$

A solução exata deste problema tem a seguinte forma:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\zeta_n^2 \cos(\zeta_n x^*)) \quad (3.172)$$

onde:

$$C_n = \frac{4 \operatorname{sen}(\zeta_n)}{2\zeta_n + \operatorname{sen}(2\zeta_n)} \quad (3.173)$$

Os autovalores ζ_n são raízes da equação transcendental

$$\zeta_n \tan(\zeta_n) = Bi \quad (3.174)$$

Incropera e Witt (1992) afirmam que é possível mostrar que para valores de

$F_0 \geq 0,2$ a série infinita da equação (3.172) pode ser aproximada pelo seu primeiro termo. Assumindo esta aproximação, a forma adimensional da distribuição de temperatura para o problema (3.168) se torna:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_1 e^{-\zeta_1^2} \cos(\zeta_1 x^*) \quad (3.175)$$

Sejam P_1 e P_2 dois pontos onde as temperaturas são conhecidas. Por exemplo, pode-se adquirir os valores da temperatura por meio de termopares inseridos na peça, alocados nos pontos com coordenadas P_1 e P_2 . Por conveniência toma-se P_1 com coordenada $x^* = 0$ e P_2 com coordenada $x^* = 1$. Aplicando para cada ponto a equação aproximada tem-se:

$$\frac{T_{P_1} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{4 \operatorname{sen}(\zeta_1)}{2\zeta_1 + \operatorname{sen}(2\zeta_1)} e^{-\zeta_1^2 F_0} \quad (3.176)$$

$$\frac{T_{P_2} - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{4 \operatorname{sen}(\zeta_1)}{2\zeta_1 + \operatorname{sen}(2\zeta_1)} e^{-\zeta_1^2 F_0} \cos(\zeta_1) \quad (3.177)$$

Combinando as equações (3.176) e (3.177) tem-se a equação que associa a temperatura com o autovalor ζ_1 :

$$\zeta_1 = \arccos\left(\frac{T_{P_2} - T_{\infty}}{T_{P_1} - T_{\infty}}\right) \quad (3.178)$$

A partir dos valores do autovalor, pode-se obter o número de Biot usando a equação (3.174) e consequentemente o coeficiente h pela definição do número de Biot.

A tabela 3.1, extraída do artigo Sales et al. (2002), mostra exemplos dos valores do coeficiente de transferência convectiva, h , e do número de Biot, Bi , calculados por meio do método da Capacitância Global para alguns fluidos de corte durante o torneamento do aço AISI 8640 ($k=20 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ e $\alpha=0,4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$).

Tabela 3.1: Coeficiente de transferência convectiva h e número de Biot Bi calculados por meio do Método da Capacitância Global, [Sales et al. \(2002\)](#)

Meio Refrigerante	$t[s]$	$T_t - T_\infty [^\circ C]$	$T_i - T_\infty [^\circ C]$	Bi	$h (W/m^2 \cdot K)$
a seco	3305	12	272	0,0094	29,9
Água	471,5	12	272	0,0662	209,3
Óleo de corte puro	873	12	272	0,0358	113,2
Óleo Emulsificador (5 %)	722	12	272	0,0432	136,6
Óleo Emulsificador (10 %)	645	12	272	0,0484	153
Fluido Sintético 1 (5 %)	300	12	272	0,104	328,9
Fluido Sintético 1 (10 %)	495	12	272	0,0631	199,5
Fluido Sintético 2 (5 %)	630	12	272	0,0495	156,5
Fluido Sintético 2 (10 %)	570	12	272	0,0548	173,3

Fonte: Adaptada de [Sales et al. \(2002\)](#)

onde T_i é temperatura inicial do corpo de prova ($300^\circ C$), T_∞ é a temperatura ambiente ($28^\circ C$) e T_t é a temperatura final do corpo de prova ($40^\circ C$).

3.5 Métodos para a Solução do Problema Inverso

A definição de problema inverso mais conhecida e abrangente é de [Engl, Hanke e Neubauer \(1996\)](#), segundo a qual ” Resolver um problema inverso é determinar causas desconhecidas a partir de efeitos desejados ou observados ” . Os efeitos observados, em geral, são imprecisos (dados contaminados com ruídos ou erros experimentais) ou incompletos. Entretanto, um problema direto (PD) requer o conhecimento completo das causas para a determinação dos efeitos. Matematicamente, associam-se às causas um conjunto de parâmetros a serem determinados (incógnitas) e aos efeitos, um conjunto conhecido de dados observados, de forma que a utilização daqueles parâmetros no problema direto geraria os mesmos dados observados. A Figura 3.3 ilustra uma representação esquemática da relação entre problemas inverso e direto.

Os problemas inversos (PI) pertencem à classe de problemas matematicamente mal postos. De acordo com o matemático francês Jacques Hadamard, três condições são necessárias para que um problema seja bem posto: a existência da solução, a solução deve ser única e a solução deve ter dependência contínua com os dados de entrada, se uma dessas condições for violada o problema torna-se mal posto. Em geral, uma ou mais dessas condições não são satisfeitas num PI. Os métodos de solução de PI têm sido motivo de intensas pesquisas científicas encontrando espaço nas mais diversas áreas do conhecimento (entre elas, geofísica, meteorologia, oceanografia, transferência de calor). Novas metodologias surgem continuamente como resposta à dificuldade na solução de PI. Entre as mais conhecidas podemos citar: Inversão Direta, Decomposição em Valores Singulares, Mínimos Quadrados, Métodos de Regularização, Métodos Variacionais, Redes

Figura 3.3: Representação Esquemática da Relação entre Problemas Inverso e Direto

Neurais, Filtros Digitais, entre outras, [Velho \(2001\)](#).

A solução do PI pode ser estabelecida através da minimização de um funcional objetivo, que é definido pela diferença entre as temperaturas experimentais e estimadas. Assume-se que os erros experimentais nas medidas de temperatura são aditivos, não correlacionados e têm distribuição normal com média zero e desvio padrão conhecido, [Beck, Blackwell e St.Clair \(1985\)](#).

Considerando-se os dados mensurados contínuos na variável tempo, o funcional objetivo é definido pela seguinte equação:

$$S(\mathbf{P}) = \int_{t=0}^{t_f} \{Y(t) - T[x_m, y_m, t; \mathbf{P}]\}^2 dt \quad (3.179)$$

onde $Y(t)$ é a medida de temperatura em um sensor posicionado na região em estudo ao longo do domínio do tempo. $T[x_m, y_m, t; P]$ é a temperatura estimada, ou seja, o valor estimado da temperatura no local que se encontra o sensor na região em estudo, que será denotado pelo ponto (x_m, y_m) , ao longo do domínio do tempo, t , e t_f é a duração do experimento em estudo. Os valores da temperatura estimada são obtidos através da solução do PD adimensional, definido pela equação (3.18), utilizando as estimativas para o termo fonte de calor $g(x, y, t)$ e o coeficiente de transferência convectiva h .

[Özisik e Orlande \(2000\)](#) descrevem os seguintes métodos de resolução do Problema

Inverso: Método de Levenberg-Marquardt, Método do gradiente Conjugado, Método do gradiente Conjugado com Problema Adjunto para Estimativa de Parâmetros e Método do Gradiente Conjugado com Problema Adjunto para Estimativa de Funções. Dentre estes métodos os autores destacam que o Método do Gradiente Conjugado (MGC) com Problema Adjunto para Estimativa de Parâmetros especialmente recomendado para problemas envolvendo a estimativa de funções testes usadas para aproximar a uma função desconhecida. Além disso, este método pertence à classe de técnicas iterativas de regularização. Sendo assim este foi o método escolhido para estimar a função teste, que neste contexto é o termo fonte de calor.

3.5.1 Método do Gradiente Conjugado com Problema Adjunto

O Método do Gradiente Conjugado, MGC com Problema Adjunto para Estimativa de Parâmetros é uma implementação alternativa do MGC onde dois problemas auxiliares, denominados Problema de Sensibilidade e Problema Adjunto, são resolvidos com o intuito de calcular o tamanho do passo de busca β^k e da equação gradiente $\nabla S(\mathbf{P}^k)$ para as k iterações do processo. A estimativa dos Parâmetros pelo MGC com Problema Adjunto pode ser organizada nos seguintes passos, Özisik e Orlande (2000):

1. Problema Direto;
2. Problema Inverso;
3. Problema de Sensibilidade;
4. Problema Adjunto;
5. Procedimento Iterativo;
6. Critério de Parada; e
7. Algoritmo Computacional.

A seguir cada um desses passos são apresentados de forma detalhada para a solução da estimativa de uma função teste.

3.5.1.1 Problema Direto

O Problema direto consiste na determinação do campo de temperatura $T(x, y, t)$ do problema físico modelado pelas Equações (3.18) no qual a estimativa da energia $g(t)$

de uma fonte de calor, dada por $g(x, y, t) = g(t)\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$ onde (x_0, y_0) é o centro da fonte de calor e o coeficiente de transferência convectiva h são conhecidos. $\delta(\cdot)$ é a função delta de Dirac, a qual é utilizada para que sejam computados apenas os valores de temperaturas experimentais e estimadas nas posições onde foram posicionados os sensores na região em estudo, equação (A.17).

3.5.1.2 Problema Inverso

O Problema Inverso visa encontrar uma estimativa da energia variando com o tempo $g(t)$ do termo-fonte tomada no sensor localizado na posição (x_m, y_m) e do coeficiente de transferência convectiva h . Considera-se a função teste, parametrização da função desconhecida, como uma combinação linear da seguinte forma:

$$g(t) = \sum_{j=1}^N P_j C_j(t) \quad (3.180)$$

onde $C_j(t)$, $j = 1, \dots, N$ são as funções testes conhecidas. Assim o objetivo do problema inverso é estimar os N parâmetros desconhecidos P_j , $j = 1, \dots, N$ e h como sendo uma constante teste, por exemplo, adquirida através de ensaios experimentais. O objetivo da resolução do PI é encontrar $g(t)$ e h que minimize a função objetivo dada pela equação (3.179).

3.5.1.3 Problema de Sensibilidade

O Problema de Sensibilidade, PS, é um dos problemas auxiliares a ser resolvido na utilização do MGC com Problema Adjunto para Estimativa de Parâmetros. O PS é obtido assumindo-se que quando o termo-fonte $g(t)$ e h forem perturbados por quantidades $\Delta g(t)$ e Δh , respectivamente, a temperatura $T(x, y, t)$ é perturbada por uma quantidade $\Delta T(x, y, t)$. Desde que o termo-fonte $g(t)$ é parametrizado pela equação (3.180), $\Delta g(t)$ é obtida pela perturbação de cada parâmetro desconhecido P_j por uma quantidade ΔP_j , ou seja:

$$\Delta g(t) = \sum_{j=1}^N \Delta P_j C_j(t) \quad (3.181)$$

Assim, substituindo os valores da temperatura, do termo-fonte e de h acrescidos de suas perturbações nas equações (3.18) que definem o Problema Direto, obtém-se:

$$\frac{\partial^2(T + \Delta T)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(T + \Delta T)}{\partial y^2} + (g + \Delta g) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial(T + \Delta T)}{\partial t} \quad \text{em } R, \quad t > 0 \quad (3.182)$$

$$k \frac{\partial(T + \Delta T)}{\partial N_i} + (h + \Delta h)(T + \Delta T) = 0 \quad \text{em } s_i, \quad t > 0 \quad (3.183)$$

$$T + \Delta T = 0 \quad \text{em } R, \quad t = 0 \quad (3.184)$$

Em seguida, subtraindo-se da equação (3.182) o problema direto definido pela equação (3.18), obtém-se o problema de sensibilidade definido pelas equações apresentadas a seguir:

$$\frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial y^2} + \Delta g = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial(\Delta T)}{\partial t} \quad \text{em } R, \quad t > 0 \quad (3.185)$$

$$k \frac{\partial(\Delta T)}{\partial N_i} + \Delta h(\Delta T) = 0 \quad \text{em } s_i, \quad t > 0 \quad (3.186)$$

$$\Delta T = 0 \quad \text{em } R, \quad t = 0 \quad (3.187)$$

É importante ressaltar que a função de sensibilidade $\Delta T(x, y, t)$ é a derivada direcional de $T(x, y, t)$ na direção das perturbações $\Delta g(t)$ e Δh , [Özisik e Orlande \(2000\)](#). A solução do PS pode ser obtida pelos mesmos métodos que obtém-se a solução do PD, os quais estão descritos na seção 3.2.

Por exemplo, se utilizarmos o método da Transformada Integral, obtém-se a seguinte solução:

$$\begin{aligned} \Delta T(x, y, t) = & \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^2} K(\lambda_m, x, y) \bar{\Delta} g(\lambda_m, t) + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda_m^2 t} K(\lambda_m, x, y) \\ & \left\{ \bar{F}(\lambda_m) - \frac{1}{\lambda_m^2} [\bar{\Delta} g(\lambda_m, 0)] - \frac{1}{\lambda_m^2} \int_0^t e^{\lambda_m^2 \bar{t}} \left[\frac{\partial \bar{\Delta} g}{\partial \bar{t}}(\lambda_m, \bar{t}) \right] d\bar{t} \right\} \end{aligned} \quad (3.188)$$

onde:

$$\bar{F}(\lambda_m) = \int_0^{Lx} \int_0^{Ly} K(\lambda_m, \bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \quad (3.189)$$

$$\bar{\Delta} g(\lambda_m, t) = \int_0^{Lx} \int_0^{Ly} K(\lambda_m, \bar{x}, \bar{y}) \Delta g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) d\bar{x} d\bar{y} \quad (3.190)$$

$$K(\lambda_m, x, y) = K(\beta_m, x) K(\mu_m, y) \quad (3.191)$$

$$K(\beta_m, x) = \frac{\beta_m \cos(\beta_m x) + \frac{\Delta h}{k} \sin(\beta_m x)}{\left[\frac{1}{2} \left[\left(\beta_m^2 + \frac{\Delta h^2}{k} \right) \left(1 + \frac{\frac{\Delta h}{k}}{\beta_m^2 + \frac{\Delta h^2}{k}} \right) + \frac{\Delta h}{k} \right] \right]^{1/2}} \quad (3.192)$$

$$K(\mu_m, y) = \frac{\mu_m \cos(\mu_m y) + \frac{\Delta h}{k} \sin(\mu_m y)}{\left[\frac{1}{2} \left[\left(\mu_m^2 + \frac{\Delta h^2}{k} \right) \left(1 + \frac{\frac{\Delta h}{k}}{\mu_m^2 + \frac{\Delta h^2}{k}} \right) + \frac{\Delta h}{k} \right] \right]^{1/2}} \quad (3.193)$$

$$\lambda_m^2 = \beta_m^2 + \mu_m^2 \quad (3.194)$$

3.5.1.4 Problema Adjunto

Com o intuito de minimizar o funcional objetivo, equação (3.179), as temperaturas estimadas $T(x, y, t)$ devem satisfazer uma restrição que é a solução do PD, definido pelas equações (3.18). A fim de transformar o problema de minimização com restrição em um problema sem restrição, utiliza-se na formulação do funcional objetivo o multiplicador de Lagrange, denotado por $\lambda(x, y, t)$. Este multiplicador, necessário para o cálculo da equação do vetor gradiente, é obtido através da solução do problema adjunto, PA. O PA é deduzido a partir do funcional objetivo estendido, descrito pela seguinte função:

$$S(\mathbf{P}) = \int_{t=0}^{t_f} \{Y(t) - T[x_m, y_m, t; P]\}^2 dt + \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \int_{t=0}^{t_f} \lambda(x, y, t) \left[\nabla^2 T(x, y, t) + g(t) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \right] dt dx dy \quad (3.195)$$

A expressão para a variação $\Delta S(\mathbf{P})$ do funcional $S(\mathbf{P})$ é obtida perturbando a temperatura $T(x, y, t)$ por uma quantidade $\Delta T(x, y, t)$ e $g(t)$ e h por quantidades $\Delta g(t)$ e Δh , respectivamente, na equação (3.195). Observe que $\Delta S(\mathbf{P})$ é a derivada direcional de $S(\mathbf{P})$ na direção da perturbação ΔP . Assim, substituindo os valores da temperatura, do termo-fonte e de h acrescidos de suas perturbações na equação (3.18) que define o Problema Direto, obtém-se:

$$\Delta S(\mathbf{P}) = \int_{t=0}^{t_f} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} 2 T(x_m, y_m, t; P) - Y(t) \Delta T(x, y, t) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) dx dy dt + \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \int_{t=0}^{t_f} \lambda(x, y, t) \left[\nabla^2 \Delta T(x, y, t) + \Delta g(t) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \right] dt dx dy$$

(3.196)

Pode-se simplificar a segunda integral do lado direito da equação (3.196) integrando por partes e utilizando as condições iniciais e de contorno do problema de sensibilidade. Assim a equação (3.196) transforma-se na seguinte equação:

$$\begin{aligned} \Delta S(\mathbf{P}) = & \int_{t=0}^{t_f} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \nabla^2 \lambda(x, y, t) + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \lambda(x, y, t)}{\partial t} \\ & + 2 T(x_m, y_m, t; P) - Y(t) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \Delta T(x, y, t) dx dy dt \\ & + \int_{t=0}^{t_f} \lambda(0, y, t) \Delta T(0, y, t) dt - \int_{t=0}^{t_f} \lambda(L_x, y, t) \Delta T(L_x, y, t) dt \\ & + \int_{t=0}^{t_f} \lambda(x, 0, t) \Delta T(x, 0, t) dt - \int_{t=0}^{t_f} \lambda(x, L_y, t) \Delta T(x, L_y, t) dt \\ & + \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \lambda(x, y, t_f) \Delta T(x, y, t_f) dt + \int_{t=0}^{t_f} \lambda(x_0, y_0, t) \Delta g(t) dt \end{aligned} \quad (3.197)$$

O problema de valor de contorno para o multiplicador de Lagrange é obtido tomando as quatro primeiras integrais do lado direito da equação (3.197) iguais a zero. Obtém-se assim o seguinte PA:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \lambda(x, y, t) + 2 [T(x_m, y_m, t; q) - Y(t)] \delta(x - x_m) \delta(y - y_m) &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \lambda(x, y, t)}{\partial t} \\ k \frac{\partial \lambda(x, y, t)}{\partial N_i} + h(\lambda(x, y, t)) &= 0 \quad s_i, \quad t > 0 \\ \lambda(x, y, t_f) &= 0 \quad \text{em } R, t = t_f \end{aligned} \quad (3.198)$$

3.5.1.5 Equação Gradiente

Ao assumir que os termos da equação (3.197) contendo $\Delta T(x, y, t)$ se anulam, obtém-se a seguinte expressão:

$$\Delta S(\mathbf{P}) = \int_{t=0}^{t_f} \lambda(x_0, y_0, t) \Delta g(t) dt \quad (3.199)$$

e substituindo $\Delta g(t)$ na forma paramétrica dada pela perturbação da equação (3.180) na equação (3.199) obtém-se

$$\Delta S(\mathbf{P}) = \sum_N^{j=1} \int_{t=0}^{t_f} \lambda(x_0, y_0, t) C_j(t) dt \Delta P_j \quad (3.200)$$

Entretanto por definição a derivada direcional de $S(\mathbf{P})$ na direção do vetor $\Delta \mathbf{P}$ é dada pela seguinte equação:

$$\Delta S(\mathbf{P}) = \sum_{j=1}^N [\nabla S(\mathbf{P})]_j \Delta P_j \quad (3.201)$$

onde $\Delta \mathbf{P} = [\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_N]$. Portanto, comparando a equação (3.200) e (3.201) obtém-se a $j^{\text{ésima}}$ componente do vetor gradiente $\nabla S(\mathbf{P})$ para a função $S(\mathbf{P})$ como:

$$[\nabla S(\mathbf{P})]_j = \int_{t=0}^{t_f} \lambda(x_0, y_0, t) C_j(t) dt \quad \text{para } j = 1, \dots, N \quad (3.202)$$

3.5.1.6 Processo Iterativo

O procedimento iterativo do MGC para minimizar a função objetivo $S(\mathbf{P})$ é dado pela seguinte expressão:

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + \beta^k d^k \quad (3.203)$$

onde β^k é o tamanho do passo de busca, d^k é a direção de declínio e o índice k é o número de iterações. A direção de declínio é uma conjugação do vetor gradiente, $\nabla S(\mathbf{P}^k)$, calculada por:

$$d^k = \nabla S(\mathbf{P}^k) + \gamma^k d^{k-1} \quad (3.204)$$

O coeficiente de conjugação, γ^k , pode ser calculado pela expressão de Fletcher-Reeves, Özisik e Orlande (2000), dada por:

$$\gamma^k = \frac{\sum_{j=1}^N [\nabla S(\mathbf{P}^k)]_j^2}{\sum_{j=1}^N [\nabla S(\mathbf{P}^{k-1})]_j^2} \quad (3.205)$$

com $\gamma^0 = 0$, observando que $[\nabla S(\mathbf{P}^k)]_j$ é o $j^{\text{ésimo}}$ componente do vetor gradiente calculado na iteração k e são calculados usando a equação (3.201). O tamanho do passo de busca β^k é escolhido de tal modo que minimiza a função $S(\mathbf{P})$ a cada iteração k , ou seja:

$$\min_{\beta^k} S(\mathbf{P}^{k+1}) = \min_{\beta^k} \int_0^{t_f} [Y(t) - T(x_m, y_m, t; \mathbf{P}^k + \beta^k d^k)]^2 dt \quad (3.206)$$

Linearizando a estimativa da temperatura com uma expansão em séries de Taylor e realizando a minimização descrita na equação (3.206), encontra-se a seguinte expressão para β^k :

$$\beta^k = \frac{\int_0^{t_f} [T(x_m, y_m, t; \mathbf{P}^k) - Y(t)] \Delta T(x_m, y_m, t; \mathbf{d}^k) dt}{\int_0^{t_f} [\Delta T(x_m, y_m, t; \mathbf{d}^k)]^2 dt} \quad (3.207)$$

onde $\Delta T(x_m, y_m, t; \mathbf{d}^k)$ é a solução do PS descrito pela equação (3.185), obtida fixando $\Delta P_j = d_j^k$, para $j = 1, \dots, N$ no cálculo da função $\Delta g(t)$ descrita pela equação (3.181).

3.5.1.7 Critério de Parada

O critério de parada é baseado no Princípio da Discrepância, quando o desvio padrão das medidas σ é a priori conhecido, e descrito por:

$$S(\mathbf{P}) < \epsilon \quad (3.208)$$

onde $S(\mathbf{P})$ é calculado com a equação (3.179). A tolerância ϵ é obtida assumindo que:

$$|Y(t) - T(x_m, y_m, t; \mathbf{P})| \approx \sigma \quad (3.209)$$

onde σ é o desvio padrão dos erros medidos, o qual neste caso é assumido ser constante. Assim a tolerância ϵ é determinada como:

$$\epsilon = \sigma^2 t_f \quad (3.210)$$

3.5.1.8 Algoritmo Computacional

Suponha que as medidas de temperaturas $\mathbf{Y}=(Y_1, Y_2, \dots, Y_I)$ são dadas para os seguintes passos de tempo t_i , $i = 1, \dots, I$ e um dado inicial do parâmetro $\mathbf{P}^0$ é conhecido para os vetor de parâmetros $\mathbf{P}$. Para $k = 0$ fixo escreva:

Passo 1: Calcula-se $g(t)$ de acordo com a equação (3.180) e resolve-se o PD dado pelas equações (3.18), (3.19), (3.20), (3.21), (3.22) e (3.23) com o intuito de encontrar a

Temperatura $T(r, t)$.

Passo 2: Verifica-se o controle de parada descrito na equação (3.208). Continua-se este não é satisfeito.

Passo 3: A partir da solução do PD calcula-se a temperatura $T(x_m, y_m, t)$ em (x_m, y_m) , local onde está posicionado o sensor. Conhecendo-se $T(x_m, y_m, t)$ e os dados $Y(t)$ observados no sensor resolve-se o PA dado pela equação (3.198) a fim de encontrar $\lambda(x_0, y_0, t)$.

Passo 4: Conhecendo-se $\lambda(x_0, y_0, t)$, calcula-se cada componente do vetor gradiente $\nabla S(\mathbf{P})$ a partir da equação (3.202).

Passo 5: Conhecendo-se o vetor gradiente $\nabla S(\mathbf{P})$ calcula-se γ^k descrito pela equação (3.205) e então a direção de declínio d^k pela equação (3.204).

Passo 6: Fixando-se $\Delta P^k = d^k$ calcula-se $\Delta g(t)$ pela equação (3.181) e então resolve-se o PS dado pela equação (3.185) a fim de obter $\Delta T(x_m, y_m, t; d^k)$.

Passo 7: Conhecendo-se $\Delta T(x_m, y_m, t; d^k)$ calcula-se o tamanho do passo de busca β_k de acordo com a equação (3.207).

Passo 8: Sabendo-se o tamanho do passo de busca β_k e d_k calcula-se a nova estimativa para $\mathbf{P}^{(k+1)}$ pela equação (3.203). Troca-se k por $k + 1$ e retorna-se a Passo 1.

Toda essa rotina pode ser implementada em uma linguagem computacional e gerada com o auxílio de software como o MATLAB[®]. Woodbury (2003) possui exemplos de implementação desta rotina com o auxílio do software MATLAB[®] para problemas de condução de calor em regime permanente os quais podem ser adaptados para o regime transiente.

3.5.1.9 Uso de Múltiplos Sensores

O algoritmo computacional pode ser aplicado, com poucas modificações, para o caso onde ocorre a leitura de M sensores para a análise inversa. Neste caso, a função objetivo, equação (3.179), é modificada para:

$$S(\mathbf{P}) = \sum_{m=1}^M \int_{t=0}^{t_f} \{Y_m(t) - T[x_m, y_m, t; \mathbf{P}]\}^2 dt \quad (3.211)$$

onde $Y_m(t)$ são medidas de temperatura de um sensor posicionado em (x_m, y_m) ao longo do domínio do tempo, para $m = 1, \dots, M$.

Como a função objetivo aparece no desenvolvimento do PA, este também necessita ser modificado para acomodar as leituras dos múltiplos sensores. A EDP para o PA descrita na equação (3.198) torna-se a seguinte expressão:

$$\nabla^2 \lambda(x, y, t) + 2 \sum_{m=1}^M [T(x_m, y_m, t; P) - Y(t)] \delta(x - x_m) \delta(y - y_m) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \lambda(x, y, t)}{\partial t} \quad (3.212)$$

A função objetivo aparece também no desenvolvimento do tamanho do passo de busca, equação (3.207), e na tolerância para o critério de parada, equação (3.210). Escrevendo tais equações para a leitura de múltiplos sensores tem-se as seguintes expressões:

$$\beta^k = \frac{\sum_{m=1}^M \int_0^{t_f} [T(x_m, y_m, t; \mathbf{P}^k) - Y(t)] \Delta T(x_m, y_m, t; \mathbf{d}^k) dt}{\sum_{m=1}^M \int_0^{t_f} [\Delta T(x_m, y_m, t; \mathbf{d}^k)]^2 dt} \quad (3.213)$$

$$\epsilon = M \sigma^2 t_f \quad (3.214)$$

3.5.2 Análise de Sensibilidade

A matriz de Sensibilidade é definida pela matriz Jacobian, $J(P)$, formada pelas derivadas parciais de primeira ordem da função vetorial de temperatura em relação ao vetor de parâmetros P , e pode ser denotada como segue, [Özisik e Orlande \(2000\)](#):

$$J(P) = \frac{\partial T^T(P)}{\partial P} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial P_1} & \frac{\partial T_1}{\partial P_2} & \frac{\partial T_1}{\partial P_3} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial P_N} \\ \frac{\partial T_2}{\partial P_1} & \frac{\partial T_2}{\partial P_2} & \frac{\partial T_2}{\partial P_3} & \cdots & \frac{\partial T_2}{\partial P_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_I}{\partial P_1} & \frac{\partial T_I}{\partial P_2} & \frac{\partial T_I}{\partial P_3} & \cdots & \frac{\partial T_I}{\partial P_N} \end{bmatrix} \quad (3.215)$$

onde N é o número total de parâmetros não conhecidos e I é o número de medidas. O coeficiente de sensibilidade $J_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial P_j}$ é uma medida de estimar a sensibilidade da temperatura estimada T_i com respeito à mudança dos Parâmetros P_j . Pequenos valores de J_{ij} indicam que grandes mudanças em P_j produz em pequena mudança em T_i . Neste caso a estimação do parâmetro P_j é extremamente difícil pois basicamente o mesmo valor de temperatura seria obtido por um vasto intervalo de P_j .

[Beck e Arnold \(1977\)](#) analisaram o cálculo e o uso de coeficientes de sensibilidade

em problemas de condução de calor, demonstrando como estes fornecem informações sobre os efeitos dos parâmetros nas respostas dos modelos. De fato, quando os J_{ij} são pequenos tem-se $|J^T J| \approx 0$ e consequentemente o problema inverso está mal-condicionado e ainda $|J^T J| = 0$ se alguma coluna de J pode ser expressa como a combinação linear das outras colunas. Portanto é desejável os J_{ij} sejam linearmente independentes com grandes valores tornando-se assim o PI não muito sensível a erros.

A maximização de $|J^T J|$ é geralmente proposta em ordem de descrever experimentos otimizados para estimativa de parâmetros não conhecidos, devido à região de confiança das estimativas estar minimizada. Em geral, a variação do tempo dos coeficientes de sensibilidade e do $|J^T J|$ devem ser examinadas antes de uma solução para o PI ser aplicada. Esta verificação pré-solução permite a indicação da melhor posição de alocação dos sensores bem como medidas de tempo adequadas, por meio da independência linear dos coeficientes de sensibilidade e de grandes magnitudes de $|J^T J|$.

3.5.2.1 Método para Determinar o Coeficiente de Sensibilidades

Existem várias abordagens diferentes para o cálculo do coeficiente de sensibilidades, como por exemplo, a solução direta, o problema de valores de contorno e a aproximação em diferenças finitas, [Özisik e Orlande \(2000\)](#). A seguir aborda-se a solução direta para a determinação do coeficiente de sensibilidade a qual será utilizada neste trabalho.

Solução Direta Analítica para a Determinação do Coeficiente de Sensibilidade.

Se o problema de condução de calor é linear e possui solução, o coeficiente de sensibilidade com respeito ao parâmetro desconhecido P_j é determinado pela diferenciação da solução com respeito aos parâmetro P_j . Ilustra-se esta abordagem considerando a solução do problema de condução de calor utilizando a transformada integral dada pela equação (3.146) e reescrito a seguir para o caso unidimensional para $f_i(x, t) = 0$ e $F(x) = 0$.

$$T(x_m, t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha \beta_m^2 t} \frac{\cos(\beta_m x) + \frac{h}{\beta_m} \operatorname{sen}(\beta_m x)}{\left[(\beta_m^2 + h^2) \left(l + \frac{h}{\beta_m^2 + h^2} \right) + h \right]}$$

$$\frac{\alpha}{k} \left\{ \int_0^t e^{\alpha \beta_m^2 \bar{t}} \left(\int_0^l g(\bar{t}) \frac{\cos(\beta_m x) + \frac{h}{\beta_m} \operatorname{sen}(\beta_m x)}{\left[(\beta_m^2 + h^2) \left(l + \frac{h}{\beta_m^2 + h^2} \right) + h \right]} dx \right) d\bar{t} \right\} \quad (3.216)$$

onde β_m são os autovalores e devem satisfazer: $\tan(\beta_m l) = \frac{2h}{(\beta_m^2 - h^2)}$. Suponha que $g(t)$ possa ser parametrizada pela equação (3.180); para encontrar uma expressão analítica para o coeficiente de sensibilidade basta substituir a equação (3.180) em (3.216) e diferenciar a expressão resultante com respeito ao parâmetro P_j , encontrando assim a expressão para o coeficiente de sensibilidade como a seguinte equação:

$$J_j = \frac{\partial T}{\partial P_j} = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha \beta_m^2 t} \frac{\cos(\beta_m x) + \frac{h}{\beta_m} \operatorname{sen}(\beta_m x)}{\left[(\beta_m^2 + h^2) \left(l + \frac{h}{\beta_m^2 + h^2} \right) + h \right]} \\ \frac{\alpha}{k} \left\{ \int_0^t e^{\alpha \beta_m^2 \bar{t}} \left(\int_0^l C_j(\bar{t}) \frac{\cos(\beta_m x) + \frac{h}{\beta_m} \operatorname{sen}(\beta_m x)}{\left[(\beta_m^2 + h^2) \left(l + \frac{h}{\beta_m^2 + h^2} \right) + h \right]} dx \right) d\bar{t} \right\} \quad (3.217)$$

O problema inverso pode ser considerado linear pois o coeficiente de sensibilidade não depende de P_j .

4 Materiais e Métodos

4.1 Máquina Ferramenta

Os ensaios experimentais foram realizados em um centro de usinagem vertical Romi modelo Discovey 560. O curso máximo do eixo X é de 560 mm, do eixo Y é de 406 mm e do eixo Z é 508 mm. As especificações técnicas definem o avanço rápido máximo em X e Y de 30 m/min e em Z de 20 m/min possuindo um avanço máximo programável de 15 m/min. O eixo-árvore cone ISO 40 fornece 12,5 kW, com faixa de velocidade do cabeçote de até 7.500 rpm. O CNC, comando numérico computadorizado, é SIEMENS 810D.

4.2 Ferramenta

A ferramenta utilizada no ensaio é uma fresa com haste cilíndrica de 32 mm de diâmetro com capacidade para 3 arestas de corte com pastilhas intercambiáveis fornecida pela Sandvik Coromat (R245-032A32-12M e insertos: R245-12 T3 M-PM 1010). No entanto para os ensaios foi utilizada apenas uma aresta de corte para simplificar a modelagem matemática. A figura 4.1 ilustra sua geometria e a tabela 4.1 mostra suas principais características.

4.3 Equipamento Utilizado no Sistema de Refrigeração por Névoa - MQL

O equipamento utilizado é o Accue-Lubre da empresa ITW ROCOL. A figura 4.2 ilustra a unidade de controle, onde são feitas a dosagem de óleo e a regulação da vazão de ar comprimido. Para a aplicação em MQL o equipamento possui duas mangueiras distintas conduzindo o ar comprimido e o óleo.

Figura 4.1: Geometria da fresa e Pastilha

Tabela 4.1: Dimensões da Figura 4.1

Ferramenta			
Parâmetros	Valores	Parâmetros	Valores
z	1	s	3,97 mm
D_{c2}	44,5 mm	b_s	2 mm
D_c	32 mm	iC'	13,4 mm
dm_m	32 mm	r_e	1,5 mm
l_2	120 mm	l_a	10 mm
l_3	39 mm	γ	21°
a_p (máximo)	6 mm		
rpm (máximo)	18250		
κ_r	45 °		
tamanho da pastilha (l)	12		

Os bicos de aspersão que acompanham o equipamento são compostos de mangueiras articuláveis para direcionar o fluido e podem ser fixados por meio de imãs. A vazão de óleo foi ajustada para 15 ml/h a uma pressão de 4,5 bar de fluxo de ar, seguindo as recomendações para MQL ($< 30\text{ml/h}$) de acordo com [Braga et al. \(2002\)](#)

4.3.1 Fluidos

Com o intuito de testar o sistema de avaliação de fluidos de corte foram utilizados dois fluidos para o sistema em MQL e dois fluidos para o sistema em inundação, a seguir, encontram-se as características destes fluidos e denominações que iremos utilizar durante o decorrer do texto:

Figura 4.2: **Accu-Lube**: 1. Reservatório de óleo com capacidade de 300 ml; 2. Conector; 3. Saída para o bico aspersor de Ar; 4. Saída para o bico aspersor de fluido; 5. Válvula de controle do fluxo de Ar; 6. Caixa Metálica; 7. Controle da entrada de fluido; 8. Filtro de Ar e Manômetro; 9. Bomba de pressão; 10. Válvula de controle manual (liga/desliga); 11. Entrada de Ar; 12. Regulador de frequência de gota de fluido.

- **MQL 1:** Óleo Integral Mineral - Foi utilizado em MQL com vazão de 15 ml/h com fluxo de ar de $70 \text{ m}^3/\text{h}$ e pressão de 4 bar.
- **MQL 2 :** Vascomill 22TM - é um fluido de corte parcialmente à base de ésteres sintéticos (matéria prima vegetal), não miscível em água. É adequado para fresamento de ligas de aço. Foi utilizado em MQL com vazão de 15 ml/h com fluxo de ar de $70 \text{ m}^3/\text{h}$ e pressão de 4 bar.
- **Fluido 1:** - Blasocut BC 35 KOMBITM - é um fluido de corte à base de óleo mineral, miscível em água e isento de cloro. Utilizado para operações de usinagem e de retificação em ferro fundido, aço, alumínio e ligas de cobre. Utilizado na proporção de 15 % (4,5 litros de fluido diluídos em 30 litros de água) no sistema de refrigeração por inundação.
- **Fluido 2 :** Vasco 1000TM - é um fluido de corte à base de óleo vegetal e miscível em água desenvolvido para operações de usinagem em ferro fundido e aço, entre outros. Foi utilizado no sistema de refrigeração por inundação na proporção de 15 % (4,5 litros de fluido diluídos em 30 litros de água).

Os fluidos descritos anteriormente foram escolhidos de acordo com a recomendação para o fresamento de aço, [Ferraesi \(1982\)](#), e são fabricado pela Blaser Swissslube AG com exceção do MQL 1. A Tabela 4.2 descreve as propriedades químicas e físicas destes fluidos.

Tabela 4.2: Propriedades dos Fluidos

Propriedades	MQL 1	MQL 2	Fluido 1	Fluido 2
Viscosidade a $40^{\circ}C$ [mm^2/s]	18	22	59	56
Densidade a $20^{\circ}C$ [g/cm^3]	0,92	0,9	0,95	0,95
Parte Vegetal ou Mineral	100% mineral	83% vegetal	59% mineral	45% vegetal

4.4 Corpo de Prova

O corpo de prova (CP) foi confeccionado em Aço AISI 4340 temperado a uma dureza entre 49 a 50 HRC; a composição química típica deste aço é apresentada na tabela 4.3 e suas propriedades térmicas na tabela 4.4

Tabela 4.3: Composição química do aço AISI 4340

Elemento Químico	Proporção
Carbono	0,37 a 0,43 %
Silício	0,15 a 0,3%
Manganês	0,6 a 0,8%
Fósforo	< 0,035%
Enxofre	< 0,04%
Cromo	0,7 a 0,9%
Molibdênio	0,2 a 0,3%

Fonte: [MatWeb \(2010\)](#)

Tabela 4.4: Propriedades Térmicas do aço AISI 4340

Calor Específico c_p [$J/kg^{\circ}C$]	Condutividade Térmica k [$W/m^{\circ}C$]	Densidade ρ [kg/m^3]	difusividade Térmica α [m^2/s]
475	44,5	7850	$1,18 \cdot 10^{-5}$

Fonte: [Coelho, Eu-Gen e Elbestawi \(2007\)](#)

A figura 4.3 ilustra as cotas do corpo de prova e as posições dos furos onde foram alocados os termopares. O desenho ilustrativo da geometria do corpo de prova em 3D pode ser observada na figura 4.4.

Com o intuito de mapear a distribuição de temperatura na peça e procurando-se adequar ao modelo matemático em um plano, os termopares foram distribuídos uniformemente em 12 furos no plano a ser estudado. Para facilitar a análise comparativa dos dados, os termopares foram sempre alocados na mesma posição (x, y) da peça, a tabela

Figura 4.3: Vista superior com os furos de alocação dos termopares

4.5 mostra a nomenclatura dos termopares de acordo com a posição no plano xy a ser analisado.

A figura 4.5 mostra o posicionamento dos termopares em relação ao movimento da ferramenta, pode-se observar que a cada volta a ferramenta passa primeiramente pelos

Figura 4.4: Geometria do corpo de prova

Tabela 4.5: Posicionamento e nomenclatura dos Termopares

Lateral 1 $y = 3mm$		Centro $y = 8mm$		Lateral 2 $y = 13mm$	
Termopar	Posição	Termopar	Posição	Termopar	Posição
T1	(4, 3)	T9	(16, 8)	T5	(4, 13)
T2	(27, 3)	T10	(39, 8)	T6	(27, 13)
T3	(50, 3)	T11	(62, 8)	T7	(50, 13)
T4	(73, 3)	T12	(85, 8)	T8	(73, 13)

termopares da Lateral 1, depois pelos termopares centrais e por último pelos termopares da Lateral 2.

Figura 4.5: Posicionamento e Movimento da Fresa em relação a Peça e Termopares

A bancada de ensaios foi montada para obter, simultaneamente, medidas de tem-

peratura do corpo de prova e de forças do processo de fresamento. Sobre a mesa da máquina-ferramenta fixa-se o dinamômetro e sobre este o dispositivo o corpo de prova, conforme ilustra a figura 4.6.

Figura 4.6: Diagrama esquemático do Ensaio: 1. Eixo, 2. Bico Aspersor (Saída de fluido) 3. Fresa, 4. Peça, 5. Mesa da Máquina, 6. Dinamômetro, 7. Amplificador Digital, 8. Termopares 9. Transmissor TxBlock, 10. Filtro passa Baixa, 11. Interface, 12. Computador.

Fotos ilustrativas [N.1](#) e [N.2](#)

A leitura dos dados foi realizada através do software Labview 7.2. quando os dezesseis sinais são enviados à placa de aquisição, ficando, então, acessíveis ao software. Criou-se uma rotina de aquisição (Apêndice B) na qual o sinal é convertido no valor correspondente de temperatura, e armazenado em um arquivo txt. Os equipamentos hardware e software são da empresa National Instruments.

4.5 Equipamentos para Medição de Temperatura

A medição da temperatura foi realizada pela técnica do termopar inserido, utilizando termopares do tipo K (níquel-alumínio / níquel-cromo). A soldagem da ponta do termopar é feita em atmosfera inerte com arco elétrico. A composição química destas ligas é: Cromel 90 % de níquel e 10 % de cromo; Alumel 95,4 % de níquel, 1,8 % de manganês

1,6 % de silício e 1,2 % de alumínio. Para aquisição das temperaturas os termopares, foram ligados a amplificadores modelo Tx-Block da empresa Novus. Este equipamento faz aquisição de sinais de 0-50 mV de termopares, linearizando-os e transformando o sinal em 4-20 mA. Com termopares o erro de linearidade é de 0,3 % da escala máxima. O dispositivo também tem compensação de junta fria, para termopares. A montagem do transmissor foi realizada conforme indicado na figura 4.7.

Figura 4.7: Transmissor Tx-Block

A aquisição da queda de tensão na resistência foi realizada ligando os terminais da mesma ao bloco conector SCB-68 o qual é ligado à placa de aquisição PCI-6220, instalada em um microcomputador, por meio de um cabo SHC68-68-EPM.

Os termopares em geral geram sinais na ordem de micro volts e para atenuar ruídos, usou-se um filtro passa-baixa. Para a calibração dos termopares foi utilizado um banho termostático com faixa de temperatura entre -60° a 250°C . A calibração ocorreu na faixa de temperatura esperada em que os termopares deveriam atuar, de acordo com dados de Aneiro, Coelho e Brandão (2008) e Matsumoto (1987), valores entre 20 a 95°C . Os resultados e detalhes do procedimento de calibração encontram-se no Apêndice C.

Os dados foram adquiridos como valores de temperatura para os doze termopares em função do tempo de aquisição, o qual depende de parâmetros de corte utilizados.

4.6 Equipamentos para Medição de Força

O conjunto de medição de força é composto por um dinamômetro Kistler Quartz 4 componentes - Tipo 9272 e por um amplificador de carga multicanal modelo 5019 B também da marca Kistler que possibilita o ajuste de parâmetros individuais para cada um dos quatro canais, trabalhando com uma faixa de tensão para os sinais de ± 10 volts. O dinamômetro fornece a medida dinâmica e quasi-estática das componentes ortogonais

da força (F_x , F_y , F_z) agindo sobre qualquer direção na peça.

A aquisição dos sinais da temperatura e da força foi realizada simultaneamente por uma rotina computacional utilizando o software LabView. A aquisição foi realizada em uma taxa de 100 pontos por segundo. Esta rotina armazena os dados em um arquivo txt. Posteriormente estes dados foram convertidos em gráficos de temperatura e forças em outra rotina computacional utilizando o software MATLAB[®].

4.7 Planejamento Experimental

4.7.1 Ensaio Experimental de Usinagem

Os ensaios experimentais foram organizados para realizar 30 condições diferentes, denominadas C1 a C30, conforme a tabela 4.6. A profundidade de corte, $a_p = 0,4$ mm e o avanço, $f_z = 0,1$ mm foram os mesmos para todas as condições e encontram-se dentro dos limites recomendados pelo fabricante da ferramenta, bem como a variação de velocidade. As velocidades de corte, $v_{100}=100$ m/min, $v_{150}=150$ m/min e $v_{200}=200$ m/min, foram escolhidas com o objetivo de avaliar a hipótese de HSM e também proporcionar fontes de calor de diferentes intensidades. As velocidades de avanço são $v_{f100}=100$ mm/min, $v_{f150}=150$ mm/min e $v_{f200}=200$ mm/min.

A fim de diversificar também as dimensões do coeficiente de transferência convectiva, foram utilizados dois tipos de Fluidos em MQL e dois tipos de Fluidos em sistema inundado. Os sistema de refrigeração denominados h_1 , h_2 e h_3 , são: h_1 sistema sem fluido, $h_{2,1}$ sistema em MQL com fluido 1, $h_{2,2}$ sistema em MQL com fluido 2, $h_{3,1}$ sistema inundado com fluido 1 e $h_{3,2}$ sistema inundado com fluido 2. Foram utilizados cinco corpos de prova semelhantes, sendo que para cada corpo foram realizados seis ensaios com o mesmo sistema de refrigeração e profundidade de usinagem progressivas com passos de 0,4 mm. Assim ocorreram 6 cortes no mesmo CP com distâncias $d_{2,6}=2,6$ mm, $d_{2,2}=2,2$ mm, $d_{1,8}=1,8$ mm, $d_{1,4}=1,4$ mm, $d_{1,0}=1,0$ mm e $d_{0,6}=0,6$ mm entre o plano de corte e aquele contendo os termopares.

A tabela 4.6 mostra os demais valores e a combinação desses parâmetros.

Tabela 4.6: Nomenclatura das condições de usinagem de acordo com o sistema de refrigeração, as velocidade de corte e de avanço e do tempo de corte

Ensaio	Condição	Distância do Termopar	Sistema de Refrigeração	Velocidade de Corte	Velocidade de Avanço (avanço, f (mm/rev))	Tempo de Corte [s]
E1	C1	$d_{2,6}$	h ₁	v ₁₀₀	v _{f100} (0,1)	t _{c60}
E4	C2	$d_{1,4}$				
E7	C3	$d_{2,6}$	h _{2,1}			
E10	C4	$d_{1,4}$				
E19	C5	$d_{2,6}$	h _{2,2}			
E22	C6	$d_{1,4}$				
E13	C7	$d_{2,6}$	h _{3,1}			
E16	C8	$d_{1,4}$				
E25	C9	$d_{2,6}$	h _{3,2}			
E28	C10	$d_{1,4}$				
E2	C11	$d_{2,2}$	h ₁	v ₁₅₀	v _{f150} (0,1)	t _{c40}
E5	C12	$d_{1,0}$				
E8	C13	$d_{2,2}$	h _{2,1}			
E11	C14	$d_{1,0}$				
E20	C15	$d_{2,2}$	h _{2,2}			
E23	C16	$d_{1,0}$				
E14	C17	$d_{2,2}$	h _{3,1}			
E17	C18	$d_{1,0}$				
E26	C19	$d_{2,2}$	h _{3,2}			
E29	C20	$d_{1,0}$				
E3	C21	$d_{1,8}$	h ₁	v ₂₀₀	v _{f200} (0,1)	t _{c30}
E6	C22	$d_{0,6}$				
E9	C23	$d_{1,8}$	h _{2,1}			
E12	C24	$d_{0,6}$				
E21	C25	$d_{1,8}$	h _{2,2}			
E24	C26	$d_{0,6}$				
E15	C27	$d_{1,8}$	h _{3,1}			
E18	C28	$d_{0,6}$				
E27	C29	$d_{1,8}$	h _{3,2}			
E30	C30	$d_{0,6}$				

4.7.2 Ensaios para a Estimativa do Coeficiente de Transferência Convectiva de Calor (h)

A figura 4.8 é um diagrama esquemático do ensaio experimental para a obtenção do coeficiente de transferência convectiva de calor em regime permanente adaptado do método empírico encontrado em [Incropera e Witt \(1992\)](#), pag. 176. Para este ensaio utilizou-se uma placa plana de aço 4340 (figura 4.9) com dimensões 51x43,8x3 mm a qual foi submetida ao escoamento paralelo de fluido refrigerante e simultaneamente ao aquecimento elétrico com o intuito de manter a temperatura da superfície T_s maior que T_∞ , onde T_∞ é a temperatura do fluido.

Figura 4.8: Diagrama esquemático do Ensaio para a obtenção do coeficiente de transferência convectiva: 1. Placa de aço 4340, 2. Caixa isolante, 3. Sistema de refrigeração, 4. Termopares, 5. Transmissor TxBLOCK, 6. Filtro Passa baixa, 7. Interface, 8. Computador, 9. Resistência, 10. Variac, 11. Multímetro.

As temperaturas T_s e T_∞ foram medidas por meio do mesmo sistema de aquisição de temperatura (figura 4.8 itens 4 a 8). A temperatura da superfície da placa foi medida em três pontos, onde estavam localizados os termopares T_1 , T_2 e T_3 conforme mostra a figura 4.9. O valor de T_s utilizado na estimativa foi calculado pela média aritmética destes

três valores. O sistema de aquecimento elétrico é formado por um resistor de Nikrothal-80 ($3,7\Omega/m$) (figura 4.8 item 9) alimentada por uma tensão controlada por um resistor ajustável (figura 4.8 item 10). Para estimar a quantidade de calor entrando na peça a corrente foi medida por meio de um multímetro Marca Fluke modelo 89 Série IV (figura 4.8 item 11). A partir dos dados de temperatura, potência elétrica e da área da placa utilizando a lei de resfriamento de Newton (equação (2.49)) pode-se calcular o coeficiente de transferência convectiva médio deste sistema.

Figura 4.9: Geometria da placa de aço 4340 e localização dos furos de inserção dos termopares

Este ensaio foi realizado para os três sistemas de refrigeração e seus respectivos fluidos com o intuito de comparar o coeficiente de transferência convectiva médio experimental com o calculado pelo método analítico apresentado neste trabalho. Estes ensaios foram organizados e idealizados com o objetivo de reproduzir a transferência convectiva no contorno da peça ao ser usinada. Desta forma proporcionou-se o aquecimento interno da placa introduzindo calor por meio da potência elétrica calculada como:

$$P = E \cdot I \quad (4.1)$$

onde E é a Tensão em Volts e I é a corrente em Ampers. Os valores descritos na tabela 4.7 foram adotados como dados de entrada do aquecimento da placa para cada sistema de refrigeração, considerando-se que toda a energia elétrica foi transformada em calor. Deste modo, foram realizados cinco ensaios variando a corrente de 0,15 a 0,9 A, e tensão de 4 a 20 V. Para cada ensaio foram medidas também as temperaturas na superfície da peça e a temperatura do fluido em três pontos, a partir da média destas temperaturas e utilizando-se a Lei de Newton do resfriamento (equação (2.49)) calculou-se o coeficiente

médio de transferência convectiva para cada condição de refrigeração. Os detalhes dos dados obtidos nesse ensaio encontram-se no apêndice D.

Tabela 4.7: Variação da Corrente e Tensão dos Ensaio

Corrente [V]	0,15	0,3	0,45	0,6	0,75	0,9
Tensão [A]	4	7	10	15	18	20

4.8 Modelagem da Fonte de Calor

O ensaio de usinagem descrito no capítulo 4.7 será analisado como o problema físico, considerando a peça como um sólido finito (retangular) com fronteiras convectivas e a deformação plástica do cavaco e o atrito do cavaco com a superfície de saída da ferramenta; como fonte de calor gerada dentro do volume de controle, este problema físico é modelado analiticamente pelas equações (3.18) que descrevem matematicamente a condução de calor durante o processo de fresamento. A fim de simplificar o modelo, toma-se a equação adimensional (3.152). Com o intuito de apresentar uma solução para este problema deve-se primeiramente modelar a geometria da fonte de calor.

O processo de fresamento realizado nos ensaios experimentais é denominado faceamento. A figura 4.10 ilustra a geometria da fonte de calor durante o corte de metal no processo de faceamento.

Figura 4.10: Geometria da Fonte de Calor

As dimensões da geometria da fonte de calor foram calculadas utilizando a teoria da termomecânica do fresamento descrita na Seção 2.2.3. Na figura 4.11 consta o diagrama esquemático de como foi realizado o cálculo da área da fonte no plano, equação (4.2), elucidando os ângulos de imersão e a geometria da fonte.

$$\begin{aligned}
A_r &= 2 \int_0^{\frac{\phi_{ext} - \phi_{int}}{2}} \left\{ \left[\left(\frac{D}{2} \sqrt{1 - \sin(\phi)^2} \right) + f_z \right] - \left[\left(\sqrt{1 - \sin(\phi)^2} \right) \frac{D}{2} \right] \right\} \frac{D}{2} \cos(\phi) d\phi \\
&= 2f_z \frac{D}{2} \int_0^{\frac{\phi_{ext} - \phi_{int}}{2}} \cos(\phi) d\phi \\
&= f_z D \sin\left(\frac{\phi_{ext} - \phi_{int}}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

onde A_r é a área entre as curvas: círculo de raio $\frac{D}{2}$ e centro $(0,0)$ e círculo de raio $\frac{D}{2}$ e centro $(0, f_z)$ variando entre os ângulos interno ϕ_{int} e externo ϕ_{ext} e D é o diâmetro da ferramenta.

A tabela 4.8 relata os dados utilizados para o cálculo e os resultados obtidos para as dimensões da geometria da fonte. A área da fonte pode ser considerada idêntica em todos os ensaios realizados pois foram utilizados corpos de provas similares, a mesma ferramenta e para cada ensaio uma pastilha nova (sem desgaste).

Figura 4.11: Diagrama Esquemático do Cálculo da Área da Fonte de Calor no Plano

Tabela 4.8: Dimensões da geometria da fonte

Ângulos de imersão (cap.2.2.3)	$\phi_{int} = 62^\circ$ e $\phi_{ext} = 117^\circ$
Espessura média do cavaco (equação (2.23))	$\bar{h}_m = 0,096 \text{ mm}$
Lado maior da fonte de calor	$b = 15 \text{ mm}$
Lado menor da fonte de calor	$a = \bar{h}_m = 0,096 \text{ mm}$
Área da Fonte de Calor (eq. (4.2))	$A_r = 1,46 \text{ mm}^2$

Para calcular a quantidade de energia gerada por unidade de tempo dentro do volume de controle, a princípio, considera-se que toda a energia de corte é convertida em calor. Esta hipótese é válida de acordo com Taylor (1937). Assume-se também que:

- O calor perdido por radiação é negligenciado em comparação com a intensidade da fonte de calor;

- As propriedades térmicas são consideradas constantes e calculadas nas temperaturas médias;
- Condições convectivas newtonianas em fluxo laminar.

Apesar de todo o estudo da termomecânica do corte no processo de fresamento, como ocorreu a aquisição de forças por meio de um dinamômetro, a taxa de calor gerado durante o processo de usinagem foi calculada a partir do gráfico das forças F_x , F_y e F_z . A figura 4.12 mostra o posicionamento das forças em relação à peça e fresa.

Figura 4.12: Posicionamento da aquisição de Forças

Desta forma tem-se como fluxo de calor fluindo através do sistema peça-ferramenta-cavaco a somatória dos trabalhos realizado por estas forças ou seja:

$$q_r = W_x + W_y + W_z \quad [J] \quad (4.3)$$

com $W_x = \int_0^L F_x dx$, onde L é o deslocamento na direção x . (W_y e W_z são obtidos de modo análogo).

Portanto o fluxo de calor do sistema q_r é calculado como sendo a área entre as curvas dos gráficos das forças F_x , F_y , F_z versus espaço e o eixo das coordenadas (considerando estas forças com valores positivos para possibilitar o cálculo da área). O cálculo da área foi realizado utilizando a ferramenta fitting tools do software MATLAB[®]. Os gráficos destas funções encontram-se no apêndice E. A figura 4.13 ilustra os gráfico típico

da aquisição de dados de força dos ensaios para os 5 primeiros avanços da ferramenta. O comportamento observado na figura 4.13 se repete durante todo o evento de aquisição dos dados de força do ensaio E1.

Figura 4.13: Gráficos da aquisição de dados das Forças F_x , F_y e F_z durante o Ensaio E1

O fluxo de calor médio que flui em cada ponto pelo qual a fonte de calor atinge a peça, será denominado por q_0 (quarta coluna da tabela 5.2), e pode ser calculado pela seguinte equação:

$$q_0 = \frac{q_r}{A_r \cdot t_c} \quad [W/m^2] \quad (4.4)$$

onde A_r é a área da fonte de calor na peça (tabela 4.8) e t_c é tempo de corte (tabela 4.6).

O parâmetro q_0 é o parâmetro inicial do MGC, P_0 , do algoritmo computacional descrito na seção 3.5.1 implementado com o auxílio do MATLAB[®] para otimizar os ensaios. O resultante destas otimizações para cada ensaio é denominado q_{otim} (quinta coluna da tabela 5.2). A partir destes resultados calculou-se o percentual de calor fluindo para peça, denominado fluxo de calor (sexta coluna da tabela 5.2).

O termo geração de calor na equação (3.152) é $\Phi = \frac{gL^2}{k(T_0 - T_\infty)}$ onde $g = g(x, y, t)$ é a função que descreve o comportamento da fonte de calor. Considerando a fonte de calor retangular com centro em (x_0, y_0) , dimensões a e b e área A_r movendo-se com velocidade $U = v_f$ e ainda assumindo diferentes distribuições de intensidade pode-se equacionar o termo geração de calor de três modo:

1. Distribuição Uniforme

$$g(x, y, t) = \begin{cases} q_0 & Ut - \frac{a}{2} < x < Ut + \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.5)$$

2. Distribuição Parabólica

$$g(x, y, t) = \begin{cases} q_0 \frac{9}{4} (1 - (\frac{y}{y_0})^2) (1 - (\frac{x}{x_0})^2) & Ut - \frac{a}{2} < x < Ut + \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.6)$$

3. Distribuição Normal ou Gaussiana

$$g(x, y, t) = \begin{cases} q_0 \frac{36}{\pi} e^{-\left(\frac{3y}{y_0}\right)^2} e^{-\left(\frac{3x}{x_0}\right)^2} & Ut - \frac{a}{2} < x < Ut + \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.7)$$

As distribuições descritas nas equações (4.5), (4.6) e (4.7) são as funções testes, $g(t)$, do MGC implementado. Para cada função teste é estudada uma solução do modelo, baseada na técnica da transformada integral, dada pelas equações (3.142). Para identificar o percentual de calor que está fluindo para a peça durante a formação do cavaco, é utilizado o MGC com Problema Adjunto para estimativa de parâmetros descrito no capítulo 3.5.1. Antes de utilizar este método é necessário uma análise dos coeficientes de sensibilidade a fim de verificar a magnitude de certeza da estimativa e a possibilidade de estimativa simultaneamente dos parâmetros.

Apresenta-se a seguir, a solução adimensional do problema físico descrito pelas equações (3.152) baseada na solução por meio do método da Transformada Integral, equação (3.146), a qual é utilizada para resolver o Problema Adjunto e o Problema de Sensibilidade, seções (3.5.1.3) e (3.5.1.4), do MGC com problema adjunto para a estimativa do parâmetro q_0 e também para construir o método analítico para estimar o coeficiente de transferência convectiva h .

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \eta, F_0) = & \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^2} K(\lambda_m, \xi, \eta) \bar{\Phi}(\lambda_m, F_0) + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda_m^2 F_0} K(\lambda_m, \xi, \eta) \\ & \left\{ \bar{F}(\lambda_m) - \frac{1}{\lambda_m^2} [\bar{\Phi}(\lambda_m, 0)] - \frac{1}{\lambda_m^2} \int_0^{F_0} e^{\lambda_m^2 \bar{F}_0} \left[\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}(\lambda_m, \bar{F}_0) \right] d\bar{F}_0 \right\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde:

$$\bar{F}(\lambda_m) = \int_0^1 \int_0^1 K(\lambda_m, \bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi} d\bar{\eta} \quad (4.9)$$

$$\bar{\Phi}(\lambda_m, F_0) = \int_0^1 \int_0^1 K(\lambda_m, \bar{\xi}, \bar{\eta}) \Phi(\bar{\xi}, \bar{\eta}, F_0) d\bar{\xi} d\bar{\eta} \quad (4.10)$$

$$K(\lambda_m, \xi, \eta) = K(\beta_m, \xi) K(\mu_m, \eta) \quad (4.11)$$

$$K(\beta_m, \xi) = \frac{\beta_m \cos(\beta_m \xi) + B_i \sin(\beta_m \xi)}{\sqrt{\frac{1}{2} \left[(\beta_m^2 + B_i^2) \left(1 + \frac{B_i}{\beta_m^2 + B_i^2} \right) + B_i \right]}} \quad (4.12)$$

$$K(\mu_m, \eta) = \frac{\mu_m \cos(\mu_m \eta) + B_i \sin(\mu_m \eta)}{\sqrt{\frac{1}{2} \left[(\mu_m^2 + B_i^2) \left(1 + \frac{B_i}{\mu_m^2 + B_i^2} \right) + B_i \right]}} \quad (4.13)$$

$$\lambda_m^2 = \beta_m^2 + \mu_m^2 \quad (4.14)$$

4.9 Estimativa do Coeficiente de Transferência convectiva pelo Método Analítico

A seguir descreve-se a construção do método analítico utilizado para a estimativa do coeficiente de transferência convectiva e como foi realizada a aplicação deste. Supondo que a série infinita da equação (4.8) converge para seu primeiro termo, $m = 1$, adota-se a seguinte aproximação da solução do problema de condução de calor:

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \eta, F_0) = & \frac{1}{k} \frac{1}{\lambda_1^2} K(\lambda_1, \xi, \eta) \bar{\Phi}(\lambda_1, F_0) + e^{-\lambda_1^2 F_0} K(\lambda_1, \xi, \eta) \\ & \left\{ \bar{F}(\lambda_1) - \frac{1}{k \lambda_1^2} [\bar{\Phi}(\lambda_1, 0)] - \frac{1}{k \lambda_1^2} \int_0^{F_0} e^{\lambda_1^2 \bar{F}_0} \left[\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}(\lambda_1, \bar{F}_0) \right] d\bar{F}_0 \right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

A convergência uniforme da série infinita da equação (4.8) é assegurada pela exigência de que a função Φ possua primeira e segunda derivada parcial contínua na variável espacial e derivada parcial contínua de primeira ordem na variável tempo F_0 , **Ölçer (1969)**. Resolvendo esta equação para valores de $\beta_1 = \mu_1$ tem-se a solução adimensional da distribuição de temperatura com fronteiras inundadas por um único fluido para uma geração de calor Φ satisfazendo as hipóteses acima, descrita como:

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \eta, F_0) = & \frac{1}{k} \frac{1}{2\beta_1^2} K(\beta_1, \xi, \eta) \bar{\Phi}(\lambda_1, F_0) + e^{-2\beta_1^2 F_0} K(\beta_1, \xi, \eta) \\ & \left\{ \bar{F}(\beta_1) - \frac{1}{2k\beta_1^2} [\bar{\Phi}(\beta_1, 0)] - \frac{1}{2k\beta_1^2} \int_0^{F_0} e^{2\beta_1^2 \bar{F}_0} \left[\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}(\beta_1, \bar{F}_0) \right] d\bar{F}_0 \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Substituindo as equações (4.12), (4.10) e (4.9) com $m = 1$ na solução (4.16) obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \Theta_{aprox}(\xi, \eta, F_0) = & \frac{(\sqrt{2}\beta_1 \cos(\beta_1 \xi) + Bi \sin(\beta_1 \xi)) (\sqrt{2}\beta_1 \cos(\beta_1 \eta) + Bi \sin(\beta_1 \eta))}{((\beta_1^2 + Bi^2) (1 + \frac{Bi}{\beta_1^2 + Bi^2}) + Bi)} \times \\ & \frac{(-Bi - \sqrt{2} \sin(\beta_1) \beta_1 + \cos(\beta_1) Bi)^2}{\beta_1^2 (\beta_1^2 + Bi^2 + 2Bi)} \left\{ \frac{\Phi}{2\beta_1^2 k} + e^{-2\beta_1^2 F_0} \left[1 - \frac{1}{2\beta_1^2 k} \int_0^{F_0} e^{2\beta_1^2 F_0^1} \left(\frac{d}{dF_0^1} \Phi \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

A aproximação dada pela equação (4.17) é fundamentada na teoria de aproximações de funções ortonormais em série de Fourier, no sentido do método dos mínimos quadrados, apêndice A.2. A partir desta teoria, apresenta-se o seguinte erro de aproximação:

$$\begin{aligned} E_{sq} = & \frac{\int_{area} [\Theta(\xi, \eta, F_0) - \Theta_{aprox}(\xi, \eta, F_0)]^2 dA}{area} \\ = & \int_0^1 \int_0^1 [\Theta(\xi, \eta, F_0) - \Theta_{aprox}(\xi, \eta, F_0)]^2 d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.18)$$

Os resultados do cálculo do erro de aproximação para cada sistema de refrigeração encontram-se delineados no apêndice H.

Agora conhecendo a temperatura em dois pontos quaisquer na superfície da peça pode-se encontrar os valores de β_1 e conseqüentemente encontra-se o coeficiente adimensional Bi e, por conseguinte h . Por exemplo, suponha que os valores experimentais de $\Theta(\xi_0, \eta_0, F_0^0)$ e $\Theta(\xi_0, \eta_0, F_0^1)$ são conhecidos, pode-se encontrar β_1 resolvendo a seguinte igualdade:

$$\frac{\Phi(F_0^0) + 2e^{-2F_0^0\beta_1^2}k\beta_1^2 - e^{-2F_0^0\beta_1^2}k \left[\int_0^{F_0^0} e^{2\beta_1^2\bar{F}_0} \left(\frac{d}{d\bar{F}_0} \Phi(\bar{F}_0) \right) d\bar{F}_0 \right]}{\Phi(F_0^1) + 2e^{-2F_0^1\beta_1^2}k\beta_1^2 - e^{-2F_0^1\beta_1^2}k \left[\int_0^{F_0^1} e^{2\beta_1^2\bar{F}_0} \left(\frac{d}{d\bar{F}_0} \Phi(\bar{F}_0) \right) d\bar{F}_0 \right]} = A_{0,1} \quad (4.19)$$

onde $\Phi(F_0^0) = \Phi(\xi_0, \eta_0, F_0^0)$ e $\Phi(F_0^1) = \Phi(\xi_0, \eta_0, F_0^1)$

A equação (4.19) depende apenas de β_1 , pois k , Φ , F_0^0 , F_0^1 and $A_{0,1}$ são dados de entrada do problema, obtidos a partir de experimentos.

A fim de encontrar o número de Biot, Bi , deve substituir o valor numérico de β_1 , obtido pela equação (4.19), na seguinte equação:

$$\tan \beta_1 = \frac{2Bi\beta_1}{\beta_1^2 - Bi^2} \quad (4.20)$$

E ainda, se a geração de calor dentro do volume de controle é uniforme, a função Φ é constante e, $\frac{d}{d\bar{F}_0} \Phi(\bar{F}_0)$ é igual a zero. Neste caso a equação (4.19) torna-se:

$$\frac{\Phi(F_0^0) + 2e^{-2F_0^0\beta_1^2}k\beta_1^2}{\Phi(F_0^1) + 2e^{-2F_0^1\beta_1^2}k\beta_1^2} = A_{0,1} \quad (4.21)$$

Em particular quando $\Phi = 0$ este método iguala-se ao método para EDP homogênea em estado permanente, veja [Incropera e Witt \(1992, pag. 106\)](#).

$$\frac{e^{-2F_0^0\beta_1^2}}{e^{-2F_0^1\beta_1^2}} = A_{0,1} \quad (4.22)$$

O coeficiente de transferência convectiva analítico foi calculado utilizando as equações (4.19) e (4.20); a equação (4.19) tem como dados de entrada a condutividade térmica k , o termo fonte de calor adimensional, Φ , dado pela equação (3.159, pag. 78) e dois dados experimentais de temperatura adimensional $\Theta(F_0^0) = \Theta(\xi_0, \eta_0, F_0^0)$ e $\Theta(F_0^1) = \Theta(\xi_0, \eta_0, F_0^1)$ para dois tempos diferentes. A função Φ depende das temperaturas T_0 , inicial e T_∞ , ambiente, da condutividade térmica k , do comprimento característico da parte analisada da peça, L , e do termo fonte de calor $g(t)$, que neste caso é depen-

dente de t . Portanto os dados de entrada para o cálculo do coeficiente de transferência convectiva para cada ensaio foram:

- A condutividade térmica k (tabela 4.4, pag.100);
- As temperaturas T_0 e T_∞ para cada ensaio ;
- O termo fonte de calor estimado, $g(t)$, para cada ensaio (tabela 5.4);
- O comprimento característico, L , definido pela área da parte analisada na peça (retângulo de 16x100 mm, figura 4.3) dividida por um dos lados do retângulo (16 ou 100 mm);
- O número de Fourier (tempo adimensional), definido como $F_0^j = \frac{\alpha t_j}{L^2}$, onde t_j satisfaz $0 < t_j < t_c$;
- A temperatura adimensional $\Theta(F_0^j) = \frac{T_{exp}(x_i, y_i, t_j) - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$, onde $T_{exp}(x_i, y_i, t_j)$ é a temperatura mensurada no termopar Ti , $i = 1, \dots, 12$, no tempo t_j .

Para cada ensaio foram tomadas as temperatura $T_{exp}(x_i, y_i, t_j)$ nos doze termopares localizados nos pontos (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, 12$, para t_j , $j = 1, \dots, 8$, ou seja, para oito instantes de tempos. Primeiramente foram calculados os coeficientes de transferência convectiva, h , para cada termopar da seguinte forma: para cada cálculo de h utilizando a equação (4.19), foram utilizadas duas temperaturas $T_{exp}(x_i, y_i, t_j)$ em instantes diferentes; como foram coletados oito dados de temperatura resultou no cálculo de quatro valores de h e destes valores foi calculada a média aritmética (os valores de h médio, h_m , para cada termopar encontram-se no Apêndice G). A partir dos valores médios de h_m para cada termopar, foram calculados os valores de h médio de cada experimento (h estimado da tabela 5.5).

Os valores encontrados na literatura para o coeficiente de transferência convectiva encontram-se disponibilizados de acordo com a classificação da tabela 2.8, página 44, ou seja, não existe uma análise precisa do coeficiente de transferência convectiva para fluidos de corte em usinagem. A fim de construir uma análise comparativa entre o coeficiente de transferência convectiva calculado analiticamente e um dado experimental, foi realizado o ensaio experimental descrito na seção 4.7.2. Portanto, os valores obtidos neste cálculo analítico serão comparados com os valores experimentais obtidos neste experimento.

A fim de analisar a dispersão estatística das estimativas obtidas do coeficiente de transferência convectiva de calor, foi calculado o desvio médio utilizando a seguinte equação:

$$\sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |h_i - \bar{h}| \quad (4.23)$$

onde $n=5$ para o experimento empírico descrito em 4.7.2, cujos resultados encontram-se no Apêndice D, $n=6$ para a média dos coeficientes estimados por fluido e $n=12$ (número de sensores) para o valor estimado para cada ensaio.

4.10 Análise da Sensibilidade dos Parâmetros Estimados

Para a obtenção do coeficiente de transferência de calor por transferência convectiva, h , e a estimativa do termo fonte de calor, $g(t)$, torna-se necessária uma análise da sensibilidade do modelo de cálculo da temperatura em relação a essas propriedades.

Os coeficientes de sensibilidade para os parâmetros h e g são definidos com base na primeira derivada da temperatura em relação aos parâmetros analisados, sendo estabelecidos pelas seguintes equações:

$$J_h = \frac{\partial T}{\partial h} \quad \text{e} \quad J_g = \frac{\partial T}{\partial g} \quad (4.24)$$

Observa-se que para o sucesso da estimativa simultânea de g (função teste dada pela equação (4.6) e h (constante), é necessário que os coeficientes sejam linearmente independentes e, ainda, possuam os maiores valores possíveis, Beck, Blackwell e St.Clair (1985).

A análise dos ensaios utilizando a determinação direta do coeficiente de Sensibilidades, seção 3.5.2.1, resultou nos gráficos ilustrados nas figuras F.1, F.2 e F.3 do apêndice F. Um gráfico típico deste comportamento encontra-se ilustrado na figura 4.14, pode-se observar que a estimativa simultânea de g e h não é viável pois o coeficiente de sensibilidade de h é muito pequeno e linearmente dependente ao coeficiente de sensibilidade de g .

As figuras F.4, F.5 e F.6 delineadas no apêndice F mostram os gráficos dos coefi-

Figura 4.14: Gráfico do coeficiente de sensibilidade no sensor 3 para o ensaio E1

cientes de sensibilidade somente para a estimativa de $g(t)$ diversificando as distribuições de intensidades (equações (4.5), (4.6) e (4.7)). A figura 4.15 ilustra um gráfico típico destes coeficientes (gráfico do comportamento no sensor T3); observa-se que a função teste com distribuição de intensidade parabólica possui maior coeficiente de sensibilidade, portanto o problema de estimativa é menos sensível ao erro para esta função teste, por outro lado a distribuição de intensidade uniforme de acordo com o coeficiente de sensibilidade se comporta inadequada ao problema de estimativa do parâmetro q_r . O comportamento do coeficiente de sensibilidade da estimativa da função teste com distribuição de intensidade gaussiana possui grande magnitude porém um pouco menor em relação ao coeficiente da função teste com distribuição de intensidade parabólica.

Figura 4.15: Gráfico do coeficiente de sensibilidades da função teste do termo fonte de calor no sensor T3

As figuras F.7, F.8 e F.9 delineadas no apêndice F ilustram os gráficos dos coefi-

cientes de sensibilidade somente para a estimativa do coeficiente de transferência convectiva h (constante). A figura 4.16 ilustra um gráfico típico destes coeficientes (gráfico do comportamento do coeficiente no sensor T3); observa-se que o coeficiente h utilizando a função teste com distribuição de intensidade parabólica possui maior coeficiente de sensibilidade, portanto o problema de estimativa é menos sensível ao erro para h constante com o termo fonte descrito por esta função teste, por outro lado a distribuição de intensidade uniforme de acordo com o coeficiente de sensibilidade se comporta inadequada ao problema de estimativa do parâmetro h . O comportamento do coeficiente de sensibilidade de h utilizando a função teste com distribuição de intensidade gaussiana possui grande magnitude porém um pouco menor em relação ao coeficiente utilizando a função teste com distribuição de intensidade parabólica.

Figura 4.16: Gráfico do coeficiente de sensibilidades do coeficiente de transferência convectiva de calor no sensor T3

A análise dos coeficientes de sensibilidade indica que a estimativa do coeficiente de transferência convectiva h e do termo fonte $g(t)$ não devem ser simultâneas. Com base em Khachfe e Jarny (2001) que, com o intuito de minimizar os erros no coeficiente de transferência convectiva, utilizam primeiramente um problema inverso de contorno do coeficiente e depois o MGC para a estimativa dos outros, neste trabalho, primeiramente o parâmetro q_0 da função teste será estimada utilizando o MGC com o parâmetro h fixo, depois utilizando os dados obtidos para a função teste $g(t)$ será realizada a estimativa do coeficiente de transferência h utilizando a equação (4.19).

4.11 Método do Gradiente Conjugado (MGC)

O algoritmo computacional proposto em [Özisik e Orlande \(2000\)](#) e descrito na seção 3.5.1 foi implementado com o auxílio do software MATLAB[®]. Ao analisar os dados, este algoritmo se mostrou não convergente oscilando em torno de alguns valores. [Dai, Liao e Li \(2004\)](#) afirmam que o método padrão do algoritmo do gradiente conjugado sem reinicialização é quase linearmente convergente e que a taxa de convergência do MGC pode ser melhorada para linear se o método é reiniciado com a direção negativa do gradiente nos n -passos. Com intuito de modificar o método, foram estudadas algumas estratégias de reinicialização do MGC dentre elas a técnica de reinicialização periódica. Esta técnica é uma estratégia prática e foi adotada para a implementação do MGC neste trabalho. A técnica de reinicialização periódica consiste em reinicializar o passo de descida, descrito pela equação (3.204) no método padrão, do seguinte modo, [Dai, Liao e Li \(2004\)](#):

$$d^k = \begin{cases} -\nabla S(\mathbf{P}^k) & k=2n+1, \\ -\nabla S(\mathbf{P}^k) + \gamma^k d^{k-1} & k=2n, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

O parâmetro h a ser fixado como dado de entrada do MGC é dado pelos valores encontrados no experimento empírico descrito no capítulo 4.7.2, os quais e seus respectivos desvios médios para cada fluido estão inseridos na tabela 5.5. Para a função teste inicial do termo fonte, de acordo com a análise do coeficiente de sensibilidade descrita em 4.10, foi escolhida a distribuição de intensidade Parabólica, pois apresentou maior coeficiente de sensibilidade em todos os sensores. Sendo assim, a função teste inicial é descrita pela equação (4.6) onde as dimensões a , b e Ar estão indicadas na tabela 4.8. A fonte de calor está sendo modelada como uma fonte móvel, consequentemente, o centro da fonte de calor, (x_0, y_0) , é tomado como o centro da peça em y se movimentando com a velocidade v_f na coordenada x , ou seja, $(x_0, y_0) = (v_f \cdot t, 0,08)$, onde t varia de 0 a t_c . Desta forma, a velocidade de avanço, v_f , neste caso, será considerada também a velocidade com que a fonte se movimenta na direção da coordenada x . Os ensaios foram planejando com três variações de v_f , as quais estão descritas na tabela 4.6.

Para a estimativa dos parâmetros com o MGC é necessário estipular uma tolerância, ϵ , definido na seção 3.5.1.7. Para esta estimativa, de acordo com [Özisik e Orlande \(2000\)](#), foi fixado, para cada ensaio, $\epsilon = \sum_1^{12} 0,07 T_{max}^i$, onde T_{max}^i é a temperatura máxima do termopar T_i . Este valor para a tolerância foi escolhida com o intuito de estabelecer uma tolerância de aproximadamente 2°C. A partir da tolerância ϵ procedeu-se a

execução o algoritmo computacional do MGC, descrito na seção 3.5.1 e implementado com o auxílio do software MATLAB[®], considerando o número de iterações máximo k=50.

A fim de analisar os resultados obtidos pelo MGC vamos estabelecer também a diferença média do ensaio ϵ_m , calculada como:

$$\epsilon_m = \frac{\sum_1^{12} 0,07T_{max}^i}{12} \quad (4.25)$$

5 Resultados e Discussões

5.1 Resultados dos Testes Experimentais de Usinagem

Na figura 5.1 mostra-se um exemplo das curvas de temperatura em função do tempo na forma como foram adquiridas no ensaio experimental de fresamento plano.

Figura 5.1: Exemplo das curvas de temperatura em função do tempo durante o ensaio E1 com velocidade de corte v_{100} e distância do termopar $d_{2,6}$

Pode-se observar que para cada termopar, à medida que a aresta de corte se aproxima, a temperatura atinge um valor máximo e depois decai com a passagem da ferramenta. Observa-se também que, existem dois picos de temperatura, isto ocorre devido a primeira passagem da aresta de corte sobre o termopar, formando cavaco e a segunda passagem apenas deslizando a ferramenta sobre a superfície usinada. A alteração da temperatura devido a segunda passagem da aresta sobre o termopar é menor e a diferença de tempo entre os picos é o tempo que a fresa leva para avançar 32mm (medida do diâmetro). O aumento máximo de temperatura para cada termopar foi tomado como a

temperatura deste para futuras análises.

5.1.1 Análise dos Experimentos sem refrigeração (a seco)

A figura 5.2 mostra os aumentos de temperatura para os termopares da Lateral 1 (conforme esquema abaixo dos gráficos) quando não se usou sistema de refrigeração (a seco) para os ensaios E1, E2 e E3, de acordo com o aumento da velocidade de corte (v_{100} , v_{150} e v_{200} , respectivamente) e diminuindo-se as distâncias do plano de corte ao termopar ($d_{2,6}$, $d_{2,2}$ e $d_{1,8}$, respectivamente) no mesmo CP.

Figura 5.2: Temperatura nos Termopares da Lateral 1 durante os ensaios E1 a E3

Observa-se que o aumento da velocidade e a alteração das distâncias entre 2,6 e 1,8 não tiveram grandes interferências no aumento da temperatura para os termopares da Lateral 1 na condição a seco. A figura 5.3 mostra os mesmos dados agora para os termopares centralmente localizados e observa-se também o mesmo comportamento dos dados em relação aos parâmetros velocidade e distância dos termopares.

Na figura 5.4 observa-se que para os termopares da Lateral 2 o aumento de temperatura é menor em relação aos termopares da Lateral 1 e Centrais. Tal fato pode ser devido ao seu posicionamento no final do contato entre a aresta de corte e a peça a cada passada da fresa sobre a peça. Durante o início do contato a intensidade de deformação provavelmente é maior produzindo mais calor do que no decorrer da formação do cavaco.

Figura 5.3: Temperatura nos Termopares Centrais durante os ensaios E1 a E3

Observa-se também, como nos dados anteriores, a mesma estabilidade do comportamento das curvas em relação às diferentes velocidades e distâncias do termopares ao plano de corte.

Figura 5.4: Temperatura nos Termopares da Lateral 2 durante os ensaios E1 a E3

Assim, pode-se observar que a variação de velocidades tomadas para os ensaios

E1, E2 e E3, nas respectivas distâncias dos termopares ao corte, alteraram muito pouco o aumento da temperatura na peça. Porém observa-se que a localização dos termopares na peça tem grande influência nos dados, por exemplo, na Lateral 1 o aumento de temperatura registrado pelo termopar T1 difere de 8°C para o aumento de temperatura registrado no termopar T4. Uma possível explicação pode ser o acúmulo de calor à frente da aresta, à medida que as ondas de calor emitidas pela formação de cavaco vão se acumulando e atingindo a localização do termopar T4, mais rápido do que a capacidade de perda pela peça. Tal efeito é mais pronunciado na Lateral 1 e no Centro do que na Lateral 2. Na Lateral 2 a aresta está finalizando o corte e, portanto, o material a ser cisalhado na frente da ferramenta é menor (a espessura do cavaco é menor, $h=0,089\text{ mm}$, equação (2.22) para $\phi \approx \phi_{ext} = 117^{\circ}$), com isso a formação de cavacos comporta-se como uma fonte de calor de menor potência.

A figura 5.5 mostra os aumentos de temperatura para os termopares da Lateral 1, ensaios E4, E5 e E6, com os mesmos dados de velocidades dos ensaios E1, E2 e E3, porém com o corte mais próximo dos termopares ($d_{1,4}$, $d_{1,0}$ e $d_{0,6}$). Observa-se uma mudança no comportamento da curva em relação aos ensaios das figuras 5.2 a 5.4, constatando que a proximidade do termopar para menores distâncias entre este e o plano de corte tem influência no aumento de temperatura na peça. Neste caso, o aumento da velocidade de v_{100} para v_{150} e v_{200} e a diminuição da distância do plano de corte aos termopares acarretou significativamente no aumento da temperatura nos termopares T2 a T4.

O aumento da temperatura nos termopares centralmente localizados para os ensaios E4, E5 e E6 ilustrados na figura 5.6 descreve a mesma tendência observada na Lateral 1, ressaltando que em ambos as curvas do aumento de temperatura dos ensaios E4 e E5 são semelhantes. A figura 5.7 mostra o aumento da temperatura dos termopares da Lateral 2, observa-se que em relação aos termopares centralmente localizados e da Lateral oposta, as temperatura atingem uma magnitude menor, embora os aumentos sejam pouco significativos.

Independentemente da localização dos termopares (Lateral 1, Lateral 2 e Centro), a proximidade do plano de corte aos termopares estabelecida nos ensaios E4, E5 e E6, alterou o comportamento das curvas de aumento de temperatura, ilustradas nos gráficos das figura 5.5, 5.6 e 5.7 em relação aos ensaios E1, E2 e E3, figuras 5.2, 5.3 e 5.4. Quando se aproxima o plano de corte dos termopares estes captam maiores valores para as maiores velocidade de corte.

Quanto à localização dos termopares no sentido do comprimento da peça, a

Figura 5.5: Temperatura nos Termopares da Lateral 1 durante os ensaios E4 a E6

Figura 5.6: Temperatura nos Termopares Centrais durante os ensaios E4 a E6

mesma tendência foi observada, ou seja, os termopares localizados no final do corte registram temperaturas ligeiramente maiores que os primeiros.

Figura 5.7: Temperatura nos Termopares da Lateral 2 durante os ensaios E4 a E6

5.1.2 Análise dos Sistemas de Refrigeração

As figuras 5.8 e 5.9 mostram o aumento de temperatura para diferentes sistemas de refrigeração obtidos com a mesma velocidade de corte (v_{100}). Na figura 5.8 mostram-se os dados da Lateral 1, Centro e Lateral 2 para a distância dos termopares ao plano de corte $d_{2,6}$. Pode-se observar que o aumento de temperatura é maior para os experimentos sem fluido e menor para o sistema de refrigeração inundado. O sistema MQL encontra-se nos valores intermediários para quase todos os termopares, exceto para os termopares mais próximos da borda da peça, T1 e T8, nos quais o sistema em MQL possui maior aumento de temperatura. Isto pode ser devido à localização do bico de aplicação, nas laterais da peça.

Na figura 5.9 mostram-se os dados da Lateral 1, Centro e Lateral 2 para a distância dos termopares ao plano de corte $d_{1,4}$. Analisando as distâncias dos termopares ao plano de corte $d_{2,6}$ e $d_{1,4}$ observa-se a mesma tendência dos anteriores.

As figuras 5.10 a 5.11 ilustram graficamente o comportamento do aumento de temperatura experimental com a mesma velocidade de corte v_{150} , segundo as distâncias dos termopares ao plano de corte $d_{2,2}$ e $d_{1,0}$. As observações feitas para os gráficos das figuras 5.8 e 5.9 se aplicam sem nenhuma alteração para os gráficos das figuras 5.10 a 5.11; portanto o aumento de velocidade de v_{100} para v_{150} não alterou o comportamento da

Figura 5.8: Gráficos do aumento de temperatura dos ensaios com velocidade de 100 m/min na distâncias dos termopares ao plano de corte $d_{2,6}$

Figura 5.9: Gráficos do Aumento de Temperatura dos ensaios com velocidade de 100 m/min na distância dos termopares ao plano de corte $d_{1,4}$

variação de temperatura nestas distâncias entre o plano de corte e o plano dos termopares.

As figuras 5.12 a 5.13 ilustram o comportamento da variação de temperatura

Figura 5.10: Gráficos do aumento de temperatura dos ensaios com velocidade de 150 m/min na distâncias dos termopares ao plano de corte $d_{2,2}$

Figura 5.11: Gráficos do aumento de temperatura dos ensaios com velocidade de 150 m/min na distâncias dos termopares ao plano de corte $d_{1,0}$

experimental com a mesma velocidade de corte v_{200} , segundo as distâncias dos termopares ao plano de corte $d_{1,8}$ e $d_{0,6}$.

Figura 5.12: Gráficos do aumento de temperatura dos ensaios com velocidade de 200 m/min na distâncias dos termopares ao plano de corte $d_{1,8}$

Figura 5.13: Gráficos do aumento de temperatura dos ensaios com velocidade de 150 m/min na distâncias dos termopares ao plano de corte $d_{0,6}$

O aumento de velocidade dos ensaios para v_{200} altera apenas a magnitude dos valores e o comportamento do aumento de temperatura.

5.2 Estimativas do Termo Fonte de Calor

A estimativa do termo fonte utiliza como dados de entrada os seguintes dados experimentais: dados de corte (velocidade de avanço, v_f , tempo de corte, t_c), o trabalho para cada componente de força (W_x , W_y e W_z), o valor do coeficiente de transferência convectiva h experimental, apêndice D, a temperatura inicial, T_0 , e a temperatura do fluido (ou ambiente), T_∞ . A tabela 5.1 mostra os dados experimentais de entrada para a estimativa do termo fonte de calor do ensaio E1, como exemplo.

Tabela 5.1: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E1

Dados de Corte	v_f	0,0017 m/s
	t_c	60 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,92
	W_y	0,91
	W_z	3,25
Temperatura Inicial [$^{\circ}C$]	T_0	22
Temperatura Ambiente [$^{\circ}C$]	T_∞	21
Coeficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	120 W/m ² °C

A partir dos valores de W_x , W_y e W_z , t_c e A_r (tabela 4.8) foi calculado o valor inicial para a estimativa do parâmetro fluxo de calor, q_0 , utilizando as equações (4.3) e (4.4). A partir do valor de q_0 foi construída a função teste inicial, $g(t)$ do algoritmo computacional, (seção 3.5.1.8) a partir da equação (4.6) com $U=v_f$, velocidade de avanço da tabela 5.1. Utilizando o coeficiente de transferência convectiva experimental, h da tabela 5.1, prosseguiu-se com a execução do algoritmo computacional com no máximo 50 interações (aproximadamente 20 min de processamento em um computador com processador Intel Core Due com 3 Gb de memória). Para maiores números de interações não se observou mudanças significativas no erro, mas significativo aumento no tempo da computação. Após a minimização do erro chegou ao valor otimizado do fluxo de calor q_{otim} , assim como à porcentagem de calor que flui para a peça.

Para elucidar a análise dos resultados obtidos, a figura 5.14 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E1 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

A figura 5.15 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E1 em particular. O valor estimado para a função teste é obtido após sucessivas iteração do MGC com o intuito de minimizar a função objetivo, ou seja,

Figura 5.14: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E1

deixar os dados de temperatura calculados analiticamente utilizando a função teste o mais próximo possível dos dados experimentais até atingir a diferença média abaixo de $\epsilon_m=3^\circ C$ por termopar (tabela 5.2). Após as interações o MGC minimizou a função objetivo, ($S(q_{otim})$, tabela 5.2), para a tolerância média estipulada, e os valores finais para a diferença média estão na tabela 5.2.

Figura 5.15: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor

Os dados de entrada dos demais ensaios, bem como os gráficos das estimativas encontram-se nos apêndices I a M.

A tabela 5.2 mostra os dados de entrada e os resultados obtidos para a estimativa do fluxo de calor fluindo para a peça para cada sistema de refrigeração.

Tabela 5.2: Resultados obtidos para a estimativa do fluxo de calor entrando na peça utilizando a distribuição de intensidade parabólica

Ensaio - Velocidade		CTC* [W/m ² °C] h	Parâmetro [W/m ²]		Fluxo de Calor %	Função objetivo $S(\mathbf{q}_{otim})$	Diferença média [°C] ϵ_m (iteração)
			Inicial q_0	Estimado q_{otim}			
a Seco	E1 - v ₁₀₀	120	0,88	0,314	35,6	6956	2,41 (k=50)
	E2 - v ₁₅₀		1,18	0,157	13,2	6504	2,33 (k=50)
	E3 - v ₂₀₀		1,74	0,1	5,7	7921	2,57 (k=50)
	E4 - v ₁₀₀		0,88	0,316	35,9	24087	4,5 (k=50)
	E5 - v ₁₅₀		1,13	0,2	17,6	18317	3,9 (k=50)
	E6 - v ₂₀₀		1,4	0,1	7,5	12779	3,2 (k=50)
MQL 1	E7 - v ₁₀₀	678	0,72	0,127	17,7	6559	2,34 (k=50)
	E8 - v ₁₅₀		1,05	0,055	5,4	8199	2,61 (k=50)
	E9 - v ₂₀₀		1,18	0,016	1,31	3820	1,78 (k=50)
	E10 - v ₁₀₀		0,63	0,129	20,5	4756	1,99 (k=50)
	E11 - v ₁₅₀		0,94	0,049	5,2	9568	2,8 (k=50)
	E12 - v ₂₀₀		1,17	0,014	1,2	6300	2,29 (k=50)
Fluido 1	E13 - v ₁₀₀	3800	0,83	0,03	3,6	1120	0,97 (k=4)
	E14 - v ₁₅₀		1,16	0,013	1,12	1398	1,08 (k=9)
	E15 - v ₂₀₀		1,41	0,05	0,36	1338	1,06 (k=15)
	E16 - v ₁₀₀		0,83	0,035	4,21	1324	1,05 (k=7)
	E17 - v ₁₅₀		1,10	0,014	1,27	1632	1,17 (k=50)
	E18 - v ₂₀₀		1,44	0,007	0,49	1603	1,16 (k=50)
MQL 2	E19 - v ₁₀₀	460	0,66	0,096	14,59	12795	3,27 (k=50)
	E20 - v ₁₅₀		0,98	0,046	4,67	3915	1,81 (k=50)
	E21 - v ₂₀₀		1,08	0,028	2,58	10277	2,93 (k=50)
	E22 - v ₁₀₀		0,61	0,073	12	13270	3,33 (k=50)
	E23 - v ₁₅₀		0,84	0,043	5,11	3894	1,8 (k=50)
	E24 - v ₂₀₀		0,98	0,022	2,24	5260	2,09 (k=50)
Fluido 2	E25 - v ₁₀₀	5300	0,90	0,052	5,76	4596	1,96 (k=50)
	E26 - v ₁₅₀		1,21	0,017	1,4	649	0,74 (k=2)
	E27 - v ₂₀₀		1,39	0,005	0,36	1558	1,14 (k=50)
	E28 - v ₁₀₀		0,76	0,043	5,65	1078	0,95 (k=2)
	E29 - v ₁₅₀		1,14	0,017	1,44	533	0,67 (k=2)
	E30 - v ₂₀₀		1,49	0,008	0,54	2515	1,45 (k=50)

*CTC - Coeficiente de Transferência Convectiva

Nos resultados obtidos para os ensaios sem sistema de refrigeração, tabela 5.2, observa-se que o percentual do fluxo de calor fluindo para a peça para os ensaios E1 a E3 diminuem gradualmente com o aumento da velocidade (de v₁₀₀ a v₂₀₀) o mesmo ocorre para os ensaios E4 a E6. Pode-se observar também que nos ensaios E4 a E6, com o plano de corte mais próximo dos termopares a magnitude do porcentual é relativamente maior que nos ensaios E1 a E3.

O gráfico da figura 2.10 sugere que o percentual do fluxo de calor gerado na zona de deformação primária e secundária fluindo para a peça é de aproximadamente 20% para os ensaios E1 e E4 (número de Peclet, $Pe=13,9$), com mesma velocidade v_{100} e este percentual diminui gradativamente para os outros ensaios com velocidades maiores devido o aumento do número de Peclet (número de Peclet para os ensaios com velocidade v_{150} , E2 e E5, é $Pe=20,9$ e para os ensaios com velocidade v_{200} , E3 e E6, $Pe=27,87$). Estes resultados tornam válidos os comportamentos observados na tabela 5.2 para o percentual do fluxo de calor fluindo para a peça segundo o aumento de velocidade.

Os resultados obtidos para percentual do fluxo de calor sem sistema de refrigeração estão acima dos valores observados na tabela 2.2, adaptada de Ferraresi (1982). Porém vale ressaltar a observação dos autores Abukhshim, Mativenga e Sheikh (2006), os quais citam que para baixa remoção de metal esta quantidade geralmente pode aumentar. Trent e Wright (2000) afirmam que os cálculos teóricos e os valores determinados experimentalmente mostram que esta proporção pode ser tão alta quanto 50% para taxas muito baixas de remoção de metais, materiais com alta condutividade e pequenos ângulos de cisalhamento. E ainda, a quantidade de calor perdido na zona de deformação para a ferramenta depende da condutividade térmica da ferramenta (e da peça), da geometria da ferramenta e do método de resfriamento usado para baixar sua temperatura, Trent e Wright (2000). A tabela 5.3 descreve os valores obtidos para o cálculo da fração do fluxo de calor gerado no plano de cisalhamento fluindo para a peça, considerando a peça um objeto estacionário e o cavaco e a ferramenta em movimento relativo, utilizando algumas equações encontradas na literatura as quais estão descritas na tabela 2.3.

Tabela 5.3: Fração do fluxo de Calor B que flui para a peça durante os ensaios utilizando as equações da tabela 2.3

Ensaio	Método de Loewen e Shaw (1954)	Método de Leone (1954)
E1 e E4	0,3	0,44
E2 e E5	0,26	0,39
E3 e E6	0,23	0,36

Considerando a equação (2.33) para o cálculo do percentual do fluxo de calor gerado no plano de cisalhamento fluindo para a peça temos que 23% do calor gerado no plano de cisalhamento flui para a peça no caso dos ensaios com mesma velocidade de corte, v_{100} , ensaios E1 e E4, para os ensaios com velocidade, v_{150} , ensaios E2 e E5, o percentual é de 20% e para os ensaios E3 e E6, com velocidade v_{200} , o percentual é de 18%. Porém vale ressaltar que o percentual do fluxo de calor fluindo para a peça da tabela 5.2 está sendo calculado em relação ao fluxo de calor total do sistema (calor gerado no plano de

cisalhamento, na interface ferramenta-cavaco e por atrito ferramenta-peça).

Do mesmo modo que ocorreu para os ensaios sem refrigeração, nos ensaios com o MQL 1 o percentual do fluxo de calor fluindo para a peça para os ensaios E7 a E9 diminui gradualmente com o aumento da velocidade (de v_{100} a v_{200}) o mesmo ocorre para os ensaios E10 a E12. Observa-se novamente que nos ensaios E10 a E12, com corte mais próximo dos termopares, a magnitude do percentual é relativamente maior que nos ensaios E7 a E9. Observa-se também que o percentual dos ensaios com MQL 1 encontram-se abaixo dos respectivos ensaios com mesmas condições de corte mas realizados sem refrigeração, comprovando que o sistema em MQL, nestes ensaios, permite a refrigeração da peça diminuindo em aproximadamente 40% do fluxo de calor para a peça.

Analizando os resultados dos ensaios com o Fluido 1, mostrados na tabela 5.2, observa-se o mesmo comportamento gradual do percentual do fluxo de calor fluindo para a peça, em relação as velocidades de corte, observados para o sistema sem refrigeração e com o MQL 1. E ainda no caso do uso do sistema por inundação o percentual do fluxo de calor fluindo para a peça é mais baixo em relação ao ocorrido no sistema em MQL 1, provocando uma diminuição de aproximadamente de 80% em relação ao percentual ocorrido no sistema sem refrigeração.

Nos ensaios com MQL 2 o percentual do fluxo de calor fluindo para a peça para os ensaios E19 a E21 diminui gradualmente com o aumento da velocidade (de v_{100} a v_{200}) o mesmo ocorre para os ensaios E22 a E24, os quais diferem de E19 a E21 pela distância do corte ao plano que passa pelos termopares. Porém, ao contrário dos outros ensaios observa-se nos ensaios E22 e E24, com corte mais próximo dos termopares a magnitude do percentual é relativamente menor que nos ensaios E19 e E21 e o percentual é maior para o ensaio E23 em relação ao ensaio E20 que possui mesma velocidade v_{150} porém posição do corte em relação ao plano que passa pelos termopares diferente.

Os resultados do fluxo de calor para os ensaios utilizando o MQL 1 e MQL2 mostrados na tabela 5.2 permitem analisar a eficácia em refrigerar dos dois fluidos no mesmo sistema de refrigeração. Desta forma, observa-se que o percentual do fluxo de calor fluindo para a peça utilizando o MQL 2 é menor que o percentual do fluxo utilizando o MQL 1. Nos ensaios com o Fluido 2 o percentual do fluxo de calor fluindo para a peça nos ensaios E25 a E27 diminuem gradualmente com o aumento da velocidade (de v_{100} a v_{200}) o mesmo ocorre para os ensaios E28 a E30. Porém, ao contrário do ensaio com o Fluido 1 observa-se nos ensaios E29 e E30, com corte mais próximo dos termopares, a magnitude do percentual é relativamente maior que nos ensaios E26 e E27 e o percentual

é menor para o ensaio E28 em relação ao ensaio E25 que possui mesma velocidade v_{100} porém posição diferente.

Os resultados do fluxo de calor para os ensaios utilizando o Fluido 2 e o Fluido 1 mostrados na tabela 5.2 permitem analisar a eficácia em refrigerar dos dois fluidos no mesmo sistema de refrigeração. Desta forma, observa-se que o percentual do fluxo de calor fluído para a peça utilizando o Fluido 1 é menor que o percentual do fluxo utilizando o Fluido 2.

A seguir descreve-se as equações das funções testes obtidas após a otimização pelo algoritmo computacional para cada ensaio. Estas funções descrevem o comportamento da intensidade do fluxo de calor em relação ao tempo durante o corte de cada ensaio.

As funções descritas na tabela 5.4 serão substituídas na equação (4.19) a fim de estimar o coeficiente de transferência convectiva h . Os gráficos destas funções para cada ensaio estão esboçados no apêndice I a M (para o ensaio E1 é o gráfico de g estimada da figura 5.15).

5.3 Estimativa do Coeficiente de Transferência Convectiva

Os resultados obtidos para o coeficiente de transferência convectiva de calor equação (4.19) encontram-se na tabela 5.5. Nesta tabela encontram-se também os resultados dos ensaios do coeficiente de transferência convectiva experimental descrito no item 4.7.2 e os respectivos desvios médios dos resultados (equação (4.23)). A abordagem detalhada dos dados experimentais do ensaio encontra-se no apêndice D. Nos coeficientes de transferência convectiva obtidos no ensaio experimental descrito no item 4.7.2 considera-se que todo o calor gerado eletricamente flui para a superfície da placa de metal, ou seja, que a placa de metal está totalmente isolada e que não existem perdas do fluxo de calor para a caixa isolante feita de cerâmica. Assumindo-se tal hipótese pode-se supor que os valores de h obtidos neste experimento são valores máximos.

Examinando a tabela 5.5 nota-se que os valores obtidos analiticamente para o coeficiente de transferência convectiva, para os ensaios realizados sem sistema de refrigeração, estão bem próximos dos valores experimentais. Os resultados analíticos do coeficiente de transferência convectiva de calor, h , para os ensaios realizados com sistema de refrigeração em MQL utilizando o fluido MQL 1 encontram-se dentro da faixa de desvio médio provando que o método proposto é eficiente em reproduzir esses resultados experimentais.

Tabela 5.4: Termo fonte de calor com distribuição de intensidade parabólica otimizada pelo MGC

		$g(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$		
Ensaio		a	b	c
a Seco	E1	0,00245	-0,72	51,2
	E2	0,0026	-0,78	57,5
	E3	0,003	-0,84	55,6
	E4	0,00247	-0,78	59,2
	E5	0,0034	-0,93	63,5
	E6	0,00298	-0,8	53,1
MQL 1	E7	0,00093	-0,37	33,98
	E8	0,00093	-0,35	32,91
	E9	0,0009	-0,3	24,33
	E10	0,001	-0,38	34,5
	E11	0,00083	-0,31	29,2
	E12	0,00088	-0,31	27,1
Fluido 1	E13	0,0011	-0,43	39,76
	E14	0,001	-0,36	30,2
	E15	0,00075	-0,26	22,3
	E16	0,001	-0,38	35,1
	E17	0,0018	-0,46	29,2
	E18	0,001	-0,33	27,26
MQL 2	E19	0,0074	-0,31	31,66
	E20	0,0072	-0,28	27,62
	E21	0,0007	-0,24	22,16
	E22	0,0086	-0,37	39,64
	E23	0,0072	-0,27	25,6
	E24	0,007	-0,24	22,14
Fluido 2	E25	0,001	-0,4	39,03
	E26	0,0007	-0,32	36,9
	E27	0,00075	-0,26	22,6
	E28	0,00085	-0,35	35,45
	E29	0,0007	-0,25	22
	E30	0,0007	-0,21	18,2

No entanto os valores obtidos analiticamente para o coeficiente de transferência convectiva de calor, h , para os ensaios realizados com sistema de refrigeração Inundado utilizando o Fluido 1 encontram-se bem abaixo dos valores experimentais, mesmo considerando o desvio médio. Isso pode estar relacionado ao fato que experimentalmente os valores de h são calculados considerando que todo o calor gerado eletricamente está fluindo para a peça, pois mesmo sendo o sistema experimental isolado termicamente por material cerâmico, o calor ainda flui pelas paredes do isolante, diminuindo a quantidade que flui pela peça passando pelos termopares. O valor registrado, assim, é menor do que aquele estimado teoricamente, esta sobrestimação de q provoca em h uma sobrestimação visto que na estimativa de h experimental, equação (D.1), h é diretamente proporcional a q .

Este fato torna-se mais relevante nos experimentos com sistema por inundação, nos quais os valores de $T_s - T_\infty$ são bem menores, figura 5.16. Isto se deve ao fato que o coeficiente de sensibilidade para a estimativa do coeficiente de transferência convectiva h experimental, calculado a partir da equação (D.1), é:

$$\frac{\partial q}{\partial h} = A_p(T_s - T_\infty) \quad (5.1)$$

indicando que para valores suficientemente pequenos de $T_s - T_\infty$ tem-se valores pequenos de $\frac{\partial q}{\partial h}$ e o problema inverso é mais sensível a erros. Por outro lado, analiticamente estimou-se um valor médio, a partir de um fluxo de calor otimizado pelo MGC, o qual pode ter resultados mais baixo.

Figura 5.16: Gráfico do Coeficiente de Transferência Convectiva versus Diferença de Temperatura $T_s - T_\infty$

As observação acima são aplicáveis sem nenhuma alteração para a análise dos dados obtidos para o coeficiente de transferência convectiva de calor, h , para os ensaios realizados com sistema de refrigeração Inundado utilizando o Fluido 2. Porém, para os ensaios realizados com sistema de refrigeração em MQL utilizando o fluido MQL 2, tabela 5.5, observa-se que os valores obtidos analiticamente encontram-se bem acima dos valores experimentais, mesmo considerando o desvio médio destes valores. Isto pode ser devido ao fato que no método analítico a estimativa do coeficiente ocorre durante o fresamento e desta forma o caráter lubrificante do MQL 2 diminui o coeficiente de atrito entre a ferramenta e a peça, decorrendo assim menor quantidade de calor gerado pelo atrito. E

ainda comparando os dados para as estimativas do fluxo de calor, q_{otim} e do termo fonte $g(t)$, tabelas 5.2 e 5.4, dos fluidos do sistema em MQL, observa-se que os resultados estão bem próximos, este fato deve gerar valores semelhantes dos coeficientes de transferência convectiva, conforme foi obtido.

Tabela 5.5: Valores dos Coeficiente de Transferência Convectiva de Calor utilizando as Equações (4.19) e (4.20) versus Experimental (item 4.7.2)

		Coeficiente de Transferência Convectiva[W/m ² °C]			Desvio Médio Equação (4.23)		
		Estimado		Experimental	Estimado		Experimental
Ensaio		Equação (4.19)	Média dos Ensaio	Experimento item 4.7.2	Termopares (n=12)	Ensaio (n=6)	Experimento (n=5)
a Seco	E1	123,5	114,8	122,3	±18,7	±14,27	±15,1
	E2	99,9			±26,3		
	E3	118,4			±32,8		
	E4	92,1			±32		
	E5	109,6			±30,5		
	E6	145,3			±31,5		
MQL 1	E7	750,3	699,6	678	±78,4	±44	±92,6
	E8	736,9			±62,7		
	E9	684,4			±68		
	E10	655,4			±85,4		
	E11	744,4			±99,3		
	E12	626			±49,7		
Fluido 1	E13	1914	1719	3800	±119,4	±124	±682,7
	E14	1812			±108,9		
	E15	1415			±103		
	E16	1705			±64		
	E17	1668			±87		
	E18	1805			±87,7		
MQL 2	E19	614	608,8	462,3	±122,5	±13,7	±29
	E20	629			±84		
	E21	607			± 36,7		
	E22	573			±46,4		
	E23	623			±49,4		
	E24	607			±101,8		
Fluido 2	E25	1938	1852	5300	±601	±53	±1193
	E26	1846			±598		
	E27	1839			±250		
	E28	1834			±457,6		
	E29	1726			±342,5		
	E30	1924			±374		

Analisando os coeficientes analíticos para os sistemas de refrigeração tem-se que o valor de h da média dos ensaios sem refrigeração é menor que os valores de médios de h dos ensaios com refrigeração concordando com a análise dos gráficos experimentais na qual

pode-se concluir que no sistema sem refrigeração a peça aquece bem mais que nos sistema com refrigeração. Analisando apenas o sistema de refrigeração em MQL pode-se observar que o coeficiente estimado para o MQL 2 é menor que o para o MQL 1, concordando com os coeficientes dos ensaios experimentais. Examinando o sistema de refrigeração inundado tem-se que o coeficiente estimado para Fluido 2 é maior que para o Fluido 1, se não for considerado o desvio médio, o mesmo ocorre com os coeficientes experimentais. Portanto apesar da diferença de magnitude ambos os resultados dos coeficientes obedecem a seguinte hierarquia:

$$h_1 < h_{2,2} < h_{2,1} < h_{3,1} < h_{3,2}$$

6 Conclusões e Perspectivas

De acordo com os dados encontrados pelos experimentos realizados e pelos modelos analíticos, pode se concluir que:

- Os ensaios experimentais de fresamento mostraram que à medida que a aresta de corte avança sobre a superfície da peça a temperatura sentida pelos termopares aumenta, independentemente do sistema de refrigeração utilizado. Os termopares mais distantes da entrada da ferramenta sofrem um aumento maior de temperatura.
- Os termopares localizados na Lateral 1 da peça, ou seja, na lateral de entrada da ferramenta, percebem um aumento maior de temperatura, em relação àqueles localizados no centro e na Lateral 2, na saída da ferramenta;
- À medida que o plano de corte se aproxima do plano dos termopares a variação de velocidade de corte de 100 para 200 m/min passa a ser mais significativa. Os aumentos de temperatura percebidos a 0,6 mm são maiores do que a 1,4 mm, por exemplo. Isso indica um alto gradiente de temperatura próximo ao plano de corte
- Dentre os 4 sistemas de refrigeração testados os testes experimentais permitiram distinguir suas capacidade de refrigeração, pois as temperaturas resultaram significativamente diferentes. Foi possível distinguir-se que o sistema inundado registrou os menores aumentos de temperatura na peça, seguido pelo sistema MQL e o sistema sem refrigeração.
- Entre os fluidos de corte utilizados, pode-se dizer que o Fluido 2 tem um desempenho ligeiramente melhor do que o Fluido 1 para o sistema inundado.
- Entre os fluidos utilizados no sistema MQL, o MQL1 é ligeiramente melhor do que o MQL2.
- O algoritmo implementado para estimativa da fonte de calor obteve um erro residual de aproximação abaixo de 3 °C, veja por exemplo os resultados do ensaio E1,

figura 5.14, indicando bons resultados na tentativa de estimativa da porcentagem de calor que flui para a peça. Como os dados encontrados concordam com outros relatados em publicações diversas, pode-se dizer que as estimativas estão dentro das expectativas.

- O algoritmo também mostrou que à medida que a velocidade de corte aumenta a porcentagem do calor gerado que flui para a peça diminui, comprovando que a peça se aquece menos com a técnica de usinagem com altas velocidades (HSM)
- Pelo algoritmo também se conclui que o sistema de refrigeração inundado é mais eficiente em diminuir o fluxo de calor para a peça. Entre os fluidos para o sistema inundado o Fluido 2 tem uma eficácia ligeiramente maior do que o Fluido 1.
- No caso do sistema MQL o MQL 1 se mostrou um pouco mais eficiente, embora a diferença não seja tão grande em todos os casos calculados. No caso do coeficiente analítico esta diferença é de $90,8 \text{ W/m}^2\text{°C}$ e no caso experimental $216 \text{ W/m}^2\text{°C}$.
- A obtenção do coeficiente de convecção h , por meio do sistema analítico proposto, pode ser considerada muito boa, já que foi capaz de estimar valores próximos daqueles experimentais, principalmente no caso do fresamento a seco. Valores para o sistema inundado resultaram abaixo dos experimentais, porém o isolamento do método experimental não foi perfeito. Calor fluindo pelas paredes de material cerâmico pode ter contribuído para valores experimentais maiores do que aqueles calculado analiticamente, embora todos estiveram na mesma ordem de grandeza.
- A capacidade de refrigeração dos sistemas testados foi comprovada também pelos valores de h calculados e medidos analiticamente, sendo que a sua eficácia de refrigeração da peça obedece a seguinte hierarquia: $h_1 < h_{2,2} < h_{2,1} < h_{3,1} < h_{3,2}$, a começar pelo menos eficiente, h_1 .

Neste trabalho foi desenvolvida uma metodologia de comparação da eficácia de fluidos de corte em usinagem através da quantificação de calor retirado no processo por meio da transferência convectiva e da estimativa do fluxo de calor entrando na peça por condução. O coeficiente de transferência convectiva é a propriedade que relata a quantificação de calor saindo da peça por transferência convectiva e foi medido através de experimentos empíricos e calculado através de um método analítico de aproximação proposto neste trabalho. O fluxo de calor entrando na peça foi estimado através do Método do Gradiente conjugado com Problema Adjunto. Esta técnica de comparação

testou o desempenho de três tipos de sistema de refrigeração do processo de usinagem, com variação de dois destes somando ao todo seis tipos de ensaios analisados. Os resultados analíticos obtidos para os coeficientes de transferência convectiva mostraram grandezas diversas dos experimentais porém a hierarquia dos resultados concordam plenamente. Os resultados obtidos para a estimativa do fluxo de calor conseguiram identificar o percentual do fluxo de calor fluindo para peça e mostrar o comportamento do fluxo com o aumento da velocidade.

Este trabalho é o primeiro passo para sistematizar a predição de aplicação de fluidos em usinagem, utilizando a estimativa analítica da energia envolvida no processo de usinagem, o estudo do percentual do fluxo de calor fluindo para a peça e o método de avaliação de fluidos de corte aqui estabelecido pode-se predeterminar qual o sistema de refrigeração adequado para o processo.

O método analítico desenvolvido é inovador e pode ser aplicado em vários contextos da engenharia e física. No decorrer do desenvolvimento deste método foi proposta também a estimativa da fonte de calor do processo, a abordagem desenvolvida neste trabalho através do MGC é inédita no sentido de determinar o percentual do fluxo de calor gerado no processo de usinagem que flui para a peça. Esta abordagem pode ser generalizada para qualquer processo de usinagem, de acordo com o estudo da termomecânica do processo envolvido. A generalização desta abordagem é uma das sugestões para trabalho futuro. Propõe-se também a estimativa do percentual do fluxo de calor gerado no processo, analisado da mesma forma que na peça, para a ferramenta e para o cavaco.

Referências

- ABUKHSHIM, N. A.; MATIVENGA, P.; SHEIKH, M. A. Heat generation and temperature prediction in metal cutting: A review and implications for high speed machining. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, v. 46, p. 782–800, 2006.
- ALILAT, N.; BAÝRI, A.; LARAQI, N. Three-dimensional calculation of temperature in a rotating disk subjected to an eccentric circular heat source and surface cooling. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, v. 46, n. 2, p. 167–180, July 1999.
- ALTINTAS, Y. *Manufacturing Automation*. New York: Cambridge University Press, 2000.
- ALTINTAS, Y.; BUDAK, E. Prediction of tool and chip temperature in continuous and interrupted machining. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, v. 42, n. 9, p. 1011–1022, 2002.
- ALVES, S. M. *Adequação ambiental do Processo de Retificação através de um novo conceito de Fluidos de Corte*. 210 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.
- ALVES, S. M.; OLIVEIRA, J. F. Development of environmentally friendly fluid for cbn grinding. *Annals of the CIRP*, v. 55, p. 343–346, 2006.
- ANEIRO, F. M.; COELHO, R. T.; BRANDÃO, L. C. Turning hardened steel using coated carbide at high cutting speeds. *Journal of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.*, XXX, n. 2, p. 104–109, 2008.
- ARPACI, V. S. *Conduction Heat Transfer*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1966.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6175: Processos mecânicos de usinagem*. Rio de Janeiro, 1971. 19 p.
- BARO, P. K.; JOSHI, S. S.; KAPOOR, S. Modeling of cutting forces in a face-milling operation with self-propelled round insert milling cutter. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, v. 45, p. 831–839, 2005.
- BECK, J. V.; ARNOLD, K. J. *Parameter estimation in engineering and science*. New York: Wiley Interscience, 1977.
- BECK, J. V.; BLACKWELL, B.; ST. CLAIR, C. R. J. *Inverse Heat Conduction: Ill-posed problems*. New York: Wiley Interscience, 1985.
- BECK, J. V. et al. *Heat Conduction Using Green's Functions*. 2. ed. [S.l.]: Taylor & Francis, 2010.

- BEJAN, A. *Transferência de Calor*. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- BEKIR, S.; SAMI, M. Heat transfer of semi-infinite solid heated by a laser beam. *Heat and Mass Transfer*, v. 32, p. 245–253, 1997.
- BLOK, H. The flash temperature concept. *Wear*, v. 6, n. 6, p. 483 – 494, 1963.
- BOOTHROYD, G.; KNIGHT, W. A. *Fundamentals machining and machine tools*. 2. ed. New York: Marcel Dekker, 1989.
- BRAGA, D. U. et al. Using a minimum quantity of lubricant (MQL) and a diamond coated tool in the drilling of aluminumsilicon alloys. *Journal of Materials Processing Technology*, v. 122, p. 127138, 2002.
- BRAGHINI, A. J. *Metodologia para Escolha de Fluidos de Corte não agressivos ao meio ambiente para aplicações em usinagem de metais*. 230 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.
- BRANDÃO, L. C.; COELHO, R. T.; RODRIGUES, A. R. Experimental and theoretical study of workpiece temperature when end milling hardened steels using (tia)l-coated and pcbn-tipped tools. *Journal of Materials Processing Technology*, v. 199, n. 1-3, p. 234 – 244, 2008.
- BRANDÃO, L. C.; MALAVOLTA, A. T.; COELHO, R. T. Experimental and theoretical study on workpiece temperature when tapping hardened aisi h13 using different cooling systems. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng.*, v. 32, n. 2, p. 154 – 159, 2010.
- CANCILLO, M. L. et al. An approximate method of calculating the heat transfer coefficient in metal bars. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, v. 73, n. 6, 2000.
- CARSLAW, H. S.; JAEGER, J. C. *Conduction of heat in Solids*. 2. ed. Oxford: Oxford Clarendon Press, 1959.
- CARVALHO, S. R. et al. Temperature determination at the chip-tool interface using an inverse thermal model considering the tool and tool holder. *Journal of Materials Processing Technology*, v. 179, p. 97–104, 2006.
- CHANDRA, A.; MUKHERJEE, S. *Boundary element methods in manufacturing*. New York: Oxford University Press, 1996.
- CHAO, B.; TRIGGER, K. An analytical evaluation of metal cutting temperature. *Transactions ASME*, n. 73, p. 57–68, 1951.
- CHEN, W.-L.; YANG, Y.-C.; LEE, H.-L. Inverse problem in determining convection heat transfer coefficient of an annular fin. *Energy Conversion and Management*, v. 48, p. 10811088, 2007.
- CHEROTO, S. et al. Periodic laminar forced convection: solution via symbolic computation and integral transforms. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 38, p. 613 – 621, 1999.

- CHURCHILL, S. W.; OZOE, H. A correlation for laminar free convection from a vertical plate. *J. Heat Transfer*, v. 95, n. 4, p. 540 – 542, 1973.
- COELHO, R. T.; EU-GENE, N. G.; ELBESTAWI, M. A. Tool wear when turning hardened aisi 4340 with coated pcbn tools using finishing cutting conditions. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, v. 47, n. 2, p. 263–272, 2007.
- COLAÇO, M. J.; ORLANDE, H. R. Inverse natural convection problem of simultaneous estimation of two boundary heat fluxes in irregular cavities. *Journal of Heat Transfer and Mass Transfer*, v. 47, p. 1201 – 1215, 2004.
- COLDWELL, H. et al. Rapid machining of hardened aisi h13 and d2 moulds, dies and press tools. *Journal of Materials Processing Technology*, v. 135, p. 301–311, 2003.
- CORTES, C.; CAMPO, A.; ARAUZO, I. Reflections on lumped models of unsteady heat conduction in simple bodies. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 42, p. 921–930, 2003.
- COSSALI, G. A fourier transform based data reduction method for the evaluation of the local convective heat transfer coefficient. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 47, p. 21 – 30, 2004.
- DAI, Y.-H.; LIAO, L.-Z.; LI, D. On restart procedures for the conjugate gradient method. *Numerical algorithms*, v. 35, n. 2, p. 249–260, 2004.
- DEMELO, A. C. *Estimação da Temperatura de Corte utilizando Problemas Inversos em Condução de Calor*. 116 f. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Uberlândia, 1998.
- DÖRR, J.; SAHM, A. A mínima quantidade de lubrificante avaliada pelos usuários. *Máquina e Metais*, p. 20–39, 2000.
- DUFFY, D. G. *Green's functions with application*. London: Chapman & Hall, 2001.
- ELBARADIE, M. A. Cutting fluids: Part I - characterization. *Journal of Materials Processing Technology*, v. 56, n. 1-4, p. 786–797, 1996.
- ENGL, H. W.; HANKE, M.; NEUBAUER, A. *Regularization of Inverse Problems: Mathematics and its applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1996.
- FERRARESI, D. *Fundamentos da Usinagem dos Metais*. 9.nd. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1982.
- FGUIRI, A. et al. Experimental inverse analysis for the determination of boundary conditions in the parallel hot wire technique. *Experimental Thermal and Fluid Science*, v. 31, p. 209220, 2007.
- FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas*. 3. ed. Rio de janeiro: IMPA, 2007.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. Rio de janeiro: Livros Técnicos e Científicos editora, 2006.

- HAJI-SHEIKH, A.; BECK, J.; COLE, K. Steady-state greens function solution for moving media with axial conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 53, p. 2583 – 2592, 2010.
- HEIDRICH, P. et al. Estimation of internal heat transfer coefficients and detection of rib positions in gas turbine blades from transient surface temperature measurements. *Journal of Physics: Conference Series - 6th International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice*, v. 135, p. 1–8, 2008.
- INCROPERA, F. P.; WITT, D. P. *Fundamentos de transferência de calor e massa*. 3nd.. ed. Rio de Janeiro: LTC - livros técnicos e científicos Editora S.A., 1992.
- JAEGGER, J. C. Moving sources of heat and the temperature at sliding contacts. *J. Proc. R. Soc. New South Wales*, p. 203–224, 1942.
- KALPAKJIAN, S. *Manufacturing processes for engineering materials*. 2. ed. [S.l.]: Addison-Wesley, 1991.
- KHACHFE, R. A.; JARNY, Y. Determination of heat sources and heat transfer coefficient for two-dimensional heat flow - numerical and experimental study. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 44, p. 1309 – 1322, 2001.
- KIDAWA-KUKLA, J. Temperature distribution in a rectangular plate heated by a moving heat source. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 51, p. 865 – 872, 2008.
- KOMANDURI, R. Machining and grinding: A historical review of the classical papers. *Appl. Mech. Rev.*, v. 46, n. 3, p. 80–132, 1993.
- KOMANDURI, R.; HOU, Z. B. General solutions for stationary/moving plane heat source problems in manufacturing and tribology. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 43, p. 1679–1698, 2000.
- _____. Thermal modeling of metal cutting process: Part I temperature rise distribution due to shear plane heat source. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 42, p. 1715–1752, 2000.
- _____. A review of the experimental techniques for the measurement of heat and temperatures generated in some manufacturing processes and tribology. *Tribology International*, v. 34, p. 653–682, 2001.
- _____. Thermal modeling of metal cutting process: Part III - temperature rise distribution due to the combined effects of shear plane heat source and the tool-chip interface frictional heat source. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 43, p. 89–107, 2001.
- KOPS, L.; ARENSON, M. Determination of convective cooling conditions in turning. *Annals of the CIRP*, v. 49, p. 47–52, 1999.
- ÖLÇER, N. Y. General solutions to a class of unsteady heat conduction problems in a rectangular parallelepiped. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 12, n. 4, p. 393 – 411, 1969.

- LEONE, W. G. Distribution of shear-zone heat in metal cutting. *Transaction of ASME*, v. 76, p. 121–125, 1954.
- LIENHARD, J. *A heat transfer textbook*. 3. ed. [S.l.]: Phlogiston Press, 2008.
- LIU, S. et al. Solutions for temperature rise in stationary/moving bodies caused by surface heating with surface convection. *Journal Of Heat Transfer*, v. 126, p. 776–786, October 2004.
- LOEWEN, E. G.; SHAW, M. C. On the analysis of cutting tool temperatures. *Transaction of ASME*, v. 71, p. 217–231, 1954.
- MACHADO, A. R. et al. *Teoria da Usinagem dos Materiais*. 1nd.. ed. Rio de Janeiro: Ed. Edgard Blücher, 2009.
- MACHADO, A. R.; DINIZ, A. E. Vantagens e desvantagens do uso (ou não) de fluidos de corte. *Máquina e Metais*, p. 134–151, 2004.
- MATSUMOTO, Y. Workpiece temperature rise during the cutting aisi 4340 steel. *Wear*, v. 116, p. 309–317, 1987.
- MATWEB. *Online Materials Information Resource*. 2010. Disponível em: <http://www.matweb.com>. Acesso em: 25 mar. 2010.
- MERCHANT, M. E. Mechanics of the metal cutting process: I orthogonal cutting and a type 2 chip. *Journal of Applied Physical*, v. 16, 1945.
- MONTEIRO, E. R. et al. Integral transform solution for hyperbolic heat conduction in a finite slab. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 36, p. 297303, 2009.
- NGUYEN, N. T. et al. Analytical solutions for transient temperature of semi-infinite body subjected to 3-D moving heat sources. *Welding journal*, v. 78, n. 8, p. 265–274, August 1999.
- OXLEY, P. L. B. Modelling machining processes with a view to their optimization and to the adaptive control of metal cutting machine tools. *Robotics & Computer-Integrated Manufacturing*, v. 4, n. 1, p. 103–119, 1988.
- RADULESCU, R.; KAPOOR, S. G. An analytical model for prediction of tool temperature fields during continuous and interrupted cutting. *Journal of Engeneering for Industry*, v. 116, p. 135 – 143, 1994. ISSN 0043-1648.
- RAHMAN, M.; KUMAR, A. S.; SALAM, M. Experimental evaluation on the effect of minimal quantities of lubricant in milling. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, v. 42, p. 539–547, 2002.
- RICHARDSON, D.; KEAVEY, M.; DAILAMI, F. Modelling of cutting induced workpiece temperatures for dry milling. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, v. 46, p. 11391145, 2006.
- RUFFINO, R. *Fundamentos da usinagem dos metais*. São Paulo: Blucher, 1977.

- SADAT, H. A second order model for transient heat conduction in a slab with convective boundary conditions. *Applied Thermal Engineering*, v. 26, p. 962-965, 2006.
- SALES, W. et al. Cooling ability of cutting fluids and measurement of the chip-tool interface temperatures. *Industrial Lubrication and Tribology*, v. 54, n. 2, p. 5768, 2002.
- SCHÜLTZER, K.; SOUZA, A. Introdução do processo HSC na indústria brasileira. *Máquinas e Metais*, v. 407, p. 32 – 45, 1999.
- SCHULTZ, H.; MORIWAKI, T. High speed machining. *Annals of the CIRP*, v. 41, p. 637 – 643, 1993.
- SHAW, M. *Metal cutting principles*. Oxford: Oxford University Press, 1984.
- SILVA, M. B. da; WALLBANK, J. Cutting temperature: prediction and measurement methods - a review. *Journal of Materials Processing Technology*, v. 88, p. 195–202, 1999.
- SPIEGEL, M. R. *Análise de Fourier*. 3rd.. ed. São Paulo: Editora McGraw-Hill do Brasil, 1976.
- STEMMER, C. E. *Ferramentas de corte II*: brocas, alargadores, ferramentas de roscar, fresas, brochas, rebolos e abrasivos. Florianópolis: [s.n.], 1992.
- STRAUSS, W. A. *Partial differential equations*: An introduction. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1992.
- TRENT, E. M.; WRIGHT, P. K. *Metal Cutting*. 4. ed. Boston: Butterworth-Heinemann, 2000.
- UMBRELLO, D. et al. On the evaluation of the global heat transfer coefficient in cutting. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, v. 47, p. 1738–1742, 2007.
- VELHO, H. F. C. Problemas inversos: Conceitos básicos e aplicações. 2001. Disponível em: www.lac.inpe.br/~haroldo/CursoPI/CursoPI.pdf. Acesso em: 8 jun. 2010.
- WANG, Z.-H.; TAN, K. H. Sensitivity study of time delay coefficient of heat transfer formulations for insulated steel members exposed to fire. *Fire Safety Journal*, v. 41, p. 31 – 38, 2006.
- WOODBURRY, K. A. *Inverse Engineering Handbook*. 9nd. ed. London: CRC Press, 2003.
- YVONNET, J.; CHINESTA, F.; MICARI, F. A simple inverse procedure to determine heat flux on the tool in orthogonal cutting. *Journal of Machine Tools & Manufacture*, v. 46, p. 820–827, 2006.
- ÖZISIK, M. N. *Boundary value problems of heat conduction*. Pennsylvania: International textbook company, 1968.
- _____. *Heat conduction*. 2. ed. New York: Wiley, 1980.
- ÖZISIK, M. N.; ORLANDE, H. R. B. *Inverse Heat Transfer*. New York: Taylor & Francis, 2000.

ZUBAIR, M. S.; CHAUDHRY, M. A. Temperature solutions due to time-dependent moving-line-heat sources. *Heat and Mass Transfer*, v. 31, p. 185–189, 1996.

APÊNDICE A – Série de Funções

Dada uma série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, onde cada f_n é uma função. Seja B um conjunto aberto em R . Dizemos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge em B , para a função $s : B \rightarrow R$, se para cada $x \in B$, [Guidorizzi \(2006\)](#):

$$s(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) \quad (\text{A.1})$$

o que significa que para cada $x \in B$:

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f_i(x) \quad (\text{A.2})$$

A função $s = s(x)$ dada por $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, denomina-se soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$

A série de funções $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente, em B , à função $s : B \rightarrow R$ se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um natural n_0 tal que $x \in B$,

$$n > n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - s(x) \right| < \epsilon \quad (\text{A.3})$$

Teorema da Convergência: Se $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = f(x)$ converge uniformemente, em $B = (a, b)$ e se todas as funções $f_k(x)$ são contínuas em $\bar{B} = [a, b]$, então a soma $f(x)$ é contínua em $\bar{B} = [a, b]$ e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_b^a f_k(x) dx = \int_b^a f(x) dx \quad (\text{A.4})$$

Teorema da Convergência das Derivadas: Se todas as funções $f_k(x)$ são diferenciáveis em $\bar{B} = [a, b]$ e se a serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(c)$ converge para algum c , e se as series das derivadas $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x)$ converge uniformemente em $\bar{B} = [a, b]$, então $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente para a função $f(x)$ e

$$\sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x) = f'(x) \quad (\text{A.5})$$

Crterio de Cauchy (para a convergncia uniforme de uma srie de funes).

A srie de funes $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente, em B , funo $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um natural n_0 tal que, quaisquer que sejam os naturais m e n para todo $x \in B$,

$$m > n > n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^m f_k(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| < \epsilon \quad (\text{A.6})$$

Observe que:

$$\sum_{k=0}^m f_k(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_m(x)$$

A.1 Srie de Fourier

Suponha que a funo $f(x)$ esta definida em $-L < x < L$. Ento a srie de Fourier para $f(x)$

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (\text{A.7})$$

onde:

$$a_n = \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.8})$$

$$b_n = \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.9})$$

Teorema da Convergncia para Srie de Fourier, Strauss (1992): A srie de Fourier $a_n \chi_n(x)$ converge para $f(x)$ uniformemente em $\bar{B} = [a, b]$ desde que:

- i) $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ existam e são contínuas em $\bar{B} = [a, b]$, e
- ii) $f(x)$ satisfaz as condições de contorno.

Pelo Teorema da Convergência Uniforme de Series de Fourier, se função $f(x)$ é uma função periódica com período $2L$ e $f'(x)$ é contínua em $-L \leq x \leq L$ exceto em um número finito de pontos então para cada ponto x a série de Fourier de $f(x)$ converge e

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2} \left(\lim_{z \rightarrow x^+} f(z) + \lim_{z \rightarrow x^-} f(z) \right) \quad (\text{A.10})$$

Além disso, se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ converge então a série de Fourier converge uniformemente em $(-\infty, \infty)$

Proposição: Seja $f \in C^k(R)$ e 2π -periódica. Então:

1. Existem $M > 0$ tal que $|a_n| \leq \frac{M}{n^k}$ e $|b_n| \leq \frac{M}{n^k}$; $n \neq 0$.
2. Se $k \geq 2$ a série de Fourier de f converge uniformemente

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \quad \text{para } \epsilon > 0 \quad (\text{A.11})$$

A.2 Aproximação de Funções, *Spiegel (1976)*

Sejam $f(x)$ e $f'(x)$ seccionalmente contínuas em (a, b) . Sejam ψ_m , $m = 1, 2, \dots$, ortonormais em (a, b) . Consideremos então a soma finita

$$S_M(x) = \sum_{n=1}^M \alpha_n \psi_n(x) \quad (\text{A.12})$$

como uma aproximação de $f(x)$, onde os α_n , $n = 1, 2, \dots$, são constantes. Então o *erro médio quadrático* desta aproximação é dado por

$$\text{Erro médio quadrático} = \frac{\int_a^b [f(x) - S_M(x)]^2 dx}{b-a} \quad (\text{A.13})$$

e a *raiz do erro médio quadrático* é dada por

$$E_{mq} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - S_M(x)]^2 dx} \quad (\text{A.14})$$

O seguinte teorema determina as constantes α_n de modo que minimizem a raiz do erro médio quadrático.

Teorema: A raiz do erro médio quadrático A.16 é mínima quando os coeficientes α_n são iguais aos coeficientes generalizados de Fourier, isto é, quando

$$c_n = \int_a^b f(x)\psi_n(x)dx \quad (\text{A.15})$$

Costuma-se dizer que $S_M(x)$ com coeficientes c_n é uma aproximação de $f(x)$ no sentido dos *mínimos quadrados*

Quando $\alpha_n = c_n$ pode-se mostrar que a raiz do erro médio quadrático é dada por

$$E_{mq} = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left[\int_a^b [f(x)]^2 dx - \sum_{n=1}^M c_n^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.16})$$

A.3 Delta de Dirac, Figueiredo e Neves (2007)

O Delta de Dirac, $\delta(\cdot)$, foi introduzido pelo físico Paul Dirac nos estudos de análises de sinais, e neste contexto é conhecido também como função impulso, pode ser definido pelas seguintes condições:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

onde:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (\text{A.18})$$

Estas condições não são consistentes com a definição de função e portanto o delta de Dirac é governado por regras particulares justificadas pela teoria das distribuições. Seja f uma função integrável, o Delta de Dirac possui a seguinte propriedade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad (\text{A.19})$$

APÊNDICE B – Labview

O painel frontal do programa de aquisição de dados é mostrado na figura B.1, observa-se a esquerda da figura os blocos de inserção dos coeficientes angulares e das interseções das curvas de calibração dos termopares obtidas no apêndice C.

Figura B.1: Painel frontal do programa de aquisição dos experimentos

A figura B.2 ilustra o painel frontal durante a aquisição de dados, os três primeiros gráficos exibem a leitura dos termopares separados de acordo com o seu posicionamento (Lateral 1, Lateral 2 e Centrais), o gráfico abaixo expõe as leituras das aquisições de força. Ao lado direito do gráfico de forças encontra-se o painel com as propriedades do arquivo a ser salvo que inclui o botão de salvar e o caminho desejado para salvar o arquivo .txt dos dados adquiridos. Acionava-se o botão na tela do programa para gravar o arquivo .txt antes de iniciar o processo de corte. Abaixo do painel das propriedades observa-se os parâmetros que ocorreram a leitura de aquisição 50 amostras por segundo e 100 Hz.

Figura B.2: Painel frontal durante a aquisição do ensaios

APÊNDICE C – Calibração dos Termopares

A calibração dos termopares foi realizada por meio de um banho termostático com faixa de temperatura entre -60° a 250°C . O procedimento de calibração ocorreu com temperatura as temperaturas fixas a 20, 45 e 70°C esperando-se a temperatura estabilizar e então era anotado o valor de tensão associado a esta temperatura. Os valores de temperatura para a calibração foram escolhidos de acordo com a possível faixa de leitura de aquisição de temperaturas, segundo a literatura corrente. O procedimento foi repetido seis vezes visando à confiabilidade das medições, sendo três no sentido crescente de temperatura e três no sentido decrescente. A partir destes resultados construiu-se um gráfico de tensão média versus temperatura para cada termopar. Para cada curva foi construída uma regressão linear, obtendo uma equação que descreve a curva de calibração para cada termopar. A regressão linear mostrou-se satisfatória, pois o coeficiente de correlação linear ficou em torno de 0,99 para todos os termopares. Os dados obtidos e as curvas de calibração podem ser observados nas figuras C.1 a C.12. As tabelas mostram a tensão média, a incerteza absoluta e a incerteza relativa para cada termopar. A incerteza absoluta foi calculada com base na distribuição de probabilidade t-student com uma confiabilidade de 95 % para um número de observações $n=4$.

Figura C.1: Curva de calibração do termopar 1

Figura C.2: Curva de calibração do termopar 2

Tabela C.1: Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 1

Temperatura [$^{\circ}\text{C}$]	20	45	70
Tensão Média [V]	1,05	2,05	3,05
Incerteza Relativa [%]	$\pm 0,04$	$\pm 0,025$	$\pm 0,028$
Incerteza Absoluta [V]	$\pm 0,0004$	$\pm 0,0005$	$\pm 0,0008$

Tabela C.2: Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 2

Temperatura [$^{\circ}\text{C}$]	20	45	70
Tensão Média [V]	1,05	2,05	3,06
Incerteza Relativa [%]	$\pm 0,04$	$\pm 0,03$	$\pm 0,03$
Incerteza Absoluta [V]	$\pm 0,0004$	$\pm 0,0006$	$\pm 0,0010$

Figura C.3: Curva de calibração do termopar 3

Figura C.4: Curva de calibração do termopar 4

Tabela C.3: Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 3

Temperatura [$^{\circ}\text{C}$]	20	45	70
Tensão Média [V]	1,08	2,09	3,10
Incerteza Relativa [%]	$\pm 0,04$	$\pm 0,02$	$\pm 0,04$
Incerteza Absoluta [V]	$\pm 0,0004$	$\pm 0,0004$	$\pm 0,0012$

Tabela C.4: Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 4

Temperatura [$^{\circ}\text{C}$]	20	45	70
Tensão Média [V]	1,07	2,07	3,04
Incerteza Relativa [%]	$\pm 0,04$	$\pm 0,02$	$\pm 0,03$
Incerteza Absoluta [V]	$\pm 0,0004$	$\pm 0,0005$	$\pm 0,0010$

Figura C.5: Curva de calibração do termopar 5

Figura C.6: Curva de calibração do termopar 6

Tabela C.5: Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 5

Temperatura [°C]	20	45	70
Tensão Média [V]	1,08	2,07	3,08
Incerteza Relativa [%]	± 0,04	± 0,02	± 0,03
Incerteza Absoluta [V]	± 0,0004	± 0,0004	± 0,0009

Tabela C.6: Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 6

Temperatura [°C]	20	45	70
Tensão Média [V]	1,09	2,09	3,11
Incerteza Relativa [%]	± 0,04	± 0,02	± 0,005
Incerteza Absoluta [V]	± 0,0004	± 0,0005	± 0,0002

Figura C.7: Curva de calibração do termopar 7

Figura C.8: Curva de calibração do termopar 8

Tabela C.7: Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 7

Temperatura [$^{\circ}\text{C}$]	20	45	70
Tensão Média [V]	1,08	2,10	3,11
Incerteza Relativa [%]	$\pm 0,04$	$\pm 0,03$	$\pm 0,01$
Incerteza Absoluta [V]	$\pm 0,0004$	$\pm 0,0007$	$\pm 0,0004$

Tabela C.8: Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 8

Temperatura [$^{\circ}\text{C}$]	20	45	70
Tensão Média [V]	1,10	2,10	3,10
Incerteza Relativa [%]	$\pm 0,04$	$\pm 0,03$	$\pm 0,01$
Incerteza Absoluta [V]	$\pm 0,0005$	$\pm 0,0007$	$\pm 0,0003$

Figura C.9: Curva de calibração do termopar 9

Figura C.10: Curva de calibração do termopar 10

Tabela C.9: Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 9

Temperatura [$^{\circ}\text{C}$]	20	45	70
Tensão Média [V]	1,02	1,94	2,63
Incerteza Relativa [%]	$\pm 0,04$	$\pm 0,06$	$\pm 0,03$
Incerteza Absoluta [V]	$\pm 0,0004$	$\pm 0,0012$	$\pm 0,0008$

Tabela C.10: Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 10

Temperatura [$^{\circ}\text{C}$]	20	45	70
Tensão Média [V]	1,07	2,06	3,06
Incerteza Relativa [%]	$\pm 0,04$	$\pm 0,03$	$\pm 0,02$
Incerteza Absoluta [V]	$\pm 0,0004$	$\pm 0,0005$	$\pm 0,0006$

Figura C.11: Curva de calibração do termopar 11

Figura C.12: Curva de calibração do termopar 12

Tabela C.11: Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 11

Temperatura [°C]	20	45	70
Tensão Média [V]	1,05	2,05	2,93
Incerteza Relativa [%]	±0,04	±0,03	± 0,03
Incerteza Absoluta [V]	±0,0005	±0,0005	±0,0008

Tabela C.12: Tensão Média, Incerteza absoluta e incerteza relativa da curva de calibração do termopar 12

Temperatura [°C]	20	45	70
Tensão Média [V]	1,08	2,07	3,09
Incerteza Relativa [%]	±0,04	± 0,02	± 0,01
Incerteza Absoluta [V]	± 0,0004	±0,0005	±0,0004

APÊNDICE D – Coeficiente de transferência convectiva experimental descrito no capítulo 4.7.2

O coeficiente de transferência convectiva foi calculado a partir da seguinte equação:

$$q = A_p h (T_s - T_\infty) \quad (\text{D.1})$$

onde $A_p = 0,00215 \text{ m}^2$ é a área da placa do experimento ilustrado na figura 4.8 e $q = P = E \cdot I$.

As Tabelas D.1 a D.5 mostram os dados de entrada para o cálculo do coeficiente de transferência convectiva h dos sistemas de refrigeração, os valores obtidos para o coeficiente h experimental, a média desses valores e o desvio médio, equação (4.23) para $n=5$.

Tabela D.1: Coeficiente de transferência convectiva experimental sem refrigeração

Corrente I [V]	Tensão E [A]	Calor q [W]	Temperatura da Superfície T_s [°C]	Temperatura ambiente T_∞ [°C]	Coeficiente de transferência convectiva h [W/m ² °C]
0,31	7,3	2,26	31,9	23	118,26
0,45	10,8	4,86	45,1	23,8	106,3
0,6	14,1	8,46	56,6	24,6	122,84
0,75	18	13,5	77,7	25	119,15
0,9	21,7	19,5	87,7	25	144,95
Média					122,3
Desvio médio					15,1

Considerando que 100 % do calor gerado por eletricidade flui para a placa

Nas tabelas D.4 e D.5 pode-se observar que a variação de corrente e tensão difere das tabelas D.1, D.2 e D.3. Isto ocorreu com o intuito de manter a temperatura da superfície T_s maior que T_∞ , para tal foi necessário iniciar com os valores de tensão e corrente, 0,45 V e 10,9 A, respectivamente e para obter o mesmo número de estimativas para h acrescentou-se a estimativa com os valores de tensão e corrente, 1,5 V e 35,5 A.

Figura D.1: Gráfico do Coeficiente de Transferência Convectiva Experimental versus Diferença de Temperatura $T_s - T_\infty$ para o Sistema sem refrigeração

Tabela D.2: Coeficiente de transferência convectiva experimental com refrigeração MQL para o fluido MQL 1

Corrente I [V]	Tensão E [A]	Calor q [W]	Temperatura da Superfície T_s [°C]	Temperatura do fluido T_∞ [°C]	Coeficiente de transferência convectiva h [W/m²°C]
0,3	7,3	2,19	27,9	26,7	848,8
0,45	10,9	4,9	30	26,7	691,3
0,67	14,2	9,5	32,7	26,6	725,4
0,76	18	13,7	37,4	26,5	582,0
0,9	21,9	19,7	42,9	26	542,45
Média					678
Desvio médio					92,6

Considerando que 100 % do calor gerado por eletricidade flui para a placa

Tabela D.3: Coeficiente de transferência convectiva experimental com refrigeração MQL para o fluido MQL 2

Corrente I [V]	Tensão E [A]	Calor q [W]	Temperatura da Superfície T_s [°C]	Temperatura do fluido T_∞ [°C]	Coeficiente de transferência convectiva h [W/m²°C]
0,3	7,2	2,16	25,9	23	436,8
0,45	10,9	4,9	30,1	24,9	438,7
0,67	14,5	9,7	34,9	26	509
0,76	18	13,7	41,6	27,1	438,8
0,9	21,5	19,35	46,2	27,7	487,36
Média					462,27
Desvio médio					29

Considerando que 100 % do calor gerado por eletricidade flui para a placa

Tabela D.4: Coeficiente de transferência convectiva experimental com refrigeração por Inundação para o Fluido 1

Corrente I [V]	Tensão E [A]	Calor q [W]	Temperatura da Superfície T_s [°C]	Temperatura do fluido T_∞ [°C]	Coeficiente de transferência convectiva h [W/m ² °C]
0,45	10,9	4,9	24,8	24,3	4562,8
0,67	14,5	9,7	25,2	24,2	4372,8
0,76	18	13,7	25,7	24,1	3895,6
0,9	21,6	19,4	27	24	3047,8
1,5	35,5	53,2	31,4	23,6	3175
				Média	3810,9
Desvio				médio	682,7

Considerando que 100 % do calor gerado por eletricidade flui para a placa

Figura D.2: Gráfico do Coeficiente de Transferência Convectiva Experimental versus Diferença de Temperatura $T_s - T_\infty$ para o Sistema MQL

Tabela D.5: Coeficiente de transferência convectiva experimental com refrigeração por Inundação para o Fluido 2

Corrente I [V]	Tensão E [A]	Calor q [W]	Temperatura da Superfície T_s [°C]	Temperatura do fluido T_∞ [°C]	Coeficiente de transferência convectiva h [W/m ² °C]
0,45	10,9	4,9	25,6	25,3	6844,2
0,67	14,5	9,7	26,4	25,7	6455
0,76	18	13,7	26,7	25,6	5614,2
0,9	21,5	19,35	27,9	25,4	3552,6
1,5	36,5	54,7	31,8	25,6	4085,3
				Média	5310,3
				Desvio médio	1193

Considerando que 100 % do calor gerado por eletricidade flui para a placa

Figura D.3: Gráfico do Coeficiente de Transferência Convectiva Experimental versus Diferença de Temperatura $T_s - T_\infty$ para o Sistema Inundado

APÊNDICE E – Forças

A figura E.1 ilustra os gráfico da aquisição de dados de força dos ensaios sem sistema de refrigeração para os 5 primeiros avanços da ferramenta. O comportamento observado na figura E.1 se repete durante todo o evento de aquisição dos dados. Pode-se observar que nos gráficos de forças para o Ensaio E4 os dados de aquisição de força foram perdidos por falha no amplificador digital. Sendo assim para prosseguir com as estimativas dos parâmetros para prosseguir com as estimativas foram utilizados os mesmo dados do ensaio E1, pois este tem a mesma condições de corte das quais difere apenas a distância do termopar $d_{2,6}$ para $d_{1,4}$. Na figura E.1, o gráfico das forças F_x e F_y tiveram o mesmo comportamento durante o ensaio E3, desta forma, a curva da força F_x não aparece no gráfico pois está sobreposta pela curva da força F_y . As figuras E.2 e E.3 mostram os gráficos de força dos ensaios com sistema de refrigeração MQL e as figuras E.4 e E.5 mostram os mesmos gráficos para os ensaios com sistema de refrigeração Inundado.

Figura E.1: Gráfico das forças F_x , F_y e F_z nos ensaios sem refrigeração (a Seco)

Figura E.2: Gráfico das forças F_x , F_y e F_z nos ensaios com o MQL1

Figura E.3: Gráfico das forças F_x , F_y e F_z nos ensaios com o MQL2

Figura E.4: Gráfico das forças F_x , F_y e F_z nos ensaios com o Fluido 1

Figura E.5: Gráfico das forças F_x , F_y e F_z nos ensaios com o Fluido 2

APÊNDICE F – Análise dos Coeficientes de Sensibilidade

As figuras F.1 a F.3 mostram os gráficos dos coeficientes de sensibilidade para a estimativa simultânea do termo fonte de calor transiente, equação (4.6), e do coeficiente de transferência convectiva h , considerado neste caso constante e igual ao valor experimental da tabela D.1.

Figura F.1: Gráficos dos coeficientes de sensibilidade nos sensores da Lateral 1

Figura F.2: Gráficos dos coeficientes de sensibilidade nos sensores da Lateral 2

Figura F.3: Gráficos dos coeficientes de Sensibilidade nos Sensores Centrais

As figuras F.4, F.5 e F.6 mostram os gráficos dos coeficientes de sensibilidade para a estimativa do termo fonte de calor transiente, $g(t)$ (Equações (4.5), (4.6) e (4.7)), considerado neste caso h constante e igual ao valor experimental da tabela D.1.

Figura F.4: Gráficos dos coeficientes de sensibilidade da função teste do termo fonte de calor nos sensores da Lateral 1

Figura F.5: Gráficos dos coeficientes de sensibilidade da função teste do termo fonte de calor nos sensores da Lateral2

As figuras F.7, F.8 e F.9 mostram os gráficos dos coeficientes de sensibilidade da estimativa de h (constante) considerando os termos fonte de calor com distribuições uniforme, parabólica e gaussiana ($g(t)$ dada pelas equações (4.5), (4.6) e (4.7), respectivamente).

Figura F.6: Gráficos dos coeficientes de sensibilidade da função teste do termo fonte de calor nos sensores centrais

Figura F.7: Gráficos dos coeficientes de sensibilidade do coeficiente de transferência convectiva de calor nos sensores da Lateral 1

Figura F.8: Gráficos dos coeficientes de sensibilidade do coeficiente de transferência convectiva de calor nos sensores da Lateral 2

Figura F.9: Gráficos dos coeficientes de sensibilidade do coeficiente de transferência convectiva de calor nos sensores centrais

APÊNDICE G – Coeficiente de transferência convectiva analítico

O coeficiente de transferência convectiva foi calculado utilizando as equações (4.19) e (4.20) com o auxílio do software MapleTM12. Para cada ensaio foram tomadas as temperatura $T_{exp}(x_i, y_i, t_j)$ nos doze termopares localizados nos pontos (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, 12$, para t_j , $j = 1, \dots, 8$, ou seja, para oito instantes de tempos. Primeiramente foram calculados os coeficientes de transferência convectiva, h , para cada termopar da seguinte forma: para cada cálculo de h utilizando a equação (4.19) foram utilizada duas temperaturas $T_{exp}(x_i, y_i, t_j)$ em instantes diferentes, como foram coletados oito dados de temperatura resultou no cálculo de quatro valores de h e destes valores foi calculada a média aritmética, os valores de h_m descritos nas tabelas G.1, G.2 e G.3. A tabela G.1 mostra os valores obtidos para coeficiente de transferência convectiva analítico para os ensaios sem refrigeração.

Tabela G.1: Coeficiente de transferência convectiva Analítico dos ensaios sem refrigeração

Termopar	Coeficiente médio h_m					
	E1	E2	E3	E4	E5	E6
T1	60	47,5	53	61,8	51,8	100,9
T2	124	117,5	100,7	89	62,2	196,2
T3	117	86,1	194,9	129,5	123,6	154,4
T4	134	103,8	146,2	71,7	152,4	180,2
T5	81	92,4	57,6	61,6	66,6	101
T6	124	159,4	69,9	77,6	121	160,6
T7	147	73,1	117,6	93,2	104,3	106,4
T8	134	108	118	124,7	130,4	121,2
T9	127	63,8	114,6	36,9	79,7	167,9
T10	160	78,8	137,9	53,8	122,1	108,4
T11	132	149,8	180,5	129,9	124,8	200,9
T12	142	118,4	129,3	175,4	175,7	145,9
Média	124	100	118	92	110	145
Desvio Médio	18	26	32	32	30	31

A tabela G.2 mostra os valores obtidos para coeficiente de transferência convectiva analítico para os ensaios em MQL.

Tabela G.2: Coeficiente de transferência convectiva analítico dos ensaios com refrigeração em MQL

Termopar	Coeficiente médio h_m dos ensaios com MQL 1						Coeficiente médio h_m dos ensaios com MQL 2					
	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E19	E20	E21	E22	E23	E24
T1	841	650	724	693	519	619	583	728	673	662	720	421
T2	524	730	640	598	751	615	678	641	698	702	675	664
T3	837	809	654	615	667	629	614	841	549	576	484	849
T4	738	720	686	817	852	587	500	532	512	512	620	491
T5	615	865	716	776	763	615	603	655	642	572	672	863
T6	727	646	693	589	919	608	745	645	644	617	691	610
T7	832	751	852	634	784	567	614	544	599	520	640	638
T8	742	729	601	733	638	709	538	624	551	583	532	451
T9	639	841	616	612	696	635	652	609	639	525	654	628
T10	830	579	863	793	605	563	985	784	609	530	639	679
T11	833	692	612	480	645	536	579	564	609	426	581	554
T12	844	829	555	525	1093	828	285	86	565	656	570	443
Média	750	737	684	655	744	626	615	629	607	573	623	607
Desvio médio	85	68	71	89	116	49	98	78	39	52	48	97

A tabela G.3 mostra os valores obtidos para coeficiente de transferência convectiva analítico. Na tabela G.3 pode se observar as linhas vazias para os cálculos dos coeficientes de transferência convectiva dos termopares T2, para o Fluido 1 e T6 para o Fluido 2. Isto ocorreu devido a falhas na aquisição de sinais invalidando os dados experimentais de temperatura e consequentemente a estimativa do termo fonte e o cálculo do coeficiente de transferência convectiva analítico.

Tabela G.3: Coeficiente de transferência convectiva analítico dos ensaios com refrigeração

Termo par	Coeficiente médio h_m dos ensaios com Fluido 1						Coeficiente médio h_m dos ensaios com Fluido 2					
	E13	E14	E15	E16	E17	E18	E25	E26	E27	E28	E29	E30
T1	1750	1663	2142	1426	1157	1672	2239	1063	1498	2143	2051	1662
T2							3192	1965	2805	1871	2927	1500
T3	2877	2281	1236	1929	3035	1114	1912	1862	2277	1593	1751	2396
T4	2440	1983	1209	878	1733	1638	1034	3332	1623	1217	1217	2202
T5	1789	1162	2018	1782	1610	1681	4090	2456	2427	2306	1575	2992
T6	1060	1369	1233	2791	1073	2219						
T7	1924	2871	1198	983	1053	1565	1237	1308	1381	1701	1538	1645
T8	1124	2592	1546	1623	1675	2875	1226	1070	1510	1241	1241	2253
T9	3799	2003	1089	1482	2012	1068	1405	1181	1442	1286	1286	1613
T10	1368	1651	1126	2176	1476	1285	2022	1925	1791	2523	1566	1480
T11	1869	1293	1148	2080	1260	1969	1960	2929	1679	1676	3813	1679
T12	1060	1062	1624	1602	2260	2774	1006	1219	1801	1432	1213	1746
Média	1915	1812	1415	1705	1668	1805	1938	1846	1839	1726	1834	1924
Desvio Médio	614	485	303	406	432	475	692	616	361	352	597	390

APÊNDICE H – Cálculo do Erro de Aproximação utilizando a Equação (4.18)

Com o auxílio do software MapleTM12 foi calculado para cada sistema de refrigeração o erro de aproximação do cálculo analítico do coeficiente de transferência convectiva, equação (4.18). A tabela H.1 mostra os resultados obtidos utilizando como coeficiente de transferência convectiva a média dos ensaios para cada sistema de refrigeração (3a. coluna da tabela 5.5). As figuras H.1, H.2 e H.3 mostram os gráficos da curva do erro versus tempo adimensional (F_0 , equação (3.158))

Tabela H.1: Erro de Aproximação do Cálculo Analítico do Coeficiente de Transferência Convectiva

Fluido	h estimado	E_{sq} máximo $F_0=0$ ($t_c=0$)	E_{sq} mínimo $F_0=0,07$ ($t_c=60$ s)
Ar	114,8	2,3	1,7
MQL 1	699,6	0,02	$3,7 \cdot 10^{-6}$
MQL 2	608,8	0,02	$4,5 \cdot 10^{-6}$
Fluido 1	1719	0,009	$2,4 \cdot 10^{-4}$
Fluido 2	1851,2	0,0087	$3,3 \cdot 10^{-4}$

Figura H.1: Gráfico do Erro de aproximação, E_{sq} , para o Sistema sem Refrigeração

Figura H.2: Gráfico do Erro de aproximação, E_{sq} , para o Sistema com Refrigeração em MQL

Figura H.3: Gráfico do Erro de aproximação, E_{sq} , para o Sistema com Refrigeração Inundado

APÊNDICE I – Ensaios sem refrigeração

I.1 Ensaio E2

A tabela I.1 mostra os dados de entrada utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E2.

Tabela I.1: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E2

Dados de Corte	v_f	0,0025 m/s
	t_c	40 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,72
	W_y	0,95
	W_z	2,45
Temperatura Inicial [$^{\circ}C$]	T_0	22
Temperatura Ambiente [$^{\circ}C$]	T_{∞}	21
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	120 $W/m^2^{\circ}C$

A figura I.1 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E2 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura I.1: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E2

A figura I.2 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E2.

Figura I.2: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E2

I.2 Ensaio E3

A tabela I.2 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E3.

Tabela I.2: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E3

Dados de Corte	v_f	0,0033 m/s
	t_c	30 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,62
	W_y	2,09
	W_z	2,3
Temperatura Inicial [$^{\circ}C$]	T_0	24
Temperatura Ambiente [$^{\circ}C$]	T_{∞}	23
Coeficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	120 $W/m^2{}^{\circ}C$

A figura I.3 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E3 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura I.3: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E3

A figura I.4 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E3.

Figura I.4: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E3

I.3 Ensaio E4

A tabela I.3 mostra os dados de entrada utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E4. Pode-se observar que nos gráficos de forças ilustrados na seção E os dados de aquisição de força foram perdidos para prosseguir com as estimativas foram utilizados os mesmo dados do ensaio E1, pois este tem a mesma condições de corte das quais difere apenas a distância do termopar $d_{2,6}$ para $d_{1,4}$.

Tabela I.3: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E4

Dados de Corte	v_f	0,0017 m/s
	t_c	60 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,92
	W_y	0,91
	W_z	3,25
Temperatura Inicial [°C]	T_0	24
Temperatura Ambiente [°C]	T_∞	23
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	120 W/m ² °C

A figura I.5 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E4 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura I.5: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E4

A figura I.6 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E4.

Figura I.6: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E4

I.4 Ensaio E5

A tabela I.4 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E5.

Tabela I.4: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E5

Dados de Corte	v_f	0,0025 m/s
	t_c	40 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,73
	W_y	0,51
	W_z	2,98
Temperatura Inicial [°C]	T_0	25
Temperatura Ambiente [°C]	T_∞	24
Coeficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	120 W/m ² °C

A figura I.7 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E5 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura I.7: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E5

A figura I.8 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E5.

Figura I.8: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E5

I.5 Ensaio E6

A tabela I.5 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E6.

Tabela I.5: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E6

Dados de Corte	v_f	0,0033 m/s
	t_c	30 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,71
	W_y	0,87
	W_z	2,25
Temperatura Inicial [°C]	T_0	21
Temperatura Ambiente [°C]	T_∞	20

A figura I.9 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E6 e os respectivos erros residuais ($\text{erro}=\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura I.9: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E6

A figura I.10 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E6.

Figura I.10: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E6

APÊNDICE J – Ensaios com MQL 1

J.1 Ensaio E7

A tabela J.1 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E7.

Tabela J.1: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E7

Dados de Corte	v_f	0,0017 m/s
	t_c	60 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,92
	W_y	0,27
	W_z	2,76
Temperatura Inicial [$^{\circ}C$]	T_0	25
Temperatura Ambiente [$^{\circ}C$]	T_{∞}	23
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	678 $W/m^2^{\circ}C$

A figura J.1 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E7 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

A figura J.2 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E7.

Figura J.1: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E7

Figura J.2: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E7

J.2 Ensaio E8

A tabela J.2 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E8.

Tabela J.2: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E8

Dados de Corte	v_f	0,0025 m/s
	t_c	40 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,7
	W_y	0,28
	W_z	2,85
Temperatura Inicial [°C]	T_0	25
Temperatura Ambiente [°C]	T_∞	23
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	678 W/m ² °C

A figura J.3 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E8 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura J.3: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E8

A figura J.4 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E8.

Figura J.4: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E8

J.3 Ensaio E9

A tabela J.3 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E9.

Tabela J.3: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E9

Dados de Corte	v_f	0,0033 m/s
	t_c	30 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,53
	W_y	0,28
	W_z	2,26
Temperatura Inicial [°C]	T_0	25
Temperatura Ambiente [°C]	T_∞	23
Coeficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	678 W/m ² °C

A figura J.5 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E9 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura J.5: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E9

A figura J.6 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E9.

Figura J.6: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E9

J.4 Ensaio E10

A tabela J.4 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E10.

Tabela J.4: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E10

Dados de Corte	v_f	0,0017 m/s
	t_c	60 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,62
	W_y	0,28
	W_z	2,44
Temperatura Inicial [°C]	T_0	25
Temperatura Ambiente [°C]	T_∞	23
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	678 W/m ² °C

A figura J.7 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E10 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura J.7: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E10

A figura J.8 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E10.

Figura J.8: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E10

J.5 Ensaio E11

A tabela J.5 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E11.

Tabela J.5: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E11

Dados de Corte	v_f	0,0025 m/s
	t_c	40 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,67
	W_y	0,29
	W_z	2,36
Temperatura Inicial [°C]	T_0	25
Temperatura Ambiente [°C]	T_∞	23
Coeficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	678 W/m ² °C

A figura J.9 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E11 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura J.9: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E11

A figura J.10 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E11.

Figura J.10: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E11

J.6 Ensaio E12

A tabela J.6 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E12.

Tabela J.6: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E12

Dados de Corte	v_f	0,0033 m/s
	t_c	30 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,62
	W_y	0,3
	W_z	2,13
Temperatura Inicial [°C]	T_0	26
Temperatura Ambiente [°C]	T_∞	24
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	678 W/m ² °C

A figura J.11 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E12 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura J.11: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E12

A figura J.12 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E12.

Figura J.12: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E12

APÊNDICE K – Ensaios com Fluido 1

K.1 Ensaio E13

A tabela K.1 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E13.

Tabela K.1: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E13

Dados de Corte	v_f	0,0017 m/s
	t_c	60 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,86
	W_y	0,71
	W_z	3,16
Temperatura Inicial [$^{\circ}C$]	T_0	21
Temperatura Ambiente [$^{\circ}C$]	T_{∞}	18
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	3800 $W/m^2^{\circ}C$

A figura K.1 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E13 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura K.1: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E13

A figura K.2 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E13.

Figura K.2: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E13

K.2 Ensaio E14

A tabela K.2 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E14.

Tabela K.2: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E14

Dados de Corte	v_f	0,0025 m/s
	t_c	40 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,83
	W_y	0,67
	W_z	2,86
Temperatura Inicial [°C]	T_0	20
Temperatura Ambiente [°C]	T_∞	16
Coeficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	3800 W/m ² °C

A figura K.3 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E14 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura K.3: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E14

A figura K.4 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E14.

Figura K.4: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E14

K.3 Ensaio E15

A tabela K.3 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E15.

Tabela K.3: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E15

Dados de Corte	v_f	0,0033 m/s
	t_c	30 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,61
	W_y	0,65
	W_z	2,6
Temperatura Inicial [$^{\circ}C$]	T_0	20
Temperatura Ambiente [$^{\circ}C$]	T_{∞}	16
Coeficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	3800 W/m ² °C

A figura K.5 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E15 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura K.5: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E15

A figura K.6 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E15.

Figura K.6: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E15

K.4 Ensaio E16

A tabela K.4 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E16.

Tabela K.4: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E16

Dados de Corte	v_f	0,0017 m/s
	t_c	60 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,8
	W_y	0,64
	W_z	3,3
Temperatura Inicial [°C]	T_0	21
Temperatura Ambiente [°C]	T_∞	17
Coeficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	3800 W/m ² °C

A figura K.7 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E16 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura K.7: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E16

A figura K.8 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E16.

Figura K.8: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E16

K.5 Ensaio E17

A tabela K.5 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E17.

Tabela K.5: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E17

Dados de Corte	v_f	0,0025 m/s
	t_c	40 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,72
	W_y	0,645
	W_z	2,7
Temperatura Inicial [°C]	T_0	21
Temperatura Ambiente [°C]	T_∞	17
Coeficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	3800 W/m ² °C

A figura K.9 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E17 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura K.9: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E17

A figura K.10 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E17.

Figura K.10: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E17

K.6 Ensaio E18

A tabela K.6 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E18.

Tabela K.6: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E18

Dados de Corte	v_f	0,0033 m/s
	t_c	30 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,7
	W_y	0,67
	W_z	2,6
Temperatura Inicial [°C]	T_0	21
Temperatura Ambiente [°C]	T_∞	17
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	3800 W/m ² °C

A figura K.11 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E18 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura K.11: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E18

A figura K.12 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E18.

Figura K.12: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E18

APÊNDICE L – Ensaios com MQL 2

L.1 Ensaio E19

A tabela L.1 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E19.

Tabela L.1: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E19

Dados de Corte	v_f	0,0017 m/s
	t_c	60 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,76
	W_y	0,28
	W_z	2,5
Temperatura Inicial [$^{\circ}C$]	T_0	23
Temperatura Ambiente [$^{\circ}C$]	T_{∞}	22
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	460 $W/m^2{}^{\circ}C$

A figura L.1 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E19 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura L.1: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E19

A figura L.2 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E19.

Figura L.2: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E19

L.2 Ensaio E20

A tabela L.2 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E20.

Tabela L.2: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E20

Dados de Corte	v_f	0,0025 m/s
	t_c	40 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,74
	W_y	0,29
	W_z	3,68
Temperatura Inicial [$^{\circ}C$]	T_0	23
Temperatura Ambiente [$^{\circ}C$]	T_{∞}	22
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	460 W/m ² °C

A figura L.3 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E20 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura L.3: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E20

A figura L.4 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E20.

Figura L.4: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E20

L.3 Ensaio E21

A tabela L.3 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E21.

Tabela L.3: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E21

Dados de Corte	v_f	0,0033 m/s
	t_c	30 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,53
	W_y	0,31
	W_z	1,9
Temperatura Inicial [°C]	T_0	24
Temperatura Ambiente [°C]	T_∞	23
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	460 W/m ² °C

A figura L.5 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E21 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura L.5: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E21

A figura L.6 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E21.

Figura L.6: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E21

L.4 Ensaio E22

A tabela L.4 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E22.

Tabela L.4: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E22

Dados de Corte	v_f	0,0017 m/s
	t_c	60 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,63
	W_y	0,27
	W_z	2,3
Temperatura Inicial [°C]	T_0	24
Temperatura Ambiente [°C]	T_∞	23
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	460 W/m ² °C

A figura L.7 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E22 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura L.7: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E22

A figura L.8 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E22.

Figura L.8: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E22

L.5 Ensaio E23

A tabela L.5 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E23.

Tabela L.5: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E23

Dados de Corte	v_f	0,0025 m/s
	t_c	40 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,69
	W_y	0,28
	W_z	1,9
Temperatura Inicial [°C]	T_0	24
Temperatura Ambiente [°C]	T_∞	23
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	460 W/m ² °C

A figura L.9 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E23 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura L.9: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E23

A figura L.10 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E23.

Figura L.10: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E23

L.6 Ensaio E24

A tabela L.6 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E24.

Tabela L.6: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E24

Dados de Corte	v_f	0,0033 m/s
	t_c	30 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,5
	W_y	0,29
	W_z	1,6
Temperatura Inicial [$^{\circ}C$]	T_0	24
Temperatura Ambiente [$^{\circ}C$]	T_{∞}	23
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	460 W/m ² °C

A figura L.11 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E24 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura L.11: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E24

A figura L.12 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E24.

Figura L.12: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E24

APÊNDICE M – Ensaios com Fluido 2

M.1 Ensaio E25

A tabela M.1 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E25.

Tabela M.1: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E25

Dados de Corte	v_f	0,0017 m/s
	t_c	60 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,75
	W_y	0,78
	W_z	3,7
Temperatura Inicial [$^{\circ}C$]	T_0	18
Temperatura Ambiente [$^{\circ}C$]	T_{∞}	20
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	5300 $W/m^2{}^{\circ}C$

A figura M.1 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E25 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura M.1: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E25

A figura M.2 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E25.

Figura M.2: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E25

M.2 Ensaio E26

A tabela M.2 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E26.

Tabela M.2: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E26

Dados de Corte	v_f	0,0025 m/s
	t_c	40 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,69
	W_y	0,7
	W_z	3,2
Temperatura Inicial [$^{\circ}C$]	T_0	19
Temperatura Ambiente [$^{\circ}C$]	T_{∞}	20
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	5300 W/m ² °C

A figura M.3 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E26 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura M.3: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E26

A figura M.4 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E26.

Figura M.4: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E26

M.3 Ensaio E27

A tabela M.3 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E27.

Tabela M.3: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E27

Dados de Corte	v_f	0,0033 m/s
	t_c	30 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,53
	W_y	0,66
	W_z	2,6
Temperatura Inicial [$^{\circ}C$]	T_0	19
Temperatura Ambiente [$^{\circ}C$]	T_{∞}	20
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	5300 W/m ² °C

A figura M.5 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E27 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura M.5: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E27

A figura M.6 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E27.

Figura M.6: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E27

M.4 Ensaio E28

A tabela M.4 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E28.

Tabela M.4: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E28

Dados de Corte	v_f	0,0017 m/s
	t_c	60 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,66
	W_y	0,69
	W_z	2,9
Temperatura Inicial [$^{\circ}C$]	T_0	19
Temperatura Ambiente [$^{\circ}C$]	T_{∞}	20
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	5300 W/m ² °C

A figura M.7 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E28 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura M.7: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E28

A figura M.8 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E28.

Figura M.8: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E28

M.5 Ensaio E29

A tabela M.5 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E29.

Tabela M.5: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E29

Dados de Corte	v_f	0,0025 m/s
	t_c	40 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,68
	W_y	0,68
	W_z	2,9
Temperatura Inicial [$^{\circ}C$]	T_0	19
Temperatura Ambiente [$^{\circ}C$]	T_{∞}	20
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	5300 W/m ² °C

A figura M.9 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E29 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura M.9: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E29

A figura M.10 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E29.

Figura M.10: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E29

M.6 Ensaio E30

A tabela M.6 mostra os dados experimentais utilizados na estimativa do termo fonte de calor para o ensaio E30.

Tabela M.6: Dados de entrada para a estimativa do termo fonte do Ensaio E30

Dados de Corte	v_f	0,0033 m/s
	t_c	30 s
Trabalho realizado pelas Forças [J]	W_x	1,53
	W_y	0,68
	W_z	2,9
Temperatura Inicial [°C]	T_0	19
Temperatura Ambiente [°C]	T_∞	20
Coefficiente de Transferência Convectiva Experimental	h	5300 W/m ² °C

A figura M.11 mostra o gráfico do aumento máximo da temperatura estimada após sucessivas iterações versus temperatura experimental para cada termopar do ensaio E30 e os respectivos erros residuais (erro= $\|T_{est} - T_{exp}\|$, para cada termopar).

Figura M.11: Gráficos dos resultados obtidos para o aumento de temperatura experimental versus estimada do Ensaio E30

A figura M.12 mostra o gráfico da função teste inicial (g inicial) e do termo fonte (g estimado) obtido pelo MGC e o gráfico da minimização da função objetivo após sucessivas iterações para o ensaio E30.

Figura M.12: Gráficos da minimização da função objetivo e estimativa do Termo fonte de calor do Ensaio E30

APÊNDICE N – Fotos dos ensaios

A figura N.1 mostra a foto da bancada experimental ilustrando as posições do dinamômetro, peça, bico aspersores e termopares.

Figura N.1: Foto ilustrando as posições do dinamômetro, peça, bico aspersores e termopares

A figura N.2 mostra a foto dos instrumentos de aquisição de dados (Computador, interface, Filtro passa baixo, e Amplificador).

Figura N.2: Foto dos instrumentos de aquisição de dados