

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

ENZO BARBERIO MARIANO

**Sistematização e Comparação de Técnicas, Modelos e Perspectivas
não-paramétricas de análise de Eficiência Produtiva**

São Carlos
2008

ENZO BARBERIO MARIANO

**Sistematização e Comparação de Técnicas, Modelos e Perspectivas
não-paramétricas de Análise de Eficiência Produtiva**

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia de Produção da Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo como requisito à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientadora: Prof. Dra. Daisy A. N. Rebelatto

São Carlos
2008

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTES TRABALHOS, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

M334s Mariano, Enzo Barberio
 Sistematização e comparação de técnicas, modelos e
perspectivas não-paramétricas de análise de eficiência
produtiva / Enzo Barberio Mariano ; orientadora Daisy A.
N. Rebelatto. -- São Carlos, 2008.

 Dissertação (Mestrado-Programa de Pós-Graduação e Área
de Concentração em Engenharia de Produção) -- Escola de
Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo,
2008.

 1. Produtividade - eficiência. 2. Eficiência.
3. Técnicas não-paramétricas. 4. Análise por envoltória
de dados (DEA). 5. Números índices. 6. Sistemas
especialistas. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO


Candidato: Engenheiro **ENZO BARBERIO MARIANO**

Dissertação defendida e julgada em 18/04/2008 perante a Comissão Julgadora:




Prof.^a Associada **DAISY APARECIDA DO NASCIMENTO REBELATTO (Orientadora)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO



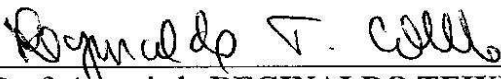
Prof. Titular **JOÃO VITOR MOCCELLIN**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO




Prof. Dr. **NEÓCLES ALVES PEREIRA**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO



Prof. Associado **REGINALDO TEIXEIRA COELHO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Produção



Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**
Presidente da Comissão da Pós-Graduação da EESC

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que me ajudaram direta ou indiretamente na elaboração dessa dissertação e em especial:

A meus pais, Walter Aparecido Mariano e Elizabette Aparecida Barberio Mariano por todo carinho, dedicação e suporte que me deram durante a minha vida.

A minha orientadora Daisy Aparecida do Nascimento Rebelatto, por ter sempre acreditado no meu potencial e me impulsionado a dar o melhor de mim, além de estar sempre disponível quando precisei.

Ao meu irmão Yves Barberio Mariano e a toda minha família: tios, tias e primos e em especial a meus primos João e Juliani Mariano Strozi pelo carinho e amizade e a minha tia Alice Aparecida Mariano Strozi que foi como uma segunda mãe para mim.

As minhas avós Sebastiana Gertrudes Morceli Mariano e Terezinha Mira de Assumpção Barberio que estiveram sempre presentes durante todas as fases da minha vida.

A minha amiga Mariana Rodrigues Almeida, pelo inestimável auxílio dado no início de minha vida acadêmica sem o qual jamais poderia ter chegado tão longe e pela parceria que tantos frutos já renderam.

A todos os amigos do laboratório de economia, especialmente ao Vinicius Sobreiro e ao Charbel Jabbour pela amizade e pelos conselhos que muito contribuíram para essa dissertação. Também ao Pedro Henrique, Débora Valente, Naja Brandão, Mario Oliveira e a Eliciane Silva pela convivência nesses dois anos de mestrado.

A todos os amigos da Engenharia de Produção turma 2001 e em especial ao Leonardo Costa, Tiago Canilo, Alexandre Faria, Alexandre Machado, Alexandre Chan,

Bruno Bossolani, Antonio Cordeiro Jr. e Juliana Banik pela grande amizade que nem a distância apagou.

Aos novos amigos da Pedagogia da UFSCar e em especial a Mariana de Souza, Veridiana Romeiro, Paulo César Tursi, Raíssa Carollo, Ana Carolina Santos, Ana Rita, Flavia Maria, Maria Rita, Ieda Laisner e Beatriz Groppa, cuja amizade contribuiu muito para o meu crescimento pessoal neste último ano.

Aos Professores João Vitor Moccellin e Néocles Alves Pereira, por todas as sugestões dadas no exame de qualificação que contribuíram muito para esse trabalho.

Ao meu orientador de iniciação científica Benedito Di Giacomo, que foi quem me orientou nos primeiros passos de minha vida acadêmica e com quem aprendi muito, tanto no âmbito pessoal quanto profissional; também a todos os amigos que fiz no laboratório de metrologia.

A todos os professores e funcionários do departamento de engenharia de produção que estão comigo desde o período de graduação e foram primordiais em minha formação.

RESUMO

MARIANO, E.B. **Sistematização e Comparação de Técnicas, Modelos e Perspectivas não-paramétricas de análise de Eficiência Produtiva** São Carlos, 2008. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Hoje, cada vez mais empresas empreendem uma busca desenfreada por eficiência produtiva em suas operações, sendo que essa eficiência será vital para a sobrevivência dessas empresas em um mercado cada vez mais competitivo. Com isso, fez-se necessário o desenvolvimento de técnicas que ajudassem na análise e avaliação da eficiência produtiva de empresas. Essas técnicas, chamadas genericamente de técnicas de análise de eficiência produtiva, são divididas em duas categorias: (a) as paramétricas (que constroem uma função) e (b) as não-paramétricas (que realizam cálculos empíricos por meio de uma fronteira de eficiência) sendo que, dentre as técnicas não-paramétricas de análise de eficiência, podemos citar a Análise por Envoltória de Dados (DEA) e a técnica dos Números Índices. O principal objetivo deste trabalho é identificar as principais técnicas não-paramétricas de análise de eficiência produtiva existentes na literatura e descobrir suas principais dimensões, equações, modelos, perspectivas e atualizações, para depois compará-las, vendo em quais situações cada técnica responde melhor. Para tal, foi realizada uma revisão dos principais conceitos ligados a essas técnicas e foi construído um sistema especialista que sistematiza o processo de escolha dentre as várias técnicas, modelos e perspectivas de análise de eficiência produtiva encontradas. Com esse trabalho espera-se obter uma compilação das principais técnicas de análise de eficiência não-paramétricas existentes na literatura, que possa ajudar gestores e acadêmicos que porventura vierem a estudar ou aperfeiçoar essas técnicas.

Palavras Chave: Eficiência; Técnicas Não-paramétricas; Análise por Envoltória de Dados (DEA); Números Índices e; Sistemas Especialistas.

ABSTRACT

MARIANO, E.B. **Systematization and Comparison of Techniques, Models and Prospects non-parametric of Productive Efficiency's analysis.** São Carlos, 2008. Dissertation (Master) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Today, more and more companies undertake a search for unbridled productive efficiency in its operations being that, this efficiency will be vital to the survival of these companies in an increasingly competitive market. With this, made it necessary to the development of techniques that help in the analysis and evaluation of the productive efficiency of firms. These techniques, known generally how techniques of the productive efficiency's analysis, are divided into two categories: (a) the parametric (which build a function) and (b) the non-parametric (which perform calculations empirical through a border of efficiency) being that, among the non-parametric techniques for the analysis of efficiency, we can cite the Data Envelopment Analysis (DEA) and the technique of Index Numbers. The main objective of this work is to identify the main non-parametric techniques of productive efficiency's analysis existing in the literature and discover its main dimensions, models, equations, perspectives and updates, and then compare them, seeing in which situations each technique responds better. For this, a review was undertaken of the main concepts related to these techniques and built a system specialist that systematize the process of choosing among the various techniques, models and prospective of productive efficiency's analysis found. With this work expect itself to get a compilation of the main techniques non-parametric of analysis of efficiency that existing in the literature, which can help managers and academics who will come to study or perhaps refine these techniques.

Key words: Efficiency; Non-parametric techniques; Data Envelopment Analysis (DEA); Index Numbers and; Specialist System.

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1 - Relação dos tipos de DMU com possíveis <i>inputs</i> e <i>outputs</i>	20
Quadro 2 - Resumo dos tipos de eficiência de uma DMU.....	50
Quadro 3- Comparação entre as técnicas Não-Paramétricas de Análise de Eficiência..	66
Quadro 4 - Comparação entre as técnicas Determinísticas e Estocásticas de análise de eficiência.....	68
Quadro 5 - Comparação entre as técnicas Não-Paramétricas de Análise de Eficiência..	71
Quadro 6 – Interpretação dos coeficientes u e v	82
Quadro 7 – Interpretação dos coeficientes w	118
Quadro 8 – Retorno a escala dos modelos multiplicativos.....	127
Quadro 9 - Quadro comparativo dos modelos da técnica DEA.....	137
Quadro 10 – Comparação entre as perspectivas de primeiro nível dos modelos CCR, BCC e FDH.....	139
Quadro 11 – Comparação entre as perspectivas de primeiro nível dos modelos Aditivos e Multiplicativos.....	140
Quadro 12 – Comparação entre as perspectivas de 2º, 3º e 4º níveis dos modelos DEA.....	142
Quadro13- Comparação entre os Índices de Laspeyres, Paasche, Fischer, Törnqvist..	172
Quadro 14 - Comparação entre os modelos da Técnica de Números índices.....	174
Quadro 15 – Comparação entre as perspectivas dos modelos da Técnica de Números Índices.....	176
Quadro 16 - Variáveis da infraestrutura física dos aeroportos.....	180
Quadro 17 - Variáveis de utilização dos aeroportos.....	181
Quadro 18 – Matriz de correlação entre as variáveis de <i>inputs</i> e <i>outputs</i>	182
Quadro 19 - Dados efetivamente utilizados na análise de eficiência dos aeroportos.....	183
Quadro 20 - Eficiência total, técnica e de escala dos aeroportos internacionais brasileiros.....	187
Quadro 21 - Tipo de retorno a escala dos aeroportos.....	189
Quadro 22 - Resultado das variáveis λ_k	191
Quadro 23 - <i>Benchmarks</i> dos aeroportos.....	192
Quadro 24 – Metas dos aeroportos.....	193

Quadro 25 – Variação percentual dos <i>inputs</i> e <i>outputs</i> em relação as suas metas.....	194
Quadro 26 – Folgas dos <i>inputs</i> e <i>outputs</i>	195
Quadro 27 - Dados de <i>inputs</i> e <i>outputs</i> normalizados.....	196
Quadro 28 – Coeficientes de utilidade.....	197
Quadro 29 - Eficiência da fronteira invertida e Eficiência combinada.....	199
Quadro 30 – Ranking de eficiência combinada entre os aeroportos.....	200
Quadro 31 - Distâncias relativas às fronteiras de eficiência.....	201
Quadro 32 - Índice Malmquist, alterações tecnológicas e alterações de eficiência.....	202
Quadro 33 – Valores e coeficientes dos <i>inputs</i> e <i>outputs</i> das DMUs base e em análise.....	204
Quadro 34 – <i>Inputs</i> e <i>outputs</i> virtuais das DMUs base e em análise com os respectivos coeficientes.....	204
Quadro 35 – Participação dos <i>inputs</i> e <i>outputs</i> das DMUs base e em análise em os respectivos <i>inputs</i> e <i>outputs</i> virtuais.....	205
Quadro 36 – Etapas para cálculo do Índice Törnqvist.....	205
Quadro 37 – Outros Números Índices.....	206
Quadro 38 - Possíveis valores das variáveis objetivo do SE.....	223
Quadro 39 - Valores que podem ser assumidos pelas variáveis auxiliares.....	225

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Representação de uma DMU.....	19
Figura 2 - Fronteira eficiente de produção.....	28
Figura 3 - Fronteira de eficiência de DMUs com um <i>input</i> e dois <i>outputs</i>	29
Figura 4 - Cálculo da produtividade de uma DMU.....	30
Figura 5 - Exemplo do cálculo da eficiência pela orientação aos <i>outputs</i>	32
Figura 6 - Exemplo do cálculo da eficiência pela orientação aos <i>inputs</i>	32
Figura 7 - Exemplo da determinação da projeção de duas DMUs para uma orientação de 30°.....	33
Figura 8 - Variáveis necessárias para o cálculo da eficiência para uma orientação qualquer.....	34
Figura 9 - Função Produção.....	38
Figura 10 - Mapa de Isoquantas.....	39
Figura 11 - Tipos de eficiência.....	40
Figura 12 - Mapa de Isocustos.....	44
Figura 13 - Ponto de eficiência alocativa.....	45
Figura 14 - Comparação entre o cálculo da Eficiência Total e Técnica.....	48
Figura 15 - Produtividade de DMUs que operam em escalas diferentes.....	49
Figura 16 - Estrutura hierárquica de uma técnica.....	57
Figura 17 - Etapas do método de cálculo da eficiência.....	58
Figura 18 - Técnicas, Modelos e perspectivas determinísticas de cálculo da eficiência.....	69
Figura 19 - Técnicas, Modelos e perspectivas estocásticas de cálculo da eficiência.....	69
Figura 20 - Comparação entre as fronteiras dos modelos BCC e CCR.....	75
Figura 21 - Correspondência entre modelos matemáticos DEA e o tipo de eficiência calculada.....	76
Figura 22 - Perspectivas dos modelos BCC e CCR.....	77
Figura 23 - Representação geométrica do coeficiente u	83
Figura 24 - Representação geométrica do coeficiente v	83
Figura 26 - As orientações aos <i>inputs</i> e aos <i>outputs</i>	85
Figura 27- Exemplos de folga como correção da fronteira linear por partes.....	99
Figura 28 - Fronteiras invertida e clássica.....	104

Figura 29 - Fronteira difusa.....	106
Figura 30 - Perspectivas dos modelos Aditivos.....	114
Figura 31 - Fronteira de eficiência e orientação de um modelo Aditivo Variante.....	115
Figura 32 - Exemplos de folgas nos modelos Aditivos.....	119
Figura 33 - Perspectivas dos modelos Multiplicativos.....	124
Figura 34 - Comparação das fronteiras BCC e FDH.....	132
Figura 35 - Perspectivas de um modelo FDH.....	132
Figura 36 – Modelos e perspectivas da técnica dos números índices	147
Figura 37 - Cálculo da eficiência pelos Números Índices orientados aos <i>outputs</i>	150
Figura 38 - Cálculo da eficiência pelos Números Índices orientados aos <i>inputs</i>	150
Figura 39 - Variáveis do calculo da distância de uma DMU relativa a fronteira.....	161
Figura 40 – Continuação das perspectivas dos Números Índices.....	166
Figura 41 - Estrutura de um sistema especialista.....	209
Figura 42 - Interface entre o sistema Expert SINTA e o projetista de conhecimento..	214
Figura 43 - Interface entre o SE gerado pelo Expert SINTA e o usuário.....	216
Figura 44 - Tela de resultados do SE gerado pelo Expert SINTA.....	217
Figura 45: Exemplo de uma regra de produção no Expert Sinta.....	241
Figura 46: Panorama geral da base de regras do sistema especialista.....	242
Figura 47: Exemplos da interface do sistema especialista.....	243
Figura 48: Exemplos da tela de resultados do sistema especialista.....	243
Figura 49 - Cálculo da eficiência para orientação ao <i>output</i>	256
Figura 50 - Cálculo da eficiência para orientação ao <i>input</i>	257
Figura 51 - Cálculo da eficiência para uma orientação qualquer.....	258
Figura 52 - Conjunto das soluções admissíveis.....	261
Figura 53 -Resolução de PL pelo método gráfico	262

LISTA DE SIGLAS

DMU	<i>Decision Making Units</i> (Unidades Tomadoras de Decisão)
FPP	<i>Factor of Partial Productivity</i> (Fator de Produtividade Parcial)
FTP	<i>Factor of Total Productivity</i> (Fator de Produtividade Total)
PL	Programação Linear
FO	<i>Função Objetivo</i>
DEA	<i>Data Envelopment Analysis</i> (Análise por Envoltória de Dados)
CCR	Charnes, Cooper e Rhodes
CRS	<i>Constant Returns to Scale</i> (Retornos Constantes a Escala)
BCC	Banker, Charnes e Cooper
VRS	<i>Variant Returns to Scale</i> (Retornos Variáveis a Escala)
FDH	<i>Free Disposal Hull</i> (Livre Disposição de Envoltória)
AT	Alterações na tecnologia
AE	Alterações na eficiência
IA	Inteligência artificial
SE	Sistemas Especialistas
SHELL	<i>Software</i> de desenvolvimento de sistemas especialistas.

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

Símbolos	Significado	págs
E_{energ}	Eficiência energética.....	14
W	Trabalho realizado.....	14
Energia	Energia total fornecida ao sistema.....	14
E	Eficiência.....	17, 24, 31, 34, 35, 36, 97, 144, 148, 151, 152, 153, 157, 158, 161, 162, 164, 171
Ind	Indicador de desempenho atual de um sistema.....	17, 18
Ind_{max}	Máximo valor que o sistema alcançar no indicador.....	17
Ind_{min}	Mínimo valor que o sistema pode alcançar no indicador.....	17
Ind_{meta}	Meta estabelecida para um indicador.....	18
P	Produtividade atual de uma DMU.....	21, 23, 24, 144, 151, 255
x	Quantidade do <i>output</i>	21
y	Quantidade do <i>input</i>	21
u_i	Utilidade do <i>output</i> i	23, 79, 81, 87, 88, 89, 90, 109, 110, 116, 118, 126, 127
y_i	Quantidade do <i>output</i> i	23
v_j	Utilidade do <i>input</i> j	23, 79, 81, 87, 88, 89, 90, 109, 110, 116, 118, 126, 127
x_j	Quantidade do <i>input</i> j	23
O_v	<i>Output</i> virtual.....	23, 112
I_v	<i>Input</i> (controlável) virtual.....	23, 112
P_{max}	Produtividade máxima que pode ser alcançada por uma DMU.....	24, 255
α	Ângulo da reta que une a origem à DMU analisada.....	30, 255, 256, 257, 258
D_{DMU}	Distância de uma DMU até um ponto fixo.....	31, 35, 148, 151, 160, 161, 256, 257
D_{proj}	Distância da projeção de uma DMU até um ponto fixo.....	31, 35, 160, 161, 256, 257
D_{XDMU}	Distância de uma DMU até o eixo x	34, 36, 97, 258

D_{Xproj}	Distância da projeção de uma DMU até o eixo x.....34, 36, 97, 258
D_{YDMU}	Distância de uma DMU até o eixo y.....34, 36, 97, 258
D_{Yproj}	Distância da projeção de uma DMU até o eixo y.....34, 36, 97, 258
$C_{ótimo}$	Custo da alocação de recursos ótima.....46
$L_{ótimo}$	Lucro da alocação de recursos ótima.....46
C_{atual}	Custo atual.....46
L_{atual}	Lucro atual.....46
n	Número de <i>inputs</i> (controláveis).....59, 79, 81, 87, 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95, 97, 110, 112, 117, 118, 120, 121, 122, 123, 126, 127, 128, 129, 130, 133, 152, 153, 157, 158, 167, 168, 169
m	Número de <i>outputs</i>59, 79, 81, 87, 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95, 97, 110, 117, 118, 120, 121, 122, 126, 127, 128, 129, 130, 133, 152, 153, 157, 158, 167, 168, 169
z	Número de DMUs em avaliação.....59, 79, 81, 87, 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95, 97, 116, 118, 120, 121, 123, 126, 127, 128, 129, 130, 133, 167, 168, 169
$f(x, \beta)$	Função produção.....68
β	Parâmetros estimados pela técnica Fronteira Estocástica.....68, 170
x_{jk}	Quantidade do <i>input</i> (controlável) j da DMU k.....79, 81, 87, 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95, 97, 112, 116, 118, 120, 121, 122, 123, 126, 127, 128, 129, 133
y_{ik}	Quantidade do <i>output</i> i da DMU k.....79, 81, 87, 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95, 97, 116, 118, 120, 121, 123, 126, 127, 128, 129, 133
x_{j0}	Quantidade do <i>input</i> (controlável) j da DMU em análise.....79, 81, 87, 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95, 97, 112, 116, 118, 120, 121, 122, 123, 126, 127, 128, 129, 130, 133, 152, 153, 157, 158, 205
y_{i0}	Quantidade do <i>output</i> i da DMU em análise.....79, 81, 87, 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95, 97, 116, 118, 120, 121, 122, 123, 126, 127, 128, 129, 130, 133, 152, 153, 157, 158, 205
u	Variável de retorno à escala do numerador.....81, 89
v	Variável de retorno à escala do denominador.....81, 90, 189
θ	Eficiência.....92, 94, 97, 112, 133, 167, 168, 169
η	Inverso da eficiência.....93, 95, 97

λ_k	Participação da DMU k na meta da DMU em análise....92, 93, 94, 95, 97, 112 120, 121, 123, 128, 129, 167, 168, 169, 190
S_i	Variável de folga do <i>output</i> i.....92, 93, 94, 95, 97, 120, 121, 122, 128, 129,130, 133
S_j	Variável de folga do <i>input</i> (controlável) j.....92, 93, 94, 95, 97, 112, 120, 121, 122, 123, 128, 129, 130, 133
I	Índice de ineficiência.....103, 198
E_c	Eficiência combinada.....104
E_{fc}	Eficiência obtida na fronteira clássica.....104
E_{fi}	Eficiência obtida na fronteira invertida.....104
GP	Grau de pertença.....107
A_{df}	Área da DMU difusa contida dentro da fronteira.....107
A_{DMU}	Área total da DMU difusa.....107
A, B, C, D	Parâmetros estipulados pelos decisores para restringir pesos.....109, 110
W_i	Porcentagem do <i>output</i> i no <i>output</i> virtual de uma DMU.....110
W_j	Porcentagem do <i>input</i> j no <i>input</i> virtual de uma DMU.....110
IN_v	<i>Input</i> virtual não-controlável.....112
$f(I_v IN_v)$	Em função de I_v mas dependente de IN_v112
t_{lk}	Quantidade do <i>input</i> não-controlável l da DMU k.....112
t_{l0}	Quantidade do <i>input</i> não-controlável l da DMU em análise.....112
o	Número de <i>inputs</i> não-controláveis.....112
S_l	Variável de folga do <i>input</i> não-controlável l.....112
w	Fator de escala dos modelos Aditivos e Multiplicativos....118, 127
P_{base}	Produtividade da DMU base.....144, 151
D_{base}	Distância da DMU base até um ponto fixo.....148, 151
OV_{DMU}	<i>Output</i> virtual da DMU em análise.....148, 151, 152, 153, 204
OV_{base}	<i>Output</i> virtual da DMU base.....148,151, 152, 153, 204
IV_{DMU}	<i>Input</i> virtual da DMU em análise.....148, 151, 152, 153, 204
IV_{base}	<i>Input</i> virtual da DMU base.....148, 151, 152, 153, 204
NI_i	Número índice orientado ao <i>input</i>148, 151
NI_o	Número índice orientado ao <i>output</i>148, 151
y_{ib}	Quantidade do <i>output</i> i da DMU base..... 152, 153, 157, 158, 205
x_{jb}	Quantidade do <i>input</i> j da DMU base.....152, 153, 157, 158, 205

u_{ib}	Utilidade da DMU base para o <i>output</i> i.....	152, 157
v_{jb}	Utilidade da DMU base para o <i>input</i> j.....	152, 157
u_{i0}	Utilidade da DMU em análise para o <i>output</i> i.....	153, 157
v_{j0}	Utilidade da DMU em análise para o <i>input</i> j.....	153, 157
E_{iF}	Eficiência pelo índice de Fischer.....	154
E_{iL}	Eficiência pelo índice de Laspeyres.....	154
E_{iP}	Eficiência pelo índice de Paasche.....	154
W_{ib}	Porcentagem do <i>output</i> i no <i>output</i> virtual da DMU base.....	157, 158, 205
W_{i0}	Porcentagem do <i>output</i> i no <i>output</i> virtual da DMU em análise.....	157, 158, 205
W_{jb}	Porcentagem do <i>input</i> j no <i>input</i> virtual da DMU base.....	157, 158, 205
W_{j0}	Porcentagem do <i>input</i> j no <i>input</i> virtual da DMU em análise.....	157, 158, 205
D	Distância relativa à Fronteira	160
D_0	Função distância relativa à fronteira do período 0.....	162, 164
D_t	Função distância relativa à fronteira do período t.....	162, 164
y_v^0	Quantidade do <i>output</i> virtual da DMU em análise no período 0.....	162, 164
x_v^0	Quantidade do <i>input</i> virtual da DMU em análise no período 0.....	162, 164
y_v^t	Quantidade do <i>output</i> virtual da DMU em análise no período t.....	162, 164
x_v^t	Quantidade do <i>input</i> virtual da DMU em análise no período t.....	162, 164
$D_0(x_v^0, y_v^0)$	Distância da DMU no período 0 relativa à fronteira do período 0.....	162, 164, 167, 175, 201
$D_0(x_v^t, y_v^t)$	Distância da DMU no período t relativa à fronteira do período 0.....	162, 164, 168, 175, 201
$D_t(x_v^0, y_v^0)$	Distância da DMU no período 0 relativa à fronteira do período t.....	162, 164, 168, 175, 201
$D_t(x_v^t, y_v^t)$	Distância da DMU no período t relativa à fronteira do período t.....	162, 164, 169, 175, 201

AT	Alterações Tecnológicas de uma DMU entre os períodos 0 e t.....164, 170, 171, 202
AE	Alterações de Eficiência de uma DMU entre os períodos 0 e t.....164, 170, 171, 202
x_{jk}^0	Quantidade do <i>input</i> j da DMU k no período 0.....167, 168
y_{ik}^0	Quantidade do <i>output</i> i da DMU k no período 0.....167, 168
x_{j0}^0	Quantidade do <i>input</i> j da DMU em análise no período 0.....167, 168
y_{i0}^0	Quantidade do <i>output</i> i da DMU em análise no período 0.....167, 168
x_{jk}^t	Quantidade do <i>input</i> j da DMU k no período t.....168, 169
y_{ik}^t	Quantidade do <i>output</i> i da DMU k no período t.....168, 169
x_{j0}^t	Quantidade do <i>input</i> j da DMU em análise no período t....168, 169
y_{i0}^t	Quantidade do <i>output</i> i da DMU em análise no período t.....168, 169
E^t	Eficiência de uma DMU no período t.....165, 170
E^0	Eficiência de uma DMU no período 0.....165, 170
$f(x,0,\beta)$	Função produção no período 0.....170
$f(x,t, \beta)$	Função produção no período t.....170
γ	Ângulo da reta que une a origem à projeção da DMU analisada.....255, 256, 257, 258
Base	Distância da DMU até um ponto fixo obtida com uma orientação perpendicular a orientação adotada.....256, 257
a_{ij}	Coefficientes tecnológicos.....260
b_i	Termos independentes.....260
c_j	Coefficientes da função objetivo.....260

SUMÁRIO

Agradecimentos.....	i
Resumo.....	iii
Abstract.....	iv
Índice de Quadros.....	v
Índice de Figuras.....	vii
Lista de Siglas.....	ix
Índice de Símbolos.....	x
Sumário.....	xv
Capítulo 1 - Introdução.....	1
1.1 Objetivos.....	4
1.2 Justificativa.....	5
1.3 Método.....	7
1.4 Estrutura do trabalho.....	10
Capítulo 2 – Conceitos Básicos da Análise de Eficiência.....	13
2.1 Eficiência e Eficácia de um sistema qualquer.....	14
2.2 Unidade Tomadora de Decisão (DMU - <i>Decision Making Units</i>).....	18
2.3 Produtividade.....	20
2.4 Eficiência Produtiva de uma DMU.....	24
2.5 Fronteira de Eficiência	26
2.6 Função Produção.....	36
2.7 Outros tipos de eficiência de DMUs.....	40
2.7.1 Eficiência Produtiva e Eficiência Econômica.....	41
2.7.2 Eficiência Produtiva e Eficiência alocativa.....	42
2.7.3 Eficiência Produtiva Total, Técnica e de Escala.....	46
Capítulo 3 - Estruturação do método e das técnicas de análise de eficiência produtiva.....	52
3.1 Estrutura hierárquica de uma técnica.....	53
3.1.1 Método e Técnica.....	53
3.1.2 Modelo e Perspectiva.....	55
3.2 Etapas do Método de análise de eficiência produtiva.....	57
3.2.1 Seleção das DMUs.....	58
3.2.2 Seleção dos <i>inputs</i> e <i>outputs</i>	59

3.2.2 Escolha da(s) técnica(s), do(s) modelo(s) e da(s) perspectiva(s).....	61
3.2.4 Escolha da ferramenta computacional.....	61
3.3 Comparação entre os grupos paramétrico e não-paramétrico das técnicas de análise eficiência.....	63
3.4 Comparação entre as técnicas paramétricas de análise de eficiência.....	66
3.5 Comparação entre as técnicas não-paramétricas de análise de eficiência.....	70
Capítulo 4 – Análise por Envoltória de Dados.....	72
4.1 Modelos do DEA.....	73
4.2 Modelos CCR e BCC.....	74
4.2.1 Perspectiva fracionária.....	78
4.2.2 Perspectiva das orientações aos <i>inputs</i> e aos <i>outputs</i>	84
4.2.3 Perspectiva Primal ou Forma dos Multiplicadores.....	85
4.2.4 Perspectiva Dual ou Forma do Envelope.....	91
4.2.5 Perspectiva da fronteira clássica.....	100
4.2.6 Perspectiva da Fronteira invertida.....	101
4.2.7 Perspectiva da Fronteira difusa.....	105
4.2.8 Restrições aos pesos.....	107
4.2.9 DEA com variáveis de <i>input</i> e <i>output</i> não-controláveis.....	111
4.3 Modelos Aditivos Variante e Invariante.....	113
4.3.1 Perspectiva Primal dos modelos Aditivos.....	115
4.3.2 Perspectiva Dual dos modelos Aditivos.....	118
4.3.3 Outras perspectivas dos modelos Aditivos.....	122
4.4 Modelos Multiplicativos Variantes e Invariantes.....	123
4.4.1 Perspectiva Primal dos modelos Multiplicativos.....	125
4.4.2 Perspectiva Dual dos modelos Multiplicativos.....	128
4.5 Modelo FDH.....	130
4.6 Comparação entre os modelos e perspectivas da Análise por Envoltória de dados	134
Capítulo 5 - Números Índices.....	143
5.1 Modelos e perspectivas da técnica dos Números Índices.....	145
5.2 Índices Laspeyres e Paasche.....	151
5.3 Índice de Fischer.....	154
5.4 Índice de Törnqvist.....	155
5.5 Índice de Malmquist.....	159

5.5.1 Perspectiva da Análise por Envoltória de Dados.....	165
5.5.2 Perspectiva da Fronteira Estocástica.....	169
5.6 Comparação entre os modelos e perspectivas da técnica dos Números Índices.....	172
Capítulo 6 - Estudo de Caso.....	177
6.1 Seleção das DMUs e dos <i>inputs</i> e <i>outputs</i>	178
6.2 Seleção das Técnicas, Modelos, Perspectivas e ferramenta computacional.....	184
6.3. Resultado da aplicação das Técnicas, Modelos e Perspectivas.....	185
6.3.1 Eficiência total, técnica e de escala.....	186
6.3.2 Metas e <i>Benchmarks</i>	190
6.3.3 Coeficientes de utilidade.....	196
6.3.4 Fronteira Invertida e Eficiência combinada.....	198
6.3.5 Índice Malmquist, alterações tecnológicas e alterações de eficiência..	200
6.3.6 Outros Números Índices.....	203
Capítulo 7 – Sistematização do processo de escolha das técnicas modelos e perspectivas de análise de eficiência.....	207
7.1 Sistemas especialistas.....	208
7.2 Regras de Produção.....	210
7.3 Sistema Expert SINTA.....	213
7.4 Sistematização do processo de escolha das técnicas, modelos e perspectivas de análise de eficiência.....	217
7.4.1 Seleção das variáveis objetivo do sistema.....	221
7.4.2 Seleção das outras variáveis e da interface do sistema.....	224
7.4.3 Implementação no Expert Sinta.....	240
Capítulo 8 – Conclusão.....	244
Bibliografia.....	249
Apêndice 1.....	255
Apêndice 2	259
Apêndice 3	265

Capítulo 1 - Introdução

A eficiência de um sistema pode ser definida como sendo a capacidade desse sistema de utilizar, da melhor maneira possível, os recursos disponíveis e de aproveitar, ao máximo, as condições ambientais para obter o desempenho ótimo em alguma dimensão. Um índice de eficiência pode ser obtido comparando-se um indicador de desempenho de um sistema com o valor máximo que esse indicador pode alcançar; valor esse definido a partir de algumas condições de contorno (ambiente + recursos disponíveis) (MARIANO; ALMEIDA; REBELATO, 2006a). Dentro dos vários tipos de sistemas em que se pode aplicar o conceito de eficiência, tem-se como um dos mais importantes, os sistemas produtivos, que se caracterizam por produzirem um conjunto de saídas (*outputs*) a partir de um conjunto de entradas (*inputs*), e que dão origem ao conceito de eficiência produtiva.

A eficiência produtiva sempre foi um atributo muito valorizado na sociedade surgida após a revolução industrial (que foi onde surgiram os sistemas produtivos), porém

nas últimas décadas sua importância cresceu drasticamente, visto que nesse período se intensificou o processo conhecido como globalização, cuja principal característica é a abertura de mercado entre os países. Tomado de surpresa por esse processo, o Brasil, no início da década de noventa, foi invadido por uma enorme gama de produtos importados, o que gerou um grande problema para a indústria nacional, menos competitiva que a estrangeira. Por outro lado a globalização proporcionou oportunidades para que as empresas nacionais pudessem competir em novos mercados, anteriormente fechados para elas. Assim, tanto no Brasil quanto no resto do mundo, a principal consequência da globalização foi o aumento da competitividade entre as empresas e devido a isso se tornou imprescindível, para a sobrevivência destas, que se opere com eficiência produtiva.

Para uma empresa do setor de manufatura, a eficiência produtiva pode ser definida como um indicador que avalia se essa empresa está conseguindo produzir uma boa quantidade de produtos a partir de um nível predeterminado de insumos, ou se está conseguindo utilizar poucos insumos para produzir uma determinada quantidade de produtos. Caso essa empresa opere com ineficiência em relação a suas concorrentes, será grande o risco dela fechar suas portas, pois estará utilizando muitos insumos para produzir poucos produtos, o que terá impacto direto nos custos, na competitividade e nos rendimentos dessa empresa.

Assim, é de extrema importância para uma empresa conhecer, com máxima antecedência possível, o seu nível de eficiência em relação às suas concorrentes, visto que isso possibilitará, em caso de ineficiência, que a empresa reaja e possa reverter a situação antes de ser esmagada por suas concorrentes.

O conceito de eficiência produtiva não se restringe a empresas de manufatura e pode ser generalizado para qualquer organização que transforme um conjunto de entradas

(*inputs*) em um conjunto de saídas (*outputs*). Essas organizações são chamadas genericamente de Unidades Tomadoras de Decisões (*Decision Making Units* -DMUs).

Para se calcular a eficiência produtiva de uma DMU foi necessário, antes de tudo, que se definisse um indicador de desempenho que a avaliasse sua *performance*. Esse indicador de desempenho foi chamado de produtividade e definido como sendo a relação entre os *outputs* e os *inputs* de uma dada DMU. Hoje, apesar de terem surgido como conceitos relativos às empresas do setor manufatureiro, os conceitos de produtividade e de eficiência produtiva estão sendo utilizados nas mais diferentes áreas do conhecimento.

Devido à crescente complexidade dos ambientes produtivos, e devido a essa nova gama de aplicações do conceito de eficiência produtiva, o número de variáveis consideradas em seu cálculo e análise cresceu drasticamente. Como resultado, a análise da eficiência produtiva se tornou um problema cada vez mais complexo, exigindo o desenvolvimento de técnicas (uma técnica é caracterizada como um conjunto de procedimentos) que pudessem facilitar esse trabalho (KOZYREFF FILHO; MILIONI, 2004).

Essas técnicas, surgidas a partir do trabalho de Farrel (1957), podem ser denominadas genericamente como “técnicas de análise de eficiência”, pois além de fornecerem o nível quantitativo da eficiência produtiva de uma DMU, elas ainda permitem uma série de outras análises como, por exemplo, a determinação de metas, utilidades e retornos à escala, sendo que algumas dessas técnicas nem mesmo permitem calcular o índice de eficiência produtiva. As técnicas de análise de eficiência produtiva podem ser definidas genericamente como técnicas que permitem a visualização, por parte de uma DMU, do seu desempenho quando comparado a um valor ótimo, fornecendo com isso um

parâmetro para que a DMU possa avaliar se o seu desempenho é ou não adequado, dada uma determinada conjuntura.

Os principais problemas que precisaram ser resolvidos pelas técnicas de análise de eficiência produtiva foram: (a) encontrar o valor da máxima produtividade que poderia ser atingida por uma dada DMU (que serviria de parâmetro para a análise da eficiência dessa DMU) e (b) encontrar um conjunto de pesos que agregasse os diferentes *inputs* e *outputs* e possibilitasse o cálculo da produtividade. Cada técnica buscará resolver esses dois problemas utilizando procedimentos diferentes.

Existem duas classes de técnicas de análise de eficiência produtiva: (a) as paramétricas, apoiadas numa função produção, que relaciona os *inputs* às máximas quantidades de *outputs* possíveis de serem produzidas e as (b) não-paramétricas, que constroem empiricamente uma fronteira de eficiência que vai servir de base para a análise da eficiência. Cada uma dessas técnicas possui características próprias além de um conjunto de modelos (representações da realidade) e um conjunto de perspectivas (pontos de vista), a partir das quais ela pode ser utilizada. Esse trabalho se propõe a estudar as técnicas, modelos e perspectivas não-paramétricas de análise de eficiência produtiva.

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é estudar o método e as principais técnicas, modelos e perspectivas não-paramétricas de análise de eficiência produtiva encontradas na literatura, além de sistematizar o processo de escolha dentre as várias possibilidades de combinações entre essas técnicas, modelos e perspectivas encontradas.

Para atingir esse objetivo faz-se necessário que se atinjam os seguintes objetivos secundários:

1. Organizar conceitos e elaborar classificações que permitam o entendimento e a representação das técnicas de análise de eficiência produtiva;
2. Identificar e caracterizar, verificando hipóteses, vantagens e desvantagens, as principais técnicas, modelos e perspectivas de análise de eficiência produtiva não-paramétricas encontradas na literatura;
3. Comparar as técnicas, modelos e perspectivas de acordo com as dimensões (limitações, pré-requisitos, resultados obtidos, etc) que cada uma contemple;
4. Ilustrar a utilização do método e de algumas das técnicas, modelos e perspectivas não-paramétricas de análise de eficiência produtiva por meio de um estudo de caso;
5. Sistematizar o processo de escolha de uma técnica/modelo/perspectiva, a partir do que for identificado na revisão bibliográfica e da experiência com o estudo de caso e desenvolver o protótipo de sistema especialista que represente essa sistematização.

1.2 Justificativa

A principal justificativa para esse trabalho é que a extensa quantidade de técnicas de análise de eficiência que foram desenvolvidas e posteriormente aprimoradas, por meio de novos modelos e atualizações, acaba dificultando a escolha adequada e a correta utilização dessas técnicas em um determinado problema.

No atual contexto competitivo é vital que todos os gestores conheçam o maior arsenal possível de técnicas, de maneira que possam se orientar ao se depararem com um novo problema. No caso das técnicas de análise de eficiência produtiva, nenhuma técnica

pode ser considerada vantajosa em todas as situações. Isso significa que é destinada ao gestor a tarefa de escolher a melhor técnica para a situação com a qual está lidando. Aos pesquisadores é apresentado o mesmo cenário que aos gestores das empresas, ou seja, uma proliferação de técnicas sem uma sistematização que permita a eleição adequada para os vários problemas com os quais se defrontam.

Para auxiliar tanto o pesquisador quanto o gestor nessa tarefa, é conveniente que exista uma compilação das principais técnicas de análise de eficiência produtiva existentes na literatura, que relacione cada uma dessas técnicas com suas principais características e que apresente de maneira clara suas equações, para que qualquer um possa utilizá-las e programá-las, sem depender exclusivamente de pacotes computacionais já prontos. Fora isso, também é bastante conveniente que exista um procedimento prático, de preferência já implementado em algum pacote computacional, que ajude na escolha dentre as várias técnicas, modelos e perspectivas de análise de eficiência produtiva encontradas na literatura.

Pretende-se assim, que esse trabalho seja um compêndio das principais técnicas de análise de eficiência produtiva não-paramétricas existentes na literatura, sendo essas técnicas apresentadas de maneira clara, organizada e hierarquicamente estruturada (separando técnicas, modelos e perspectivas); pretende-se também que esse trabalho possa ajudar tanto pesquisadores quanto gestores na correta escolha e utilização dessas técnicas.

O motivo de estarem sendo focadas nesse trabalho apenas as técnicas não-paramétricas de análise de eficiência produtiva deve-se ao fato dessas técnicas serem as mais versáteis e, justamente por isso, as mais utilizadas dentre as encontradas na literatura.

1.3 Método

Para alcançar os objetivos propostos, será empregada, no presente trabalho, uma abordagem bibliográfico-exploratória, ou seja, será realizado um estudo exploratório basicamente baseado em pesquisa bibliográfica. De acordo com Gil (1999), a pesquisa exploratória visa proporcionar maior familiaridade com o problema pesquisado, com vista a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses. Geralmente esse método envolve levantamentos bibliográficos, entrevistas e estudos de caso.

Ainda segundo Gil (1999), a pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. A principal vantagem da pesquisa bibliográfica é o fato de permitir, ao investigador, acessar uma gama de fenômenos muito mais ampla do que ele poderia pesquisar diretamente.

De acordo com Cervo e Bervian (1983), as principais funções da pesquisa bibliográfica são:

1. Não ocorrência de pesquisa dupla;
2. Ter como base trabalhos anteriores;
3. Construir uma base de conhecimento bem determinada; e
4. Servir de base teórica para o desenvolvimento do trabalho aplicado.

A pesquisa bibliográfica será utilizada para os seguintes fins: (a) encontrar referencial teórico sobre eficiência produtiva, (b) identificar as principais técnicas de análise de eficiência produtiva não-paramétricas existentes na literatura, com seus principais modelos e perspectivas, (c) obter informações, incluindo as equações

matemáticas, a respeito de cada técnica, modelo e perspectiva encontrada e (d) obter informações a respeito de sistemas especialistas e a respeito do *software* Expert SINTA.

Também será realizada uma ilustração, por meio de um estudo de caso, da utilização: (a) do método de análise de eficiência sistematizado nesse trabalho e (b) de algumas das técnicas, modelos e perspectivas não-paramétricas apresentadas nessa dissertação. Segundo Gil (2002), um estudo de caso consiste no estudo profundo e exaustivo de um ou poucos objetos, de maneira que permita seu amplo e detalhado conhecimento. Ainda segundo Gil (2002), seus resultados, de modo geral, são apresentados na forma de hipóteses, não de conclusões.

O estudo de caso que foi desenvolvido nessa dissertação envolveu a avaliação da eficiência de aeroportos internacionais brasileiros. O principal motivo de ter sido escolhido esse setor foi a facilidade de obtenção dos dados, que se encontram disponíveis no *site* da Infraero. Nesse *site* é possível encontrar os dados referentes aos *inputs* e *outputs*, em vários anos diferentes, de um conjunto considerável de aeroportos (DMUs); essa quantidade de dados viabiliza a aplicação de uma grande quantidade de técnicas, modelos e perspectivas.

Os materiais utilizados nessa pesquisa serão: (a) o *software* Expert SINTA, que foi desenvolvido pela universidade Federal do Ceará e pode ser encontrado no *site* <http://www.lia.ufc.br/>, e é um *software* que facilita a implementação de um sistema especialista; (b) o *software* Excel (especialmente sua ferramenta Solver) que ajudará tanto nos cálculos em geral quanto na programação linear; (c) o *software* SIAD, que foi desenvolvido pela Universidade Federal Fluminense e que pode ser encontrado no *site* www.uff.br/decisão, que auxiliará nos cálculos, quando a Análise por Envoltória de Dados (DEA) for utilizada no estudo de caso e; (d) as bases de dados SCOPUS e o Web of Science que ajudarão na realização da pesquisa bibliográfica.

Esse trabalho foi dividido dezoito fases apresentadas a seguir.

1. Revisão na literatura dos principais conceitos e principais bases teóricas ligadas às técnicas de análise de eficiência produtiva;
2. Investigação do conceito de eficiência produtiva e dos principais conceitos ligados a ele, com objetivo de caracterizá-los e diferenciá-los de outros conceitos;
3. Elaboração de uma classificação que permita representar todo o escopo de técnicas de análise de eficiência produtiva existentes na literatura;
4. Sistematização das etapas do método de análise de eficiência produtiva;
5. Caracterização do conjunto representado pelas técnicas não-paramétricas de análise de eficiência produtiva, diferenciando-o do conjunto representado pelas técnicas paramétricas;
6. Identificação na literatura das principais técnicas não-paramétricas de análise de eficiência produtiva;
7. Caracterização de cada uma das técnicas encontradas, verificando suas hipóteses básicas, além de suas vantagens e desvantagens;
8. Identificação, classificação e caracterização dos principais modelos e perspectivas de cada técnica encontrada;
- 9.** Apresentação e discussão das principais formulações matemáticas relacionadas às técnicas, modelos e perspectivas encontradas;
10. Estabelecimento, a partir da revisão teórica, de relações e comparações entre as técnicas, modelos e perspectivas;
11. Levantamento de dados de variáveis de infra-estrutura e de utilização de aeroportos internacionais brasileiros;

12. Realização das etapas do método de análise de eficiência nos dados dos aeroportos;
13. Aplicação da maior gama possível de técnicas, modelos e perspectivas de análise de eficiência nesses dados;
14. Análise dos resultados do estudo de caso;
15. Revisão na literatura de conceitos ligados a sistemas especialistas;
16. Familiarização com o *software* Expert SINTA;
17. Elaboração de um sistema especialista que sistematize o processo de escolha dentre as combinações de técnicas, modelos e perspectivas não-paramétricas de análise de eficiência;
18. Implementação do sistema no *software* Expert SINTA;
19. Elaboração do texto final da dissertação.

1.4 Estrutura do trabalho

A redação final da dissertação prevê 8 capítulos, sendo cada um deles descritos a seguir:

O **Capítulo 1**, chamado “Introdução”, apresenta, entre outras coisas, a contextualização do trabalho dentro de um panorama mais amplo, a definição dos objetivos e da justificativa desse trabalho e a apresentação do método utilizado para sua realização.

O **Capítulo 2**, intitulado “Conceitos Básicos de Análise de Eficiência”, apresenta um referencial teórico básico, que tratará de alguns tópicos relevantes relacionados ao tema de pesquisa. Entre esses assuntos estão as definições de eficiência (e de seus vários tipos), eficácia, produtividade, Unidades Tomadoras de Decisão (DMUs), função produção e fronteira de eficiência.

O **Capítulo 3**, intitulado “Estruturação do método e das técnicas de análise de eficiência produtiva”, apresenta, entre outras coisas: (a) a caracterização do grupo formado pelas técnicas não-paramétricas de análise de eficiência produtiva e a diferenciação entre esse grupo e do das técnicas paramétricas; (b) a apresentação de uma estrutura hierárquica (baseada nos conceitos de método, técnica, modelo e perspectiva) capaz de representar toda a complexidade das técnicas de análise de eficiência produtiva e que ajudará bastante no entendimento e utilização dessas técnicas e; (c) a sistematização das etapas do método de análise de eficiência produtiva que serão posteriormente aplicadas no estudo de caso.

Os **Capítulos 4 e 5**, intitulados respectivamente de “Análise por Envoltória de dados” e de “Números Índices”, apresentam uma compilação dos principais conceitos, hipóteses, equações, modelos e perspectivas referentes a essas duas técnicas não-paramétricas de análise de eficiência produtiva. Nesses dois capítulos estão presentes também diversos quadros comparativos, tanto entre as técnicas quanto entre seus modelos e suas perspectivas, que servirão de auxílio para a elaboração do sistema especialista.

No **Capítulo 6**, intitulado “Estudo de Caso”, serão apresentados os dados e os resultados obtidos no estudo de caso referente a análise da eficiência dos aeroportos internacionais brasileiros. Esse capítulo estará dividido de acordo com as etapas do método de análise de eficiência apresentado no Capítulo 3.

No **Capítulo 7**, intitulado “Sistematização do processo de escolha das técnicas, modelos e perspectivas de análise de eficiência”, serão apresentados: (a) os conceitos básicos a respeito de sistemas especialistas; (b) uma pequena explicação a respeito do *software* Expert SINTA e; (c) o sistema especialista desenvolvido para sistematizar o processo de escolha entre as técnicas, modelos e perspectivas não-paramétricos de análise de eficiência produtiva apresentados nos dois capítulos anteriores.

O **Capítulo 8** é reservado para as “Conclusões” (que também é o título do capítulo) obtidas após a etapa de revisão bibliográfica, após o estudo de caso e após a elaboração do sistema especialista.

Ao fim do texto se encontram três **Apêndices**; o primeiro referente a algumas deduções sobre as fórmulas de projeção na fronteira de eficiência, o segundo referente a alguns conceitos a respeito de programação linear e o terceiro com a base de regras do sistema especialista que foi desenvolvido.

Capítulo 2 - Conceitos Básicos de Análise de Eficiência

Antes de utilizar qualquer técnica de análise de eficiência produtiva é conveniente que se tenha conhecimentos básicos a respeito dos principais conceitos que dão sustentação às diversas técnicas disponíveis na literatura. Esses conceitos certamente irão ajudar na correta escolha da melhor técnica a ser utilizada e na correta interpretação dos resultados obtidos.

Entre os conceitos mais importantes, que devem ser conhecidos pelo usuário das técnicas de análise de eficiência produtiva, estão os conceitos de: (a) eficiência, (b) eficácia, (c) produtividade, (d) DMU, (e) fronteira de eficiência e (f) função produção. É importante lembrar, também, que o conceito de eficiência é muito amplo e, dependendo da área do conhecimento e do sistema a que ele estiver se referindo, terá um significado completamente diferente. Também é importante lembrar que, mesmo quando o sistema for uma DMU, existirão diversos tipos de eficiência que poderão ser analisados como: (a) a

eficiência econômica, (b) a eficiência alocativa, (c) a eficiência produtiva ou total, (d) a eficiência técnica e (e) a eficiência de escala. Esse capítulo irá apresentar e diferenciar todos esses conceitos.

2.1 Eficiência e eficácia de um sistema qualquer

Eficiência é a virtude ou característica (que pode ser atribuída a uma pessoa, máquina, técnica ou empreendimento) de conseguir o melhor rendimento com o mínimo de erros, dispêndio de energia, tempo, dinheiro ou meios (HOUAISS, 2001). O conceito de eficiência está ligado com a relação existente entre os resultados obtidos, os recursos empregados e as características do meio ambiente (condições de contorno) (MARTINS; LAUGENI, 2005). Pode-se concluir, então, que eficiência é uma característica que pode se relacionar a diversos tipos de sistemas e a diversos tipos de indicadores de desempenho podendo, assim, ser desmembrada em diversos tipos de eficiência, aplicáveis a diferentes áreas do conhecimento.

Na termodinâmica, por exemplo, o conceito de eficiência é dado como sendo a relação entre o trabalho realizado por um sistema (uma máquina, por exemplo) e a energia total fornecida a esse sistema, como é evidenciado na Expressão 1:

$$E_{\text{energ}} = W / \text{Energia} \quad (1)$$

Em que:

E_{energ} : Eficiência energética;

W: Trabalho realizado;

Energia: Energia total fornecida ao sistema.

Como, por definição, o trabalho realizado por um sistema é sempre menor que a energia fornecida a esse sistema (devido às perdas), a eficiência será sempre um valor entre 0 e 1, podendo também ser expresso em porcentagem, isto é, de 0 a 100%. Esse tipo de eficiência é conhecido como eficiência energética, visto que se refere a um sistema energético.

Já nas engenharias ou na administração, foco deste trabalho, a eficiência se refere a outros tipos de sistema - sistemas produtivos - que são caracterizados por produzirem um conjunto de saídas a partir de um conjunto de entradas. A eficiência de um sistema produtivo, chamada de eficiência produtiva, se refere à relação entre os *outputs* (saídas) e *inputs* (entradas) produzidos e utilizados por esse sistema.

A eficiência produtiva frequentemente se confunde com o conceito de produtividade, já que ela também é definida como sendo a relação entre os *outputs* e *inputs* de um sistema produtivo. A produtividade de um sistema, nada mais é do que um indicador da eficiência produtiva desse sistema. Assim, quanto maior a produtividade de um sistema mais eficiente ele será.

A grande diferença entre eficiência e produtividade é que a produtividade é um índice que agrega diferentes unidades de medida e que pode assumir qualquer valor real, enquanto a eficiência é sempre um valor adimensional entre 0 e 1. Por exemplo, uma empresa que produz 5 cadeiras em duas horas, terá uma produtividade de 2,5 cadeiras por hora. Essa não será sua eficiência, mas quanto maior for sua produtividade mais eficiente essa empresa será.

Além dos conceitos de produtividade e eficiência, outro conceito que suscita muitas dúvidas, é o conceito de eficácia. Segundo Ferreira (1975), eficiência e eficácia são sinônimas, sendo que ambas significam força ou virtude de se produzir um efeito desejado,

porém vários autores apresentam significados diferentes para eficiência e eficácia. Segundo Kassai (2002), a medida de eficácia está relacionada ao cumprimento de objetivos traçados, ou seja, quanto mais perto um sistema chega de uma meta traçada, mais eficaz ele é. De acordo com Martins e Laugeni (2005), uma decisão é mais eficaz quanto mais próximo dos objetivos estabelecidos chegarem os resultados obtidos. Segundo Ferreira, Reis e Pereira (1997), a eficácia está relacionada ao conceito de fazer a coisa certa, enquanto a eficiência está associada à melhor forma de fazer a coisa certa. Eficácia é a qualidade ou característica de quem consegue chegar realmente a consecução de um objetivo (HOUAISS, 2001).

Segundo Mello et al. (2005a), a eficácia está ligada apenas ao resultado obtido ou produzido, sem levar em conta os recursos utilizados para tal, nem as variáveis ambientais. Por exemplo, se um cursinho pré-vestibular, que tinha como meta que seus alunos ocupassem 50% das vagas de um determinado curso de medicina, conseguiu aprovar 15 alunos em um vestibular de uma universidade que oferece 20 vagas, pode-se dizer que esse cursinho foi altamente eficaz. No entanto, não se pode dizer se ele foi eficiente, já que não são conhecidos, entre outras coisas: que tipo de aluno estava inscrito, quantos professores trabalhavam, quantas horas de aula por semana eram dadas, que recursos audiovisuais estavam à disposição, etc (MELLO et.al., 2005a).

Um sistema eficiente não necessariamente precisa ser eficaz (assim, como um sistema eficaz não necessariamente precisa ser eficiente); pode haver situações, por exemplo, em que, apesar do sistema conseguir o melhor desempenho possível dada as suas condições de contorno (o que o caracteriza como eficiente), ele apresentar um desempenho insatisfatório, abaixo da meta estabelecida como padrão (não sendo, portanto, eficaz).

Segundo Mariano, Almeida e Rebelatto (2006a), o índice de eficiência, ou simplesmente eficiência, de um sistema, seja ele qual for, é definido como sendo a divisão

entre um indicador de desempenho desse sistema e o valor máximo que esse indicador poderia alcançar. Porém, em alguns casos, onde o indicador é inversamente proporcional ao desempenho do objeto (ou seja, é um indicador do tipo quanto menor melhor), a eficiência deve ser calculada como sendo o mínimo valor que o indicador pode alcançar dividido pelo indicador atual do sistema. Os dois casos são mostrados na Expressão 2:

$$E = \text{Ind} / \text{Ind}_{\text{max}}, \text{ ou } \text{Ind}_{\text{min}} / \text{Ind} \quad (2)$$

Em que:

E: Eficiência

Ind: Indicador de desempenho atual de um sistema;

Ind_{max} : Máximo valor que o sistema pode alcançar no indicador;

Ind_{min} : Mínimo valor que o sistema pode alcançar no indicador.

Esse conceito geral de eficiência pode ser aplicado a todas as situações, inclusive no cálculo da eficiência energética, já que o trabalho realizado por uma máquina pode ser definido como sendo um indicador de desempenho para essa máquina, e a energia fornecida pode ser interpretada como o máximo valor que esse indicador, o trabalho, poderia atingir (em uma situação ideal, em que não haveria nenhuma perda).

O maior desafio das técnicas de análise de eficiência é determinar, a partir das condições de contorno, isto é dos recursos empregados e das variáveis ambientais, o valor máximo que pode ser atingido por um indicador.

A eficácia pode ser calculada de forma semelhante à eficiência. A única diferença é que em vez de comparar o indicador de um sistema com o valor máximo ou mínimo que ele poderia alcançar, valor esse definido a partir das condições de contorno, a eficácia compara o sistema com uma meta estabelecida arbitrariamente, sem levar em consideração os dados de entrada, como mostra a Expressão 3.

$$\text{Eficácia} = \text{Ind} / \text{Ind}_{\text{meta}} \text{ ou } \text{Ind}_{\text{meta}} / \text{Ind} \quad (3)$$

Em que:

Ind: Indicador de desempenho atual de um sistema;

Ind_{meta} Meta estabelecida para o indicador.

Para uma máquina térmica, a eficácia seria calculada levando em consideração apenas o trabalho realizado (desempenho) ignorando completamente a energia inicial fornecida ao sistema. Esse trabalho seria comparado com o nível de trabalho considerado satisfatório pelo gestor (meta).

Como já reiterado, existem diversos tipos de eficiência e diversos tipos de eficácia sendo que, o que diferencia cada tipo é o indicador de desempenho e o sistema considerado. As técnicas de análise de eficiência produtiva não-paramétricas apresentadas nesse trabalho são aplicáveis apenas às situações onde o indicador de desempenho é a produtividade e o sistema considerado é uma DMU. No próximo item será melhor explicado o conceito de DMU.

2.2 Unidade Tomadora de Decisão (DMU - *Decision Making Units*)

As técnicas de análise de eficiência produtiva foram idealizadas inicialmente para trabalhar com empresas do setor de manufatura. Com o tempo, porém, essas técnicas passaram a ser utilizadas nas mais diferentes situações e nas mais variadas áreas de conhecimento, analisando a eficiência de qualquer sistema que transformasse um conjunto de entradas (*inputs*) em um conjunto de saídas (*outputs*).

Com isso, as técnicas de análise de eficiência produtiva podem analisar tanto empresas como um todo (que podem ser tanto do setor manufatureiro quanto do de serviço), quanto seus departamentos e subdivisões. Além disso, elas estão aptas a analisar repartições públicas, ONGs, associações beneficentes, países, veículos automotores, aeroportos e até mesmo pessoas.

Assim, fez-se necessária à criação de um conceito para a “unidade em análise” que englobasse toda a flexibilidade do conceito de eficiência produtiva. O conceito que mais se adequou a essa grande variedade de situações foi o conceito de Unidade Tomadora de Decisão (DMU - *Decision Making Units*), pois segundo Mello et al. (2005), uma maior ou menor produtividade está relacionada a decisões tomadas pelas unidades em estudo. Uma DMU pode ser definida como todo tipo de sistema produtivo que transforma, de forma consciente, ou seja, baseado em suas decisões (ou nas decisões de um gestor), um conjunto de entradas (*inputs*) em um conjunto de saídas (*outputs*). O conceito de DMU está ilustrado na Figura 1:

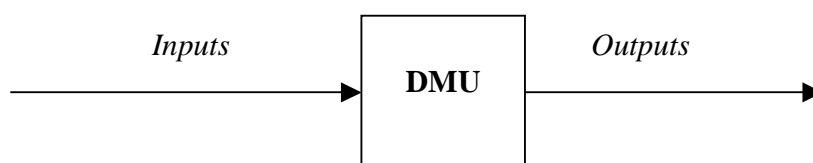


Figura 1 - Representação de uma DMU
Fonte: Mariano, Almeida e Rebelatto. (2006a)

No caso mais comum de análise de eficiência, em que se analisam empresas do setor de manufatura, os *inputs* serão sempre os insumos utilizados na produção e os *outputs* os produtos produzidos pela empresa. Porém, dependendo do tipo de DMU tratada, os

inputs e *outputs* considerados poderão ser os mais diferentes possíveis como exemplificado no Quadro 1:

<i>DMU</i>	<i>Inputs</i>	<i>Outputs</i>
Manufatura	Insumos	Produtos
Serviços	Insumos	Serviços
Repartições públicas	Repasse de recursos	Número de atendimentos ou Qualidade do atendimento
Associações beneficentes	Quantidade de doações	Número de projetos sociais realizados ou Tamanho da população beneficiada
Países	Gastos governamentais	PIB ou IDH
Indivíduo	Exercícios físicos ou Tipo de Alimentação	Condição de saúde
Veículos automotores	Preço ou custo de manutenção	Desempenho
Aeroportos	Infra-estrutura instalada ou número de funcionários	Nível de Utilização ou Qualidade do serviço

Quadro 1 - Relação dos tipos de DMU com possíveis *inputs* e *outputs*

Todos os exemplos do Quadro 1 (que é apenas uma pequena ilustração das muitas aplicações existentes) podem ser encontrados na literatura sendo que alguns de maneira mais farta, como no caso de empresas de manufatura, e outros de maneira mais incipiente. O estudo de caso desse trabalho estudará a situação em que as DMUs consideradas são aeroportos.

2.3 Produtividade

O conceito de produtividade nasce a partir da necessidade de se definir um indicador de desempenho para uma DMU. Segundo Campos (2004) e Catelli (1999), a produtividade pode ser definida como sendo a relação entre os *outputs* (saídas) e *inputs*

(entradas) de uma determinada DMU (sistema). A Expressão 4 mostra o cálculo da produtividade para uma DMU que apresente um único *input* e um único *output*.

$$P = y / x \quad (4)$$

Em que:

P: Produtividade atual de uma DMU;

y: quantidade do *output*;

x: quantidade do *input*.

Assim, a produtividade pode ser entendida como sendo um indicador que mede o quanto uma DMU consegue produzir (em termos da quantidade do *output*) com uma quantidade unitária de *input*. Segundo Lovell (1993), a produtividade pode variar devido a diferenças em termos da tecnologia de produção, da eficiência do processo de produção e do ambiente em que ocorre a produção. O índice Malmquist, pertencente à técnica dos Números Índices, mede a evolução da produtividade no tempo e é capaz de separar o quanto dessa evolução foi devido ao aumento/diminuição da eficiência e o quanto foi devido às mudanças ocorridas na tecnologia dessa DMU.

De acordo com Martins e Laugení (2005), o termo produtividade foi usado pela primeira vez, de maneira formal, em um artigo do economista francês Quesnay, em 1766. Entretanto, somente no início do século 20 a produtividade assumiu o significado de relação entre os *outputs* e *inputs* de um sistema produtivo. Segundo Moreira (1991), existem várias razões para mensurar a produtividade de uma DMU, pois esse índice pode ter várias utilidades, como listado a seguir:

1. Como ferramenta gerencial, para verificar os efeitos de mudanças organizacionais, ou da introdução de novos processos de produção;
2. Como instrumento de motivação;
3. Como forma de prever necessidades futuras de mão-de-obra;
4. Como um meio de comparar a *performance* de indivíduos ou departamentos em uma mesma empresa;
5. Como um meio de verificar a influência da produtividade sobre os preços;
6. Como uma maneira de medir a *performance* de uma empresa ou indústria no decorrer do tempo; e
7. Como uma forma de comparar a *performance* de empresas/indústrias sob regimes políticos alternativos.

A noção intuitiva de produtividade se adequa muito bem a situações em que a empresa trabalha com um único *input* e com um único *output*, porém a maioria das empresas trabalha com múltiplos *inputs* e múltiplos *outputs*. Também, parece adequar-se muito bem quando se deseja comparar apenas um único *input* e um único *output* de uma DMU que possua vários. Quando ocorre essa situação, esse índice é chamado de Fator de Produtividade Parcial (*Factor of Partial Productivity* - FPP). Segundo Moreira (1994), os principais FPP existentes são: (a) a produtividade da mão de obra e a (b) produtividade do capital. Porém, esse Fator de Produtividade Parcial era incapaz de avaliar uma DMU de maneira completa, exigindo assim a criação de um procedimento matemático para calcular a produtividade de uma DMU por meio de um único índice. O primeiro trabalho da literatura referente ao cálculo da produtividade de uma DMU com múltiplos *inputs* e múltiplos *outputs* foi proposto por Knight (1933) sendo citado por Lovell (1993). Esse

índice ficou conhecido como Fator de Produtividade Total (*Factor of Total Productivity* - FTP) constituindo-se na base para a maioria das técnicas de análise de eficiência.

Segundo Beckenkamp (2002), a fórmula de Knight (1933) pode ser entendida como sendo o cálculo da produtividade, da maneira mostrada na Expressão 4, para um único *input* virtual e um único *output* virtual, sendo que esse *input* virtual e esse *output* virtual podem ser definidos, respectivamente, como uma combinação linear de todos os *inputs* e uma combinação linear de todos os *outputs* de uma dada DMU. O *input* virtual e o *output* virtual recebem esse nome porque, apesar de estarem simulando *inputs* e *outputs* reais, não existem de fato; são apenas entidades fictícias que representam, respectivamente todos os *inputs* e todos os *outputs* de uma DMU, como um valor único. Desse modo, a produtividade de Knight (1933) é apresentada pela Expressão 5.

$$P = \frac{u_1 \cdot y_1 + u_2 \cdot y_2 + u_3 \cdot y_3 \dots + u_i \cdot y_i}{v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + v_3 \cdot x_3 \dots + v_j \cdot y_j} = O_v / I_v \quad (5)$$

Em que:

P: Produtividade atual de uma DMU;

u_i : Utilidade do *output* i;

y_i : Quantidade do *output* i;

v_j : Utilidade do *input* j;

x_j : Quantidade do *input* j;

O_v : *Output* virtual;

I_v : *Input* virtual.

A utilidade do *output* i (u_i), também pode ser denominada como taxa de troca desse *output*, enquanto a utilidade do *input* j (v_j) pode ser denominada como taxa de substituição desse *input*. Segundo Knight (1933) apud Lovell (1993), os coeficientes u_i e v_j poderiam

ser calculados com base no preço de mercado desses *inputs* ou *outputs* mas, no entanto, os preços dos *inputs* e *outputs* podem ser de difícil mensuração. Além disso, o preço de um *input* ou um *output* nem sempre reflete, da melhor maneira, sua real importância. Assim, o cálculo das utilidades u_i e v_j passa ser um problema para o cálculo da produtividade e por consequência da eficiência produtiva.

Segundo Moreira (2002), a produtividade dada pela Expressão 4 é dita absoluta e a sua unidade deriva diretamente da unidade dos *inputs* e *outputs* envolvidos; as utilidades dos *inputs* e dos *outputs*, por sua vez, são valores adimensionais. O conceito de produtividade é mais usado quando se trata de DMUs do setor de manufatura, porém assim como o conceito de eficiência produtiva, pode ser generalizado para qualquer tipo de DMU.

2.4 Eficiência Produtiva de uma DMU

Segundo Lovell (1993), a eficiência produtiva de uma unidade de produção (DMU) resulta da comparação entre os valores, observado e ótimo, em suas relações *input-output* (produtividade). Assim, tendo como base à definição geral de eficiência dada pela Expressão 2, que diz que eficiência é a relação entre um indicador de desempenho e o máximo valor que esse indicador pode alcançar, e sabendo que a produtividade é um indicador de desempenho de uma DMU, a eficiência produtiva dessa DMU pode ser calculada pela Expressão 6.

$$E = P / P_{\max} \quad (6)$$

Em que:

E: Eficiência;

P: Produtividade atual de um a DMU;

P_{\max} : Produtividade máxima que pode ser alcançada por uma DMU.

Assim, se uma determinada DMU que produz cadeiras, possui uma produtividade de 4 cadeiras por funcionário, mas sabe-se, que dadas às condições de contorno, ela poderia produzir 8 cadeiras por funcionário; então a sua eficiência será: $(4/8) = 0,5$ ou 50%. Caso o índice de eficiência de uma DMU seja igual a 1, isso significa que ela é eficiente, ou seja, que sua produtividade atingiu o valor máximo. Entretanto, caso o índice de eficiência for menor que 1, significa que essa DMU é ineficiente, e, portanto, ainda pode melhorar.

Segundo Farrell (1957), quando o assunto é a eficiência produtiva de uma DMU, geralmente, está-se referindo ao grau de sucesso dessa DMU, no esforço de gerar a máxima quantidade possível de *outputs*, a partir de um dado conjunto de *inputs*. Segundo Lins e Meza (2000), de acordo com a definição proposta por Pareto-Koopmans (1951), uma DMU operará com eficiência produtiva se e somente se:

1. Nenhum dos *outputs* puder ser aumentado sem que algum outro *output* seja reduzido ou algum *input* seja aumentado e;
2. Nenhum dos *inputs* puder ser reduzido sem que algum outro *input* seja aumentado ou algum *output* seja reduzido.

Com a Expressão 6 pode-se calcular dois tipos de eficiência para uma DMU: (a) a eficiência absoluta e a (b) eficiência relativa. Na eficiência absoluta, a produtividade máxima (P_{\max}), utilizada na fórmula, é um valor teórico e inatingível (ideal) enquanto, na eficiência relativa, o P_{\max} é baseado nas produtividades das DMU mais eficientes do mesmo setor. Uma DMU dificilmente terá eficiência absoluta igual a 1, pois está sendo comparada com um valor ideal e inatingível. Por outro lado, mesmo que uma DMU seja eficiente do ponto de vista da eficiência relativa, ela ainda assim poderá aumentar sua produtividade, e

se aproximar cada vez mais da eficiência absoluta. Deve-se ressaltar que a maior parte das técnicas de análise de eficiência produtiva encontradas na literatura trabalha apenas com a eficiência relativa.

O cálculo da eficiência relativa apresenta duas dificuldades: (a) a determinação dos pesos (utilidades) para que se calcule a produtividade e (b) a determinação da produtividade máxima que pode ser alcançada por uma DMU. Para resolver esses problemas foram criadas as técnicas de análise de eficiência produtiva, sendo que cada uma delas procura resolver os mesmos problemas de formas diferentes.

Como já explicado, as técnicas de análise de eficiência produtiva são divididas em dois grandes grupos: o das técnicas paramétricas e o das técnicas não-paramétricas, sendo que as técnicas não-paramétricas buscam calcular a eficiência a partir da construção empírica de uma **fronteira de eficiência**, enquanto as técnicas paramétricas buscam calcular a eficiência por meio da obtenção de uma **função produção**, que relacione *outputs* e *inputs*. Esses dois conceitos, fronteira de eficiência e função produção, encontram-se detalhados nas próximas duas seções.

2.5 Fronteira de Eficiência

Segundo Mariano, Almeida e Rebelatto (2006a), uma fronteira de eficiência pode ser definida como sendo o lugar geométrico ocupado por todas as DMUs, de um determinado conjunto, consideradas eficientes. A construção da fronteira de eficiência é um requisito básico para as técnicas não-paramétricas de análise de eficiência.

Casa Nova (2002) define a fronteira de eficiência como sendo uma curva de máxima produtividade, considerando a relação ótima entre *inputs* e *outputs*, onde se localizarão todas as DMUs consideradas eficientes, enquanto as ineficientes se localizarão

abaixo dela. Desse modo, o termo fronteira de eficiência denomina quais pontos limitam a produtividade sobre os quais uma unidade produtiva hipotética é eficiente.

Uma fronteira de eficiência é sempre definida pelo conjunto de DMUs que está sendo comparado sendo que, uma DMU só poderá ser dita eficiente para aquele conjunto a partir do qual a fronteira de eficiência foi construída. Caso mude o conjunto considerado também deverá mudar a fronteira de eficiência, pois quanto mais produtivas forem as DMUs do conjunto comparado, maior a produtividade necessária para que uma DMU seja considerada eficiente.

A fronteira de eficiência é um gráfico onde todas as DMUs são representadas por meio de pontos. No eixo y desse gráfico se encontram os valores do *output* virtual e no eixo x se encontram os valores do *input* virtual de cada DMU analisada. A Figura 2 apresenta um exemplo de uma fronteira de eficiência. As DMUs que se encontram sobre a linha vermelha, que é a fronteira propriamente dita, são todas eficientes, enquanto as DMUs que se encontram abaixo dessa linha são todas ineficientes. As DMUs representadas pelos pontos A e B da Figura 2 são eficientes, pois ambas se encontram no limite máximo da produtividade que podem alcançar quando comparadas com suas concorrentes.

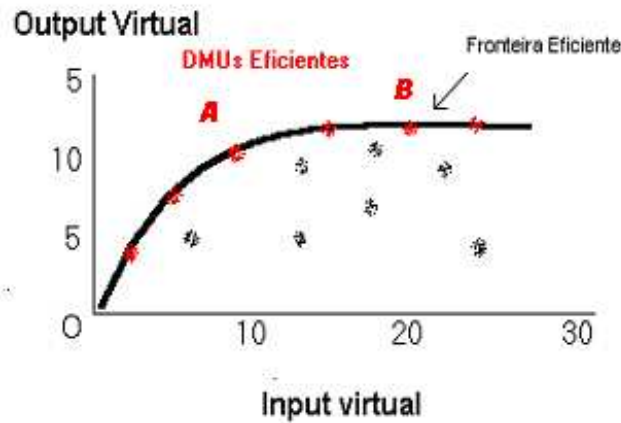


Figura 2 - Fronteira eficiente de produção.

Existem outras formas de se representar uma fronteira de eficiência, porém essas formas só valem para casos muito específicos como, por exemplo, para DMUs com dois *outputs* e um *input* ou para DMUs com dois *inputs* e um *output*. Para o caso de dois *outputs* e um *input*, a fronteira pode ser representada em um gráfico, onde o eixo x apresenta o valor do *output* 1 dividido pelo *input* e o eixo y o valor do *output* 2 dividido também pelo *input*, como ilustrado na Figura 3. No caso de dois *inputs* e um único *output* basta seguir o mesmo raciocínio que será obtida uma fronteira com formato semelhante ao representado na Figura 3.

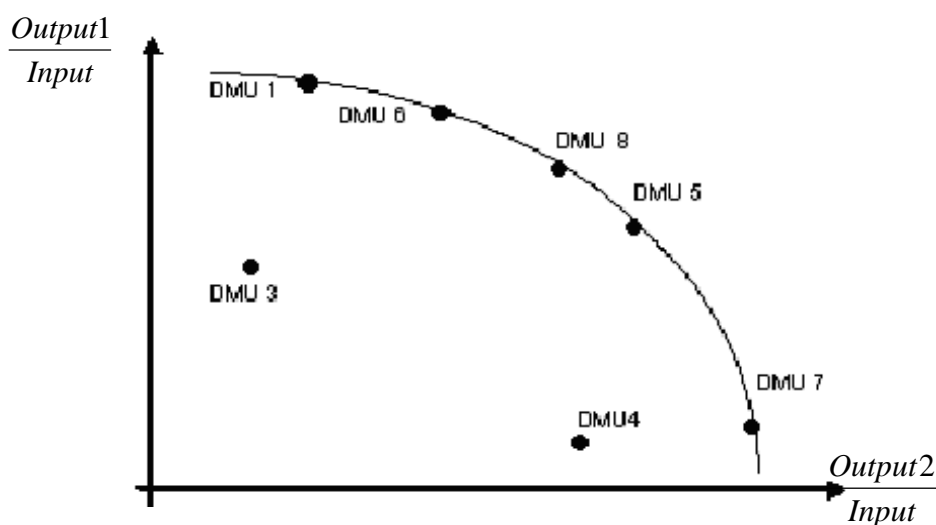


Figura 3 - Fronteira de eficiência de DMUs com um *input* e dois *outputs*
 Fonte: Rousseau (1998).

Apesar da representação da fronteira contida na Figura 3 ser bem comum em artigos científicos, ela só serve para casos bem específicos. Por outro lado a representação na forma *Input virtual/Output virtual*, expressa na Figura 2, se adequa a qualquer caso, pois independentemente do número de *inputs* e *outputs* analisados, a fronteira sempre poderá ser representada no plano. Porém, para se usar esse tipo de fronteira, existe a grande limitação de que ela necessita, para ser construída, dos coeficientes de utilidade de cada *input* e *output* de cada DMU do conjunto analisado. É por causa dessa limitação que se faz necessário, ao se trabalhar com esse tipo de fronteira, a utilização de técnicas de análise de eficiência.

Alguns cálculos podem ser realizados graficamente, a partir de uma fronteira de eficiência; são esses procedimentos gráficos que dão origem às técnicas não-paramétricas de análise de eficiência. A produtividade de uma DMU, por exemplo, pode ser calculada pela tangente do ângulo da reta que liga a origem a essa DMU (α), como mostra a Figura 4.

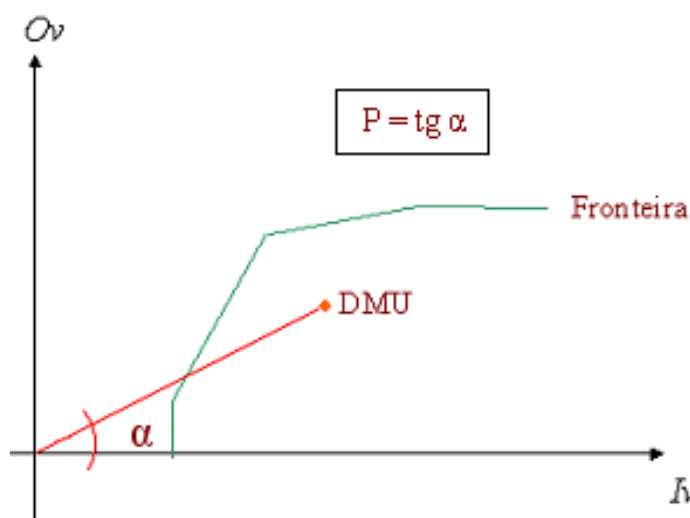


Figura 4 – Cálculo da produtividade de uma DMU

Já a eficiência de uma DMU pode ser estimada utilizando-se, como base, a distância relativa dessa DMU até a fronteira. Quanto mais longe uma DMU estiver da fronteira tanto menor será sua eficiência.

Toda DMU ineficiente pode ser projetada na fronteira de eficiência. Essa projeção (DMU_{proj}) será uma estimativa da meta que essa DMU ineficiente deve atingir para ser considerada eficiente. Essa projeção também será uma estimativa da produtividade máxima (P_{max}) que pode ser alcançada por essa DMU.

Utilizando-se a definição de eficiência e alguns conceitos de matemática básica, é possível estimar, algebricamente, a eficiência de uma DMU, a partir de sua fronteira de eficiência. Porém, para que se calcule a eficiência é necessário antes de tudo que defina uma orientação.

Uma orientação é definida por três pontos: (a) o ponto que representa a DMU, (b) o ponto que representa a projeção da DMU na fronteira e (c) um ponto fixo qualquer (que usualmente se encontra sobre um dos eixos); esses três pontos devem estar na mesma

direção, ou seja, devem ser colineares. A direção da reta formada por esses três pontos é denominada orientação do modelo de cálculo da eficiência; as duas orientações mais utilizadas nas técnicas de análise de eficiência produtiva são: (a) orientação aos *inputs* (em que a reta formada pelos três pontos colineares é paralela ao eixo x) e (b) orientação aos *outputs* (em que a reta é paralela ao eixo y). Para os casos de orientação aos *inputs* e de orientação aos *outputs* a eficiência de uma DMU pode ser calculada pela Expressão 7 cuja dedução pode ser vista no Apêndice 1.

$$E = D_{DMU} / D_{proj} \text{ (orientação ao } output \text{) ou} \quad (7)$$

$$E = D_{proj} / D_{DMU} \text{ (orientação ao } input \text{)}$$

Em que:

E: Eficiência;

D_{DMU} : Distância de uma DMU até um ponto fixo;

D_{proj} : Distância da projeção de uma DMU até um ponto fixo.

A Figura 5 exemplifica o procedimento de cálculo da eficiência para a orientação aos *outputs* e a Figura 6 para a orientação aos *inputs*.

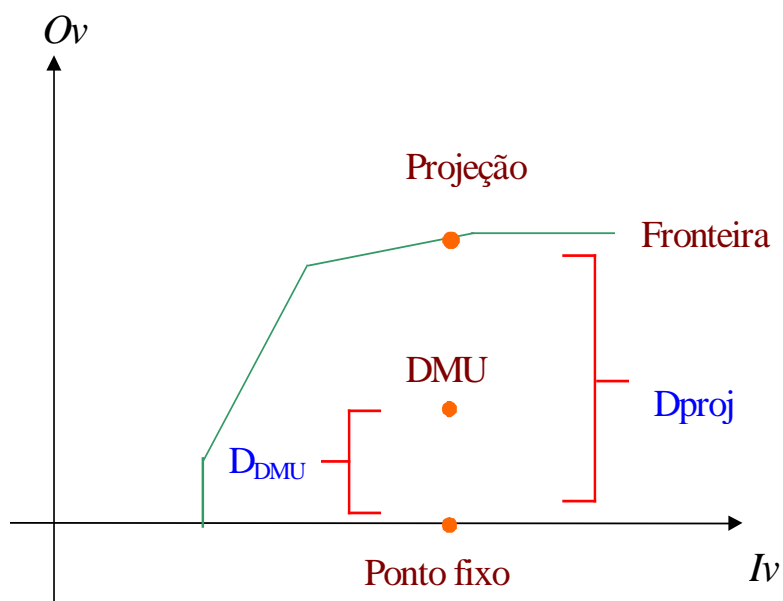


Figura 5 – Exemplo do cálculo da eficiência pela orientação aos *outputs*

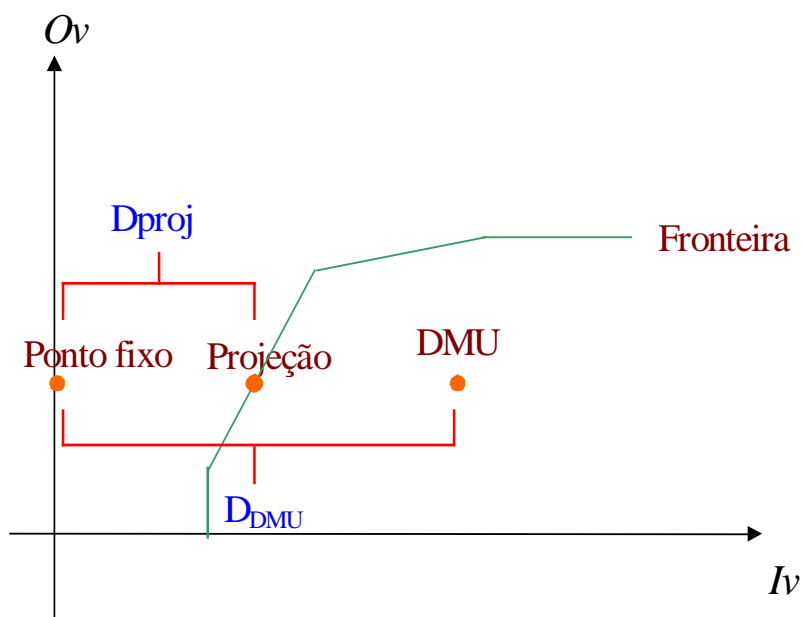


Figura 6 – Exemplo do cálculo da eficiência pela orientação aos *inputs*.

Dependendo da orientação escolhida, o valor da eficiência encontrado mudará, pois mudará o valor da produtividade máxima (P_{max}). Além das orientações ao *input* e ao *output*,

existem infinitas outras orientações como, por exemplo, a representada na Figura 7, que possui uma inclinação de 30° em relação ao eixo x. Escolhida uma orientação (direção), o ponto fixo mudará de lugar para cada DMU analisada. Assim, apesar da orientação ser a mesma o ponto fixo não é o mesmo, para todas as DMUs.

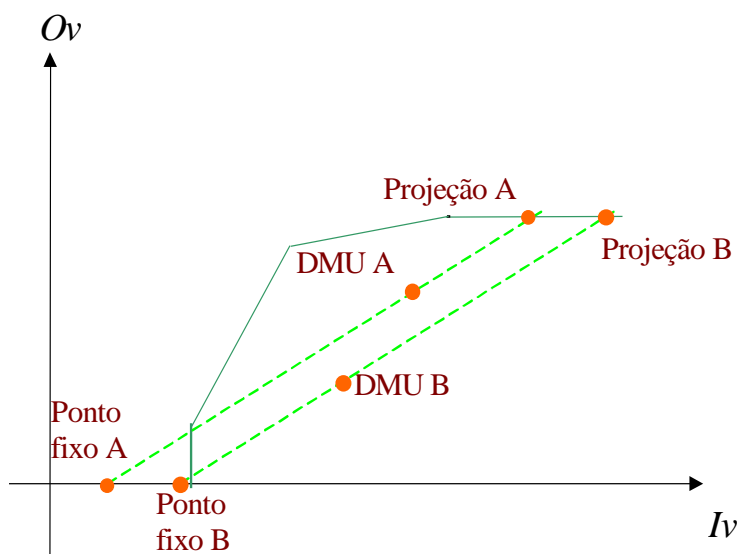


Figura 7 – Exemplo da determinação da projeção de duas DMUs para uma orientação de 30°

O cálculo da eficiência de uma DMU para uma orientação qualquer, pode ser realizado pela Expressão 8. Essa Expressão, cuja dedução também se encontra no Apêndice 1, serve para qualquer situação, sendo que nos casos de orientação aos *inputs* e aos *outputs* ela pode ser reduzida a Expressão 7.

$$E = (D_{XDMU} * D_{Yproj}) / (D_{YDMU} * D_{Xproj}) \quad (8)$$

Em que:

E: Eficiência;

D_{XDMU} : Distância de uma DMU até o eixo x;

D_{Xproj} : Distância da projeção de uma DMU até o eixo x;

D_{YDMU} : Distância de uma DMU até o eixo y;

D_{Yproj} : Distância da projeção de uma DMU até o eixo y.

A Figura 8 explicita graficamente cada uma dessas variáveis, tomando como exemplo a orientação da DMU “A” da Figura 7.

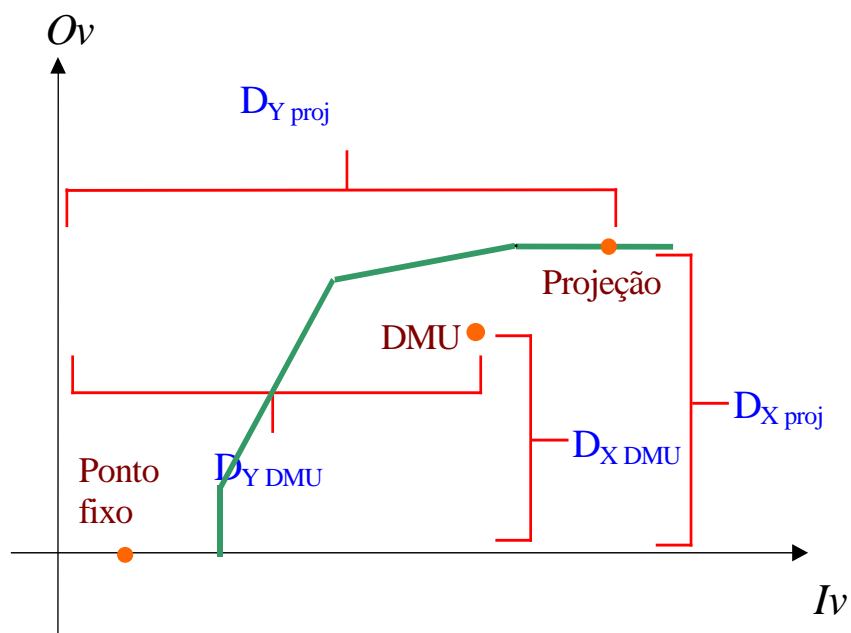


Figura 8 - Variáveis necessárias para o cálculo da eficiência por uma orientação qualquer

O ponto de projeção de uma DMU ineficiente na fronteira nada mais é do que uma meta para que a DMU ineficiente se torne eficiente. Da mesma forma que a eficiência pode ser calculada a partir da projeção de uma DMU, a projeção de uma DMU também poderá ser calculada a partir do valor de sua eficiência e da distância dessa DMU até um ponto fixo. A fórmula poderá ser obtida a partir da manipulação algébrica da Expressão 7, e está

representada pela Expressão 9. A projeção de uma DMU dependerá da orientação adotada e do formato da fronteira.

$$D_{\text{proj}} = D_{\text{DMU}} / E \text{ (orientação ao } \textit{output}) \text{ ou} \quad (9)$$

$$D_{\text{proj}} = D_{\text{DMU}} * E \text{ (orientação ao } \textit{input})$$

Em que:

E: Eficiência;

D_{DMU} : Distância de uma DMU até um ponto fixo;

D_{proj} : Distância da projeção dessa DMU até o mesmo ponto fixo.

Levando-se em consideração que as distâncias D_{DMU} e D_{proj} podem ser decompostas em duas componentes (horizontal e vertical), sendo a D_{DMU} decomposta em (D_{XDMU} , D_{YDMU}) e a D_{proj} decomposta em (D_{Xproj} , D_{Yproj}), podemos escrever as equações de projeção para as orientações aos *outputs* e aos *inputs*, dadas respectivamente pelas Expressões 10 e 11.

Orientação aos *outputs*

$$D_{\text{XDMU}} = D_{\text{Xproj}} \quad (10)$$

$$D_{\text{Yproj}} = D_{\text{YDMU}} / E$$

Orientação aos *inputs*

$$D_{\text{Xproj}} = D_{\text{XDMU}} * E \quad (11)$$

$$D_{\text{Yproj}} = D_{\text{YDMU}}$$

Em que:

E: Eficiência de uma determinada DMU;

D_{XDMU} : Distância de uma DMU até o eixo x;

D_{Xproj} : Distância da projeção de uma DMU até o eixo x;

D_{YDMU} : Distância de uma DMU até o eixo y;

D_{Yproj} : Distância da projeção de uma DMU até o eixo y.

No caso da orientação aos *outputs*, dada pela Expressão 10, os *inputs* ficam constantes, por isso $D_{Xproj} = D_{XDMU}$, já no caso da orientação aos *inputs*, dada pela Expressão 11, os *outputs* ficam constantes e assim $D_{Yproj} = D_{YDMU}$.

O termo fronteira de eficiência geralmente se refere à construção gráfica do lugar geométrico ocupado pelas DMUs eficientes e como já ressaltado se adequa muito bem as técnicas não-paramétricas de análise de eficiência. Porém, outra maneira de se lidar com o mesmo objeto é por meio de uma função matemática, chamada função produção, que será definida no próximo tópico.

2.6 Função Produção

Outro conceito importante para o entendimento das técnicas de análise de eficiência produtiva é o conceito de função produção que nada mais é do que um modo, diferente do apresentado no tópico anterior, de definir a fronteira de eficiência.

Segundo os princípios da microeconomia, existe uma função matemática (chamada função produção) que relaciona as quantidades de *inputs* com as máximas quantidades de *outputs* que podem ser produzidas com eles. Abel (2000) conceitua a função produção como sendo a relação que indica quanto se pode obter de um ou mais *outputs*, a partir de uma dada quantidade de *inputs*. Já Azambuja (2002) conceitua função produção como uma descrição da relação técnica existente entre *inputs* e *outputs* em um processo de produção,

durante um período de tempo, onde a função de produção define o máximo *output* resultante de um determinado vetor de *input*.

Em outras palavras, a função produção nada mais é do que a formulação matemática que descreve a fronteira de eficiência, de maneira a indicar a quantidade máxima de *outputs* que pode ser produzida, dada uma determinada quantidade de *inputs*. Uma função produção que relacione m *outputs* e n *inputs* só poderá ser representada no espaço $R^{n.m}$. Para resolver esse problema, costuma-se analisar uma função que expressa a relação entre o *input* virtual e o *output* virtual de uma DMU. Essa relação, salvo os problemas para determinar os coeficientes de utilidade, é bastante simples, pois possui as mesmas características de uma função produção de uma DMU com um único *input* e um único *output*.

Uma função produção de uma DMU com um único *input* e um único *output* pode sofrer ou não influência da escala de produção. Caso não sofra influência da escala de produção, ou seja, caso a quantidade produzida não interfira na produtividade máxima que pode ser alcançada por uma DMU, essa função é dita como apresentando retornos constantes à escala. Já uma função que sofra influência da escala de produção, ou seja, cuja produtividade máxima seja dependente da quantidade produzida, é dita como apresentando retornos variáveis à escala. A situação de retornos variáveis a escala é muito mais comum nos sistemas produtivos do que a de retornos constantes. Uma função produção de retornos variáveis à escala apresenta quatro regiões distintas: (a) a de retornos crescentes a escala; (b) a de retornos constantes a escala; (c) a de retornos decrescentes a escala e; (d) a de retornos negativos a escala (FERGUSON, 1994). A Figura 9 ilustra essas regiões:

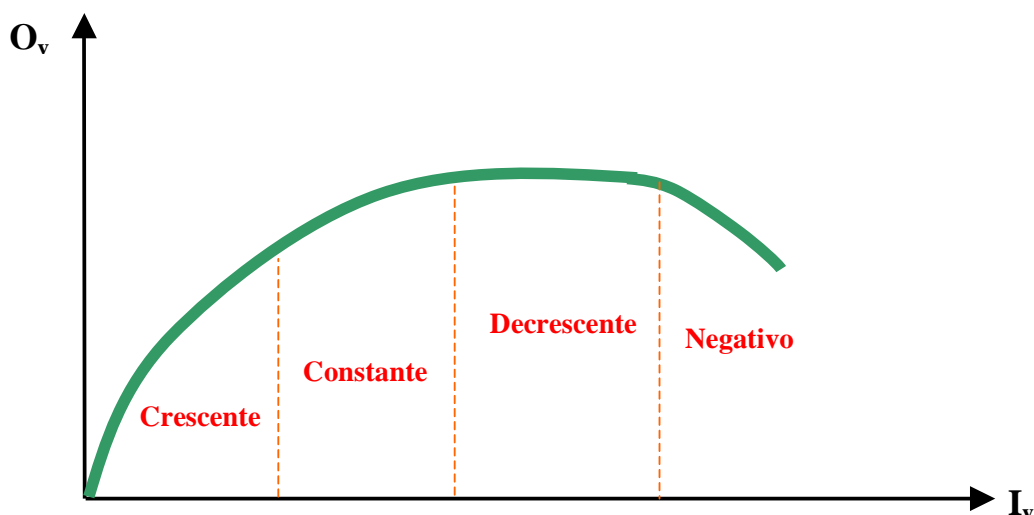


Figura 9 - Função Produção

Na primeira região (crescente), o aumento no número de *inputs* ocasiona um aumento desproporcionalmente maior no número de *outputs*; isso ocorre quando uma DMU está operando, ou seja, produzindo, abaixo da sua capacidade ótima (da capacidade que garante maior produtividade a essa DMU). Na segunda região (constante), o aumento do número de *inputs* ocasiona um aumento proporcional nos *outputs*; isso ocorre quando uma DMU está operando na sua capacidade ótima. Na terceira região (decrescente) o aumento do número de *inputs* ocasiona um aumento desproporcionalmente menor no número de *outputs*; isso ocorre quando uma DMU está operando acima da sua capacidade ótima. Na quarta região (negativo) o aumento do número de *inputs* ocasiona uma redução no número de *outputs*; isso ocorre quando uma DMU está operando muito acima da sua capacidade ótima.

Na microeconomia é bastante comum a análise de DMUs com dois *inputs* e um *output*, sendo que, geralmente, esses *inputs* são capital (K) e trabalho (T) e o *output* é um determinado produto. A função produção, nesse caso, poderia ser representada no espaço tridimensional, porém para simplificar o entendimento e a visualização dessa função foi

criado o conceito de Isoquanta. Segundo Azambuja (2004), uma Isoquanta é uma curva que mostra todas as combinações eficientes de *inputs*, capazes de produzir uma dada quantidade de *output*. Segundo Ferguson (1994), uma Isoquanta é uma curva no espaço dos *inputs* mostrando todas as possíveis combinações de dois *inputs* fisicamente capazes de produzir um dado nível de *output*. Essa curva é obtida por meio do corte da função produção tridimensional, por um plano perpendicular ao eixo onde está representado o *output*. O conjunto tridimensional da superfície de produção pode ser representado por um mapa de Isoquantas bidimensional, sendo que quanto mais afastada da origem estiver a Isoquanta, maior a quantidade de *output* produzido. A Figura 10 ilustra um mapa de Isoquantas.

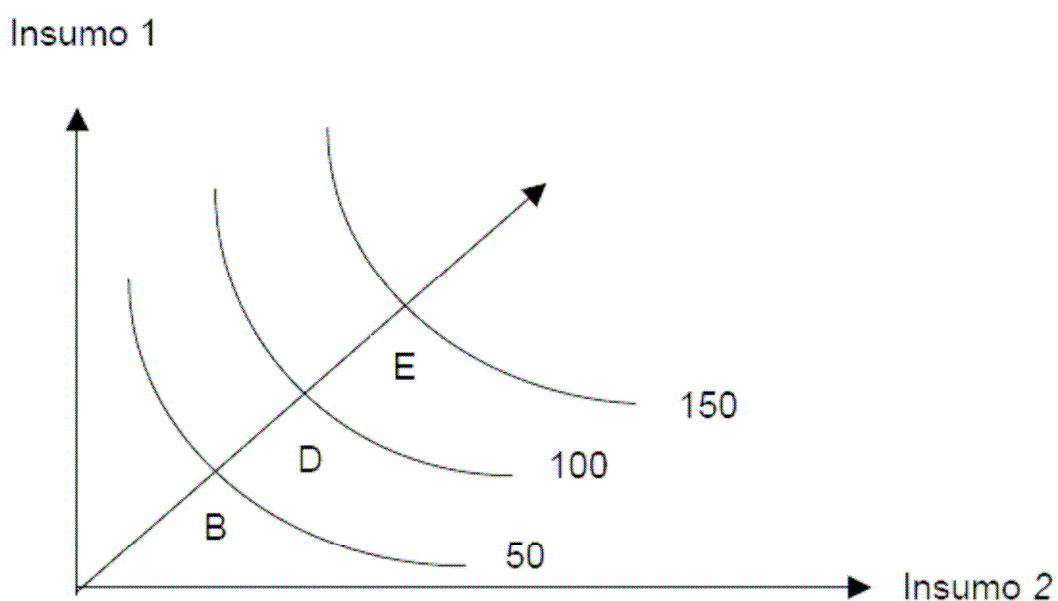


Figura 10 - Mapa de Isoquantas
Fonte: Mansfield (1980) *apud* Azambuja (2002)

As curvas “B”, “D” e “E” presentes no mapa da Figura 10 são as diferentes Isoquantas de uma determinada função produção, sendo que cada uma representa todas as

combinações eficientes dos insumos (*inputs*) 1 e 2 que geram respectivamente 50, 100 e 150 unidades de um determinado produto (*output*).

2.7 Outros tipos de eficiência de DMUs

A eficiência é um conceito muito amplo, que pode possuir diversos significados dependendo da área de conhecimento em que esse conceito está sendo utilizado. Além da eficiência produtiva e da eficiência energética, que já foram apresentadas, existem outros tipos de eficiência, sendo que alguns desses tipos também se referem a DMUs (apesar de utilizarem outros indicadores de desempenho) possuindo, assim, ligação direta com a eficiência produtiva. São elas: (a) a eficiência econômica, (b) a eficiência alocativa, (c) a eficiência técnica e (d) a eficiência de escala. A Figura 11 apresenta uma hierarquia entre esses tipos de eficiência:

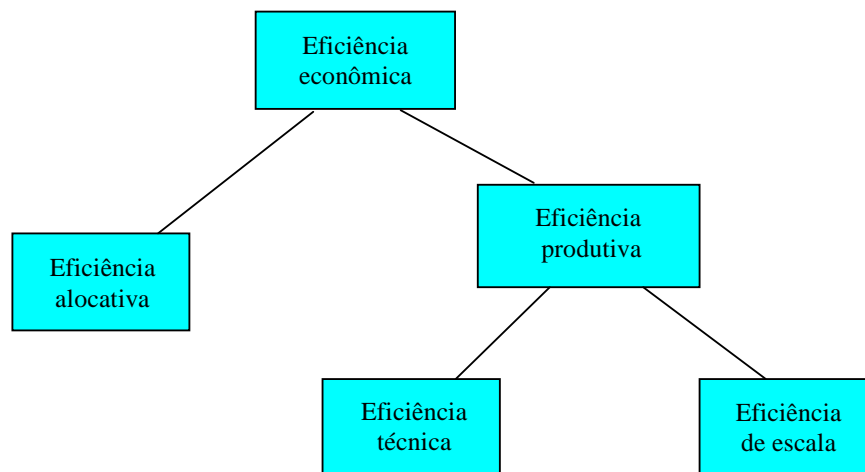


Figura 11 - Tipos de eficiência

A eficiência econômica é o tipo mais amplo de eficiência de uma DMU e pode ser subdividida (descomposta) em duas componentes: a eficiência produtiva e a eficiência alocativa. A eficiência produtiva, por sua vez, também pode ser subdividida em duas componentes, sendo que essas duas componentes serão muito importantes nas técnicas de análise de eficiência que serão apresentadas, são elas: a eficiência técnica e a eficiência de escala.

A fórmula geral pode ser utilizada para o cálculo de todos esses tipos de eficiência, desde que sejam considerados os indicadores de desempenho adequados. As técnicas de análise de eficiência desse trabalho, porém, se referem apenas ao cálculo da eficiência produtiva e de suas componentes. As eficiências alocativa e econômica estão presentes apenas para situar a eficiência produtiva dentro de um contexto mais amplo.

Nos próximos subitens, esses tipos de eficiência serão descritos e comparados entre si sendo que, no primeiro subitem, serão apresentadas e comparadas as eficiências econômica e produtiva; no segundo subitem serão apresentadas e comparadas as eficiências alocativa e produtiva (que é o foco desse trabalho e por isso ganha destaque) e; por fim, no terceiro subitem serão apresentadas e comparadas as 3 componentes da eficiência produtiva (total, técnica e de escala).

2.7.1 Eficiência Produtiva e Eficiência Econômica

Os conceitos de eficiência produtiva e eficiência econômica diferem apenas com relação ao indicador de desempenho considerado. Enquanto na eficiência produtiva o “ótimo” é definido em termos de possibilidade de produção, a eficiência econômica buscará definir o “ótimo” em termos do objetivo comportamental da unidade de produção.

Na prática, segundo Azambuja (2002), pode-se definir a eficiência produtiva como sendo a comparação que se faz entre o *output* observado e o máximo *output* potencial alcançável, dado um conjunto de *inputs*. Já a eficiência econômica é medida comparando-se custos, receitas e lucros observados, em relação a padrões ótimos. Assim, enquanto a eficiência produtiva utilizará como indicador de desempenho valores físicos de *inputs* e *outputs*, a eficiência econômica utilizará indicadores econômicos como: custos, receitas, lucro obtido, taxa de retorno e etc.

Segundo Miller (1981) *apud* Tauile e Debaco (2002), uma firma será economicamente eficiente se conseguir ao mesmo tempo maximizar seu lucro, minimizar seus custos e maximizar a satisfação dos consumidores. Segundo Kohler (1972), a eficiência econômica é um estado de coisas em que nenhuma reorganização concebível na economia plenamente empregada poderá produzir diminuição da escassez ou aumento da satisfação das necessidades humanas. Sendo assim, um produtor que faz um produto que ninguém deseja, usando o mínimo de recursos possíveis, estará operando com eficiência produtiva, mas não com eficiência econômica, pois com os mesmos recursos ele poderia fazer um produto que aumentasse a satisfação das necessidades humanas.

2.7.2 Eficiência produtiva e Eficiência alocativa

A eficiência econômica pode ser influenciada por dois fatores: (a) fatores de ordem produtiva e (b) fatores de ordem alocativa. Portanto, pode-se dizer que a eficiência econômica possui duas componentes: a eficiência produtiva e a eficiência alocativa (BERECHMAN, 1993).

Segundo Azambuja (2002), a eficiência produtiva está ligada à habilidade de evitar desperdícios, ou seja, a habilidade de produzir tantos *outputs* quanto o uso dos *inputs* permitir ou de usar o mínimo de *inputs* possível, que viabiliza uma determinada produção.

Por outro lado, a eficiência alocativa está ligada à habilidade de alocar, da melhor maneira possível, os recursos econômicos disponíveis no processo produtivo. Em outras palavras, a eficiência alocativa é a componente da eficiência econômica que mede se um dado recurso está sendo utilizado, economicamente, de maneira ótima. Assim, essa eficiência pode indicar, por exemplo, que o produtor está gastando muitos recursos para produzir um produto que rende pouco ou que a DMU está utilizando uma combinação de *inputs* muito custosa para produzir um determinado nível de *outputs*. Uma DMU só apresentará eficiência econômica se for produtivamente eficiente, isto é, se produzir sem desperdícios, e se, conseguir alocar seus recursos de maneira a minimizar os seus custos totais ou maximizar o seu lucro obtido.

Segundo Azambuja (2002), isolar o componente de eficiência alocativa é tarefa bastante complicada, visto que ela depende de diversos fatores como: (a) economias de escala, (b) economias de escopo, (c) economias de densidade de tráfego, (d) economias de utilização de estoque de capital, (e) economias de rede e (f) economias de tempo de usuário; sendo que cada um desses fatores pode dar origem a tipo diferente de eficiência que comporão a eficiência alocativa.

Apesar das várias dificuldades envolvidas existem alguns procedimentos e técnicas que podem auxiliar na determinação da eficiência alocativa. Na área de pesquisa operacional, por exemplo, existem técnicas de otimização da alocação dos recursos, que permitem obter a combinação ótima de *outputs* que uma DMU deve produzir, dadas às quantidades de *inputs*, com o objetivo de maximizar sua eficiência alocativa. Essas técnicas

são baseadas em programação linear (PL) e utilizam como função objetivo (FO) ou a função custo (que deve ser minimizada) ou a função lucro (que deve ser maximizada). Maiores detalhes a respeito de programação linear (que é importantíssima para as principais técnicas de análise de eficiência produtiva) se encontram no Apêndice 2.

Já na área de microeconomia, uma alternativa possível para se achar o mix de *inputs* que minimiza o custo total, dada uma quantidade de *outputs*, é utilizar o ponto de encontro da curva de Isoquanta com a curva de Isocusto que a tangencia. Porém, esse procedimento só é válido no caso de DMUs com dois *inputs* e um *output*. Uma curva de Isocusto é uma curva bidimensional que mostra as diferentes combinações de dois *inputs* de uma dada DMU, que geram o mesmo gasto para empresa. Assim como as Isoquantas, as curvas de Isocusto também podem ser representadas por um mapa, sendo que quanto mais afastado da origem, maior o custo. A Figura 12 apresenta um mapa de Isocustos.

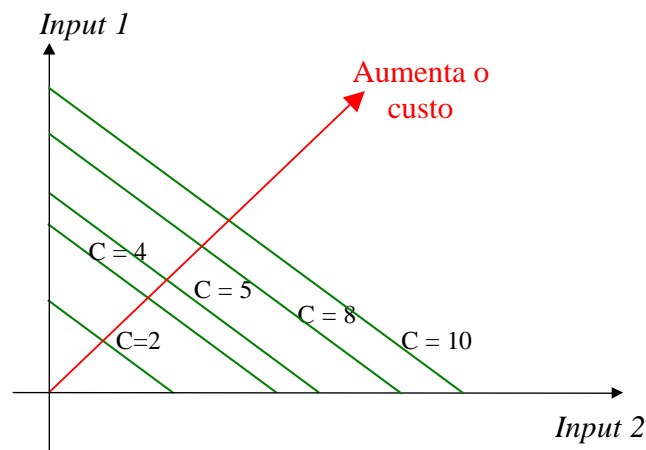


Figura 12 - Mapa de Isocustos

O ponto de encontro da Isoquanta com a curva de Isocusto que a tangencia, será o ponto em que, para uma dada quantidade de *output*, a combinação dos *inputs* 1 e 2 custará menos, como ilustrado na Figura 13.

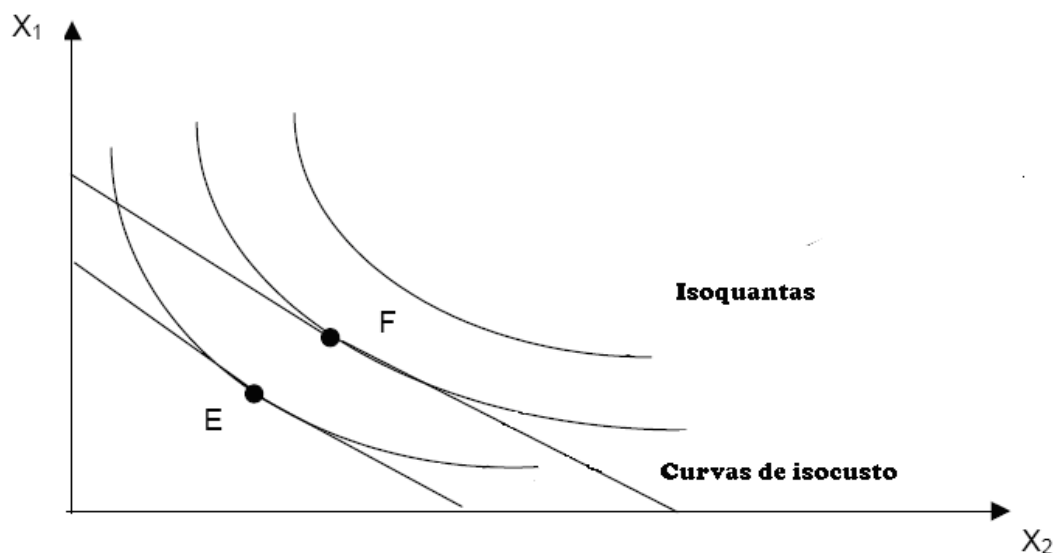


Figura 13 - Ponto de eficiência alocativa.
Fonte: Adaptado de Berechman (1993).

Na Figura 13, os pontos “E” e “F” são os pontos de mínimo custo para dois níveis diferentes de *outputs*, sendo que cada um desses níveis é representado por uma Isoquanta.

Tendo-se o custo ou o lucro do ponto ótimo de alocação de recursos, a eficiência alocativa pode ser calculada pela Expressão 12. Essa expressão é advinda da Expressão 2 (geral), sendo que o custo (que é do tipo quanto menor melhor) e o lucro (que é do tipo quanto maior melhor) são dois possíveis indicadores de desempenho da eficiência alocativa. Vale ressaltar, porém, que descobrir o ponto ótimo é tarefa bastante complicada, pois além de se identificar a combinação ótima dos *outputs* deve-se descobrir a combinação ótima dos *inputs* que são utilizados na produção desses *outputs*.

$$\text{Eficiência Alocativa} = (C_{\text{ótimo}} / C_{\text{atual}}) \text{ ou } (L_{\text{atual}} / L_{\text{ótimo}}) \quad (12)$$

Em que:

$C_{\text{ótimo}}$: Custo da alocação de recursos ótima;

$L_{\text{ótimo}}$: Lucro da alocação de recursos ótima.

C_{atual} : Custo atual;

L_{atual} : Lucro atual;

Algebricamente, a eficiência econômica pode ser calculada a partir das eficiências alocativa e produtiva, pela Expressão 13:

$$\text{Eficiência Econômica} = \text{Eficiência Produtiva} * \text{Eficiência Alocativa} \quad (13)$$

2.7.3 Eficiência Produtiva Total, Técnica e de Escala

Para uma empresa não conseguir ser produtivamente eficiente podem existir duas causas. Essas causas podem ser problemas de ordem puramente técnica ou problemas de escala de produção. Essas duas causas dão origem às componentes: (a) Eficiência técnica e (b) Eficiência de escala.

A ineficiência técnica é causada por problemas típicos de engenharia como, por exemplo: problemas relacionados à falta de treinamento ou qualificação dos funcionários, problemas com o maquinário utilizado na produção, problemas com a qualidade do material utilizado e outros.

Por outro lado, a ineficiência de escala está relacionada com problemas de economia ou deseconomia de escala. Assim, a eficiência de escala está ligada ao fato da empresa estar ou não produzindo em sua escala de ótima de produção, ou seja, é

relacionada aos conceitos de função produção, vistos no item 2.6. É bastante conveniente para uma empresa saber o quanto da eficiência apresentada se deve aos fatores técnicos e o quanto se deve aos fatores de escala, pois isso poderá representar uma diretriz na identificação de possibilidades de melhoria.

Definiu-se então, três tipos de eficiência produtiva:

- **Eficiência Produtiva também chamada de Eficiência Total:** Mede a capacidade de uma DMU transformar *inputs* em *outputs* em proporções adequadas e de maneira produtiva;
- **Eficiência Técnica:** É um índice que representa o quanto da eficiência total de uma empresa pode ser relacionada a fatores técnicos ou de engenharia;
- **Eficiência de Escala:** É um índice que representa o quanto da eficiência total de uma empresa pode ser relacionada a fatores econômicos ou de escala ou, em outras palavras, é um índice que está relacionado ao fato da empresa estar operando abaixo ou acima de sua escala ótima de produção.

A eficiência total ou produtiva pode ser definida como um índice combinado das eficiências técnicas e de escala. A equação que correlaciona esses três tipos de eficiência está apresentada na Expressão 14.

$$\text{Eficiência Produtiva} = \text{Eficiência Técnica} * \text{Eficiência de Escala} \quad (14)$$

Nas técnicas de análise de eficiência produtiva, a eficiência total é obtida comparando-se uma DMU com todas as suas concorrentes, indiscriminadamente; já a eficiência técnica é obtida comparando-se uma DMU apenas com aquelas que operem em escala semelhante a sua. Na prática, o cálculo das eficiências total e técnica, se diferencia apenas com relação ao formato da fronteira de eficiência utilizado. A fronteira para calcular a eficiência total é uma reta com inclinação de 45° que sai da origem e intercepta a DMU mais produtiva, fazendo com que todas as DMUs sejam comparadas a ela; já a fronteira para calcular a eficiência técnica possui o formato de uma função produção característica, com suas variações de escala consideradas; a Figura 14 ilustra essas duas fronteiras.

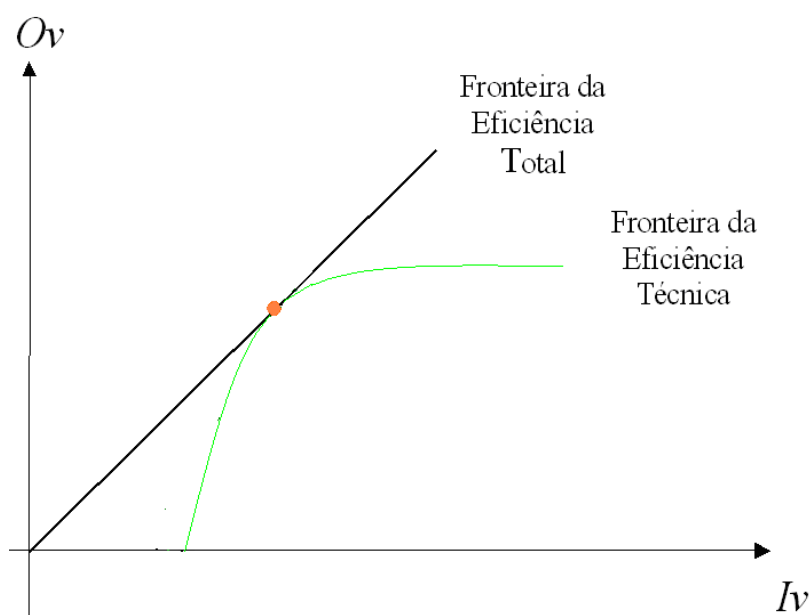


Figura 14 - Comparação entre o cálculo da Eficiência Total e Técnica

Após o cálculo da Eficiência Técnica e da Eficiência Total, pode-se calcular a eficiência de escala. A eficiência de escala pode ser calculada diretamente a partir da manipulação algébrica da Expressão 14 como ilustrada na Expressão 15:

$$\text{Eficiência de Escala} = \text{Eficiência Produtiva} / \text{Eficiência Técnica} \quad (15)$$

Nas DMUs que apresentam retornos constantes a escala, não faz sentido falar em Eficiência de Escala e Eficiência Técnica, sendo calculada apenas a eficiência Total.

Por meio de uma fronteira de eficiência técnica, é possível perceber como uma DMU pode aumentar sua produtividade, e conseqüentemente sua eficiência total, simplesmente aumentando ou diminuindo sua escala de produção, sem precisar alterar seu processo produtivo. A Figura 15 exemplifica esse fato:

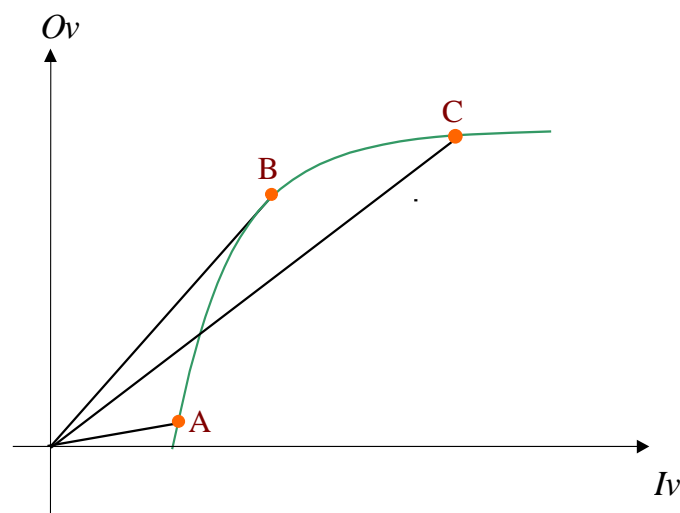


Figura 15 - Produtividade de DMUs que operam em escalas diferentes

Na Figura 15, as DMUs “A”, “B” e “C” são todas tecnicamente eficientes, pois estão sobre a fronteira de eficiência técnica (função produção). Porém, a produtividade da DMU “B”, que é a tangente da reta que liga a origem a essa DMU, é maior que produtividade das demais (já que o ângulo da reta que liga essa DMU a origem é maior que o das demais). Isso ocorre porque B opera na sua escala ótima de produção (retorno

crescente a escala), enquanto as DMUs “A” e “C” operam, respectivamente, abaixo e acima de suas escalas ótimas (respectivamente retornos crescentes e decrescentes a escala).

O Quadro 2 apresenta um resumo dos tipos de eficiência de uma DMU:

Tipo de eficiência	Característica
Econômica	Capacidade de uma DMU de evitar a escassez e ao mesmo tempo maximizar a satisfação humana
Alocativa	Capacidade de uma DMU de alocar os seus recursos econômicos da melhor maneira possível
Produtiva ou Total	Capacidade de uma DMU transformar <i>inputs</i> em <i>outputs</i> em proporções adequadas evitando desperdícios
Técnica	Parcela da eficiência produtiva relacionada a fatores de ordem técnica ou de engenharia
De Escala	Parcela da eficiência produtiva relacionada ao fato da DMU estar ou não estar operando em sua escala ótima

Quadro 2 - Resumo dos tipos de eficiência de uma DMU

Os conceitos de eficiência econômica e de eficiência alocativa não são tão abrangentes quanto o conceito de eficiência produtiva. Por exemplo, caso se deseje estudar um problema em que as DMUs representem indivíduos, não terá sentido referir-se a eficiência econômica ou a eficiência alocativa; apenas a eficiência produtiva fará sentido. É sempre bom lembrar, também, que com exceção das eficiências técnica e de escala, que são componentes da eficiência produtiva, nenhuma das técnicas de análise de eficiência apresentadas nesse trabalho lida com os outros tipos de eficiência de DMUs (eficiência econômica e alocativa).

É recomendável ao afirmar se uma DMU é ou não eficiente, a correta especificação do tipo de eficiência ao qual se está referindo, pois uma DMU pode estar operando com

eficiência produtiva, por exemplo, mas não operar com eficiência econômica ou eficiência alocativa.

Capítulo 3 – Estruturação do método e das técnicas de análise de eficiência produtiva

Existe um único método, composto de várias etapas, para se analisar a eficiência produtiva de um conjunto de DMUs; por outro lado, existem diversas técnicas que podem ser utilizadas dentro desse método para realizar essa análise. Assim, esse capítulo tem o objetivo de estruturar esses dois conceitos: (a) o do método com as suas diferentes etapas e o (b) das técnicas que são divididas em duas categorias: paramétricas e não-paramétricas (que serão brevemente introduzidas e comparadas nesse capítulo).

Como já discutido, as técnicas de análise de eficiência, desde que foram criadas, sofreram uma série de modificações e atualizações que dificultaram bastante a sua representação e o seu entendimento por parte das pessoas que se propunham a utilizá-las. Como uma tentativa de facilitar o acesso de novos usuários a essas técnicas, nesse capítulo também será apresentado um grupo de conceitos hierarquicamente estruturados, que serão

de grande importância na representação de forma clara e abrangente de todas as peculiaridades envolvidas nessas técnicas. Essa estrutura é capaz de representar tanto as técnicas paramétricas (como será visto nesse capítulo) quanto as não-paramétricas (como será visto nos dois capítulos posteriores).

3.1 Estrutura hierárquica de uma técnica

Diversas técnicas que calculam e analisam a eficiência de uma DMU podem ser encontradas na literatura. Uma técnica deve sempre ser analisada dentro de um contexto mais amplo, que é o contexto do método do qual ela faz parte; além disso, uma técnica, para poder atuar, precisa se apoiar em um modelo, que simplifica a realidade e que, por sua vez, pode ser analisado sob diversas perspectivas. Compreender a estrutura hierárquica de uma técnica é fundamental para se entender todas as particularidades da análise de eficiência.

3.1.1 Método e Técnica

Um método é uma seqüência lógica de passos ou operações para se realizar determinada tarefa ou atingir determinado objetivo. Segundo Houaiss (2001), método é o procedimento, técnica ou meio de se fazer alguma coisa de acordo com um plano; também é um processo lógico, organizado e sistemático de pesquisa, instrução, investigação, apresentação e etc. Segundo Ferreira (1975), um método é o caminho pelo qual se atinge um objetivo.

Uma técnica, por sua vez, possui duas definições: (a) um conjunto de processos que acompanham os conhecimentos científicos e são utilizados para investigar e transformar a realidade observada ou; (b) um procedimento ou um conjunto de

procedimentos empregados para obter um determinado resultado ou alcançar um determinado objetivo(HOUAISS, 2005; FERREIRA, 1975).

Para fins desse trabalho, uma técnica será definida como o conjunto de procedimentos, geralmente de caráter matemático, empregado dentro de um método, para alcançar um determinado resultado, que pode ser ou não, o objetivo final desse método. Um método, por sua vez será definido uma seqüência de passos, de caráter bastante amplo, utilizado para se atingir um determinado objetivo. Assim, pelas definições adotadas nesse trabalho, o conceito de método pode ser considerado um conceito bem mais amplo e que engloba o conceito de técnica que, por sua vez, deve ser sempre entendida e utilizada dentro do contexto do método em que ela está inserida.

Para se utilizar um método são necessárias, além de uma ou várias técnicas, diversos outros requisitos como: (a) pessoas, (b) atividades bem planejadas e (c) um conjunto de ferramentas, principalmente as computacionais. Um método deve ser sempre caracterizado pelo objetivo que contempla e o objetivo do método do qual fazem parte as técnicas apresentadas nesse trabalho é justamente avaliar, em todas as suas dimensões, a eficiência produtiva de um conjunto de DMUs.

Já a característica mais básica de uma técnica é o resultado que ela visa atingir sendo que os resultados obtidos pelas técnicas de análise de eficiência, expostas nesse trabalho, são dados, de natureza variada, que podem ser utilizados para avaliar a eficiência relativa de um conjunto de DMUs.

Para se utilizar uma técnica de qualquer natureza, porém, é necessário que a realidade sobre a qual essa técnica irá atuar seja representada, e em muitos casos simplificada; para resolver essa questão fez-se necessário à definição dos conceitos de modelo e perspectiva.

3.1.2 Modelo e Perspectiva

Um modelo pode ser definido como uma representação ou interpretação (simplificada ou não) da realidade a partir de uma estrutura de conceitos. Também pode ser definido como um conjunto de hipóteses sobre a estrutura ou o comportamento de um sistema, a partir do qual se procura explicá-lo ou prevê-lo. Segundo Houaiss (2001), modelo é uma construção teórica, de natureza matemática, que visa estabelecer a essência de determinada estrutura englobando: (a) suas relações internas, (b) sua evolução, (c) os fatores que determinam as suas mudanças e (d) as linhas a serem adotadas para o equilíbrio do sistema.

Uma técnica freqüentemente precisa adotar um modelo como suporte, pois para se inter-relacionar com a realidade, que é muito complexa, é necessário que a realidade seja traduzida por meio de um modelo. Os modelos que apóiam as técnicas de análise de eficiência geralmente diferem quanto ao formato da fronteira adotado e o tipo de retorno a escala, o que acaba influenciando no tipo de eficiência calculada.

Uma perspectiva, por sua vez, pode ser definida como os diferentes aspectos que um modelo, que apóia uma determinada técnica, pode assumir. Segundo Ferreira (1975) e Houaiss (2001), perspectiva é a forma ou aparência sob a qual algo se apresenta; ela também pode ser definida como um ponto de vista. As perspectivas são obtidas por meio de manipulações e simplificações matemáticas que não alteram as hipóteses sob as quais esse modelo se sustenta. Assim, as perspectivas podem ser compreendidas como sendo os diferentes ângulos (ou pontos de vista) utilizados para se analisar um mesmo modelo.

As perspectivas podem ser comparadas por diferentes aspectos, por exemplo: (a) a eficiência computacional, (b) a facilidade de entendimento e (c) a quantidade de interpretações e informações adicionais fornecidas. Duas perspectivas podem conduzir a resultados iguais ou complementares, a respeito da realidade analisada. As diferentes perspectivas dos modelos que embasam as técnicas de análise de eficiência se referem, na maioria das vezes, ou às diferentes orientações de projeção na fronteira e ou a dualidade dos modelos de programação linear (ver Apêndice 2).

As perspectivas de podem ser divididas em diferentes níveis, sendo que cada perspectiva de um nível pode conter todas as combinações de perspectivas dos níveis que estão hierarquicamente subordinados a ele.

Qualquer técnica de análise de eficiência (e talvez qualquer tipo de técnica em geral), de qualquer grau de complexidade, pode ser estruturada na forma sistematizada pela Figura 16, sendo que não existem limites para os modelos e perspectivas que uma técnica pode possuir:

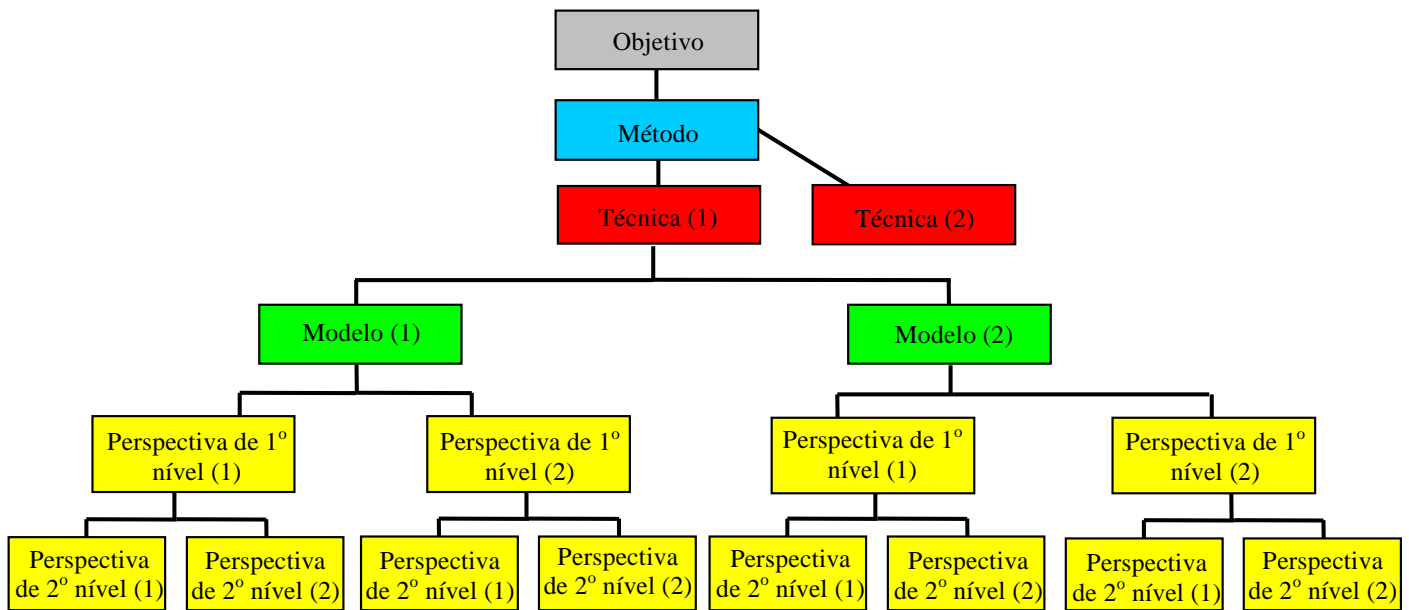


Figura 16 - Estrutura hierárquica de uma técnica
 Fonte: Adaptado de Mariano (2005)

Nesse capítulo e nos subseqüentes serão utilizadas cores padrão para representar os diferentes níveis da estrutura hierárquica de uma técnica, serão utilizadas as cores: (a) vermelha para representar as técnicas; (b) verde para representar os modelos e; (c) amarelo para representar as perspectivas.

3.2 Etapas do método de análise de eficiência produtiva

Como já explicado no início do capítulo, o método para se analisar a eficiência de uma DMU é sempre o mesmo, independentemente da técnica escolhida sendo que a escolha da técnica, do modelo e da perspectiva é apenas uma das várias etapas desse método. A Figura 17 apresenta a seqüência dessas etapas.

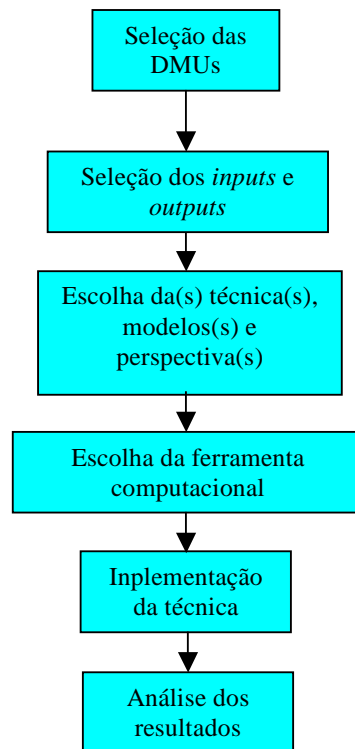


Figura 17 - Etapas do método de cálculo da eficiência

3.2.1 Seleção das DMUs

O resultado da eficiência produtiva encontrado por uma técnica estará diretamente ligado ao conjunto de DMUs adotado na análise, sendo que qualquer afirmação a respeito da eficiência de uma DMU será válida apenas para aquele conjunto naquele determinado momento.

Segundo Mello (2005a), as DMUs do conjunto de DMUs adotado devem possuir os mesmos *inputs* e os mesmos *outputs*, sendo que eles podem variar apenas em intensidade. Além disso, as DMUs desse conjunto devem ser homogêneas, isto é, devem realizar as mesmas tarefas, com os mesmos objetivos, trabalhar nas mesmas condições de mercado e ter autonomia na tomada de decisões; caso as DMUs não fossem homogêneas não faria

sentido compará-las, visto que nenhuma conclusão a respeito da eficiência poderia ser inferida, dadas as enormes diferenças entre elas.

Caso se deseje calcular a eficiência de um conjunto muito pequeno de DMUs que possuam muitos *inputs* e muitos *outputs*, podem ocorrer algumas distorções que certamente comprometerão os resultados obtidos. Isso ocorre porque o número de DMUs será insuficiente para que seja determinada a função produção ou construída a fronteira de eficiência de maneira adequada.

Para a Análise por Envoltória de Dados (DEA), por exemplo, existe uma fórmula matemática, que foi determinada empiricamente por meio de anos de experiência com análises de eficiência, para se determinar o número mínimo de DMUs que devem ser adotadas, dadas as quantidades de *inputs* e *outputs* (COOPER et al, 2000). Essa fórmula está apresentada na Expressão 16 :

$$z = \text{MAX} \{n.m; 3.(n+m)\} \quad (16)$$

Em que:

n: Número de *inputs*;

m: Número de *outputs*;

z: Número de DMUs em avaliação

3.2.2 Seleção dos *inputs* e *outputs*

A escolha de quais *inputs* e *outputs* serão utilizados durante a análise de eficiência constituem um dos primeiros desafios do método de análise de eficiência. Segundo Mello (2005a), a escolha das variáveis de *input* e *output* deve ser feita a partir de uma ampla lista

de possíveis variáveis ligadas ao modelo, sendo que essa listagem inicial permitirá um maior conhecimento sobre as unidades a serem avaliadas.

Na literatura são encontrados diferentes procedimentos para resolução do problema de seleção de variáveis, como: (a) a técnica estatística (LINS; MOREIRA, 1999) e (b) a técnica Multicritério (MELLO et al., 2002; SENRA, 2004), sendo que dentro dessa podem-se ter: (a) a técnica Multicritério Combinatória Inicial, (b) a técnica Multicritério Combinatória por Cenários, (c) a técnica Multicritério Total e (d) a técnica Multicritério Total Simplificada.

Após a escolha dos *inputs* e *outputs*, eles devem ser testados por meio de técnicas estatísticas básicas para verificar se escolha foi adequada. Segundo Almeida (2007), os cálculos da média, do desvio-padrão, da regressão linear e dos coeficientes de correlação tornam-se essenciais para verificar se as variáveis escolhidas realmente explicam a realidade e se realmente se relacionam em uma função produção.

Um dos métodos para verificar se a seleção de variáveis foi adequada é por meio da análise dos coeficientes de correlação: (a) dos *inputs* com os *inputs*, (b) dos *outputs* com os *outputs* e (c) dos *inputs* com os *outputs*. Caso a correlação entre dois *inputs* ou entre dois *outputs* seja muito alta (geralmente é utilizado como referência o valor 0,9), isso significa redundância, ou seja, significa que os dois *inputs* ou os dois *outputs* explicam a mesma coisa e sendo assim um dos dois poderia ser eliminado. Já caso algum *input* tenha índices de correlação muito baixos com todos os *outputs* (abaixo de 0,1, por exemplo), ele também poderia ser eliminado, pois não é uma variável explicativa e provavelmente não estaria relacionado com a função produção. Um caso prático ilustrando esse procedimento de escolha de variáveis pode ser encontrado no Capítulo 6.

3.2.3 Escolha da(s) técnica(s), do(s) modelo(s) e da(s) perspectiva(s)

As técnicas, os modelos e as perspectivas devem ser escolhidos de acordo com o problema que se quer resolver e com os resultados que se deseja obter. Por exemplo, de acordo com o número de variáveis de *input* e *output* do problema, uma técnica pode ser mais adequada que outra. Da mesma forma, caso se queira calcular a eficiência total deve-se usar um modelo diferente do que quando se quer calcular a eficiência técnica.

Os próximos itens desse capítulo apresentarão uma pequena introdução às técnicas paramétricas e não-paramétricas de análise de eficiência produtiva sendo que, nos próximos dois capítulos, dedicados respectivamente ao DEA e aos Números Índices, serão apresentados, de forma detalhada, os principais modelos e perspectivas ligados a eles. Além disso, no Capítulo 6 será apresentado uma pequena aplicação prática do processo de escolha das técnicas, modelos e perspectivas e no Capítulo 7, haverá uma sistematização desse processo de escolha por meio da construção de um Sistema Especialista.

3.2.4 Escolha da ferramenta computacional

Depois de escolhida a técnica, o(s) modelo(s) e a(s) perspectivas, deve-se escolher a ferramenta computacional, que suportará o procedimento. Para tal podem ser utilizados tanto *softwares* simples, como o Excel por meio de sua ferramenta solver (que resolve problemas de programação linear), quanto softwares mais poderosos como o Maple, o *Statistica* ou o MATLAB (que possuem uma enorme gama de aplicações). Especificamente para solucionar os problemas de programação linear, além do solver, podem ser utilizados o Lindo, o Lingo Cplex, o What's best e o OTIMIZA. As técnicas também podem ser implementadas utilizando-se alguma linguagem de programação como o Pascal, Fortran, C, C++, Delphi ,entre outras.

Para a Análise por Envoltória de Dados (DEA), especificamente, existem ferramentas em que a técnica já está implementada; esses softwares são grandes caixas pretas onde se digitam os dados de *inputs* e *outputs* e instantaneamente saem os resultados da eficiência. Os softwares desse tipo são: o *Frontier analyst*, o SIAD, o SIEN o *Onfront* e o DEAP.

Após a implementação da técnica e obtenção dos resultados, deve-se realizar uma análise criteriosa dos resultados obtidos, à luz de todas as escolhas realizadas nas etapas anteriores.

Saindo um pouco do escopo do método, os próximos três itens desse capítulo serão dedicados às técnicas de análise de eficiência ou mais especificamente aos dois grandes grupos de técnicas de análise de eficiência existentes na literatura: (a) o das técnicas paramétricas e (b) o das técnicas não-paramétricas. No item 3.3, por exemplo, com o objetivo do grupo das técnicas não-paramétricas (que são o foco desse trabalho) ficar bem caracterizado, serão apresentadas e discutidas as principais diferenças entre esse grupo e o das técnicas paramétricas; já no item 3.4, serão brevemente apresentadas e comparadas as principais técnicas paramétricas de análise de eficiência encontradas na literatura, que apesar de não serem o foco desse trabalho servirão, entre outras coisas, para ilustrar a estrutura hierárquica desenvolvida no início desse Capítulo; por fim, no item 3.5 serão apresentadas e comparadas as principais técnicas não-paramétricas de análise de eficiência servindo de introdução aos próximos dois capítulos onde essas técnicas serão detalhas juntamente com seus modelos e perspectivas.

3.3 Comparação entre os grupos paramétrico e não-paramétrico das técnicas de análise eficiência

Como já mencionado, existem duas classes de técnicas de análise de eficiência produtiva: as paramétricas e as não-paramétricas. As técnicas paramétricas necessitam, para o cálculo da eficiência, da prévia determinação de uma função que correlacione os *inputs* e os *outputs* da DMU que está sendo analisada; essa função é chamada de função produção. Já as técnicas não-paramétricas não precisam estimar uma função produção para calcular a eficiência, fazendo isso por meio ou da construção empírica da fronteira ou da comparação pura e simples de duas DMUs.

Segundo Houaiss (2001), paramétrico é algo relativo a parâmetro, que por sua vez é uma variável de caráter secundário cuja finalidade é especificar os objetos de um conjunto ou de uma família. Por exemplo, na família de planos $a.x + b.y + c.z + d = 0$; a , b , c e d são parâmetros. Assim, pode-se concluir que as técnicas paramétricas, para funcionarem, precisam da determinação prévia de alguns parâmetros que permitam estimar a função produção. Portanto, a diferença básica entre as técnicas paramétricas e não-paramétricas de análise de eficiência está na maneira como as fronteiras de eficiência são construídas e utilizadas. Enquanto as técnicas paramétricas estimam os parâmetros de uma função para fronteira de eficiência e fazem os cálculos a partir dessa função, as técnicas não-paramétricas calculam a eficiência a partir de um conjunto de formulações, oriundas da construção empírica da fronteira de eficiência a partir dos dados referentes aos *inputs* e *outputs* das DMUs analisadas, sem estimar a função da fronteira.

As técnicas paramétricas de análise de eficiência produtiva se dividem em dois grupos distintos: o das técnicas determinísticas, que não modelam os erros aleatórios ao calcular a eficiência, e o das técnicas estocásticas, que modelam os erros aleatórios. As

técnicas paramétricas mais utilizadas para determinar a eficiência são: a fronteira estocástica, que pertence a categoria estocástica e as funções pré-estabelecidas, que pertencem a categoria determinística. Ambas as técnicas partem de algumas funções genéricas que relacionam *inputs* e *outputs*, como a função Cobb-Douglas ou a função trans-logarítmica (que podem ser entendidas como modelos dessas técnicas) e, a partir do conjunto de DMUs que se está se analisando, calculam parâmetros (da onde vem o termo paramétricas) para alimentar essa função genérica e por meio dela calcular a eficiência.

Já dentre as técnicas não-paramétricas de análise de eficiência produtiva, uma das mais utilizadas e estudadas é a Análise por Envoltória de Dados, que constrói a fronteira de eficiência empiricamente e compara uma DMU com a sua projeção nessa fronteira; porém, outra técnica não-paramétrica de determinação de eficiência muito utilizada é a técnica dos Números Índices, que compara as DMUs de duas em duas. Dentro de cada uma dessas técnicas existem diversos modelos e perspectivas que conduzem a uma enorme gama de informações e possibilitam uma série de análises interessantes.

As técnicas paramétricas apresentam vantagens e desvantagens em sua utilização quando comparadas as técnicas não-paramétricas. De acordo com a Civil Aviation Authority (2000), as principais vantagens são:

1. Não é necessário que os *inputs* e os *outputs* tenham uma alta correlação, pois isso já é considerado na montagem das equações;
2. São menos sensíveis a ruídos (que são dados que não correspondem à realidade, causados por fatores fora do controle e erros de medição) e *outliers* (que são pontos, muito acima ou muito abaixo da média geral de um determinado conjunto de dados, ou seja, são pontos fora da curva que distorcem os resultados);

3. Possibilitam testes estatísticos;
4. Não necessitam que se assuma um único objetivo comportamental como a minimização dos *inputs* ou a maximização dos *outputs* para sua utilização;
5. Especificamente para as técnicas estocásticas, permite separar o quanto da eficiência de uma DMU foi causada por erros aleatórios, ou seja, por erros que estão fora da influencia do decisor sendo, portanto, irrelevantes para se calcular a eficiência (e como isso é algo que as técnicas não-paramétricas e paramétricas deterministicas não permitem fazer, conclui-se que todas as eficiências dadas por essas técnicas são contaminadas por erros aleatórios).

Já as principais desvantagens, ainda de acordo a Civil Aviation Authority (2000) são:

1. Não trabalham bem quando as DMUs possuem muitos *inputs* e/ou muitos *outputs* devido ao alto grau de complexidade dos modelos;
2. É necessário, para um bom funcionamento, a prévia especificação da forma funcional da fronteira, que eventualmente pode ser incorreta;
3. É necessário que se trabalhe com grandes amostras de DMUs para obter resultados confiáveis;
4. São bem desenvolvidas apenas quando se está analisando DMUs que possuem um único *output*, não sendo adequadas a situações com múltiplos *outputs*.

O Quadro 3 apresenta uma comparação entre as técnicas paramétricas e não paramétricas de análise de eficiência produtiva.

Grupo	Baseada	Alta correlação de <i>inputs</i> e <i>outputs</i>	<i>Outliers</i> e Ruídos	Testes estatísticos	DMUs necessárias	Técnicas presentes	Restrições
Paramétricas	Na determinação da função produção	Não é necessária	Menos sensíveis	Possibilitam	Mais	Funções pré-determinadas e; Fronteira Estocástica	Devem ser utilizados em análises com um único <i>output</i>
Não-paramétricas	Na construção empírica da fronteira de eficiência	Necessária	Mais sensíveis	Não possibilitam	Menos	Análise por Envoltória de Dados e; Números Índices	Podem ser utilizados em análises com múltiplos <i>inputs</i> e <i>outputs</i>

Quadro3 - Comparação entre as técnicas paramétricas e não-paramétricas de análise eficiência

Apesar do foco desse trabalho serem as técnicas não paramétricas de análise de eficiência, a estrutura desenvolvida no início desse capítulo (baseada nos conceitos de técnica, modelo e perspectiva) serve tanto para as técnicas paramétricas quanto para as não paramétricas como ficará claro nos próximos dois subitens que introduzem esses dois tipos de técnicas.

3.4 Comparação entre as técnicas paramétricas de análise de eficiência

Como já mencionado, as técnicas paramétricas de análise de eficiência produtiva se dividem em duas categorias: (a) a das técnicas determinísticas e (b) a das técnicas estocásticas. As técnicas determinísticas não consideram cálculos estatísticos em sua

formulação; já as técnicas estocásticas se baseiam em análises estatísticas e são capazes de isolar, na formulação da função produção, a componente de erro aleatório, algo que a os modelos determinísticos não permitem. Na prática, as principais diferenças entre as técnicas determinísticas e as estocásticas de análise de eficiência são:

1. As técnicas estocásticas requerem uma amostra de DMUs muito maior que as técnicas determinísticas, sendo que isso acontece porque as técnicas estocásticas modelam relações que as determinísticas não modelam (porém, ambas as categorias de técnicas paramétricas necessitam muito mais DMUs que as técnicas não-paramétricas);
2. As técnicas determinísticas são muito mais afetadas por ruídos que as estocásticas sendo que isso acontece por que as técnicas estocásticas consideram na própria função da fronteira os ruídos (erros aleatórios), algo que as técnicas determinísticas não fazem. Porém, as técnicas estocásticas exigem uma forte suposição quanto à distribuição estatística dos ruídos.

A principal técnica determinística de análise de eficiência encontrada na literatura é a chamada técnica das funções pré-determinadas, que são funções produção já prontas, advindas da microeconomia e que se ajustam com perfeição a muitas situações. Entre os possíveis modelos que podem ser aplicados a técnica de funções pré-determinadas, pode-se citar: (a) a função Cobb-Douglas e (b) a função trans-logarítmica. Já a principal técnica estocástica de análise de eficiência, encontrada na literatura, é a técnica da Fronteira Estocástica, que apresenta os mesmos modelos das funções pré-determinadas, mas ao contrário da primeira, apresenta uma componente de erro aleatório.

O Quadro 4 apresenta as principais características das técnicas paramétricas determinísticas e estocásticas de análise de eficiência.

Categoria	Componente de erro aleatório	DMUs necessárias	Ruídos	Técnicas Identificadas
Determinísticas	Não está presente	Menos	Mais sensíveis	Funções pré-determinadas
Estocásticas	Presente	Mais	Menos sensíveis	Fronteira Estocástica

Quadro 4 - Comparação entre as técnicas Determinísticas e Estocásticas de análise de eficiência

Resumindo, as técnicas paramétricas de análise de eficiência, como já dito, buscam calcular a eficiência por meio da construção de uma função produção que será representada por “ $f(x,\beta)$ ”, onde x representa um vetor de *inputs* e β representa alguns parâmetros que devem ser determinados. A forma básica que a função produção terá, dependerá do modelo de função produção que será assumido, sendo que cada um desses modelos implicará no estabelecimento de algumas considerações e hipóteses. Já os parâmetros β poderão ser calculados por meio de algumas ferramentas matemáticas, sendo que cada uma corresponde a uma perspectiva diferente para a técnica (são perspectivas pois não alteram as hipóteses do modelo).

A Figura 18 ilustra a técnica paramétrica determinística de análise de eficiência produtiva juntamente com seus respectivos modelos e perspectivas. Cada técnica, representada pela cor vermelha, pode conter todos os modelos (em verde) do grupo que se encontra de seu lado direito e cada modelo, por sua vez, pode ser utilizado com todas as

perspectivas (em amarelo) do grupo que também se encontra de seu lado direito na figura. Sendo assim, as funções pré-determinadas podem ser utilizadas ou com o modelo Translog ou com o modelo de Cobb-Douglas e os parâmetros β para esses dois modelos podem ser calculados utilizando-se as perspectivas: (a) programação matemática, (b) mínimos quadrados corrigidos ou (c) mínimos quadrados modificados.

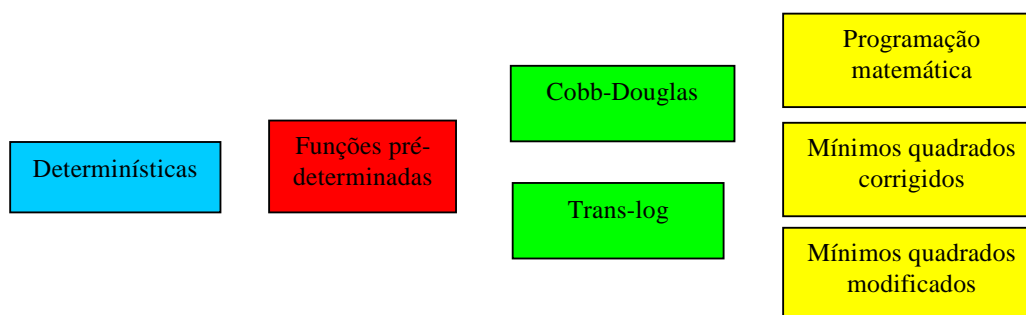


Figura 18 – Técnicas, modelos e perspectivas determinísticas de cálculo da eficiência.

A Figura 19 ilustra a técnica paramétrica estocástica de determinação da eficiência produtiva juntamente com seus respectivos modelos e perspectivas. A interpretação dessa figura pode ser realizada de maneira semelhante a da Figura 18.

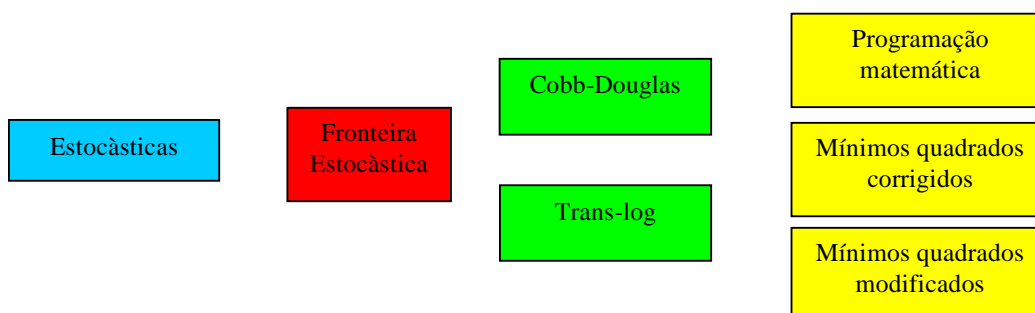


Figura 19–Técnicas, modelos e perspectivas estocásticas de cálculo da eficiência.

Nesse trabalho não serão abordados com profundidade os modelos e perspectivas das técnicas paramétricas de análise de eficiência visto que o foco são as técnicas não-paramétricas.

3.5 Comparação entre as técnicas não-paramétricas de análise de eficiência

As técnicas não-paramétricas de análise de eficiência produtiva são duas: (a) a Análise por Envoltória de Dados (DEA) e a (b) a técnica dos Números Índices. Pela técnica dos Números Índices são comparadas as relações *outputs/inputs* de apenas duas DMUs de cada vez ou de uma mesma DMU em dois períodos de tempo. Já pela técnica Análise por Envoltória de Dados é comparada uma DMU com a sua projeção na fronteira de eficiência empiricamente construída. Convém ressaltar que ao se comparar uma DMU com sua projeção na fronteira garante-se que estejam sendo comparadas várias DMUs ao mesmo tempo visto que, para construção da fronteira são necessários os dados dessas várias DMUs.

Uma das maiores vantagens da Análise por Envoltória de Dados sobre as outras técnicas de análise de eficiência é que ela calcula as utilidades de todos os *inputs* e *outputs* das DMUs analisadas. A técnica dos Números Índices, por sua vez, requer que as utilidades sejam fornecidas ou que utilize uma técnica de apoio para calculá-las.

O valor da eficiência calculada pela técnica DEA será sempre limitado entre 0 e 1 porque, pelo procedimento adotado por essa técnica, uma DMU deve ser comparada com sua projeção na fronteira que, por definição, representa o padrão ótimo para ela e sendo assim, a máxima eficiência que essa DMU poderá possuir será 1, que será obtida quando ela estiver sobre a fronteira (caso contrário à eficiência será menor que 1). A técnica dos Números Índices, por sua vez, compara apenas duas DMUs de cada vez e assim,

dependendo de qual das DMUs que estiver sendo comparada tiver a maior produtividade, a eficiência poderá ser um número maior ou menor que 1. Devido também a esse fato, os Números Índices são menos sensíveis a pontos fora da curva (*outliers*) que o DEA, pois como nessa técnica as DMUs estarão sendo comparadas de duas em duas, um ponto fora da curva não comprometerá a análise na maioria dos casos (REBELO, 2000).

O Quadro 5 resume as principais características das técnicas Números Índices e Análise por Envoltória de Dados (DEA).

Técnica	Baseada	Eficiência	Utilidades	DMUs comparadas	<i>Outliers</i>
Análise por Envoltória de Dados (DEA)	Na comparação de uma DMU com sua projeção na fronteira	Deve ser um número entre 0 e 1	São calculadas pela própria técnica	Várias, por meio da construção da fronteira	Altamente sensíveis
Números Índices	Na comparação de uma DMU com outra DMU ou com ela mesma no passado	Pode assumir qualquer valor	Devem ser fornecidas ou é necessário o apoio de outra técnica para calculá-las	Duas	Não são sensíveis

Quadro 5 - Comparação entre as técnicas Não-Paramétricas de Análise de Eficiência

Maiores detalhes sobre essas técnicas e sobre seus modelos e perspectivas se encontram nos próximos dois Capítulos.

Capítulo 4 - Análise por Envoltória de Dados

A Análise por Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis* - DEA) é uma técnica baseada em programação linear (PL) que possui o objetivo de medir o desempenho de unidades operacionais ou tomadoras de decisão (DMUs), quando a presença de múltiplas entradas e múltiplas saídas torna difícil a comparação (BIOND NETO; MELLO; GOMES, 2003; VILELA, 2004). De acordo com Oliveira e Gomes (2003), a Análise por Envoltória de Dados (DEA) é uma abordagem de programação matemática, alternativa aos métodos estatísticos tradicionais, que possibilita estimar a eficiência relativa mediante a construção empírica de uma fronteira.

Segundo Macedo et al. (2005), a Análise por Envoltória de Dados evita a necessidade de desenvolver um “indicador-padrão”, pois ela pode incorporar múltiplas entradas e saídas, tanto no numerador quanto no denominador do cálculo da eficiência, sem a necessidade de conversão para uma base comum.

A Análise por Envoltória de Dados teve origem nos trabalhos de Charnes, Cooper e Rhodes (1978) e de Banker, Charnes e Cooper (1984), sendo ambos os trabalhos baseados em Farrel (1957).

4.1 Modelos do DEA

Um modelo é uma simplificação da realidade sobre o qual uma técnica precisa se apoiar, para poder ser utilizada. A principal diferença entre os modelos matemáticos do DEA é em relação ao formato da fronteira (que é consequência direta do tipo de retorno à escala adotado) e em relação à orientação.

Os modelos DEA podem adotar retornos constantes ou variáveis a escala. Os modelos com retornos constantes assumem *a priori* que todas as DMUs avaliadas não operam com economia ou deseconomia de escala; por outro lado, os modelos com retornos variáveis à escala assumem que as DMUs podem apresentar qualquer tipo de retorno à escala (constante, crescente ou decrescente), ficando a técnica responsável por separar as DMUs que operam em cada tipo. Essa separação, como será visto mais à frente, é realizada por meio da utilização de uma variável de escala que deve ser acrescentada ao modelo.

Cada modelo, dependendo do tipo de retorno à escala, do formato da fronteira e da orientação adotada, irá conduzir a eficiência a um valor diferente, que deve ser interpretado de acordo com o contexto de cada modelo. Os principais modelos do DEA são: o CCR, o BCC, os Multiplicativos Variante e Invariante, os Aditivos Variante e Invariante e o FDH.

Segundo Mello et al. (2005a), os modelos DEA têm algumas propriedades comuns, que faz com que eles sejam caracterizados como pertencentes a uma mesma técnica. Essas propriedades são apresentadas a seguir.

1. Em qualquer modelo DEA, cada DMU escolhe seu próprio conjunto de pesos (utilidades), de modo que o conjunto escolhido seja o melhor possível e maximize sua eficiência;
2. Em qualquer modelo DEA, a DMU que apresentar a melhor relação *output/input* será eficiente.
3. O DEA também não requer uma normalização prévia dos *inputs* e *outputs*, podendo conter dados de qualquer ordem de grandeza (a não ser que exista interesse especial nas utilidades dos *inputs* e *outputs*);

4.2 Modelos CCR e BCC

Charnes, Cooper e Rhodes (1978) desenvolveram o primeiro modelo matemático para a técnica DEA, o modelo CCR. Esse modelo, que recebeu esse nome em homenagem aos seus autores (são as iniciais de seus nomes), também pode ser denominado como modelo de Retornos Constantes à Escala (*Constant Returns to Scale* - CRS). Ter retornos constantes à escala significa adotar a hipótese de que os *inputs* e os *outputs* são proporcionais entre si, o que faz com que o formato da fronteira de eficiência do modelo CCR seja uma reta com um ângulo de 45°. O modelo CCR calcula a eficiência de uma DMU dividindo sua produtividade pela produtividade da DMU mais produtiva de um determinado conjunto, sem se preocupar com a escala.

Já o modelo BCC (que também recebeu o nome das iniciais de seus autores) foi desenvolvido em 1984 por Banker, Charnes e Cooper e incorporava ao modelo CCR os conceitos de economia de escala. Dessa maneira, o modelo BCC também pode ser intitulado como modelo de Retornos Variáveis à Escala (*Variant Returns to Scale* - VRS). O modelo BCC propõe comparar apenas DMUs que operem em escala semelhante. Assim,

por esse modelo, a eficiência de uma DMU é obtida dividindo-se sua produtividade pela maior produtividade dentre as DMUs que apresentem o mesmo tipo de retorno a escala que ela. A fronteira do modelo BCC é constituída de um conjunto de retas de ângulos variados, o que caracteriza uma fronteira linear por partes. A Figura 20 apresenta uma comparação entre as fronteiras do BCC e do CCR.

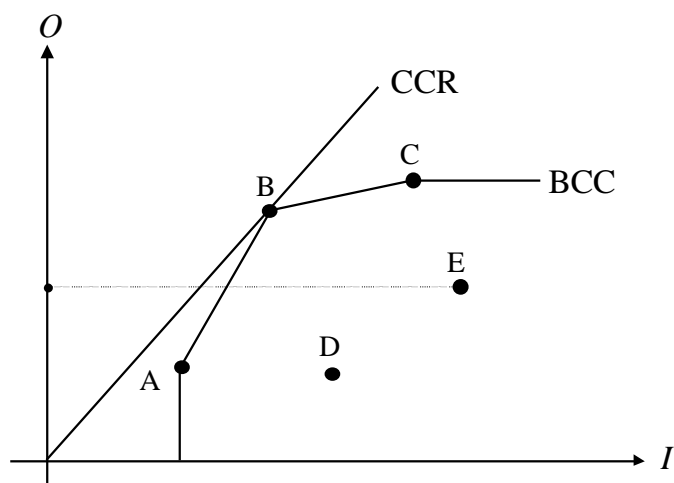


Figura 20- Comparação entre as fronteiras dos modelos BCC e CCR
Fonte: Mello et al.(2004)

Uma característica comum aos modelos CCR e BCC é que o resultado obtido por esses modelos não varia com a unidade de medição, ou seja, usar como variável, por exemplo, a área plantada de uma determinada cultura em km^2 , m^2 ou hectares, não afetará o resultado.

Devido à diferença entre o tipo de retorno a escala e entre o formato da fronteira dos modelos CCR e BCC, esses dois modelos automaticamente calcularão tipos diferentes de eficiência, como foi discutido no Capítulo 2. Os dois tipos de eficiência calculados estão ilustrados pela Figura 21 (maiores detalhes sobre esses tipos de eficiência foram apresentados no Capítulo 2).

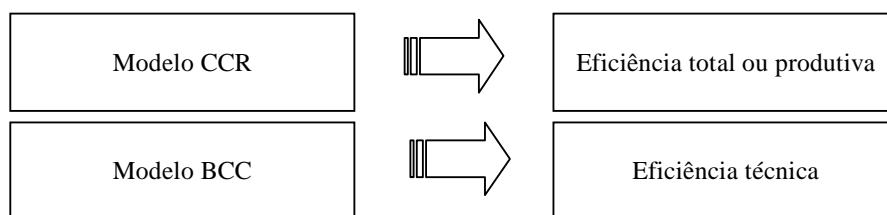


Figura 21 - Correspondência entre modelos matemáticos DEA e o tipo de eficiência calculada
 Fonte: Mariano, Almeida e Rebelatto (2006).

Após o cálculo da eficiência técnica e da eficiência total, por meio dos modelos BCC e CCR, pode-se calcular a eficiência de escala por meio da Expressão 17, que é advinda da Expressão 14 já apresentada no Capítulo 2.

$$\text{Eficiência de escala} = \text{Eficiência do modelo CCR} / \text{Eficiência do modelo BCC} \quad (17)$$

Vale lembrar que é de extrema importância para a pessoa que irá utilizar as técnicas de análise de eficiência saber o quanto da eficiência calculada se deve a fatores técnicos e o quanto se deve a problemas de escala, pois com isso, essa pessoa possuirá informações bem mais completas que certamente a auxiliarão a tomar decisões na direção correta para melhorar sua eficiência.

As principais perspectivas dos modelos CCR e BCC são: (a) fracionária; (b) Primal orientada ao *input*; (c) Primal orientada ao *output*; (d) Dual orientada ao *input* e; (e) Dual orientada ao *output* - 1º nível; sendo que, todas essas perspectivas podem ser calculadas por meio da: (a) fronteira clássica e (b) fronteira invertida e (c) fronteira difusa - 2º nível; além disso, todas elas podem: (a) possuir ou (b) não possuir restrições que limitam os pesos - 3º nível e; podem: (a) possuir ou (b) não possuir variáveis de *input* e *output* não controláveis - 4º nível.

A Figura 22 apresenta os modelos CCR e BCC e suas respectivas perspectivas. Cada coluna dessa figura representa um nível de diferente do conjunto de perspectivas do modelo, sendo que cada perspectiva pertencente a uma coluna (nível), pode ser utilizada com todas as perspectivas das colunas posteriores. Por exemplo: a perspectiva fracionária pode ser calculada utilizando-se as fronteiras clássica, invertida ou difusa; a perspectiva fracionária calculada com a fronteira invertida, por sua vez, pode ser calculada com ou sem restrições aos pesos; por fim, a perspectiva fracionária calculada com a fronteira invertida e sem restrições de pesos pode ser calculada com ou sem variáveis não controláveis. Totalizam-se, assim, 60 combinações diferentes de perspectivas para cada um dos modelos (BCC e CCR).

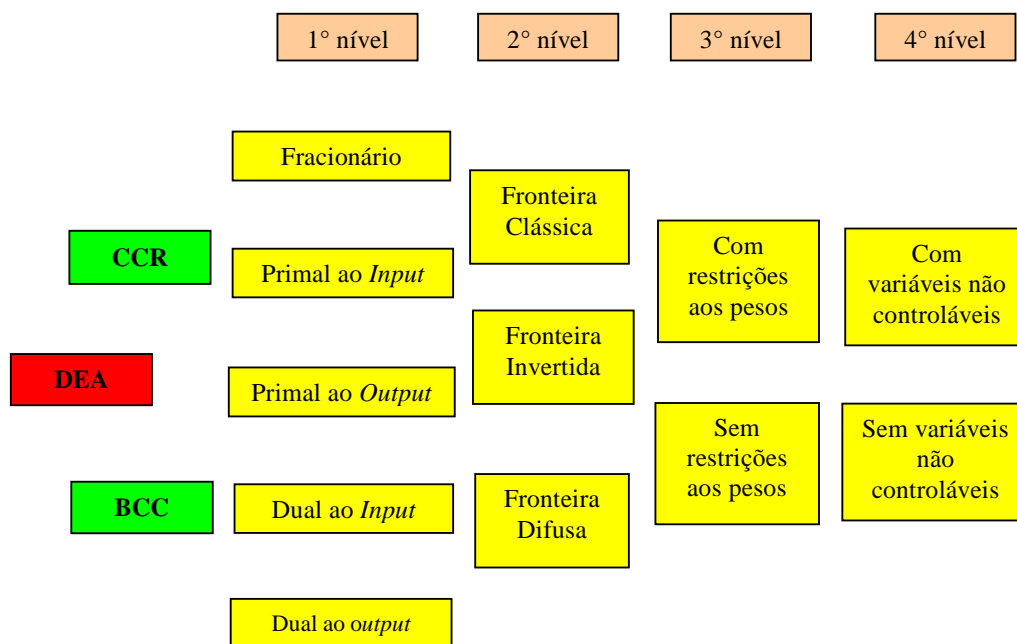


Figura 22 - Perspectivas dos modelos BCC e CCR
 Fonte: Adaptado de Almeida, Mariano e Rebelatto (2006).

4.2.1 Perspectiva fracionária

A perspectiva DEA fracionária é obtida diretamente a partir da fórmula de produtividade de Knight (1933) e da fórmula de eficiência relativa de uma DMU, apresentada no Capítulo 2. O grande problema do cálculo da eficiência relativa por essas fórmulas é a determinação das utilidades dos *inputs* dos *outputs* de cada DMU. Para resolver esse problema, foi necessário considerar que as utilidades dos *inputs* e *outputs* de uma DMU são aquelas que maximizam sua eficiência relativa, o que não necessariamente é verdade, sendo, portanto, um dos pressupostos do DEA.

O modelo DEA originalmente desenvolvido por Charnes, Cooper e Rhodes no ano de 1978 (modelo CCR) transformava o problema do cálculo da eficiência relativa em um problema de programação fracionária, como expresso pelas Expressões 18, 19 e 20.

$$\text{MAX } \frac{P}{P_{\max}} = \frac{P}{1} = \frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk0}} \quad (18)$$

Sujeito a:

$$\frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ik}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk}} \leq 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, z \quad (19)$$

$$u_i \text{ e } v_j > 0 \quad (20)$$

Em que:

u_i : Utilidade do *output* i ;

v_j : Utilidade do *input* j ;

x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k ;

y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU k ;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

z : Número de DMUs em avaliação;

m : Número de *outputs*;

n : Número de *inputs*.

A função objetivo, mostrada na Expressão 18, representa a eficiência da DMU em análise (P / P_{\max}); já as restrições, dadas pela Expressão 19, representam às produtividades de todas as DMUs que estão sendo comparadas (k de 1 a z), inclusive a em análise, e impõem que essas produtividades sejam limitadas a 1. Como pelas restrições impostas (na Expressão 19), P_{\max} obrigatoriamente será igual a 1, visto que a produtividade de todas as DMUs está limitada a esse valor, a função objetivo ficará apenas com o numerador P , que é a produtividade (dada pela formula de Knight (1933)) da DMU em análise.

O DEA, portanto, buscará o conjunto de utilidades (pesos) que maximiza a produtividade da DMU em análise e ao mesmo tempo, ao ser utilizado no cálculo das produtividades das outras DMUs, não permita que nenhuma delas fique com a produtividade maior que 1. Isso garante que a DMU em análise seja comparada com a DMU mais produtiva, que é aquela cuja produtividade (dada pela Expressão 19) chegar primeiro a 1; com isso, ao final das iterações do modelo de programação linear, o resultado da função objetivo será a própria eficiência (P / P_{\max}) da DMU em análise.

Para cada DMU de um determinado conjunto, que se deseja calcular a eficiência, deve-se construir um modelo de programação fracionária diferente, sendo que esses modelos se diferenciam apenas em relação às variáveis x_{j0} e y_{i0} ; que são os *inputs* e *outputs* da DMU que se está analisando daquela vez.

Pode-se resumir a estratégia de cálculo da eficiência pelo DEA, a partir dos passos relatados a seguir.

1. Limita a produtividade das DMUs em comparação (que podem, em teoria, ser qualquer valor real) a um determinado valor, que convenientemente foi definido como 1;
2. Descobre, por meio de programação linear, o conjunto de pesos (utilidades) que maximiza a produtividade da DMU em análise, desde que a produtividade de nenhuma DMU que está sendo comparada, calculada com esses pesos, ultrapasse o valor 1;
3. Calcula a eficiência da DMU em análise (P / P_{\max}), sendo que o P_{\max} obrigatoriamente será 1, dadas as restrições impostas.

Assim, durante a resolução do modelo de PL, caso a função objetivo (FO) chegue a 1 primeiro que as restrições, a DMU em análise será eficiente; por outro lado, caso uma ou mais restrições cheguem a 1 primeiro que a função objetivo, as DMUs (eficientes) representadas por essas restrições serão os parâmetros para o cálculo da eficiência relativa da DMU em análise, que será ineficiente.

Quando uma restrição limita o valor da FO isso significa que a DMU representada por essa restrição é eficiente mesmo quando utiliza os pesos que maximizam a eficiência de uma outra DMU (da DMU em análise); assim, a DMU representada por essa restrição será definida como um *benchmark* da DMU ineficiente em análise. Um *benchmark* é uma DMU eficiente que pode ser adotada como padrão de comparação por uma DMU ineficiente para que assim, ela possa alcançar suas metas e se tornar eficiente. Uma DMU ineficiente

geralmente terá várias DMUs que lhe servirão de *benchmarks*, sendo que a meta para que essa DMU se torne eficiente, será uma DMU virtual (e portanto inexistente) formada pela combinação linear entre seus *benchmarks*.

O modelo BCC fracionário apresenta várias similaridades e o mesmo princípio de funcionamento do modelo CCR. A única diferença entre os dois é que no BCC há o acréscimo de um variável u no numerador (ou de uma variável v no denominador) como pode ser ilustrado pelas Expressões 21, 22 e 23

$$\text{MAX} \frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0} + u}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0}} \quad \text{ou} \quad \text{MAX} \frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0} + v} \quad (21)$$

Sujeito a:

$$\frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ik} + u}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk}} \leq 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ik}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk} + v} \leq 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, z \quad (22)$$

$$u_i \text{ e } v_j > 0; \quad u \text{ e } v \text{ sem restrição de sinal} \quad (23)$$

Em que:

- u_i : Utilidade do *output* i ;
- v_j : Utilidade do *input* j ;
- x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k ;
- y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU k ;
- x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;
- y_{j0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;
- u : Variável de retorno à escala do numerador;
- v : Variável de retorno à escala do denominador;
- z : Número de DMUs em avaliação;
- m : Número de *outputs*;
- n : Número de *inputs*;

As variáveis u e v têm a função de garantir que as restrições das DMUs que operam em escala diferente da DMU em análise, não limitem sua função objetivo. Com essas variáveis também é possível avaliar o tipo de retorno a escala em que a DMU em análise está operando. Por exemplo, se o valor de u for maior que zero, isso significa que a DMU está operando com retornos crescentes à escala; já se o valor de u for menor que zero, isso significa que a DMU está operando com retornos decrescentes à escala e; por fim, se o valor de u for igual a zero, isso significa que a DMU está operando com retornos constantes à escala, pois os *inputs* e os *outputs* serão proporcionais.

A variável v também pode ser utilizada para estimar o tipo de retorno à escala de uma DMU, porém ela deve ser interpretada de maneira oposta ao do coeficiente u ; assim, caso $v > 0$ os retornos a escala serão decrescentes, caso $v = 0$ os retornos serão constantes e caso $v < 0$ os retornos serão crescentes. Os retornos a escala não serão necessariamente iguais para as orientações aos *inputs* e aos *outputs*. O Quadro 6 resume as principais informações a respeito dos coeficientes u e v .

Coeficiente u	Tipo de retorno à escala	Coeficiente v	Tipo de retorno à escala
$u < 0$	Decrescente	$v < 0$	Crescente
$u = 0$	Constante	$v = 0$	Constante
$u > 0$	Crescente	$v > 0$	Decrescente

Quadro 6 – Interpretação dos coeficientes u e v

Geometricamente, o coeficiente u pode ser interpretado como sendo o ponto em que a reta que tangencia a fronteira de eficiência intercepta o eixo x; já o coeficiente v pode ser

interpretado como sendo o ponto em que a reta que tangencia a fronteira de eficiência intercepta o eixo y . As Figuras 23 e 24 ilustram esses conceitos.

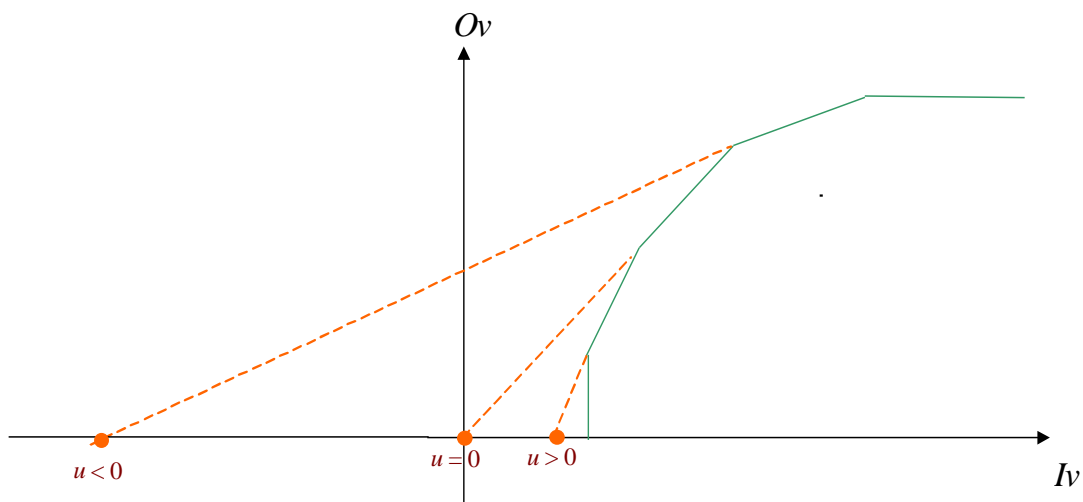


Figura 23 - Representação geométrica do coeficiente u

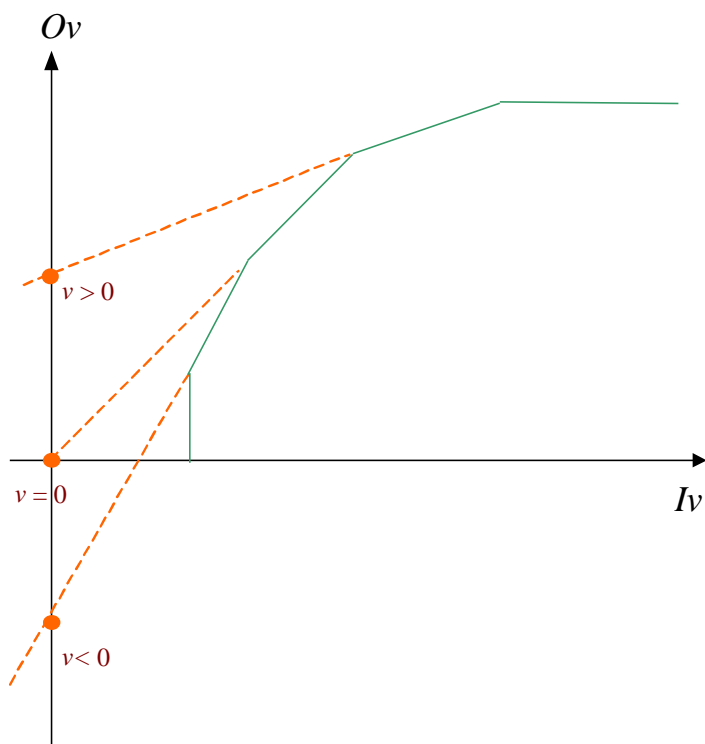


Figura 24 - Representação geométrica do coeficiente v

Um problema de programação fracionária possui infinitas soluções e por isso, é necessário linearizar esse problema para que se obtenha uma solução única. As perspectivas do tipo Primal, também chamadas de forma dos multiplicadores, originam-se a partir da linearização da perspectiva fracionária. Já as perspectivas do tipo Dual, também chamadas de forma do envelope, originam-se a partir do dual (ver Apêndice 2) do problema da perspectiva Primal. Tanto para o modelo CCR quanto para o BCC, a perspectiva fracionária não tem nenhuma aplicação prática, apenas didática.

4.2.2 Perspectiva das orientações aos *inputs* e aos *outputs*

De acordo com Coelli, Parada Rao e Battese (1998), os modelos CCR e BCC podem apresentar duas orientações: (a) para os *outputs* ou (b) para os *inputs*. No caso da orientação ser para minimização dos *inputs*, o modelo busca responder a seguinte questão: dado o nível de *outputs* que uma unidade produz qual a redução que pode ocorrer nos *inputs*, de modo a manter o corrente nível de *outputs* (VILELA, 2004)? Já os modelos orientados para a maximização dos *outputs* procuram responder à questão: dado o nível de *inputs* utilizado, qual o maior nível de *outputs* que se pode alcançar, mantendo-se o nível dos *inputs* constante (VILELA, 2004)? A Figura 25 ilustra as duas orientações referidas, para uma fronteira CCR.

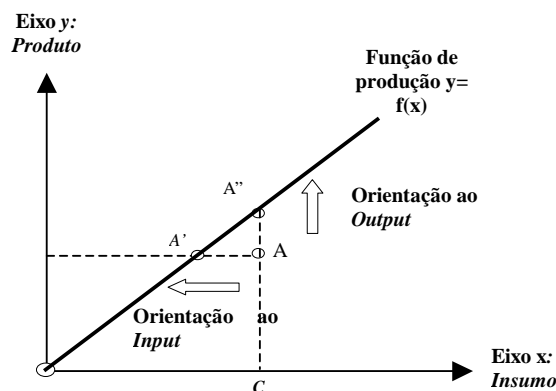


Figura 25 - As orientações aos *inputs* e aos *outputs*

As orientações dos modelos matemáticos apresentam comportamentos diferentes quando se utiliza o modelo CCR e o BCC. No caso do modelo utilizado ser o CCR, as duas orientações convergem ao mesmo resultado, o que é explicado pelo fato da fronteira desse modelo apresentar a forma de uma reta com um ângulo de 45° , conforme ilustra a Figura 25. Já para o modelo BCC, as duas orientações conduzirão a diferentes resultados, o que pode ser explicado pelo fato de que esses modelos são baseados na hipótese de que os *inputs* e os *outputs* não são necessariamente proporcionais e sendo assim, a minimização dos *inputs* e a maximização dos *outputs* poderão ter impactos diferentes sobre uma mesma DMU.

4.2.3 Perspectiva Primal ou Forma dos Multiplicadores

A perspectiva Primal, também conhecida como forma dos multiplicadores, é obtida a partir da linearização da perspectiva fracionária. Essa linearização transforma o problema de programação fracionária, com infinitas soluções, em um problema de programação linear, que possui uma única solução. Como já afirmado, para cada DMU que será

analisada, deve-se construir e resolver um modelo de programação linear diferente, sendo que a eficiência relativa da DMU em análise será o próprio resultado da função objetivo - FO - no caso do modelo orientado aos *inputs*, ou o inverso dela, no caso do modelo orientado aos *outputs*.

Para ambas as orientações, as perspectivas Primais são obtidas com o acréscimo de uma restrição ao modelo DEA fracionário. Essa restrição, apresentada nas Expressões 25, 29, 33 e 37 dos modelos a seguir, fazem os *outputs* ou os *inputs* (dependendo da orientação do problema) ficarem constantes, ou mais especificamente ficarem iguais a 1, transformando assim, o problema de programação fracionária em um problema de programação linear.

As Expressões 24, 25, 26 e 27 apresentam a montagem do modelo CCR Primal orientado aos *inputs*, a partir do modelo DEA fracionário.

$$\text{MAX} \frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0}}{1} \rightarrow \text{MAX} \sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0} \quad (24)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0} = 1 \quad (25)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ik}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk}} \leq 1 \rightarrow \sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{jk} - \sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk} \leq 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, z \quad (26)$$

$$u_i \text{ e } v_j > 0 \quad (27)$$

Em que:

u_i : Utilidade do *output* i ;

v_j : Utilidade do *input* j ;

x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k ;

y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU k ;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

y_{j0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

z : Número de DMUs em avaliação;

m : Número de *outputs*;

n : Número de *inputs*.

As Expressões 28, 29, 30 e 31, por sua vez, apresentam a montagem do modelo

CCR Primal orientado ao *output* a partir do modelo DEA fracionário.

$$\text{MAX} \frac{1}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0}} \rightarrow \text{MIN} \sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0} \quad (28)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0} = 1 \quad (29)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ik}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk}} \leq 1 \rightarrow \sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{jk} - \sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk} \leq 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, z \quad (30)$$

$$u_i \text{ e } v_j > 0 \quad (31)$$

Em que:

u_i : Utilidade do *output* i ;

v_j : Utilidade do *input* j ;

x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k ;

y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU k ;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

y_{j0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

z : Número de DMUs em avaliação;

m : Número de *outputs*;

n : Número de *inputs*.

O modelo BCC pode ser linearizado por meio dos mesmos procedimentos utilizados para o modelo CCR. As Expressões 32, 33, 34 e 35 representam um modelo BCC orientado ao *input*.

$$\text{MAX } \frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0} + u}{1} \quad (32)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0} = 1 \quad (33)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ik} + u}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk}} \leq 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ik} + u - \sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk} \leq 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, z \quad (34)$$

$$u_i \text{ e } v_j > 0 \text{ e } u \text{ sem restrição de sinal} \quad (35)$$

Em que:

u_i : Utilidade do *output* i ;

v_j : Utilidade do *input* j ;

x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k ;

y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU k ;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

u : Variável de retorno a escala da DMU em análise;

z : Número de DMUs em avaliação;

m : Número de *outputs*;

n : Número de *inputs*.

As Expressões 36, 37, 38, e 39, por sua vez, representam um modelo BCC orientado ao *output* também sendo obtido a partir do BCC fracionário.

$$\text{MAX } \frac{1}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0} + v} \rightarrow \text{MIN } \sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{j0} + v \quad (36)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{i0} = 1 \quad (37)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ik}}{\sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk} + v} \leq 1 \rightarrow \sum_{i=1}^m u_i \cdot y_{ik} - v - \sum_{j=1}^n v_j \cdot x_{jk} \leq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, z \quad (38)$$

$$u_i \text{ e } v_j > 0 \text{ e } v \text{ sem restrição de sinal} \quad (39)$$

Em que:

u_i : Utilidade do *output* i ;

v_j : Utilidade do *input* j ;

x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k ;

y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU k ;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

v : Variável de retorno a escala da DMU em análise;

z : Número de unidades em avaliação;

m : Número de *outputs*;

n : Número de *inputs*.

Os modelos Primais fornecem como resposta, além da eficiência relativa, os pesos u_i e v_j . Esses pesos são estimativas das utilidades dos *inputs* e dos *outputs* de cada DMU em análise. A utilidade é um conceito da economia que representa a importância de um determinado bem para uma DMU. As utilidades nem sempre são facilmente identificadas, por isso as perspectivas Primais podem ser utilizadas para estimá-las, possibilitando que as DMUs classifiquem os seus *outputs* e *inputs* por ordem de importância. Para contemplar esse enfoque, a literatura apresenta trabalhos como o de Ângulo-Meza, Mello e Clímaco (2006) que propõe a utilização do DEA Primal como uma ferramenta para a análise multicritério.

É importante destacar que, como nos modelos DEA a produtividade das DMUs está limitada a 1, os coeficientes u_i e v_j obtidos não serão as utilidades reais do problema, já que a produtividade por definição pode assumir qualquer valor real. Essas utilidades obtidas seriam apenas proporcionais às utilidades reais, ou seja, pelos coeficientes obtidos nos modelos Primais pode-se saber quais são os *inputs* ou os *outputs* mais importantes e em que proporção eles são mais importantes, porém não é possível saber suas utilidades reais.

Outro problema dos coeficientes u_i e v_j , é que esses coeficientes são influenciados pela ordem de grandeza dos *inputs* e dos *outputs*. Assim, para que os coeficientes reflitam

exatamente a proporcionalidade das utilidades dos *inputs* e dos *outputs*, é necessário realizar-se uma normalização prévia dos dados do problema. Porém, essa normalização não é necessária se o interesse for apenas pela eficiência das DMUs, já que um dos pressupostos do DEA é que ele calcula a eficiência de DMUs com *inputs* e *outputs* de qualquer ordem de grandeza.

4.2.4 Perspectiva Dual ou Forma do Envelope

A todo problema de programação linear associa-se outro problema de programação linear chamado Dual, cujo resultado da função objetivo é o mesmo do problema original que é chamado de Primal (THANASSOLIS, 2001). Por meio dos problemas Duais, podem-se realizar análises que a simples resolução dos problemas Primais são incapazes de contemplar. As regras para se obter o problema Dual a partir de seu correspondente Primal podem ser encontradas no Apêndice 2.

Sendo os modelos CCR e BCC Primais problemas de programação linear, também se pode encontrar para eles e suas duas orientações (ao *input* e ao *output*), seus correspondentes Duais. Essa formulação Dual dos modelos DEA também é chamada forma do Envelope.

Em um problema de programação linear, uma inequação pode ser transformada em equação por meio do acréscimo de uma variável de folga. Para transformar as inequações em equações deve-se: (a) somar uma variável (+S) nas restrições do tipo “menor” ou “menor ou igual” e (b) subtrair uma variável (-S) nas restrições do tipo “maior” ou “maior ou igual”.

O modelo CCR orientado ao *input* Dual pode ser expresso pelas Expressões 40, 41, 42 e 43 sendo que, nas Expressões 41 e 42, é apresentada tanto a forma padrão (obtida

diretamente a partir dos princípios da dualidade), quanto à forma transformada em equação, dada pelo acréscimo ou subtração de uma variável de folga.

$$\text{MIN } \theta \quad (40)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k \geq y_{i0} \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k - S_i = y_{i0}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (41)$$

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k - \theta \cdot x_{j0} \leq 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k + S_j = \theta \cdot x_{j0}, \quad \text{para } j = 1, 2, 3, n \quad (42)$$

$$\lambda_k \text{ e } \theta > 0 \quad (43)$$

Em que:

θ : Eficiência;

λ_k : Participação da DMU k na meta da DMU em análise;

x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k;

y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU k;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

z: Número de unidades em avaliação;

m: Número de *outputs*;

n: Número de *inputs*;

S_i : Variável de folga do *output* i;

S_j : Variável de folga do *input* j.

Por sua vez, o modelo CCR orientado ao *output* Dual pode ser expresso pelas Expressões 44, 45, 46 e 47.

$$\text{MAX } \eta \quad (44)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k \leq x_{j0} \text{ ou } \sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k + S_j = x_{j0}, \text{ para } j=1,2,3\dots n \quad (45)$$

$$\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k - \eta \cdot y_{i0} \geq 0 \text{ ou } \sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k - S_i = \eta \cdot y_{i0}, \text{ para } i=1,2,3,m \quad (46)$$

$$\lambda_k \text{ e } \eta > 0 \quad (47)$$

Em que:

η : Inverso da Eficiência;

λ_k : Participação da DMU k na meta da DMU em análise;

x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k;

y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU k;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

z: Número de unidades em avaliação;

m: Número de *outputs*;

n: Número de *inputs*;

S_i : Variável de folga do *output* i;

S_j : Variável de folga do *input* j.

Devido ao fato do resultado da função objetivo do problema Primal ser, por definição, igual ao do Dual, pode-se afirmar que a variável θ é a própria eficiência da DMU analisada, enquanto η é o inverso da eficiência da DMU analisada.

Da mesma forma que para o modelo CCR, também se pode obter a perspectiva Dual para o modelo BCC orientado ao *input* e ao *output*. O modelo BCC Dual é exatamente igual ao modelo CCR Dual; a única diferença é que nos modelos BCC é acrescentada a restrição $\sum_{k=1}^z \lambda_k = 1$ que não se encontra no modelo CCR. Essa restrição, chamada de restrição de convexidade, é associada às variáveis de escala u e v dos modelos BCC Primais.

Assim, o modelo BCC Dual, orientado ao *input*, pode ser representado pelas expressões 48, 49, 50, 51 e 52.

$$\text{MIN } \theta \quad (48)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k \geq y_{i0} \text{ ou } \sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k - S_i = y_{i0}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (49)$$

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k - \theta \cdot x_{j0} \leq 0 \text{ ou } \sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k + S_j = \theta \cdot x_{j0}, \text{ para } j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (50)$$

$$\sum_{k=1}^z \lambda_k = 1 \quad (51)$$

$$\lambda_k \text{ e } \theta > 0 \quad (52)$$

Em que:

θ : Eficiência;

λ_k : Participação da DMU k na meta da DMU em análise;

x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k;

y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU k;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

z: Número de unidades em avaliação;

m: Número de *outputs*;

n: Número de *inputs*

S_i : Variável de folga do *output* i;

S_j : Variável de folga do *input* j.

Já o modelo BCC Dual orientado ao *output* pode ser representado pelas Expressões 53, 54, 55, 56 e 57.

$$\text{MAX } \eta \quad (53)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k \leq x_{j0} \text{ ou } \sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k + S_j = x_{j0}, \text{ para } j=1,2,3\dots n \quad (54)$$

$$\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k - \eta \cdot y_{i0} \geq 0 \text{ ou } \sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k - S_i = \eta \cdot y_{i0}, \text{ para } i=1,2,3,m \quad (55)$$

$$\sum_{k=1}^z \lambda_k = 1 \quad (56)$$

$$\lambda_k \text{ e } \eta > 0 \quad (57)$$

Em que:

- η : Inverso da eficiência;
- λ_k : Participação da DMU k na meta da DMU em análise;
- x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k;
- y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU k;
- x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;
- y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;
- z: Número de unidades em avaliação;
- m: Número de *outputs*;
- n: Número de *inputs*;
- S_i : Variável de folga do *output* i;
- S_j : Variável de folga do *input* j.

Especificamente para o modelo BCC, as modelagens do tipo Primal possibilitam a determinação do tipo de retorno à escala da DMU analisada, sendo que essa determinação é feita, como já explicado, por meio das variáveis u e v . As modelagens do tipo Dual, porém, não permitem esse tipo de análise devido à estrutura matemática do modelo, que não apresenta os coeficientes u ou v , como pode ser constatado pelas Expressões apresentadas.

As restrições do problema Dual expostas nas Expressões 41 e 42; 45 e 46; 49 e 50; 54 e 55, nada mais são do que a fórmula para o cálculo da projeção de uma DMU ineficiente na fronteira. Isso pode ser percebido comparando-se essas restrições, que estão reproduzidas, apenas com a modificação de que as folgas trocaram de lado na equação, nas Expressões 58 e 59, com as Expressões 10 e 11, de projeção na fronteira, originalmente mostradas no Capítulo 2, e que também estão reproduzidas a seguir.

Restrições dos modelos BCC e CCR orientados aos *inputs*

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k = \theta \cdot x_{j0} - S_j \text{ para } j=1,2,3\dots n \quad (58)$$

$$\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k = y_{i0} + S_i \text{ para } i=1,2,3\dots m$$

Restrições dos modelos BCC e CCR orientados aos *outputs*

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k = x_{j0} - S_j \text{ para } j=1,2,3\dots n \quad (59)$$

$$\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k = \eta \cdot y_{i0} + S_i \text{ para } i=1,2,3\dots m$$

Fórmula de projeção na fronteira da orientação aos *inputs*

$$D_{Xproj} = D_{XDMU} * E \quad (10)$$

$$D_{Yproj} = D_{YDMU}$$

Fórmula de projeção na fronteira da orientação aos *outputs*

$$D_{Xproj} = D_{YDMU} \quad (11)$$

$$D_{Yproj} = D_{YDMU} / E$$

Em que:

θ : Eficiência;

η : Inverso da eficiência;

λ_k : Participação da DMU k na meta da DMU em análise;

x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k;

y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU k;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

z: Número de unidades em avaliação;

m: Número de *outputs*;

n: Número de *inputs*;

S_i : Variável de folga do *output* i;

S_j : Variável de folga do *input* j.

E: Eficiência;

D_{XDMU} : Distância de uma DMU até o eixo x;

D_{Xproj} : Distância da projeção de uma DMU até o eixo x;

D_{YDMU} : Distância de uma DMU até o eixo y;

D_{Yproj} : Distância da projeção de uma DMU até o eixo y.

Sabendo-se que as distâncias D_{XDMU} e D_{YDMU} são respectivamente as quantidades de *input* virtual (combinação linear de todos os *inputs*) e *output* virtual (combinação linear de todos os *outputs*) da DMU em análise e sabendo-se que θ e η são respectivamente a eficiência (E) e o inverso da eficiência (1/E) da DMU em análise; pode-se concluir, ao se observar atentamente as Expressões citadas, que as distâncias D_{Xproj} e D_{Yproj} , que são referentes a projeção na fronteira (meta) da DMU em análise, são equivalentes respectivamente a $\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k$ e $\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k$. Na realidade, a única diferença entre as

expressões citadas é que na restrição dos modelos DEA é acrescentada uma variável de folga que será explicada mais adiante.

Assim, pode-se concluir que, por meio da perspectiva Dual, é possível calcular as metas para que as DMUs ineficientes se tornem eficientes. Essas metas são calculadas por

meio das variáveis λ_k que integram a perspectiva Dual, sendo que: $\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k$ e $\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k$

são as metas, respectivamente, de um *output* x_i e de um *input* y_j da DMU que está sendo analisada (DMU₀).

Como já comentado, o cálculo das metas nos modelos CCR e BCC só não é igual as expressões deduzidas no Capítulo 2 devido a presença das folgas. As variáveis de folga “S_i” e “S_j” servem para compensar possíveis distorções na fronteira de eficiência causadas pelo fato da fronteira construída pelo DEA ser linear por partes, o que a caracteriza como uma aproximação da fronteira de eficiência teórica, que é uma curva.

Como os modelos CCR e BCC possuem orientações radiais, as metas trazidas por eles serão calculadas ou olhando apenas para os *inputs* ou apenas para os *outputs* (dependendo da orientação). Sendo assim, pelo menos em teoria, em caso de orientação aos *inputs*, todos os aumentos sugeridos como meta para os *outputs* deveriam ser nulos e, em caso de orientação aos *outputs*, todas as reduções sugeridas como metas para os *inputs* também deveriam ser nulas. Porém, nem sempre isso ocorre na prática devido a presença das folgas que possuem, como já ressaltado, função de compensar possíveis distorções na fronteira de eficiência. A Figura 27 exemplifica duas situações desse tipo.

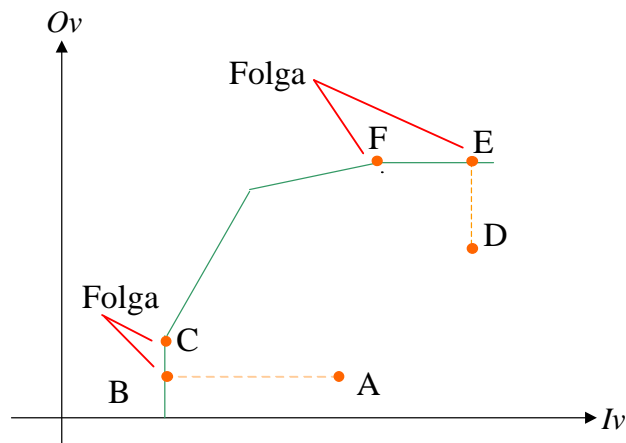


Figura 27 - Exemplos de folga como correção da fronteira linear por partes

Na Figura 27 a DMU “A”, ao ser projetada na fronteira de eficiência com uma orientação aos *inputs*, acaba caindo em um ponto de ineficiência (ponto “B”). Esse ponto é ineficiente, pois existe um ponto “C” que, com a mesma quantidade de *inputs*, consegue produzir uma quantidade superior de *outputs*. Essa distorção é causada pelo fato do trecho de fronteira ser paralelo ao eixo y, o que na fronteira teórica, dada pela função produção, não poderia existir. A folga do *output*, nesse caso, pode ser interpretada como a diferença entre os *outputs* dos pontos “C” e “B”. O mesmo raciocínio pode ser feito com os pontos “D”, “E” e “F” na orientação aos *outputs*, só que nesse caso, o trecho da fronteira que causa a distorção é paralelo ao eixo x.

Quando se acrescenta variáveis de folga nas restrições, essas variáveis, teoricamente, também deveriam aparecer na FO, só que acompanhadas de um coeficiente infinitesimal; na prática, porém, as variáveis de folga terão um efeito desprezível na função objetivo e por isso podem ser omitidas. Segundo Lins e Meza (2000), a perspectiva Dual quando não são acrescentadas as variáveis de folga, é conhecida como perspectiva Dual arquimédiana e, quando são acrescentadas as variáveis de folga, é conhecida como perspectiva Dual não-arquimédiana; ambas as perspectivas conduzirão ao mesmo resultado.

Devido às semelhanças, nas tabelas comparativas do fim do capítulo e no sistema especialista que será desenvolvido, as perspectivas Duais arquimédiana e não arquimediana serão tratadas como se fossem uma só (perspectiva Dual).

A partir da perspectiva Dual e dos coeficientes λ_k , também é possível determinar quais DMUs eficientes podem ser adotadas como *benchmarks*, para servir como referência para que as DMUs ineficientes possam alcançar a eficiência. Para determinar os *benchmarks*, é preciso considerar que cada variável λ_k representa uma DMU k diferente. Sendo assim, após a resolução da perspectiva Dual, caso a variável λ associada a uma determinada DMU:

1. Seja igual a zero, a DMU não será um *benchmark* para a DMU analisada;
2. Seja diferente de zero, a DMU será um *benchmark* para a DMU analisada.

Na realidade, os *benchmarks* são aquelas DMUs a partir das quais são calculadas as metas das DMUs ineficientes, ou seja, são as DMUs que efetivamente participam do cálculo da meta da DMU em análise, já que o λ_k delas é diferente de zero. Vale lembrar que a meta de uma DMU foi definida como sendo uma DMU virtual (portanto inexistente) que é obtida por meio da combinação linear dos *benchmarks* dessa DMU; sendo assim, os coeficientes λ_k nada mais são que os coeficientes dessa combinação linear.

4.2.5 Perspectiva da Fronteira clássica

A fronteira clássica corresponde às formulações originais das perspectivas de primeiro nível até aqui apresentadas e é utilizada quando os *inputs* e *outputs* podem ser determinados com exatidão (caso isso não aconteça deve-se utilizar a fronteira difusa). A

fronteira clássica terá muitas utilizações sendo que elas dependerão da perspectiva de primeiro nível utilizada. A seguir estão listadas algumas coisas que a perspectiva clássica permite fazer juntamente com a perspectiva de primeiro nível que deve acompanhá-la.

1. Cálculo do conjunto de referência formado pelas DMUs eficientes (com qualquer perspectiva);
2. Cálculo do índice de eficiência de todas as DMUs analisadas (com qualquer perspectiva);
3. Cálculo das utilidades de cada *input* e cada *output* de todas as DMUs do conjunto (com a perspectiva Primal e os dados normalizados);
4. Cálculo das metas das DMUs ineficientes (com a perspectiva Dual);
5. Determinação dos *benchmarks* das DMUs ineficientes (com a perspectiva Dual).

4.2.6 Perspectiva da Fronteira invertida

Outra perspectiva importante dos modelos CCR e BCC é a perspectiva da fronteira invertida. Segundo Mello et al. (2005a), essa perspectiva foi introduzida por Yamada et al. (1994) e Entani et al. (2002), e usado por Lins et al. (2005) e Leta et al. (2005). A fronteira invertida surgiu a partir da necessidade de se lidar com os inúmeros empates de DMUs com índices 100% eficientes, que são bastante comuns nesses modelos. Segundo Lins e Meza (2000), esses empates são causados pelo fato de, na Análise por Envoltória de Dados, as DMUs poderem ser eficientes atribuindo valores nulos as utilidades o que, por contrariar a teoria econômica, constituía um dos principais problemas do DEA, que a perspectiva da fronteira invertida veio resolver.

Inicialmente, foi necessário buscar-se um índice que pudesse responder qual DMU seria a mais eficiente dentre as DMUs consideradas eficientes. Para responder a essa pergunta foi necessário, antes de tudo, adotar um critério que permitisse discriminar essas DMUs. Segundo a perspectiva da fronteira invertida, a DMU mais eficiente é aquela que conseguir ter um desempenho mais equilibrado, ou seja, é aquela que conseguir produzir muito de todos os *outputs* e gastar pouco de todos os *inputs*, sem se destacar em nenhum especificamente. Assim, a fronteira invertida tentará excluir do grupo de eficientes, as DMUs que foram consideradas eficientes graças ao desempenho muito superior em apenas um único *input* ou em apenas um único *output*.

Segundo Novaes (2002), a fronteira invertida consiste simplesmente em considerar os *outputs* como *inputs* e os *inputs* como *outputs* e resolver o DEA normalmente. Assim, para cada um dos modelos e perspectivas até aqui apresentados, pode-se calcular a eficiência pela fronteira clássica e pela fronteira invertida. Segundo Macedo et al. (2005), esse enfoque leva a, pelo menos, duas considerações: a primeira é que a fronteira invertida consiste das DMUs com as piores práticas gerenciais e que, portanto, poderia ser chamada de fronteira de ineficiência; a segunda é que, na fronteira invertida, as DMUs têm as melhores práticas considerando um ponto de vista oposto ao da fronteira clássica, ou seja, as DMUs que são mais eficientes na fronteira invertida são aquelas que estão mais afastadas da fronteira e, portanto, são aquelas em que o valor da função objetivo fica mais próximo de zero (na fronteira invertida a eficiência não é dada pelo resultado da FO).

Existem diversas formas de se lidar com o resultado da fronteira invertida. Mello (2005a) sugere que o resultado da fronteira invertida (que será representado por I de ineficiência) seja subtraído de 1 ($1 - I$) para que seja estimado um índice de eficiência; porém, esse procedimento tem a desvantagem de não atribuir eficiência 1 a nenhuma DMU,

já que o I calculado pelo DEA jamais será 0. Um procedimento melhor para calcular da eficiência pela fronteira invertida pode ser sistematizado por meio dos passos descritos a seguir:

1. Troque de lugar os *inputs* com os *outputs* e resolva o problema de programação linear normalmente - será encontrado um valor definido como a Ineficiência (I) da DMU em análise;
2. Inverta o valor da Ineficiência encontrada ($1/I$) - esse valor será um bom indicador da eficiência, porém ele será maior que 1 necessitando de uma normalização; e
3. Após serem encontrados os indicadores ($1/I$) de todas as DMUs, normalize os dados, isto é, pegue o maior valor dentre os indicadores encontrados e divida os indicadores de todas as DMUs por ele; o resultado encontrado será o índice de eficiência da fronteira invertida (E_{fi}).

A Figura 28 apresenta um exemplo de uma fronteira invertida comparada com uma fronteira clássica de um modelo BCC.

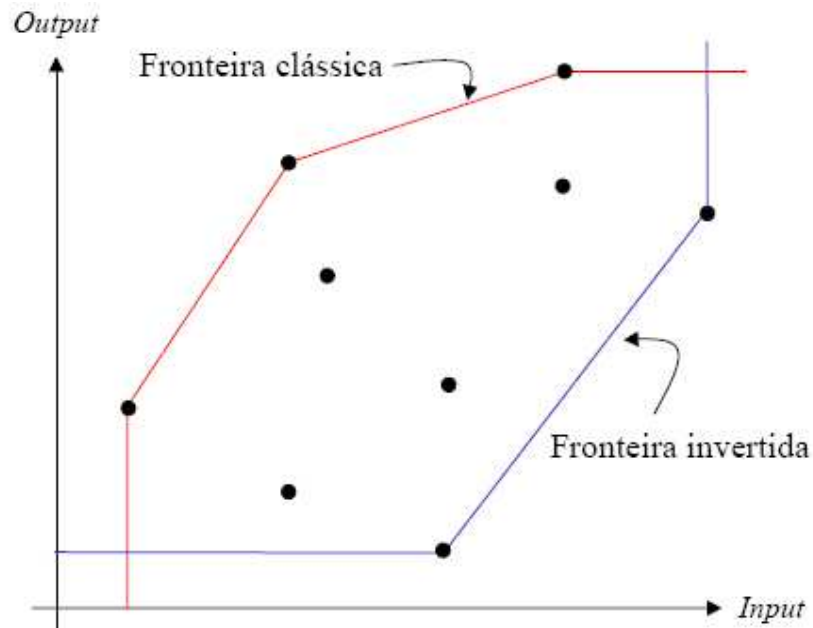


Figura 28 - Fronteiras invertida e clássica.
Fonte: Mello et al. (2005a)

A Expressão 60 mostra a fórmula de cálculo do índice de eficiência combinada entre as fronteiras clássica e invertida, que é dado pela média aritmética entre os dois.

$$E_c = (E_{fc} + E_{fi}) / 2 \quad (60)$$

Em que:

E_c : Eficiência combinada;

E_{fc} : Eficiência obtida na fronteira clássica;

E_{fi} : Eficiência obtida na fronteira invertida.

Segundo Macedo et. al (2005), um índice que combine as eficiências das fronteiras clássica e invertida será capaz de fornecer uma visão de eficiência onde a DMU eficiente deve ter um bom desempenho naquilo em que ela é melhor, mas não pode ter um mau desempenho no critério em que ela for pior; sendo assim, esse índice combinado é a solução para o problema do empate entre as DMUs eficientes.

A perspectiva da fronteira invertida só terá interesse caso ela seja utilizada em conjunto com a perspectiva da fronteira clássica, pois a única utilidade da fronteira invertida é no cálculo do índice de eficiência combinado. Assim, não importa se for utilizada na fronteira invertida, a perspectiva de primeiro nível Dual ou a Primal, já que não faz sentido calcular metas e utilidades quando os *inputs* e *outputs* estão trocados. É importante, porém, ao se calcular o índice combinado, que o resultado obtido nas fronteiras clássicas e invertida provenham de uma mesma orientação.

4.2.7 Perspectiva da Fronteira difusa

Segundo Mello et al. (2005b), a fronteira DEA difusa surge em situações nas quais as variáveis de *inputs* ou *outputs* apresentam um certo grau de incerteza de medição, mas não obedecem a nenhuma distribuição de probabilidade. A fronteira eficiente, nesse caso, é construída considerando-se os limites de incerteza, isto é, os menores e maiores valores possíveis de serem assumidos pelas variáveis afetadas pela incerteza de medição. Assim, a partir dos maiores valores que essas variáveis podem assumir é construída uma fronteira de eficiência otimista e, a partir dos menores é construída uma fronteira de eficiência pessimista. A região entre estas duas fronteiras é denominada fronteira difusa.

Ainda segundo Mello et al. (2005b), neste caso, a fronteira não é um conjunto no sentido clássico do termo, mas um conjunto difuso e sendo assim não há sentido em dizer que uma DMU pertence ou não a esse conjunto, sendo possível afirmar, no máximo, qual é o grau de pertença da DMU a ele. Dessa forma, em vez de existirem DMUs na fronteira e outras fora da fronteira, haverá DMUs com diferentes graus de pertença à fronteira difusa.

As fronteiras otimistas e pessimistas podem ser construídas utilizando-se os modelos clássicos do DEA. A Figura 29 apresenta um exemplo das construções das fronteiras pessimista e otimista usando-se o modelo BCC.

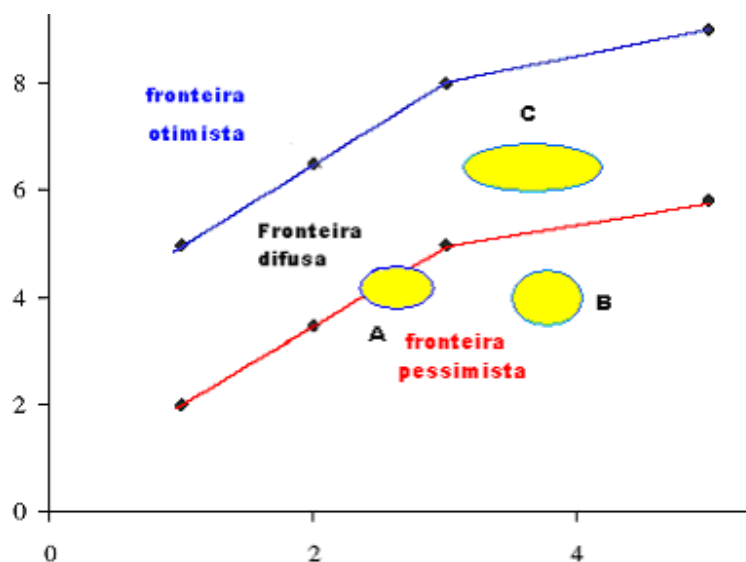


Figura 29 – Fronteira difusa
Fonte: Adaptado de Mello et al. (2005b)

Na lógica difusa, uma DMU não é mais representada por um ponto e sim por uma região que contenha todos os valores de *input* e *output* virtual que essa DMU pode possuir. A Figura 29 apresenta um exemplo de como três DMUs (“A”, “B” e “C”) são representadas na lógica difusa.

Segundo Mello et al. (2005b), são definidas certas funções, denominadas funções de pertença, que determinam o grau de pertença de certa variável a um determinado conjunto. No caso da fronteira difusa, o grau de pertença de uma DMU será calculado com base em propriedades geométricas das fronteiras geradas. Assim, caso uma DMU esteja contida totalmente dentro da região de fronteira difusa (como a DMU “C” da Figura 29), ela terá grau de pertença igual a 1; caso a DMU esteja apenas parcialmente contida na fronteira

(como a DMU “A” da Figura 29), ela terá grau de pertença entre 0 e 1 dependendo do quanto da DMU estiver dentro da fronteira e do quanto estiver fora. Por fim, caso a DMU esteja totalmente fora da fronteira (como a DMU “B” da Figura 29) ela terá grau de pertença igual a 0. Em termos gerais, o grau de pertença de uma DMU pode ser calculado pela Expressão 61:

$$GP = A_{df} / A_{DMU} \quad (61)$$

Em que:

GP: Grau de pertença;

A_{df} : Área da DMU difusa contida dentro da fronteira;

A_{DMU} : Área total da DMU difusa.

Segundo Mello et al. (2005b), o grau de pertença pode ser considerado uma estimativa para a eficiência de uma DMU, porém esse índice possui distorções como, por exemplo, considerar todas as DMUs que estejam abaixo da fronteira como possuindo a mesma eficiência (eficiência nula).

O único interesse ao se aplicar a perspectiva da fronteira difusa é determinar o grau de pertença (eficiência) de uma determinada DMU, não sendo possível, com essa perspectiva, determinar utilidades, metas e *benchmarks*; sendo assim, tal qual a fronteira invertida, tanto faz se a perspectiva de primeiro nível da fronteira difusa é Primal ou Dual.

4.2.8 Restrições aos pesos

Segundo Mello et al. (2005a), uma das características mais importantes da Análise por Envoltória de Dados é o fato dessa técnica possuir total liberdade na atribuição dos pesos (utilidades), que darão o valor máximo de eficiência a uma dada DMU. Segundo esse

autor, essa característica é especialmente importante para identificar as DMUs ineficientes, que serão ineficientes mesmo com o conjunto de pesos que maximizem a sua eficiência.

Por outro lado, muitas vezes os pesos atribuídos pelo DEA entram em contradição com a realidade. Um caso clássico dessa contradição, como já explicado, é quando o DEA atribui peso nulo a algum *input* ou *output*, fato que contraria totalmente a teoria econômica das utilidades. Uma das maneiras de resolver esse problema é pela fronteira invertida, outra é associando restrições aos pesos que o DEA pode atribuir.

Essas restrições têm a desvantagem de depender de parâmetros totalmente subjetivos. Assim, não existe uma formulação matemática para se atribuir limites aos pesos, ficando essa responsabilidade a cargo dos decisores.

As restrições aos pesos podem aparecer sob diversas formas nos modelos DEA. Lins e Ângulo-Meza (2000), identificaram três tipos de restrições que podem ser utilizadas no DEA

1. Restrições diretas aos pesos;
2. Restrições de regiões de segurança; e
3. Restrições aos *inputs* e *outputs* virtuais.

As restrições do primeiro tipo são as mais intuitivas, pois envolvem a imposição direta de limites inferiores e superiores para cada utilidade de cada *input* e de cada *output* da DMU em análise. Apesar da simplicidade, essas restrições podem levar a inviabilidade do problema de programação linear. A Expressão 62 mostra as restrições que devem ser acrescentadas a um dado modelo DEA, quando se quer usar esse tipo de restrição.

$$\begin{aligned}
 u_i &\geq A \\
 u_i &\leq B \\
 v_j &\geq C \\
 v_j &\leq D
 \end{aligned}
 \tag{62}$$

Em que:

u_i : Utilidade de um *output* i ;

v_j : Utilidade de *input* j ;

A, B, C, D: Parâmetros estipulados pelos decisores.

Já as restrições do segundo tipo, conhecidas como restrições de região de segurança, buscam definir o limite de um determinado peso de um *input* ou *output* com base no peso de outro *output* ou outro *input*. Existem várias maneiras de se formular restrições do tipo região de segurança. Pode-se, por exemplo, associar dois *inputs* ou dois *outputs* (chamadas de restrições de região de segurança do tipo I ou Cone Ratio), ou pode-se associar um *input* com um *output*, ou vice versa (chamadas restrições de região de segurança do tipo II). A Expressão 63 apresenta alguns exemplos dessas restrições.

$$\begin{aligned}
 A.v_j + B.v_{j+1} &\leq v_{j+2} \text{ (Tipo I)} \\
 A &\leq v_j / v_{j+1} \leq B \text{ (Tipo I)} \\
 A.v_j &\geq u_i \text{ (Tipo II)}
 \end{aligned}
 \tag{63}$$

Em que:

u_i : utilidade de um *output* i ;

v_j : Utilidade de *input* j ;

A, B: Parâmetros estipulados pelos decisores.

Já o terceiro tipo de restrição limita o valor da participação de um determinado *output* (*input*) dentro do *output* virtual (*input* virtual) ao qual ele pertence; em outras palavras essa restrição limita o valor da variável W que será definida no item 5.4 do próximo capítulo, que apresenta o Índice de Törnqvist. A Expressão 64 apresenta duas restrições desse tipo:

$$A \leq W_i = \frac{y_{i0} \cdot u_i}{\sum_{i=1}^m y_{i0} \cdot u_i} \leq B$$

$$C \leq W_j = \frac{x_{j0} \cdot v_j}{\sum_{j=1}^n x_{j0} \cdot v_j} \leq D$$
(64)

Em que:

u_i : utilidade de um *output* i ;

v_j : Utilidade de *input* j ;

W_i : Porcentagem do *output* i no *output* virtual de uma DMU em análise;

W_j : Porcentagem do *input* j no *input* virtual de uma DMU;

m : número de *outputs*;

n : número de *inputs*;

A, B, C, D : Parâmetros estipulados pelos decisores.

As restrições aos pesos geralmente são utilizadas em conjunto com as perspectivas de primeiro nível Primais e apesar de, pelos princípios da dualidade, poder-se achar o correspondente Dual de qualquer problema de PL, não foi encontrado na literatura nenhum modelo Dual que apresentasse restrições aos pesos. Mesmo assim, pode-se afirmar que nas perspectivas Duais, essas restrições adicionais que foram acrescentadas nas perspectivas Primais virariam variáveis adicionais; o resultado da eficiência, porém, seria o mesmo em ambas perspectivas.

4.2.9 DEA com variáveis de *input* e *output* não-controláveis

Segundo Bruneta (2004), os *inputs* e *outputs* de uma DMU podem ser: (a) controláveis, ou seja, sujeitos às decisões gerenciais, sendo, portanto, passíveis de serem alterados, de acordo com os objetivos a serem atingidos e (b) não-controláveis, isto é, não são afetadas pelas decisões gerenciais. Segundo Moita (1995), as variáveis de *input* ou *output* não-controláveis, como o próprio nome sugere, são *inputs* e *outputs*, relevantes para o cálculo da produtividade, mas sobre as quais a DMU não tem controle. Assim, a constatação de excesso de *inputs* ou falta de *outputs* não fará sentido nessas variáveis, pois a DMU não poderá mudá-las para atingir uma determinada meta.

Ao se considerarem, nos modelos DEA, as variáveis não-controláveis, deve-se fazer algumas adaptações aos modelos até aqui apresentados. Primeiramente devem-se separar as variáveis controláveis das não-controláveis sendo que as variáveis controláveis darão origem a tipo de restrição, onde se considerarão que as variáveis podem ser minimizadas ou maximizadas, e as variáveis não-controláveis darão origem a outro tipo de restrição onde elas serão fixas, não podendo ser maximizadas ou minimizadas.

Não é muito comum, nem faz muito sentido economicamente, a utilização de *outputs* não-controláveis. Assim, a teoria das variáveis não-controláveis serve principalmente para *inputs*, que também são conhecidos como variáveis exógenas ou variáveis ambientais. As variáveis ambientais foram consideradas na definição de eficiência apresentada no Capítulo 2, porém nenhuma técnica/modelo/perspectiva apresentada até agora foi capaz de integrá-las ao cálculo da Eficiência. Segundo Rugigero (1998), as variáveis ambientais afetam a forma com que os *inputs* controláveis são transformados em *outputs*, ou seja, afetam a função produção, apesar de não fazerem parte dela, como demonstra a Expressão 65.

$$O_v = f(I_v | IN_v) \quad (65)$$

Em que:

O_v : *Output* virtual;

I_v : *Input* controlável virtual;

IN_v : *Input* não-controlável virtual;

$f(I_v | IN_v)$: Em função de x_v mas dependente de t_v .

As Expressões 66 e 67 apresentam as restrições de um modelo Dual orientado ao *input* relacionadas às variáveis de *inputs* controláveis (x_j), cuja restrição é igual à restrição já proposta na seção 4.2.4, e às variáveis de *inputs* não-controláveis (t_l):

Inputs Controláveis

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k - \theta \cdot x_{j0} \leq 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k + S_j = \theta \cdot x_{j0} \quad \text{Para } j = 1,2,3,n \quad (66)$$

Inputs Não-controláveis

$$\sum_{k=1}^z t_{lk} \cdot \lambda_k \leq t_{l0} \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^z t_{lk} \cdot \lambda_k + S_l = t_{l0} \quad \text{Para } l = 1,2,3,o \quad (67)$$

Em que:

θ : Eficiência;

λ_k : Participação da DMU k na meta da DMU em análise;

x_{jk} : Quantidade do *input* controlável j da DMU k;

t_{lk} : Quantidade do *input* não-controlável l da DMU k;

x_{j0} : Quantidade do *input* controlável j da DMU em análise;

t_{l0} : Quantidade do *input* não-controlável l da DMU em análise;

z: Número de DMUs em avaliação;

n: Número de *inputs*; controláveis

o: Número de *inputs* não-controláveis;

S_j : Variável de folga do *input* controlável j;

S_l : Variável de folga do *input* não-controlável l.

A diferença entre as duas restrições é que enquanto nas variáveis controláveis a meta da DMU é definida com base na sua eficiência, nas folgas e na quantidade do *input* da DMU em análise ($\text{Meta} = \theta \cdot x_{j0} - S_j$) e nas variáveis não controláveis a meta é a própria quantidade de *input* (menos a folga) da DMU em análise ($\text{Meta} = t_{j0} - S_j$). Para os modelos orientados ao *output* a diferenciação entre *inputs* controláveis e não-controláveis não fará a menor diferença, pois por definição, na orientação ao *output* todos os *inputs* são fixos de qualquer forma.

Assim como as restrições aos pesos são mais associadas as perspectivas Primais, as variáveis ambientais são mais associados as perspectivas Duais e apesar de também ser possível, em teoria, pelos princípios da dualidade, encontrar uma perspectiva Primal com variáveis não-controláveis, não foi encontrado na literatura nenhum modelo com essas características.

4.3 Modelos Aditivos Variante e Invariante

Os modelos Aditivos em suas formas Invariante, que possui retornos constantes a escala e Variante, que possui retornos variáveis a escala, foram propostos originalmente por Charnes et. al em 1985.

Assim como os modelos CCR e BCC, os modelos Aditivos são baseados em programação linear, porém ao contrário deles, a formulação original do modelo Aditivo não é um problema de programação fracionária e sim um modelo de programação linear. Assim, não é necessário escolher uma orientação, quando se trabalha com um modelo Aditivo, pois o próprio modelo original já considera, simultaneamente, a maximização dos *outputs* e a minimização dos *inputs*. Na realidade, os modelos Aditivos terão uma orientação própria sendo que essa orientação vai comparar uma DMU com o ponto da

fronteira de eficiência mais próximo a ela. Com isso, o modelo Aditivo proporcionará a situação em que a DMU deverá fazer menos esforço (em termos de redução de *inputs* e aumento de *outputs*) para atingir a eficiência.

Uma desvantagem do modelo Aditivo em relação aos modelos CCR e BCC é que o resultado obtido por esses modelos varia com a unidade de medição; assim, utilizar a área plantada de uma determinada cultura em km², m² ou hectares, afetará o resultado.

Segundo Shimonishi (2005), o modelo Aditivo não permite calcular o índice de eficiência das DMUs que estão sendo comparadas, permite apenas indicar as DMUs eficientes e as metas das DMUs ineficientes. Sendo assim, não fará sentido em se utilizar as fronteiras invertidas e difusas com os modelos aditivos. Graças a isso e ao fato de não admitirem orientações as perspectivas dos modelos Aditivos Variantes e Invariantes em seus diferentes níveis ficam reduzidas então, às expressas na Figura 30, ou seja, a apenas 8 combinações de perspectivas:

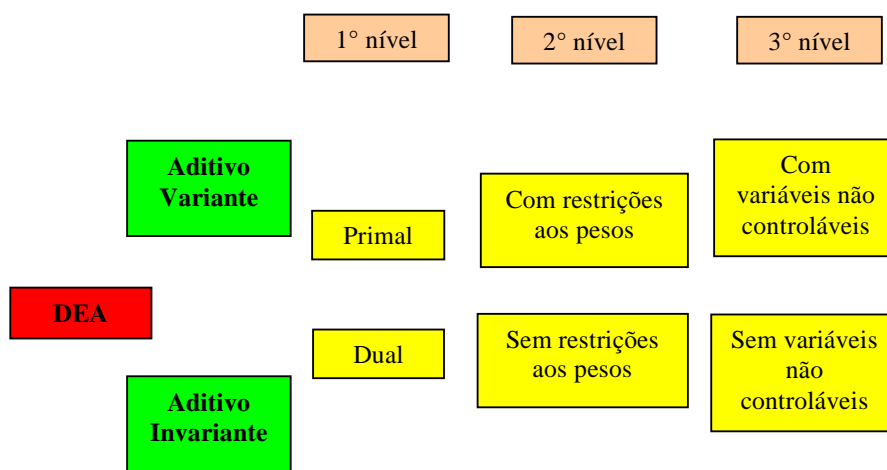


Figura 30 - Perspectivas dos modelos Aditivos

A grande diferença entre os modelos Aditivos e os modelos CCR e BCC é que os modelos Aditivos, ao contrário dos outros dois, projetam os pontos na fronteira de eficiência de uma forma não radial, baseada na métrica L_1 . Segundo Gomes, Mello e Biondi Neto (2003), a métrica L_1 (métrica de Tchebycheff) é uma função de distância na qual a diferença de todos os fatores é considerada proporcional a sua magnitude, o que leva ao resultado de máximo alcance agregado. A Figura 31 apresenta a fronteira e o modo de projeção (orientação) utilizado pelo modelo Aditivo Variante. Para um modelo Aditivo Invariante, a única diferença será o formato da fronteira que será uma reta com ângulo de 45° .

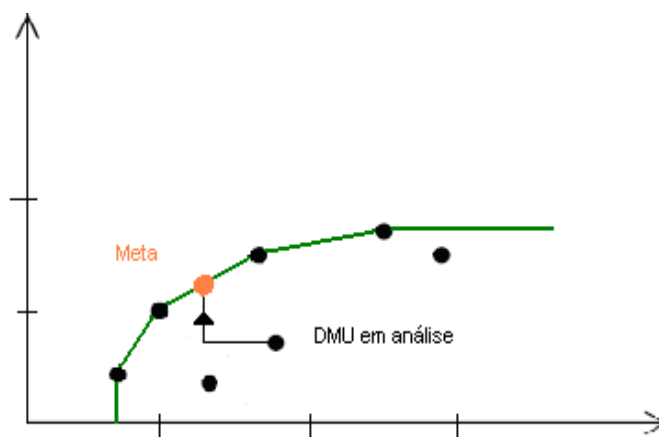


Figura 31 - Fronteira de eficiência e orientação de um modelo Aditivo Variante
Fonte: Adaptado de Azambuja (2002)

4.3.1 Perspectiva Primal dos modelos Aditivos

O modelo Aditivo Invariante é o modelo Aditivo que possui retornos constantes à escala, ou seja, é o modelo Aditivo correspondente ao modelo CCR. Esse modelo, em sua forma Primal, está baseado na minimização da diferença entre o *input* virtual e o *output* virtual ($I_v - O_v$) da DMU em análise. Quanto menor essa diferença, maior é a eficiência da

DMU o que, é explicado pelo fato do aumento da eficiência depender ou do aumento dos *outputs* ou da redução dos *inputs*. Caso, a diferença entre os *inputs* e *outputs* for 0 a DMU em análise será eficiente.

Os modelos Aditivos Primais, assim como os modelos BCC e CCR Primais, também buscam o conjunto de pesos (desde que os dados estejam devidamente normalizados) que maximizam a eficiência da DMU em análise. A única diferença entre eles é que, ao invés procurar esses pesos diretamente pela definição de eficiência, os modelos Aditivos irão busca-los por meio a minimização da diferença entre o *input* virtual e o *output* virtual, sendo que essa diferença não será a eficiência. As Expressões 68, 69, 70 e 71 apresentam um modelo DEA Aditivo Invariante.

$$\text{MIN} \quad \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{j_0} - \sum_{j=1}^n u_j \cdot y_{j_0} \quad (68)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{jk} - \sum_{j=1}^n u_j \cdot y_{jk} \geq 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, z \quad (69)$$

$$u_i \geq 1 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \quad (70)$$

$$v_j \geq 1 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n \quad (71)$$

Em que:

u_i : Utilidade do *output* i ;

v_j : Utilidade do *input* j ;

x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k ;

y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU k ;

x_{j_0} : Quantidade do *input* j para DMU em análise;

y_{i_0} : Quantidade do *output* i para DMU em análise;

z : Número de DMUs em avaliação;

m: Número de *outputs*;
n: Número de *inputs*.

As fronteiras do modelo Aditivo Invariante e do modelo CCR são iguais e o que garante essa igualdade é a Expressão 69 que também está presente no modelo CCR; a única diferença entre os dois modelos é a orientação (que é dada pela função objetivo). Segundo Cooper et .al. (2000) *apud* Gomes, Mello e Biondi Neto (2003), uma DMU será eficiente no modelo Aditivo Invariante se, e somente se, ela for eficiente no modelo CCR.

O modelo Aditivo Variante é o modelo Aditivo com retornos variáveis a escala, ou seja, é o modelo Aditivo correspondente ao modelo BCC. Assim, como o modelo BCC em relação ao CCR, o modelo Aditivo Variante apresenta como única diferença, em relação ao Aditivo Invariante, o acréscimo de uma variável sem restrição de sinal (chamada aqui de w), a partir da qual se podem tirar conclusões sobre os tipos de retornos à escala. As expressões 72, 73, 74, 75 e 76 apresentam um modelo DEA Aditivo Variante.

$$\text{MIN} \quad \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{j_0} - \sum_{j=1}^n u_j \cdot y_{j_0} + w \quad (72)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{jk} - \sum_{j=1}^n u_j \cdot y_{jk} \geq 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, z \quad (73)$$

$$u_i \geq 1 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \quad (74)$$

$$v_j \geq 1 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n \quad (75)$$

$$w \text{ pode assumir qualquer valor} \quad (76)$$

Em que:

w : Fator de escala da DMU em análise;

u_i : Peso (utilidade) do *output* i ;

v_j : Peso (utilidade) do *input* j ;

x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k ;

y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU unidade k ;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

z : Número de DMUs em avaliação;

m : Número de *outputs*;

n : Número de *inputs*.

As fronteiras do modelo Aditivo Variante e do modelo BCC também são iguais e o que garante essa igualdade é a Expressão 73 que também está presente em ambos os modelos. Segundo Cooper et al. (2000) *apud* Gomes, Mello e Biondi Neto (2003) uma DMU será eficiente no modelo Aditivo Variante se, e somente se, ela for eficiente no modelo BCC.

O coeficiente w pode ser interpretado da mesma maneira que o coeficiente u do modelo BCC, como indicado no Quadro 7.

Coeficiente w	Tipo de retorno
$w > 0$	Crescente
$w = 0$	Constante
$w < 0$	Decrescente

Quadro 7– Interpretação dos coeficientes w

4.3.2 Perspectiva Dual dos Modelos Aditivos

Nos modelos Aditivos, as folgas têm um significado diferente do apresentado nos modelos CCR e BCC; enquanto nos modelos CCR e BCC as folgas serviam para corrigir

distorções na fronteira, nos modelos Aditivos as folgas são ou a diferença entre os *outputs* da projeção de uma DMU na fronteira e os da própria DMU ou a diferença entre os *inputs* de uma DMU e os de sua projeção na fronteira. As folgas dos modelos Aditivos estão exemplificadas na Figura 32.

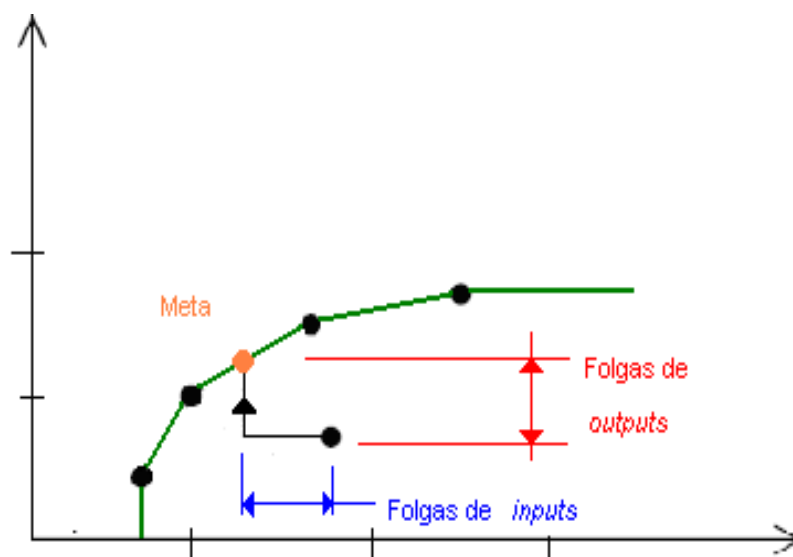


Figura 32 - Exemplos de folgas nos modelos Aditivos

Os modelos Aditivos Duais maximizam a somatória das folgas dos *inputs* e dos *outputs* da DMU em análise. Quanto menor a soma das folgas de uma DMU, mais eficiente ela será, pois mais próxima ela estará da fronteira. No caso da soma das folgas (função objetivo) ser zero, a DMU em análise será eficiente, pois se encontrará na fronteira. As expressões 77, 78, 79 e 80 apresentam um modelo Aditivo Invariante Dual.

$$\text{MAX} \sum_{i=1}^m S_i + \sum_{j=1}^n S_j \quad (77)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k + S_j = x_{j0} \quad \text{para } j=1,2,3\dots n \quad (78)$$

$$\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k - S_i = y_{i0} \quad \text{Para } i=1,2,3,m \quad (79)$$

$$\lambda_k, S_j \text{ e } S_i > 0 \quad (80)$$

Em que:

λ_k : Participação da DMU k na meta da DMU em análise;

x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k;

y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU k;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

z: Número de unidades em avaliação;

m: Número de *outputs*;

n: Número de *inputs*;

S_i : Variável de folga do *output* i;

S_j : Variável de folga do *input* j.

A única diferença entre os modelos Aditivos Duais Variantes e Invariantes é presença de uma restrição de convexidade ($\sum_{k=1}^z \lambda_k = 1$) que se relaciona com a variável w do modelo Primal; essa restrição é exatamente igual a dos modelos BCC Duais. As Expressões 81, 82, 83, 84 e 85 apresentam o modelo DEA Aditivo Variante Dual.

$$\text{MAX} \quad \sum_{i=1}^m S_i + \sum_{j=1}^n S_j \quad (81)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k + S_j = x_{j0} \quad \text{para } j=1,2,3\dots n \quad (82)$$

$$\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k - S_i = y_{i0} \quad \text{Para } i = 1, 2, 3, m \quad (83)$$

$$\sum_{k=1}^z \lambda_k = 1 \quad (84)$$

$$\lambda_k, S_j \text{ e } S_i > 0 \quad (85)$$

Em que:

λ_k : Participação da DMU k na meta da DMU em análise;

x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k;

y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU k;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

z: Número de unidades em avaliação;

m: Número de *outputs*;

n: Número de *inputs*;

S_i : Variável de folga do *output* i;

S_j : Variável de folga do *input* j.

As metas das DMUs ineficientes podem ser obtidas diretamente a partir das variáveis de folga dos modelos Duais. As metas das DMUs ineficientes para cada *input* e *output* são dadas pelas Expressões 86 e 87.

Meta Inputs

$$\text{Meta} = x_{j0} - S_j \quad \text{Para } j = 1, 2, 3, n \quad (86)$$

Meta Outputs

$$\text{Meta} = y_{i0} + S_i \quad \text{Para } i = 1, 2, 3, m \quad (87)$$

Em que:

- x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;
- y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;
- z: Número de unidades em avaliação;
- m: Número de *outputs*;
- n: Número de *inputs*;
- S_i : Variável de folga do *output* i;
- S_j : Variável de folga do *input* j.

4.3.3 Outras perspectivas dos modelos Aditivos

A perspectiva das restrições aos pesos nos modelos Aditivos, obedece aos mesmos princípios, inclusive com as mesmas equações, que a dos modelos BCC e CCR e por isso essas informações não serão repetidas nessa seção.

Para o caso da perspectiva das variáveis de *inputs* não controláveis, será acrescida ao modelo Aditivo Dual a restrição dada pela Expressão 89. Essa restrição advém do fato de um *input* não controlável não admitir folga, já que ele não pode ser reduzido. As Expressões 88 e 89 apresentam a comparação entre as restrições de um *input* controlável e de um não controlável nos modelos Aditivos.

Inputs Controláveis

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k + S_j = x_{j0} \quad \text{para } j=1,2,3\dots n \quad (88)$$

Inputs Não-Controláveis

$$\sum_{k=1}^z t_{lk} \cdot \lambda_k = t_{l0} \quad \text{para } l=1,2,3\dots o \quad (89)$$

Em que:

λ_k : Participação da DMU k na meta da DMU em análise;

x_{jk} : Quantidade do *input* controlável j da DMU k;

t_{lk} : Quantidade do *input* não-controlável l da DMU k;

x_{j0} : Quantidade do *input* controlável j da DMU em análise;

t_{l0} : Quantidade do *input* não-controlável l da DMU em análise;

z: Número de DMUs em avaliação;

n: Número de *inputs* controláveis;

o: Número de *inputs* não-controláveis;

S_j : Variável de folga do *input* controlável j;

4.4 Modelos Multiplicativos Variantes e Invariantes

Os modelos Multiplicativos, em suas formas Invariante, que possui retornos constantes à escala, e Variante, que possui retornos variáveis a escala, foram propostos originalmente por Charnes, Cooper, Seiford, e Stutz em 1982. Segundo Charnes et al (1982), os modelos Multiplicativos, diferentemente de todos os modelos até aqui apresentados, ao invés de se basearem em combinações aditivas entre os *inputs* e *outputs* (que foram chamados de *inputs* e *outputs* virtuais), se baseiam em combinações multiplicativas em que o *input* e o *output* virtual são resultados respectivamente da multiplicação entre os *inputs* $(\prod_{j=1}^n x_{j0}^{v_j})$ e entre os *outputs* $(\prod_{i=1}^m y_{i0}^{u_i})$. Nesse trabalho, porém, só será apresentado o modelo Multiplicativo em sua forma logarítmica, em que ele possui aspectos de um modelo Aditivo.

Segundo Azambuja (2002), os modelos Multiplicativos resultam simplesmente da aplicação de logaritmos nas variáveis x_i (*inputs*) e y_i (*outputs*) das equações do Modelo Aditivo. Sendo assim, todas as interpretações e comentários a respeito dos modelos Aditivos, novamente se aplicam, mas agora no espaço transformado [Log (x), Log (y)]. Porém, segundo Banker et al. (2004), a eficiência dos modelos Multiplicativos não varia

com a unidade dos *inputs* e dos *outputs*, diferentemente dos modelos Aditivos e igual aos modelos CCR e BCC.

Ainda segundo Azambuja (2002), a diferença entre os modelos Aditivos e Multiplicativos está na fronteira, já que a orientação é a mesma. Essa diferença é causada pela presença do logaritmo, que não muda o formato da fronteira, apenas o deforma. Os modelos DEA Multiplicativos Invariantes possuem uma envoltória log-linear, ou seja, uma reta, mas que é afetada pelos logarítmos. Já a envoltória do modelo Multiplicativo Variante é conhecida como Cobb-Douglas, por partes. Esse nome é devido à semelhança dessa fronteira com a função produção Cobb-Douglas, que também é baseada em uma combinação multiplicativa entre os *inputs* e *outputs*, mas não é por partes. As perspectivas dos modelos Multiplicativos Variantes e Invariantes são as mesmas dos modelos Aditivos e estão representadas pela Figura 33:

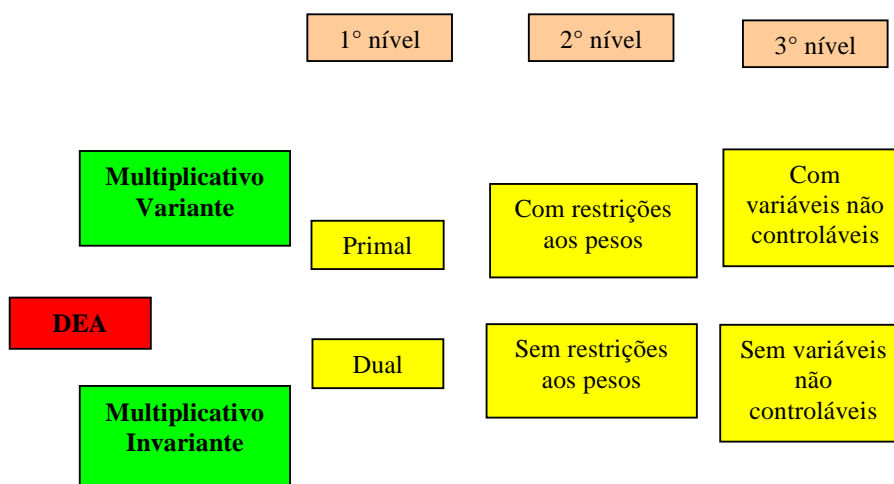


Figura 33 - Perspectivas dos modelos Multiplicativos

Assim como os modelos Aditivos, os modelos Multiplicativos não calculam a eficiência, apenas encontram, por meio de suas várias perspectivas: (a) as DMUs eficientes, (b) as utilidades dos *inputs* e *outputs* e (c) as metas das DMUs ineficientes.

Segundo Banker (2004), os modelos Multiplicativos possuem a capacidade de modelar problemas que possuam uma superfície envoltória convexa em alguns pontos e côncava em outros. Além disso, ainda segundo Banker (2004), com os modelos Multiplicativos é possível se calcular as elasticidades, ou seja, o quanto um aumento unitário de um *input* ou um *output* gera de impacto na eficiência, algo que os outros modelos não permitem fazer. Nenhuma dessas aplicações, porém, será detalhada nesse trabalho.

A seguir serão detalhadas apenas as perspectivas Primais e Duais dos modelos Multiplicativos, já que as outras perspectivas possuem comportamentos muito parecidos aos dos modelos Aditivos (com a diferença em que devem ser aplicados logaritmos nos *inputs* e *outputs*).

4.4.1 Perspectiva Primal dos modelos Multiplicativos

As Expressões 90, 91, 92 e 93 apresentam um modelo DEA Multiplicativo Invariante Primal. Esse modelo apresenta retornos constantes a escala e forma de fronteira log-linear.

$$\text{MIN} \quad \sum_{i=1}^m v_i \cdot \log(x_{j_0}) - \sum_{j=1}^n u_j \cdot \log(y_{j_0}) \quad (90)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m v_i \cdot \log(x_{jk}) - \sum_{j=1}^n u_j \cdot \log(y_{jk}) \geq 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, z \quad (91)$$

$$u_i \geq 1 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \quad (92)$$

$$v_j \geq 1 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n \quad (93)$$

Em que:

u_i : Utilidade do *output* i ;

v_j : Utilidade do *input* j ;

x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k ;

y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU k ;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

z : Número de DMUs em avaliação;

m : Número de *outputs*;

n : Número de *inputs*.

O modelo Multiplicativo Variante possui retornos variáveis a escala e é correspondente aos modelos BCC e Aditivo Variante. Assim como no modelo Aditivo, nesse modelo é acrescentada uma variável sem restrição de sinal (w), que nesse caso não possuirá nenhuma função prática. O formato da fronteira desse modelo é chamado de Cobb-Douglas por partes. As expressões 94, 95, 96, 97 e 98 apresentam um modelo DEA Multiplicativo Variante.

$$\text{MIN} \quad \sum_{i=1}^m v_i \log(x_{j_0}) - \sum_{j=1}^n u_j \cdot \log(y_{j_0}) + w \quad (94)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m v_i \cdot \log(x_{jk}) - \sum_{j=1}^n u_j \cdot \log(y_{jk}) \geq 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, z \quad (95)$$

$$u_i \geq 1 \text{ para } i = 1, 2, \dots, m \quad (96)$$

$$v_j \geq 1 \text{ para } j = 1, 2, \dots, n \quad (97)$$

$$w \text{ pode assumir qualquer valor} \quad (98)$$

Em que:

w : Fator de escala da DMU em análise;

u_i : Utilidade calculado para o *output* i ;

v_j : Utilidade calculado para o *input* j ;

x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k de;

y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU k ;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

z : Número de unidades em avaliação;

m : Número de *outputs*;

n : Número de *inputs*.

Segundo Banker et al. (2004), os retornos a escala nos modelos Multiplicativos, ao contrário dos do modelo Aditivo, não são determinados pelo fator de escala w e sim pelos coeficientes de utilidade dos *inputs* (x_{j0}). O Quadro 8 indica a interpretação do tipo de retorno à escala a partir desses coeficientes.

Condição	Tipo de retorno
$\sum_{j=1}^n x_{j0} > 1$	Crescente
$\sum_{j=1}^n x_{j0} = 1$	Constante
$\sum_{j=1}^n x_{j0} < 1$	Decrescente

Quadro 8– Retorno à escala dos modelos Multiplicativos

4.4.2 Perspectiva Dual dos modelos Multiplicativos

Nos modelos Multiplicativos, as folgas possuem comportamento semelhante ao apresentado nos modelos Aditivos. Todas as outras interpretações, realizadas na seção Dual dos modelos Aditivos, também valem para os modelos Multiplicativos. As Expressões 99, 100, 101 e 102 apresentam um modelo Multiplicativo Invariante Dual.

$$\text{MAX} \sum_{i=1}^m S_i + \sum_{j=1}^n S_j \quad (99)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z \log(x_{jk}) \cdot \lambda_k + S_j = \log(x_{j0}) \quad \text{para } j=1,2,3\dots n \quad (100)$$

$$\sum_{k=1}^z \log(y_{ik}) \cdot \lambda_k - S_i = \log(y_{i0}) \quad \text{Para } i=1,2,3,m \quad (101)$$

$$\lambda_k, S_j \text{ e } S_i > 0 \quad (102)$$

Em que:

λ_k : Participação da DMU k na meta da DMU em análise;

x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k;

y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU k;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

z: Número de DMUs em avaliação;

m: Número de *outputs*;

n: Número de *inputs*;

S_i : Variável de folga do *output* i;

S_j : Variável de folga do *input* j.

As Expressões 103, 104, 105, 106 e 107, por sua vez, apresentam um modelo Multiplicativo Variante Dual, cuja única diferença em relação ao modelo Multiplicativo

Invariante Dual é a presença da restrição de convexidade ($\sum_{k=1}^z \lambda_k = 1$).

$$\text{MAX } \sum_{i=1}^m Si + \sum_{j=1}^n Sj \quad (103)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z \log(x_{jk}) \cdot \lambda_k + Sj = \log(x_{j0}) \quad \text{para } j=1,2,3\dots n \quad (104)$$

$$\sum_{k=1}^z \log(y_{ik}) \cdot \lambda_k - Si = \log(y_{i0}) \quad \text{Para } i=1,2,3,m \quad (105)$$

$$\sum_{k=1}^z \lambda_k = 1 \quad (106)$$

$$\lambda_k, Sj \text{ e } Si > 0 \quad (107)$$

Em que:

λ_k : Participação da DMU k na meta da DMU em análise;

x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k;

y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU k;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

z: Número de DMUs em avaliação;

m: Número de *outputs*;

n: Número de *inputs*;

Si: Variável de folga do *output* i;

Sj: Variável de folga do *input* j.

Tal qual as metas no modelo Aditivo, o logaritmo das metas das DMUs ineficientes podem ser obtidos diretamente a partir das variáveis de folga dos modelos Multiplicativos (deve ser lembrado que está-se trabalhando no espaço $[\log(x), \log(y)]$). Com isso, as metas das DMUs ineficientes para cada *input* e cada *output* serão dadas respectivamente pelas Expressões 108 e 109.

Meta Inputs

$$\text{Meta} = e^{\log(x_{j0}) - S_j} \quad \text{Para } j = 1, 2, 3, n \quad (108)$$

Meta Outputs

$$\text{Meta} = e^{\log(y_{i0}) + S_i} \quad \text{Para } i = 1, 2, 3, m \quad (109)$$

Em que:

- x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;
- y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;
- z : Número de DMUs em avaliação;
- m : Número de *outputs*;
- n : Número de *inputs*;
- S_i : Variável de folga do *output* i ;
- S_j : Variável de folga do *input* j .

4.5 Modelo FDH

O modelo de Livre Disposição de Envoltória (*Free Disposal Hull* – FDH), desenvolvido por Deprins et al. (1984), possui os mesmos princípios e formulações muito

próximas ao modelo BCC que possui retornos variáveis a escala. A grande diferença entre os dois é que o modelo BCC constrói a fronteira de eficiência (que vai servir de base para o cálculo do índice de eficiência e das metas das DMUs ineficientes) com base tanto em DMUs reais quanto em DMUs virtuais (que existem apenas em teoria e que são a combinação linear das DMUs reais eficientes que são denominadas *benchmarks*). Já o modelo FDH constrói a fronteira baseado exclusivamente em DMUs reais. Segundo Gomes, Mello e Biondi Neto (2003), o modelo FDH busca medir a eficiência comparando uma DMU com a DMU eficiente e real (*benchmark*), mais próxima a ela, ignorando completamente as DMUs virtuais, que poderiam servir-lhe como meta. Assim como os modelos CCR e BCC, a eficiência do modelo FDH não varia com a unidade dos *inputs* e *outputs*.

Tendo em vista essas características, a fronteira de eficiência do modelo FDH apresenta o formato de degraus, como mostra a Figura 34. É fácil perceber que essa fronteira elimina as combinações lineares entre DMUs, fazendo com que a DMU ineficiente seja comparada apenas com DMUs reais. Também é fácil perceber que a eficiência calculada pelo modelo FDH será sempre maior ou igual que a do modelo BCC, já que na maioria dos casos a fronteira FDH subestima o quanto uma DMU pode produzir, pois só utiliza DMUs reais na comparação. A Figura 34 ilustra a comparação entre as fronteiras BCC e FDH.

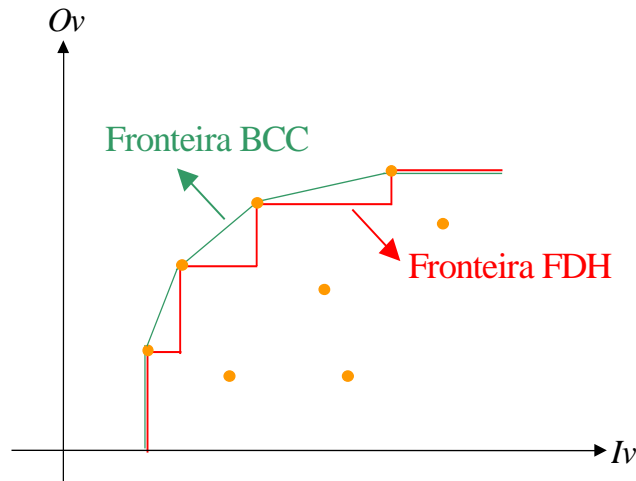


Figura 34 - Comparação das fronteiras BCC e FDH

As perspectivas de um modelo FDH são quase as mesmas que as de um modelo BCC, a única diferença é que o modelo FDH provavelmente foi modelado apenas para perspectiva Dual, já não se pode conceber, nem em teoria, devido às propriedades da dualidade, um modelo Primal que possua as características do FDH. A Figura 35 ilustra as principais perspectivas do modelo FDH; há 24 combinações de perspectivas para ele.

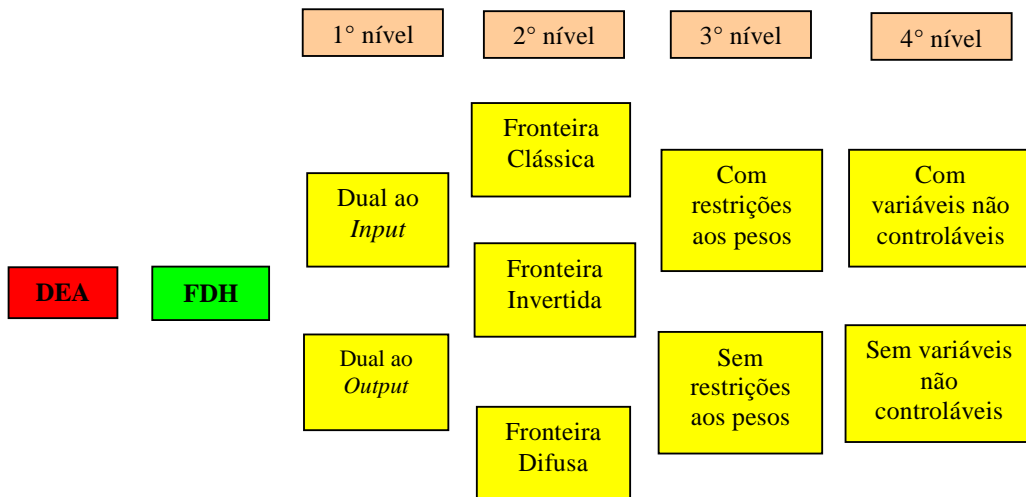


Figura 35 - Perspectivas de um modelo FDH

As equações do modelo BCC Dual e FDH são muito parecidas, a única diferença é que modelo FDH é baseado em programação linear inteira mista, e não apenas em programação linear simples, como o modelo BCC. As equações da perspectiva FDH podem ser encontradas simplesmente limitando-se as variáveis λ do modelo BCC aos valores 0 ou 1. As Expressões 110, 111, 112, 113, 114 e 115 apresentam um modelo FDH Dual orientado aos *inputs*.

$$\text{MIN } \theta \quad (110)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k \geq y_{i0} \text{ ou } \sum_{k=1}^z y_{ik} \cdot \lambda_k - S_i = y_{i0} \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (111)$$

$$\sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k - \theta \cdot x_{j0} \leq 0 \text{ ou } \sum_{k=1}^z x_{jk} \cdot \lambda_k + S_j = \theta \cdot x_{j0} \text{ para } j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (112)$$

$$\sum_{k=1}^z \lambda_k = 1 \quad (113)$$

$$\theta > 0 \quad (114)$$

$$\lambda_k \in \{0, 1\} \quad (115)$$

Em que:

θ : Eficiência;

λ_k : Participação da DMU k na meta da DMU em análise;

x_{jk} : Quantidade do *input* j da DMU k;

y_{ik} : Quantidade do *output* i da DMU k;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

z: Número de unidades em avaliação;

m: Número de *outputs*;

n: Número de *inputs*

S_i : Variável de folga do *output* i;

S_j : Variável de folga do *input* j.

No modelo FDH, que possui orientação radial, as folgas poderão ser interpretadas de modo semelhante ao comentado nos modelos CCR e BCC, sendo que nesse caso, as folgas com função de corrigir distorções na fronteira serão muito comuns devido ao formato de degraus.

Cada DMU ineficiente, no modelo FDH, terá apenas um único *benchmark* para lhe servir de comparação. Assim, após a resolução da perspectiva Dual, caso a variável λ associada a uma determinada DMU:

1. For igual a zero, a DMU não será o *benchmark* da DMU analisada;
2. For igual a 1, a DMU será o *benchmark* da DMU analisada.

Todas as outras perspectivas do modelo FDH, apresentam as mesmas características das do modelo BCC e por isso não serão repetidas.

4.6 Comparação entre os modelos e perspectivas do DEA

A técnica Análise por Envoltória de Dados possui 7 modelos: o CCR, o BCC, o FDH, o Aditivo Variante, o Aditivo Invariante, o Multiplicativo Variante e o Multiplicativo Invariante. Os modelos CCR, Aditivo Invariante e Multiplicativo Invariante apresentam retornos constantes à escala, ou seja, eles adotam a hipótese de que os *inputs* e os *outputs* são proporcionais entre si. Devido a isso, os modelos Aditivo Invariante e CCR apresentam a fronteira na forma de uma reta de 45° e o modelo Multiplicativo Invariante (que possui as mesmas equações do modelo Aditivo, porém com logaritmos aplicados aos *inputs* e *outputs*) apresenta uma fronteira na forma log-linear. Também como consequência

direta do tipo de retorno a escala adotado, o modelo CCR fornece como resposta a eficiência **total** ou **produtiva** das DMUs que analisa.

Já os modelos BCC, FDH, Aditivo Variante e Multiplicativo Variante apresentam retornos variáveis à escala, ou seja, eles adotam como hipótese que os *inputs* e os *outputs* não são proporcionais entre si. Devido a esse fato, os modelos Aditivo Variante e BCC apresentam a sua fronteira na forma linear por partes, que é a união de diversos segmentos de retas, com tamanhos e ângulos variados, formando uma superfície convexa. O modelo Multiplicativo Variante, por sua vez, apresenta um formato de fronteira chamado de Cobb-Douglas por partes porque, ao se aplicar o logaritmo as equações do modelo Aditivo Variante, elas se aproximam muito da Função Cobb-Douglas; o modelo FDH, que só analisa DMUs reais, possui a fronteira na forma de degraus. Também devido ao tipo de retorno a escala adotado, os modelos BCC e FDH fornecem como resultado a eficiência **técnica** das DMUs que analisam; a diferença entre os dois é que o modelo BCC considera tanto DMUs reais quanto virtuais para mensurar a eficiência enquanto o FDH só considera DMUs reais.

Deve-se ressaltar que os modelos Aditivos e Multiplicativos (tanto nas formas Variante quanto Invariante) não fornecem o valor da eficiência como resposta. Na realidade, a única resposta fornecida por esses modelos é a separação das DMUs eficientes das não-eficientes, sendo que essa separação pode ser realizada sem considerar a economia de escala nos modelos Invariantes, ou considerando a economia de escala nos modelos Variantes.

A formulação original dos modelos Aditivos e Multiplicativos é um problema de programação linear e, por isso, eles não precisam ser linearizados, conservando a sua orientação mista (que é ao mesmo tempo aos *inputs* e aos *outputs*). Já os modelos BCC e

CCR apresentam a formulação original na forma fracionária e por isso precisam ser linearizados sendo que, para isso, é necessário se definir uma orientação radial (que pode ser ao *input* ou ao *output*). O modelo FDH, que só está presente na forma Dual (pois é uma variação do modelo BCC Dual), é um modelo de programação inteira mista e também admite duas orientações (ao *input* e ao *output*).

O conceito de folga possui significado diferente quando se tratam dos modelos Aditivos e Multiplicativos e dos modelos CCR, BCC e FDH. Para o grupo dos Aditivos e Multiplicativos, folga é a quantidade dos *inputs* e dos *outputs* que faltam para a DMU ineficiente atingir a meta e se tornar eficiente; já para os modelos BCC, CCR e FDH as folgas servem para corrigir distorções na fronteira linear por partes.

O modelo Aditivo possui a vantagem em relação aos demais de analisar a eficiência com base na menor distância até a fronteira (eficiência de menor esforço), porém possui a desvantagem de seus resultados dependerem das unidades dos *inputs* e dos *outputs* (enquanto todos outros não dependem). Já os modelos Multiplicativos possuem a vantagem de permitir o uso de superfícies côncavas e convexas em sua fronteira e também de possibilitar o cálculo das elasticidades, sendo que a diferença entre o modelo Multiplicativo e os demais é que ele utiliza uma combinação multiplicativa para determinar os *inputs* e *outputs* virtuais, enquanto os outros utilizam combinações aditivas. O Quadro 9 apresenta as principais características dos principais modelos do DEA.

Modelo	Retorno à escala	Forma da fronteira	Tipo de eficiência	Formulação original	Orientação	Unidade de medição	Vantagens adicionais	Folga
Aditivo Variante	Variável	Linear por partes	Não calcula	Programação Linear	Mista	Influencia o resultado	Calcula a eficiência de menor esforço	Servem como parâmetros no cálculo das metas
Aditivo Invariante	Constante	Reta de 45°						
Multiplicativo Variante	Variável	Cobb-Douglas por partes				Não influencia o resultado	Calcula as elasticidades e lida com superfícies côncavas e convexas	
Multiplicativo Invariante	Constante	Log-linear						
FDH	Variável	Degraus	Técnica	Programação inteira mista	Ao <i>input</i> ou ao <i>output</i>	Não influencia o resultado	Analisa em separado os <i>inputs</i> e <i>outputs</i>	Servem para corrigir distorções na fronteira de eficiência
BCC	Variável	Linear por partes		Programação Fracionária				
CCR	Constante	Reta de 45°	Total					

Quadro 9 - Quadro comparativo dos modelos da técnica DEA

Cada um dos modelos DEA apresentado pode ser expresso sob diferentes combinações de perspectivas, sendo que essas perspectivas encontram-se divididas em até 4 níveis. Os modelos aqui apresentados apresentam diferentes tipos de perspectivas de primeiro nível; os modelos CCR e BCC, por exemplo, podem ser expressos nas perspectivas: (a) Fracionaria, (b) Primal ao *input*, (c) Primal ao *output*, (d) Dual ao *input* e (e) Dual ao *output*; já o modelo FDH apresenta apenas as perspectivas: (a) Dual ao *input* e (b) Dual ao *output* e; por fim, os modelos Aditivos e Multiplicativos apresentam apenas as perspectivas: (a) Dual e (b) Primal.

A perspectiva fracionária é a formulação original tanto do modelo BCC quanto do CCR; por ser um problema de programação fracionária, essa perspectiva apresenta infinitas soluções e por isso, não possui aplicações práticas, apenas didáticas. A perspectiva fracionária pode ser linearizada ao se escolher uma orientação, que pode ser ao *input* ou ao

output, dando origem aos modelos Primais. A partir dos modelos Primais (orientados ao *input* ou ao *output*), podem ser encontrados os modelos Duais (também orientados ao *input* ou ao *output*) correspondentes. As perspectivas orientadas aos *inputs* apresentam como resultado da função objetivo o próprio valor da eficiência, já as perspectivas orientadas aos *outputs* apresentam como resultado da função objetivo o inverso desse valor.

No modelo CCR, devido ao fato dos retornos a escala serem constantes, as perspectivas orientadas ao *input* e ao *output* conduzirão sempre ao mesmo resultado. Já nos modelos BCC e FDH, devido ao fato dos retornos a escala serem variáveis, as duas orientações poderão conduzir a resultados diferentes caso o retorno a escala seja crescente ou decrescente. Deve-se ressaltar, porém, que perspectivas Primal e Dual de mesma orientação, conduzirão sempre ao mesmo resultado, independentemente do modelo.

As perspectivas Primais fornecem como resultados adicionais nos modelos BCC e CCR (desde que os dados dos *inputs* e dos *outputs* do problema estejam previamente normalizados), as utilidades de todos os *inputs* e *outputs* de cada DMU que está sendo comparada; também fornecem (sem exigir qualquer tipo de normalização) o tipo de retorno a escala de cada DMU, no modelo BCC. As perspectivas Duais, por sua vez, apresentam como resultados adicionais, para os modelos BCC, CCR e FDH, as metas e os *benchmarks* das DMUs ineficientes. As principais diferenças entre as perspectivas de primeiro nível dos modelos CCR, BCC e FDH estão sintetizadas no Quadro 10.

Modelos	Perspectivas	Valor da Eficiência	Informações Adicionais	Resultado da Função Objetivo
CCR	Fracionária	-	-	Infinitas soluções
	Primal ao <i>Input</i>	As eficiências são iguais	Utilidades (os dados devem estar normalizados)	Eficiência
	Primal ao <i>Output</i>			Inverso da Eficiência
	Dual ao <i>Input</i>		Metas e <i>Benchmarks</i>	Eficiência
	Dual ao <i>Output</i>			Inverso da Eficiência
BCC	Fracionária		-	-
	Primal ao <i>Input</i>	As eficiências são diferentes	Utilidades (com os dados normalizados) e tipo de Retorno à Escala	Eficiência
	Primal ao <i>Output</i>			Inverso da Eficiência
	Dual ao <i>Input</i>	As eficiências são diferentes	Metas e <i>Benchmarks</i>	Eficiência
	Dual ao <i>Output</i>			Inverso da Eficiência
FDH	Dual ao <i>Input</i>	As eficiências são diferentes	Metas e <i>Benchmarks</i>	Eficiência
	Dual ao <i>Output</i>			Inverso da Eficiência

Quadro 10 – Comparação entre as perspectivas de primeiro nível dos modelos CCR, BCC e FDH
 Fonte: Mariano; Almeida ; Rebelatto (2006b).

Os modelos Aditivos e Multiplicativos em suas formas Variante e Invariante possuem apenas duas perspectivas de primeiro nível: (a) Primal e (b) Dual. Isso ocorre porque essas perspectivas apresentam uma orientação mista e sua formulação original é linear, não cabendo, portanto, orientações. Como já foi dito ao se comparar os modelos, nenhuma das duas perspectivas dos modelos Aditivos e Multiplicativos consegue calcular diretamente o valor da eficiência relativa de uma DMU, porém ambas são capazes de determinar o conjunto de referência formado pelas DMUs eficientes. Além disso, a perspectiva Primal fornece como resultado adicional (desde que os dados estejam previamente normalizados) às utilidades dos *inputs* e dos *outputs* de cada DMU analisada e

a perspectiva Dual fornece como resultado adicional, as metas e os *benchmarks* das DMUs consideradas ineficientes.

A função objetivo da perspectiva Primal dos modelos Aditivos e Multiplicativos representa a diferença entre o *input* virtual e o *output* virtual ($I_v - O_v$) da DMU em análise; a FO da perspectiva Dual, por sua vez, representa a somatória das folgas de todos os *inputs* e todos os *outputs* ($\sum_{i=1}^m s_i + \sum_{j=1}^n s_j$) da DMU em análise. Em ambos os casos as DMUs eficientes serão aquelas cujas funções objetivos forem iguais a zero. As principais diferenças entre as perspectivas de primeiro nível dos modelos Aditivos e Multiplicativos estão sintetizadas no Quadro 11.

Modelos	Perspectivas	Valor da Eficiência	Informações Adicionais	Resultado da Função Objetivo
Aditivos e Multiplicativos	Primal	Não calcula diretamente	Utilidades (com os dados normalizados)	Diferença entre o <i>input</i> virtual e o <i>output</i> virtual
	Dual		Metas e <i>Benchmarks</i>	Somatória das folgas dos <i>inputs</i> e <i>outputs</i>

Quadro 11 – Comparação entre as perspectivas de primeiro nível dos modelos Aditivos e Multiplicativos

Os modelos CCR, BCC e FDH, com suas respectivas perspectivas de primeiro nível, podem se apresentar nas formas (perspectivas): (a) fronteira clássica, (b) fronteira invertida e (c) fronteira difusa, sendo que essas perspectivas são chamadas de perspectivas de segundo nível para esses modelos. A perspectiva da fronteira clássica é a formulação original dos modelos DEA e consegue determinar: (a) os níveis de eficiência relativa de todas as DMUs, (b) o conjunto de referência formado pelas DMUs eficientes, (c) as metas para as DMUs ineficientes alcançarem a eficiência (possível apenas quando se utiliza as perspectivas de primeiro nível Duais), (d) os *benchmarks* para que essas DMUs ineficientes

possam ter uma referência para poder melhorar (também possível apenas nas perspectivas Duais) e (e) os coeficientes de utilidade dos *inputs* e *outputs* das DMUs analisadas (possível apenas nas perspectivas Primais com os dados normalizados). A perspectiva da fronteira invertida, por sua vez, consiste em trocar de lugar os *inputs* e os *outputs* e possui o objetivo de discriminar, dentre as DMUs consideradas eficientes na fronteira clássica, aquelas que são eficientes de maneira mais uniforme, ou seja, aquelas que se destacam tanto naquilo em que são piores quanto naquilo em que são melhores; essa discriminação se dará pela análise do índice de eficiência combinado que é a média dos resultados obtidos nas fronteiras clássica e invertida. Por fim, a fronteira difusa serve para quando os *inputs* e os *outputs* não podem ser determinados com exatidão, mas variam dentro de um intervalo conhecido de valores; a eficiência, nesse caso, será dada pelo grau de pertença de uma DMU na fronteira que será um conjunto difuso.

Por sua vez, todos os modelos podem-se apresentar (a) com restrições aos pesos ou (b) sem restrições aos pesos. As restrições aos pesos, que podem ser de três tipos, servem para corrigir distorções ocasionadas pela propriedade do DEA de poder atribuir qualquer peso (utilidade) para os *inputs* e *outputs* que estão sendo analisados. Essa propriedade pode gerar distorções, principalmente quando as utilidades, ou pelo menos a faixa de valores em que essas utilidades variam, já são previamente conhecidas. Assim, para corrigir essas possíveis distorções causadas pelo fato de um peso atribuído pelo DEA ser muito diferente da realidade, são acrescentadas restrições aos pesos. Essas restrições ou a ausência delas constituem o segundo (para os modelos Aditivos e Multiplicativos) ou o terceiro (para os modelos CCR, BCC e FDH) níveis de perspectivas do DEA.

Por fim, todos os níveis anteriores combinados podem utilizar, ou não, variáveis não-controláveis. A utilização, ou não, dessas variáveis constitui o quarto nível das

perspectivas do DEA (para os modelos CCR, BCC e FDH) ou o terceiro (para os modelos Aditivos e Multiplicativos). As variáveis não-controláveis são variáveis relevantes para se determinar a eficiência, pois são condições de contorno que influem no resultado, mas que não podem ser aumentadas ou diminuídas pela ação do homem devendo assim, serem travadas na hora de se calcular as metas.

Os principais objetivos das perspectivas de segundo, terceiro e quarto níveis estão expressas no Quadro 12.

Perspectivas	Fronteira Clássica	Fronteira Invertida	Fronteira Difusa	Restrições aos pesos	Varáveis não-controláveis
Objetivos	Calcular o índice de eficiência relativo; Separar as DMUs ineficientes e eficientes; Calcular metas e <i>benchmarks</i> para as DMUs ineficientes; Estimar as utilidades dos <i>inputs</i> e <i>outputs</i>	Identificar as DMUs mais eficientes dentre as eficientes por meio de um índice de eficiência combinado com a fronteira clássica	Calcular a eficiência de DMUs com <i>inputs</i> e <i>outputs</i> que variam em um intervalo	Evitar a atribuição de utilidades que contrariem a realidade ou a teoria econômica	Lidar com variáveis ambientais, sobre as quais o decisor não tem controle

Quadro 12 – Comparação entre as perspectivas de 2º, 3º e 4º níveis dos modelos DEA

Capítulo 5 - Números Índices

Outra maneira de se medir a eficiência de uma DMU por meio de técnicas não-paramétricas é utilizando-se os Números Índices. Segundo Azambuja (2002), os Números Índices comparam as relações entre os *outputs* e *inputs* de uma mesma DMU em dois períodos de tempo ou de duas DMUs diferentes. Sendo assim, por meio dos Números Índices pode-se calcular a eficiência relativa de uma DMU ou em relação a uma concorrente, ou em relação a ela mesma no passado.

Segundo Coelli et al. (1997), um Número Índice é definido como um número real que mede mudanças em um conjunto de variáveis relacionadas. Assim, os Números Índices podem ser utilizados para medir mudanças da produtividade no tempo, bem como medir diferenças nos níveis de produtividade entre empresas, indústrias, regiões ou países, sempre quando comparadas de duas em duas. Em outras palavras, a eficiência dada por um Número Índice é um valor que expressa uma comparação entre uma DMU em análise e uma DMU

base, sendo que essa base pode ser tanto outra DMU como ela mesma em outro período de tempo.

A eficiência calculada por um Número Índice pode assumir qualquer valor positivo, não sendo obrigado, ao contrário do conceito de eficiência anteriormente apresentado, a ficar limitado entre 0 e 1. A Expressão 116 apresenta a fórmula de cálculo da eficiência produtiva quando se utiliza a técnica dos Números Índices:

$$E = P / P_{\text{base}} \quad (116)$$

Em que:

E: Eficiência;

P: Produtividade atual de uma DMU;

P_{base} : Produtividade da DMU base.

Como a produtividade da DMU base não necessariamente será maior que a da DMU em análise (já que quaisquer duas DMUs podem ser comparadas) conclui-se que, caso a produtividade da DMU em análise seja maior que a da DMU base, o valor da eficiência será, pela relação mostrada na Expressão 116, maior que um. Pode-se, então, fazer a seguinte interpretação do valor da Eficiência dado por um Número Índice:

1. Se a Eficiência calculada for maior que 1, então a DMU em análise é (E-1)% mais produtiva que a DMU base podendo, então, ser considerada eficiente em relação a esta;

2. Se a Eficiência calculada for menor que 1, então a produtividade da DMU em análise é E% menor que a da DMU base podendo ser dita como ineficiente em relação a esta.

5.1 Modelos e Perspectivas da técnica dos Números Índices

Segundo Rebelo (2000), os principais Números Índices encontrados na literatura são: (a) o Índice de Fischer, (b) o Índice de Törnqvist, (c) o Índice de Malmquist, (d) o Índice de Laspeyres e o (e) Índice de Paasche. Segundo Azambuja (2002), esses diferentes Números Índices só levarão ao mesmo resultado quando se estiver analisando uma DMU com um único *input* e um único *output*.

Segundo a classificação proposta para o presente trabalho, cada um dos Números Índices aqui apresentados (Índices de Fischer, Törnqvist, Malmquist, Laspeyres e Paasche) corresponde a um modelo para a técnica dos Números Índices. Essa classificação foi adotada pelo fato de todos os Números Índices aqui descritos, apresentarem procedimentos e princípios comuns, o que corrobora para que eles sejam englobados dentro de uma mesma técnica; cada Número Índice, porém, modela a realidade de uma forma própria, o que faz com que eles sejam classificados como diferentes modelos. Segundo Azambuja (2002), as principais características comuns a todos os Números Índices são:

1. São simples e fáceis de interpretar;
2. Utilizam dados de somente dois pontos;
3. Prestam-se a visualização gráfica podendo, rapidamente, exibir o perfil evolutivo de produtividade; e

4. Assim como as técnicas paramétricas e diferentemente da Análise por Envoltória de Dados, não são sensíveis a *Outliers* (pontos fora da curva), o que é explicado pelo fato dos Números Índices trabalharem com apenas duas observações.

Cada um dos Números Índices (modelos) apresentados pode adotar três perspectivas: (a) a perspectiva da orientação aos *inputs* e (b) a perspectiva da orientação aos *outputs* e (c) a perspectiva da orientação a produtividade (que é o foco desse trabalho, mas que é obtida a partir das outras duas); a única exceção é o índice de Malmquist que pode adotar: (a) a perspectiva da Análise por Envoltória de Dados e (b) a perspectiva da Fronteira Estocástica. A Figura 36 ilustra a técnica de Números Índices e seus principais modelos e perspectivas, identificados na literatura:

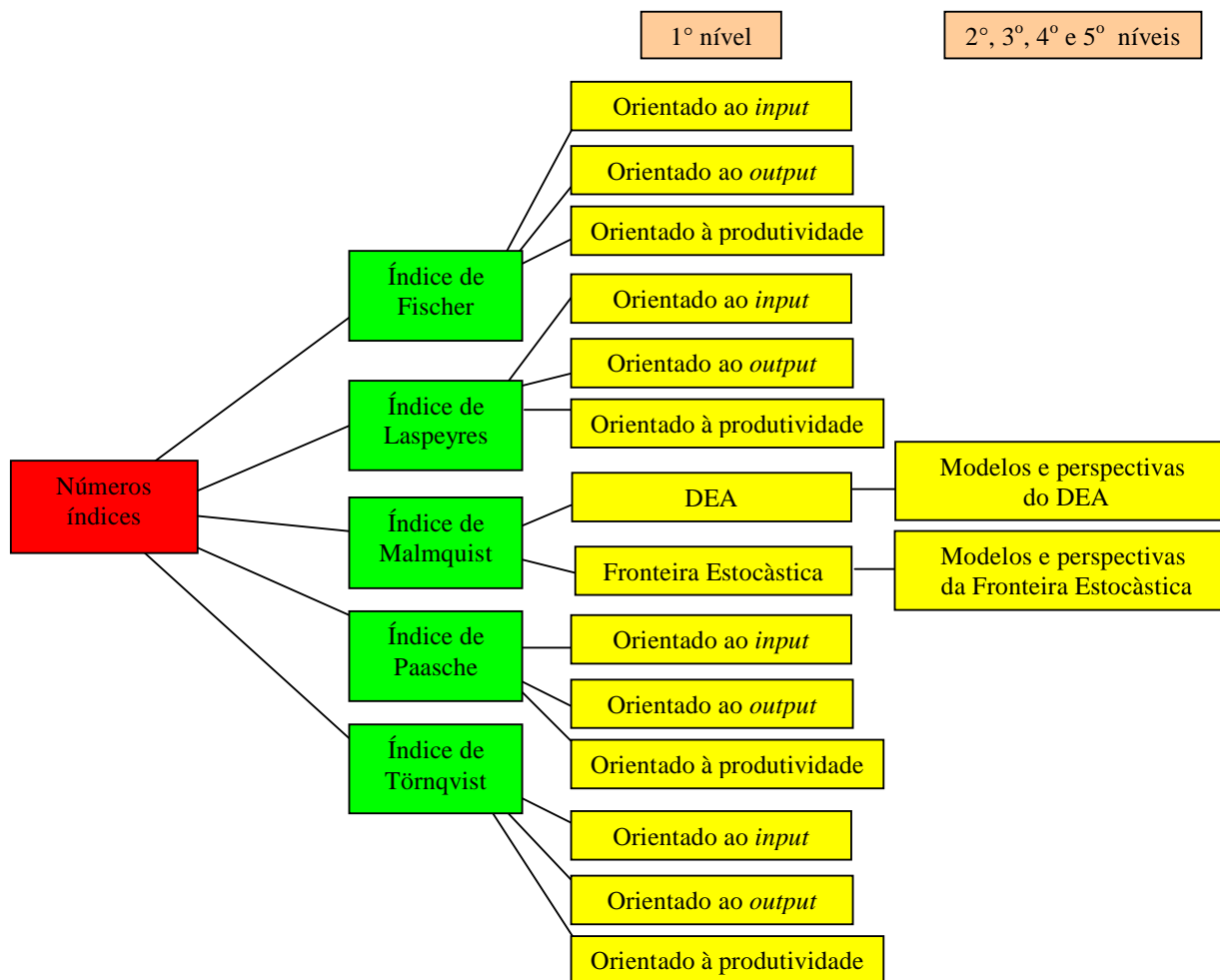


Figura 36 – Modelos e perspectivas da técnica de Números Índices

As Expressões 117 e 118 apresentam o princípio do cálculo da eficiência de uma DMU em relação a uma DMU base quando se utiliza a técnica dos Números Índices nas orientações aos *inputs* e aos *outputs* (o índice Malmquist possui um princípio de funcionamento um pouco diferente). Essas Expressões podem ser analisadas tanto em termos das distâncias até os eixos, quanto em termos dos *inputs* e *outputs* virtuais. As Figuras 37 e 38 exemplificam essas variáveis.

Orientação aos *outputs*

$$E = D_{DMU} / D_{base} = O_{V_{DMU}} / O_{V_{base}} = NI_o$$

(117)

Em que:

E: Eficiência;

D_{DMU} : Distância de uma DMU até um ponto fixo;

D_{base} : Distância da DMU base ATÉ um ponto fixo;

$O_{V_{DMU}}$: *Output* virtual da DMU em análise;

$O_{V_{base}}$: *Output* virtual da DMU base;

NI_o : Número índice orientado ao *output*.

Orientação aos *inputs*

$$E = D_{base} / D_{DMU} = I_{V_{base}} / I_{V_{DMU}} = NI_i$$

(118)

Em que:

E: Eficiência;

D_{DMU} : Distância de uma DMU até um ponto fixo;

D_{base} : Distância da DMU base até um ponto fixo;

$I_{V_{DMU}}$: *Input* virtual da DMU em análise;

$I_{V_{base}}$: *Input* virtual da DMU base;

NI_i : Número índice orientado ao *input*.

Como pode ser percebida pelas Expressões 117 e 118, a única diferença entre as orientações é que enquanto na orientação aos *inputs* é realizada uma comparação entre o *input* virtual da DMU base e o *input* virtual da DMU em análise ($I_{V_{base}}/I_{V_{DMU}}$), na orientação aos *outputs* é realizada uma comparação entre o *output* virtual da DMU em análise e o *output* virtual da DMU base ($O_{V_{DMU}}/O_{V_{base}}$); essa diferença decorre do fato da eficiência depender, ou da minimização dos *inputs*, ou da maximização dos *outputs*, ou seja, do fato de que será eficiente a DMU que, ou diminuir seus *inputs* em relação à DMU base, ou

aumentar seus *outputs* em relação à DMU base, justificando assim o procedimento de cálculo diferenciado.

É importante diferenciar as orientações aos *inputs* e aos *outputs* dos Números Índices, das orientações aos *inputs* e aos *outputs* da Análise por Envoltória de Dados. No caso do DEA, por exemplo, orientar aos *outputs* significa que os *outputs* serão comparados, mantendo-se os *inputs* constantes; já no caso dos Números Índices orientar aos *outputs* significa que os *outputs* serão comparados ignorando-se totalmente os *inputs*. O mesmo raciocínio pode ser aplicado na orientação aos *inputs*.

A partir das deduções realizadas no Apêndice 1, não é difícil perceber que a eficiência calculada pelas orientações aos *inputs* e aos *outputs* não será a eficiência produtiva real da DMU em análise em relação à DMU base; essa eficiência, na realidade, poderá ser entendida como sendo a eficiência produtiva real entre a DMU em análise e uma DMU fantasma que, no caso da orientação aos *outputs*, terá o mesmo nível de *input* virtual da DMU em análise e o mesmo nível de *output* virtual da DMU base (como mostra a Figura 37) e no caso da orientação aos *inputs*, terá o mesmo nível de *input* virtual da DMU base e o mesmo nível de *output* virtual da DMU em análise (como mostra a Figura 38).

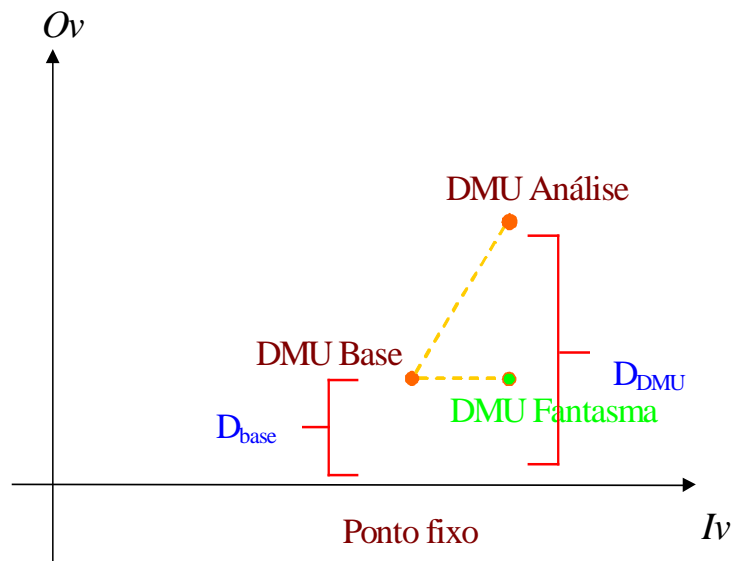


Figura 37 - Cálculo da eficiência pelos Números Índices orientados aos *outputs*

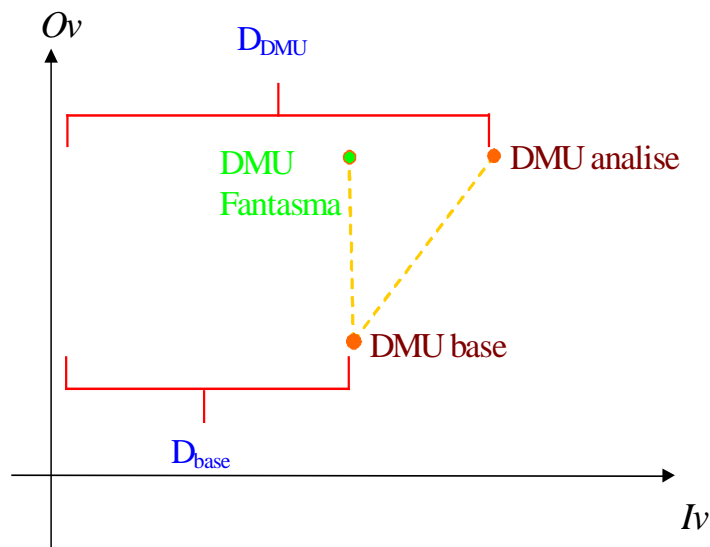


Figura 38 - Cálculo da eficiência pelos Números Índices orientados aos *inputs*

Porém, mesmo não resultando na eficiência produtiva real das DMUs analisadas, as orientações aos *inputs* e aos *outputs* são um passo intermediário importante no cálculo da eficiência produtiva real (que será dada pela perspectiva da orientação á produtividade). Essa eficiência produtiva entre a DMU em análise e entre a DMU base será dada

simplesmente pela multiplicação entre os resultados das orientações aos *inputs* e aos *outputs* como demonstrado na Expressão 119.

$$E = P / P_{base} = \frac{Ov_{DMU}}{Iv_{DMU}} \bigg/ \frac{Ov_{base}}{Iv_{base}} = \frac{Ov_{DMU}}{Iv_{DMU}} \cdot \frac{Iv_{base}}{Ov_{base}} = \quad (119)$$

$$\frac{Ov_{DMU}}{Ov_{base}} \cdot \frac{Iv_{base}}{Iv_{DMU}} = NI_o * NI_i$$

Em que:

E: Eficiência;

P: Produtividade atual de uma DMU;

P_{base}: Produtividade da DMU base;

D_{DMU}: Distância de uma DMU até um ponto fixo;

D_{base}: Distância da DMU base até o um ponto fixo;

Ov_{DMU}: *Output* virtual da DMU em análise;

Ov_{base}: *Output* virtual da DMU base;

Iv_{DMU}: *Input* virtual da DMU em análise;

Iv_{base}: *Input* virtual da DMU base;

NI_i: Número índice orientado ao *input*;

NI_o: Número índice orientado ao *output*.

A eficiência calculada pelos índices de Laspeyres, Paasche, Fischer e Törnqvist se refere apenas a eficiência produtiva (não fará sentido calcular as eficiências técnica e de escala já que só estão sendo comparados 2 pontos). Já o índice de Malmquist, que mede a evolução da produtividade em dois períodos de tempo, pode separar o quanto dessa evolução foi devido a cada tipo de eficiência.

5.2 Índices Laspeyres e Paasche

Os primeiros Números Índices a serem desenvolvidos, e por isso chamados de índices clássicos, foram os índices de Laspeyres e Paasche. Os índices de Laspeyres e de

Paasche possuem o mesmo princípio de cálculo; a única diferença entre eles é que no índice de Laspeyres são utilizados, para o cálculo, os pesos (utilidades) da DMU base e no índice de Paasche são utilizados, para o cálculo, os pesos (utilidades) da DMU em análise. As Expressões 120 e 121 mostram as equações de cálculo da eficiência propostas por Laspeyres:

Orientado aos *outputs*

$$E = \frac{\sum_{i=1}^m u_{ib} \cdot y_{i0}}{\sum_{i=1}^m u_{ib} \cdot y_{ib}} = \text{OV}_{\text{DMU}} / \text{OV}_{\text{base}} \quad (120)$$

Orientado aos *inputs*

$$E = \frac{\sum_{j=1}^n v_{jb} \cdot x_{j0}}{\sum_{j=1}^n v_{jb} \cdot x_{jb}} = \text{IV}_{\text{base}} / \text{IV}_{\text{DMU}} \quad (121)$$

Em que:

E: Eficiência;

u_{ib} : Utilidade da DMU base para o *output* i ;

v_{jb} : Utilidade da DMU base para o *input* j ;

y_{ib} : Quantidade do *output* i da DMU base;

x_{jb} : Quantidade do *input* j da DMU base;

y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

m : Número de *outputs*;

n : Número de *inputs*;

OV_{DMU} : *Output* virtual da DMU em análise;

OV_{base} : *Output* virtual da DMU base;

IV_{DMU} : *Input* virtual da DMU em análise;

IV_{base} : *Input* virtual da DMU base.

As Expressões 122 e 123 mostram as equações de cálculo da eficiência propostas por Paasche:

Orientado aos *outputs*

$$E = \frac{\sum_{i=1}^m u_{i0} \cdot y_{i0}}{\sum_{i=1}^m u_{i0} \cdot y_{ib}} = \text{OV}_{\text{DMU}} / \text{OV}_{\text{base}} \quad (122)$$

Orientado aos *inputs*

$$E = \frac{\sum_{j=1}^n v_{j0} \cdot x_{jb}}{\sum_{j=1}^n v_{j0} \cdot x_{j0}} = \text{IV}_{\text{base}} / \text{IV}_{\text{DMU}} \quad (123)$$

Em que:

E: Eficiência;

u_{i0} : Utilidade da DMU em análise para o *output* i;

v_{j0} : Utilidade da DMU em análise para o *input* j;

y_{ib} : Quantidade do *output* i da DMU base;

x_{jb} : Quantidade do *input* j da DMU base;

y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

m: Número de *outputs*;

n: Número de *inputs*;

OV_{DMU} : *Output* virtual da DMU em análise;

OV_{base} : *Output* virtual da DMU base;

IV_{DMU} : *Input* virtual da DMU em análise;

IV_{base} : *Input* virtual da DMU base.

Para o cálculo dos índices de Laspeyres e Paasche orientados à produtividade basta multiplicar, como já demonstrado, o resultado das orientações aos *inputs* e aos *outputs*.

Uma das maiores limitações desses Números Índices é que, para sua utilização, são necessárias a determinação prévia das utilidades dos *inputs* e dos *outputs* que, como já relatado, apresentam vários problemas para sua estimação. Segundo Vicente, Anefalo e

Caser (2001), diversos estudos efetuados a partir da década de 70 demonstraram a inadequação do uso dos índices de Laspeyres e Paasche e, concomitantemente, as vantagens do emprego de índices superlativos, sendo os mais conhecidos os de Fisher e Törnqvist.

5.3 Índice de Fischer

Segundo Rebelo (2000), a eficiência dada pelo índice de Fischer (1922) é definida simplesmente como sendo a média geométrica entre os índices de Laspeyres e Paasche, conforme mostra a Expressão 124.

$$E_{iF} = \sqrt{E_{iL} \cdot E_{iP}} \quad (124)$$

Em que:

- E_{iF} : Eficiência pelo índice de Fischer;
- E_{iL} : Eficiência pelo índice de Laspeyres;
- E_{iP} : Eficiência pelo índice de Paasche.

O índice de Fischer, apesar de também apresentar os mesmos problemas dos índices de Laspeyres e Paasche, já que é simplesmente a média geométrica entre eles, é um índice melhor, pois ao contrário dos outros dois, considera simultaneamente os pesos da DMU base e da DMU em análise em seus cálculos. O problema dos índices de Laspeyres e Paasche que persiste no índice de Fischer é a necessidade de conhecimento prévio das utilidades dos *inputs* e *outputs*.

Devido ao fato da média geométrica, ao contrário da aritmética, possuir a característica de penalizar grandes discrepâncias entre os valores dos quais se está calculando a média, quanto maior a diferença entre os índices de Laspeyres e Paasche, menor será o índice de Fischer. Com isso o índice de Fischer, apesar de considerar a

diferença entre as utilidades da DMU base e da DMU em análise, minimiza essa característica em detrimento da diferença entre o nível de *inputs* ou de *outputs* dessas DMUs. Além do índice de Fischer, os índices de Törnqvist e Malmquist também são baseados em médias geométricas.

Os índices de Fischer orientados ao *input* e ao *output* são calculados, respectivamente, pela média geométrica entre os índices de Laspeyres e Paasche orientados ao *input* e pela média geométrica entre os índices de Laspeyres e Paasche orientados ao *output*; já o índice de Fischer orientado a produtividade pode ser encontrado de duas formas: (a) pela multiplicação do índice de Fischer orientado ao *input* com o índice de Fischer orientado ao *output* e, (b) pela média geométrica dos índices de Laspeyres e Paasche orientados à produtividade.

5.4 Índice de Törnqvist

O índice desenvolvido por Törnqvist (1936) surgiu a partir da evolução natural do índice de Fischer e sendo assim, apesar de apresentar resultados mais precisos, ainda continua apresentando as mesmas características do índice de Fischer (como a necessidade de se conhecer as utilidades previamente). Segundo Rebelo (2000), o índice de Törnqvist deve ser preferido em relação ao de Fischer em qualquer situação, mas segundo Vicente, Anefalo e Caser (2001), a fórmula de Törnqvist apresenta problemas quando existem valores nulos nas séries (de *inputs* ou de *outputs*) que se deseja agregar e sendo assim, para esses casos, é melhor usar o índice de Fischer.

O índice Törnqvist, ao invés de se basear diretamente na relação entre os *inputs* ou os *outputs* virtuais das DMUs base e em análise como os Números Índices até aqui apresentados, é definido como sendo: (a) na orientação aos *outputs*, a média geométrica

ponderada dos *outputs* da DMU em análise e da DMU base, relacionados de dois em dois (y_{i0}/y_{ib}) e; (b) na orientação aos *inputs*, a média geométrica ponderada dos *inputs* da DMU base e da DMU em análise, também relacionados de dois em dois (x_{jb}/x_{j0}). A cada uma das parcelas, (y_{i0}/y_{ib}) ou (x_{jb}/x_{j0}), deve ser atribuído um peso (visto que a média é ponderada); esse peso será a **média aritmética** entre: (a) a participação do *output* (ou *input*) dentro do *output* virtual (ou *input* virtual) da **DMU base** e (b) a participação desse mesmo *output* (ou *input*) dentro do *output* virtual (ou *input* virtual) da **DMU em análise**. Essas participações são dadas: na orientação aos *outputs*, pelos coeficientes W_{ib} (relativo a DMU base) e W_{i0} (relativo a DMU em análise) e; na orientação aos *inputs*, pelos coeficientes W_{jb} (relativo a DMU base) e W_{j0} (relativo a DMU em análise). As Expressões 125 e 126 apresentam os índices de Törnqvist para as orientações aos *inputs* e aos *outputs*.

Orientado aos *outputs*

$$E = \prod_{i=1}^m \left(\frac{y_{i0}}{y_{ib}} \right)^{\frac{W_{ib} + W_{i0}}{2}} \quad (125)$$

Orientado aos *inputs*

$$E = \prod_{j=1}^n \left(\frac{x_{jb}}{x_{j0}} \right)^{\frac{W_{jb} + W_{j0}}{2}} \quad (126)$$

Onde W_{ib} , W_{i0} , W_{jb} e W_{j0} são definidos pelas Expressões 127 e 128:

Orientação ao *output*:

$$W_{ib} = \frac{y_{ib} \cdot u_{ib}}{\sum_{i=1}^m y_{ib} \cdot u_{ib}} \quad (127)$$

$$W_{i0} = \frac{y_{i0} \cdot u_{i0}}{\sum_{i=1}^m y_{i0} \cdot u_{i0}}$$

Orientação ao *input*:

$$W_{jb} = \frac{x_{jb} \cdot v_{jb}}{\sum_{j=1}^n x_{jb} \cdot v_{jb}} \quad (128)$$

$$W_{j0} = \frac{x_{j0} \cdot v_{j0}}{\sum_{j=1}^n x_{j0} \cdot v_{j0}}$$

Em que:

E: Eficiência;

u_{i0} : Utilidade da DMU em análise para o *output* i;

v_{j0} : Utilidade da DMU em análise para o *input* j;

u_{ib} : Utilidade da DMU base para o *output* i;

v_{jb} : Utilidade da DMU base para o *input* j;

y_{ib} : Quantidade do *output* i da DMU base;

x_{jb} : Quantidade do *input* j da DMU base;

y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

m: Número de *outputs*;

n: Número de *inputs*;

W_{ib} : Porcentagem do *output* i no *output* virtual da DMU base;

W_{i0} : Porcentagem do *output* i no *output* virtual da DMU em análise;

W_{jb} : Porcentagem do *input* j no *input* virtual da DMU base;

W_{j0} : Porcentagem do *input* j no *input* virtual da DMU em análise.

O índice de Törnqvist também pode ser representado na forma logarítmica; basta, para isso, que se aplique o logaritmo dos dois lados das Expressões 125 e 126. As equações resultantes estão sintetizadas nas Expressões 129 e 130. Essa forma logarítmica também é conhecida como forma aditiva da Expressão de Törnqvist sendo a forma original conhecida como forma multiplicativa desse índice.

Orientado aos *outputs*

$$\ln(E) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{W_{ib} + W_{i0}}{2} \right) \cdot (\ln y_{i0} - \ln y_{ib}) \quad (129)$$

Orientado aos *inputs*

$$\ln(E) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{W_{jb} + W_{j0}}{2} \right) \cdot (\ln x_{jb} - \ln x_{j0}) \quad (130)$$

Em que:

E: Eficiência;

y_{ib} : Quantidade do *output* i da DMU base;

x_{jb} : Quantidade do *input* j da DMU base;

y_{i0} : Quantidade do *output* i da DMU em análise;

x_{j0} : Quantidade do *input* j da DMU em análise;

m: Número de *outputs*;

n: Número de *inputs*;

W_{ib} : Porcentagem do *output* i no *output* virtual da DMU base;

W_{i0} : Porcentagem do *output* i no *output* virtual da DMU em análise;

W_{jb} : Porcentagem do *input* j no *input* virtual da DMU base;

W_{j0} : Porcentagem do *input* j no *input* virtual da DMU em análise.

Após serem calculados os índices Törnqvist para as orientações aos *inputs* e aos *outputs*, pode ser encontrado o índice Törnqvist orientado a produtividade, assim como nos

índices anteriores, simplesmente multiplicando-se os valores encontrados nas duas orientações.

5.5 Índice de Malmquist

Segundo Almeida (2007), o índice Malmquist foi desenvolvido por Caves em 1982, inspirado em Malmquist (1953). Esse índice possui princípios um pouco diferentes dos demais Números Índices, mas apesar disso, também pode ser classificado como um modelo da técnica dos Números Índices. Segundo Rebelo (2000), o índice Malmquist apresenta as seguintes vantagens em relação aos outros Números Índices:

1. Não necessita de informações a respeito das utilidades dos *inputs* e dos *outputs* para calcular a eficiência;
2. Calcula diretamente a eficiência produtiva em suas duas orientações;
3. Permite decompor o quanto da evolução da produtividade de uma DMU foi devido apenas à alteração da eficiência produtiva (AE) e o quanto foi devido a alteração da tecnologia (AT) e;
4. Pode separar as eficiências total, técnica e de escala na parcela AE.

Os índices de Fischer, Törnqvist, Laspeyres e Paasche, por sua vez, apresentam como vantagem em relação ao índice Malmquist o fato de poderem ser calculados com apenas dois dados [os *inputs* (ou *outputs*) da DMU base e da DMU em análise], enquanto o índice Malmquist necessita da presença de um painel de dados contendo as quantidades de *inputs* e *outputs* de várias DMUs em dois períodos de tempo diferentes.

Outra característica peculiar do índice Malmquist é que, devido a características de formulação, ele não permite comparar duas DMUs diferentes, apenas a mesma DMU em dois períodos de tempo. Assim no índice Malmquist a DMU base será sempre a DMU em análise no passado.

Segundo Rebelo (2000), o índice Malmquist é calculado a partir da distância, relativa à fronteira de eficiência, de uma DMU a um ponto fixo. Com isso, apesar de ser um Número Índice e só medir a eficiência entre dois pontos, o índice Malmquist precisa trabalhar com o conceito de fronteira de eficiência para poder realizar seus cálculos e, por isso, precisa de um painel de dados com os *inputs* e *outputs* de várias DMUs em dois períodos de tempo.

A partir de agora, toda vez que se expressar o termo “**distância relativa à fronteira de eficiência**”, estará subtendido que se trata da “distância de uma DMU até um ponto fixo relativa a fronteira de eficiência” que pode ser definida como sendo a distância de uma DMU até um ponto fixo dividida pela distância da projeção dessa DMU na fronteira (segundo uma orientação) até esse mesmo ponto fixo. A Expressão 131 e Figura 39 ilustram o conceito de **distância relativa à fronteira de eficiência**, quando se utiliza a orientação aos *outputs* (para a orientação aos *inputs* o princípio é o mesmo).

$$D = D_{DMU} / D_{proj} \quad (131)$$

Em que:

D: Distância relativa à fronteira de eficiência;

D_{DMU} : Distância de uma DMU até um ponto fixo;

D_{proj} : Distância da projeção de DMU até um ponto fixo.

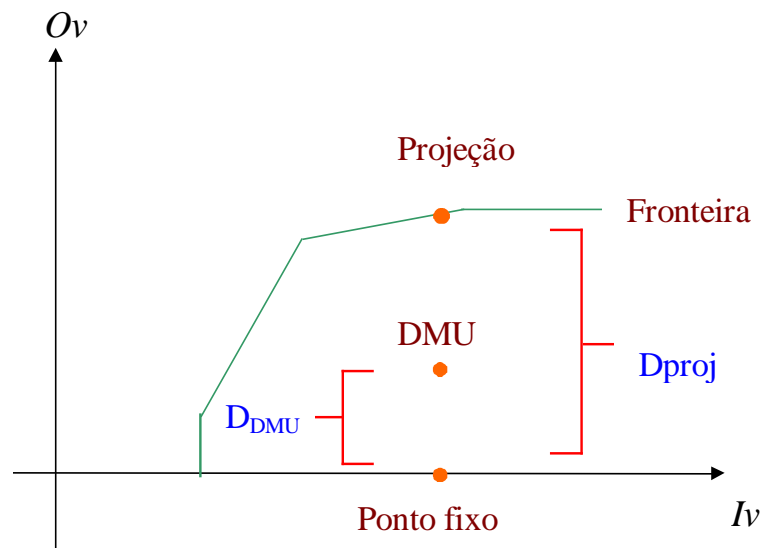


Figura 39 - Variáveis do cálculo da distância de uma DMU relativa a fronteira

A **distância relativa à fronteira de eficiência**, como pode ser percebida pela comparação da Expressão 131 com a Expressão 7 do Capítulo 2 (reproduzida a seguir), nada mais é do que a eficiência produtiva em relação à fronteira (que é diferente da eficiência produtiva em relação à outra DMU) da DMU que está sendo analisada. Com isso, pode-se concluir que essa **distância relativa à fronteira de eficiência** deve ser calculada por meio de uma técnica de análise de eficiência que lida com o conceito de fronteira. Porém, não se deve confundir essa distância com o resultado do índice Malmquist.

$$E = D_{DMU} / D_{proj} \quad (7)$$

Em que:

E: Eficiência;

D_{DMU} : Distância de uma DMU até um ponto fixo;

D_{proj} : Distância da projeção de uma DMU até um ponto fixo.

Segundo Rebelo (2000), a **distância relativa a fronteira de eficiência** pode ser calculada sob duas perspectivas (que são as duas técnicas que calculam essas distâncias): (a) a da Análise por Envoltória de Dados (DEA) e (b) a da Fronteira Estocástica e em ambos os casos, as distâncias relativas são definidas com base em duas fronteiras: (a) a fronteira construída com os dados do período 0 e (b) a fronteira construída com os dados do período t.

Pode-se notar que, apesar do índice de Malmquist ter sido definido como um modelo de uma técnica não-paramétrica (a técnica dos Números Índices), ele precisa se apoiar em outras técnicas para poder ser calculado, sendo que cada uma dessas técnicas de apoio corresponde a uma perspectiva diferente para esse modelo. O fato do índice Malmquist se apoiar na técnica de Fronteira Estocástica, que é uma técnica paramétrica, não muda o fato de que ele faz parte do conjunto de técnicas não-paramétricas.

A formulação do cálculo do índice Malmquist, a partir das distâncias relativas à fronteira, é dada pela Expressão 132:

$$E = \sqrt{\frac{D_0(x^t_v, y^t_v)}{D_0(x^0_v, y^0_v)} \cdot \frac{D_t(x^t_v, y^t_v)}{D_t(x^0_v, y^0_v)}} \quad (132)$$

Em que:

E: Eficiência;

D_0 : Função distância relativa à fronteira do período 0;

D_t : Função distância relativa à fronteira do período t;

y^0_v : Quantidade do *output* virtual da DMU em análise no período 0;

x^0_v : Quantidade do *input* virtual da DMU em análise no período 0;

y^t_v : Quantidade do *output* virtual da DMU em análise no período t;

x^t_v : Quantidade do *input* virtual da DMU em análise no período t;

$D_0(x^0_v, y^0_v)$: Distância da DMU no período 0 relativa à fronteira do período 0;

$D_0(x^t_v, y^t_v)$: Distância da DMU no período t relativa à fronteira do período 0;

$D_t(x^0_v, y^0_v)$: Distância da DMU no período 0 relativa à fronteira do período t;

$D_t(x^t_v, y^t_v)$: Distância da DMU no período t relativa à fronteira do período t.

O índice Malmquist apresenta várias semelhanças com o índice de Fischer. Enquanto o índice de Fischer é baseado na média geométrica entre os índices de Laspeyres, que usa os coeficientes da DMU base, e de Paasche, que usa os coeficientes da DMU em análise, o índice Malmquist nada mais é do que a média geométrica entre: (a) a relação entre as distâncias de uma DMU nos períodos t e 0 relativas à fronteira construída com os dados do período 0 $\left(\frac{D_0(x^t_v, y^t_v)}{D_0(x^0_v, y^0_v)}\right)$, e (b) a mesma relação entre as distâncias de uma DMU nos períodos t e 0, só que, nesse caso, relativas à fronteira construída com os dados do período t $\left(\frac{D_t(x^t_v, y^t_v)}{D_t(x^0_v, y^0_v)}\right)$.

Segundo Färe et al. (1995), a Expressão 132 pode ser decomposta, por meio de algumas manipulações matemáticas, em duas parcelas, sendo que uma delas indica o quanto da evolução da produtividade (que é a eficiência) entre dois pontos (DMU no período 0 e DMU no período t) se deve efetivamente a diferença na eficiência produtiva, e o quanto se deve a diferença de tecnologia. A Expressão 133 apresenta essa decomposição:

$$E = \left(\sqrt{\frac{D_0(x^t_v, y^t_v)}{D_t(x^t_v, y^t_v)} \cdot \frac{D_0(x^0_v, y^0_v)}{D_t(x^0_v, y^0_v)}} \right) \cdot \left(\frac{D_t(x^t_v, y^t_v)}{D_0(x^0_v, y^0_v)} \right) = AT * AE \quad (133)$$

Em que:

E: Eficiência;

D_0 : Função distância relativa à fronteira do período 0;

D_t : Função distância relativa à fronteira do período t;

y_v^0 : Quantidade do *output* virtual da DMU em análise no período 0;

x_v^0 : Quantidade do *input* virtual da DMU em análise no período 0;

y_v^t : Quantidade do *output* virtual da DMU em análise no período t;

x_v^t : Quantidade do *input* virtual da DMU em análise no período t;

$D_0(x_v^0, y_v^0)$: Distância da DMU no período 0 relativa à fronteira do período 0;

$D_0(x_v^t, y_v^t)$: Distância da DMU no período t relativa à fronteira do período 0;

$D_t(x_v^0, y_v^0)$: Distância da DMU no período 0 relativa à fronteira do período t;

$D_t(x_v^t, y_v^t)$: Distância da DMU no período t relativa à fronteira do período t;

AT: Alterações Tecnológicas de uma DMU entre os períodos 0 e t;

AE: Alterações de Eficiência de uma DMU entre os períodos 0 e t.

A parcela que se encontra dentro da raiz (1º parênteses) corresponde ao quanto da eficiência (evolução da produtividade) se deve a fatores tecnológicos (Alterações Tecnológicas - AT), já a parcela que está fora da raiz (2º parênteses) corresponde ao quanto da eficiência se deve a fatores puramente técnicos e de escala (Alterações de Eficiência - AE). Não é difícil perceber que ao se introduzir a parcela que está fora raiz, a Expressão 133 se reduz á Expressão 132.

Como pode ser notado ao se analisar a expressão de AE, a diferença na eficiência produtiva da DMU no período t, em relação a ela própria no período 0, é dada simplesmente dividindo-se a distância da DMU do período t relativa à fronteira de eficiência do período t, pela distância da DMU do período 0 relativa à fronteira de eficiência do período 0 ($\frac{D_t(x_v^t, y_v^t)}{D_0(x_v^0, y_v^0)}$), ou seja, dividindo-se a eficiência do período t (E^T) pela do período 0 (E^0). Já a diferença de tecnologia entre a DMU nos dois períodos é obtida pela média geométrica entre: (a) a razão entre as distâncias da DMU do período t relativas à fronteira do período t e à fronteira do período 0 ($\frac{D_t(x_v^t, y_v^t)}{D_0(x_v^t, y_v^t)}$), e (b) a razão

entre as distâncias da DMU do período 0 relativas também à fronteira do período t e à fronteira do período 0 $(\frac{D_t(x_v^0, y_v^0)}{D_0(x_v^0, y_v^0)})$.

A eficiência de uma DMU em relação a ela própria no passado (ou seja, o índice Malmquist de uma DMU) é obtida multiplicando-se AE e AT, pois, como vale lembrar, uma DMU só será eficiente se produzir o máximo possível de *outputs* dada uma quantidade de *inputs* e uma tecnologia disponível e aumentada essa tecnologia disponível, também aumentará a quantidade de *outputs* que essa DMU deve produzir para ser eficiente.

Definidas as equações do índice Malmquist, pode-se passar para o cálculo das distâncias. O modo de se calcular a distância relativa à fronteira será apresentado apenas na perspectiva da Análise por Envoltória de Dados, já que a perspectiva da Fronteira Estocástica calcula diretamente os índices AT e AE.

5.5.1 Perspectiva da Análise por Envoltória de Dados

Cada uma das quatro distâncias necessárias ao cálculo do índice Malmquist $(D_0(x_v^0, y_v^0), D_0(x_v^t, y_v^t), D_t(x_v^0, y_v^0), D_t(x_v^t, y_v^t))$ pode ser calculada construindo-se um problema de programação linear com base nos preceitos da técnica DEA. A Figura 40 apresenta uma lista das perspectivas do DEA que podem ser utilizadas pelo índice Malmquist; nessa lista não constam os modelos Aditivos e Multiplicativos, pois eles não calculam um índice de eficiência (e sendo assim não podem calcular a distância a fronteira) e também não constam as perspectivas Dual e Primal e as perspectivas da fronteira invertida e difusa, pois são irrelevantes para o cálculo da distância. Assim, poderão ser utilizados, todos os modelos e perspectivas do DEA representados na Figura 40, sendo que os resultados do índice Malmquist devem ser interpretados de acordo com o modelo e

perspectiva escolhida. Por exemplo, caso seja escolhido o modelo BCC orientado ao *input*, a parcela AE do índice Malmquist indicará a evolução da eficiência **técnica** quando se mantém os *outputs* constantes; já se for escolhido o modelo CCR com orientação aos *outputs*, a parcela AE do índice Malmquist indicará a evolução da eficiência **total** quando se mantém os *inputs* constantes. Porém, independentemente da perspectiva escolhida o resultado do índice Malmquist será sempre igual (apenas as parcelas AT e AE vão mudar). A Figura 40 representa a explosão da caixa “**modelos e perspectivas do DEA**” da Figura 36. Tanto os modelos (2º nível) quanto às perspectivas (3º, 4º e 5º níveis) do DEA são perspectivas do índice Malmquist e por isso são representados em amarelo.

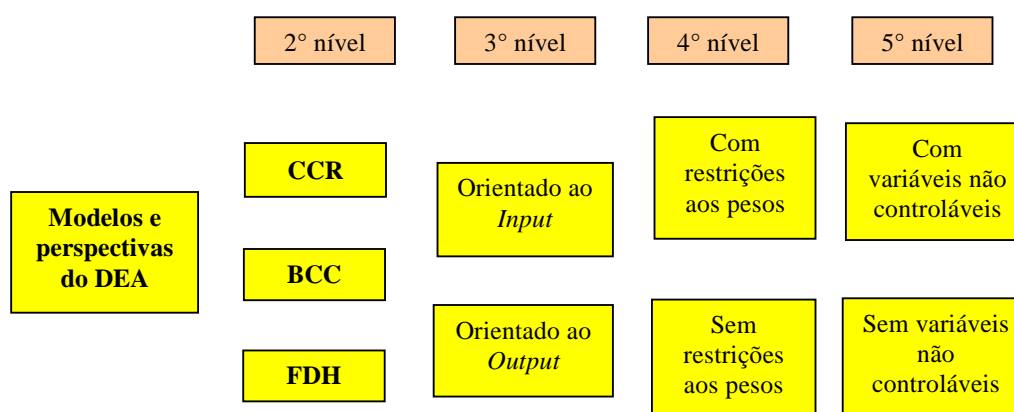


Figura 40 – Continuação das perspectivas dos Índices

As Expressões 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148 e 149 apresentam um exemplo de como é realizado o cálculo das distâncias necessárias ao índice Malmquist utilizando-se a técnica DEA modelo CCR Dual orientado ao *input* sem restrições aos pesos e sem variáveis não controláveis. Para se utilizar qualquer outro modelo e perspectiva basta fazer as modificações necessárias conforme os modelos e perspectivas do DEA já apresentadas.

$$D_0(x_v^0, y_v^0) = \text{MIN } \theta \quad (134)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z y_{ik}^0 \cdot \lambda_k \geq y_{i0}^0 \quad \text{Para } i = 1, 2, 3 \dots m \quad (135)$$

$$\sum_{k=1}^z x_{jk}^0 \cdot \lambda_k - \theta \cdot x_{j0}^0 \leq 0 \quad \text{Para } j = 1, 2, 3, n \quad (136)$$

$$\lambda_k \text{ e } \theta > 0 \quad (137)$$

Em que:

$D_0(x_v^0, y_v^0)$: Distância da DMU no período 0 relativa à fronteira do período 0;

θ : Eficiência;

λ_k : Participação da DMU k na meta da DMU em análise;

x_{jk}^0 : Quantidade do *input* j da DMU k no período 0 ;

y_{ik}^0 : Quantidade do *output* i da DMU k no período 0;

x_{j0}^0 : Quantidade do *input* j da DMU em análise no período 0;

y_{i0}^0 : Quantidade do *output* i da DMU em análise no período 0;

z: Número de DMUs em avaliação;

m: Número de *outputs*;

n: Número de *inputs*.

$$D_0(x_v^t, y_v^t) = \text{MIN } \theta \quad (138)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z y_{ik}^0 \cdot \lambda_k \geq y_{i0}^t \quad \text{Para } i = 1, 2, 3 \dots m \quad (139)$$

$$\sum_{k=1}^z x_{jk}^0 \cdot \lambda_k - \theta \cdot x_{j0}^t \leq 0 \quad \text{Para } j = 1, 2, 3, n \quad (140)$$

$$\lambda_k \text{ e } \theta > 0 \quad (141)$$

Em que:

$D_0(x_v^t, y_v^t)$: Distância da DMU no período t relativa à fronteira do período 0;

θ : Eficiência;

λ_k : Participação da DMU k na meta da DMU em análise;

x_{jk}^0 : Quantidade do *input* j da DMU k no período 0 ;

y_{ik}^0 : Quantidade do *output* i da DMU k no período 0;

x_{j0}^t : Quantidade do *input* j da DMU em análise no período t;

y_{i0}^t : Quantidade do *output* i da DMU em análise no período t;

z: Número de DMUs em avaliação;

m: Número de *outputs*;

n: Número de *inputs*.

$$D_t(x_v^0, y_v^0) = \text{MIN } \theta \quad (142)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z y_{ik}^t \cdot \lambda_k \geq y_{i0}^t \quad \text{Para } i = 1, 2, 3 \dots m \quad (143)$$

$$\sum_{k=1}^z x_{jk}^t \cdot \lambda_k - \theta \cdot x_{j0}^t \leq 0 \quad \text{Para } j = 1, 2, 3, n \quad (144)$$

$$\lambda_k \text{ e } \theta > 0 \quad (145)$$

Em que:

$D_t(x_v^0, y_v^0)$: Distância da DMU no período 0 relativa à fronteira do período t;

θ : Eficiência;

λ_k : Participação da DMU k na meta da DMU em análise;

x_{jk}^t : Quantidade do *input* j da DMU k no período t;

y_{ik}^t : Quantidade do *output* i da DMU k no período t;

x_{j0}^0 : Quantidade do *input* j da DMU em análise no período 0;

y_{i0}^0 : Quantidade do *output* i da DMU em análise no período 0;

z: Número de DMUs em avaliação;

m: Número de *outputs*;

n: Número de *inputs*.

$$D_t(x_v^t, y_v^t) = \text{MIN } \theta \quad (146)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^z y_{ik}^t \cdot \lambda_k \geq y_{i0}^t \quad \text{Para } i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (147)$$

$$\sum_{k=1}^z x_{jk}^t \cdot \lambda_k - \theta \cdot x_{j0}^t \leq 0 \quad \text{Para } j = 1, 2, 3, n \quad (148)$$

$$\lambda_k \text{ e } \theta > 0 \quad (149)$$

Em que:

$D_t(x_v^t, y_v^t)$: Distância da DMU no período t relativa à fronteira do período t;

θ : Eficiência;

λ_k : Participação da DMU k na meta da DMU em análise;

x_{jk}^t : Quantidade do *input* j da DMU k no período t;

y_{ik}^t : Quantidade do *output* i da DMU k no período t;

x_{j0}^t : Quantidade do *input* j da DMU em análise no período t;

y_{i0}^t : Quantidade do *output* i da DMU em análise no período t;

z: Número de DMUs em avaliação;

m: Número de *outputs*;

n: Número de *inputs*.

5.5.2 Perspectiva da Fronteira Estocástica

Outra forma de se calcular a eficiência de uma DMU pelo Índice Malmquist é por meio da perspectiva da Fronteira Estocástica. A partir da Função Produção nos períodos 0 e t e a partir das eficiências de cada DMU, em relação às essas duas funções (dadas pela técnica da Fronteira Estocástica), pode-se calcular o índice Malmquist em duas etapas: (a) calculando-se o índice de Alteração de Eficiência (AE) e (b) calculando-se o índice de Alteração Tecnológica (AT). Para se obter as funções produção dos períodos 0 e t, é necessário contar com dados de *inputs* e *outputs* de várias DMUs (um número maior do que

na perspectiva DEA) nos períodos 0 e t. O cálculo dos índices AE e AT é direto e não necessita do cálculo das distâncias, ao contrário da perspectiva do DEA.

A Expressão 150 apresenta o cálculo da parcela AE do índice Mamquist, que é obtida dividindo-se: (a) a eficiência da DMU no período t (E^t), que é a eficiência da DMU em análise calculada com a função produção do período t e, (b) a eficiência da DMU no período 0 (E^0), que é a eficiência da DMU base calculada com a função produção do período 0; esse procedimento de cálculo é equivalente a $\frac{D_t(x^t_v, y^t_v)}{D_0(x^0_v, y^0_v)}$, como já foi

demonstrado no início desse item.

$$AE = E^t / E^0 \quad (150)$$

Em que:

AE: Alteração de eficiência entre os períodos 0 e t;

E^t : Eficiência da DMU no período t;

E^0 : Eficiência da DMU no período 0.

Já a parcela AT, dada pela Expressão 151, é obtida por meio da média geométrica entre as derivadas parciais das funções produção do período 0 e do período t em relação ao tempo, calculadas respectivamente nos pontos ocupados pelas DMUs base e em análise.

$$AT = \sqrt{\frac{\partial f(x,0,\beta)}{\partial 0} \cdot \frac{\partial f(x,t,\beta)}{\partial t}} \quad (151)$$

Em que:

AT: Alteração de eficiência entre os períodos 0 e t;

$f(x,0,\beta)$: Função produção no período 0;

$f(x,t,\beta)$: Função produção no período t;

β : Parâmetros estimados pela técnica de fronteira estocástica.

O índice Malmquist de uma DMU k será simplesmente a multiplicação de AT e AE como mostra a Expressão 152.

$$E = AT * AE \quad (152)$$

E: Eficiência;
 AT alteração tecnológica;
 AE: Alteração na eficiência.

As perspectivas de 2º nível em diante da perspectiva da Fronteira Estocástica não serão abordadas nesse trabalho, pois isso exigiria um estudo mais detalhado da técnica da Fronteira Estocástica, o que fugiria do escopo dessa dissertação.

5.5 Comparação entre os modelos e perspectivas da técnica dos Números Índices

A técnica dos Números Índices possui 5 modelos, os modelos (índices) de: Laspeyres, Paasche, Fischer, Törnqvist e Malmquist. Os índices de Laspeyres e Paasche são índices mais primitivos e menos eficazes no cálculo da eficiência; ambos se baseiam simplesmente na divisão entre os *inputs* virtuais (ou os *outputs* virtuais) das duas DMUs que estão sendo comparadas. A única diferença entre os dois é que o primeiro utiliza as utilidades da DMU base para o cálculo da eficiência e o segundo utiliza as utilidades da DMU em análise para esse cálculo. O índice de Fischer, que é um índice bem mais representativo porque considera simultaneamente as utilidades da DMU base e as da DMU em análise para o cálculo da eficiência, é definido simplesmente como a média geométrica entre os índices de Laspeyres e Paasche. Sendo assim, o cálculo dos índices de Laspeyres

e Paasche, que quase não são usados isoladamente, são um passo intermediário para se calcular o índice Fischer. Os índices de Malmquist e Törnqvist também consideram as utilidades das DMUs base e em análise em seus cálculos.

O índice de Törnqvist é baseado na média geométrica ponderada da a relação entre os *inputs* (ou os *outputs*) das duas DMUs comparadas, calculadas de par em par. O índice Törnqvist conduz a um resultado mais preciso que o índice de Fischer, porém ele é mais complexo de ser calculado e não pode ser utilizado quando um dos *inputs* ou um dos *outputs*, da série que se deseja agregar, for igual a zero. O Quadro 13 apresenta uma comparação entre os índices de Laspeyres, Paasche, Fischer, Törnqvist em função de sua precisão, complexidade e limitações.

Número-índice	Precisão	Complexidade	Limitações
Índice de Laspeyres	Imprecisos (quase não se usa)	Simples	Nenhuma
Índice de Paasche			
Índice de Fischer	Precisão intermediária		
Índice de Törnqvist	Alta precisão	Alta complexidade	Quando um dos <i>inputs</i> (ou dos <i>outputs</i>) for igual a zero

Quadro 13 - Comparação entre os Índices de Laspeyres, Paasche, Fischer, Törnqvist

O índice Malmquist, por sua vez, é baseado na comparação de uma mesma DMU em períodos de tempo diferentes por meio da distância, relativa a fronteira de eficiência do respectivo período, dessa DMU a um ponto fixo. Devido ao fato do Índice Malmquist possuir a limitação de não poder comparar duas DMUs diferentes e de requerer um painel de dados para calcular a eficiência (enquanto os outros índices requerem apenas duas), ele se torna um índice à parte, que não pode ser comparado com os demais apenas em termos de complexidade, precisão e limitações. Uma das principais vantagens do índice Malmquist

é que, por meio de uma técnica de apoio, ele consegue calcular as utilidades dos *inputs* e *outputs* das DMUs comparadas, diferentemente dos outros índices que necessitam que as utilidades sejam fornecidas *a priori*. Outra vantagem do índice Malmquist é que ele pode separar o quanto da evolução da produtividade foi devido ao aumento da eficiência efetivamente (AE) e o quanto foi devido ao aumento da tecnologia (AT). Ele ainda permite dentro de suas parcelas AE e AT separar as eficiências técnica e total sendo que isso só é possível devido ao fato dos diferentes modelos da técnica Análise por Envoltória de Dados constituírem-se em diferentes perspectivas para o índice Malmquist que conduzirão a diferentes resultados para as parcelas AT e AE (já que o índice Malmquist propriamente dito será sempre o mesmo) que deverão ser interpretados de acordo com as características de cada modelo. O Quadro 14 apresenta as principais características dos modelos da Técnica de Números Índices.

Modelos	Definição	Utilidades Usadas	Utilidades	Tipos de eficiência com que trabalha	Usos	DMUs necessárias
Índice de Laspeyres	É a relação entre os <i>inputs</i> (ou <i>outputs</i>) virtuais das DMUs base e em análise	São utilizadas apenas as utilidades da DMU Base	Devem ser fornecidas	Apenas total	Serve tanto para comparar duas DMUs diferentes quanto para comparar a mesma DMU em dois períodos de tempo diferentes	Duas
Índice de Paasche	É a relação entre os <i>inputs</i> (ou <i>outputs</i>) virtuais das DMUs base e em análise	São utilizadas apenas as utilidades da DMU em análise				
Índice de Fischer	É a média geométrica entre os índices de Laspeyres e Paasche	São utilizadas tanto as utilidades da DMU base quanto as da DMU em análise				
Índice de Törnqvist	É a média geométrica ponderada da relação entre os <i>inputs</i> (ou <i>outputs</i>) das DMUs base e em análise comparados de dois em dois					
Índice de Malmquist	É calculado comparando-se as DMUs base e em análise por meio de suas distâncias a um ponto fixo, relativas à Fronteira de Eficiência		São calculadas pelo próprio modelo	Total e técnica nas parcelas AE e AT	Serve apenas para comparar a mesma DMU em dois períodos de tempo diferentes	Várias

Quadro 14 – Comparação entre os modelos da Técnica de Números índices

Os índices de Laspeyres, Paasche, Fischer e Törnqvist possuem três perspectivas: (a) a orientação aos *inputs*, (b) a orientação aos *outputs* e (c) a orientação à produtividade. Ser orientado ao *input* significa que serão comparados apenas o número de *inputs*, ignorando-se completamente o número de *outputs*; por sua vez, ser orientado ao *output* significa que serão comparados apenas o número de *outputs*, ignorando-se o número de *inputs*. A orientação à produtividade, por outro lado, considera simultaneamente *inputs* e *outputs*.

A equação da orientação ao *input* é baseada na relação entre o *input* virtual da DMU base e o *input* virtual da DMU em análise $[(I_{V_{base}})/(I_{V_{DMU}})]$; já a equação da orientação ao *output* é baseada na relação entre o *output* virtual da DMU em análise e o *output* virtual da DMU base $[(O_{V_{DMU}})/(O_{V_{base}})]$. A eficiência da orientação a produtividade pode ser calculada simplesmente multiplicando-se os resultados da orientação aos *inputs* e aos *outputs*. Nenhuma das orientações necessita de uma técnica de apoio para calcular a eficiência.

O índice Malmquist, por sua vez, apresenta as seguintes perspectivas: (a) a da Análise por Envoltória de Dados e a (b) da Fronteira Estocástica. Essas duas perspectivas são originadas das técnicas que apóiam o cálculo do índice Malmquist (que por definição necessita de uma técnica de apoio). Para se escolher adequadamente entre as duas perspectivas é necessário que se conheça os pré-requisitos, as informações possibilitadas e o modo de utilização de cada técnica. Em ambas as perspectivas a equação do índice Malmquist é baseada nas distâncias das duas DMUs comparadas (base e em análise) em relação às fronteiras construídas com os dados do passado e do presente relacionadas pela

seguinte média geométrica: $\sqrt{\frac{D_0(x^t_v, y^t_v)}{D_0(x^0_v, y^0_v)} \cdot \frac{D_t(x^t_v, y^t_v)}{D_t(x^0_v, y^0_v)}}$. O Quadro 15 apresenta as

principais características das perspectivas dos modelos da Técnica de Números Índices.

Modelos	Perspectiva	característica	Equação	Técnica de apoio
Índices de Laspeyres, Paasche, Fischer e Törnqvist	Orientado ao <i>input</i>	Consideram apenas os <i>inputs</i> , desprezando os <i>outputs</i> , para calcular a eficiência	$I_{V_{base}}/I_{V_{DMU}}$	nenhuma
	Orientado ao <i>output</i>	Consideram apenas os <i>outputs</i> , desprezando os <i>inputs</i> , para calcular a eficiência	$O_{V_{DMU}}/O_{V_{base}}$	
	Orientado á produtividade	Consideram ambos, <i>inputs</i> e <i>outputs</i> no cálculo da eficiência	$NI_0 * NI_i$	
Índice de Malmquist	Orientado ao DEA	Consideram ambos, <i>inputs</i> e <i>outputs</i> no cálculo da eficiência	$\sqrt{\frac{D_0(x^t_v, y^t_v)}{D_0(x^0_v, y^0_v)} \cdot \frac{D_t(x^t_v, y^t_v)}{D_t(x^0_v, y^0_v)}}$	Análise por Envoltória de Dados
	Orientado a fronteira estocástica			Fronteira Estocástica

Quadro 15 – Comparação entre as perspectivas dos modelos da Técnica de Números Índices

Capítulo 6 – Estudo de Caso

Nesse capítulo será apresentado um estudo de caso real com o objetivo de ilustrar as etapas do método de análise de eficiência. Esse estudo de caso terá o objetivo de avaliar a eficiência relativa dos aeroportos internacionais brasileiros e foi apresentado de maneira simplificada em Almeida, Mariano e Rebelatto (2007).

Porém, antes de prosseguir com o estudo de caso, é relevante definir melhor o escopo da eficiência que será avaliada nessa análise. Como *outputs* pretende-se utilizar variáveis que ilustrem o nível de utilização dos aeroportos, ou seja, o quanto esses aeroportos estão sendo efetivamente utilizados; já como *inputs* pretende-se utilizar algumas variáveis que representem a infra-estrutura física dos aeroportos. Assim, nesse estudo de caso será analisado o quanto bem os aeroportos internacionais brasileiros conseguem utilizar sua infraestrutura já instalada, ou seja, o quanto bem eles conseguem converter uma boa infraestrutura em um bom nível (em termos puramente quantitativos) de atendimentos.

Deve-se ressaltar, porém, o quanto essa análise que será realizada é limitada para se avaliar o desempenho dos aeroportos de forma completa. Nessa análise será completamente ignorado, por exemplo, alguns *inputs* bastante relevantes como: o número de funcionários de cada aeroporto e o estado de conservação da infra-estrutura física instalada. Também serão ignorados *outputs* como: a qualidade do serviço prestado e a segurança dos aeroportos. Sendo assim, podem ocorrer situações em que um aeroporto seja considerado eficiente apesar de, para alcançar essa pretensa eficiência, ele estar comprometendo completamente a qualidade dos serviços prestados e a segurança (algo totalmente indesejado, mas que não será considerado nessa análise).

Apesar dessas limitações, essa análise será importante para determinar em quais aeroportos o investimento em infraestrutura foi excessivo e em quais a infraestrutura instalada está sendo mal utilizada por algum motivo que demandará uma investigação posterior visto que as técnicas de análise de eficiência detectam os problemas, mas não as suas causas que demandarão uma investigação posterior.

6.1 Seleção das DMUs e dos *inputs* e *outputs*

A primeira providência a ser tomada em um processo de análise de eficiência produtiva é selecionar as DMUs que serão analisadas (ver a seção 3.2.1). Para uma boa análise, deve-se sempre buscar o maior número possível de DMUs, pois apesar de algumas técnicas requererem menos DMUs que outras, um bom número de DMUs torna as medidas de eficiência mais confiáveis em qualquer situação.

Outra coisa que não se pode perder de vista ao selecionar-se DMUs é que todas as conclusões que forem obtidas para uma determinada DMU, só valem dentro do conjunto

das DMUs que foram analisadas. Assim, dependendo do tipo de comparações que se deseja fazer e do universo que se deseja estudar, a seleção de DMUs será diferente.

No caso desse trabalho, deseja-se comparar apenas aeroportos do tipo internacional que se localizem no Brasil e sendo assim, todas as conclusões obtidas por esse trabalho só valem dentro do universo dos aeroportos internacionais brasileiros. No *site* da Infraero estão presentes informações de 26 aeroportos que se encaixam nessa categoria: Bagé, Belém, Boa Vista, Brasília, Campo Grande, Congonhas, Corumbá, Cruzeiro de Sul, Curitiba, Florianópolis, Fortaleza, Foz do Iguaçu, Galeão, Guarulhos, Macapá, Maceió, Manaus, Natal, Pelotas, Porto Alegre, Porto Velho, Recife, Rio Branco, Salvador, Uruguaiana e Várzea Grande. Ainda não se sabe se o número de 26 aeroportos será suficiente, pois a técnica que será utilizada vai ser escolhida em uma etapa posterior; caso esse número de DMUs seja insuficiente talvez seja necessário ampliar o universo de análise.

No *site* da Infraero também estão disponíveis, para cada um dos aeroportos selecionados, um conjunto de dados referentes aos anos de 2004 e 2005. Dentre esses dados foram extraídos uma lista de possíveis variáveis de *inputs* e uma de possíveis variáveis de *outputs*. As variáveis de infraestrutura física (que são candidatas a possíveis *inputs*) encontradas nesse *site* são: (a) área do pátio (m²); (b) capacidade dos terminais aeroportuários (m²); (c) a quantidade de garagens para estacionar os aviões; (d) o comprimento da pista e; (e) a área dos terminais aeroportuários. Já as variáveis de utilização dos aeroportos (que são candidatas a *outputs*) encontrados nesse *site* são: (a) a movimentação de carga (Kg); (b) a quantidade de passageiros embarcados e desembarcados (mil) e; (c) a quantidade de aeronaves movimentada. O Quadro 16 apresenta os dados das variáveis de infraestrutura para cada um dos aeroportos selecionados.

Nome	Área do pátio (m ²)	Comp. da pista (m)	Capac. do terminal (nº de pessoas)	Área do terminal (m ²)	Posições de estac. de aviões
Belém	82.384	4.630	2.700.000	33.225	11
Macapá	21.900	2.100	170.000	2.914	15
Boa Vista	78.490	2.700	675.000	4.958	7
Cruzeiro do Sul	22.500	2.400	135.000	515	3
Manaus	18.575	2.700	3.520.000	46.266	15
Porto Velho	30.250	2.400	920.000	8.540	16
Rio Branco	38.400	2.158	320.000	4.292	29
Brasília	57.113	6.500	7.400.000	90.100	32
Campo Grande	36.000	2.600	900.000	6.000	25
Corumbá	15.883	1.660	230.000	1.564	14
Várzea Grande	51.756	2.300	580.000	5.600	27
Curitiba	32.830	4.015	4.000.000	45.000	18
Foz de Iguaçu	58.936	2.195	2.000.000	16.000	23
Florianópolis	3.318	3.800	1.100.000	8.703	6
Bagé	3.856	2.649	40.000	480	7
Porto Alegre	142.750	2.280	6.100.000	53.140	16
Pelotas	16.200	3.210	130.000	1.000	8
Uruguaiana	10.634	2.300	100.000	800	12
Fortaleza	152.857	2.545	3.000.000	38.500	14
Maceió	56.143	2.600	1.200.000	22.000	17
Natal	36.924	4.425	1.500.000	11.560	25
Recife	139.616	3.300	5.000.000	52.000	26
Salvador	221.000	4.525	6.000.000	69.750	24
Guarulhos	468.110	6.700	16.500.000	179.790	66
Congonhas	77.321	3.375	12.000.000	51.535	25
Galeão	712.895	7.180	15.000.000	280.681	53

Quadro 16 - Variáveis da infraestrutura física dos aeroportos

O Quadro 17, por sua vez, apresenta as variáveis de utilização dos 26 aeroportos referentes aos anos de 2004 e 2005.

Nome	Mov. Aviões (uni)		Mov. carga (Kg)		Mov. Passageiros (mil)	
	2004	2005	2004	2005	2004	2005
Belém	33.694	34.218	19.412.111	19.755.648	1.330.965	1.523.714
Macapá	11.581	1.127	2.703.907	2.702.682	392.775	414.481
Boa Vista	6.697	7.918	718.135	690.777	114.023	144.486
Cruzeiro do Sul	3.206	3.582	2.372.317	1.595.839	44.640	60.910
Manaus	31.273	31.470	135.337.310	139.958.553	1.368.968	1.508.022
Porto Velho	10.761	10.739	4.000.813	2.717.996	233.187	293.895
Rio Branco	9.436	9.833	1.924.475	2.172.671	158.096	206.637
Brasília	129.979	130.885	65.777.657	83.811.080	9.926.786	9.426.569
Campo Grande	26.075	21.592	4.264.748	3.637.516	516.494	652.150
Corumbá	2.823	2.661	265.442	240.277	29.303	39.900
Várzea Grande	35.784	34.940	5.968.189	4.078.599	704.567	880.256
Curitiba	53.263	58.050	27.484.969	24.616.883	2.840.349	3.393.079
Foz de Iguaçu	9.385	10.909	768.815	600.387	598.711	818.512
Florianópolis	29.227	28.367	6.243.901	8.549.436	1.382.577	1.548.833
Bagé	1.270	1.341	97.494	90.406	2.461	3.560
Porto Alegre	57.740	55.767	37.024.689	36.904.725	3.215.545	3.521.204
Pelotas	2.024	2.141	192.101	290.200	1.155	1.169
Uruguaiana	817	714	38.972	37.023	859	716
Fortaleza	39.618	42.537	31.504.199	35.361.710	2.317.869	2.774.240
Maceió	15.718	15.873	2.361.130	2.147.334	656.104	765.582
Natal	18.850	19.534	9.386.955	10.144.374	1.127.952	1.299.144
Recife	56.551	54.843	4.947.9223	56.764.639	3.173.672	3.604.652
Salvador	81.365	78.271	72.956.166	73.057.545	4.145.371	4.554.572
Guarulhos	149.497	154.339	435.593.673	470.944.200	12.940.193	15.834.797
Congonhas	217.782	228.110	37.890.966	43.244.760	13.611.227	17.147.628
Galeão	77.530	97.332	93.776.891	84.814.578	6.024.930	8.657.139

Quadro 17 - Variáveis de utilização dos aeroportos

Ao contrário do número de DMUs que quanto maior, melhor será o desempenho das técnicas de análise de eficiência, o número de *inputs* e *outputs* deve ser sempre o menor possível para que as técnicas funcionem mais apropriadamente (ver a seção 3.2.2) . Por outro lado, caso não se considere alguma variável explicativa, tanto de *input* quanto de *output*, corre-se o risco de se chegar a conclusões incompletas a respeito da eficiência (tendo em vista o escopo previamente definido). Por exemplo, nesse estudo de caso definiu-se que seria analisada a utilização dos aeroportos em função de a sua infraestrutura física instalada; assim, caso deixe-se de considerar alguma variável importante de infraestrutura

ou de utilização, os resultados ficarão incompletos e alguns aeroportos considerados ineficientes ou eficientes podem não o ser de fato. Para se chegar ao melhor número possível de *inputs* e *outputs*, deve-se primeiramente listar todas as possíveis variáveis de interesse e depois ir eliminando aquelas que são não-explicativas ou redundantes. Para realizar esse procedimento, é necessário que se construa uma matriz de correlações em que são calculados os coeficientes de correlação entre os *inputs*, entre os *outputs* e entre os *inputs* e *outputs*. O Quadro 18 apresenta a matriz de correlação entre os *inputs* e *outputs* que foram listados nesse estudo de caso (utilizou-se os *outputs* de 2005 para construção dessa matriz).

		<i>Inputs</i>					<i>Outputs</i>		
		Área do pátio	Comprimento da pista	Capacidade do terminal	Área do terminal	N. posições de estacionamento de aviões	Mov. Avião	Mov. Cargas	Mov. Passageiros
<i>Inputs</i>	Área do pátio	1							
	Comprimento da pista	0,118	1						
	Capacidade do terminal	0,819	0,030	1					
	Área do terminal	0,950	0,052	0,895	1				
	N. posições de estacionamento de aviões	0,781	-0,048	0,808	0,805	1			
<i>Outputs</i>	Mov. Avião	0,481	0,036	0,871	0,610	0,615	1		
	Mov. Cargas	0,590	0,025	0,738	0,633	0,738	0,561	1	
	Mov. passageiros	0,572	0,033	0,921	0,681	0,699	0,977	0,711	1

Quadro 18 – Matriz de correlação entre as variáveis de *inputs* e *outputs*.

Analisando-se a matriz de correlações, apresentada no Quadro 18, pode-se eliminar inicialmente o *input* “área do pátio” que é muito correlacionado com o *input* “área do terminal”, indicando que existe redundância. Também pode-se eliminar o *input* “comprimento da pista” pois ele apresenta baixa correlação com todos os *outputs*,

indicando assim que esse *input* não é uma variável explicativa. Por fim, é possível eliminar o *output* “movimentação de aeronaves” que é fortemente correlacionado com o *output* “movimentação de passageiros”, indicando novamente a presença de redundância. Desse modo, a eficiência será analisada utilizando-se três *inputs* (área do pátio, capacidade do terminal e número de posições de estacionamento de aviões) e dois *outputs* (movimentação de carga e de passageiros). O Quadro 19 apresenta os dados de *inputs* e *outputs* dos 26 aeroportos que serão efetivamente utilizados na análise.

Nome	Inputs			Outputs			
	Capac. do terminal (nº pessoas)	Área do terminal (m ²)	Posições de estac. de aviões	mov carga (kilos)		Mov. Passageiros (mil)	
				2004	2005	2004	2005
Belém	2.700.000	33.225	11	19.412.111	19.755.648	1.330.965	1.523.714
Macapá	170.000	2.914	15	2.703.907	2.702.682	392.775	414.481
Boa Vista	675.000	4.958	7	718.135	690.777	114.023	144.486
Cruzeiro do Sul	135.000	515	3	2.372.317	1.595.839	44.640	60.910
Manaus	3.520.000	46.266	15	135.337.310	13.9958.553	1.368.968	1.508.022
Porto Velho	920.000	8.540	16	4.000.813	2.717.996	233.187	293.895
Rio Branco	320.000	4.292	29	1.924.475	2.172.671	158.096	206.637
Brasília	7.400.000	90.100	32	65.777.657	83.811.080	9.926.786	9.426.569
Campo Grande	900.000	6.000	25	4.264.748	3.637.516	516.494	652.150
Corumbá	230.000	1.564	14	265.442	240.277	29.303	39.900
Várzea Grande	580.000	5.600	27	5.968.189	4.078.599	704.567	880.256
Curitiba	4.000.000	45.000	18	27.484.969	24.616.883	2.840.349	3.393.079
Foz de Iguaçu	2.000.000	16.000	23	768.815	600.387	598.711	818.512
Florianópolis	1.100.000	8.703	6	6.243.901	8.549.436	1.382.577	1.548.833
Bagé	40.000	480	7	97.494	90.406	2.461	3.560
Porto Alegre	6.100.000	53.140	16	37.024.689	36.904.725	3.215.545	3.521.204
Pelotas	130.000	1.000	8	192.101	290.200	1.155	1.169
Uruguaiana	100.000	800	12	38.972	3.7023	859	716
Fortaleza	3.000.000	38.500	14	31.504.199	35.361.710	2.317.869	2.774.240
Maceió	1.200.000	22.000	17	2.361.130	2.147.334	656.104	765.582
Natal	1.500.000	11.560	25	9.386.955	10.144.374	1.127.952	1.299.144
Recife	5.000.000	52.000	26	49.479.223	56.764.639	3.173.672	3.604.652
Salvador	6.000.000	69.750	24	72.956.166	73.057.545	4.145.371	4.554.572
Guarulhos	16.500.000	179.790	66	435.593.673	470.944.200	12.940.193	15.834.797
Congonhas	12.000.000	51.535	25	37.890.966	43.244.760	13.611.227	17.147.628
Galeão	15.000.000	280.681	53	93.776.891	84.814.578	6.024.930	8.657.139

Quadro 19 - Dados efetivamente utilizados na análise de eficiência dos aeroportos.

6.2 Seleção das Técnicas, Modelos, Perspectivas e ferramenta computacional.

Nesse estudo de caso desejou-se obter a máxima quantidade possível de informações relevantes e para tal foi necessário um grande número de perspectivas, modelos e técnicas. Para a escolha adequada foi necessário considerar o tipo de dados disponível e o tipo de informações que se desejava obter (veja seção 3.2.3).

Inicialmente, concluiu-se que, apesar de proporcionar algumas informações interessantes, a utilização de técnicas paramétricas seria inviável nesse caso (devido ao grande número de *outputs* que está sendo considerado) e com isso pôde-se partir diretamente para as técnicas não-paramétricas. A quantidade de DMUs (são 26 aeroportos) possibilita que se utilize a Análise por Envoltória de Dados que é uma técnica mais completa que a dos Números Índices. Porém, alguns Números Índices como o índice de Malmquist e o índice de Törnqvist podem trazer informações relevantes que o DEA não permite obter. O índice Malmquist possibilitará a determinação da evolução produtividade ao longo dos anos enquanto os outros números índices possibilitarão uma comparação direta entre a DMU mais e menos eficiente. A perspectiva utilizada para o cálculo do índice Malmquist será a perspectiva DEA, aproveitando os recursos de *software* já disponíveis.

Como todos os *inputs* se referem a infra-estrutura dos aeroportos e como a infra-estrutura é um insumo de longo prazo que não pode ser alterado sem que isso demande uma quantidade enorme de investimentos, serão realizadas análises apenas para a orientação aos *outputs*, o que descarta os modelos Aditivos e Multiplicativos (que apresentam uma orientação mista) e os modelos CCR e BCC orientados aos *inputs*. Para esse caso em específico, pode-se supor com relativa confiança que todas as variáveis de *inputs* e de *outputs* são controláveis, eliminando assim, a necessidade de se lidar com variáveis

ambientais; além disso, não serão utilizadas restrições aos pesos, pois a fronteira invertida já poderá eliminar possíveis distorções nos resultados e não fará sentido falar-se em fronteira difusa visto que todas as variáveis são determinadas com precisão. Sobram então, os modelos CCR e BCC orientados aos *outputs*, utilizados nas formas Primal e Dual, e com as fronteiras clássica e invertida sendo que, essa série modelos e perspectivas possibilitarão as seguintes informações: (a) a Eficiência total, técnica e de escala; (b) as metas das DMUs ineficientes e os seus *benchmarks*; (c) as utilidades dos *inputs* e *outputs* e; (d) um índice combinado de eficiência que permitirá desempates e trará a DMU que é mais eficiente de forma mais equilibrada.

Para a aplicação do conjunto de modelos e perspectivas ligados ao DEA será utilizada a ferramenta SIAD em conjunto com o solver do Excel (veja a seção 3.2.4). O principal motivo dessa escolha é a simplicidade e a disponibilidade desses softwares, visto que o primeiro está disponível para *download* gratuito (no site www.uff.br/decisao) e o segundo faz parte do pacote do Office que está presente na maior parte dos computadores. Nos Números Índices, por sua vez, em todos os cálculos e fórmulas foi utilizado o Excel.

6.3. Resultado da aplicação das Técnicas, Modelos e Perspectivas

Nesse item será apresentado, interpretado e comentado os diferentes resultados provenientes das várias técnicas, modelos e perspectivas de análise de eficiência produtiva. Esses resultados serão apresentados em 6 etapas: (a) as eficiências total, técnica e de escala de cada aeroporto, (b) as metas e os *benchmarks* dos aeroportos ineficientes, (c) as utilidades dos *inputs* e *outputs* dos 26 aeroportos selecionados, (d) a apuração do aeroporto mais eficiente dentre os eficientes com a fronteira invertida, (e) o índice Malmquist e suas duas componentes (alterações de tecnologia - AT - e alterações de eficiência - AE) de cada

aeroporto e por fim, (f) a comparação, por meio dos números índices, entre os aeroportos mais e menos eficientes segundo a classificação obtida pelo índice combinado.

6.3.1 Eficiência total, técnica e de escala

O primeiro resultado interessante de ser comentado é a respeito dos índices de eficiência total, técnica e de escala (cujas definições foram apresentadas na seção 2.7.3) dos 26 aeroportos selecionados nos 2 anos considerados (2004 e 2005). Para coleta dessas eficiências bastou a aplicação direta, com a fronteira clássica, dos modelos CCR e BCC (ver seção 4.1 página 73), sendo que o modelo CCR calculou a eficiência total e o BCC a eficiência técnica. A eficiência de escala foi obtida dividindo-se o índice da eficiência total pelo da eficiência técnica, ou seja, a eficiência do CCR pela do BCC. O Quadro 20 apresenta esses resultados em sua forma percentual:

Nome	Eficiência total (CCR)		Eficiência técnica (BBC)		Eficiência de escala	
	2004	2005	2004	2005	2004	2005
Belém	45,0%	46,3%	48,8%	46,5%	92,1%	99,6%
Macapá	100%	100%	100%	100%	100%	100%
Boa Vista	13,7%	14,4%	14,2%	15,3%	96,5%	93,9%
Cruzeiro do Sul	100%	100%	100%	100%	100%	100%
Manaus	100%	100%	100%	100%	100%	100%
Porto Velho	24,3%	21,9%	24,4%	21,9%	99,7%	99,8%
Rio Branco	31,2%	35,9%	31,4%	36,0%	99,4%	99,8%
Brasília	100%	97,4%	100%	98,5%	100%	98,8%
Campo Grande	50,0%	48,7%	50,5%	49,2%	98,9%	99,1%
Corumbá	11,3%	11,8%	12,0%	13,6%	94,2%	86,7%
Várzea Grande	84,6%	82,0%	86,6%	89,3%	97,7%	91,9%
Curitiba	58,2%	62,9%	58,2%	63,2%	100%	99,5%
Foz de Iguaçu	22,7%	26,6%	23,2%	27,3%	97,7%	97,5%
Florianópolis	100%	100%	100%	100%	100%	100%
Bagé	8,2%	8,1%	100%	100%	8,2%	8,1%
Porto Alegre	54,0%	48,6%	55,8%	50,5%	96,8%	96,2%
Pelotas	5,6%	9,6%	6,8%	11,9%	82,7%	80,8%
Uruguaiana	1,6%	1,5%	2,2%	2,3%	73,7%	66,6%
Fortaleza	67,9%	75,0%	69,3%	75,2%	98,0%	99,7%
Maceió	37,6%	40,6%	37,7%	40,9%	99,8%	99,3%
Natal	60,9%	59,4%	62,9%	61,2%	96,8%	97,1%
Recife	60,0%	61,0%	60,0%	61,3%	100%	99,5%
Salvador	67,4%	65,4%	68,6%	65,5%	98,3%	99,8%
Guarulhos	100%	100%	100%	100%	100%	100%
Congonhas	100%	100%	100%	100%	100%	100%
Galeão	39,7%	45,2%	45,2%	51,6%	87,7%	87,6%

Quadro 20 - Eficiência total, técnica e de escala dos aeroportos internacionais brasileiros

Os aeroportos que apresentam eficiência total (modelo CCR) igual a 100% são os aeroportos de: Macapá, Cruzeiro do Sul, Manaus, Florianópolis, Guarulhos e Congonhas. Esses 6 aeroportos com eficiência total, além de apresentarem eficiência técnica, operam em sua escala ótima de produção. Sendo assim, esses aeroportos estão no limite de suas produtividades e servem de referência aos demais. O aeroporto de Brasília era eficiente no ano de 2004, mas deixou de ser em 2005 tanto por fatores técnicos quanto de escala.

Quanto a eficiência técnica (modelo BCC), além dos 6 aeroportos que apresentam eficiência total, o único aeroporto a apresentar essa eficiência em 100% é o aeroporto de

Bagé (totalizando assim, 7 aeroportos com eficiência técnica). Esse aeroporto apresenta uma eficiência total muito baixa, mas como pôde ser constatado nessa análise, essa ineficiência foi causada apenas por fatores de escala e não por fatores técnicos. Isso significa que esse aeroporto opera ou muito acima ou muito abaixo da escala ótima de produção.

Já para analisar a eficiência de escala, devido a problemas com aproximação, considerou-se como eficientes todos os aeroportos que apresentassem mais de 99% em seu índice de eficiência. Esses aeroportos são, obviamente, os 6 que já apresentavam eficiência total acrescidos dos aeroportos de: Porto Velho, Rio Branco, Curitiba, Maceió e Recife, que operam em suas escalas ótimas, mas apresentam problemas técnicos.

Outra informação muito importante, e que será vital para os aeroportos com ineficiência de escala, é a respeito do tipo de retorno a escala desses aeroportos. Essa informação pode ser obtida analisando-se o coeficiente ν do modelo BCC, sendo que: quando esse coeficiente for positivo o retorno a escala será decrescente, quando ele for negativo o retorno a escala será crescente e quando ele for 0 o retorno será constante. Em nenhum caso, devido a problemas de aproximação, foi obtido um coeficiente ν igual a 0 (os zeros que aparecem no Quadro 21 foram aproximados) o que aparentemente contraria a teoria de que todas as DMUs com eficiência de escala devem possuir retornos constantes a escala. Porém, todas essas DMUs eficientes (ou muito próximas da eficiência – acima de 99%) apresentaram os coeficientes ν , como pode ser visto no Quadro 21, muito próximos a 0; sendo assim, mesmo não tendo o coeficiente ν exatamente igual a 0, essas DMUs foram consideradas como tendo retornos constantes a escala. O Quadro 21 apresenta o coeficiente ν e o tipo de retorno a escala de cada um dos 26 aeroportos dessa análise.

Nome	2004		2005	
	Coefficiente ν	Tipo de retorno a escala	Coefficiente ν	Tipo de retorno a escala
Belém	-0,26	Crescente	-0,27	Constante
Macapá	-0,01	Constante	0,04	Constante
Boa Vista	-0,57	Crescente	-1,34	Crescente
Cruzeiro do Sul	0,41	Constante	0,18	Constante
Manaus	0	Constante	-0,01	Constante
Porto Velho	0,02	Constante	0,06	Constante
Rio Branco	0,03	Constante	0,86	Constante
Brasília	0	Constante	0,02	Decrescente
Campo Grande	0,01	Decrescente	-0,06	Constante
Corumbá	-2,74	Crescente	-2,21	Crescente
Várzea Grande	0,19	Decrescente	0,22	Decrescente
Curitiba	-0,03	Constante	0,01	Constante
Foz de Iguaçu	0,25	Decrescente	0,21	Decrescente
Florianópolis	0	Constante	-0,08	- Constante
Bagé	-26,88	Crescente	-12,26	Crescente
Porto Alegre	-0,37	Crescente	-0,42	Crescente
Pelotas	-7,30	Crescente	-4,92	Crescente
Uruguaiiana	-32,44	Crescente	-38,60	Crescente
Fortaleza	-0,13	Crescente	0,01	Constante
Maceió	-0,21	Constante	0,23	Constante
Natal	0,12	Decrescente	0,14	Decrescente
Recife	0	Constante	0,05	Constante
Salvador	-0,01	Crescente	0	Constante
Guarulhos	0	Constante	0	Constante
Congonhas	0	Constante	0,01	Constante
Galeão	2,21	Decrescente	1,94	Decrescente

Quadro 21 - Tipo de retorno a escala dos aeroportos

A análise do tipo de retorno a escala será de particular importância para os aeroportos que apresentam eficiência de escala muito baixa (abaixo de 90%) que estão destacados em vermelho no Quadro 21. Dentre esses 5 aeroportos destacados, os aeroportos de Pelotas, Uruguaiiana, Corumbá e Bagé (que possui uma eficiência de escala baixíssima – em torno de 8%) apresentam retornos crescentes à escala, enquanto o aeroporto do Galeão é o único que apresenta retornos decrescentes. Com isso, pode-se concluir que os aeroportos de Pelotas, Uruguaiiana, Corumbá e Bagé, poderiam aumentar sua eficiência produtiva simplesmente aumentando sua escala de produção sem alterações na eficiência técnica; o

problema é que, nessa análise em específico, aumentar a escala de produção significa ampliar a infra-estrutura do aeroporto, o que demanda pesados investimentos (para Bagé, porém, esse é o único caminho possível para se aumentar a eficiência). O caso do aeroporto do Galeão é ainda mais complicado, pois, para aumentar a eficiência, ele teria de diminuir sua escala de produção, o que significaria que ele teria de eliminar parte de sua infra-estrutura, algo totalmente impensável.

Com isso, concluiu-se o primeiro conjunto de análises proporcionadas pelas técnicas de análise de eficiência. A partir de agora, todas as outras análises que serão realizadas vão se referir apenas ao modelo BCC e ao ano de 2005. O fato da eficiência total (modelo CCR) estar sendo descartada nas outras análises é justamente por causa da dificuldade de se aumentar e diminuir a escala de produção de aeroportos sendo que, com isso, o interesse maior, passa a ser com relação a eficiência técnica, que é proporcionada pelo modelo BCC.

6.3.2 Metas e *Benchmarks*

Após serem determinados e analisados os índices de eficiência, pode-se partir para a análise de outros detalhes que são proporcionados pelas diferentes perspectivas da Análise por Envoltória de Dados. A perspectiva Dual (ver seção 4.2.4), por exemplo, proporciona que se verifique tanto as metas para que as DMUs ineficientes se tornem eficientes quanto quais DMUs eficientes podem servir de *benchmarks* para essas DMUs ineficientes. Ambas as informações são baseadas nas variáveis λ_k que integram a perspectiva Dual. Essas variáveis que relacionam os aeroportos entre si estão representadas no Quadro 22. A cada aeroporto foi atribuído um número que identifica o seu correspondente λ_k .

Nome	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}	λ_{11}	λ_{12}	λ_{13}	λ_{14}	λ_{15}	λ_{16}	λ_{17}	λ_{18}	λ_{19}	λ_{20}	λ_{21}	λ_{22}	λ_{23}	λ_{24}	λ_{25}	λ_{26}	
1. Belém	0	0	0	0,10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,77	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,07	0,06	0	
2. Macapá	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3. Boa Vista	0	0,21	0	0,37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,01	0	
4. Cruzeiro do Sul	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5. Manaus	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
6. Porto Velho	0	0,92	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,03	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,02	0,04	0	
7. Rio Branco	0	0,99	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,007	0,003	0	
8. Brasília	0	0,44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,14	0,42	0	
9. Campo Grande	0	0,69	0	0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,006	0,05	0	
10. Corumbá	0	0,23	0	0,43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,01	0	
11. Várzea Grande	0	0,97	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,001	0,03	0	
12. Curitiba	0	0,48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,05	0,23	0	
13. Foz do Iguaçu	0	0,85	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,15	0	
14. Florianópolis	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
15. Bagé	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
16. Porto Alegre	0	0	0	0,23	0,40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,37	0
17. Pelotas	0	0	0	0,55	0,01	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
18. Uruguaiiana	0	0	0	0,39	0,007	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,61	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
19. Fortaleza	0	0,19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,65	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,08	0,08	0	
20. Maceió	0	0,91	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,09	0	
21. Natal	0	0,90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,02	0,08	0	
22. Recife	0	0,66	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,18	0,16	0	
23. Salvador	0	0,23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,21	0,17	0	
24. Guarulhos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
25. Congonhas	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
26. Galeão	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,28	0,72	0	

Quadro 22 - Resultado das variáveis λ_k

Pela análise direta dos λ_k , pode-se determinar os *benchmarks* das DMUs ineficientes da seguinte maneira: (a) caso o valor da variável λ_k correspondente a uma DMU seja 0, ela não será um *benchmark* para a DMU que se está analisando (como por exemplo o aeroporto de Macapá para o de Belém); (b) por outro lado, caso esse valor seja diferente de 0, esse aeroporto será um *benchmark* para o aeroporto analisado (como o aeroporto de Macapá para o de Boa Vista). As variáveis λ_k podem ser interpretadas como um coeficiente de importância do *benchmark* para a DMU analisada sendo que, quanto maior o λ_k mais importante será o *benchmark* k para essa DMU. Pode-se notar, pelo Quadro 22, que todas as DMUs eficientes apresentam valor 0 em todas as variáveis λ_k , com exceção daquela correspondente a ela própria que apresenta valor 1. O Quadro 23 apresenta a lista dos aeroportos que servem de *benchmarks* para cada um dos aeroportos ineficientes analisados.

DMU (Aeroportos)	Unidades <i>Benchmarks</i>	DMU (Aeroportos)	Unidades <i>Benchmarks</i>
Belém	Cruzeiro do Sul, Florianópolis, Guarulhos, Congonhas	Florianópolis	Eficiente
Macapá	Eficiente	Bagé	Eficiente
Boa Vista	Macapá, Cruzeiro do Sul, Florianópolis, Congonhas	Porto Alegre	Cruzeiro do Sul, Manaus, Congonhas
Cruzeiro do Sul	Eficiente	Pelotas	Cruzeiro do Sul, Manaus e Bagé
Manaus	Eficiente	Uruguaiana	Cruzeiro do Sul, Manaus e Bagé
Porto Velho	Macapá, Brasília, Florianópolis, Guarulhos, Congonhas	Fortaleza	Macapá, Florianópolis, Guarulhos, Congonhas
Rio Branco	Macapá, Guarulhos, Congonhas	Maceió	Macapá, Congonhas
Brasília	Eficiente	Natal	Macapá, Guarulhos, Congonhas
Campo Grande	Macapá, Cruzeiro do Sul, Guarulhos, Congonhas	Recife	Macapá, Guarulhos, Congonhas
Corumbá	Macapá, Florianópolis, Bagé, Cruzeiro do Sul	Salvador	Macapá, Florianópolis, Guarulhos, Congonhas
Várzea Grande	Macapá, Guarulhos, Congonhas	Guarulhos	Eficiente
Curitiba	Macapá, Florianópolis, Guarulhos, Congonhas	Congonhas	Eficiente
Foz de Iguaçu	Macapá, Congonhas	Galeão	Guarulhos, Congonhas

Quadro 23 - *Benchmarks* dos aeroportos

Com as variáveis λ_k , é possível determinar também as metas das DMUs ineficientes. A meta de uma DMU é a combinação linear dos *inputs* (ou dos *outputs*) de seus *benchmarks*, sendo que os coeficientes dessa combinação linear são as variáveis λ_k . O Quadro 24 mostra as metas dos aeroportos da análise comparados ao valor inicial de seus *inputs* e *outputs*.

Nome	Inputs						Outputs			
	Capac. do terminal		Área do terminal		Posições de estac. de aviões		mov carga (kilos)		Mov. passageiros	
	Atual	Meta	Atual	Meta	Atual	Meta	Atual	Meta	Atual	Meta
Belém	2.700.000	2.700.000	33.225	22.364	11	11	19.755.648	42.508.250	1.523.714	3.278.577
Macapá	170.000	170.000	2.914	2.914	15	15	2.702.682	2.702.682	414.481	414.481
Boa Vista	675.000	675.000	4.958	4.958	7	7	690.777	5.154.165	144.486	942.289
Cruzeiro do Sul	135.000	135.000	515	515	3	3	1.595.839	1.595.839	60.910	60.910
Manaus	3.520.000	3.520.000	46.266	46.266	15	15	139.958.553	139.958.553	1.508.022	1.508.022
Porto Velho	920.000	920.000	8.540	7.925	16	16	2.717.996	12.385.658	293.895	1.339.252
Rio Branco	320.000	320.000	4.292	4.281	29	15	2.172.671	6.036.698	206.637	574.134
Brasília	7.400.000	7.400.000	90.100	47.962	32	26	83.811.080	85.073.120	9.426.569	9.568.516
Campo Grande	900.000	900.000	6.000	6.000	25	13	3.637.516	7.394.706	652.150	1.325.756
Corumbá	230.000	230.000	1.564	1.564	14	7	240.277	1.768.582	39.900	293.688
Várzea Grande	580.000	580.000	5.600	4.722	27	15	4.078.599	4.567.836	880.256	985.845
Curitiba	4.000.000	4.000.000	45.000	2.5106	18	18	24.616.883	38.963.367	3.393.079	5.370.533
Foz de Iguaçu	2.000.000	2.000.000	16.000	10.435	23	17	600.387	8.974.195	818.512	3.002.956
Florianópolis	1.100.000	1.100.000	8.703	8.703	6	6	8.549.436	8.549.436	1.548.833	1.548.833
Bagé	40.000	40.000	480	480	7	7	90.406	90.406	3.560	3.560
Porto Alegre	6.100.000	5.896.006	53.140	37.921	16	16	36.904.725	73.041.695	3.521.204	6.969.154
Pelotas	130.000	130.000	1.000	1.000	8	5	290.200	2.443.404	1.169	51.368
Uruguaiana	100.000	100.000	800	800	12	6	37.023	1.608.306	716	35.789
Fortaleza	3.000.000	3.000.000	38.500	24.575	14	14	35.361.710	47.003.074	2.774.240	3.687.543
Maceió	1.200.000	1.200.000	22.000	7.147	17	16	2.147.334	6.232.550	765.582	1.871.382
Natal	1.500.000	1.500.000	11.560	10.859	25	17	10.144.374	16.572.099	1.299.144	2.122.314
Recife	5.000.000	5.000.000	52.000	42.292	26	26	56.764.639	92.602.267	3.604.652	5.880.403
Salvador	6.000.000	6.000.000	69.750	51.029	24	24	73.057.545	111.547.142	4.554.572	69.54.100
Guarulhos	16.500.000	16.500.000	179.790	179.790	66	66	470.944.200	470.944.200	15.834.797	15.834.797
Congonhas	12.000.000	12.000.000	51.535	51.535	25	25	43.244.760	43.244.760	17.147.628	17.147.628
Galeão	15.000.000	13.274.244	280.681	87.852	53	37	84.814.578	164.354.432	8.657.139	16.775.880

Quadro 24 – Metas dos aeroportos

Para facilitar a análise e a visualização dos dados do Quadro 24, o Quadro 25 indica qual a variação percentual que cada *input* e cada *output* deve sofrer para que o aeroporto indicado alcance a eficiência.

Nome	Inputs			Outputs	
	Capac. do terminal	Área do terminal	Posições de estac. de aviões	mov carga (kilos)	Mov. passageiros
Belém	0%	-32,69%	0%	115%	115,17%
Macapá	0%	0%	0%	0%	0%
Boa Vista	0%	0%	0%	646,14%	552,17%
Cruzeiro do Sul	0%	0%	0%	0%	0%
Manaus	0%	0%	0%	0%	0%
Porto Velho	0%	-7,20%	0%	355,69%	355,69%
Rio Branco	0%	0%	-48,28%	177,85%	177,85%
Brasília	0%	-46,77%	-18,75%	1,51%	1,51%
Campo Grande	0%	0%	-48,00%	103,29%	103,29%
Corumbá	0%	0%	-50,00%	636,06%	636,06%
Várzea Grande	0%	-15,68%	-44,44%	12,00%	12,00%
Curitiba	0%	-44,21%	0%	58,28%	58,28%
Foz de Iguaçu	0%	-34,78%	-26,09%	1.394,74%	266,88%
Florianópolis	0%	0%	0%	0%	0%
Bagé	0%	0%	0%	0%	0%
Porto Alegre	-3,34%	-28,64%	0%	97,92%	97,92%
Pelotas	0%	0%	-37,50%	741,97%	4.294,18%
Uruguaiiana	0%	0%	-50,00%	4.244,07%	4.898,46%
Fortaleza	0%	-36,17%	0%	32,92%	32,92%
Maceió	0%	-67,51%	-5,88%	190,25%	144,44%
Natal	0%	-6,06%	-32,00%	63,36%	63,36%
Recife	0%	-18,67%	0%	63,13%	63,13%
Salvador	0%	-26,84%	0%	52,68%	52,68%
Guarulhos	0%	0%	0%	0%	0%
Congonhas	0%	0%	0%	0%	0%
Galeão	-11,51%	-68,70%	-30,19%	93,78%	93,78%

Quadro 25 – Variação percentual dos *inputs* e *outputs* em relação as suas metas

Como pode ser constatado pelo Quadro 25, as DMUs menos ineficientes como Foz do Iguaçu e Uruguaiiana, são as que possuem as metas mais difíceis para atingirem a eficiência. Por outro lado, as DMUs eficientes apresentam todos os coeficientes de aumento dos *outputs* e redução dos *inputs* iguais a 0.

Apesar dessas metas terem sido calculadas com um modelo BCC orientado ao *output*, foram dadas, para algumas DMUs, sugestões de redução nos *inputs*, algo que inicialmente não era desejado. Porém, além dessas sugestões de redução nos *inputs* não predominarem em relação às de aumento nos *outputs*, elas ainda são, como pode ser constatado pelo Quadro 25, de intensidade bem menor. Esse fato, como já foi explicado

no Capítulo 4 na seção 4.2.4, é causado pela presença das folgas, que são distorções na fronteira de eficiência linear por partes.

O Quadro 26 mostra as variáveis de folga obtidas no modelo BCC Dual orientado ao *output* que explicam as distorções comentadas acima. Pode-se notar que, apesar das folgas se concentrarem nos *inputs*, já que o modelo é orientado ao *output*, alguns *outputs* também apresentam folgas. Também se pode notar que a magnitude da folga dos *inputs* está diretamente ligada as reduções (ver Quadro 25) sugeridas para esses *inputs* (basta comparar Maceió e Natal, por exemplo).

Nome	Inputs			Outputs	
	Capac. do terminal	Área do terminal	Posições de estac. de aviões	mov carga (kilos)	Mov. passageiros
Belém	0	1.0861,3	0	0	0
Macapá	0	0	0	0	0
Boa Vista	0	0	0	649.150,3	0
Cruzeiro do Sul	0	0	0	0	0
Manaus	0	0	0	0	0
Porto Velho	0	615,31	0	0	0
Rio Branco	0	10,75	13,62	0	0
Brasília	0	42.138,03	5,69	0	0
Campo Grande	0	0	12,15	0	0
Corumbá	0	0	6,70	0	0
Várzea Grande	0	878,43	11,61	0	0
Curitiba	0	19.893,73	0	0	0
Foz de Iguaçu	0	5.564,75	6,45	6.771.496,13	0
Florianópolis	0	0	0	0	0
Bagé	0	0	0	0	0
Porto Alegre	203.994,46	15.218,62	0	0	0
Pelotas	0	0	3,10	0	41.525,16
Uruguaiana	0	0	6,49	0	4.685,66
Fortaleza	0	13.925,01	0	0	0
Maceió	0	14.852,73	1,13	983.624,95	0
Natal	0	700,76	8,04	0	0
Recife	0	9.707,78	0,30	0	0
Salvador	0	18.721,19	0	0	0
Guarulhos	0	0	0	0	0
Congonhas	0	0	0	0	0
Galeão	1.725.755,82	192.828,63	16,39	0	0

Quadro 26 – Folgas dos *inputs* e *outputs*

As folgas não terão nenhuma aplicação prática; elas foram calculadas apenas para ilustrar o motivo de terem sido sugeridas mudanças para os *inputs* mesmo o problema tendo uma orientação aos *outputs*.

6.3.3 Coeficientes de utilidade

Para se determinar os coeficientes de utilidade, como já mencionado na seção 4.2.3, deve-se utilizar a perspectiva Primal e normalizar os dados dos *inputs* e dos *outputs*. Para essa normalização, deve-se localizar entre todas as DMUs os maiores valores de *outputs* e de *inputs* e dividir os *inputs* e *outputs* dessas DMUs por esse valor. Fazendo-se isso, todos os *inputs* e *outputs* ficam limitados entre 0 e 1, como pode ser notado no Quadro 27

Nome	Inputs			Outputs			
	Capac. do terminal	Área do terminal	Posições de estac. de aviões	mov carga (kilos)		Mov. passageiros	
				2004	2005	2004	2005
Belém	0,1636	0,1184	0,1667	0,0419	0,0889	0,1636	0,1184
Macapá	0,0103	0,0104	0,2273	0,0057	0,0242	0,0103	0,0104
Boa Vista	0,0409	0,0177	0,1061	0,0015	0,0084	0,0409	0,0177
Cruzeiro do Sul	0,0082	0,0018	0,0455	0,0034	0,0036	0,0082	0,0018
Manaus	0,2133	0,1648	0,2273	0,2972	0,0879	0,2133	0,1648
Porto Velho	0,0558	0,0304	0,2424	0,0058	0,0171	0,0558	0,0304
Rio Branco	0,0194	0,0153	0,4394	0,0046	0,0121	0,0194	0,0153
Brasília	0,4485	0,3210	0,4848	0,1780	0,5497	0,4485	0,3210
Campo Grande	0,0545	0,0214	0,3788	0,0077	0,0380	0,0545	0,0214
Corumbá	0,0139	0,0056	0,2121	0,0005	0,0023	0,0139	0,0056
Várzea Grande	0,0352	0,0200	0,4091	0,0087	0,0513	0,0352	0,0200
Curitiba	0,2424	0,1603	0,2727	0,0523	0,1979	0,2424	0,1603
Foz de Iguaçu	0,1212	0,0570	0,3485	0,0013	0,0477	0,1212	0,0570
Florianópolis	0,0667	0,0310	0,0909	0,0182	0,0903	0,0667	0,0310
Bagé	0,0024	0,0017	0,1061	0,0002	0,0002	0,0024	0,0017
Porto Alegre	0,3697	0,1893	0,2424	0,0784	0,2053	0,3697	0,1893
Pelotas	0,0079	0,0036	0,1212	0,0006	0,0001	0,0079	0,0036
Uruguaiana	0,0061	0,0029	0,1818	0,0001	0,00004	0,0061	0,0029
Fortaleza	0,1818	0,1372	0,2121	0,0751	0,1618	0,1818	0,1372
Maceió	0,0727	0,0784	0,2576	0,0046	0,0446	0,0727	0,0784
Natal	0,0909	0,0412	0,3788	0,0215	0,0758	0,0909	0,0412
Recife	0,3030	0,1853	0,3939	0,1205	0,2102	0,3030	0,1853
Salvador	0,3636	0,2485	0,3636	0,1551	0,2656	0,3636	0,2485
Guarulhos	1,0000	0,6405	1,0000	1,0000	0,9234	1,0000	0,6405
Congonhas	0,7273	0,1836	0,3788	0,0918	1,0000	0,7273	0,1836
Galeão	0,9091	1,0000	0,8030	0,1801	0,5049	0,9091	1,0000

Quadro 27 - Dados de *inputs* e *outputs* normalizados

Com os dados normalizados, as variáveis u_i e v_j dos modelos Primais perdem a função de compensar a diferença de grandeza entre as unidades de medida e passam a possuir a função exclusiva de representar as utilidades dos *inputs* e *outputs* analisados. O Quadro 28 apresenta as utilidades de cada *input* e *output* de cada DMU obtidas diretamente a partir das variáveis u_i e v_j do modelo BCC Primal orientado ao *output* com os dados normalizados.

Nome	Inputs			Outputs	
	Capac. do terminal	Área do terminal	Posições de estac. de aviões	Mov carga (kilos)	Mov. passageiros
Belém	9,28	0	5,41	7,15	7,88
Macapá	51,87	0	1,85	19,93	36,64
Boa Vista	151,09	34,40	10,08	0	118,68
Cruzeiro do Sul	99,46	284,99	0	182,33	107,58
Manaus	0	6,05	0	3,12	0,82
Porto Velho	69,81	0	2,49	26,83	49,31
Rio Branco	98,71	0	0	35,49	69,40
Brasília	2,22	0	0	0,80	1,56
Campo Grande	18,08	51,82	0	33,15	19,56
Corumbá	327,47	897,76	0	227,36	379,91
Várzea Grande	25,51	0	0	9,17	17,93
Curitiba	6,26	0	0,22	2,40	4,42
Foz de Iguaçu	28,51	0	0	0	20,95
Florianópolis	11,85	7,32	0,69	8,50	9,36
Bagé	2.781,25	3.811,43	0	3.639,83	1.451,15
Porto Alegre	0	0	9,91	5,31	2,84
Pelotas	861,12	1.841,25	0	1.622,83	0
Uruguiana	6.749,79	14.432,39	0	12.720,31	0
Fortaleza	6,99	0	0,25	2,68	4,94
Maceió	30,48	0	0	0	22,40
Natal	16,39	0	0	5,89	11,52
Recife	5,23	0	0	1,88	3,68
Salvador	4,04	0	0,14	1,55	2,86
Guarulhos	0,96	0	0,03	0,37	0,68
Congonhas	1,36	0	0	0,49	0,96
Galeão	0	0	0	0,16	1,92

Quadro 28 – Coeficientes de utilidade

Pode-se notar, analisando o Quadro 28, que a magnitude das utilidades muda muito de DMU para DMU. Porém, mesmo assim, algumas conclusões interessantes

podem ser obtidas com esses dados como, por exemplo, que o *input* “posições de estacionamento de aviões” possui utilidade baixa (e muitas vezes 0) para a maioria dos aeroportos, o que indica sua falta de importância para eficiência.

Outras conclusões interessantes podem ser obtidas com esses dados como, por exemplo, que para os aeroportos de Foz do Iguaçu, Boa Vista e Maceió, o *output* “movimentação de passageiros” é bem mais importante que o *output* “movimentação de carga” (que foi atribuído como tendo utilidade 0); já para os aeroportos de Pelotas e Uruguaiana a o *output* “movimentação de carga” é bem mais importante que o *output* “movimentação de passageiros” (que também foi atribuído como tendo utilidade 0). Essas informações são interessantes para que os aeroportos definam o seu foco, ou seja, definam quais *inputs* ou *outputs* eles devem atacar prioritariamente para melhorarem suas eficiências.

Como também pode ser notado pelo Quadro 28, várias DMUs atribuíram utilidades 0 a seus *inputs* e *outputs*, o que contraria a teoria econômica e é a principal razão de tantos empates entre as DMUs (situação que a fronteira invertida tenta resolver).

6.3.4 Fronteira invertida e Eficiência Combinada

O índice combinado é uma tentativa de desempate entre as várias DMUs consideradas eficientes na fronteira clássica (ver seção 4.2.6). O índice combinado indica as DMUs que são mais eficientes de forma mais equilibrada, tendo um desempenho satisfatório tanto nos quesitos em que ela vai melhor quanto nos que ela vai pior. Para calcular tal índice deve-se, antes de tudo, calcular a eficiência da DMU pela fronteira invertida e para tal são realizados os seguintes passos, todos indicados no Quadro 29: (a) troca de lugar dos *inputs* com os *outputs* e cálculo do índice de ineficiência (I); (b) inversão do valor do índice de ineficiência ($1/I$); (c) normalização do

valor encontrado no passo anterior e apuração da eficiência pela fronteira invertida. O índice combinado, que também está indicado no Quadro 29, é a média aritmética da eficiência da fronteira clássica com a da fronteira invertida.

Nome	Eficiência fronteira clássica	Índice de Ineficiência	Inverso da Ineficiência	Eficiência da fronteira invertida	Eficiência Combinada
Belém	0,465	0,843	1,186	0,406	0,436
Macapá	1	0,515	1,944	0,666	0,833
Boa Vista	0,153	1	1	0,343	0,248
Cruzeiro do Sul	1	0,380	2,630	0,901	0,950
Manaus	1	1	1	0,343	0,671
Porto Velho	0,219	1	1	0,343	0,281
Rio Branco	0,36	1	1	0,343	0,351
Brasília	0,985	0,607	1,647	0,564	0,775
Campo Grande	0,492	0,887	1,128	0,386	0,439
Corumbá	0,136	1	1	0,343	0,239
Várzea Grande	0,893	0,914	1,095	0,375	0,634
Curitiba	0,632	0,690	1,450	0,497	0,564
Foz de Iguaçu	0,273	1	1	0,343	0,308
Florianópolis	1	0,343	2,920	1	1
Bagé	1	0,572	1,748	0,599	0,799
Porto Alegre	0,505	0,938	1,066	0,365	0,435
Pelotas	0,119	1	1	0,343	0,231
Uruguaiana	0,023	1	1	0,343	0,183
Fortaleza	0,752	0,568	1,761	0,603	0,678
Maceió	0,409	1	1,000	0,343	0,376
Natal	0,612	0,807	1,239	0,424	0,518
Recife	0,613	0,760	1,316	0,451	0,532
Salvador	0,655	0,724	1,381	0,473	0,564
Guarulhos	1	1	1	0,343	0,671
Congonhas	1	1	1	0,343	0,671
Galeão	0,516	1	1	0,343	0,429

Quadro 29 - Eficiência da fronteira invertida e Eficiência combinada

O principal resultado desse índice combinado é que ele atribuiu valores diferentes para a eficiência de todas as DMUs analisadas o que permitiu vários desempates, principalmente entre os 7 aeroportos que tinham sido considerados eficientes na fronteira clássica (Congonhas, Guarulhos, Macapá, Florianópolis, Bagé, Manaus e Cruzeiro do Sul). Pôde ser apurado pelo índice combinado, que a DMU que é mais eficiente de forma mais equilibrada é o aeroporto de Florianópolis e que a que é menos eficiente é o aeroporto de Uruguaiana. O Quadro 30 apresenta os 26 aeroportos

analisados em ordem decrescente de suas eficiências combinadas para que assim, se possa observar o *ranking* de eficiências entre esses aeroportos.

Posição	Aeroporto	Eficiência combinada
1º	Florianópolis	1
2º	Cruzeiro do Sul	0,95
3º	Macapá	0,833
4º	Bagé	0,799
5º	Brasília	0,775
6º	Fortaleza	0,678
7º	Manaus	0,671
8º	Guarulhos	0,671
9º	Congonhas	0,671
10º	Várzea Grande	0,634
11º	Salvador	0,564
12º	Curitiba	0,564
13º	Recife	0,532
14º	Natal	0,518
15º	Campo Grande	0,439
16º	Belém	0,436
17º	Porto Alegre	0,435
18º	Galeão	0,429
19º	Maceió	0,376
20º	Rio Branco	0,351
21º	Foz de Iguaçu	0,308
22º	Porto Velho	0,281
23º	Boa Vista	0,248
24º	Corumbá	0,239
25º	Pelotas	0,231
26º	Uruguaiana	0,183

Quadro 30 – Ranking de eficiência combinada entre os aeroportos

6.3.5 Índice Malmquist, alterações tecnológicas e alterações de eficiência.

O índice Malmquist (que pertence à técnica dos Números Índices) calcula a eficiência entre apenas dois pontos: a DMU no passado e a DMU no presente (ver seção 5.5). Uma grande vantagem desse índice é que ele permite separar o quanto dessa evolução na eficiência foi devido apenas à eficiência técnica e o quanto foi devido a diferenças de tecnologia.

Para se calcular o índice Malmquist, deve-se calcular uma série de distâncias: (a) a distância da DMU no passado relativa a fronteira de eficiência do passado

($D_0(x^0_v, y^0_v)$); (b) a distância da DMU no presente relativa a fronteira de eficiência do passado ($D_0(x^t_v, y^t_v)$); (c) a distância da DMU no passado relativa a fronteira de eficiência do presente ($D_t(x^0_v, y^0_v)$) e; (d) a distância da DMU no presente relativa a fronteira de eficiência do presente ($D_t(x^t_v, y^t_v)$). Para calculá-las deve-se escolher uma técnica de apoio sendo que, nesse caso, foi escolhida a técnica Análise por Envoltória de Dados, modelo BCC e orientada ao *output*; sendo assim, as parcelas da evolução na produtividade devido ao aumento da tecnologia – AT - e devido ao aumento da eficiência - AE - serão um indicativo de quais DMUs evoluíram mais em termos de eficiência técnica orientada ao *output*. O Quadro 31 apresenta as distâncias relativas dos 26 aeroportos analisados nesse trabalho.

Nome	$D_0(x^0_v, y^0_v)$	$D_0(x^t_v, y^t_v)$	$D_t(x^0_v, y^0_v)$	$D_t(x^t_v, y^t_v)$
Belém	0,488	0,540	0,421	0,465
Macapá	1	1,055	0,972	1
Boa Vista	0,142	0,176	0,124	0,153
Cruzeiro do Sul	1	1,364	1,487	1
Manaus	1	1,051	0,967	1
Porto Velho	0,244	0,250	0,217	0,219
Rio Branco	0,314	0,391	0,292	0,360
Brasília	1	1,006	1,000	0,985
Campo Grande	0,505	0,573	0,438	0,492
Corumbá	0,120	0,159	0,109	0,136
Várzea Grande	0,866	1,005	0,762	0,893
Curitiba	0,582	0,658	0,551	0,632
Foz de Iguaçu	0,232	0,317	0,199	0,273
Florianópolis	1	1,153	0,893	1
Bagé	1	1,447	1,078	1
Porto Alegre	0,558	0,590	0,480	0,505
Pelotas	0,068	0,103	0,079	0,119
Uruguiana	0,022	0,020	0,024	0,023
Fortaleza	0,693	0,814	0,637	0,752
Maceió	0,377	0,439	0,352	0,409
Natal	0,629	0,716	0,536	0,612
Recife	0,600	0,684	0,538	0,613
Salvador	0,686	0,575	0,610	0,655
Guarulhos	1	1,216	0,925	1
Congonhas	1	1,260	0,815	1
Galeão	0,452	0,644	0,365	0,516

Quadro 31 - Distâncias relativas às fronteiras de eficiência

Com as distâncias calculadas, pode-se partir para o cálculo do índice Malmquist e de suas duas parcelas: (a) as alterações na eficiência (AE) e (b) as alterações na tecnologia (AT). As fórmulas do cálculo dessas duas parcelas se encontram detalhadas no Capítulo 5 sendo que o índice Malmquist é obtido por meio da multiplicação ente AE e AT. O Quadro 32 apresenta os valores de AT, AE e do índice Malmquist dos aeroportos selecionados.

Nome	Alterações de eficiência	Alterações de tecnologia	Índice Malmquist
Belém	0,95	1,16	1,11
Macapá	1	1,04	1,04
Boa Vista	1,08	1,15	1,24
Cruzeiro do Sul	1	0,96	0,96
Manaus	1	1,04	1,04
Porto Velho	0,90	1,13	1,02
Rio Branco	1,15	1,08	1,24
Brasília	0,99	1,01	1,00
Campo Grande	0,97	1,16	1,13
Corumbá	1,13	1,13	1,29
Várzea Grande	1,03	1,13	1,17
Curitiba	1,09	1,05	1,14
Foz de Iguaçu	1,18	1,16	1,37
Florianópolis	1	1,14	1,14
Bagé	1	1,16	1,16
Porto Alegre	0,91	1,17	1,05
Pelotas	1,75	0,86	1,51
Uruguaiiana	1,05	0,89	0,93
Fortaleza	1,09	1,09	1,18
Maceió	1,08	1,07	1,16
Natal	0,97	1,17	1,14
Recife	1,02	1,12	1,14
Salvador	0,95	0,99	0,95
Guarulhos	1	1,15	1,15
Congonhas	1	1,24	1,24
Galeão	1,14	1,24	1,42

Quadro 32 - Índice Malmquist, alterações tecnológicas e alterações de eficiência.

A maior parte dos aeroportos analisados teve um aumento na produtividade entre os anos de 2004 e 2005, com exceção dos aeroportos de Uruguaiiana (que teve a maior redução), Cruzeiro do Sul e Salvador sendo que, em Uruguaiiana e Cruzeiro do Sul essa redução foi devida exclusivamente a redução na tecnologia (no aeroporto de

Uruguaiana a eficiência técnica efetiva até aumentou um pouquinho) e em Salvador foi devido tanto à tecnologia quanto à redução da eficiência técnica.

Pela análise do Quadro 32, o aeroporto que teve a maior eficiência em relação a ele próprio no passado, ou seja, o maior aumento na produtividade, foi o aeroporto do Galeão sendo que esse aumento foi devido tanto a diferença de tecnologia (principalmente) quanto ao aumento efetivo de eficiência técnica.

Vários aeroportos tiveram redução ou apenas na eficiência efetiva (Natal, Porto Alegre, Porto Velho, Belém, Brasília e Campo Grande) ou apenas na tecnologia (Cruzeiro do Sul, Uruguaiana e Pelotas), porém, na maioria deles, uma parcela acabou compensando a outra e o índice Malmquist acabou ficando maior que 1. Salvador foi único aeroporto que teve redução nas duas parcelas.

6.3.6 Outros Números índices

Os outros Números Índices - Laspeyres, Törnqvist, Paasche e Fischer [ver seções 5.1 (p. 145), 5.2 (p. 151), 5.3 (p. 154) e 5.4 (p. 155)]- serão utilizados para fazer uma comparação direta entre duas DMUs: o aeroporto de Florianópolis (que será a DMU base) e o aeroporto de Uruguaiana (que será DMU em análise). Essa comparação entre duas DMUs diferentes, o Índice Malmquist não permite fazer, e por isso devem ser utilizados outros índices. A escolha de Florianópolis e Uruguaiana para a análise se deve ao fato delas serem respectivamente as DMUs mais e menos eficientes pelo índice combinado. O Quadro 33 apresenta as informações dos *inputs* e *outputs* de cada aeroporto e suas respectivas utilidades que foram calculadas pelo DEA no item 3.3 (deve-se lembrar que esses Números Índices exigem que as utilidades sejam fornecidas *a priori*)

Aerportos	<i>Inputs</i>			<i>Outputs</i>		
	Capac. do terminal	Área do terminal	Posições de estac. de aviões	mov carga (kilos)	Mov. passageiros	
Florianópolis (base)	1100000	8703	6	8549436	1548833	Valores
Uruguaiana (análise)	100000	800	12	37023	716	
Florianópolis (base)	11,85	7,32	0,69	8,5	9,36	Utilidades
Uruguaiana (análise)	6749,79	14432,39	0	12720,31	0	

Quadro 33 – Valores e coeficientes dos *inputs* e *outputs* das DMUs base e em análise

Para o cálculo dos índices da Laspeyres, Paasche e Fischer (que é a média geométrica dos dois primeiros) deve-se, inicialmente, calcular os *inputs* e *outputs* virtuais das DMUs base (Florianópolis) e em análise (Uruguaiana) tanto com os coeficientes da DMU base (que serão utilizados no índice de Laspeyres) quanto com os da DMU em análise (utilizados no índice de Paasche). O Quadro 34 apresenta esses *inputs* e *outputs* virtuais.

Iv_{base} – coeficientes da DMU base	13.098.710,1
Iv_{DMU} – coeficientes da DMU base	1.190.864,28
Iv_{base} – coeficientes da DMU em análise	7.550.374.090
Iv_{DMU} – coeficientes da DMU em análise	686.524.912
Ov_{base} – coeficientes da DMU base	87.167.282,88
Ov_{DMU} – coeficientes da DMU base	321.397,26
Ov_{base} – coeficientes da DMU em análise	1,08751*10 ¹¹
Ov_{DMU} – coeficientes da DMU em análise	470.944.037

Quadro 34 – *Inputs* e *outputs* virtuais das DMUs base e em análise com os respectivos coeficientes

Já para o cálculo do índice Törnqvist deve-se, inicialmente, serem determinados os coeficientes W , que serão fundamentais na determinação dos pesos da média geométrica ponderada que constitui o índice Törnqvist. Os coeficientes W_{ib} e W_{i0} representam respectivamente a participação do *input* i dentro do *input* virtual da DMU base e dentro do *input* virtual da DMU em análise e os coeficientes W_{jb} e W_{j0} representam respectivamente a participação do *output* j dentro do *output* virtual da DMU base e dentro do *output* virtual da DMU em análise. O Quadro 35 apresenta os

valores correspondentes aos coeficientes W de cada *input* e de cada *output* e também apresenta a média entre os coeficientes W_{ib} e W_{i0} e entre os coeficientes W_{jb} e W_{j0} que serão os pesos das parcelas da média ponderada do índice Törnqvist.

Variável	Inputs			Outputs	
	Capac. do terminal	Área do terminal	Posições de estac. de aviões	Mov. carga	Mov. passageiros
W_{ib}	0,9951	0,0049	$3,160 \cdot 10^{-7}$	-	
W_{i0}	0,9832	0,0168	0		
$(W_{ib} + W_{i0})/2$	0,9892	0,0108	$1,580 \cdot 10^{-7}$		
W_{jb}	-			0,8336	0,1663
W_{j0}				1	0
$(W_{jb} + W_{j0})/2$				0,9168	0,0832

Quadro 35 – Participação dos *inputs* e *outputs* das DMUs base e em análise em os respectivos *inputs* e *outputs* virtuais

Após terem sido calculados os coeficientes W , pode-se prosseguir o cálculo do índice Törnqvist calculando-se as parcelas (x_{jb} / x_{j0}) e (y_{i0} / y_{ib}) de cada *input* e de cada *output* respectivamente; a seguir, essas parcelas devem ser elevadas à média dos coeficientes W , que foi encontrada no passo anterior. Por fim, o resultado das parcelas dos *inputs* elevadas a $(W_{ib} + W_{i0})/2$ e das parcelas dos *outputs* elevados a $(W_{jb} + W_{j0})/2$ devem ser multiplicadas entre si (pois é uma média geométrica), o que resultará no índice de Törnqvist. Todos esses procedimentos de cálculo estão ilustrados no Quadro 36.

Orientação aos Inputs				Orientação aos Outputs		
Variável	Capac. do terminal	Área do terminal	Posições de estac. de aviões	Variável	mov carga (kilos)	Mov. passageiros
x_{jb} (Florianópolis)	1.100.000	8703	6	y_{i0} (Florianópolis)	8549436	1548833
x_{j0} (Uruguaiana)	100.000	800	12	y_{ib} (Uruguaiana)	37023	716
x_{jb} / x_{j0}	11	10,87	0,5	(y_{i0} / y_{ib})	0,00433	0,000462
$(x_{jb} / x_{j0})^{(W_{ib} + W_{i0})/2}$	10,718	1,026	1,000	$(y_{i0} / y_{ib})^{(W_{jb} + W_{j0})/2}$	0,0068	0,5280
Multiplicação das parcelas $(x_{jb} / x_{j0})^{(W_{ib} + W_{i0})/2}$	10,9987			Multiplicação das parcelas $(y_{i0} / y_{ib})^{(W_{jb} + W_{j0})/2}$	0,0036	

Quadro 36 – Etapas para cálculo do Índice Törnqvist

O Quadro 37 apresenta os resultados dos índices de Laspeyres, Paasche, Fischer e Törnqvist para as orientações aos *inputs*, aos *outputs* e à produtividade (que é a multiplicação das outras duas). Como pode ser verificado, nesse caso em específico, a variação entre os resultados dos diferentes Números Índices é muito baixa e sendo assim, não compensaria a utilização de um índice complexo como o Törnqvist (que é mais preciso), já que os outros índices já poderiam resolver.

	Orientado ao <i>input</i>	Orientado ao <i>output</i>	Orientado a produtividade
Índice de Laspeyres	10,9993	0,0037	4,06%
Índice de Paasche	10,9980	0,0043	4,76%
Índice de Fischer	10,9986	0,0040	4,39%
Índice de Törnqvist	10,9987	0,0036	3,95%

Quadro 37 – Outros Números Índices

As orientações aos *inputs* e aos *outputs* possuem pouca relevância na prática. Por exemplo, o fato do aeroporto de Uruguaiana possuir um índice orientado ao *input* em relação à Florianópolis em torno de 11 só indica que ele utiliza bem menos *inputs* que o aeroporto de Florianópolis, o que não quer dizer nada em termos de eficiência produtiva (assim como não quer dizer nada o fato da eficiência orientada aos *outputs* ser 0,0036).

A única análise que vale a pena é a dos índices orientados a produtividade sendo que, pelo índice de Törnqvist que é o mais preciso (e por isso os outros podem ser descartados), essa eficiência é de 3,95%. Isso significa, mais ou menos, que a produtividade de Uruguaiana corresponde a 3,95% da produtividade Florianópolis.

Ao ser realizada uma comparação entre a eficiência calculada pelo DEA modelo CCR (pois a eficiência é total) e a calculada pelo índice Törnqvist, pode-se verificar que, enquanto a eficiência total de Uruguaiana em relação à Fronteira de eficiência (que leva consideração todas as DMUs) é 1,5%, a eficiência total dessa DMU apenas em relação ao aeroporto de Florianópolis é de 3,95%, um valor um pouco maior.

Capítulo 7 – Sistematização do processo de escolha das técnicas, modelos, e perspectivas de análise de eficiência.

Nesse capítulo será apresentado uma sistematização do processo de escolha entre as técnicas, modelos e perspectivas de análise de eficiência produtiva apresentados nos capítulos anteriores. Essa sistematização será baseada nas informações já apresentadas nos Capítulos 3, 4 e 5, especialmente nas seções onde se encontram as comparações entre as técnicas, modelos e perspectivas. Vale ressaltar, porém, que a escolha da melhor forma de se realizar uma análise de eficiência, ou seja, a escolha do melhor vetor técnica/modelo/perspectiva deve ser realizada por partes: (a) primeiro deve ser decidido se será utilizada uma técnica paramétrica ou não-paramétrica, (b) a seguir deve ser escolhida a técnica, (c) depois o modelo e por fim, (d) a perspectiva em seus vários níveis.

Toda essa sistematização será implementada em um sistema especialista; esse tipo de sistema possui a capacidade de extrair conclusões a partir de conhecimento previamente representado e de algumas informações requeridas ao usuário. Assim,

pretende-se a elaboração de um sistema que, a partir de algumas perguntas realizadas ao usuário, indique a melhor técnica, modelo e perspectiva a ser utilizada para solucionar o problema específico.

7.1 Sistemas especialistas

Os sistemas especialistas (SE) são uma subárea do campo de pesquisa conhecido como Inteligência Artificial (IA). Segundo Barr e Feigenbaum (1981), a inteligência artificial é a parte da ciência da computação que compreende o projeto de sistemas computacionais que exibam características associadas, quando presentes no comportamento humano, à inteligência. A IA está dividida em três áreas de pesquisa relativamente independentes: (a) o desenvolvimento de programas que leiam, falem ou entendam a linguagem humana, (b) o desenvolvimento de robôs inteligentes e (c) o desenvolvimento de programas que simulem o comportamento de especialistas humanos.

Segundo Flores (2003), um Sistema Especialista (SE) é uma forma de sistema baseada no conhecimento especialmente projetado para emular a especialização humana em algum domínio específico. Os sistemas especialistas foram desenvolvidos a partir da necessidade de se processar informações não numéricas e são capazes, desde que devidamente orientados e alimentados, de apresentar conclusões sobre um determinado tema. A idéia básica de um sistema especialista é desenvolver programas que permitam o armazenamento e o seqüenciamento de informações, além da auto-aprendizagem.

Os SE ainda se restringem somente a alguns domínios bastante específicos, tentando reproduzir boa parte do conhecimento de um especialista em determinado assunto; é inviável, no atual contexto, pensar em sistemas que respondam e reajam

sobre temas gerais, pois para representação desses, uma base extremamente extensa teria de ser construída.

Os sistemas especialistas em geral podem ser divididos em três partes: (a) uma base de conhecimentos, que reúne o conhecimento do especialista, modelado conforme o tipo de representação escolhida; (b) um motor de inferência, que é o responsável por examinar o conteúdo da base de conhecimentos, conduzindo a consulta juntamente com o usuário e decidindo a ordem em que se tiram as inferências e (c) uma memória de trabalho onde os fatos e regras utilizados pelo motor de inferência, devem ser temporariamente registrados durante a consulta (pode ser comparada com a memória RAM do computador). Além desses três componentes, um sistema especialista deve conter também uma interface, que é a parte do sistema que irá interagir diretamente com o usuário. A Figura 41 apresenta os principais componentes de um sistema especialista e o modo como esses componentes interagem

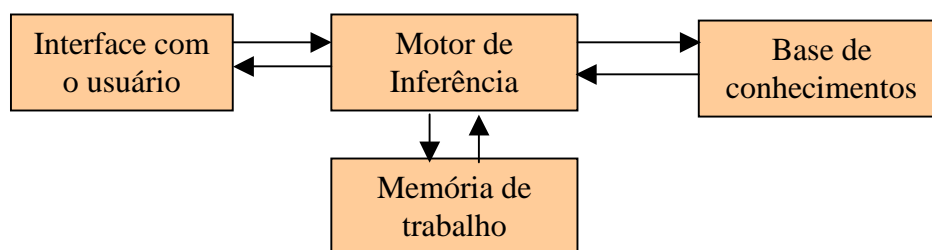


Figura 41 -Estrutura de um sistema especialista

Um dos pontos mais importantes ao se projetar um sistema especialista é a escolha do sistema de representação da base de conhecimentos que dará origem a uma base de regras; entre os tipos mais comuns de formalismos utilizados para se representar o conhecimento estão: (a) as redes semânticas, (b) os quadros (*frames*), (c) os roteiros (*scripts*), (d) a lógica e (e) as regras de produção. Dentre todos esses modos de representação do conhecimento, o mais utilizado (inclusive pelos sistemas especialistas

gerados pelo *software* Expert SINTA) são as regras de produção, que serão mais detalhadas na próxima seção.

Outro ponto importante na projeção de um SE diz respeito às características do motor de inferência desse sistema. Dentre as várias características do motor de inferência que devem ser levadas em consideração no projeto de um SE, as mais importantes são: (a) o modo de raciocínio do sistema, que pode ser para frente ou para trás, (b) a estratégia de busca utilizada, (c) a estratégia da resolução de conflitos e (d) a forma de representação de incerteza.

O modo de raciocínio para frente, que também pode ser denominado como modo de raciocínio dirigido a eventos, visa à solução de um problema a partir de um conjunto de dados ou idéias básicas, sem possuir uma meta pré-definida; um exemplo seria um sistema que encontrasse a doença mais provável, a partir de conjunto de sintomas fornecido pelo usuário. O modo de raciocínio para trás, também chamado de modo de raciocínio dirigido a metas, é quando se tem uma meta como ponto de partida e o sistema buscará o estabelecimento de hipóteses para que essa meta possa ser satisfeita. Um exemplo seria um sistema que, a partir de uma doença fornecida pelo usuário, listasse um conjunto de sintomas e características relacionadas a essa doença.

Um sistema especialista será mais eficaz à medida que: (a) conseguir explicar detalhadamente o seu processo de raciocínio para o usuário e (b) conseguir adquirir conhecimento novo e modificar o antigo com maior facilidade.

7.2 Regras de Produção

O ponto mais crítico no projeto de um sistema especialista é a criação da base de conhecimentos que vai sustentar esse sistema. Dentre as várias maneiras de se representar essa base de conhecimentos, a mais utilizada (inclusive pelo *software* Expert

SINTA) são as regras de produção. As regras de produção podem ser definidas como um conjunto de sentenças do tipo “Se – Então” onde um conjunto de variáveis, que devem ser previamente declaradas, são trabalhadas por meio do princípio de causa (“Se”) e efeito (“Então”). Nas regras de produção, além dos cognitivos “Se” e “Então” que são obrigatórios, também podem ser utilizados os cognitivos “e”, “ou” e “não”. Segundo Nogueira (1996), as principais vantagens das regras de produção são: (a) a modularidade, já que cada regra do conjunto que forma a base de regras pode ser considerada uma peça de conhecimento independente das demais; (b) a facilidade de edição (conseqüência direta da modularidade) e (c) a transparência do sistema.

Uma regra da produção pode ser dividida em duas partes: a “cauda” e a “cabeça”. A “cauda” de uma regra de produção é constituída por um conjunto de sentenças unidas por cognitivos, que podem ser do tipo “e”, “ou” ou “não”, e que se localizam logo após o cognitivo “Se” (que inicia toda a regra de produção). Já a “cabeça” é formada por um conjunto de sentenças que se encontra logo após o cognitivo “Então” (que também deve estar presente em toda a regra de produção). Em suma, a “cauda” da regra de produção apresenta um conjunto de causas que devem ser satisfeitas para produzir o efeito dado pela cabeça. Cada sentença de uma regra de produção, tanto da cauda quanto da cabeça, deve ser constituída de: (a) uma variável, (b) um operador (que pode ser do tipo “=”, “>”, “<”, “≤” ou “≥”) e (c) um valor que deve ser atribuído a essa variável. A Expressão 153 apresenta a estrutura de uma regra de produção.

Se

$$\begin{array}{l}
 \text{Variável 1 [=, >, <, \leq, \geq] Valor} \\
 [e, \text{ou}, \text{n\~{a}o}] \quad \text{Variável 2 [=, >, <, \leq, \geq] Valor} \\
 \dots \\
 [e, \text{ou}, \text{n\~{a}o}] \quad \text{Variável n [=, >, <, \leq, \geq] Valor}
 \end{array} \tag{153}$$

Então

$$\begin{array}{l}
 \text{Variável efeito1 [=, >, <, \leq, \geq] Valor} \\
 \dots \\
 \text{Variável efeito n [=, >, <, \leq, \geq] Valor}
 \end{array}$$

Deve-se ressaltar que as variáveis de uma regra de produção podem ser do tipo: (a) numérica, (b) univalorada (em que ela pode assumir um único valor) ou (c) multivalorada (em que ela pode assumir mais de um valor); as variáveis do tipo (b) e (c) não são numéricas.

Para exemplificar como um conhecimento pode ser representado pelas regras de produção e como essas regras podem gerar um sistema especialista, será tomado como exemplo um sistema que, a partir de algumas informações fornecidas pelo usuário, deve responder se esse usuário deve ou não ir à praia. Para construir tal sistema, o seguinte conhecimento deve ser representado: **“o usuário só deverá ir à praia se não chover e se ele tiver tempo”**. Usando-se os preceitos das regras de produção, chega-se a conclusão de que, para implementar esse sistema, serão necessárias três variáveis do tipo univalorada (que foram chamadas de “Vai chover?”, “Terei tempo?” e “Devo ir a Praia?”) e duas regras de produção apresentadas nas Expressões 154 e 155. Essas duas

regras de produção representam exatamente o mesmo conhecimento expresso na frase em negrito.

REGRA 1

Se

Vai Chover? = Não

(154)

E

Terei tempo? = Sim

Então

Devo ir a praia? = Sim

REGRA 2

Se

Vai Chover? = Sim

(155)

Ou

Terei tempo? = Não

Então

Devo ir a praia? = Não

O sistema especialista gerado por essas duas regras de produção terá capacidade de, a partir das respostas as perguntas: “Amanhã vai chover?” e “ Terei tempo amanhã?”, concluir se o usuário deve ou não ir a praia.

7.3 Sistema Expert SINTA

O sistema Expert SINTA é uma ferramenta computacional (encontrada no *site* <http://www.lia.ufc.br/>), desenvolvida pela Universidade Federal do Ceará, que utiliza

técnicas de inteligência artificial para geração automática de sistemas especialistas. Esse tipo de ferramenta é denominado *SHELL* - *software* de desenvolvimento de sistemas especialistas.

Segundo Nogueira (1996), a construção de um software para o desenvolvimento de sistemas especialistas - *SHELL* - não é trivial, tendo em vista que este *software* deve ser capaz de tratar de problemas complexos que necessitam da interpretação de um especialista, e de chegar às mesmas conclusões a que chegaria o especialista humano, caso se defrontasse com tais problemas.

O Expert SINTA é um *SHELL* implementado na linguagem de programação orientada a objetos Borland Delphi 1.0; isso permitiu a criação de um suporte visual que certamente facilita bastante a sua utilização. Assim, o Expert SINTA traz um ambiente de trabalho de forma a possibilitar, tanto ao projetista do conhecimento, quanto ao usuário final, o uso do programa sem que seja necessário um conhecimento aprofundado de informática. (NOGUEIRA, 1996). A Figura 42 apresenta a tela de interface entre o Expert SINTA e o projetista do conhecimento.

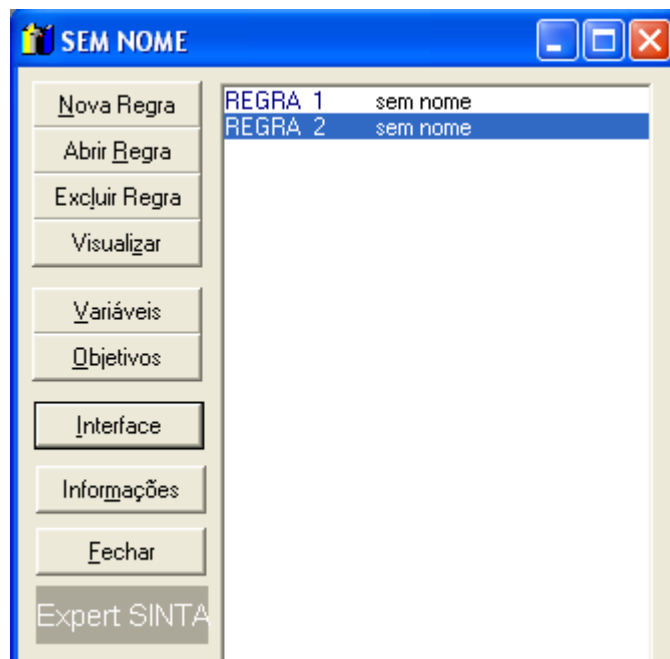


Figura 42 - Interface entre o sistema Expert SINTA e o projetista de conhecimento

Para projetar um sistema especialista utilizando o *software* Expert SINTA, deve-se seguir os seguintes passos:

1. Cadastrar as variáveis que serão utilizadas pelo sistema (usar o botão “variáveis” da Figura 42);
2. Especificar, dentre essas variáveis cadastradas, quais são as variáveis objetivo do sistema, ou seja, quais são as variáveis que o sistema buscará encontrar como objetivo final – no caso do exemplo da praia, da seção 5.2, a variável objetivo do sistema é a que foi chamada de “Devo ir a praia?” (usar o botão “objetivos” da Figura 42);
3. Cadastrar a base de regras de produção (usar o botão “nova regra” da Figura 42 para cada regra que será cadastrada);
4. Definir, para cada variável, como será a interface do sistema especialista com o usuário (usar o botão “interface” da Figura 42) - no caso do exemplo da praia serão cadastradas as perguntas “Amanhã eu terei tempo?” referente a variável “Terei tempo” e “Vai chover amanhã?” referente a variável intitulada “Vai chover”;
5. Rodar o sistema.

Os sistemas especialistas gerados pelo Expert SINTA utilizam: (a) a base de conhecimentos na forma de regras de produção e (b) o modo de raciocínio do motor de inferência do tipo para frente. Além disso, as incertezas, nesses sistemas, podem ser retratadas por meio de cálculos probabilísticos.

Os sistemas gerados pelo Expert SINTA dispõem, automaticamente, ao usuário final, ferramentas de depuração e explicação dos resultados atingidos durante a

consulta, gerando uma árvore que representa todos os passos efetuados do início da consulta até a sua conclusão (para isso basta acessar o guia “histórico” na janela representada pela Figura 44). As Figuras 43 e 44 apresentam um exemplo de como é a interface do SE gerado Expert SINTA, com o usuário. A Figura 43 apresenta como o SE requer informações do usuário e a Figura 44 apresenta a tela de resultados obtidos pelo SE, ao fim de uma consulta. Na Figura 43, que é referente à interface do problema da praia proposto na seção anterior, além de marcar uma opção para a pergunta “Vai chover amanhã?” e “Amanhã terei tempo?” o usuário terá a opção de marcar, para cada uma dessas perguntas, o grau de confiança de sua resposta, que no exemplo dado seriam respectivamente a probabilidade de amanhã realmente chover e a probabilidade de não ocorrer nenhum imprevisto e dele realmente ter tempo no outro dia.

The image shows two screenshots of a user interface for an expert system. The top window is titled "SEM NOME" and asks "Vai chover amanhã?" (Will it rain tomorrow?). It has a sub-header "(Marque somente uma alternativa)". Below this, there is a label "Opção:" followed by two radio buttons: "Sim" and "Não". To the right, there is a label "Grau de Confiança %:" followed by two input fields with up/down arrows. At the bottom, there are two buttons: "OK" with a green checkmark icon and "Por que?" with a blue question mark icon. The bottom window is also titled "SEM NOME" and asks "Amanhã eu terei tempo?" (Will I have time tomorrow?). It has the same sub-header "(Marque somente uma alternativa)". It also has "Opção:" with "Sim" and "Não" radio buttons, and "Grau de Confiança %:" with two input fields. At the bottom, there are "OK" and "Por que?" buttons with the same icons as the top window.

Figura 43 - Interface entre o SE gerado pelo Expert SINTA e o usuário

Respondidas essas duas perguntas, com os respectivos graus de confiança, o programa fornecerá a resposta da pergunta “Devo ir a praia amanhã?” e a probabilidade disso acontecer como mostra a Figura 44.

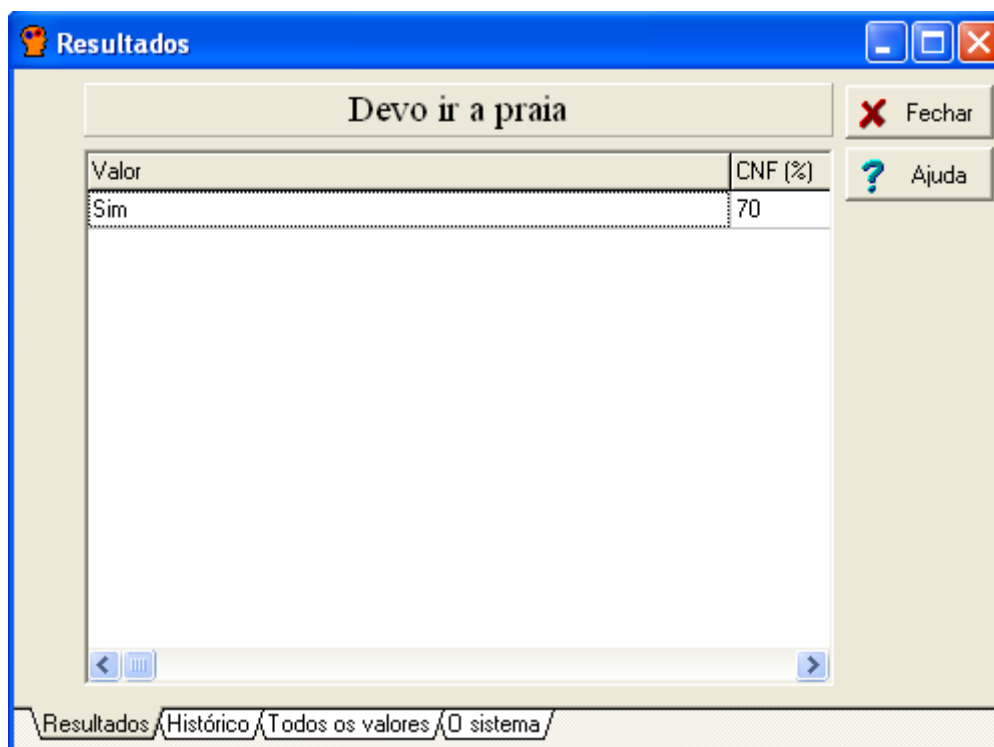


Figura 44 - Tela de resultados do SE gerado pelo Expert SINTA

7.4 Sistematização do processo de escolha das técnicas, modelos e perspectivas de análise de eficiência.

Nesse item será descrito como foi desenvolvido o sistema especialista para auxiliar na escolha, pelo usuário, da melhor combinação técnica/modelo/perspectiva que deve ser utilizada, dada uma situação. Para facilitar o entendimento, essa descrição será apresentada em três etapas: (a) a definição das variáveis objetivo do sistema, (b) a definição da interface e das outras variáveis do sistema e (c) a implantação do sistema no software Expert SINTA. A base de regras do sistema especialista poderá ser encontrada no Apêndice 3

O sistema especialista desenvolvido irá interagir com o usuário por meio de uma seqüência de perguntas de múltipla escolha em que o usuário deve assinalar uma única resposta. Essas perguntas podem ser divididas em duas categorias:

1. Perguntas referentes ao tipo e a quantidade de dados que o usuário tem disponível;
2. Perguntas referentes ao tipo de análise que o usuário deseja realizar e a quais informações disponibilizadas pelas técnicas são realmente de seu interesse.

A segunda classe de perguntas servirá para que o usuário tenha uma idéia mais clara das diversas possibilidades de análise disponibilizadas pelas técnicas de análise de eficiência, para que assim ele possa refletir mais claramente sobre o que deseja com essas técnicas. Já as perguntas da primeira classe funcionarão como uma espécie de trava para as vontades do usuário; assim, caso o tipo de análise que o usuário deseja fazer entre em contradição com os dados que ele possui, o sistema indicará que não foi encontrado nenhuma técnica/modelo/perspectiva para aquela aplicação desejada e com aqueles dados disponíveis; caso não haja contradição o sistema indicará a melhor técnica/modelo/perspectiva para aquela análise e com aqueles dados.

Uma limitação desse sistema especialista é que o sistema só será capaz de indicar uma única combinação de técnica, modelo e perspectiva de cada vez. Assim, por exemplo, se o usuário estiver interessado em obter tanto as utilidades dos *inputs* e *outputs*, quanto às metas das DMUs ineficientes, ele terá que utilizar duas perspectivas diferentes: a Primal e a Dual. Porém ao interagir com o sistema especialista chegará a hora em que o usuário deverá responder se (e ele só poderá escolher uma única alternativa): (a) ele deseja conhecer as utilidades dos *inputs* e dos *outputs*, (b) ele deseja

conhecer as metas para as DMUs ineficientes se tornarem eficientes ou (c) nenhuma das duas informações é de seu interesse; não existirá opção para um usuário que queira obter as duas informações ao mesmo tempo e sendo assim, a única alternativa para esse usuário será: (a) escolher uma das duas opções (por exemplo, a opção das utilidades) e obter a combinação mais adequada para aquela aplicação e a seguir, (b) realizar uma nova consulta respondendo todas as perguntas anteriores até chegar novamente nesse ponto, onde deve assinalar a opção que sobrou (a das metas, nesse exemplo) e obter a nova combinação de técnica, modelo e perspectiva que ele deve utilizar, em conjunto com a anterior, para obter as informações desejadas.

Essa limitação, porém, pode ser uma vantagem, pois muito mais do que simplesmente um sistema de consulta, o sistema especialista desenvolvido nesse trabalho pode funcionar como um sistema de ensino-aprendizagem já que, por meio dele, o usuário pode ter a visão quase imediata das conseqüências de todas as suas decisões (e inclusive das contradições que ele cometeu).

Como pode ser observado nos capítulos anteriores, as técnicas, modelos e perspectivas de análise de eficiência produtiva podem ser representadas por meio de uma gigantesca árvore de decisão e com isso a escolha do melhor vetor técnica/modelo/perspectiva pode ser realizado em etapas, partindo sempre da escolha do grupo (paramétrico ou não-paramétrico), passando pela escolha da técnica, do modelo e chegando até o último nível da perspectiva que deverá ser utilizada. Assim, a cada decisão que é tomada pelo sistema, quando uma pergunta é respondida pelo usuário, é escolhido um ramo da árvore de decisão e todas as outras possibilidades presentes nos outros ramos são automaticamente eliminadas. Por exemplo, caso seja decidido, logo no começo de análise, que será utilizada a técnica dos Números Índices, estar-se-á eliminando automaticamente do processo de escolha a grande quantidade de técnicas,

modelos e perspectivas da Análise por Envoltória de Dados, isso torna o processo de escolha bem mais ágil, pois as perguntas que serão feitas ao usuário dependerão da resposta das perguntas anteriores.

Caso o sistema chegue à conclusão que dois ou mais vetores técnica/modelo/perspectiva são adequados para uma determinada aplicação com um determinado conjunto de dados, o critério de desempate para decidir qual deles é o melhor é a simplicidade, sendo que os modelos e perspectivas mais simples serão sempre preferidos em relação aos mais complexos. Esse critério de desempate evita que sejam escolhidos técnicas, modelos e perspectivas complexas demais (tanto do ponto de vista da implementação quanto do desempenho computacional) para situações em que soluções simples já resolveriam.

Apesar de, como comentado na seção anterior, os sistemas especialistas gerados no Expert SINTA permitirem o uso de graus de confiança (probabilidades) para lidar com incertezas, esse mecanismo não será necessário no sistema referente às técnicas de análise de eficiência, pois será considerado que o usuário saiba o tipo de análise que ele deseja fazer e o tipo de dados que ele tenha em mãos, com 100% de certeza. Também, não serão utilizadas, no sistema desse trabalho, variáveis multivaloradas (que assumem mais de um valor) e numéricas, sendo que todas as variáveis serão univaloradas (assumem um único valor).

Com isso, as principais características do sistema especialista desenvolvido nesse trabalho estão resumidas abaixo:

1. Toma decisões em etapas (partindo da escolha do grupo – paramétrico ou não- paramétrico - e chegando até o último nível de perspectiva);

2. Utiliza informações a respeito do tipo de análise desejado pelo usuário e do tipo de dados disponíveis para tomar decisões;
3. Só pode indicar um único vetor técnica/modelo/perspectiva de cada vez, o que exigirá, em alguns casos, que sejam realizadas várias consultas para que se obtenha o conjunto de técnicas, modelos e perspectivas que devem ser utilizados;
4. Utiliza como critério de desempate a simplicidade;
5. Utiliza apenas variáveis univariadas e;
6. Não considera que haja incerteza nas respostas dadas pelo usuário.

Por fim, deve ser lembrado que será focado nesse sistema especialista apenas o processo de escolha das técnicas não-paramétricas (apesar de algumas etapas da escolha das técnicas paramétricas também terem sido sistematizadas).

7.4.1 Seleção das variáveis objetivo do sistema

As variáveis objetivo de um SE são aquelas que o sistema fornece como resposta ao fim da análise, ou seja, são as variáveis que representam o objetivo ou meta do sistema especialista desenvolvido. No caso desse trabalho o objetivo do SE é encontrar o melhor vetor técnica/modelo/perspectiva (sendo que as perspectivas possuem diferentes níveis) a partir de algumas informações requeridas ao usuário. Como esse vetor técnica/modelo/perspectiva admite dezenas de combinações diferentes, foi necessário que se definissem 8 variáveis independentes como variáveis objetivo do sistema: (a) Grupo; (b) Técnica; (c) Modelo; (d) Perspectiva de 1º nível; (e) Perspectiva de 2º nível; (f) Perspectiva de 3º nível; (g) Perspectiva de 4º nível e; (h) Perspectiva de 5º nível.

Apesar de, como já foi comentado, o SE desenvolvido nesse trabalho focar as técnicas não-paramétricas de análise de eficiência produtiva, uma pequena parte da teoria referente às técnicas paramétricas (mais especificamente a teoria que foi apresentada no Capítulo 3) também foi modelada nesse trabalho. Porém, ao trabalhar com grupo das técnicas paramétricas, a busca do melhor vetor técnica/modelo/perspectiva pelo SE se limitará apenas ao âmbito da técnica, não avançando na escolha dos modelos e das perspectivas, sendo que caso uma técnica paramétrica seja escolhida, todas as variáveis referentes aos modelos e as perspectivas (de todos os níveis) assumirão automaticamente o valor “Não foi possível determinar”. As variáveis referentes às perspectivas de 2º, 3º, 4º, e 5º níveis também assumirão esse valor quando for escolhida a Fronteira Estocástica como perspectiva de primeiro nível do Índice Malmquist.

Outra informação interessante é que, como as perspectivas da técnica DEA nos modelos CCR, BCC e FDH chegam no máximo ao 4º nível e nos modelos Aditivos e Multiplicativos chegam no máximo ao 3º nível e como as perspectivas da técnica dos Números Índices nos modelos de Fischer e Törnqvist não passam do primeiro nível, as variáveis perspectivas de 2º, 3º, 4º e 5º níveis poderão assumir, quando for necessário, o valor “Não se aplica”. Esse valor será assumido, por exemplo, pela variável perspectiva de 5º nível nas situações em que a técnica escolhida for o DEA. O Quadro 38 apresenta a lista de valores que podem ser assumidos por cada uma das variáveis objetivo do SE desenvolvido.

Variáveis	Valores
Grupo	(1) Paramétricas, (2) Não-paramétricas e (3) “O tipo de dados e as aplicações solicitadas entraram em contradição”
Técnica	(1) Fronteira Estocástica, (2) Funções Pré-estabelecidas, (3) Análise por Envoltória de Dados (DEA), (4) Números Índices , (5) “Não se aplica” e (6) “O tipo de dados e as aplicações solicitadas entraram em contradição”
Modelo	(1) CCR, (2) BCC, (3) FDH, (4) Aditivo Variante, (5) Aditivo Invariante, (6) Multiplicativo Variante,(7) Multiplicativo Invariante, (8) Índice de Fischer, (9) Índice de Törnqvist, (10) Índice de Malmquist, (11) “As aplicações desejadas entram em contradição” (12) “O tipo de dados e as aplicações solicitadas entraram em contradição” (13)“Não se aplica” e (14) “Não foi possível determinar”
Perspectiva de 1º nível	(1) Primal, (2) Dual, (3) Dual ou Primal , (4) Primal orientado ao <i>input</i> , (5) Primal orientado ao <i>output</i> , (6) Dual orientado ao <i>input</i> , (7) Dual orientado ao <i>output</i> , (8) Primal ou Dual orientado ao <i>input</i> , (9) Primal ou Dual orientado ao <i>output</i> , (10) Orientação aos <i>inputs</i> , (11) Orientação aos <i>outputs</i> , (12) Orientação a produtividade, (13) DEA, (14) Fronteira Estocástica , (15) “Não se aplica” e (16) “Não foi possível determinar”
Perspectiva de 2º nível	(1) Fronteira clássica, (2) Fronteira invertida, (2) Fronteira difusa, (4) Com restrição aos pesos, (5) Sem restrição aos pesos, (6) CCR, (7) BCC, (8) FDH, (9) “Não se aplica” e (10) “Não foi possível determinar”
Perspectiva de 3º nível	(1) Com restrição aos pesos, (2) Sem restrição aos pesos, (3) Com variáveis ambientais, (4) Sem variáveis ambientais, (5) Primal ou Dual orientado ao <i>input</i> , (6) Primal ou Dual orientado ao <i>output</i> , (7) “Não se aplica” e (8) “Não foi possível determinar”
Perspectiva de 4º nível	(1) Com restrição aos pesos, (2) Sem restrição aos pesos, (3) Com variáveis ambientais, (4) Sem variáveis ambientais, (5) “Não se aplica” e (6) “Não foi possível determinar”
Perspectiva de 5º nível	(1) Com variáveis ambientais, (2) Sem variáveis ambientais, (3) “Não se aplica” e (4) “Não foi possível determinar”

Quadro 38: Possíveis valores das variáveis objetivo do SE

Como pode ser constatado ao se analisar o Quadro 38, foram omitidos do sistema especialista a perspectiva de primeiro nível do DEA chamada perspectiva Fracionária, pois ela não apresenta aplicações práticas, e os modelos dos Números Índices chamados índice de Laspeyres e índice de Paasche, devido ao fato deles serem muito rudimentares.

Também pode ser percebido no Quadro 38 que além dos valores “Não se aplica” ou “Não foi possível determinar” algumas das variáveis objetivo listadas podem assumir

os valores: (a) “As aplicações desejadas entraram em contradição” e (b) “O tipo de dados e as aplicações solicitadas entraram em contradição”. Esses dois valores serão assumidos nos casos em que, respectivamente: (a) forem escolhidas duas aplicações que sejam incompatíveis para uma mesma técnica, modelo ou perspectiva e (b) a aplicação desejada for incompatível com os dados que se têm disponíveis. Caso uma variável (por exemplo, a variável grupo) assuma um desses valores, todas as variáveis que são hierarquicamente subordinadas a ela (no caso as variáveis técnica, modelo e perspectivas de 1º, 2º, 3º, 4º e 5º níveis) assumirão automaticamente os valores “Não se aplica”, pois realmente não fará sentido determiná-las.

7.4.2 Seleção das outras variáveis e da interface do sistema

As outras variáveis do sistema especialista que foi desenvolvido nesse trabalho podem ser classificadas em duas categorias: (a) variáveis de interface e (b) variáveis auxiliares. As variáveis de interface representam as informações que são requeridas diretamente aos usuários; elas se baseiam na série de perguntas, a partir das quais o sistema buscará as respostas para as variáveis objetivo, sendo que cada pergunta corresponderá a uma variável diferente. Já as variáveis auxiliares são variáveis criadas com o único propósito de auxiliar na construção da base de dados do sistema, não sendo nem variáveis de contato direto com os usuários e nem variáveis objetivo do sistema; são apenas variáveis que contém resultados intermediários. Apenas quatro variáveis auxiliares foram necessárias no sistema especialista desse trabalho: (a) Modelo intermediário, (b) Modelo intermediário 2, (c) Modelo intermediário 3 e (d) Perspectiva de 2º nível intermediária. O motivo de terem sido criadas três variáveis chamadas “Modelo Intermediário” se deve ao fato do Expert SINTA não permitir que uma mesma variável esteja simultaneamente na cabeça e na cauda de uma regra de produção. Os

valores que cada variável auxiliar pode assumir se encontram no Quadro 39; maiores detalhes sobre essas variáveis serão detalhadas mais à frente.

Variáveis auxiliares	Valores
Modelo intermediário	(1) CCR, BCC e FDH, (2) Aditivos e Multiplicativos, (3) Índice Törnqvist ou Fischer, (4) Outro Número índice ou Índice Malmquist
Modelo intermediário 2	(1) CCR e BCC e (2) Outro Número Índice
Modelo intermediário 3	(1) Fischer ou Törnqvist
Perspectiva de 2º nível intermediária	(1) Invertida e Difusa

Quadro 39: Valores que podem ser assumidos pelas variáveis auxiliares

As variáveis de interface, como já especificado se referem às perguntas que são realizadas ao usuário e a partir das quais se buscará determinar as variáveis objetivo do sistema. No sistema especialista desse trabalho cada uma dessas variáveis será denominada como “Pergunta n” onde n é um número natural; essas perguntas serão realizadas em etapas de acordo com a árvore de decisão que está genericamente representada pela Figura 16.

Iniciar-se-á com a apresentação das variáveis que possibilitarão a determinação do grupo de técnicas que será utilizado (ver regras 1 a 3 do Apêndice 3). Essas variáveis estão mostradas nas Expressões 156 e 157.

Nome da Variável → Pergunta 1

Interface com o Usuário → Você deseja determinar a função produção junto com a eficiência?

(156)

Valores que ela pode assumir →

a) Sim

(Grupo = Paramétricas)

b) Não

(Grupo = Não-paramétricas)

Nome da Variável → Pergunta 2

Interface com o Usuário → Qual o número de *outputs* de sua análise?

Valores que ela pode assumir →

- | | | |
|--------------|--------------------------------------|-------|
| a) 1 | (Grupo = Qualquer um) | (157) |
| b) 2 ou mais | (Grupo = Apenas as Não-paramétricas) | |

De acordo com as respostas dessas 2 primeiras perguntas deverá ser decidido o grupo de técnicas que será utilizado (Paramétrico ou Não-paramétrico); porém, como pode ser observado, dependendo das respostas as perguntas 1 e 2, o usuário já pode entrar em contradição (por exemplo, caso queira a função produção, mas tenha mais de 1 *output* na análise); para maiores detalhes ver a base de regras que se encontra no Apêndice 3.

Caso seja decidido que o grupo a ser utilizado seja o das técnicas paramétricas, será realizada uma única pergunta que possibilitará que se encontre a técnica que deve ser utilizada (ver regras 4 e 5 do Apêndice 3). Nesse trabalho, a análise das técnicas paramétricas vai apenas até esse ponto. A terceira variável da análise se encontra na Expressão 158.

Nome da Variável → Pergunta 3

Interface com o Usuário → Você deseja determinar a componente de erro aleatório?

(158)

Valores que ela pode assumir →

- | | |
|--------|---------------------------------------|
| a) Sim | (Técnica = Fronteira Estocástica) |
| b) Não | (Técnica = Funções Pré-estabelecidas) |

Porém, se o grupo escolhido for o das técnicas não-paramétricas, deve-se inicialmente detectar qual das duas técnicas não-paramétricas (DEA ou Números

Índices) deverá ser utilizada, para só depois partir para os modelos e perspectivas (ver regras 6 a 8 do Apêndice 3). As Expressões 159 e 160 apresentam as duas perguntas (variáveis) que possibilitam a apuração de qual técnica não-paramétrica deve ser utilizada (novamente existe a possibilidade de contradição).

Nome da Variável → Pergunta 4

Interface com o Usuário → Você deseja determinar a eficiência...

Valores que ela pode assumir →

- (159)
- a) Entre duas DMUs diferentes ou entre uma mesma DMU em dois períodos de tempo. *(Técnica = Números Índices)*
 - b) Entre várias DMUs. *(Técnica = DEA)*

Nome da Variável → Pergunta 5

Interface com o Usuário → O número de DMUs que você deseja comparar é maior que o número de *inputs* multiplicado pelo número de *outputs* e é maior que o triplo da soma entre o número de *inputs* e o número de *outputs*? (160)

Valores que ela pode assumir →

- a) Sim *(Técnica = Ambas)*
- b) Não *(Técnica = Apenas Números Índices)*

Apurada a técnica deve-se partir para a escolha dos modelos e das perspectivas sendo que, dependendo da técnica que foi escolhida (ou do ramo da árvore que foi definido), as perguntas (variáveis) que serão realizadas para esse fim serão totalmente diferentes. As Expressões 161 e 162 mostram as perguntas para se definir a variável auxiliar “Modelo Intermediário” (que é o primeiro passo para escolha do modelo) no caso em que a técnica escolhida tenha sido o DEA (ver regras 9 a 11 do Apêndice 3). Como pode ser verificado, mesmo não sendo determinada uma variável objetivo do sistema, essas duas perguntas podem levar a contradições.

Nome da Variável → Pergunta 6

Interface com o Usuário → Você deseja calcular a eficiência com uma orientação...

Valores que ela pode assumir →

- a) Apenas aos *inputs* ou aos *outputs*. (161)
 (*Modelo Intermediário = CCR, BCC e FDH*)
- b) Mista – simultaneamente aos *inputs* e *outputs*.
 (*Modelo Intermediário = Aditivos e Multiplicativos*)

Nome da Variável → Pergunta 7

Interface com o Usuário → Você deseja determinar, além do conjunto de DMUs eficientes, um índice de eficiência para cada DMU?

Valores que ela pode assumir →

- a) Sim (*Modelo intermediário = CCR, BCC e FDH*)
- b) Não (*Modelo Intermediário = Qualquer um*) (162)

A partir do valor da variável modelo intermediário pode-se prosseguir na apuração do modelo (ver regras 12 a 15 do Apêndice 3). As Expressões 163 e 164 mostram as variáveis para a determinação do modelo caso o valor da variável “Modelo Intermediário” tiver sido “Aditivos e Multiplicativos”. Essas duas variáveis não entram em contradição.

Nome da Variável → Pergunta 8

Interface com o Usuário → Você deseja que as combinações entre os *inputs* e os *outputs* sejam:

Valores que ela pode assumir →

- a) Aditivas – o que permite analisar a eficiência produtiva tendo como base a menor distância entre a DMU e fronteira. (*Modelo = Aditivo...*) (163)
- b) Multiplicativas – o que permite calcular a elasticidade da eficiência e trabalhar com fronteira côncavas. (*Modelo = Multiplicativo...*)

Nome da Variável → Pergunta 9

Interface com o Usuário → Você deseja que o conjunto de referência formado pela DMUs eficientes seja obtido a partir da... (164)

Valores que ela pode assumir →

- a) Eficiência total (*Modelo = ...Invariante*)
- b) Eficiência técnica (*Modelo = ...Variante*)

Definido o modelo pode-se partir para as perspectivas de 1º, 2º e 3º níveis (ver regras 15 a 22 do Apêndice 3). Cada um desses diferentes níveis de perspectivas será definido por perguntas únicas que estão reproduzidas nas Expressões 165, 166, 167. Como ficará claro no decorrer dessa seção, essas perguntas se repetirão em diversas partes do sistema especialista que foi desenvolvido.

Nome da Variável → Pergunta 10

Interface com o Usuário → Você deseja como informação adicional?

Valores que ela pode assumir →

- a) As utilidades dos *inputs* e *outputs*. (*Perspectiva de 1º nível = Primal*)
 - b) As metas das DMUs ineficientes. (*Perspectiva de 1º nível = Dual*)
 - c) Nenhuma das duas informações é de seu interesse.
(*Perspectiva de 1º nível = Primal ou Dual*)
- (165)

Nome da Variável → Pergunta 11

Interface com o Usuário → Você deseja impor alguma restrição as utilidades dos *inputs* ou *outputs*?

Valores que ela pode assumir →

- a) Sim (*Perspectiva de 2º nível = Com restrições aos pesos*)
 - b) Não (*Perspectiva de 2º nível = Sem restrições aos pesos*)
- (166)

Nome da Variável → Pergunta 12

Interface com o Usuário → Você deseja trabalhar com alguma variável ambiental ou exógena?

Valores que ela pode assumir →

- a) Sim (*Perspectiva de 3º nível = Com variáveis ambientais*)
 - b) Não (*Perspectiva de 3º nível = Sem variáveis ambientais*)
- (167)

Por outro lado, caso a variável modelo intermediário (determinada nas Perguntas 6 e 7) tiver sido “CCR, BCC e FDH”, haverá 4 perguntas diferentes para que sejam determinados respectivamente o modelo e as perspectivas de 2º, 3º e 4º níveis.

As Expressões 168 e 169 mostram respectivamente as variáveis responsáveis pela escolha do modelo (ver regras 23 a 25 do Apêndice 3) e pela escolha da perspectiva de 2º nível (ver regras 26 a 28 do Apêndice 3) que serão utilizadas; as perguntas que serão realizadas para determinação da perspectiva de 1º nível dependerão do modelo e da perspectiva de 2º nível que tiverem sido escolhidas e por isso, elas só serão

apresentadas posteriormente. Na Expressão 168 também haverá a presença da variável auxiliar “Modelo Intermediário 2” que será utilizada mais a frente.

Nome da Variável → Pergunta 13

Interface com o Usuário → Você deseja calcular...

Valores que ela pode assumir →

- a) A eficiência Total.
(*Modelo = CCR*) e (*Modelo Intermediário 2 = CCR e BCC*)
- b) A eficiência Técnica utilizando como referencia tanto DMUs reais (168) quanto combinações lineares entre essas DMUs.
(*Modelo = BCC*) e (*Modelo Intermediário 2 = CCR e BCC*)
- c) A eficiência técnica utilizando como referencia apenas DMUs reais.
(*Modelo = FDH*)

Nome da Variável → Pergunta 14

Interface com o Usuário → Você deseja...

Valores que ela pode assumir →

- a) Determinar o índice de eficiência de cada DMU, as metas e os *benchmarks* das DMUs ineficientes ou as utilidades dos *inputs* e *outputs* dessas DMUs (*Perspectiva de 2º nível = Fronteira Clássica*)
- b) Determinar um índice combinado que possibilite um desempate entre as DMUs que foram eficientes pela fronteira clássica (*Perspectiva de 2º nível = Fronteira Invertida*) e (*Perspectiva de 2º nível intermediária = Invertida e Difusa*) (169)
- c) Determinar o grau de pertença de uma DMU difusa na fronteira (*Perspectiva de 2º nível = Fronteira Difusa*) e (*Perspectiva de 2º nível intermediária = Invertida e Difusa*)

Depois de realizadas as Perguntas 13 e 14 devem ser realizadas as Perguntas representadas pelas variáveis “Pergunta 15” e “Pergunta 16” para, respectivamente, determinar as perspectivas de 3º e 4º níveis da Análise por Envoltória de Dados. Porém, essas duas variáveis contêm perguntas exatamente iguais às variáveis “Pergunta 11” e “Pergunta 12” e por isso elas não serão repetidas (ver regras 29 a 32 do Apêndice 3).

Determinadas as perspectivas de 2º, 3º e 4º níveis pode-se partir para a determinação da perspectiva de 1º nível que, como já mencionado, dependerá do modelo e da perspectiva de 2º nível escolhidos. Assim, caso a variável auxiliar “Modelo Intermediário 2” seja igual a “CCR e BCC” e caso a perspectiva de 2º nível seja a Fronteira Clássica, a perspectiva de 1º nível será determinada a partir de duas perguntas: a Pergunta 17, que define a orientação, e a pergunta 18, que define se o modelo de PL é Primal ou Dual (ver regras 33 a 38 do Apêndice 3). As Expressões 170 e 171 mostram essas variáveis.

Nome da Variável → Pergunta 17

Interface com o Usuário → Você deseja calcular a eficiência...

Valores que ela pode assumir →

- a) Minimizando os *inputs* e mantendo os *outputs* constantes
(*Perspectiva de 1º nível = orientado aos inputs*) (170)
- b) Maximizando os *outputs* e mantendo os *inputs* constantes
(*Perspectiva de 1º nível = orientado aos outputs*)

Nome da Variável → Pergunta 18

Interface com o Usuário → Você deseja como informação adicional?

Valores que ela pode assumir →

- a) As utilidades dos *inputs* e *outputs*
(*Perspectiva de 1º nível = Primal....*) (171)
- b) As metas das DMUs ineficientes
(*Perspectiva de 1º nível = Dual...*)
- c) Nenhuma das duas informações é de seu interesse
(*Perspectiva de 1º nível = Primal ou Dual...*)

Já para o caso da variável auxiliar “Modelo Intermediário 2” ser igual a “CCR e BCC” e da variável auxiliar “Perspectiva de 2º nível intermediária” ser igual a “Invertida e Difusa”, a perspectiva de 1º nível será determinada a partir de uma única pergunta: a Pergunta 19 (ver regras 39 e 40 do Apêndice 3). A diferença entre o fato da perspectiva de 2º nível ser a fronteira clássica do da perspectiva de 2º nível ser a fronteira Difusa ou Invertida é que nas fronteiras Difusa e Invertida a ocorrência de perspectiva Primal ou Dual será indiferente, pois para elas não terá sentido calcular nem as utilidades nem as metas e *benchmarks*. A Expressão 172 mostra a essa variável.

Nome da Variável → Pergunta 19

Interface com o Usuário → Você deseja calcular a eficiência...

Valores que ela pode assumir →

- a) Minimizando os *inputs* e mantendo os *outputs* constantes
(*Perspectiva de 1º nível = Dual ou Primal orientado aos inputs*) (172)
- b) Maximizando os *outputs* e mantendo os *inputs* constantes
(*Perspectiva de 1º nível = Dual ou Primal orientado aos outputs*)

Já para o caso do modelo escolhido ser o FDH, independentemente da perspectiva de 2º nível escolhida, a perspectiva de 1º nível também será decidida com base em uma única pergunta: a pergunta 20 (ver regras 41 e 42 do Apêndice 3); isso ocorre devido ao fato do modelo FDH só admitir a perspectiva de 1º nível Dual. A Expressão 173 mostra essa variável.

Nome da Variável → Pergunta 20

Interface com o Usuário → Você deseja calcular a eficiência...

Valores que ela pode assumir →

- a) Minimizando os *inputs* e mantendo os *outputs* constantes (173)
(*Perspectiva de 1º nível = Dual orientado aos inputs*)
- b) Maximizando os *outputs* e mantendo os *inputs* constantes
(*Perspectiva de 1º nível = Dual orientado aos outputs*)

Agora que a técnica Análise por Envoltória de Dados (DEA) já foi explorada com todos os seus modelos e perspectivas passar-se-á para o outro ramo da árvore de decisões: os Números Índices. Assim, caso a técnica escolhida (nas Perguntas 4 e 5) seja a técnica dos Números Índices deve-se primeiramente proceder a escolha do modelo (ver regras 43 e 44 do Apêndice 3) que, tal qual aconteceu com a técnica DEA, se iniciará com a escolha da variável auxiliar “Modelo Intermediário” e será realizada a partir da variável descrita na Expressão 174.

Nome da Variável → Pergunta 21

Interface com o Usuário → Você deseja...

Valores que ela pode assumir →

- a) Calcular a eficiência entre duas DMUs diferentes
(Modelo Intermediário 2 = Outros Números Índices) (174)
- b) Calcular a eficiência entre uma mesma DMU em dois períodos de tempo
(Modelo Intermediário = Índice Malmquist ou Outro Número Índice)

Caso a variável "Modelo Intermediário" seja igual a "Índice Malmquist ou Outro Número Índice" serão realizadas mais duas perguntas com o objetivo de discriminar se o modelo é o índice Malmquist ou se é outro Número Índice (ver regras 45 a 47 do Apêndice 3). Essas duas perguntas, que estão mostradas nas Expressões 175 e 176, podem entrar em contradição (caso se queira um índice que permita separar AE (alterações na eficiência) e AT (alterações na tecnologia), mas não haja dados de múltiplas DMUs).

Nome da Variável → Pergunta 22

Interface com o Usuário → Você prefere?

Valores que ela pode assumir →

- a) Um índice mais preciso que permita separar as alterações tecnológicas das alterações na eficiência mas que, em compensação, precisa de técnicas de apoio para ser calculado
(Modelo = Índice Malmquist) (175)
- b) Um índice que trabalha com apenas dois pontos e não necessita de técnicas de apoio para ser calculado, mas que é menos preciso e não separa as alterações na eficiência das alterações tecnológicas
(Modelo intermediário 2 = Outros Números Índices)

Nome da Variável → Pergunta 23

Interface com o Usuário → Você possui dados dos *inputs* e *outputs* de diversas DMUs em pelo menos dois períodos de tempo?

Valores que ela pode assumir → (176)

- a) Sim (Modelo = Qualquer um)
- b) Não (Modelo = Todos menos o Índice Malmquist)

Caso a variável auxiliar “Modelo Intermediário 2” for igual a “Outros Números Índices” deve-se partir para a definição de qual do outro número índice (Fischer ou Törnqvist) deve ser utilizado (ver regras 59 a 61 do Apêndice 3). Para tal serão realizadas duas perguntas (variáveis), passíveis de entrar em contradição, que permitirão decidir se será escolhido o índice de Fischer (*Modelo = Índice de Fischer*) ou se ainda restará dúvida para uma próxima etapa (Modelo Intermediário 3 = Fischer e Törnqvist). As Expressões 177 e 178 apresentam essas duas variáveis.

Nome da Variável → Pergunta 24

Interface com o Usuário → Você possui as utilidades dos *inputs* e dos *outputs*?

Valores que ela pode assumir → (177)

- a) Sim (Modelo = Contradição)
- b) Não (Modelo = Fischer ou Törnqvist)

Nome da Variável → Pergunta 25

Interface com o Usuário → Algum de seus *inputs* ou *outputs* apresenta valor nulo?

(178)

Valores que ela pode assumir →

- a) Sim *(Modelo = Índice de Fischer)*
- b) Não *(Modelo Intermediário 3 = Fischer e Törnqvist)*

Após ser definido o modelo e mesmo que ainda reste alguma dúvida (entre Fischer e Törnqvist), antes dela ser sanada deve-se definir a perspectiva de primeiro nível (ver regras 64 a 66 do Apêndice 3) que servirá tanto para o índice de Fischer quanto para o de Törnqvist (o motivo dessa inversão é a economia de espaço). Essa determinação será realizada por meio que uma única pergunta que está representada na Expressão 179.

Nome da Variável → Pergunta 26

Interface com o Usuário → Você deseja calcular a eficiência...

Valores que ela pode assumir →

- a) Olhando apenas para os *inputs* e ignorando os *outputs*
(Perspectiva de 1º nível = Orientação aos inputs)
- b) Olhando apenas para os *outputs* e ignorando os *inputs*
(Perspectiva de 1º nível = Orientação aos outputs)
- c) Olhando para produtividade
(Perspectiva de 1º nível = Orientação a produtividade)

(179)

Caso ainda reste dúvida sobre qual modelo deve ser escolhido, ou seja, caso a variável auxiliar “Modelo Intermediário 3” seja igual a “Fischer e Törnqvist”, uma nova pergunta deve ser realizada para sanar essa dúvida (ver regras 62 e 63 do Apêndice 3). A variável correspondente a essa pergunta se encontra na Expressão 180.

Nome da Variável → Pergunta 27

Interface com o Usuário → Para calcular a eficiência você prefere...

Valores que ela pode assumir →

- a) Um índice mais complexo, mais trabalhoso e mais preciso. (180)
(Modelo = Índice de Törnqvist)
- b) Um índice menos complexo, menos trabalhoso e menos preciso.
(Modelo = Índice de Fischer)

Por fim, caso o modelo escolhido seja o índice de Malmquist, deve-se proceder a escolha das perspectivas de 1º, 2º, 3º, 4º, e 5º níveis (ver regras 48 a 58 do Apêndice 3). Cada uma dessas escolhas será realizada a partir de respostas a perguntas únicas; as variáveis que expressam essas perguntas se encontram representadas na Expressões 181, 182, 183, 184 e 185.

Nome da Variável → Pergunta 28

Interface com o Usuário → Você prefere utilizar como técnica de apoio ao Índice Malmquist?

Valores que ela pode assumir → (181)

- a) A Análise por Envoltória de Dados (*Perspectiva de 1º nível = DEA*)
- b) A Fronteira Estocástica (*Perspectiva de 1º nível = Fronteira Estocástica*)

Nome da Variável → Pergunta 29

Interface com o Usuário → Você deseja calcular a variação da eficiência (AE) e da tecnologia (AT) com base...

Valores que ela pode assumir →

- a) Na eficiência Total *(Perspectiva de 2º nível = CCR)* (182)
- b) Na eficiência Técnica utilizando como referencia tanto DMUs reais quanto combinações lineares entre essas DMUs *(Perspectiva de 2º nível = BCC)*
- c) Na eficiência técnica utilizando como referencia apenas DMUs reais *(Perspectiva de 2º nível = FDH)*

Nome da Variável → Pergunta 30

Interface com o Usuário → Você deseja calcular a eficiência...

Valores que ela pode assumir →

- a) Minimizando os inputs e mantendo os outputs constantes (183)
(Perspectiva de 3º nível = Primal ou Dual orientados aos inputs)
- b) Maximizando os outputs e mantendo os inputs constantes
(Perspectiva de 3º nível = Primal ou dual orientados aos outputs)

Nome da Variável → Pergunta 31

Interface com o Usuário → : Você deseja impor alguma restrição as utilidades dos *inputs* e *outputs* para calcular a distância?

Valores que ela pode assumir → (184)

- a) Sim *(Perspectiva de 4º nível = Com restrições aos pesos)*
- b) Não *(Perspectiva de 4º nível = Sem restrições aos pesos)*

Nome da Variável → Pergunta 32

Interface com o Usuário → Você deseja trabalhar com alguma variável ambiental ou exógena no calculo da distância?

Valores que ela pode assumir → (185)

- a) Sim (*Perspectiva de 5º nível = Com variáveis ambientais*)
- b) Não (*Perspectiva de 5º nível = Sem variáveis ambientais*)

Nesse subitem, além de terem sido declaradas as 32 variáveis de interface e as 4 variáveis auxiliares, também foi explicado, passo a passo, o funcionamento do sistema especialista para se determinar a melhor técnica, modelo e perspectiva de análise de eficiência produtiva; foi demonstrado como, a partir da resposta a cada uma das 32 perguntas das variáveis de interface, um ramo da árvore de decisões é escolhido, convergindo para que sejam encontradas as respostas de cada uma das 8 variáveis objetivo do sistema. Todas essas informações, porém, devem ser transformadas em regras de produção para que assim possam ser implementada no *software* Expert SINTA. Para que toda essa teoria pudesse ser implementada foi necessária a construção de 66 regras de produção que se encontram descritas no Apêndice 3. O próximo subitem será dedicado ao sistema com as regras de produção já implementadas.

7.4.3 Implementação no Expert SINTA

Nesse item serão apresentadas algumas imagens do sistema especialista que foi desenvolvido nesse trabalho após ser implementado no *software* Expert SINTA.

Enquanto a Figura 45 apresenta uma das regras de produção (mais especificamente a regra 33) sendo implementada, a Figura 46 apresenta uma visão geral da tela principal do programa com as 66 regras de produção do sistema especialista após serem implementadas.

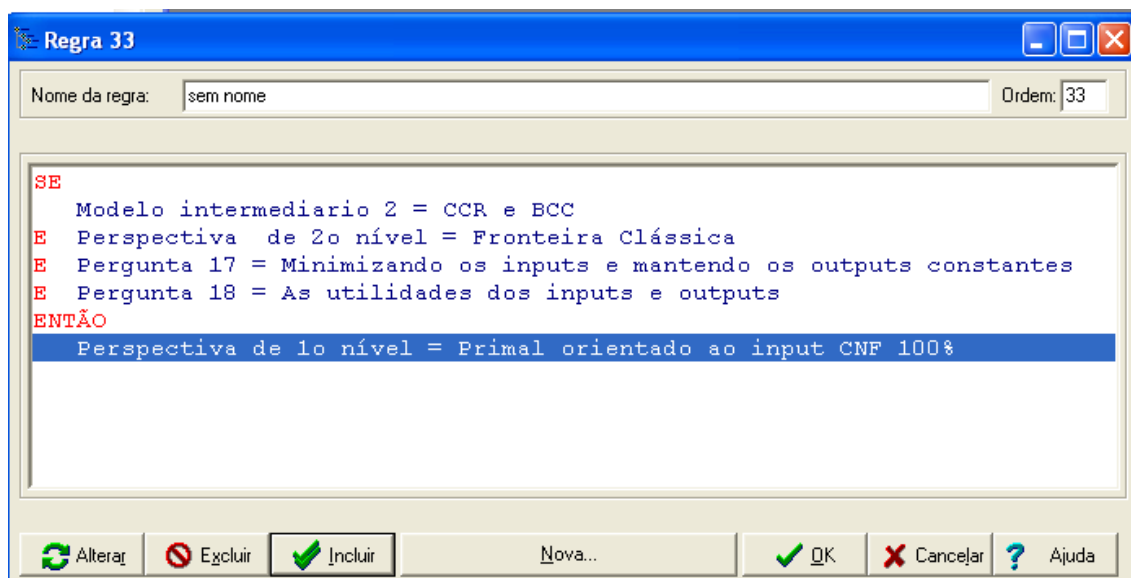


Figura 45: Exemplo de uma regra de produção no Expert SINTA

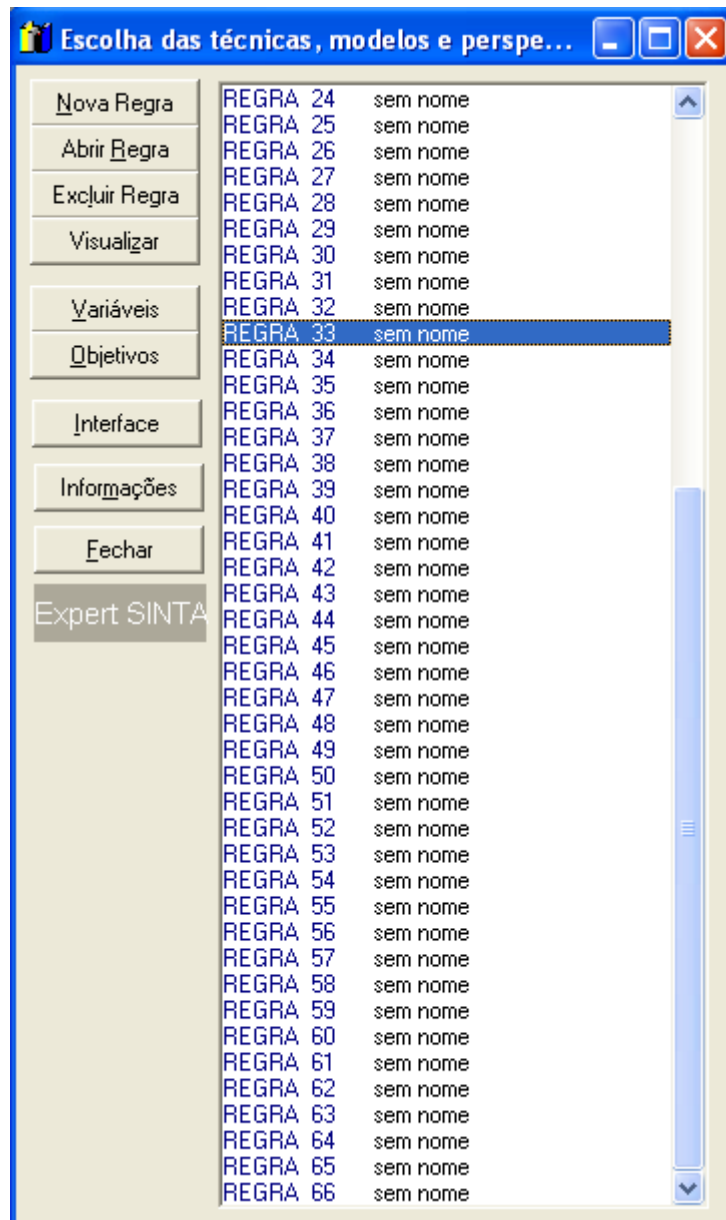


Figura 46: Panorama geral da base de regras do sistema especialista

Já a Figura 47 apresenta 2 exemplos de como ocorre a interface do sistema especialista com o usuário, enquanto a Figura 48 apresenta a tela de resultados de uma das variáveis objetivo do sistema (a variável técnica). Deve-se lembrar que a resposta de cada variável objetivo é apresentada em uma tela diferente.

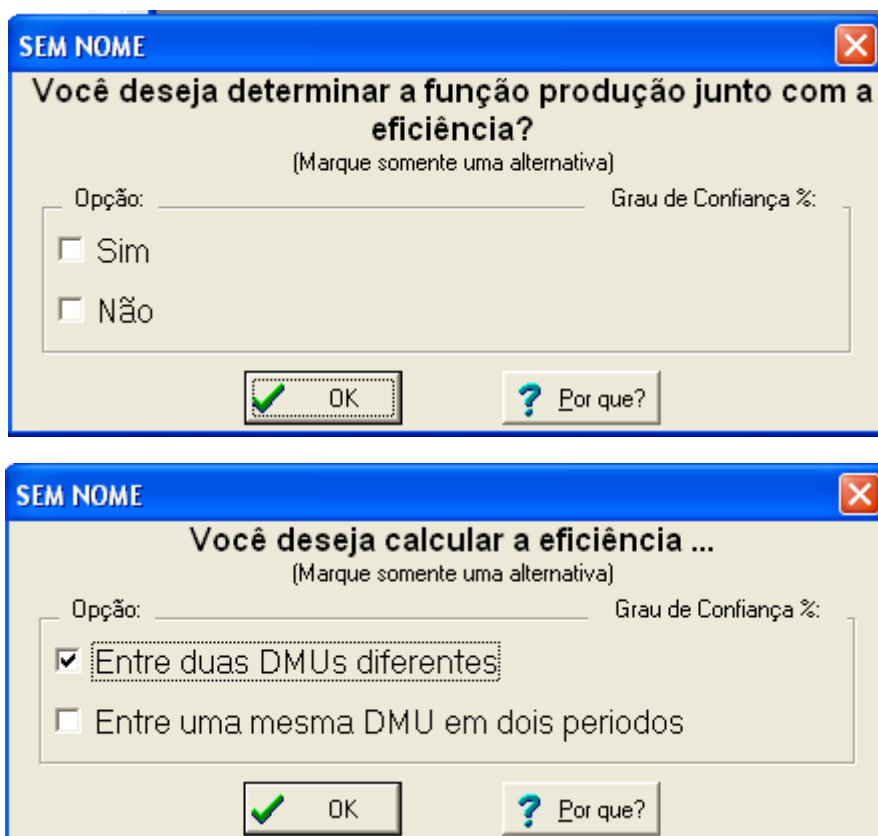


Figura 47: Exemplos da interface do sistema especialista

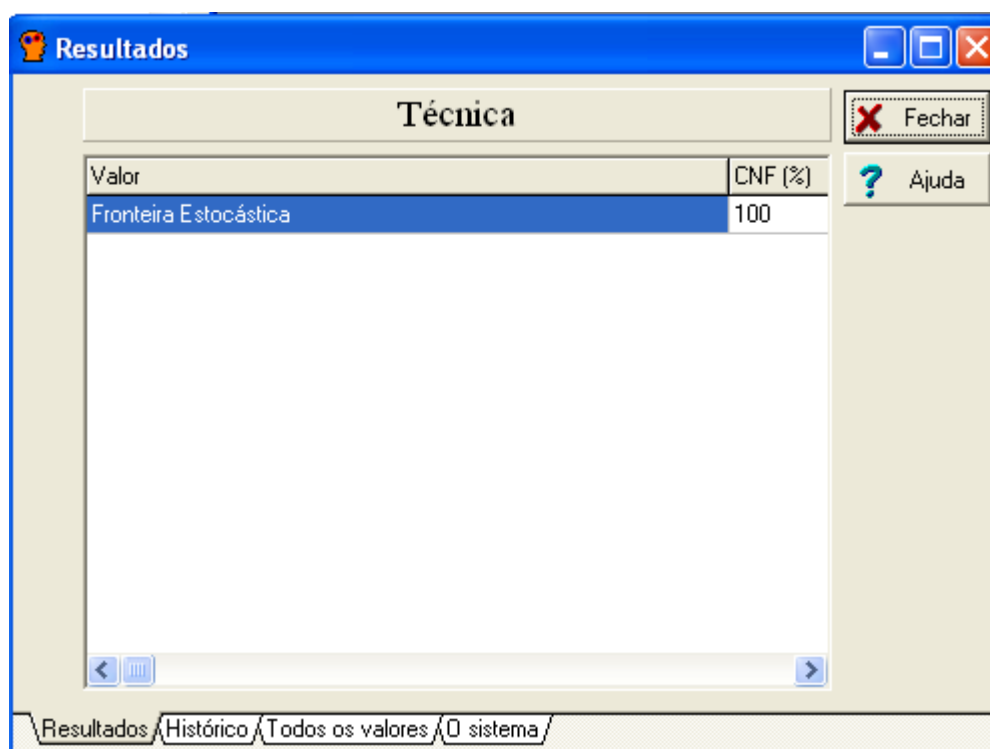


Figura 48: Exemplos da tela de resultados do sistema especialista

Capítulo 8 - Conclusões

Esse trabalho apresentou algumas técnicas não paramétricas de análise de eficiência produtiva, que é somente um dos diversos tipos de eficiência existentes na literatura. Essas técnicas, que se referem exclusivamente ao indicador de desempenho produtividade, podem ser utilizadas nas mais diferentes situações (apesar do conceito de produtividade geralmente se referir a empresas de manufatura), que vão desde a avaliação de empresas de qualquer setor até a avaliação de indivíduos ou de veículos automotores.

A primeira conclusão que pôde ser extraída desse trabalho é que, independentemente da técnica utilizada, o método (seqüência de passos para se atingir um objetivo) de análise de eficiência produtiva é único e apresenta as seguintes etapas: (a) seleção de DMUs, (b) seleção dos *inputs* e *outputs* utilizados, (c) escolha da(s) técnicas(s), modelo(s) e perspectivas(s), (d) escolha da ferramenta computacional, (e) implementação da técnica e (f) análise dos resultados. Cada uma dessas etapas pode necessitar ou não, da utilização de uma técnica para poder ser cumprida; na etapa de

seleção de *inputs* e *outputs*, por exemplo, podem ser utilizadas as técnicas estatísticas ou a multicritério. Uma técnica, para fins desse trabalho, foi definida como sendo um conjunto de procedimentos, geralmente de caráter matemático, utilizado dentro do contexto de um método, para se obter um determinado resultado.

Apesar do estudo de caso, apresentado no Capítulo 6, ilustrar todas as etapas do método de análise de eficiência produtiva, esse trabalho se concentrou principalmente em auxiliar o gestor nas etapas de: (a) escolha da(s) técnica(s), modelo(s) e perspectiva(s); (b) implementação das técnicas e (c) análise dos resultados, sendo que todas essas etapas foram focadas apenas nas técnicas não-paramétricas de análise de eficiência produtiva.

Para auxiliar nessas etapas, foram apresentados respectivamente: (a) um sistema especialista que sistematizou o processo de escolha das técnicas, modelos e perspectivas pelo gestor; (b) uma compilação das equações das principais técnicas, modelos e perspectivas de análise de eficiência produtiva não-paramétricas (que são o foco desse trabalho) encontradas na literatura e (c) a apresentação das hipóteses, características e preceitos de cada técnica, modelo e perspectiva apresentada. O sistema especialista foi apresentado no Capítulo 7, já as equações e hipóteses das técnicas, modelos e perspectivas não-paramétricas de análise de eficiência produtiva foram apresentadas nos Capítulos 4 (dedicado à Análise por Envoltória de Dados - DEA) e 5 (dedicado a técnica dos Números Índices).

Outra conclusão obtida nesse trabalho é que uma técnica pode ser utilizada com diferentes modelos e diferentes perspectivas. Um modelo é uma representação da realidade a partir de um conjunto de hipóteses sendo que, o resultado obtido por uma técnica deve ser sempre interpretado de acordo com as hipóteses do modelo no qual essa técnica se apoiou. Uma perspectiva, por sua vez, é um ponto de vista; é um dos

diferentes ângulos sob os quais se pode analisar um modelo. As perspectivas se diferenciam em relação: (a) ao volume de informações fornecidas, (b) ao desempenho computacional e (c) a facilidade de entendimento pelo gestor.

Uma terceira conclusão obtida nesse trabalho é que as técnicas, modelos e perspectivas de análise de eficiência produtiva não são mutuamente excludentes, ou seja, cada técnica terá a sua serventia dependendo do tipo de análise que se deseja realizar e do tipo de dados que se tem disponível. Esse fato justificou a elaboração de um sistema especialista que orientasse a escolha das técnicas, modelos e perspectivas pelo gestor. O sistema que foi desenvolvido utiliza como parâmetros apenas algumas informações previamente requeridas ao usuário (a respeito dos dados e do tipo de análise desejada) e fornece como resultado a melhor combinação de técnica, modelo e perspectiva para aquele problema específico.

A última conclusão (importante principalmente na sistematização do processo de escolha) é que as técnicas, modelos e perspectivas de análise de eficiência produtiva (tanto paramétricas quanto não-paramétricas) podem ser representadas por meio de uma gigantesca árvore de decisão. Sendo assim, a escolha do vetor técnica/modelo/perspectiva pode ser realizada em etapas, partindo sempre da escolha do grupo (paramétrico ou não-paramétrico) e chegando até o último nível da perspectiva que será utilizada; cada uma das etapas do processo de escolha pode ser sistematizada a partir de algumas perguntas a respeito do tipo de análise que se deseja realizar e do tipo de dados que se tem em mãos.

Esse trabalho não teve a pretensão de apresentar todas as técnicas, modelos e perspectivas não-paramétricas de análise de eficiência produtiva encontradas na literatura; porém, acredita-se que o fundamental a respeito dessas técnicas esteja representado e que o que faltou se refira apenas a particularidades e casos muito

específicos. Mesmo assim, acredita-se que todo o conhecimento ausente a respeito dessas técnicas também possa ser incorporado à estrutura “técnica/modelo/perspectiva” e que seu processo de escolha também possa ser incorporado ao sistema especialista desenvolvido por esse trabalho, bastando para isso a correta inclusão desse conhecimento na árvore de decisão, ou seja, a correta classificação do conhecimento em técnica, modelo e perspectiva (e sendo perspectiva, a identificação de qual nível ela se encontra).

Uma primeira sugestão para trabalhos futuros, que surge a partir das conclusões desse trabalho, é a elaboração de um *software* que sistematizasse e integrasse todas as etapas do método de análise de eficiência produtiva descrito nesse trabalho. Assim, todas as etapas realizadas no estudo de caso apresentado no Capítulo 6, poderiam ser realizadas por meio de um único *software*. Nesse *software* existiriam pacotes onde todas as técnicas, modelos e perspectivas descritas estariam implementadas; também haveria um pacote onde estaria implementado o sistema especialista desenvolvido aqui. Com isso, as etapas de escolha e de utilização das técnicas de análise de eficiência produtiva seriam integradas em único *software* e assim, poderiam ser dispensadas as etapas de escolha da ferramenta computacional (já que um único *software* faria tudo) e de análise dos resultados (visto que o usuário já descreve antes, por meio do sistema especialista, o tipo de análise que deseja). Também poderiam ser implementados e integrados ao *software*, as técnicas de seleção de *inputs* e *outputs* (pouco exploradas nesse trabalho) fazendo com que o *software* tenha o poder de, automaticamente, eliminar as variáveis redundantes ou não-explicativas da análise.

Caso esse software único se mostrasse inviável, poderia-se estudar, ao menos, a possibilidade de se realizar *links* automáticos entre o sistema especialista e os *softwares* de implementação já existentes. Também poderia ser incorporado ao programa, junto da

tela de resultados, uma pequena explicação sobre cada técnica, modelo e perspectiva que orientaria o usuário a saber se a escolha do programa foi realmente adequada.

Outra sugestão para trabalhos futuros seria ampliar o escopo dessa dissertação por meio de um estudo mais geral do conceito de eficiência sendo que, inicialmente, poderiam ser estudadas as técnicas paramétricas de análise de eficiência produtiva (que foram apenas brevemente comentadas) e a seguir poder-se-ia partir para o estudo de técnicas de análise de outros tipos de eficiência como: (a) a eficiência alocativa e (b) a eficiência econômica. Também poderia ser utilizado o modelo de estrutura hierárquica desenvolvido por esse trabalho (que são os conceitos de método, técnica, modelo e perspectiva) para representar outros domínios do conhecimento e quem sabe até sistematizá-los de modo semelhante ao realizado aqui.

Bibliografia

ABEL, L. (2000). **Avaliação cruzada da produtividade dos departamentos acadêmicos da UFSC utilizando DEA (Data Envelopment Analysis)** Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Santa Catarina UFSC, Florianópolis.

ALMEIDA, M. R. (2007). **Inventario dos modelos, métodos e técnicas para avaliar a Eficiência técnica dos Investimentos em Infra-estrutura.** Dissertação (mestrado) Escola de Engenharia de São Carlos – EESC, Universidade de São Paulo – USP, São Carlos.

ALMEIDA, M. R. ; MARIANO, E. B. ; REBELATTO, D. A. N. (2007) Análise de Eficiência de Aeroportos Internacionais Brasileiros. **Revista Produção Online**, v.7, p.9.

ALMEIDA, M.R.; MARIANO, E.B.; REBELATTO, D.A.N. (2006). Análise Por Envoltória De Dados - Evolução E Possibilidades De Aplicação. In: IX SIMPOI - Simpósio de Administração de Produção, Logística e Operações Internacionais, São Paulo, **Anais**.

ANGULO MEZA, L. ; MELLO, J.C.C.B.S. ; CLÍMACO, J.C.N. (2006). Estudos conjuntos de análise envoltória de dados (DEA) e programação linear multiobjetivo (PLMO): Uma revisão bibliográfica. **Relatórios de Pesquisa em engenharia de Produção**. vol. 6, n. 5. Universidade Federal Fluminense.

AZAMBUJA, A.M.V (2002). **Análise de eficiência na gestão do transporte urbano por ônibus em municípios brasileiros.** Tese (doutorado), Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis.

BAJPAL, A.C.; MUSTOV L.R.; WALKER D. (1977). **Matemática avançada para engenheiros**. 77p, São Paulo:Hemus.

BANKER, R. D. et al (2004). Returns to scale in different DEA models. **European Journal of Operational Research**. vol. 154, cap. 2, 16 April 2004, p. 345-362

BARR, A.; FEIGENBAUM, E. (1981). **The Handbook of Artificial Intelligence**. Los Altos, California: William Kaufmann Inc., v.I.II.

BECKENKAMP, T. B. (2002). **Análise por envoltória de dados: considerações sobre o estabelecimento de restrições para os multiplicadores ótimos**. Tese (Doutorado), Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis.

BIONDI NETO, L. B.; MELLO, J. C. C. B. C.; GOMES, E.G. (2003). Método Fourier – DEA na medição de um componente da quantidade de energia elétrica. In: XXIII Encontro Nacional de Engenharia de Produção. Ouro Preto, 21 a 24 de outubro, **Anais**.

BRUNETTA M. R. (2004). **Avaliação da eficiência técnica e de produtividade usando Análise por Envoltória de Dados: Um estudo de caso aplicado a produtores de leite**. Dissertação (mestrado), Universidade federal do Paraná – UFP, Curitiba.

CAMPOS, V. F. (2004). **Qualidade total: padronização de empresas**. Nova Lima, MG: Tecnologia e Serviços, 2004.

CASA NOVA, S.P.C. (2002). **Utilização da análise por envoltória de dados (DEA) na análise de demonstrações contábeis**. Tese (Doutorado em Ciências Contábeis) - Universidade de São Paulo, São Paulo.

CATELLI, A. (1999). **Controladoria: uma abordagem da gestão econômica _ Gecon**. São Paulo: Atlas.

CERVO, A.L.; BERVIAN, P.A.(1983). **Metodologia Científica**. São Paulo, Markron.

CHARNES, et al. (1982). A multiplicative model for efficiency analysis. **Socio-Economic Planning Sciences**, vol 16, cap. 5, p. 223-224

CHARNES, A.; COOPER, W.W.; RHODES, E. (1978). Measuring the efficiency of decision-making units. **European Journal of Operational Research**, vol. 2, 429-444, 1978.

COOPER, W.; SIEFORD, L.; TONE, K. (2000). **Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, Reference and DEA–Solver software**. Kluwer Academic Publishers, Norwell.

CIVIL AVIATION AUTHORITY (2000). **The use of benchmarking in the airport reviews**. Civil Aviation Authority. Economic Regulation Group, Consultation Paper, dez.

COELLI, T. ; PRAZADA RAO, D. S. ; BATTESE, G. E. (1998). **Introduction to efficiency and productivity analysis**. Massachussets Kluwer Academic Publishers.

FÄRE, R. et al.. (1995). Productivity Developments in Swedish Hospitals: Malmquist Produto Index Approach. In: Charnes et al. (1995) **Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications**. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

FARRELL, M. J. (1957). The measurement of productive efficiency. **Journal of the Royal Statistical Society**, series A, v.120, part III, p. 253 – 281.

FERREIRA, A.A. ; REIS A.C. F. ; PEREIRA M. I. (1997). **Gestão Empresarial: de Taylor aos nossos dias – evolução e tendências da moderna administração de empresas**. São Paulo: Pioneira.

FERREIRA, A.B.H. (1975). **Novo dicionário de língua portuguesa**. São Paulo: Nova Fronteira.

FERGUSON, C.E. (1998). **Microeconomia**. 18.ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária.

FLORES, C. D. (2003). Fundamentos dos Sistemas Especialistas. In: BARONE, D. A. C. (Ed.). **Sociedades Artificiais: a nova fronteira da inteligência nas máquinas**. Porto Alegre: Bookman, p.332.

GIL, A.C. (1999). **Métodos e técnica de pesquisa social**. São Paulo: Atlas, 1999.

GIL, A.C. (2002). Como classificar as pesquisas. In: **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4.ed. São Paulo: Atlas, cap. 4, p. 41-57.

GOMES E.C.; MELLO J.C.C.B.S.; BIONDI NETO L. (2003). **Avaliação da eficiência por Análise por Envoltória de Dados: conceitos, aplicações a agricultura e integração com sistemas de informação geográfica**. Campinas: Embrapa Monitoramento por satélite. Documento, vol.28. 39p.

HOUAISS, A. (2001). **Dicionário Houaiss da língua portuguesa**. São Paulo: Objetiva.

KASSAI, S.(2002). **Utilização da análise por envoltórias de dados (DEA) na análise de demonstrações contábeis**. Tese (doutorado) Faculdade de Economia e Arquitetura - FEA - da USP. São Paulo.

KOHLER, H (1972). **Introdução a economia moderna**, vol. 2. Rio de Janeiro: Agir

KOZYREFF FILHO, E. ; MILIONI, A. Z. (2004). Um método para estimativa de metas DEA. **Revista Produção**. vol. 14, n. 2.

LINS, M. P. E. ; MEZA, L. A. (2000). **Análise Envoltória de Dados e Perspectivas de Integração no ambiente de Apoio à Decisão**. Rio de Janeiro: COPPE / UFRJ

LINS, M.P.E.; MOREIRA, M.C.B. (1999). **Método I-O stepwise para seleção de variáveis em modelos de análise envoltória de dados**. Pesquisa Operacional, vol. 19, n. 1, p. 39-50.

LORENZETT, J.R. (2004). **Aplicação do método de pesquisa operacional DEA na avaliação de desempenho de unidades produtivas para área de educação profissional**. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Florianópolis.

LOVELL, C. A. K. (1993). **Productions frontiers and productive efficiency. In The measurement of productive efficiency. Techniques and applications**. New York, Oxford: Oxford University Press.

MACEDO, M. A. S et al. (2005), Avaliação da Eficiência dos Investimentos em TI de Empresas de Tecnologia através da Análise Envoltória de Dados (DEA). In: VIII Seminários em Administração da USP - SEMEAD, São Paulo, **Anais**

MARIANO, E.B. (2005). **Descrição dos modelos matemáticos da Análise por envoltória de dados**. Trabalho de conclusão de curso, Escola de engenharia de São Carlos EESC- USP. São Carlos.

MARIANO, E.B.; ALMEIDA M.R.; REBELATTO, D.A.N. (2006a). Princípios Básicos para uma proposta de ensino sobre análise por envoltória de dados. In: XXXIV Congresso Brasileiro de Ensino em Engenharia (COBENGE), Passo Fundo. **Anais**.

MARIANO, E B ; ALMEIDA, M. R. ; REBELATTO, D. A. N. (2006b). Peculiaridades da Análise por Envoltória de Dados. In: XII Simpósio de Engenharia de Produção, Bauru. **Anais**.

MARTINS, P.G.; LAUGENI, F.P. (2005). **Administração da produção**. São Paulo: Saraiva, 2005.

MELLO, J. C. C. B. S. et al. (2002). Método multicritério para seleção de variáveis em modelos DEA. **Revista Pesquisa Naval**, v. 15, p. 55-66, 2002.

MELLO J. C. C. B. S.; et al.. (2004). **Suavização da fronteira DEA: o caso BCC tridimensional**. In: Associação Portuguesa de de investigação Operacional.

MELLO J. C. B. S. et al. (2005a). Curso de análise de Envoltória de Dados. In: XXXVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional – SBPO, Gramado, **Anais**.

MELLO J. C. B. S. et al. (2005b), Fronteiras DEA difusas, **Investigação Operacional**, Volume 25 p.85-103.

MILLER, R. L. (1981). **Microeconomia : teoria, questões e aplicação**. São Paulo: Mc-Graw-Hill.

MOITA M. H. V.(1995). **Medindo a eficiência relativa de escolas municipais da cidade do Rio Grande –RS usando a abordagem DEA (Data Envelopment Analysis)**. Dissertação (mestrado), Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis.

MOREIRA, D.A. (2002). **Administração da produção e operações**. São Paulo: Thomson Learning, p. 599 a 606

- MOREIRA, D.A. (1994). **Os benefícios da produtividade industrial**. São Paulo: Pioneira.
- MOREIRA, D. A. (1991). **Medida da produtividade da Empresa Moderna Medida da Produtividade na Empresa Moderna**. São Paulo: Pioneira, 147p.
- NIEDERAUER, C.A.P. (1998). **Avaliação dos bolsistas de produtividade em pesquisa da engenharia da produção utilizando data envelopment analysis**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1998.
- NOGUEIRA, J. H. M. et al.(1996) Expert SINTA : Uma Ferramenta Visual Geradora de Sistemas Especialistas. In VI Semana de Informática, Salvador. **Anais**
- NOVAES, L. F. L. (2002), **Envoltória Sob Dupla ótica aplicada na avaliação imobiliária em ambiente do sistema de informação geográfica**. Tese (Doutorado), Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, Rio de Janeiro.
- OLIVEIRA, H.C.; GOMES, A.P. (2003). Eficiência na agroindústria avícola mineira. In: Congresso de Ciências Humanas, Letras e Artes. Ouro Preto, 28 a 31 de agosto. **Anais**.
- RAMALHETE, M.; GUERRERO, J.; MAGALHÃES, A. (2004). **Programação linear**. São Paulo: Mcgraw-Hill do Brasil.
- REBELO, J. (2000). Medição da evolução da produtividade dos factores: o índice de Malmquist. In: **Gestão e desenvolvimento**, 9. p 43-79
- ROUSSEAU, R. (1998). Indicadores bibliométricos e econométricos para a avaliação de instituições científicas. In: **Ciência da Informação**. vol..27 n.2 Brasília
- RUGGIERO, J. (1998). Non-discretionary inputs in data envelopment analysis. In: **European Journal of Operational Research**, vol. 111, n.3, p. 461-469.
- SANDRONI, P. (1996). **Dicionário de administração e finanças**. São Paulo: Best Seller.
- SEIFORD, L.M.; THRALL, R.M. (1990). Recent developments in DEA: The mathematical programming approach to frontier analysis. **Journal of Econometrics** vol. 46, p. 7-38.
- SEIFORD, L.M. (1996). Data envelopment analysis: The evolution of the state of the art (1978-1995). **Journal of Productivity Analysis**, vol.7, p. 99-137.
- SENRA, L.F.A.C. (2004) **Métodos de seleção de variáveis em DEA: estudo de caso no setor elétrico brasileiro**. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro.
- SHIMONISHI M. L. S. (2005) **Análise por Envoltória de Dados Aplicada na Avaliação do Emprego dos Recursos Humanos dos Centros Municipais de**

Educação Infantil do Município de Maringá. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Paraná. Curitiba.

PAIVA JR, H. (2000). **Avaliação de desempenho de ferrovias utilizando a abordagem integrada DEA/AHP.** Campinas. 178p. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP. Campinas.

TAUILE, J.R.; DEBACO, E.S. (2002). Autogestão no Brasil: a viabilidade econômica de empresas geridas por trabalhadores Artigo apresentado no VII Encontro Nacional de Economia Política. Curitiba. **Anais.**

THANASSOULIS, E (2001). **Introduction to the theory and application of data envelopment analysis: a foundation text with integrated software,** Kluwer Academic Publishers.

VICENTE J.R., ANEFALOS L.C., CASER D.V. (2001). **Vieses no cálculo de Números-índices utilizando a fórmula de Törnqvist em séries com ausência de dados Informações econômicas,** vol.31, n 6. São Paulo, SP.

VILELA, D.L. (2004). **Utilização do método Análise Envoltório de Dados Para Avaliação do Desempenho Econômico de Cooperativas de Crédito.** Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, 2004.

<www2.mat.ua.pt/io/Documentos/Apontamentos/CapituloII_3.htm> **acessado em:**
14/01/2008

Apêndice 1 - Fórmulas de Projeção na Fronteira

A fórmula do cálculo da eficiência de uma DMU, a partir de sua fronteira de eficiência, deriva dos conceitos de eficiência e produtividade e do fato da projeção de uma DMU na fronteira ser uma estimativa para a produtividade máxima que pode ser alcançada por essa DMU. Partindo-se do conceito de eficiência e sabendo que a produtividade é a tangente do ângulo da reta que une a DMU à origem, podemos calcular a eficiência de uma DMU pela Expressão 186.

$$\text{Eficiência} = P / P_{\max} = (\text{tg } \alpha / \text{tg } \gamma) \quad (186)$$

Em que:

P: Produtividade atual de uma DMU;

P_{\max} : Produtividade máxima que pode ser alcançada por uma DMU;

α : Ângulo da reta que une a origem à DMU analisada;

γ : Ângulo da reta que une a origem à projeção da DMU analisada.

Assim, para o caso de orientação aos *outputs*, expresso na Figura 49, a eficiência pode ser calculada pela fórmula explicitada na Expressão 187. Essa fórmula, é facilmente provada a partir das definições e de conceitos de matemática básica.

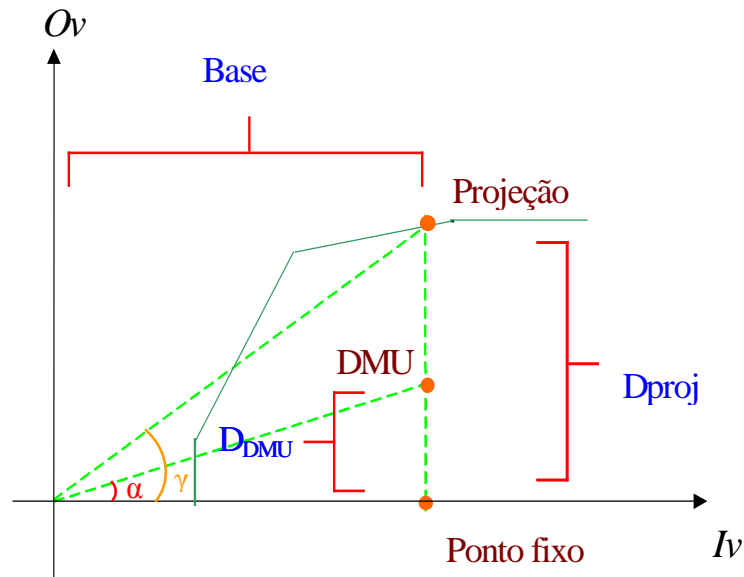


Figura 49 - Cálculo da eficiência pela orientação ao *output*

$$\begin{aligned} \text{Eficiência} &= (\operatorname{tg} \alpha) / (\operatorname{tg} \gamma) = (D_{\text{DMU}} / \text{Base}) / (D_{\text{proj}} / \text{Base}) = \\ &= (D_{\text{DMU}} / \text{Base}) * (\text{Base} / D_{\text{proj}}) = (D_{\text{DMU}} / D_{\text{proj}}) \end{aligned} \quad (187)$$

Em que:

α : Ângulo da reta que une a origem à DMU analisada;

γ : Ângulo da reta que une a origem à projeção da DMU analisada;

D_{DMU} : Distância de uma DMU até um ponto fixo;

D_{proj} : Distância da projeção de uma DMU até o mesmo ponto fixo;

Base: Distância da DMU até um ponto fixo obtida com uma orientação perpendicular a orientação adotada.

Já para o caso de orientação aos *inputs*, expresso na Figura 50, a eficiência pode ser calculada pela fórmula explicitada na Expressão 188:

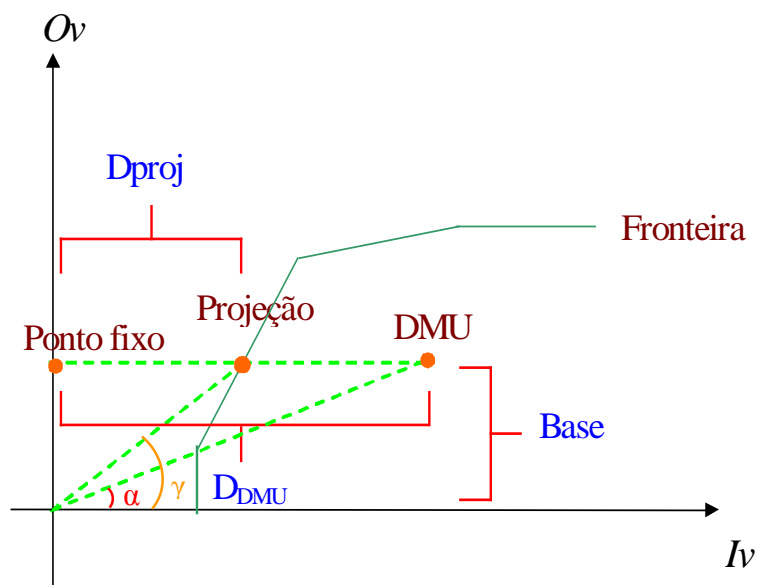


Figura 50 - Cálculo da eficiência pela orientação ao *input*

$$\begin{aligned} \text{Eficiência} &= (\text{tg } \alpha) / (\text{tg } \gamma) = (\text{Base} / D_{\text{DMU}}) / (\text{Base} / D_{\text{proj}}) = \\ &(\text{Base} / D_{\text{DMU}}) * (D_{\text{proj}} / \text{Base}) = (D_{\text{proj}} / D_{\text{DMU}}) \end{aligned} \quad (188)$$

Em que:

α : Ângulo da reta que une a origem à DMU analisada;

γ : Ângulo da reta que une a origem à projeção da DMU analisada;

D_{DMU} : Distância de uma DMU até um ponto fixo;

D_{proj} : Distância da projeção de uma DMU até um ponto fixo;

Base: Distância da DMU até um ponto fixo obtido com uma orientação perpendicular a orientação adotada.

No caso geral de uma orientação qualquer, como ilustrado na Figura 51, a eficiência pode ser calculada pela Expressão 189:

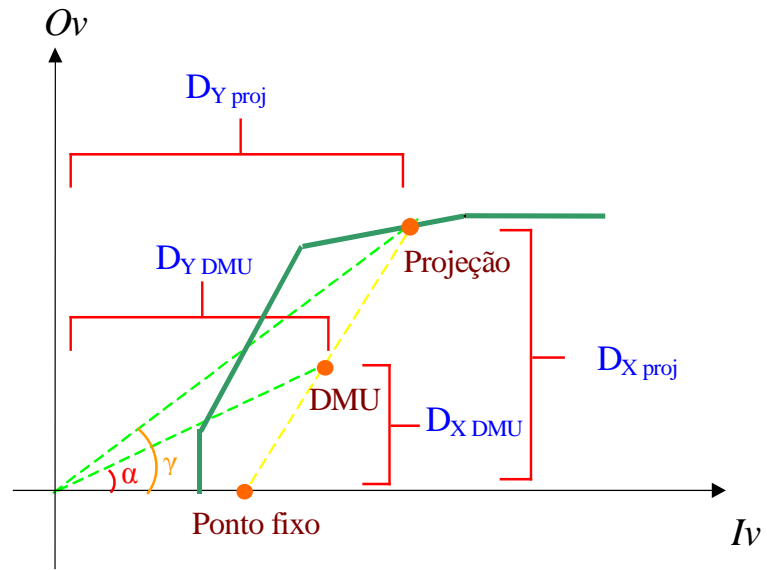


Figura 51 - Cálculo da eficiência por uma orientação qualquer

$$\begin{aligned} \text{Eficiência} &= (\operatorname{tg} \alpha) / (\operatorname{tg} \gamma) = (D_{XDMU} / D_{YDMU}) / (D_{Xproj} / D_{Yproj}) = \\ &= (D_{XDMU} / D_{YDMU}) * (D_{Yproj} / D_{Xproj}) = (D_{XDMU} * D_{Yproj}) / (D_{YDMU} * D_{Xproj}) \end{aligned} \quad (189)$$

Em que:

α : Ângulo da reta que une a origem à DMU analisada;

γ : Ângulo da reta que une a origem à projeção da DMU analisada;

D_{XDMU} : Distância de uma DMU até o eixo x;

D_{Xproj} : Distância da projeção de uma DMU até o eixo x;

D_{YDMU} : Distância de uma DMU até o eixo y;

D_{Yproj} : Distância da projeção de uma DMU até o eixo y.

Apêndice 2 – Programação Linear

Problemas de otimização são problemas que tentam determinar os extremos de funções que estão definidas sobre um certo domínio representado por um conjunto de restrições. Dentro da classe dos problemas de otimização assume particular relevância a programação matemática, que abrange a análise e estudo de sistemas; de forma a determinar o programa de ação mais adequado para se alcançar um determinado objetivo, tendo em conta as restrições que limitam seu comportamento. (RAMALHETE, GUERRERO E MAGALHÃES, 1984)

Um problema de programação matemática é denominado problema de programação linear (PL) quando tanto a função a ser otimizada (conhecida como função objetivo - FO), quanto às restrições a que ele está submetido forem lineares. Embora a exigência de linearidade possa parecer bastante limitante existem muitos problemas de maximização e minimização que se enquadram nessa situação (BAJPAI, MUSTOV e WALKER, 1977).

Um modelo matemático de programação matemática tem sempre a mesma estrutura básica: (a) um conjunto de variáveis que estão sujeitas a condições de não-negatividade, (b) uma função objetivo que deve ser maximizada ou minimizada e (c) um conjunto de restrições representadas por equações e/ou inequações matemáticas.

Nas Expressões 190 e 191 está representado um modelo básico de programação linear, sendo que x_j são as variáveis do problema. As constantes a_{ij} , b_i , c_j designam-se, respectivamente: (a) coeficientes tecnológicos, (b) termos independentes e (c) coeficientes da função objetivo.

Função objetivo

$$\text{MAX ou MIM } Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n \quad (190)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & [=, >, <, \leq \text{ ou } \geq] b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & [=, >, <, \leq \text{ ou } \geq] b_2 \\ & \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j & [=, >, <, \leq \text{ ou } \geq] b_i \\ & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & [=, >, <, \leq \text{ ou } \geq] b_m \end{aligned} \quad (191)$$

Resolver um problema de programação linear significa encontrar os valores para as variáveis do problema que otimizem (maximizem ou minimizem) a função objetivo e paralelamente satisfaçam todas as equações e/ou inequações que representam as restrições. Duas possíveis maneiras de se resolver um problema de programação linear são: (a) a técnica gráfica e o (b) Simplex.

Técnica gráfica é o nome dado ao procedimento de resolução de um problema de programação linear que utiliza, como base para a solução, uma representação gráfica do conjunto de soluções admissíveis do problema a ser resolvido. A técnica gráfica se restringe a problemas de até três variáveis devido ao fato do espaço apresentar apenas três dimensões e de cada variável, nessa técnica, precisar ocupar um eixo do espaço.

Para a resolução de um problema pela técnica gráfica é necessário primeiramente desenhar a figura formada pela intersecção dos pontos que satisfazem simultaneamente todas as restrições do problema. Essa figura é chamada de região das soluções admissíveis (Figura 52). Dentro desse conjunto, os pontos que ficam nos vértices são chamados de conjunto de soluções viáveis, pois são extremos da região de soluções admissíveis e assim possíveis candidatos a ponto ótimo. Para encontrarmos a solução ótima devemos representar a função objetivo graficamente por meio de uma reta, igualando-a a um determinado valor. A seguir, devemos deslocá-la paralelamente a si mesma até que ela intercepte o último ponto das soluções viáveis encontradas no passo anterior. Esse ponto encontrado será a solução ótima (ver Figura 53).

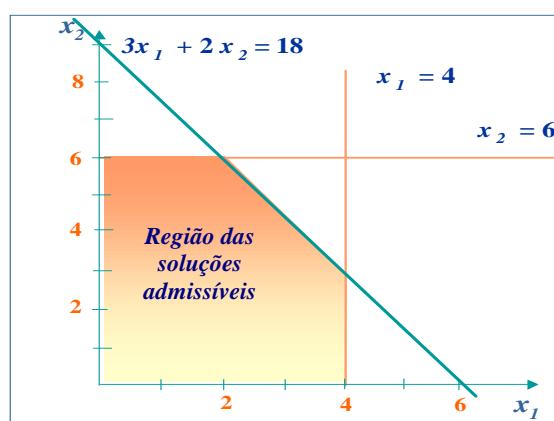


Figura 52 - Conjunto das soluções admissíveis
Fonte: www2.mat.ua.pt/io/Documentos/Apontamentos/CapituloII_3.htm

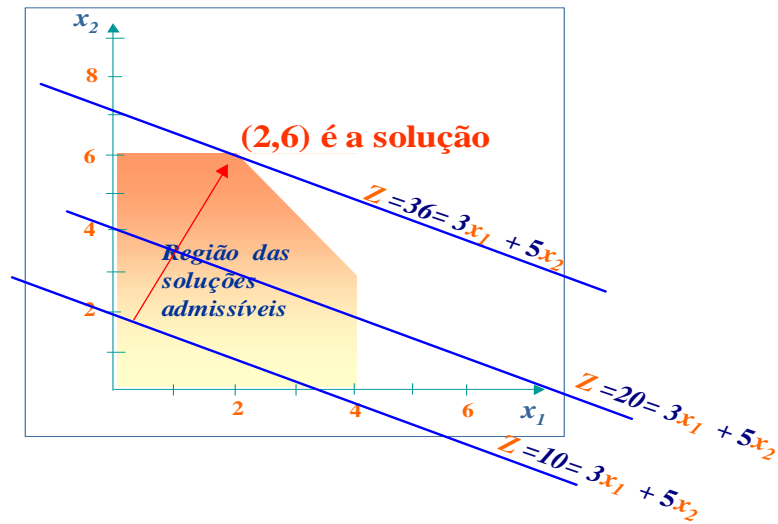


Figura 53 -Resolução de PL pelo método gráfico
 Fonte: www2.mat.ua.pt/io/Documentos/Apontamentos/CapituloII_3.htm

Segundo Ramalhete, Guerreiro e Magalhães (1984) o conjunto das soluções admissíveis de um problema de PL é sempre um conjunto convexo e fechado.

Já a técnica Simplex é uma técnica iterativa, facilmente programável que tem a capacidade de encontrar a solução de qualquer problema de programação linear. O simplex percorre todas as soluções viáveis do problema e converge para a solução ótima. A maioria dos softwares de resolução de PL utiliza simplex em sua programação.

Associado a cada problema de programação linear existe um outro problema de programação linear que se designa por Problema Dual. Nesta relação com o problema Dual o problema original é conhecido por problema Primal. Para qualquer par de problemas duais, a existência de solução ótima para um deles garante existência de solução ótima para ambos. Além disso, os valores das funções objetivo dos dois problemas após a otimização serão sempre iguais. Segundo Ramalhete, Guerreiro e Magalhães (1984), as razões que justificam o estudo da dualidade podem ser agrupadas em três categorias:

- 1) Primeiramente, a dualidade deu origem a um corpo de teoremas que muito contribuíram para fundamentação teórica de importantes capítulos da programação linear.
- 2) Em segundo lugar, o recurso da dualidade possibilitou avanços computacionais decisivos para a prática da programação linear, nomeadamente no desenvolvimento de novos algoritmos.
- 3) Finalmente, a dualidade enriqueceu consideravelmente a interpretação dos problemas econômicos, constituindo um importante instrumento no sistema de apoio a gestão, ao mesmo tempo em que clarificou muitos aspectos da moderna teoria econômica.

As regras de transformação de um problema Primal em seu Dual ou do Dual de volta para o seu Primal são as seguintes:

- 1) Cada restrição do problema Primal corresponde a uma variável do problema Dual; cada variável do problema Primal corresponde a uma restrição do problema Dual;
- 2) A matriz dos coeficientes técnicos do problema Dual é matriz transposta da matriz correspondentes técnicos do problema Primal (e vice-versa);
- 3) Os termos independentes do problema Primal são os coeficientes da função objetivo do problema Dual. Os coeficientes da função objetivo do problema Dual são os termos independentes do problema Primal;
- 4) Se o problema Primal for um problema de maximização, então o problema dual será um problema de minimização. Se o problema Primal for um problema de minimização então o seu Dual será um problema de maximização;

5) As restrições do tipo “<” e “≤” no problema Primal tornam-se respectivamente restrições do tipo “>” e “≥” no Problema Dual. Já restrições do tipo “>” e “≥” no problema Primal tornam-se respectivamente restrições do tipo “<” e “≤” no problema Dual. As restrições do tipo “=” são mantidas nos dois problemas.

As Expressões 192, 193, 194 e 195 apresentam um exemplo de um modelo de programação linear e o seu respectivo problema Dual.

MODELO PRIMAL

$$\text{MIM } 2.x_1 + 4.x_2 \quad (192)$$

Sujeito a:

$$3.x_1 + 2.x_2 > 5 \quad (193)$$

$$7x_1 + 12x_2 = 8$$

MODELO DUAL

$$\text{MIM } 5.y_1 + 8.y_2 \quad (194)$$

Sujeito a:

$$3.y_1 + 7.y_2 < 2 \quad (195)$$

$$2.y_1 + 12.y_2 = 4$$

Apêndice 3 – Base de regras de produção

Nesse Apêndice será apresentada a base de regras de produção que constitui o sistema especialista que foi desenvolvido para auxiliar no processo de escolha das técnicas, modelos e perspectivas de análise de eficiência produtiva. Como já mencionado esse sistema possui 66 regras de produção. As declarações e definições das variáveis envolvidas podem ser encontradas no Capítulo 7.

Regra 1

SE Pergunta 1 = Não

ENTÃO Grupo = Não-paramétrica

Regra 2

SE Pergunta 1 = Sim

E Pergunta 2 = 1

ENTÃO Grupo = Paramétrica

Regra 3

SE Pergunta 1 = Sim

E Pergunta 2 = 2 ou mais

ENTÃO Grupo = O tipo de dados e as aplicações entraram em contradição

Técnica = Não se aplica

Modelo = Não se aplica

Perspectiva de 1o nível = Não se aplica

Perspectiva de 2o nível = Não se aplica

Perspectiva de 3o nível = Não se aplica

Perspectiva de 4o nível = Não se aplica

Perspectiva de 5o nível = Não se aplica

Regra 4

SE Grupo = Paramétrica

E Pergunta 3 = Sim

ENTÃO Técnica = Fronteira Estocástica

Perspectiva de 5o nível = Não foi possível determinar

Perspectiva de 4o nível = Não foi possível determinar

Perspectiva de 3o nível = Não foi possível determinar

Perspectiva de 1o nível = Não foi possível determinar

Perspectiva de 2o nível = Não foi possível determinar

Modelo = Não foi possível determinar

Regra 5

SE Grupo = Paramétrica

E Pergunta 3 = Não

ENTÃO Técnica = Funções Pré-estabelecidas

Modelo = Não foi possível determinar

Perspectiva de 1o nível = Não foi possível determinar

Perspectiva de 2o nível = Não foi possível determinar

Perspectiva de 3o nível = Não foi possível determinar

Perspectiva de 4o nível = Não foi possível determinar

Perspectiva de 5o nível = Não foi possível determinar

Regra 6

SE Grupo = Não-paramétrica

E Pergunta 4 = Entre duas DMUs ou entre uma mesma DMU em dois períodos de tempo

ENTÃO Técnica = Números Índices

Regra 7

SE Grupo = Não-paramétrica

E Pergunta 4 = Entre várias DMUs

E Pergunta 5 = Sim

ENTÃO Técnica = Análise por Envoltória de Dados (DEA)

Regra 8

SE Grupo = Não-paramétrica

E Pergunta 4 = Entre várias DMUs

E Pergunta 5 = Não

ENTÃO Técnica = O tipo de dados e as aplicações solicitadas entraram em contradição

Modelo = Não se aplica

Perspectiva de 1o nível = Não se aplica

Perspectiva de 2o nível = Não se aplica

Perspectiva de 3o nível = Não se aplica

Perspectiva de 4o nível = Não se aplica

Perspectiva de 5o nível = Não se aplica

Regra 9

SE Técnica = Análise por Envoltória de Dados (DEA)

E Pergunta 6 = Apenas aos *inputs* ou aos *outputs*

ENTÃO Modelo intermediário = CCR, BCC e FDH

Regra 10

SE Técnica = Análise por Envoltória de Dados (DEA)

E Pergunta 6 = Mista, simultaneamente aos *inputs* e aos *outputs*

E Pergunta 7 = Não

ENTÃO Modelo intermediário = Aditivos e Multiplicativos

Regra 11

SE Técnica = Análise por Envoltória de Dados (DEA)

E Pergunta 6 = Mista, simultaneamente aos *inputs* e aos *outputs*

E Pergunta 7 = Sim

ENTÃO Modelo = As aplicações desejadas entram em contradição

Perspectiva de 1o nível = Não se aplica

Perspectiva de 2o nível = Não se aplica

Perspectiva de 3o nível = Não se aplica

Perspectiva de 4o nível = Não se aplica

Perspectiva de 5o nível = Não se aplica

Regra 12

SE Modelo intermediário = Aditivos e Multiplicativos

E Pergunta 8 = Multiplicativas - Permite calcular a elasticidade e a trabalhar com fronteiras côncavas

E Pergunta 9 = Eficiência total

ENTÃO Modelo = Multiplicativo Invariante

Regra 13

SE Modelo intermediário = Aditivos e Multiplicativos

E Pergunta 9 = Eficiência técnica

E Pergunta 8 = Multiplicativas - Permite calcular a elasticidade e a trabalhar com fronteiras côncavas

ENTÃO Modelo = Multiplicativo Variante

Regra 14

SE Modelo intermediário = Aditivos e Multiplicativos

E Pergunta 8 = Aditivas - Tem como base a menor distância entre a DMU e a fronteira

E Pergunta 9 = Eficiência total

ENTÃO Modelo = Aditivo Invariante

Regra 15

SE Modelo intermediário = Aditivos e Multiplicativos

E Pergunta 8 = Aditivas - Tem como base a menor distância entre a DMU e a fronteira

E Pergunta 9 = Eficiência técnica

ENTÃO Modelo = Aditivo Variante

Regra 16

SE Modelo intermediário = Aditivos e Multiplicativos

E Pergunta 10 = As metas e os *benchmarks* das DMUs ineficientes

ENTÃO Perspectiva de 1o nível = Dual

Regra 17

SE Modelo intermediário = Aditivos e Multiplicativos

E Pergunta 10 = As utilidades dos *inputs* e dos *outputs*

ENTÃO Perspectiva de 1o nível = Primal

Regra 18

SE Modelo intermediário = Aditivos e Multiplicativos

E Pergunta 10 = Nenhuma das duas informações é de seu interesse

ENTÃO Perspectiva de 1o nível = Primal ou Dual

Regra 19

SE Modelo intermediário = Aditivos e Multiplicativos

E Pergunta 11 = Sim

ENTÃO Perspectiva de 2o nível = Com restrições aos pesos

Regra 20

SE Modelo intermediário = Aditivos e Multiplicativos

E Pergunta 11 = Não

ENTÃO Perspectiva de 2o nível = Sem restrições aos pesos

Regra 21

SE Modelo intermediário = Aditivos e Multiplicativos

E Pergunta 12 = Sim

ENTÃO Perspectiva de 3o nível = Com variáveis ambientais

Perspectiva de 4o nível = Não se aplica

Perspectiva de 5o nível = Não se aplica

Regra 22

SE Modelo intermediário = Aditivos e Multiplicativos

E Pergunta 12 = Não

ENTÃO Perspectiva de 3o nível = Sem variáveis ambientais

Perspectiva de 4o nível = Não se aplica

Perspectiva de 5o nível = Não se aplica

Regra 23

SE Modelo intermediário = CCR, BCC e FDH

E Pergunta 13 = A eficiência Total

ENTÃO Modelo = CCR

Modelo intermediário 2 = CCR e BCC

Regra 24

SE Modelo intermediário = CCR, BCC e FDH

E Pergunta 13 = A eficiência Técnica utilizando como referência tanto DMUs reais quanto combinações lineares entre essas DMUs

ENTÃO Modelo = BCC

Modelo intermediário 2 = CCR e BCC

Regra 25

SE Modelo intermediário = CCR, BCC e FDH

E Pergunta 13 = A eficiência técnica utilizando como referência apenas DMUs reais

ENTÃO Modelo = FDH

Regra 26

SE Modelo intermediário = CCR, BCC e FDH

E Pergunta 14 = Determinar o grau de pertença de uma DMU difusa na fronteira

ENTÃO Perspectiva de 2o nível = Fronteira Difusa

Perspectiva de 2^o nível intermediária = Invertida e difusa

Regra 27

SE Modelo intermediário = CCR, BCC e FDH

E Pergunta 14 = Determinar o índice de eficiência de cada DMU, as metas e os *benchmarks* das DMUs ineficientes ou as utilidades dos *inputs* e *outputs* dessas DMUs

ENTÃO Perspectiva de 2o nível = Fronteira Clássica

Regra 28

SE Modelo intermediário = CCR, BCC e FDH

E Pergunta 14 = Determinar um índice combinado que possibilite um desempate entre as DMUs que foram eficientes pela fronteira clássica

ENTÃO Perspectiva de 2o nível = Fronteira Invertida

Perspectiva nível 2 intermediária = Invertida e difusa

Regra 29

SE Modelo intermediário = CCR, BCC e FDH

E Pergunta 15 = Sim

ENTÃO Perspectiva de 3o nível = Com restrições aos pesos

Regra 30

SE Modelo intermediário = CCR, BCC e FDH

E Pergunta 15 = Não

ENTÃO Perspectiva de 3o nível = Sem restrições aos pesos

Regra 31

SE Modelo intermediário = CCR, BCC e FDH

E Pergunta 16 = Sim

ENTÃO Perspectiva de 4o nível = Com variáveis ambientais

Perspectiva de 5o nível = Não se aplica

Regra 32

SE Modelo intermediário = CCR, BCC e FDH

E Pergunta 16 = Não

ENTÃO Perspectiva de 4o nível = Sem variáveis ambientais

Perspectiva de 5o nível = Não se aplica

Regra 33

SE Modelo intermediário 2 = CCR e BCC

E Perspectiva de 2o nível = Fronteira Clássica

E Pergunta 17 = Minimizando os *inputs* e mantendo os *outputs* constantes

E Pergunta 18 = As utilidades dos *inputs* e *outputs*

ENTÃO Perspectiva de 1o nível = Primal orientado ao *input*

Regra 34

SE Modelo intermediário 2 = CCR e BCC

E Perspectiva de 2o nível = Fronteira Clássica

E Pergunta 17 = Minimizando os *inputs* e mantendo os *outputs* constantes

E Pergunta 18 = As metas e os *benchmarks* das DMUs ineficientes

ENTÃO Perspectiva de 1o nível = Dual orientado ao *input*

Regra 35

SE Modelo intermediário 2 = CCR e BCC

E Perspectiva de 2o nível = Fronteira Clássica

E Pergunta 17 = Maximizando os *outputs* e mantendo os *inputs* constantes

E Pergunta 18 = As utilidades dos *inputs* e *outputs*

ENTÃO Perspectiva de 1o nível = Primal orientado ao *output*

Regra 36

SE Modelo intermediário 2 = CCR e BCC

E Perspectiva de 2o nível = Fronteira Clássica

E Pergunta 17 = Maximizando os *outputs* e mantendo os *inputs* constantes

E Pergunta 18 = As metas e os *benchmarks* das DMUs ineficientes

ENTÃO Perspectiva de 1o nível = Dual orientado ao *output*

Regra 37

SE Modelo intermediário 2 = CCR e BCC

E Perspectiva de 2o nível = Fronteira Clássica

E Pergunta 17 = Minimizando os *inputs* e mantendo os *outputs* constantes

E Pergunta 18 = Nenhuma das duas informações é do seu interesse

ENTÃO Perspectiva de 1o nível = Primal ou Dual orientado ao *input*

Regra 38

SE Modelo intermediário 2 = CCR e BCC

E Perspectiva de 2o nível = Fronteira Clássica

E Pergunta 17 = Maximizando os *outputs* e mantendo os *inputs* constantes

E Pergunta 18 = Nenhuma das duas informações é do seu interesse

ENTÃO Perspectiva de 1o nível = Primal ou Dual orientado ao *output*

Regra 39

SE Modelo intermediário 2 = CCR e BCC

E Perspectiva nível 2 intermediária = Invertida e difusa

E Pergunta 19 = Minimizando os *inputs* e mantendo os *outputs* constantes

ENTÃO Perspectiva de 1o nível = Primal ou Dual orientado ao *input*

Regra 40

SE Modelo intermediário 2 = CCR e BCC

E Perspectiva nível 2 intermediária = Invertida e difusa

E Pergunta 19 = Maximizando os *outputs* e mantendo os *inputs* constantes

ENTÃO Perspectiva de 1o nível = Primal ou Dual orientado ao *output*

Regra 41

SE Modelo = FDH

E Pergunta 20 = Minimizando os *inputs* e mantendo os *outputs* constantes

ENTÃO Perspectiva de 1o nível = Dual orientado ao *input*

Regra 42

SE Modelo = FDH

E Pergunta 20 = Maximizando os *outputs* e mantendo os *inputs* constantes

ENTÃO Perspectiva de 1o nível = Dual orientado ao *output*

Regra 43

SE Técnica = Números Índices

E Pergunta 21 = Entre duas DMUs diferentes

ENTÃO Modelo intermediário 2 = Outro Número Índice

Regra 44

SE Técnica = Números Índices

E Pergunta 21 = Entre uma mesma DMU em dois períodos

ENTÃO Modelo intermediário = Índice Malmquist ou outros Números Índices

Regra 45

SE Modelo intermediário = Índice Malmquist ou outros Números Índices

E Pergunta 22 = Um índice que trabalha com apenas dois pontos e não necessita de técnicas de apoio para ser calculado, mas que é menos preciso e não separa as alterações na eficiência das alterações tecnológicas

ENTÃO Modelo intermediário 2 = Outro Número índice

Regra 46

SE Modelo intermediário = Índice Malmquist ou outros Números Índices

E Pergunta 22 = Um índice mais preciso que permita separar as alterações tecnológicas das alterações na eficiência mas que, em compensação, precisa de técnicas de apoio para ser calculado

E Pergunta 23 = Sim

ENTÃO Modelo = Índice de Malmquist

Regra 47

SE Modelo intermediário = Índice Malmquist ou outros Números Índices

E Pergunta 22 = Um índice mais preciso que permita separar as alterações tecnológicas das alterações na eficiência mas que, em compensação, precisa de técnicas de apoio para ser calculado

E Pergunta 23 = Não

ENTÃO Modelo = O tipo de dados e as aplicações solicitadas entraram em contradição

Perspectiva de 1o nível = Não se aplica

Perspectiva de 2o nível = Não se aplica

Perspectiva de 3o nível = Não se aplica

Perspectiva de 4o nível = Não se aplica

Perspectiva de 5o nível = Não se aplica

Regra 48

SE Modelo = Índice de Malmquist

E Pergunta 28 = Análise por Envoltória de Dados (DEA)

ENTÃO Perspectiva de 1o nível = Análise por Envoltória de Dados (DEA)

Regra 49

SE Modelo = Índice de Malmquist

E Pergunta 28 = Fronteira Estocástica

ENTÃO Perspectiva de 1o nível = Fronteira Estocástica

Perspectiva de 2o nível = Não foi possível determinar

Perspectiva de 3o nível = Não foi possível determinar

Perspectiva de 4o nível = Não foi possível determinar

Perspectiva de 5o nível = Não foi possível determinar

Regra 50

SE Perspectiva de 1o nível = Análise por Envoltória de Dados (DEA)

E Pergunta 29 = Na eficiência Total

ENTÃO Perspectiva de 2o nível = CCR

Regra 51

SE Perspectiva de 1o nível = Análise por Envoltória de Dados (DEA)

E Pergunta 29 = Na eficiência Técnica utilizando como referência tanto DMUs reais quanto combinações lineares entre essas DMUs

ENTÃO Perspectiva de 2o nível = BCC

Regra 52

SE Perspectiva de 1o nível = Análise por Envoltória de Dados (DEA)

E Pergunta 29 = Na eficiência técnica utilizando como referência apenas DMUs reais

ENTÃO Perspectiva de 2o nível = FDH

Regra 53

SE Perspectiva de 1o nível = Análise por Envoltória de Dados (DEA)

E Pergunta 30 = Maximizando os *outputs* e mantendo os *inputs* constantes

ENTÃO Perspectiva de 3o nível = Primal ou Dual orientado ao *output*

Regra 54

SE Perspectiva de 1o nível = Análise por Envoltória de Dados (DEA)

E Pergunta 30 = Minimizando os *inputs* e mantendo os *outputs* constantes

ENTÃO Perspectiva de 3o nível = Primal ou Dual orientado ao *input*

Regra 55

SE Perspectiva de 1o nível = Análise por Envoltória de Dados (DEA)

E Pergunta 31 = Sim

ENTÃO Perspectiva de 4o nível = Com restrições aos pesos

Regra 56

SE Perspectiva de 1o nível = Análise por Envoltória de Dados (DEA)

E Pergunta 31 = Não

ENTÃO Perspectiva de 4o nível = Sem restrições aos pesos

Regra 57

SE Perspectiva de 1o nível = Análise por Envoltória de Dados (DEA)

E Pergunta 32 = Sim

ENTÃO Perspectiva de 5o nível = Com variáveis ambientais

Regra 58

SE Perspectiva de 1o nível = Análise por Envoltória de Dados (DEA)

E Pergunta 32 = Não

ENTÃO Perspectiva de 5o nível = Sem variáveis ambientais

Regra 59

SE Modelo intermediário 2 = Outro Numero Índice

E Pergunta 24 = Não

ENTÃO Modelo = O tipo de dados e as aplicações solicitadas entraram em contradição

Perspectiva de 1o nível = Não se aplica

Perspectiva de 2o nível = Não se aplica

Perspectiva de 3o nível = Não se aplica

Perspectiva de 4o nível = Não se aplica

Perspectiva de 5o nível = Não se aplica

Regra 60

SE Modelo intermediário 2 = Outro Numero Índice

E Pergunta 24 = Sim

E Pergunta 25 = Sim

ENTÃO Modelo = Índice de Fischer

Perspectiva de 2o nível = Não se aplica

Perspectiva de 3o nível = Não se aplica

Perspectiva de 4o nível = Não se aplica

Perspectiva de 5o nível = Não se aplica

Regra 61

SE Modelo intermediário 2 = Outro Numero Índice

E Pergunta 24 = Sim

ENTÃO Modelo intermediário 3 = Fischer ou Törnqvist

Regra 62

SE Modelo intermediário 3 = Fischer ou Törnqvist

E Pergunta 25 = Não

E Pergunta 27 = Um índice mais complexo, mais trabalhoso e mais preciso

ENTÃO Modelo = Índice de Törnqvist

Perspectiva de 2o nível = Não se aplica

Perspectiva de 3o nível = Não se aplica

Perspectiva de 5o nível = Não se aplica

Perspectiva de 4o nível = Não se aplica

Regra 63

SE Modelo intermediário 3 = Fischer ou Törnqvist

E Pergunta 25 = Não

E Pergunta 27 = Um índice menos complexo, menos trabalhoso e menos preciso

ENTÃO Modelo = Índice de Fischer

Perspectiva de 2o nível = Não se aplica

Perspectiva de 3o nível = Não se aplica

Perspectiva de 5o nível = Não se aplica

Perspectiva de 4o nível = Não se aplica

Regra 64

SE Modelo intermediário 2 = Outro Numero Índice

E Modelo = O tipo de dados e as aplicações solicitadas entraram em contradição

E Pergunta 26 = Olhando apenas os *outputs* e ignorando os *inputs*

OU Modelo intermediário = Outro Número Índice

E Modelo = O tipo de dados e as aplicações solicitadas entraram em contradição

E Pergunta 26 = Olhando apenas os *outputs* e ignorando os *inputs*

ENTÃO Perspectiva de 1o nível = Orientação aos *outputs*

Regra 65

SE Modelo intermediário 2 = Outro Numero Índice

E Modelo = O tipo de dados e as aplicações solicitadas entraram em contradição

E Pergunta 26 = Olhando para produtividade

OU Modelo intermediário = Outro Número Índice

E Modelo = O tipo de dados e as aplicações solicitadas entraram em contradição

E Pergunta 26 = Olhando para produtividade

ENTÃO Perspectiva de 1o nível = Orientação a produtividade

Regra 66

SE Modelo intermediário 2 = Outro Numero índice

E Modelo = O tipo de dados e as aplicações solicitadas entraram em contradição

E Pergunta 26 = Olhando apenas para os *inputs* e ignorando os *outputs*

OU Modelo intermediário = Outro Número Índice

E Modelo = O tipo de dados e as aplicações solicitadas entraram em contradição

E Pergunta 26 = Olhando apenas para os *inputs* e ignorando os *outputs*

ENTÃO Perspectiva de 1o nível = Orientação aos *inputs*