Serviço de Pós-Graduação EESC/USP

EXEMPLAR REVISADO

Data de entrada no Serviço: 17/03/03

Ass.: *[Assinatura]*

DESENVOLVIMENTO DE SISTEMAS DE CONTROLE
ÓTIMO PARA A OPERAÇÃO DE PROCESSOS
AERÓBIOS DE TRATAMENTO DE ESGOTOS

José Antonio Tosta dos Reis

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Hidráulica e Saneamento.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Fazal Hussain Chaudhry

DEDALUS - Acervo - EESC

31100043068

São Carlos
2003

Class.	TESE-EESC
Cutt.	4720
Tombo	T 123103
Sysno	1314349

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento da
Informação do Serviço de Biblioteca

R375d

Reis, José Antônio Tosta dos

Desenvolvimento de sistemas de controle ótimo para a
operação de processos aeróbios de tratamento de esgotos /
José Antônio Tosta dos Reis. -- São Carlos, 2002.

Tese (Doutorado) -- Escola de Engenharia de São
Carlos-Universidade de São Paulo, 2002.

Área: Hidráulica e Saneamento.

Orientador: Prof. Dr. Fazal Hussain Chaudhry.

1. Controle ótimo. 2. Controle automático.
3. Tratamento de esgotos. 4. Lodos ativados. 5. Filtros
biológicos. 6. Processos combinados de tratamento de
esgotos. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **JOSÉ ANTÔNIO TOSTA DOS REIS**

Tese defendida e julgada em 17/01/2003 perante a Comissão Julgadora:

Prof. Tit. **FAZAL HUSSAIN CHAUDHRY (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

Prof. Dr. **MARCELO ZAIAT**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **MARCO HENRIQUE TERRA**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **ROBERT SCHIAVETO DE SOUZA**
(Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/UFMS)

APROVADO

Prof. Dr. **ANTONIO JOSÉ GONÇALVES DA CRUZ**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO

Prof. Associada **MARIA DO CARMO CALIJURI**
Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia (Hidráulica e Saneamento) e
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Dedicatória

*À minha esposa, Adriana,
fonte permanente de incentivo e carinho.*

*Aos meus pais, Carlos e Maria,
meus exemplos ao longo de toda a vida.*

AGRADECIMENTOS

Ao professor e amigo Fazal Hussain Chaudhry, pela permanente e dedicada orientação ao longo deste trabalho e pelo incondicional apoio e incentivo nos momentos difíceis que experimentei nos últimos anos.

Ao professor Marco Henrique Terra, pela atenção e paciência ao me apresentar muitos dos conceitos empregados neste trabalho.

Aos meus pais, Carlos Ledyr dos Reis e Maria Tosta dos Reis, por todo o suporte que representam.

Ao meu irmão, Luis Carlos Tosta dos Reis, e aos colegas do Laboratório de Simulação Computacional, por partilharem comigo as angústias e dificuldades do caminho de um doutorando.

Ao Centro Federal de Educação Tecnológica do Espírito Santo, que criou condições para que eu permanecesse afastado das atividades docentes nos dois primeiros anos deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pela concessão de bolsa de estudos.

Aos professores do Departamento de Hidráulica e Saneamento, em particular à professora Luisa Fernanda Ribeiro Reis e aos professores José Roberto Campos e Marcelo Zaiat, a quem pude recorrer em diferentes fases deste trabalho e de quem sempre recebi atenciosas orientações.

Às Senhoras Pavi e Sá, por seu eficiente e dedicado atendimento junto à secretaria do Departamento de Hidráulica e Saneamento.

Aos funcionários da Biblioteca Central, pelo eficiente e atencioso atendimento ao longo de todas as fases deste trabalho.

À minha esposa, Adriana de Oliveira dos Reis, por seu carinho, apoio e permanente incentivo, mesmo nos momentos em que as várias centenas de quilômetros que nos afastavam tornavam difícil nossa caminhada.

A todos, minha sincera gratidão...

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	iv
LISTA DE TABELAS E QUADROS.....	xv
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xvii
RESUMO.....	xxi
ABSTRACT.....	xxii
1 – INTRODUÇÃO.....	2
2 – OBJETIVOS.....	6
2.1 – Objetivo geral.....	6
2.2 – Objetivos específicos.....	6
3 – CONTROLE ÓTIMO.....	8
3.1 – Considerações gerais.....	8
3.2 – Aspectos históricos.....	8
3.3 – Classificação dos sistemas de controle.....	11
3.4 – Natureza geral do problema de controle.....	12
3.5 – Representação de sistemas dinâmicos no espaço de estados.....	13
3.6 – Controlabilidade e Observabilidade de sistemas dinâmicos.....	19
3.6.1 – Controlabilidade.....	20
3.6.2 – Observabilidade.....	21
3.7 – Estabilidade de sistemas dinâmicos.....	23
3.7.1 – Algumas definições de estabilidade.....	23
3.7.2 – Estabilidade de sistemas lineares e invariantes no tempo.....	25
3.8 – Controle Ótimo de sistemas contínuos no tempo.....	27
3.9 – Controle Ótimo de sistemas discretos no tempo.....	30
3.10 – Controle ótimo em estado estacionário de sistemas discretos no tempo.....	33
3.11 – Distúrbios externos.....	34
3.12 – Observadores de estados.....	35
4 – SISTEMAS DE TRATAMENTO DE ESGOTOS E SUA MODELAGEM.....	41
4.1 – Considerações gerais.....	41
4.2 – Lodos Ativados.....	41
4.3 – Filtros Biológicos.....	44

4.4 – Processos Combinados.....	46
4.5 – Modelagem dos processos de lodos ativados.....	49
4.5.1 – Tanque de aeração.....	49
4.5.2 – Decantador secundário.....	57
4.6 – Modelagem dos filtros biológicos.....	61
4.6.1 – Mecanismos básicos envolvidos na formação do biofilme.....	62
4.6.2 – Modelo para o cálculo do fluxo de substrato em biofilmes profundos.....	66
4.6.3 – Modelo para o cálculo do fluxo de substrato em biofilmes rasos e biofilmes completamente penetrados.....	68
5 – CONTROLE DE SISTEMAS DE TRATAMENTO DE ESGOTOS.....	72
5.1 – Considerações gerais.....	72
5.2 – Estratégias de controle dos processos de lodos ativados.....	74
5.2.1 – Controle Convencional dos processos de lodos ativados.....	76
5.2.2 – Controle Moderno dos processos de lodos ativados.....	77
5.3 – Estratégias de controle dos filtros biológicos.....	87
6 – METODOLOGIA.....	91
6.1 – Considerações gerais.....	91
6.2 – Modelos matemáticos utilizados.....	91
6.2.1 – Processo de lodos ativados.....	91
6.2.2 – Filtros Biológicos.....	94
6.2.3 – Processos combinados.....	96
6.3 – Linearização dos modelos dinâmicos.....	99
6.4 – Definição das matrizes de ponderação do índice quadrático de desempenho.....	102
6.5 – Descrição dos sistemas de tratamento estudados.....	104
6.5.1 – Lodos ativados.....	104
6.5.2 – Filtro biológico.....	105
6.5.3 – Processos combinados.....	106
6.6 – Simulações Computacionais.....	109
7 – RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	113
7.1 – Considerações Gerais.....	113
7.2 – Processo de lodos ativados.....	113
7.2.1 – Tanque de aeração.....	113
7.2.2 – Tanque de aeração e decantador secundário.....	132
7.3 – Filtros biológicos.....	148
7.4 – Processos combinados.....	166
7.5 – Observadores de estado.....	183

7.5.1 – Tanque de aeração.....	183
7.5.2 – Tanque de aeração e decantador secundário.....	189
7.5.3 – Filtros biológicos.....	195
7.5.4 – Processos combinado.....	201
8 – CONCLUSÕES.....	203
ANEXO I.....	211
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	232

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 3.1 – Controlador centrífugo proposto por James Watt (LEWIS, 1992).....	09
FIGURA 3.2 – Representação esquemática de sistemas de controle a malha aberta e sistemas de controle a malha fechada.....	12
FIGURA 3.3 – Representação esquemática de um sistema dinâmico.....	14
FIGURA 3.4 – Diagrama de blocos para um sistema linear e invariante no tempo representado no espaço de estados.....	16
FIGURA 3.5 – Estabilidade segundo as proposições de Lyapunov, estabilidade assintótica e instabilidade	25
FIGURA 3.6 – Regiões de estabilidade para os sistemas contínuos no tempo e discretos no tempo.	27
FIGURA 3.7 – Diagrama de blocos do sistema de controle ótimo.....	28
FIGURA 3.8 – Diagrama de blocos do sistema de controle ótimo, considerada a ação dos distúrbios externos.....	35
FIGURA 3.9 – Diagrama de blocos do sistema de controle proposto, considerada a incorporação do observador de estados.	39
FIGURA 4.1 – Sistema de lodos ativados convencional.....	42
FIGURA 4.2 – Sistema de lodos ativados com aeração prolongada.....	43
FIGURA 4.3 – Representação esquemática dos filtros biológicos com um e dois estágios, incluindo as diferentes possibilidades de recirculação (METCALF & EDDY, 1991).....	45
FIGURA 4.4 – Representação esquemática do Sistema Combinado.....	47
FIGURA 4.5 – Representação esquemática de possíveis arranjos para o Sistema Combinado: Filtro biológico / tanque de contato e filtro biológico grosseiro / lodos ativados, Biofiltro ativado / lodos ativados e Filtro biológico e lodos ativados convencional em série (METCALF & EDDY, 1991).	48

FIGURA 4.6 – Diagrama de fluxo para o modelo proposto pela IAWPRC (GRADY, 1989).....	49
FIGURA 6.1 – Valores de fluxo de substrato estimados pelos modelos de ordem variável e polinomial de sexta ordem.....	95
FIGURA 6.2 – Representação gráfica das funções degrau, pulso e senoidal	110
FIGURA 6.3 – Simulações realizadas para os diferentes sistemas de tratamento de esgotos estudados	111
FIGURA 7.1 – Autovalores do sistema que descreve o comportamento do tanque de aeração do processo de lodos ativados – resultados para o caso contínuo	115
FIGURA 7.2 – Resposta a condições iniciais arbitrárias dos desvios das variáveis de estados que caracterizam o tanque de aeração, sem a ação do controlador – resultados para o caso contínuo	116
FIGURA 7.3 – Resposta a condições iniciais arbitrárias dos desvios das variáveis de estados que caracterizam o tanque de aeração, com a ação do controlador – resultados para o caso contínuo	116
FIGURA 7.4 – Desvios apresentados pelas variáveis de controle do processo na simulação em que se avalia a resposta a condições iniciais arbitrárias das variáveis de estados – resultados para o caso contínuo	117
FIGURA 7.5 – Desvios das variáveis de estado, sem a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	118
FIGURA 7.6 – Desvios das variáveis de estado, com a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	119
FIGURA 7.7 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	120
FIGURA 7.8 – Desvios das variáveis de estado, sem a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	121
FIGURA 7.9 – Desvios das variáveis de estado, com a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	122

FIGURA 7.10 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	123
FIGURA 7.11 – Desvios das variáveis de estado, sem a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente	124
FIGURA 7.12 – Desvios das variáveis de estado, com a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente	124
FIGURA 7.13 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente	125
FIGURA 7.14 – Desvios das variáveis de estado, com a ação do controlador, considerando que nenhuma variável de estado foi privilegiada	126
FIGURA 7.15 – Desvios das variáveis de estado, com a ação do controlador, considerando a majoração do coeficiente de ponderação da fração lentamente biodegradável do substrato.....	126
FIGURA 7.16 – Desvios das variáveis de estado, com a ação do controlador, considerando a majoração do coeficiente de ponderação da fração lentamente biodegradável do substrato.....	127
FIGURA 7.17 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, considerando que nenhuma variável de estado foi privilegiada.....	127
FIGURA 7.18 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, considerando a majoração do coeficiente de ponderação da biomassa.....	127
FIGURA 7.19 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, considerando a majoração do coeficiente de ponderação da fração lentamente biodegradável do substrato.....	128
FIGURA 7.20 – Autovalores do sistema que descreve o comportamento do tanque de aeração do processo de lodos ativados – resultados para o caso discreto	129
FIGURA 7.21 – Desvios apresentados pelas variáveis de estado, considerados os sistemas não controlados (esquerda) e controlados (direita), a partir de diferentes padrões de variação da vazão afluyente – resultados para o caso discreto	130

FIGURA 7.22 – Desvios apresentados pelas variáveis de controle, a partir da imposição de diferentes padrões de variação da vazão afluyente – resultados para o caso discreto	131
FIGURA 7.23 – Autovalores do sistema que descreve o comportamento do processo de lodos ativados, incluída a dinâmica do decantador secundário – resultados para o caso contínuo	134
FIGURA 7.24 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	135
FIGURA 7.25 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	135
FIGURA 7.26 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	137
FIGURA 7.27 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	138
FIGURA 7.28 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	138
FIGURA 7.29 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	138
FIGURA 7.30 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	139
FIGURA 7.31 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	140
FIGURA 7.32 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	141

FIGURA 7.33 – Autovalores do sistema que descreve o comportamento do processo de lodos ativados no caso discreto, incluída a dinâmica do decantador secundário – resultados para o caso discreto ...142

FIGURA 7.34 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – respostas para o caso discreto144

FIGURA 7.35 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – respostas para o caso discreto144

FIGURA 7.36 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – respostas para o caso discreto145

FIGURA 7.37 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – respostas para o caso discreto145

FIGURA 7.38 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – respostas para o caso discreto146

FIGURA 7.39 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – respostas para o caso discreto146

FIGURA 7.40 – Desvios apresentados pelas variáveis de controle, em resposta aos diferentes padrões de variação da vazão afluyente147

FIGURA 7.41 – Concentrações adimensionalizadas de substrato na camada de fundo do filtro, função do número de camadas adotadas nas diferentes simulações.....149

FIGURA 7.42 – Espessuras adimensionalizadas de biofilme no fundo do filtro, função do número de camadas adotadas nas diferentes simulações.....149

FIGURA 7.43 – Autovalores do sistema que descreve o comportamento dos filtros biológicos – resultados para o caso contínuo152

FIGURA 7.44 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	153
FIGURA 7.45 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	154
FIGURA 7.46 – Desvios da vazão de recirculação do filtro biológico, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	154
FIGURA 7.47 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	155
FIGURA 7.48 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	155
FIGURA 7.49 – Desvios da vazão de recirculação do filtro biológico, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	156
FIGURA 7.50 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	157
FIGURA 7.51 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	158
FIGURA 7.52 – Desvios da vazão de recirculação do filtro biológico, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo	158
FIGURA 7.53 – Autovalores do sistema que descreve o comportamento dos filtros biológicos – resultados para o caso discreto	161
FIGURA 7.54 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso discreto	162

FIGURA 7.55 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluenta – resultados para o caso discreto	162
FIGURA 7.56 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluenta – resultados para o caso discreto	163
FIGURA 7.57 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluenta – resultados para o caso discreto	163
FIGURA 7.58 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluenta – resultados para o caso discreto	164
FIGURA 7.59 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluenta – resultados para o caso discreto	164
FIGURA 7.60 – Desvios apresentados pela vazão de recirculação do filtro, em resposta aos diferentes padrões de variação da vazão afluenta – resultados para o caso discreto	165
FIGURA 7.61 – Concentrações de equilíbrio para as diferentes variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e decandador secundário (direita), função da fração de biomassa ativa afluenta ao tanque de aeração.....	168
FIGURA 7.62 – Concentrações de equilíbrio para as diferentes variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e decandador secundário (direita), função da fração de substrato rapidamente biodegradável afluenta ao tanque de aeração.....	169
FIGURA 7.63 – Autovalores do sistema que descreve o comportamento dos processos combinados – resultados para o caso contínuo.....	172
FIGURA 7.64 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau na vazão afluenta – resultados para o caso contínuo.....	174

FIGURA 7.65 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.....174

FIGURA 7.66 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.....175

FIGURA 7.67 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.....176

FIGURA 7.68 – Desvios apresentados pelas variáveis de controle dos processos combinados, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.....176

FIGURA 7.69 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.....177

FIGURA 7.70 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.....177

FIGURA 7.71 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.....178

FIGURA 7.72 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.....179

FIGURA 7.73 – Desvios apresentados pelas variáveis de controle dos processos combinados, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.....179

FIGURA 7.74 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.....180

FIGURA 7.75 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.....	180
FIGURA 7.76 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.....	181
FIGURA 7.77 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.....	181
FIGURA 7.78 – Desvios apresentados pelas variáveis de controle dos processos combinados, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.....	182
FIGURA 7.79 – Desvios das variáveis de estado, sem a ação do controlador e com a utilização do modelo simplificado, em resposta a uma variação degrau na vazão afluyente – resultados para o caso discreto.....	185
FIGURA 7.80 – Desvios das variáveis de estado, com a ação do controlador e com a utilização do modelo simplificado, em resposta a uma variação degrau na vazão afluyente – resultados para o caso discreto.....	186
FIGURA 7.81 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, com a utilização do modelo simplificado, em resposta a uma variação degrau na vazão afluyente – resultados para o caso discreto.....	186
FIGURA 7.82 – Resposta a condições iniciais arbitrárias das variáveis de estados que caracterizam o tanque de aeração, sem a ação do controlador.....	187
FIGURA 7.83 – Resposta a condições iniciais arbitrárias das variáveis de estados que caracterizam o tanque de aeração, com a ação do controlador e sem observador de estados.....	188
FIGURA 7.84 – Resposta a condições iniciais arbitrárias das variáveis de estados que caracterizam o tanque de aeração, com a ação do controlador e com observador de estados.....	188

FIGURA 7.85 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador e com a utilização do modelo simplificado, em resposta a uma variação degrau na vazão afluyente – resultados para o caso discreto.....	191
FIGURA 7.86 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador e com a utilização do modelo simplificado, em resposta a uma variação degrau na vazão afluyente – resultados para o caso discreto.....	192
FIGURA 7.87 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, com a utilização do modelo simplificado, em resposta a uma variação degrau na vazão afluyente – resultados para o caso discreto.....	192
FIGURA 7.88 – Resposta a condições iniciais arbitrárias das variáveis de estados que caracterizam o tanque de aeração (esquerda) e última camada do decantador secundário (direita), sem a ação do controlador.....	194
FIGURA 7.89 – Resposta a condições iniciais arbitrárias das variáveis de estados que caracterizam o tanque de aeração (esquerda) e última camada do decantador secundário (direita), com a ação do controlador e sem observador de estados.....	194
FIGURA 7.90 – Resposta a condições iniciais arbitrárias das variáveis de estados que caracterizam o tanque de aeração (esquerda) e última camada do decantador secundário (direita), com a ação do controlador e com observador de estados.....	194
FIGURA 7.91 – Desvios das concentrações de substrato, sem a ação do controlador e com a utilização do modelo simplificado, em resposta a uma variação degrau na vazão afluyente – resultados para o caso discreto.....	197
FIGURA 7.92 – Desvios das concentrações de substrato, com a ação do controlador e com a utilização do modelo simplificado, em resposta a uma variação degrau na vazão afluyente – resultados para o caso discreto.....	198
FIGURA 7.93 – Desvios da vazão de recirculação do filtro, e com a utilização do modelo simplificado, em resposta a uma variação degrau na vazão afluyente – resultados para o caso discreto.....	198

FIGURA 7.94 – Resposta a condições iniciais arbitrárias das concentrações de substrato, sem a ação do controlador.....199

FIGURA 7.95 – Resposta a condições iniciais arbitrárias das concentrações de substrato, com a ação do controlador e sem observador de estados.....200

FIGURA 7.96 – Resposta a condições iniciais arbitrárias das concentrações de substrato, com a ação do controlador e com observador de estados.....200

LISTA DE TABELAS E QUADROS

TABELA 4.1 – Características operacionais dos diferentes tipos de filtro biológico.....	46
TABELA 4.2 – Processos cinéticos e estequiometria para oxidação do carbono, nitrificação e desnitrificação.....	55
TABELA 6.1 – Constantes empregadas na modelagem do processo de lodos ativados.....	104
TABELA 6.2 – Características do material orgânico presente no afluente ao processo.....	105
TABELA 6.3 – Características físicas das unidades e as vazões, em regime permanente, para cada uma das unidades que constituem o sistema.....	105
TABELA 6.4 – Constantes empregadas na modelagem do processo do filtro biológico.....	106
TABELA 6.5 – Características do material orgânico presente no afluente, características físicas do reator e vazões, em regime permanente, afluentes e efluente do filtro biológico.....	106
TABELA 6.6 – Características físicas das unidades e as vazões, em regime permanente, para cada uma das unidades que constituem o processo combinado.....	107
TABELA 6.7 – Informações adicionais utilizadas para o dimensionamento dos processos combinados.....	107
TABELA 6.8 – Constantes empregadas no dimensionamento dos filtros biológicos.....	108
TABELA 6.9 – Constantes empregadas na modelagem do processo de lodos ativados.....	108
TABELA 6.10 – Constantes empregadas na modelagem do tanque de aeração e do decantador secundário.....	108
QUADRO 7.1 – Combinação das variáveis de estado que garantem a completa observabilidade de estados para os processos de lodos ativados, excluída a dinâmica do decantador	184
QUADRO 7.2 – Combinação das variáveis de estado que garantem a completa observabilidade de estados para os processos de lodos ativados, excluída a dinâmica do decantador.....	189

QUADRO 7.3 – Combinação das variáveis de estado que garantem a completa observabilidade de estados para os filtros biológicos.....	195
--	-----

LISTA DE SÍMBOLOS

- a – elemento da matriz de estado
 A_s – área da seção transversal do decantador
 A – matriz de estado para o caso contínuo
 b – elemento da matriz de entrada
 b_a – constante de decaimento da biomassa autotrófica
 b_h – constante de decaimento da biomassa heterotrófica
 b' – coeficiente de perda global de biomassa nos biofilmes
 B – matriz de entrada para o caso contínuo
 c – elemento da matriz de saída
 C – concentração
 C – matriz de saída
 d – elemento da matriz de transmissão direta
 D – coeficiente de difusão do substrato na massa líquida
 D_f – coeficiente de difusão do substrato no biofilme
 D_i – coeficiente de dispersão
 D_w – matriz de distúrbios
 D – matriz de transmissão direta
 e – vetor erro
 f_p – fração de biomassa que produz particulados
 f – função vetorial
 g – função vetorial
 G – matriz de estado para o caso discreto
 h – distância vertical
 H – matriz de entrada para o caso discreto
 i_{XB} – relação massa N / massa DQO presente na biomassa
 i_{XP} – relação massa N / massa DQO presente nos produtos da biomassa
 I – matriz identidade
 J – fluxo de substrato para o interior do biofilme
 J_s – fluxo de sedimentação dos sólidos
 J – índice de desempenho
 J_x – matriz Jacobiana
 J_u – matriz Jacobiana
 J_w – matriz Jacobiana
 k_H – taxa de hidrólise específica máxima do material lentamente biodegradável
 k_m – coeficiente de transporte de massa no meio líquido
 k_{no} – constante de saturação do nitrato para biomassa heterotrófica desnitrificante
 k_o – constante de saturação para o oxigênio para biomassa heterotrófica

- k_{oa} – constante de saturação para o oxigênio para biomassa autotrófica
- k_s – constante de saturação para o substrato
- k_x – constante de saturação para hidrólise do material lentamente biodegradável
- K – matriz de ganho de realimentação do controlador
- K_e – matriz de ganho do observador
- L – espessura da camada de difusão
- L^* – espessura adimensionalizada da camada de difusão
- L_f – espessura da camada de biofilme
- L_f^* – espessura adimensionalizada da camada de biofilme
- L_n – espessura de biofilme na última camada do filtro biológico
- L_{n-1} – espessura de biofilme na penúltima camada do filtro biológico
- M – matriz de Controlabilidade
- n – constante de sedimentabilidade
- N – matriz de Observabilidade
- q_i – elemento da matriz de ponderação
- Q – vazão
- Q_i – vazão afluenta
- Q_o – vazão efluente
- Q_r – vazão de recirculação
- Q_d – vazão de descarte
- Q – matriz de ponderação
- P – matriz de Riccati
- r – taxa de reação
- r_j – elemento da matriz de ponderação
- r_g – taxa de crescimento da biomassa no interior do biofilme
- r_l – taxa de perda de biofilme
- r_{liq} – taxa de crescimento líquido do biofilme
- R – matrizes de ponderação
- s – variável complexa
- S – concentração de substrato
- S_{alk} – concentração de alcalinidade total
- S_f – concentração de substrato limitante no interior do biofilme
- S_i – concentração de compostos orgânicos inertes solúveis
- S_{ii} – concentração de compostos orgânicos inertes solúveis no afluenta bruto
- S_{ir} – concentração de compostos orgânicos inertes solúveis no lodo recirculado
- S_n – concentração de substrato efluente do filtro biológico
- S_{nd} – concentração da fração rapidamente biodegradável do nitrogênio orgânico
- S_{nh} – concentração de amônia total
- S_{no} – concentração conjunta de nitritos e nitratos

S_o – concentração de oxigênio dissolvido

S_s – concentração de substrato rapidamente biodegradável

S_{si} – concentração de substrato rapidamente biodegradável no afluente bruto

S_{sr} – concentração de substrato rapidamente biodegradável no lodo recirculado

S_{sup} – concentração de substrato na superfície do biofilme

S_{sup} – concentração de substrato na interface massa líquida/biofilme

S^* – concentração adimensionalizada de substrato

S – matriz de ponderação

t – tempo

u – variável de entrada

u – vetor de entrada

$\tilde{u}$ – vetor de perturbação para a entrada

U – transformada de Laplace de u

v – velocidade

v_s – velocidade de sedimentação de sólidos

v_u – velocidade descendente da massa líquida

V – volume

x – variável de estado

X_a – concentração de biomassa autotrófica

X_b – concentração de biomassa heterotrófica

X_{bi} – concentração de biomassa heterotrófica no afluente bruto

X_{br} – concentração de biomassa heterotrófica no lodo recirculado

X_f – concentração de biomassa ativa no interior do biofilme

X_i – concentração de compostos orgânicos inertes particulados

X_{ii} – concentração de compostos orgânicos inertes particulados no afluente bruto

X_{ir} – concentração de compostos orgânicos inertes particulados no lodo recirculado

X_{nd} – concentração da fração lentamente biodegradável do nitrogênio orgânico

X_p – concentração dos constituintes particulados produzidos a partir do decaimento da biomassa

X_{pi} – concentração dos constituintes particulados produzidos a partir do decaimento da biomassa no afluente bruto

X_{pr} – concentração dos constituintes particulados produzidos a partir do decaimento da biomassa no lodo recirculado

X_s – concentração de substrato lentamente biodegradável

X_{si} – concentração de substrato lentamente biodegradável no afluente bruto

X_{sr} – concentração de substrato lentamente biodegradável no lodo recirculado

X_T – concentração de sólidos totais

x – vetor de estado

$\tilde{x}$ – vetor de estados estimados

X – transformada de Laplace de x

w – vetor de distúrbios externos

$\tilde{W}$ – vetor de perturbação para a entrada

y – variável de saída

Y – coeficiente de produção celular

Y_h – coeficiente de produção celular para biomassa heterotrófica

Y_a – coeficiente de produção celular para biomassa autotrófica

y – vetor de saída

z – espessura de biofilme

ε – delimitador de região no espaço de estados

δ – delimitador de região no espaço de estados

μ – taxa específica máxima de utilização do substrato

η – fator de efetividade

η_g – fator de correção para o crescimento anóxico da biomassa heterotrófica

η_h – fator de correção para hidrólise anóxica

τ – variável auxiliar de integração

v – constante de sedimentabilidade

∞ – infinito

ξ_v – fração de biomassa desprendida do filtro biológico que permanece ativa no tanque de aeração

ξ_I – fração de biomassa desprendida do filtro biológico, tratada como substrato lentamente biodegradável no tanque de aeração

ξ_E – fração de biomassa desprendida do filtro biológico, tratada como resíduo endógeno no tanque de aeração

φ_s – fração solúvel do substrato efluente do filtro biológico

φ_p – fração particulada do substrato efluente do filtro biológico

$\| \cdot \|$ – norma de um vetor

RESUMO

REIS, J.A.T. (2003). *Desenvolvimento de sistemas de controle ótimo para a operação de processos aeróbios de tratamento de esgotos*. São Carlos, 2003. 241p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São.

Neste trabalho, a partir da aplicação da Teoria de Controle Ótimo, são estabelecidos sistemas de controle aplicáveis a três importantes sistemas aeróbios de tratamento de esgotos – filtros biológicos, processos de lodos ativados e os processos combinados formados a partir da combinação dos filtros biológicos e lodos ativados. Para a definição dos sistemas de controle são necessários modelos dinâmicos que descrevam o comportamento dos diferentes sistemas de tratamento. Da literatura são obtidos os modelos dinâmicos destinados à descrição do comportamento do processo de lodos ativados; para o filtro biológico, é proposto um modelo combinando a equação de balanço do reator e o modelo de ordem variável, este último destinado ao cálculo do fluxo de substrato para o interior de biofilmes profundos. Os resultados demonstram que, independentemente do sistema de tratamento considerado, os sistemas de controle reduzem substancialmente os tempos de acomodação e os desvios apresentados pelas variáveis de estado em relação às suas condições de equilíbrio. Por fim, função da inviabilidade de monitoramento de todas as variáveis de estado utilizadas para caracterizar os sistemas de tratamento, são propostos, a partir de modelos simplificados, controladores que incorporam a observação de estados. Também neste caso, os controladores estabelecidos permitem melhorar significativamente o desempenho dos sistemas de tratamento de esgotos analisados.

Palavras-chave: Controle ótimo, controle automático, tratamento de esgotos, lodos ativados, filtros biológicos, processos combinados de tratamento de esgotos.

ABSTRACT

REIS, J.A.T. (2003). *Development of optimal control system for the operation of aerobic wastewater treatment processes*. São Carlos, 2003. 241p. Thesis (Doctor's degree) - Engineering School of São Carlos, University of São Paulo.

This paper constructs automatic control systems by means of Optimal Control Theory for three different combinations of wastewater treatment units, namely, trickling filter, activated sludge process and a combined process. The dynamic model for the activated sludge process available in literature and a model proposed for the trickling filter were used in the construction of control systems. It is shown that the controls obtained in this study substantially reduce the durations necessary for the reestablishment of the equilibrium conditions in terms of state variables and the attenuation of oscillations around these conditions. Controls including observers for the state variables were devised on the basis of simplified models for the process in order to deal with the difficulties involved in monitoring all the state variables. These control systems were also found to be quite effective in improving the performance of the wastewater treatment plants considered in this paper.

Keywords: Optimal control, automatic control, wastewater treatment, activated sludge, trickling filter, combined wastewater treatment processes.

CAPÍTULO 01

INTRODUÇÃO

1 - INTRODUÇÃO

Dentre os principais e mais utilizados sistemas biológicos de tratamento aeróbio dos esgotos domésticos estão os processos de lodos ativados, os filtros biológicos e as suas diversas variantes construtivas e operacionais.

Os filtros biológicos, desenvolvidos na Inglaterra no final do século XIX, são constituídos por um leito fixo altamente permeável, sobre o qual se desenvolvem os microrganismos responsáveis pela estabilização dos compostos orgânicos presentes no efluente bruto. São sistemas que normalmente apresentam grande estabilidade e facilidade na operação.

Os processos de lodos ativados, apresentados originalmente na Inglaterra no início do século passado, envolvem a produção de flocos biológicos (biomassa), formados a partir de microrganismos que crescem e se aglutinam no interior de um tanque aerado. Aeradores mecânicos ou difusores, além de garantirem a manutenção de ambiente aeróbio e completamente misturado no interior do reator biológico, mantêm a biomassa suspensa e permanentemente em contato com os compostos orgânicos que lhes servem de substrato. Os processos de lodos ativados normalmente apresentam elevados consumos de energia, consideráveis índices de mecanização e elevadas produções de lodo. Entretanto, produzem efluentes finais com elevada qualidade e apresentam requisitos de área para implantação inferiores aqueles apresentados por outros processos aeróbios.

ROSKOPF et al. (1976), HARRISON et al. (1984), MATASCI et al. (1986), NEWBRY et al. (1988), PARKER (1999) e PARKER & BRATBY (2001), aplicando conjuntamente filtros biológicos e lodos ativados como alternativa para o tratamento dos esgotos domésticos, observaram que os processos combinados oferecem a estabilidade e facilidade de operação dos filtros biológicos e a alta qualidade do efluente final obtida a partir dos processos de lodos ativados. Adicionalmente, observaram que os processos combinados podem tornar-se

economicamente mais interessantes que outras opções comumente empregadas para o tratamento dos esgotos domésticos.

Nas últimas décadas, pressões ambientais e econômicas têm forçado a busca de projetos e estratégias de operação que tornem os processos de tratamento de esgotos mais eficientes. Projetistas e operadores têm se defrontado com os elevados custos de implantação dos sistemas de tratamento, com os crescentes custos de operação destes sistemas (principalmente aqueles relacionados à energia elétrica, produtos químicos e mão-de-obra) e com o estabelecimento de padrões de qualidade ambiental cada vez mais rigorosos. Neste contexto, o controle operacional automatizado apresenta-se como uma alternativa para a melhoria da performance dos processos de tratamento de esgotos.

A Teoria Convencional de Controle, que se consolidou até o final da década de 50, permitiu o desenvolvimento de diversos sistemas de controle aplicáveis aos processos de lodos ativados. Os trabalhos de GARRET (1958), JENKINS & GARRISON (1968), ROESLER (1974), FLANAGAN (1977), LECH et al. (1978), CLIFFT & ANDREWS (1981), NOGITA & HIRAOKA (1981) e CLIFFT & GARRETT (1988) ilustram a aplicação das técnicas convencionais para o controle dos processos de lodos ativados.

Mais recentemente, com o desenvolvimento de abrangentes modelos dinâmicos utilizados para a descrição e avaliação do comportamento dos processos de lodos ativados (HENZE et al. (1987), GUJER et al. (1999) e HENZE et al. (1999)), o Controle Convencional tem sido progressivamente substituído pelo Controle Moderno. Os trabalhos de KABOURIS & GEORGAKAKOS (1990), KABOURIS et al. (1992), LINDBERG & CARLSSON (1996a), MORENO & BUITRÓN (1998) e LUKASSE et al (1998, 1999a, 1999b) constituem alguns exemplos de aplicação da Teoria Moderna no desenvolvimento de sistemas de controle aplicáveis aos processos de lodos ativados.

Segundo OLSSON (1985), os principais fatores que justificam o particular interesse pelos processos de lodos ativados podem ser assim sumarizados:

- Os processos de lodos ativados são muito flexíveis e adaptáveis a quase todo tipo de problema que envolva o tratamento biológico de efluentes;
- São usualmente indicados para grandes estações de tratamento;
- Suas propriedades dinâmicas têm sido extensivamente estudadas nas últimas décadas, o que tem dado origem à produção e documentação de muitos trabalhos de modelagem do processo.

Os filtros biológicos, por sua vez, não têm recebido semelhantes aplicações das técnicas convencionais ou modernas de controle, quer pela falta de modelos dinâmicos que adequadamente descrevam o processo, quer pela menor flexibilidade operacional ou disponibilidade de alternativas de controle.

RITTMANN (1989), entretanto, aponta contribuições que a Teoria de Controle pode trazer à operação de filtros biológicos e, mais generalizadamente, à operação dos processos de tratamento que utilizem filme biológico fixo. Estes processos são usualmente sensíveis às flutuações de cargas afluentes, o que pode comprometer a performance dos sistemas de tratamento nos períodos de elevação de carga ou depois de prolongados períodos de operação. Segundo RITTMANN, a implementação de sistemas de controle pode configurar-se numa interessante alternativa para a redução dos efeitos das flutuações de carga, conservando ou melhorando a performance daqueles processos de tratamento.

Desta forma, pesquisas que busquem desenvolver sistemas de controle aplicáveis aos processos de lodos ativados e filtros biológicos (e às diferentes combinações destes processos) podem contribuir para o estabelecimento de projetos mais eficientes ou para a melhoria da performance dos sistemas de tratamento em operação. Este trabalho pretende estabelecer algumas contribuições neste sentido.

CAPÍTULO 02

OBJETIVOS

2 - OBJETIVOS

2.1 - Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é o desenvolvimento de sistemas de Controle Ótimo aplicáveis a três diferentes sistemas biológicos aeróbios de tratamento de esgotos domésticos – filtros biológicos, lodos ativados e processos combinados constituídos por filtros biológicos e lodos ativados. Os sistemas de controle propostos deverão ser destinados ao controle da remoção da parcela carbonácea da matéria orgânica nos diferentes sistemas de tratamento de esgoto considerados.

2.2 - Objetivos específicos

O desenvolvimento do trabalho proposto envolve os seguintes objetivos específicos:

- Proposição de um modelo que descreva a dinâmica de remoção da fração carbonácea da matéria orgânica em filtros biológicos;
- Estabelecimento e avaliação dos ganhos produzidos por um sistema de controle ótimo aplicável aos filtros biológicos;
- Estabelecimento e avaliação dos ganhos produzidos por um sistema de controle ótimo aplicável aos processos de lodos ativados;
- Estabelecimento e avaliação dos ganhos produzidos por um sistema de controle ótimo aplicável aos processos combinados, constituídos por filtros biológicos e lodos ativados dispostos em série;
- Proposição de observadores de estado aplicáveis aos diferentes sistemas de tratamento de esgoto estudados.

CAPÍTULO 03

CONTROLE ÓTIMO

3 - CONTROLE ÓTIMO

3.1 - Considerações gerais

Ao longo das próximas seções serão apresentados os conceitos fundamentais acerca da Teoria do Controle Ótimo. Além de uma breve revisão histórica da evolução da Teoria de Controle, serão apresentados a representação dos sistemas dinâmicos no espaço de estados e os importantes conceitos de Controlabilidade, Observabilidade e Estabilidade de sistemas dinâmicos. As últimas seções serão destinadas à apresentação da resolução do problema de Controle Ótimo para sistemas contínuos e discretos no tempo e à teoria envolvida na construção de observadores de estado.

3.2 - Aspectos históricos

Nos próximos parágrafos será apresentado um breve resumo da evolução histórica da Teoria de Controle. Uma visão mais abrangente desta evolução pode ser encontrada em LEWIS (1992).

As primeiras aplicações do controle com realimentação surgiram com o mecanismo regulador de bóia, utilizado na Grécia entre os anos de 300 e 1 a.C.. Um lampião a óleo inventado por Philon em aproximadamente 250 a.C., também fazia uso de um regulador de bóia para manter constante o nível de óleo combustível. Heron de Alexandria, que viveu no século I d.C., publicou um livro intitulado *Pneumática*, no qual discutia diferentes mecanismos de nível de água usando reguladores de bóia.

O primeiro sistema com realimentação inventado na Europa moderna foi o regulador de temperatura proposto por Cornelis Drebbel. Dennis Papin propôs, em 1681, o primeiro controlador de pressão para caldeiras a vapor; o controlador de pressão de Papin era um regulador de segurança semelhante à válvula de uma panela de pressão.

O controlador centrífugo de James Watt, desenvolvido em 1769 para controlar a velocidade de máquinas a vapor, é geralmente aceito como tendo sido o primeiro controlador automático com realimentação usado em um processo industrial. O dispositivo proposto por Watt, inteiramente mecânico, utilizava o movimento de esferas para controlar uma válvula e, portanto, a quantidade de vapor que entrava na máquina. Uma representação do controlador proposto por Watt está apresentada na FIGURA 3.1.

FIGURA 3.1 – Controlador centrífugo proposto por James Watt (LEWIS, 1992).

J. C. Maxwell, em 1868, apresentou o primeiro estudo sistemático sobre a estabilidade de um sistema de controle com realimentação. Maxwell desenvolveu as equações diferenciais aplicáveis ao controlador centrífugo proposto Watt, linearizou-as e concluiu que a estabilidade do controlador era dependente das raízes de uma certa equação (a equação característica do sistema), cujas partes reais deveriam ser negativas.

O trabalho de Maxwell foi seguido pelo trabalho do engenheiro russo I. I. Vyshnegradsky. Em 1877, Vyshnegradsky apresentou uma análise mais elaborada da estabilidade de um sistema ao avaliar um controlador centrífugo de terceira ordem. Já A.M. Lyapunov, em 1892, a partir de uma generalização do conceito de energia, apresentou uma importante contribuição para o campo da Teoria do Controle. No seu trabalho, Lyapunov avaliou a estabilidade de sistemas de controle a partir da análise de um sistema de equações diferenciais não-lineares.

N. Minorsky, em 1922, aplicou elementos deliberadamente não-lineares em sistemas de controle a malha fechada ao desenvolver controladores automáticos para a pilotagem de navios. H. Nyquist, por sua vez, apresentou, em 1932, um critério para a avaliação da estabilidade de sistemas de controle a malha fechada com base na resposta estacionária de sistemas de controle a malha aberta submetidos a excitações senoidais.

H. L. Házen, em 1934, desenvolveu o projeto de “servomecanismos” a relé. Házen utilizou o termo “servomecanismos” para designar sistemas de controle de posição capazes de seguir, muito de perto, excitações variáveis com o tempo.

A década de 40 foi marcada pela evolução dos métodos de resposta no domínio da frequência. Tais métodos tornaram possíveis os projetos de sistemas de controle a malha fechada sujeitos a requisitos de desempenho.

A partir de trabalhos realizados para a aviação americana, W. R. Evans apresentou, em 1948, o Método do Lugar das Raízes. Este método permite uma representação gráfica das propriedades de estabilidade de um sistema e a determinação gráfica da resposta no domínio da frequência.

Os métodos de resposta no domínio da frequência e o Método do Lugar das Raízes constituem a base da Teoria de Controle Convencional (ou Clássica), cuja evolução se deu até o final da década de 50. Estes métodos permitem a construção de sistemas estáveis e que atendem a um conjunto de requisitos de desempenho. Entretanto, os sistemas projetados com a aplicação do controle convencional, apesar de aceitáveis, não constituem sistemas projetados intencionalmente segundo algum critério de otimalidade. Adicionalmente, o controle convencional é utilizado principalmente para o projeto de sistemas monovariáveis (uma única entrada e uma única saída), sendo de aplicação difícil para sistemas com múltiplas entradas e/ou saídas.

A teoria de controle desenvolvida a partir do final da década de 50, usualmente empregada para o controle de sistemas dotados de múltiplas entradas e múltiplas saídas, é conhecida como Teoria de Controle Moderna.

A partir da década de 60, com a possibilidade do uso de computadores digitais, a técnica de análise e síntese de sistemas a partir da utilização de variáveis de estado permitiu que sistemas complexos fossem mais facilmente analisados e controlados. A utilização de variáveis de estado permitiu controlar os sistemas modernos ao mesmo tempo em que eram atendidas as rigorosas exigências (peso, exatidão e custos) inerentes aos projetos espaciais, militares e industriais.

Entre as décadas de 60 e 80 foram estabelecidas as bases teóricas do Controle Ótimo de Sistemas Determinísticos e Estocásticos. Também nesse período foram objetos de pesquisas e desenvolvimentos o Controle Adaptativo e o Controle com Aprendizado. A partir da década de 80, o Controle Robusto e o Controle H_∞ têm constituído os principais focos de pesquisa e desenvolvimento da Teoria de Controle Moderna.

3.3 - Classificação dos sistemas de controle

Os sistemas de controle são usualmente divididos em sistemas de controle a malha aberta e sistemas de controle a malha fechada. Os sistemas a malha aberta, também conhecidos como sistemas diretos, são aqueles em que as ações de controle são estabelecidas diretamente a partir dos sinais de entrada. Já nos sistemas de controle a malha fechada, comumente conhecidos como sistemas de controle com realimentação, as ações de controle são definidas a partir dos sinais de saída apresentados pelo sistema; nestes sistemas, a diferença entre a saída do processo sob controle e a referência de entrada é amplificada e usada para controlar o processo, de modo que esta diferença seja continuamente reduzida. Os diferentes tipos de sistemas de controle estão representados esquematicamente na FIGURA 3.2.

FIGURA 3.2 – Representação esquemática de sistemas de controle a malha aberta (a) e sistemas de controle a malha fechada (b).

Segundo DORF & BISHOP (1998), as principais vantagens de se utilizar sistemas de controle com realimentação, a despeito do custo e da complexidade adicional imposta ao sistema de controle, são *a*) a diminuição da sensibilidade do sistema com relação às variações nos parâmetros do processo, *b*) a facilidade de controle e ajuste da resposta transitória do sistema, *c*) melhoria na rejeição e ruídos no interior do sistema e *d*) redução do erro estacionário do sistema. Ao longo do restante deste texto, apenas os sistemas de controle com realimentação serão discutidos.

3.4 - Natureza geral do problema de controle

Quando um critério ou conjunto de especificações de desempenho são estabelecidos para um sistema, o não atendimento destes critérios ou especificações dá origem a um problema de controle. Normalmente, para que o desempenho desejado para o sistema seja alcançado, equipamentos adicionais passam a trabalhar com o sistema original. Neste ponto surgem as técnicas convencionais e modernas de controle, cuja aplicação permite a determinação da configuração e dos parâmetros do equipamento adicional requerido.

A aplicação das técnicas convencionais exige que um conjunto de especificações de desempenho (pico de ultrapassagem, tempo de duplicação, tempo de resposta, erro estacionário, etc) seja satisfeito, o que pode ocorrer a partir de diferentes projetos. A solução, portanto, não é necessariamente única. Desta forma, como os projetos de controle desenvolvidos a partir da Teoria Convencional normalmente não satisfazem um critério ótimo de desempenho, são usualmente chamados de sub-ótimos.

Em oposição à metodologia convencional, as técnicas modernas permitem a obtenção de um desempenho ótimo, obrigando o sistema a atender algum índice de desempenho pré-estabelecido, cuja minimização (ou maximização) conduz a uma solução de projeto dita ótima.

Não será objeto de discussão ao longo deste texto a resolução de problemas de controle a partir da Teoria Convencional de Controle. DORF & BISHOP (1998), WESTPHAL (1995), FRANKLIN et al. (1994), D'AZZO & HOUPIS (1984), OGATA (1982), DISTEFANO et al. (1972) são algumas das inúmeras referências que abordam em detalhes o Controle Convencional.

Nas seções seguintes serão apresentadas breves considerações sobre a representação de sistemas dinâmicos no espaço de estados, sua controlabilidade, observabilidade e estabilidade. Tais considerações deverão fornecer o suporte necessário ao entendimento dos sistemas de controle projetados a partir da abordagem moderna, mais especificamente a partir das leis de Controle Ótimo.

3.5 - Representação de sistemas dinâmicos no espaço de estados

Os modelos matemáticos que representam um sistema dinâmico, aqui entendidos como um grupo de equações que representam o sistema com precisão ou, no mínimo, de forma bastante aceitável, podem assumir muitas e diferentes formas. Para a análise da resposta transitória ou para a avaliação das respostas de sistemas dinâmicos constituídos por uma única entrada ou uma única saída, a representação

através de uma função de transferência é a mais adequada. Por outro lado, a representação de sistemas dinâmicos no espaço de estado pode ser muito mais vantajosa para a avaliação de sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas ou em problemas que envolvam a aplicação do Controle Ótimo. Esta última forma de representação dos sistemas dinâmicos será apresentada a seguir.

O estado de um sistema dinâmico deve ser entendido como o conjunto de variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ (denominadas comumente de variáveis de estado), cujos valores num instante $t = t_0$ ($x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$), juntamente com o conhecimento dos valores das variáveis de entrada para um outro instante qualquer $t \geq t_0$ ($u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$), determinam completamente o comportamento do sistema em qualquer instante $t > t_0$. A representação esquemática geral de um sistema dinâmico está apresentada na FIGURA 3.3.

FIGURA 3.3 – Representação esquemática de um sistema dinâmico.

O espaço de estados, por sua vez, deve ser entendido como o espaço n -dimensional cujos eixos coordenados são constituídos a partir dos eixos $x_1, x_2, \dots, x_n$. Desta forma, qualquer estado do sistema dinâmico pode ser representado através de um ponto no espaço de estados.

Considere-se, então, um sistema dinâmico com múltiplas entradas e múltiplas saídas, onde existam r variáveis de entrada ($u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$), m variáveis de saída ($y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$) e n variáveis de estado ($x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$). Considere-se, adicionalmente, que este sistema possa ser descrito através de um sistema de

equações diferenciais lineares de primeira ordem, escrito em termos das variáveis de estado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + \dots + b_{1r}u_r(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + b_{21}u_1(t) + \dots + b_{2r}u_r(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + \dots + b_{nr}u_r(t)\end{aligned}\quad (3.1)$$

As variáveis de saída deste sistema dinâmico, por sua vez, serão descritas através das seguintes equações:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + \dots + c_{1n}x_n(t) + d_{11}u_1(t) + \dots + d_{1r}u_r(t) \\ y_2(t) &= c_{21}x_1(t) + c_{22}x_2(t) + \dots + c_{2n}x_n(t) + d_{21}u_1(t) + \dots + d_{2r}u_r(t) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= c_{m1}x_1(t) + c_{m2}x_2(t) + \dots + c_{mn}x_n(t) + d_{m1}u_1(t) + \dots + d_{mr}u_r(t)\end{aligned}\quad (3.2)$$

As duas últimas equações podem ser escritas na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Utilizando-se a notação matricial compacta, as equações de estado (equação (3.3)) e de saída (equação (3.4)) podem ser representadas da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (3.5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \quad (3.6)$$

Nas duas últimas expressões:

- $\mathbf{x}(t)$: vetor de estado ($n \times 1$);
- $\mathbf{u}(t)$: vetor de controle ($r \times 1$);
- $\mathbf{A}$: matriz de estado ($n \times n$);
- $\mathbf{B}$: matriz de entrada ($n \times r$);
- $\mathbf{C}$: matriz de saída ($m \times n$);
- $\mathbf{D}$: matriz de transmissão direta ($m \times r$).

Como nas duas últimas equações as matrizes de estado, de entrada, de saída e de transmissão direta são constantes no tempo, o sistema dinâmico descrito é dito invariante no tempo. Caso as referidas matrizes envolvessem explicitamente a variável tempo, o sistema seria considerado variante no tempo. Embora ao longo do texto sejam feitas algumas referências aos sistemas não lineares ou variantes no tempo, a Teoria de Controle Ótimo será aplicada apenas aos sistemas lineares e invariantes no tempo. Desta forma, estes sistemas serão os principais objetos de discussão ao longo do restante do trabalho. Um diagrama de blocos dos sistemas lineares e invariantes no tempo é apresentado na FIGURA 3.4.

FIGURA 3.4 - Diagrama de blocos para um sistema linear e invariante no tempo representado no espaço de estados.

Assim como se faz para a obtenção da solução de uma equação diferencial de primeira ordem, pode-se aplicar o método da transformada de Laplace¹ para a obtenção da solução da equação de estado. Desta forma, aplicando-se a transformada de Laplace à equação (3.5):

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{x}(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}(s). \quad (3.7)$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa à equação (3.7) obtém-se, então, a solução da equação de estado. Assim:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (3.8)$$

A equação de saída (equação (3.6)), por sua vez, toma a seguinte forma:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \mathbf{u}(t). \quad (3.9)$$

Nas três últimas expressões:

- $\mathbf{X}(s)$: transformada de Laplace de $\mathbf{x}(t)$;
- $\mathbf{U}(s)$: transformada de Laplace de $\mathbf{u}(t)$;
- s : variável complexa;
- τ : variável auxiliar de integração;

¹ A transformada de Laplace é um método operacional que pode ser utilizado para a obtenção da solução de equações diferenciais lineares. A transformada de Laplace permite converter funções como senóides, funções senoidais amortecidas e exponenciais em funções algébricas de uma variável complexa s ; operações como derivação e integração podem ser, por sua vez, substituídas por operações algébricas no plano complexo. Desta forma, uma equação diferencial linear pode ser convertida numa equação algébrica do plano s , cuja solução em termos da variável dependente permitirá obter, através da transformada de Laplace inversa desta variável dependente, a solução da equação diferencial original.

Apresentações detalhadas do método de transformada de Laplace, bem como diversos exemplos da sua aplicação a funções temporais freqüentemente encontradas em Engenharia de Controle, podem ser encontradas em OGATA (1982), D'AZZO & HOUPPIS (1984) e DORF & BISHOP (1998).

- e^{At} : função exponencial matricial, definida como

$$e^{At} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{A^{\lambda} t^{\lambda}}{\lambda!} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} + \dots,$$

que converge para qualquer tempo finito t e para qualquer matriz de estado $\mathbf{A}$.

A representação no espaço de estados de sistemas discretos no tempo é muito próxima da representação que se apresentou para o caso contínuo. Nos sistemas discretos, o comportamento do sistema dinâmico não é observado em todos os instantes do tempo, mas apenas em uma seqüência de instantes kT , sendo $k = 0, 1, 2, \dots$ e T o período de amostragem. Desta forma, é possível caracterizar o comportamento do sistema por quantidades definidas apenas nestes instantes.

Para os sistemas discretos, as equações de estado e de saída (representadas no caso contínuo respectivamente pelas equações (3.5) e (3.6)) tomam as seguintes formas:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}\mathbf{u}(kT), \quad (3.10)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT), \quad (3.11)$$

sendo:

- $\mathbf{G}$: matriz de estado ($n \times n$);
- $\mathbf{H}$: matriz de entrada ($n \times r$).

Para a solução da equação de estado para o caso discreto, considere-se a aplicação da solução obtida para o caso contínuo (equação (3.8)) em dois instantes sucessivos de amostragem (t_i e t_{i+1}). Considere-se, adicionalmente, que os instantes de amostragem sejam igualmente espaçados e que as entradas de controle $\mathbf{u}(t)$ sejam constantes entre quaisquer dois instantes sucessivos de amostragem. Desta forma:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}((k+1)T)} \mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}((k+1)T)} \int_0^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{x}(kT) = e^{A(kT)} \mathbf{x}(kT) + e^{A(kT)} \int_0^{kT} e^{-A\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (3.13)$$

Multiplicando-se a equação (3.13) por $e^{A(kT)}$ e subtraindo-se o resultado da equação (3.12), obtém-se:

$$\mathbf{x}((K+1)T) = e^{AT} \mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{-A\tau'} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau') d\tau', \quad (3.14)$$

sendo $\tau' = T - \tau$. Desta última expressão pode-se explicitar as expressões que definem as matrizes de estado (matriz G) e de entrada (matriz H) para os sistemas discretos no tempo. Desta forma:

$$\mathbf{G} = e^{AT} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(AT)^{\lambda}}{\lambda!}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{H} = \left(\int_0^T e^{At} dt \right) \mathbf{B} = T \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(AT)^{\lambda}}{\lambda!} \mathbf{B}. \quad (3.16)$$

3.6 - Controlabilidade e Observabilidade de sistemas dinâmicos

A garantia da controlabilidade e observabilidade de um sistema é fundamental para o desenvolvimento do projeto de um sistema de controle no espaço de estados. Segundo OGATA (1982), o projeto de um sistema de controle pode não possuir uma solução completa se o sistema dinâmico considerado não for controlável; adicionalmente, embora a maioria dos sistemas físicos seja controlável e observável, os modelos matemáticos eventualmente utilizados para descrevê-los não necessariamente possuem as características desejadas de controlabilidade e observabilidade.

A seguir, os conceitos de controlabilidade e observabilidade são individualmente apresentados. O desenvolvimento teórico que conduz a determinação das condições de controlabilidade e observabilidade dos sistemas dinâmicos é detalhadamente discutido por KWAKERNAAK & SIVAN (1972).

3.6.1 – Controlabilidade

Um sistema é controlável se, a partir de qualquer instante t_0 , seu estado inicial $x(t_0)$ puder ser transferido para qualquer estado final $x(t_1)$ num intervalo de tempo finito ($t_1 > t_0$), por intermédio da ação de um vetor de controle não sujeito a restrições. Caso todos os estados sejam controláveis, o sistema é denominado sistema a estados completamente controláveis.

Para a avaliação da controlabilidade de um sistema contínuo, linear e invariante no tempo, considere-se o sistema descrito pela seguinte equação de estado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) . \quad (3.5)$$

Considere-se, agora, uma matriz construída a partir da combinação das matrizes de estado e de entrada do sistema definido pela última equação. Esta matriz, comumente conhecida como Matriz de Controlabilidade, deve ser definida da seguinte forma:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] . \quad (3.17)$$

O sistema contínuo no tempo descrito pela equação (3.5) será dito completamente controlável se, dado um estado inicial qualquer, a Matriz de Controlabilidade possuir posto n , ou seja, se possuir n colunas linearmente independentes.

O conceito de controlabilidade pode ser reproduzido para sistemas os discretos, lineares e invariantes no tempo, desde que a variável que representa o tempo nos sistemas contínuos (t) seja substituída pela variável que representa o tempo nos sistemas discretos (kT) (KWAKERNAAK & SIVAN, 1972).

Para a definição da **controlabilidade** dos sistemas discretos, considere-se o sistema linear e invariante no tempo definido pela equação (3.10):

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k). \quad (3.10)$$

Também para o caso discreto, o sistema será dito completamente controlável se, dado um estado inicial qualquer, a Matriz de Controlabilidade

$$\mathbf{M} = [\mathbf{H} \mid \mathbf{GH} \mid \dots \mid \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}], \quad (3.18)$$

possuir posto n .

3.6.2 - Observabilidade

Um sistema é completamente observável se todo estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ puder ser determinado a partir os valores de resposta do sistema $\mathbf{y}(t)$, durante um intervalo de tempo finito ($t_0 \leq t \leq t_1$).

Para a avaliação da observabilidade, considere-se um sistema autônomo^{2,3}, linear e invariante no tempo, descrito pelas seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad (3.19)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (3.20)$$

² Um sistema autônomo é aquele no qual não existe uma entrada de controle $\mathbf{u}(t)$ ou, equivalentemente, onde $\mathbf{u}(t)$ assume valores constantes ao longo do tempo. Assim, os sistemas autônomos são representados por equações diferenciais que assumem a seguinte forma:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t].$$

Sistema não forçado (STENGEL, 1994) e sistema livre (OGATA, 1982) são outras expressões que comumente aparecem na literatura como sinônimas de sistemas autônomos.

³ O sistema dinâmico descrito pelas equações (3.5) e (3.6) apresentam como solução para os vetores de estado e de saída as seguintes expressões:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$$

Como $\mathbf{u}(t)$ e as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são conhecidos, os dois últimos termos da última expressão são quantidades conhecidas podendo, portanto, ser subtraídas dos valores conhecidos de $\mathbf{y}(t)$. Desta forma, para se determinar uma condição necessária e suficiente para a completa observabilidade, basta considerar o sistema dinâmico descrito pelas equações (3.19) e (3.20) (OGATA, 1982).

Considere-se, agora, uma matriz construída a partir da combinação das matrizes de estado e de saída do sistema definido pelas duas últimas equações. Esta matriz, comumente conhecida como Matriz de Observabilidade, deve ser assim estabelecida:

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Também aqui, KWAKERNAAK & SIVAN (1972) demonstram que o sistema definido pelas equações (3.19) e (3.20) será completamente observável se, dado uma condição inicial qualquer, a Matriz de Observabilidade possuir posto n .

A observabilidade dos sistemas discretos, por sua vez, é estabelecida a partir do sistema definido pelas seguintes equações:

$$x((k+1)T) = Gx(kT), \quad (3.22)$$

$$y(kT) = Cx(kT). \quad (3.23)$$

Também para os sistemas discretos, a completa observabilidade de estados só será obtida se, dada uma condição inicial qualquer, a Matriz de Observabilidade do sistema

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ CG^2 \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

possuir posto n .

O conceito de observabilidade é importante para o problema de observação das variáveis de estado não mensuráveis a partir das variáveis de estado mensuráveis, permitindo a elaboração dos sinais de controle para o sistema. Esta discussão será retomada na seção 3.12, quando da discussão dos aspectos que envolvem a construção dos observadores de estado.

3.7 - Estabilidade de sistemas dinâmicos

O aspecto mais importante a ser determinado num sistema de controle é, normalmente, sua estabilidade. Simplificadamente, pode-se dizer que um sistema de é estável se sua saída volta ao estado de equilíbrio quando o sistema é submetido a uma excitação inicial. Por outro lado, caso as respostas divirjam do seu estado de equilíbrio após a excitação inicial, o sistema é considerado instável

Nessa seção serão reproduzidas algumas considerações sobre estabilidade de sistemas lineares e invariantes no tempo apresentadas por KWAKERNAAK & SIVAN (1972). Entretanto, previamente a discussão das proposições sobre estabilidade, alguns definições serão apresentadas.

3.7.1 - Algumas definições de estabilidade

Os conceitos de estabilidade segundo Lyapunov, estabilidade assintótica, estabilidade assintótica e global e de instabilidade podem ser assim sumarizados:

- **Conceito de estabilidade segundo Lyapunov** : Consideremos um sistema autônomo representado por uma equação de estado na forma $\dot{x}(t) = f[x(t), t]$ e com solução nominal $x_0(t)$; a solução nominal $x_0(t)$ será estável no sentido de Lyapunov se, para qualquer t_0 e qualquer $\varepsilon > 0$, existir um $\delta(\varepsilon, t_0)$ tal que $\|x(t_0) - x_0(t_0)\| \leq \delta$ implique em $\|x(t) - x_0(t)\| \leq \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$.⁴

⁴ Nas expressões que se seguem ao longo do texto, $\|x\|$ representa a norma do vetor x . A norma euclidiana, por exemplo, é definida da seguinte maneira:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}$$

sendo ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, os componentes do vetor x . Para a definição do conceito de estabilidade, outras definições de norma são perfeitamente aplicáveis.

A estabilidade no sentido proposto por Lyapunov garante que o estado não divergirá da solução nominal se o estado inicial for escolhido suficientemente próximo da solução nominal.

- **Estabilidade assintótica** : a solução nominal $\mathbf{x}_0(t)$ do sistema autônomo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$ será assintoticamente estável se *a)* for estável no sentido de Lyapunov e se *b)* para todo t_0 existir um $\delta(t_0)$ tal que $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0)\| \leq \delta$ implique em $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)\| \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Desta forma, a estabilidade assintótica garante que uma solução qualquer se aproximará da solução nominal, desde que o desvio inicial apresentado por aquela solução seja inferior a δ ($\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0)\| \leq \delta$). Convém observar que, como a estabilidade assintótica é um conceito local, o estabelecimento da estabilidade assintótica pode não garantir que o sistema apresente um comportamento adequado.
- **Estabilidade assintótica e global** : a solução nominal $\mathbf{x}_0(t)$ será assintótica e globalmente estável se *a)* for estável no sentido de Lyapunov e se *b)* para qualquer $\mathbf{x}(t_0)$ e qualquer t_0 , $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)\| \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. A estabilidade assintótica é, portanto, um caso particular da estabilidade assintótica e global, uma vez que esta última assume que a região δ abrange todo o espaço de estados. Nos problemas de Engenharia de Controle, a estabilidade assintótica e global é uma característica desejável.
- **Instabilidade** : uma solução $\mathbf{x}_0(t)$ será instável se, para algum $\varepsilon > 0$ e todo $\delta > 0$, não importando quão pequeno ele seja, $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)\| \rightarrow \infty$, quando $t \rightarrow \infty$.

Uma representação gráfica dos diferentes conceitos de estabilidade é apresentada na FIGURA 3.5.

FIGURA 3.5 - Estabilidade segundo as proposições de Lyapunov (a), estabilidade assintótica (b) e instabilidade(c).

3.7.2 - Estabilidade de sistemas lineares e invariantes no tempo

Consideremos o sistema autônomo, linear e invariante no tempo representado pela equação (3.19).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \quad (3.19)$$

Tendo a matriz $\mathbf{A}$ (a matriz de estado anteriormente definida) n autovalores distintos ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$) com os correspondentes autovetores ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$), KWAKERNAAK & SIVAN (1972) demonstraram que a resposta do sistema a qualquer estado inicial pode ser representada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i e^{\lambda_i t} \mathbf{e}_i, \quad (3.25)$$

sendo μ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, os coeficientes que expressam como o estado inicial do sistema $\mathbf{x}(0)$ é decomposto ao longo de seus vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$.

Da última expressão percebe-se que a estabilidade do sistema é claramente determinada pelas características dos autovalores do sistema. Desta forma, o sistema linear e invariante no tempo descrito pela equação (3.19) será assintótica e globalmente estável se, e apenas se, seus autovalores possuírem parte real negativa.

Os conceitos de **estabilidade segundo Lyapunov**, **estabilidade assintótica**, **estabilidade global e assintótica** e **instabilidade**, anteriormente discutidos para sistemas contínuos no tempo, também podem ser reproduzidos para os sistemas discretos; assim como se fez para a definição da controlabilidade e da observabilidade, também aqui a variável que representa o tempo nos sistemas contínuos (t) deverá ser substituída pela variável que representa o tempo nos sistemas discretos (kT).

Considere-se, então, o sistema discreto descrito pela seguinte equação:

$$\mathbf{x}((k + 1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT). \quad (3.22)$$

KWAKERNAAK & SIVAN (1972) demonstraram que a resposta do sistema a qualquer estado inicial pode ser representada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{x}(kT) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^T \mathbf{e}_i \mathbf{f}_i \mathbf{x}(0). \quad (3.26)$$

Da última expressão pode-se observar que o sistema definido pela equação (3.22) será global e assintoticamente estável se, e apenas se, os seus autovalores possuírem módulos menores que a unidade. A FIGURA 3.6 ilustra as regiões do plano complexo nas quais devem estar localizados os autovalores, de tal forma que os sistemas contínuos e discretos no tempo sejam estáveis.

FIGURA 3.6 - Regiões de estabilidade para os sistemas *a)* contínuos no tempo e *b)* discretos no tempo.

3.8 - Controle Ótimo de sistemas contínuos no tempo

Ao longo desta seção será apresentada a solução do problema de Controle Ótimo para sistemas contínuos, lineares e invariantes no tempo, considerada a adoção de funções quadráticas para o índice de desempenho. O desenvolvimento teórico que conduziu à solução sumarizada a seguir é detalhadamente apresentado e discutido em textos como KWAKERNAAK & SIVAN (1972), OGATA (1982) e STENGEL (1994).

Considere-se um sistema linear, contínuo e invariante no tempo, descrito pela equação de estado previamente apresentada:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (3.5)$$

Suponha-se, adicionalmente, que o sistema seja completamente controlável e que seja possível implementar uma lei de controle na seguinte forma:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (3.27)$$

sendo $\mathbf{K}$ a matriz de ganho de realimentação, também invariante no tempo. Substituindo-se a lei de controle definida pela última equação na equação de estado do sistema (equação (3.5)), tem-se um sistema realimentado descrito pela seguinte equação:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t). \quad (3.28)$$

Um diagrama de blocos do sistema de controle assim definido está apresentado na FIGURA 3.7.

FIGURA 3.7 – Diagrama de blocos do sistema de controle ótimo.

Ao se projetar um sistema de controle ótimo, deseja-se determinar a matriz $\mathbf{K}$ do vetor de controle, de tal forma que um determinado índice de desempenho seja minimizado. Nos projetos de sistemas de controle ótimo comumente utiliza-se o índice de desempenho quadrático⁵, cuja expressão tem a seguinte forma:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t))dt. \quad (3.29)$$

⁵ Outros índices de desempenho são apresentados e discutidos por DORF & BISHOP (1998).

Na expressão do índice de desempenho as matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ são responsáveis pela ponderação dos valores relativos aos erros ou desvios das variáveis de estado do sistema ($\mathbf{x}^T \mathbf{x}$) em relação ao estado de equilíbrio (ou outro estado qualquer) e pelo esforço de controle exercido pelo sistema ($\mathbf{u}^T \mathbf{u}$). A matriz $\mathbf{Q}$ deverá ser simétrica real definida positiva⁶ (ou semidefinida positiva) e $\mathbf{R}$ uma matriz simétrica definida positiva.

A matriz de ganho de realimentação $\mathbf{K}$, obtida com a minimização do índice de desempenho quadrático, pode ser determinada, por sua vez, a partir da seguinte expressão:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}. \quad (3.30)$$

A matriz $\mathbf{P}$ apresentada na expressão anterior (comumente conhecida como Matriz de Riccati) é determinada a partir da resolução da Equação Matricial Reduzida de Riccati, cuja expressão tem a seguinte forma:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (3.31)$$

Desta forma, o projeto de sistemas de controle ótimo aplicáveis aos sistemas lineares, contínuos e invariantes no tempo, pode ser resumido a partir das seguintes etapas:

- a) Estabelecem-se valores para as matrizes de ponderação $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$;
- b) Resolve-se a equação matricial reduzida de Riccati, a partir da qual determina-se a matriz de Riccati (matriz $\mathbf{P}$). Para que o sistema seja estável, deve-se encontrar uma matriz $\mathbf{P}$ definida positiva;

⁶ Uma função escalar é **definida positiva** se $V(\mathbf{x}) = 0$ para $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $V(\mathbf{x}) > 0$ para todos os outros valores de $\mathbf{x}$ (exemplo : $V(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + x_2^2$). Uma função escalar é **definida negativa** quando a função $-V(\mathbf{x})$ for definida positiva (exemplo : $V(\mathbf{x}) = -(5x_1 + x_2)^2 - x_1^2$). Uma função escalar $V(\mathbf{x})$ é **semidefinida positiva** se $V(\mathbf{x}) = 0$ para $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $V(\mathbf{x}) \geq 0$ para todos os outros valores de $\mathbf{x}$. $V(\mathbf{x})$ será uma função **semidefinida negativa** se $-V(\mathbf{x})$ for semidefinida positiva (exemplo: $V(\mathbf{x}) = -(5x_1 + x_2)^2$). Consideremos uma função $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$. Se a forma quadrática $V(\mathbf{x})$ for uma função definida positiva, então a matriz $\mathbf{P}$ será também denominada definida positiva. Da mesma forma, se $V(\mathbf{x})$ for uma função semidefinida positiva, a matriz $\mathbf{P}$ será uma matriz semidefinida positiva.

- c) Conhecida a matriz de Riccati, são determinados a matriz de ganho de realimentação (equação (3.30)) e os valores das variáveis de estado.

KWAKERNAAK & SIVAN (1972), OGATA (1982) e STENGEL (1994) demonstram ainda que o valor do índice de desempenho para o projeto de controle ótimo pode ser obtido a partir da condição inicial das variáveis de estado ($\mathbf{x}(0)$) e da matriz de Riccati. Desta forma:

$$\mathbf{J} = \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0). \quad (3.32)$$

3.9 - Controle Ótimo de sistemas discretos no tempo

Nesta seção será apresentado o problema de controle ótimo de sistemas discretos, lineares e invariantes no tempo. O desenvolvimento teórico que fundamenta a solução sumarizada nos próximos parágrafos é apresentado em detalhes por KWAKERNAAK & SIVAN (1972), STREJC (1981) e OGATA (1987).

Considere-se, então, o sistema discreto, linear e invariante no tempo no tempo, representado pela equação de estado (3.10). Suprimindo-se a apresentação do período de amostragem T , esta equação pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{C}. \quad (3.33)$$

Ao final da aplicação das leis de Controle Ótimo, deseja-se encontrar a sequência de controle ($\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N-1)$) que minimize um índice de desempenho. Para sistemas discretos no tempo, considerando-se um processo finito no tempo, o índice de desempenho quadrático assume a seguinte forma:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)]. \quad (3.34)$$

Na expressão do índice de desempenho:

- **Q**: matriz real simétrica definida ou semidefinida positiva ($n \times n$);
- **R**: matriz real simétrica definida positiva ($n \times r$);
- **S**: matriz real simétrica definida ou semidefinida positiva ($n \times n$);
- **N**: número de estágios considerados.

Suponha-se, adicionalmente, que o sistema seja completamente controlável e que seja possível implementar uma lei de controle na seguinte forma:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k), \quad (3.35)$$

sendo **K** a matriz de ganho de realimentação. Aplicando-se a lei de controle definida pela última equação a equação de estado do sistema (equação (3.33)), o sistema realimentado passa a ser descrito pela seguinte equação:

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{G} - \mathbf{H}\mathbf{K}(k)]\mathbf{x}(k). \quad (3.36)$$

A matriz de ganho de realimentação **K**, por sua vez, pode ser determinada a partir da seguinte expressão:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T(\mathbf{G}^T)^{-1} [\mathbf{P}(k) - \mathbf{Q}], \quad k = N, N-1, \dots, 0. \quad (3.37)$$

Para a determinação da matriz **P** constante da última equação recorre-se a equação matricial de Riccati que, para sistemas discretos no tempo, toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k) &= \mathbf{Q} + \mathbf{G}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G} - \mathbf{G}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}[\mathbf{R} + \mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G}, \\ k &= N, N-1, \dots, 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Também aqui, a matriz **P** usualmente recebe a denominação de matriz de Riccati. A resolução da equação de Riccati regressivamente (de $k = N$ até $k = 0$) permite a determinação dos valores de $\mathbf{P}(N)$, $\mathbf{P}(N-1)$, ..., $\mathbf{P}(0)$. Deve-se destacar que a matriz **S** define o valor da matriz de Riccati para o último estágio, ou seja:

$$\mathbf{P}(N) = \mathbf{S}. \quad (3.39)$$

O projeto de controle ótimo de sistemas discretos no tempo pode, então, ser resumido através das seguintes etapas:

- a) Estabelecem-se valores para as matrizes de ponderação $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, e $\mathbf{S}$. A matriz de ponderação $\mathbf{S}$ estabelece os valores da matriz de Riccati para o último estágio (equação (3.39)).
- b) Resolve-se regressivamente a equação matricial de Riccati. Este passo permite determinar os valores de $\mathbf{P}(N - 1)$, $\mathbf{P}(N - 2)$, ..., $\mathbf{P}(0)$.
- c) Com auxílio da equação (3.35) são determinados os valores da matriz de realimentação $\mathbf{K}$ para os diferentes estágios.
- d) Como o estado inicial do sistema foi previamente fixado ($\mathbf{x}(0) = \mathbf{C}$), a resolução progressiva das equações (3.35) e (3.36) permite determinar, respectivamente, as variáveis de controle e as variáveis de estado nos diferentes estágios considerados.

O valor mínimo para o índice de desempenho é obtido, por sua vez, a partir da minimização da expressão (3.34). Assim:

$$\text{Min } J = \min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(N) \mathbf{S} \mathbf{x}(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \right] \right\}. \quad (3.40)$$

KWAKERNAAK & SIVAN (1972), STREJC (1981) e OGATA (1987) demonstram que a minimização proposta pela última expressão conduz ao seguinte resultado:

$$J_{\min} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P}(0) \mathbf{x}(0). \quad (3.41)$$

3.10 - Controle ótimo em estado estacionário de sistemas discretos no tempo

Na última seção discutiu-se o Controle Ótimo de sistemas discretos no tempo em situações nas quais o processo de controle era finito (N finito). Naquele caso, a matriz de realimentação $\mathbf{K}(k)$ tornava-se uma matriz variante no tempo. Nesta seção será considerado o Controle Ótimo de sistemas discretos no tempo nas situações em que o processo de controle continua indefinidamente (o número de estágios N é infinito). Também este caso é apresentado e discutido por KWAKERNAAK & SIVAN (1972), STREJC (1981) e OGATA (1987).

Nos sistemas em que o número de estágios N se aproxima de infinito, a solução do problema de Controle Ótimo transforma-se numa solução para um estado estacionário e a matriz de realimentação torna-se constante. Neste caso, o índice de desempenho pode ser reescrito da seguinte forma:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k)]. \quad (3.42)$$

O termo $\frac{1}{2} \mathbf{x}^T(N) \mathbf{S} \mathbf{x}(N)$, uma das parcelas que constitui a equação (3.34), não foi incluído na última expressão em função da seguinte constatação: se o sistema de Controle Ótimo é estável, de tal forma que J convirja para uma constante, $\mathbf{x}(\infty) = 0$ e $\frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\infty) \mathbf{S} \mathbf{x}(\infty) = 0$.

Assim como a matriz de ganho, também a matriz de Riccati torna-se constante. Seu valor pode ser determinado a partir da equação matricial de Riccati que, a partir da equação (3.38), toma a seguinte forma:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G} - \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{H} (\mathbf{R} + \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{G}. \quad (3.43)$$

A matriz de realimentação, por sua vez, pode ser obtida em função da matriz $\mathbf{P}$ a partir da equação (3.37). Desta forma:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{G}^T)^{-1} (\mathbf{P} - \mathbf{Q}). \quad (3.44)$$

A lei de Controle Ótimo em regime estacionário é dada por:

$$\mathbf{u}(k) = - \mathbf{K} \mathbf{x}(k). \quad (3.45)$$

O valor mínimo do índice de desempenho, associado à lei de Controle Ótimo em estado estacionário, pode ser obtido a partir da equação (3.41). Neste caso, $\mathbf{P}(0)$ deverá ser substituído por $\mathbf{P}$, o que conduzirá à:

$$J_{\min} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0). \quad (3.46)$$

3.11 – Distúrbios externos

Distúrbios externos periódicos, conhecidos ou aleatórios, sempre agem sobre o sistema. Amplificadores eletrônicos possuem ruídos gerados no interior de circuitos integrados ou dos transistores; as antenas de radar são freqüentemente submetidas a rajadas de vento; os sistemas de distribuição de água submetidas às variações de demanda e os sistemas de tratamento de esgoto às variações de vazões afluentes.

Considerada a presença de distúrbios externos, a equação de estado do sistema para sistemas contínuos⁷ no tempo (equação (3.5)) toma a seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{D}_w \mathbf{w}(t), \quad (3.47)$$

sendo:

- $\mathbf{D}_w$: matriz de transmissão de distúrbios ($n \times m$);
- $\mathbf{w}(t)$: vetor de distúrbios externos ($m \times u_m$).

⁷ Com a adequada indicação das matrizes de estado, de entrada e de transmissão de distúrbios, equações similares podem ser estabelecidas para os sistemas discretos no tempo.

A influência dos distúrbios externos, entretanto, não é considerada para o projeto do controlador, ficando inalterada a expressão destinada ao cálculo da matriz de ganho de realimentação do sistema de controle (expressão (3.30)). Assim, o sistema realimentado é descrito através da seguinte expressão:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + D_w w(t). \quad (3.48)$$

Um diagrama de blocos do sistema de controle, considerada a ação de distúrbios externos, está apresentado na FIGURA 3.8.

FIGURA 3.8 – Diagrama de blocos do sistema de controle ótimo, considerada a ação dos distúrbios externos.

3.12 - Observadores de estados

Nas seções anteriores discutiu-se o projeto de sistemas de controle admitindo-se que todas as variáveis de estado estavam disponíveis para a realimentação. Na prática, entretanto, nem todas as variáveis podem estar disponíveis, necessitando-se estimar aquelas que não puderem ser medidas.

A estimativa das variáveis de estado não disponíveis para realimentação é comumente chamada de observação de estados. O dispositivo (ou programa de computador) que estima as variáveis de estado, por sua vez, é denominado observador de estados. Quando o observador de estados estima todas as variáveis de

estado do sistema, independentemente de algumas delas estarem disponíveis para realimentação, recebe a denominação de observador de estados de ordem plena. Quando o observador de estado reconstrói apenas algumas das variáveis de estado, uma vez que outras podem ser medidas com exatidão, é chamado de observador de ordem reduzida. Finalmente, quando a quantidade de variáveis de estados estimadas é a menor possível, o observador é denominado de ordem mínima.

No restante desta seção serão discutidos os observadores de estado de ordem plena para sistemas contínuos⁸. Os procedimentos necessários ao estabelecimento dos observadores de ordem reduzida são detalhadamente discutidos por KWAKERNAAK & SIVAN (1972) e OGATA (1982, 1987).

Para a definição do observador de estados, considere-se o sistema definido pelas seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (3.5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (3.20)$$

Admita-se, adicionalmente, que o estado $\mathbf{x}(t)$ do sistema possa ser aproximado pelo estado estimado $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ do modelo dinâmico. Desta forma, pode-se escrever:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{k}_e(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t)). \quad (3.49)$$

Na última expressão:

- $\mathbf{k}_e(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t))$: termo de correção, envolvendo a diferença entre o valor medido para o sinal de saída ($\mathbf{y}(t)$) e o valor estimado pelo observador de estado para este mesmo sinal ($\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t)$);

⁸ Com a adequada indicação das matrizes de estado e de entrada e com as necessárias alterações inerentes à determinação das matrizes de ganho do sistema de controle e do observador de estado, pode-se estabelecer um desenvolvimento similar para os sistemas discretos no tempo.

- k_e : matriz de ponderação para a diferença entre os estados medidos e observados.

Para que se possa obter o erro introduzido pelo observador de estados, a equação (3.49) deve ser subtraída na equação (3.5). Assim:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{k}_e(\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t)), \\ \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{k}_e\mathbf{C})(\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)).\end{aligned}\quad (3.50)$$

Definindo-se o vetor erro $\mathbf{e}(t)$ como sendo a diferença entre os estados medidos e observados, têm-se:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t). \quad (3.51)$$

Das duas últimas expressões:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{k}_e\mathbf{C})\mathbf{e}(t). \quad (3.52)$$

Da expressão anterior pode-se observar que o comportamento dinâmico do vetor erro é determinado pelos autovalores da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})$. Desta forma, se esta matriz for estável, o vetor erro convergirá para zero independentemente dos valores iniciais adotados para o vetor erro, ou seja, $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ convergirá para $\mathbf{x}(t)$, quaisquer que sejam os valores de $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ e $\mathbf{x}(0)$.

KWAKERNAAK & SIVAN (1972) e OGATA (1982) demonstram que a condição necessária e suficiente para a observação de estados do sistema definido pelas equações (3.5) e (3.27) é que o sistema seja completamente observável. Assim, sendo o sistema a estados completamente observáveis, é possível escolher uma matriz de ganho do observador de tal modo que a matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ possua os autovalores desejados. Desta forma, a matriz de ganho do observador pode ser determinada de tal maneira que se obtenha uma matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ estável.

Suponha-se, agora, que o controle por realimentação de estados seja baseado no estado estimado pelo observador ($\tilde{x}(t)$). Assim, a lei de controle anteriormente definida pela equação (3.27) toma a seguinte forma:

$$u(t) = -K \tilde{x}(t). \quad (3.53)$$

A combinação das equações (3.5) e (3.53) produz:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) - BK\tilde{x}(t), \\ \dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + BK(x(t) - \tilde{x}(t)). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Aplicando-se a equação que define o erro da observação de estados (equação (3.51)) à última expressão, obtêm-se:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BKe(t). \quad (3.55)$$

Considerando-se as expressões (3.52) e (3.55) obtêm-se, finalmente, a equação que descreve a dinâmica do sistema de controle por realimentação do estado observado. Assim:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_e C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Da última expressão pode-se observar que o projeto de um sistema de controle com realimentação do estado observado constitui um processo de dois estágios. No primeiro deles, determina-se a matriz de ganho de realimentação de tal forma que o sistema atenda aos critérios de desempenho estabelecidos; no segundo estágio, determina-se a matriz de ganho K_e do observador de tal forma que a resposta do observador seja muito mais rápida que a resposta do sistema.

Por fim, convém observar que a seleção da melhor matriz de ganho do observador resume-se num compromisso entre a resposta do sistema e a sua sensibilidade à

perturbações e ruídos. KWAKERNAAK & SIVAN (1972) e OGATA (1982, 1987) discutem, em detalhes, diferentes alternativas para a seleção da matriz de ganho do observador.

Um diagrama de blocos de um sistema de controle por retroalimentação de estados está apresentado na FIGURA 3.9.

FIGURA 3.9. Diagrama de blocos do sistema de controle proposto, considerada a incorporação do observador de estados.

CAPÍTULO 04

SISTEMAS DE TRATAMENTO DE ESGOTOS E SUA MODELAGEM

4 - SISTEMAS DE TRATAMENTO DE ESGOTOS E SUA MODELAGEM

4.1 - Considerações gerais

Ao longo deste capítulo serão brevemente discutidos dois diferentes processos biológicos aeróbios de tratamento de esgotos - filtros biológicos e lodos ativados - e suas possíveis combinações. A parte final do capítulo será destinada a apresentação dos modelos matemáticos disponíveis para a descrição do comportamento dinâmico destes sistemas. Como as estações de tratamento que empregam processos de lodos ativados e filtros biológicos normalmente apresentam decantadores secundários, os modelos dinâmicos utilizados para a descrição destas unidades também serão sumariamente discutidos.

4.2 - Lodos Ativados

O processo de lodos ativados, largamente utilizado para o tratamento de esgotos domésticos e industriais, produz um efluente final com elevada qualidade e exige reduzidas áreas para sua implantação. Como desvantagens, apresenta elevados consumos de energia, considerável índice de mecanização e elevada produção de lodo.

A principal unidade do sistema de lodos ativados é um tanque de aeração, onde reações bioquímicas degradam a matéria orgânica presente no afluente bruto. Neste tanque de aeração, os compostos orgânicos são utilizados com substrato para os microrganismos que crescem e se aglutinam, formando flocos biológicos (biomassa). O efluente do tanque segue para o decantador secundário, onde os flocos biológicos são separados do efluente tratado. A biomassa retida no decantador (agora comumente denominada lodo) é recirculada para o tanque de aeração, aumentando a concentração de microrganismos ativos e, normalmente, a eficiência do sistema.

Nos sistemas de lodos ativados o tempo de detenção hidráulica é normalmente pequeno, da ordem de horas, o que permite que o processo funcione com tanques de reduzidos volumes. Entretanto, o tempo de retenção da biomassa (comumente chamado de idade do lodo) é elevado, função da existência de recirculação do lodo. Isto permite que o sistema apresente elevada eficiência, uma vez que a biomassa metaboliza quase toda a matéria orgânica presente.

Para que o sistema de tratamento permaneça em equilíbrio é necessário que a quantidade de lodo diariamente produzida seja removida do sistema. O lodo descartado é normalmente conhecido como lodo excedente.

As variantes mais comuns do processo de lodos ativados são os sistemas convencionais e os sistemas com aeração prolongada, os quais serão sumariamente apresentados nos próximos parágrafos. Outras variantes do processo são apresentadas e discutidas por METCALF & EDDY (1991).

No sistema de lodos ativados convencional, um decantador primário permite que a parcela sedimentável da matéria orgânica afluenta ao sistema seja retirada da massa líquida antes de chegar ao tanque de aeração. Isso possibilita uma sensível economia na energia consumida durante a etapa de aeração. Nesta variante do processo, o tempo de detenção hidráulica normalmente varia entre 6 e 8 horas e a idade do lodo entre 4 e 10 dias. Esta idade do lodo requer a existência de uma etapa posterior de tratamento do lodo excedente, uma vez que a biomassa descartada ainda apresenta consideráveis teores de matéria orgânica em suas células. A FIGURA 4.1 representa esquematicamente um sistema de lodos ativados convencional.

FIGURA 4.1 - Sistema de lodos ativados convencional.

No sistema de lodos ativados com aeração prolongada, o tempo de detenção da biomassa é consideravelmente maior, variando entre 18 e 30 dias. Isso exige que o tanque de aeração seja maior, o que eleva o tempo de detenção hidráulica para valores entre 16 e 24 horas. Neste sistema, como a carga orgânica recebida é idêntica àquela encontrada no sistema convencional, a disponibilidade de substrato é bem menor e os microrganismos passam a metabolizar os compostos orgânicos presentes em suas células. Desta forma, a biomassa passa a ser estabilizada no próprio tanque de aeração. Como o lodo excedente do sistema já é descartado estabilizado, o decantador primário, por produzir um lodo que exige tratamento complementar, normalmente é eliminado da planta de tratamento.

Os sistemas com aeração prolongada, por suprimirem os decantadores primários e as unidades complementares de tratamento do lodo, possuem um fluxograma bastante simplificado. A FIGURA 4.2 representa esquematicamente um sistema de lodos ativados de aeração prolongada.

FIGURA 4.2 - Sistema de lodos ativados com aeração prolongada.

Os sistemas de lodos ativados descritos nos parágrafos precedentes constituem sistemas de fluxo contínuo. Uma variante destes sistemas é o sistema de lodos ativados com fluxo intermitente (tipo batelada). Nos sistemas com fluxo intermitente, todos os processos e operações ocorrem num único tanque. Desta forma, todos os processos e operações passam a ser sequenciais no tempo e não constituem unidades separadas como apresentado nos sistemas anteriores. Nos sistemas intermitentes, os ciclos de operação normalmente são divididos em enchimento (entrada de esgoto bruto ou decantado no reator), reação, sedimentação, esvaziamento e repouso (ajuste do ciclo e remoção do lodo excedente).

4.3 - Filtros Biológicos

Os filtros biológicos são constituídos por um leito fixo (meio suporte) altamente permeável sobre o qual aderem e se desenvolvem os microrganismos responsáveis pela estabilização dos compostos orgânicos presentes no afluente bruto.

O meio suporte pode ser constituído por pedras, escória, ripas de madeira, bambu ou por diferentes materiais plásticos. Quando é construído por pedras, a altura do leito filtrante varia entre 0,9 e 2,5 m (sendo comum uma altura média de 1,8 m) e o diâmetro médio das pedras varia entre 25 e 100 mm. Os filtros com leito de pedra são usualmente circulares e o afluente bruto é lançado sobre o leito com auxílio de um distribuidor rotativo. Quando o leito é composto por material plástico os filtros biológicos são mais altos (a altura normalmente varia entre 4 e 12 m) e construídos em diferentes formas geométricas. Uma comparação entre os principais materiais plásticos utilizados na composição do meio suporte é apresentada por METCALF & EDDY (1991).

Sob os filtros são instalados drenos, responsáveis pela coleta do efluente filtrado e dos sólidos biológicos que se desprendem do leito filtrante. Adicionalmente, os drenos são responsáveis pela circulação do ar que garante o ambiente aeróbio no interior do reator. O líquido coletado pelos drenos passa para um decantador, onde os sólidos em suspensão são separados do efluente tratado. Na prática, uma parcela do efluente do filtro ou do decantador secundário é recirculada. Nesta operação de recirculação pretende-se principalmente: *a)* manter o leito permanentemente umedecido, *b)* diluir os afluentes ao filtro que apresentem elevadas cargas orgânicas e *c)* remover o excesso de biomassa que se desenvolve sobre o meio suporte. Uma representação esquemática dos filtros biológicos, incluindo as diferentes possibilidades de recirculação e a combinação em série dos filtros, está apresentada na FIGURA 4.3.

FIGURA 4.3 - Representação esquemática dos filtros biológicos com um e dois estágios, incluindo as diferentes possibilidades de recirculação (METCALF & EDDY, 1991).

Os filtros biológicos são frequentemente classificados em função da carga hidráulica ou da carga orgânica que recebem, sendo usualmente divididos em filtros biológicos de baixa carga, carga intermediária, alta carga, altíssima carga e grosseiros. Os intervalos de variação das cargas aplicadas em cada um dos tipos de filtro, bem como outras características operacionais, estão apresentados na TABELA 4.1.

Uma detalhada discussão sobre a aplicabilidade dos filtros biológicos e sobre os diversos fatores que condicionam a performance e o projeto destes sistemas de

tratamento é apresentada por METCALF & EDDY (1991) e pelo trabalho produzido conjuntamente pela Water Environmental Federation e American Society of Civil Engineering (WEF & ASCE (1991)).

TABELA 4.1 - Características operacionais dos diferentes tipos de filtro biológico

Item	Tipo de filtro				
	Baixa carga	Carga intermediária	Alta carga	Altíssima carga	Grosseiros
Meio suporte	Rocha, escória	Rocha, escória	Rocha	Plástico	Rocha, Plástico
Carga hidráulica ($\text{m}^3/\text{m}^2 \cdot \text{dia}$)*	1,20-3,50	3,50-9,40	9,40-37,60	11,80-70,40	46,90-187,80
Carga orgânica ($\text{kg}/\text{m}^3 \cdot \text{dia}$)**	0,08-0,40	0,24-0,48	0,48-0,96	0,48-1,60	1,60-8,00
Profundidade (m)***	1.80-2.40	1.80-2.40	0.90-1.80	3-12	4.50-12
Razão recirculação	0	0-1	1-2	1-2	1-4
Perda de biomassa	Intermitente	Intermitente	Contínua	Contínua	Contínua
Eficiência remoção de DBO_5 (%)	80-90	50-70	65-85	65-80	40-65
Efluente	Bem nitrificado	Parcialmente nitrificado	Pouco nitrificado	Pouco nitrificado	Nenhuma nitrificação

Fonte: METCALF & EDDY (1991).

* Valores originalmente apresentados em $\text{gal}/\text{ft}^2 \cdot \text{min}$;

** Valores originalmente apresentados em $\text{lb}/10^3 \cdot \text{ft}^3 \cdot \text{dia}$;

*** Valores originalmente apresentados em ft.

4.4 - Processos Combinados

A maior parte dos processos combinados emprega um reator com filme biológico fixo em série com um reator de crescimento disperso; os reatores de filme fixo normalmente são filtros biológicos, enquanto que os tanques de aeração ou pequenos canais de contato, os reatores de crescimento disperso. Biodiscos ou lagoas de estabilização, combinados em série com os filtros biológicos, também podem constituir alternativas à definição dos processos combinados.

ROSKOPF et al. (1976), HARRISON et al. (1984), MATASCI et al. (1986), NEWBRY et al. (1988), PARKER (1999) e PARKER & BRATBY (2001) discutem a aplicação combinada dos processos de lodos ativados e filtros biológicos. Estes sistemas de tratamento, quando combinados, oferecem a simplicidade de operação e

estabilidade dos processos com biomassa aderida e a alta qualidade do efluente final obtida nos processos com biomassa dispersa. Adicionalmente, os processos combinados podem tornar-se economicamente mais interessantes que outras opções de tratamento de esgotos.

Nos processos combinados, o afluente bruto é geralmente lançado sobre o filtro biológico. Após a filtração, uma parcela do efluente do filtro é normalmente recirculada e o restante segue para um tanque de aeração. O efluente do tanque de aeração, por sua vez, segue para um decantador secundário onde os sólidos em suspensão são separados do efluente tratado. O lodo depositado no decantador secundário pode ser recirculado tanto para o filtro biológico quanto para o tanque de aeração. O sistema combinado está esquematicamente representado na FIGURA 4.4.

FIGURA 4.4 - Representação esquemática do Sistema Combinado.

Função da localização do ponto de entrada de lodo recirculado e/ou das dimensões relativas dos filtros biológicos e tanques de aeração, diferentes arranjos podem ser estabelecidas para os sistemas combinados. Dentre as possíveis combinações, as mais comuns são: *a)* biofiltro ativado e lodos ativados, *b)* filtro biológico grosseiro e lodos ativados, *c)* filtro biológico e tanque de contato e *d)* filtro biológico e lodos ativados convencional.

Para a combinação biofiltro ativado/lodos ativados, o lodo recirculado é lançado sobre o filtro biológico; nas demais opções, o lodo é lançado no tanque de aeração. As combinações filtro biológico grosseiro/lodos ativados e biofiltro ativado/lodos ativados normalmente utilizam pequenos filtros biológicos e grandes tanques de aeração; em contraste, a combinação filtro biológico/tanque de contato utiliza

grandes filtros biológicos e pequenos tanques de aeração. A FIGURA 4.5 apresenta uma representação esquemática das diferentes possibilidades de combinação.

WEF & ASCE (1991) apresentam uma detalhada discussão acerca dos diversos fatores que condicionam a performance, a aplicabilidade e o dimensionamento dos processos combinados.

FIGURA 4.5 - Representação esquemática de possíveis arranjos para o Sistema Combinado: (a) Filtro biológico / tanque de contato e filtro biológico grosseiro / lodos ativados, (b) Biofiltro ativado / lodos ativados e (c) Filtro biológico e lodos ativados convencional em série (METCALF & EDDY, 1991).

4.5 - Modelagem dos processos de lodos ativados

4.5.1 – Tanque de aeração

A implementação das estratégias de Controle Ótimo requer que o sistema a ser controlado possa ser convenientemente descrito através de um modelo dinâmico. Dentre os modelos dinâmicos disponíveis para a descrição do comportamento do processo de lodos ativados, o modelo proposto pela *International Association on Water Pollution Research and Control* (IAWPRC)¹ tem sido o mais largamente aceito e utilizado. As equações que constituem o modelo, as considerações assumidas para sua definição e as restrições ao seu uso foram apresentadas por HENZE et al. (1987).

O modelo proposto pela IAWPRC permite avaliar a oxidação da matéria carbonácea, a nitrificação e a desnitrificação, envolvendo oito processos fundamentais: crescimento aeróbio da biomassa heterotrófica, crescimento anóxico da biomassa heterotrófica, crescimento aeróbio da biomassa autotrófica, decaimento da biomassa heterotrófica, decaimento da biomassa autotrófica, amonificação do nitrogênio orgânico solúvel, hidrólise da matéria orgânica particulada e hidrólise do nitrogênio orgânico. Uma representação diagramática simplificada dos processos envolvidos no modelo proposto pela IAWPRC está apresentada na FIGURA 4.6

FIGURA 4.6 - Diagrama de fluxo para o modelo proposto pela IAWPRC (GRADY, 1989).

¹ Atualmente International Water Association (IWA).

Uma representação matricial do modelo está apresentada na TABELA 4.2. GRADY (1989) discute detalhadamente os diversos constituintes modelados. As principais considerações apresentadas por este autor serão reproduzidas nos próximos parágrafos.

Os quatros primeiros constituintes apresentados na matriz (S_i , S_s , X_i e X_s) caracterizam a natureza orgânica do efluente. Estes constituintes são operacionalmente divididos em rapidamente biodegradáveis, lentamente biodegradáveis e inertes, embora seus símbolos impliquem em definições físicas (constituintes solúveis e particulados, divididos em função do tamanho das partículas). Cada uma destas parcelas pode ser assim definida:

- O substrato rapidamente biodegradável (S_s) é a parcela dos compostos orgânicos facilmente degradada, de tal forma que as concentrações do receptor de elétrons (oxigênio ou nitrato) variam imediatamente. Simbolicamente, a fração rapidamente biodegradável é representada pela fração solúvel do substrato;
- O substrato lentamente biodegradável (X_s) é a parcela dos compostos orgânicos que deverá sofrer hidrólise, uma vez que não pode ser prontamente utilizada pelos microrganismos. Desta forma, não produz alterações imediatas nas concentrações do receptor de elétrons. No modelo, o substrato lentamente biodegradável é representado pela fração particulada da matéria orgânica;
- A parcela inerte dos compostos orgânicos (S_i e X_i) é a fração que apresenta taxas de reação tão reduzidas que as variações em suas concentrações são desprezíveis, quando consideradas as restrições de tempo do processo de lodos ativados. A divisão em solúvel (S_i) e particulada (X_i) simplifica os trabalhos de modelagem. A fração solúvel atravessa o sistema sem sofrer qualquer alteração (as concentrações afluentes e efluentes são idênticas), enquanto que a fração particulada é incorporada ao lodo (as concentrações de particulados inertes no efluente final da estação dependerão essencialmente da eficiência do decantador).

Os constituintes 5, 6 e 7 (X_b , X_a e X_p) compõem o restante dos sólidos em suspensão na massa líquida. Estes constituintes podem ser assim definidos:

- A biomassa heterotrófica (X_b) é a fração da biomassa responsável pela degradação da matéria orgânica sob condições aeróbias ou sob condições anóxicas (ausência de oxigênio e presença de nitratos);
- A biomassa autotrófica (X_a) é a parcela da biomassa responsável pela oxidação da amônia a nitratos. Embora a nitrificação seja notadamente um processo de dois estágios (existe a formação intermediária de nitritos), o trabalho de modelagem fica facilitado com a adoção de um único estágio;
- A última parcela dos sólidos em suspensão é composta pelos constituintes particulados (X_p) produzidos a partir do decaimento da biomassa. Esta parcela pode ser considerada inerte, função das restrições de tempo do processo de lodos ativados.

O próximo constituinte da matriz representa o oxigênio dissolvido (S_o), elemento indispensável ao crescimento aeróbio das biomassas heterotróficas e autotróficas. Como a matriz apresentada na TABELA 4.2 inclui apenas as reações biológicas, não foram incluídos os termos responsáveis pela adição de concentrações de oxigênio às equações constantes do modelo.

As diferentes formas de nitrogênio consideradas pelo modelo estão representadas pelos componentes de 9 a 12 (S_{no} , S_{nh} , S_{nd} e X_{nd}). Individualmente, estas parcelas podem ser assim definidas:

- A amônia total (S_{nh}) combina as parcelas ionizada e não-ionizada da amônia, constituindo substrato para o crescimento da biomassa autotrófica e fonte de nitrogênio para a síntese celular;
- As concentrações de nitritos e nitratos são combinadas num único elemento (S_{no}), sendo produzidas pela ação das bactérias autotróficas. Adicionalmente, sob condições anóxicas, este elemento serve comoceptor de elétrons para as bactérias heterotróficas desnitrificantes;
- Os dois outros constituintes (S_{nd} e X_{nd}) representam, respectivamente, as frações rapidamente biodegradável e lentamente biodegradável do nitrogênio

orgânico. A partir destes elementos são produzidas as concentrações de amônia, as quais, por sua vez, podem sofrer nitrificação ou assimilação pela biomassa. O nitrogênio orgânico não-biodegradável não é considerado pelo modelo.

O último elemento da TABELA 4.2 (S_{alk}) representa a alcalinidade total. A modelagem deste parâmetro permite que as variações no valor do pH sejam previstas e evitadas. Isto é importante, uma vez que a influência do pH sobre o processo de não está explicitamente considerada no modelo. Segundo GRADY (1989), o pH torna-se instável para valores de alcalinidade inferiores a aproximadamente 50 gCaCO₃/m³ e, nas condições de operação em que o pH apresente valores inferiores a 6, o processo de nitrificação pode ser inibido.

A matriz apresentada na TABELA 4.2 reúne, de fato, apenas as taxas de reação dos diversos constituintes considerados pelo modelo proposto pela IAWPRC. Na prática, estas taxas deverão compor as equações de balanço de massa do reator modelado. A expressão geral para o balanço de massa de um constituinte qualquer, num tanque de aeração de fluxo contínuo e mistura completa ideal, pode ser formulada através da relação

$$\text{Acumulação} = \text{Afluxos} - \text{defluxos} + \text{taxa de reação}$$

que, em termos matemáticos, pode ser representada através da seguinte equação:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{Q_i}{V} C_i - \frac{Q_o}{V} C + r. \quad (4.1)$$

Na expressão (4.1):

- C: concentração do constituinte no interior do reator (M/L³);
- C_i: concentração do constituinte afluente ao reator (M/L³);
- Q_i: vazão afluente ao reator (L³/T);
- Q_o: vazão efluente do reator (L³/T);

- V : volume (L^3);
- r : taxa de reação do constituinte (M/L^3T).

Para exemplificar a utilização da matriz para a construção das expressões finais utilizadas para o balanço de massa de diferentes constituintes, as expressões de (4.2) a (4.7) representam as expressões utilizadas para o balanço de massa das concentrações de biomassa heterotrófica ativa e das diferentes parcelas que compõem a matéria orgânica no interior do tanque de aeração do processo de lodos ativados. Desta forma:

$$\begin{aligned} \frac{dX_b}{dt} = & \frac{Q_i}{V} X_{bi} + \frac{Q_r}{V} X_{br} - \frac{Q_d}{V} X_b - \frac{Q_o}{V} X_b + \mu_H \frac{S_s}{k_s + S_s} \frac{S_o}{k_o + S_o} X_b + \dots \\ & \dots + \mu_H \frac{S_s}{k_s + S_s} \frac{S_o}{k_o + S_o} \frac{S_{no}}{k_{no} + S_{no}} \eta_g X_b - b_H X_b, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_s}{dt} = & \frac{Q_i}{V} S_{si} + \frac{Q_r}{V} S_{sr} - \frac{Q_d}{V} S_s - \frac{Q_o}{V} S_s - \frac{1}{Y_H} \mu_H \frac{S_s}{k_s + S_s} \frac{S_o}{k_o + S_o} X_b - \dots \\ & \dots - \frac{1}{Y_H} \mu_H \frac{S_s}{k_s + S_s} \frac{S_o}{k_o + S_o} \frac{S_{no}}{k_{no} + S_{no}} \eta_g X_b + \dots \\ & \dots + k_H \frac{\frac{X_s}{X_b}}{k_x + \left(\frac{X_s}{X_b}\right)} \frac{S_o}{k_o + S_o} + \eta_H \frac{S_o}{k_o + S_o} \frac{S_{no}}{k_{no} + S_{no}} X_b, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_s}{dt} = & \frac{Q_i}{V} X_{si} + \frac{Q_r}{V} X_{sr} - \frac{Q_d}{V} X_s - \frac{Q_o}{V} X_s + (1-f_p) b_H X_b + (1-f_p) b_A X_a \\ & \dots - k_H \frac{\frac{X_s}{X_b}}{k_x + \left(\frac{X_s}{X_b}\right)} \frac{S_o}{k_o + S_o} + \eta_H \frac{S_o}{k_o + S_o} \frac{S_{no}}{k_{no} + S_{no}} X_b, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\frac{dX_p}{dt} = \frac{Q_i}{V} X_{pi} + \frac{Q_r}{V} X_{pr} - \frac{Q_d}{V} X_p - \frac{Q_o}{V} X_p + f_p b_H X_b + f_p b_A X_a, \quad (4.5)$$

$$\frac{dX_i}{dt} = \frac{Q_i}{V} X_{ii} + \frac{Q_r}{V} X_{ir} - \frac{Q_d}{V} X_i - \frac{Q_o}{V} X_i, \quad (4.6)$$

$$\frac{dS_i}{dt} = \frac{Q_i}{V} S_{ii} + \frac{Q_r}{V} S_{ir} - \frac{Q_d}{V} S_i - \frac{Q_o}{V} S_i. \quad (4.7)$$

Nas últimas expressões:

- V : volume do tanque de aeração (L^3);
- Q_i : vazão de afluente bruto ao reator (L^3/T);
- Q_o : vazão efluente do reator (L^3/T);
- Q_d : vazão de descarte de lodo (L^3/T);
- Q_r : vazão de recirculação de lodo (L^3/T);
- X_b : concentração de biomassa heterotrófica no interior do reator (M/L^3);
- X_{br} : concentração de biomassa heterotrófica no lodo recirculado (M/L^3);
- X_{bi} : concentração de biomassa heterotrófica no afluente bruto do reator (M/L^3);
- S_s : concentração de substrato solúvel rapidamente biodegradável no interior do reator (M/L^3);
- S_{sr} : concentração de substrato solúvel rapidamente biodegradável no lodo recirculado (M/L^3);
- S_{ii} : concentração de substrato solúvel rapidamente biodegradável no afluente bruto do reator (M/L^3);
- X_s : concentração de substrato solúvel lentamente biodegradável no interior do reator (M/L^3);
- X_{sr} : concentração de substrato solúvel lentamente biodegradável no lodo recirculado (M/L^3);
- X_{ii} : concentração de substrato solúvel lentamente biodegradável no afluente bruto do reator (M/L^3);
- S_i : concentração de substrato solúvel inerte no interior do reator (M/L^3);
- S_{ir} : concentração de substrato solúvel inerte no lodo recirculado (M/L^3);
- S_{ii} : concentração de substrato solúvel inerte no afluente bruto do reator (M/L^3);
- X_i : concentração de substrato particulado inerte no interior do reator (M/L^3);
- X_{ir} : concentração de substrato particulado inerte no lodo recirculado (M/L^3);

- X_{ii} : concentração de substrato particulado inerte no afluente bruto do reator (M/L^3).

Os demais parâmetros cinéticos apresentados nas equações de (4.2) a (4.7) estão relacionados e identificados na TABELA 4.2.

O modelo estabelecido pela IAWPRC, principalmente em versões reduzidas, vem sendo amplamente utilizado nas tentativas de controle dos processos de lodos ativados. Os trabalhos de KABOURIS & GEORGAKAKOS (1990), KABOURIS et al. (1992), LUKASSE et al. (1998, 1999a), MORENO E BUITÓN (1998), STEFFENS & LANT (1999) e LINDBERG (1998) são exemplos deste tipo de aplicação.

TABELA 4.2 - Processos cinéticos e estequiometria para oxidação do carbono, nitrificação e desnitrificação

PROCESSOS	PARÂMETROS													Taxas (M/L ³ T)
	S _i	S _s	X _i	X _s	X _b	X _a	X _p	S _o	S _{no}	S _{nh}	S _{nd}	X _{nd}	S _{nhk}	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1. Crescimento aeróbio de microrganismos heterotróficos		$-\frac{1}{Y_H}$			1			$-\frac{(1-Y_H)}{Y_H}$		$-i_{XB}$			$-\frac{i_{XB}}{14}$	$\mu_H \frac{S_s}{k_s + S_s} \frac{S_o}{k_o + S_o} X_b$
2. Crescimento anóxico de microrganismos heterotróficos		$-\frac{1}{Y_H}$			1			$-\frac{(1-Y_H)}{2,68 Y_H}$		$-i_{XB}$			$\frac{(1-Y_H)}{14,286 Y_H} - \frac{i_{XB}}{14}$	$\mu_H \frac{S_s}{k_s + S_s} \frac{S_o}{k_o + S_o} \frac{S_{no}}{k_{no} + S_{no}} \eta_g X_b$
3. Crescimento aeróbio de microrganismos autotróficos						1		$-\frac{(4,57 - Y_H)}{Y_A}$	$\frac{1}{Y_A}$	$-\frac{(i_{XB} + 1)}{Y_A}$			$-\frac{i_{XB}}{14} - \frac{1}{7 Y_A}$	$\mu_A \frac{S_{nh}}{k_{nh} + S_{nh}} \frac{S_o}{k_{oa} + S_o} X_a$
4. Decaimento de microrganismos heterotróficos				$1 - f_p$	-1		f_p					$i_{XB} - f_p i_{XP}$		$b_H X_b$
5. Decaimento de microrganismos autotróficos				$1 - f_p$		-1	f_p					$i_{XB} - f_p i_{XP}$		$b_A X_a$
6. Amonificação de nitrogênio orgânico solúvel										1	-1		$\frac{1}{14}$	$k_A S_{nd} X_b$
7. Hidrólise da matéria orgânica particulada		1		-1										$k_H \frac{X_s/X_b}{k_h + (X_s/X_b)} \frac{S_o}{k_o + S_o} + \eta_H \frac{S_o}{k_o + S_o} \frac{S_{no}}{k_{no} + S_{no}} X_b$
8. Hidrólise do nitrogênio orgânico											1			$\rho \left(\frac{X_{nd}}{X_s} \right)$
Parâmetros Estequiométricos														Parâmetros Cinéticos
Y_H : coeficiente de produção de biomassa heterotrófica	Matéria orgânica solúvel inerte M(DQO)/L ³	Substrato rapidamente biodegradável M(DQO)/L ³	Matéria orgânica particulada inerte M(DQO)/L ³	Substrato lentamente biodegradável M(DQO)/L ³	Biomassa heterotrófica ativa M(DQO)/L ³	Biomassa autotrófica ativa M(DQO)/L ³	Particulados produzidos a partir do decaimento da biomassa M(DQO)/L ³	Oxigênio (DQO negativa) M(DQO)/L ³	Nitritos e nitratos M(N)/L ³	Amônia total M(N)/L ³	Nitrogênio orgânico solúvel biodegradável M(N)/L ³	Nitrogênio orgânico particulado biodegradável M(N)/L ³	Alcalinidade (unidade molar)	.Crescimento e decaimento heterotrófico : $\mu_H, k_s, k_{oh}, k_{no}$ e b_H
Y_A : coeficiente de produção de biomassa autotrófica														.Crescimento e decaimento autotrófico : μ_A, k_{nh}, k_{oa} e b_A
f_p : fração da biomassa que produz material particulado														.Fator de correção para o crescimento anóxico de heterotróficos : η_g
i_{XB} : massa N / massa DQO presente na biomassa														.Amonificação : k_A
i_{XP} : massa N / massa DQO dos produtos da biomassa														.Hidrólise : k_H e k_X
														.Fator de correção para hidrólise anóxica : η_h

Fonte : HENZE et al. (1987).

4.5.2 – Decantador secundário

Os decantadores são importantes unidades dos processos de lodos ativados e seu desempenho é usualmente fundamental para o atendimento dos critérios de qualidade estabelecidos para o efluente tratado (VITASOVIC (1989)).

O modelo proposto pela IAWPRC tem sido largamente utilizado para a avaliação da performance do reator biológico dos processos de lodos ativados. Entretanto, simulações mais consistentes e completas destes processos de tratamento exigem que as reações observadas no reator biológico sejam consideradas conjuntamente com aquelas que ocorrem nos decantadores secundários (JEPPSSON & DIEHL (1996a)).

A forma mais comum de se descrever o comportamento dinâmico dos decantadores secundários envolve a utilização de modelos unidimensionais (VITASOVIC (1989), TAKÁSC et al. (1991), DUPPONT & HENZE (1992), HÄRTEL & PÖPEL (1992), JEPPSON & DIEHL (1996a, b) e HASSELBLAD et al. (1998)). Nestes modelos, o decantador é dividido num número fixo de camadas, dentro das quais a concentração de sólidos é considerada uniforme. São então combinados a equação da continuidade e a teoria do fluxo, fazendo com que a velocidade de sedimentação das partículas sólidas passe a ser dependente apenas da concentração local de sólidos. Ao longo desta seção, será apresentada uma versão simplificada do modelo dinâmico proposto por VITASOVIC (1989).

O modelo proposto por VITASOVIC (1989) parte da equação do balanço de massa, cuja expressão pode tomar a seguinte forma:

$$\frac{\partial X_T}{\partial t} = \frac{\partial(D_i \frac{\partial X_T}{\partial h})}{\partial h^2} - \frac{\partial(vX_T)}{\partial h} - r \quad (4.8)$$

Na expressão anterior:

- X_T : concentração de sólidos (M/L^3);
- D_i : coeficiente de dispersão (L^2/T);

- v : velocidade (L/T);
- h : distância vertical (L);

Além das condições iniciais e de contorno, algumas simplificações foram assumidas para a resolução da equação (4.8). São elas:

- Em qualquer plano horizontal no interior do decantador, a concentração de sólidos em suspensão é a mesma.
- O decantador não apresenta dispersão vertical;
- O fluxo de massa no interior de um volume infinitesimal do decantador não pode exceder o fluxo de massa do volume localizado imediatamente abaixo;
- O fundo do decantador representa um limite físico. Desta forma, o fluxo de sólidos sedimentáveis no fundo do decantador é nulo;
- A velocidade de sedimentação dos sólidos é função apenas da concentração de sólidos em suspensão;
- Não existe significativa atividade biológica no interior do decantador;
- Apenas o processo de adensamento dos sólidos é considerado; o processo de clarificação não é avaliado.

Consideradas estas simplificações, o decantador foi então dividido em um número finito de camadas horizontais, no interior das quais assumiu-se existir uma massa líquida completamente misturada. Desta forma, a equação (4.8) conduziu a seguinte expressão:

$$\frac{dX_{T,j}}{dt} = \frac{v_u (X_{T,j-1} - X_{T,j})}{h_j} + \left[\frac{\min(J_{S,j}; J_{S,j-1}) - \min(J_{S,j}; J_{S,j+1})}{h_j} \right] \quad (4.9)$$

Nesta última expressão:

- v_u : velocidade descendente da massa líquida (L/T);
- J_s : fluxo de sedimentação dos sólidos (M/L²T);
- h : altura da camada (L);
- j : índice que identifica a camada.

A velocidade descendente da massa líquida é determinada a partir da seguinte relação:

$$v_u = \frac{Q_r}{A_s} \quad (4.10)$$

Na expressão anterior:

- Q_r : vazão de recirculação de lodo (L^3/T);
- A_s : área da seção transversal do decantador (L^2).

O fluxo de sedimentação dos sólidos, por sua vez, está relacionado com a velocidade de sedimentação dos sólidos (v_s) a partir da seguinte relação:

$$J_s = v_s X_T \quad (4.11)$$

A velocidade de sedimentação dos sólidos foi determinada a partir da relação empírica de Vesilind:

$$v_s = v e^{(-n X_T)} \quad (4.12)$$

Na última expressão n e v são constantes empíricas obtidas a partir das propriedades de sedimentação do lodo afluente ao decantador.

Para a complementação do modelo foram estabelecidas as condições de contorno para as camadas superficial e de fundo do decantador. A condição de contorno para a camada superficial foi obtida em função da taxa de adição dos sólidos ao decantador, enquanto que, para a camada do fundo, em função da taxa de remoção de lodo decantado. As equações (4.13) e (4.14) representam as expressões assumidas, respectivamente, para a camada superficial e para a camada do fundo do decantador.

$$\frac{dX_{T,i}}{dt} = \left[\frac{\left(Q_i X_{T,i} / A_s \right) - v_u X_{T,i} - \min(J_{S,i}; J_{S,2})}{h_i} \right] \quad (4.13)$$

$$\frac{dX_{T,n}}{dt} = \left[\frac{v_u (X_{T,n-1} - X_{T,n}) + \min(J_{S,n-1}; J_{S,n})}{h_n} \right] \quad (4.14)$$

Nas duas últimas expressões:

- Q_i : vazão afluyente ao decantador (L^3/T);
- $X_{T,i}$: concentração de sólidos suspensos afluyente ao decantador (M/L^3);
- n : índice que indica a última camada do decantador.

4.6 - Modelagem dos filtros biológicos

Segundo RITTMANN (1989), os processos biológicos que utilizam filmes biológicos fixos, especialmente os processos com leito fluidizado e as novas concepções dos reatores que utilizam meio suporte fixo, apresentam como principais vantagens as excelentes eficiências de remoção dos compostos orgânicos e a possibilidade de construção de reatores com reduzidos volumes. Entretanto, os pequenos volumes dos reatores podem tornar os processos sensíveis às flutuações de cargas afluentes, deteriorando a qualidade do efluente tratado após longos períodos de operação ou nos períodos em que os processos sejam submetidos a elevações bruscas de carga. Neste contexto, RITTMANN sugere que o controle em tempo real dos processos de tratamento pode constituir uma alternativa para se mitigar os efeitos das flutuações de carga.

Para a operação dos filtros biológicos, METCALF & EDDY (1991) sugerem que a recirculação do efluente do próprio filtro ou do decantador secundário que o sucede, além de garantir que o leito permaneça constantemente umedecido, permite que as elevadas cargas afluentes ao filtro sejam diluídas, evitando a perda de performance do filtro.

A implementação das estratégias de controle, entretanto, requer a existência de um modelo dinâmico que adequadamente descreva o comportamento do filtro. A construção de modelos aplicáveis aos diferentes tipos de filtros biológicos tem sido objeto de trabalhos de diversos pesquisadores (RITTMANN (1989), VAYENAS et al. (1997), JACOB et al. (1997), WIK (1999), BABARY & BOURREL (1999) e SEGGELE et al. (1999)).

Nesta seção serão reproduzidas as proposições sugeridas por RITTMANN (1989) para a construção de modelos dinâmicos aplicáveis aos processos de tratamento que utilizam filme fixo. Esta tarefa será realizada em duas etapas: num primeiro momento serão apresentadas as linhas gerais de um modelo dinâmico aplicável à descrição de um reator biológico que utilize filme biológico fixo e, na sequência,

serão apresentados diferentes modelos aplicáveis à avaliação do fluxo de substrato para o interior dos biofilmes.

4.6.1 - Mecanismos básicos envolvidos na formação do biofilme

RITTMANN & BRUNNER (1984) observam que um modelo aplicável à descrição do comportamento transiente de biofilmes requer que cinco processos sejam considerados simultaneamente. São eles: *a)* o transporte de substrato através da camada limite, *b)* transporte de substrato no interior do biofilme através da difusão molecular, *c)* consumo do substrato no interior do biofilme, *d)* crescimento do biofilme com a utilização do substrato e *e)* a perda de biomassa causada pelo decaimento celular e pelo cisalhamento da camada biológica com o escoamento do efluente a ser tratado.

O transporte de substrato através da camada limite pode ser avaliado a partir da primeira lei de Fick. Desta forma:

$$J = -D \frac{dS}{dz} = D \frac{S - S_{\text{sup}}}{L}, \quad (4.15)$$

sendo:

- J: fluxo de substrato através da camada limite (M/L^2T);
- D: coeficiente de difusão molecular do substrato na água ($1/L^2T$);
- S: concentração de substrato na massa líquida (M/L^3);
- S_{sup} : concentração de substrato na superfície do biofilme (M/L^3);
- L: espessura da camada de difusão (L);
- Z: dimensão normal à superfície do biofilme (L).

O transporte de substrato por difusão molecular e seu consumo no interior do biofilme podem ser descritos, respectivamente, pela segunda lei de Fick e pela expressão cinética de Monod. Quando condições estacionárias são assumidas no interior do biofilme, pode-se escrever:

$$D_f \frac{d^2 S_f}{dz^2} = \mu \frac{S_f}{K_s + S_f} X_f. \quad (4.16)$$

Na expressão anterior:

- D_f : coeficiente de difusão do substrato no biofilme (L^2/T);
- S_f : concentração do substrato limitante num ponto qualquer do interior do biofilme (M/L^3);
- X_f : concentração de biomassa ativa no interior do biofilme (M/L^3);
- μ : taxa específica máxima de utilização do substrato ($1/T$);
- k_s : constante saturação do substrato (M/L^3).

Sendo o crescimento da biomassa no biofilme proporcional a utilização de substrato, tem-se:

$$r_g = Y \mu \frac{S_f}{k_s + S_f} X_f, \quad (4.17)$$

onde r_g representa a taxa de crescimento da biomassa no interior do biofilme (M/L^3T) e Y o coeficiente de produção celular ($M_{\text{biomassa}}/M_{\text{substrato}}$).

A perda de biomassa, por sua vez, pode ser avaliada a partir da seguinte expressão:

$$r_l = -b' X_f, \quad (4.18)$$

sendo r_l a taxa de perda de biofilme (M/L^3T) e b' o coeficiente de perda de biomassa provocada pelo decaimento celular e pelo cisalhamento da camada biológica² ($1/T$). Assumindo-se condições transientes, uma avaliação do comportamento do biofilme pode ser feita a partir da combinação das expressões (4.17) e (4.18). Desta forma:

$$\int_{L_f} r_{liq} dz = \int_{L_f} \left[Y \mu \frac{S_f}{k_s + S_f} X_f - b' X_f \right] dz, \quad (4.19)$$

² Uma detalhada discussão sobre a perda de biomassa causada pelos fenômenos de decaimento celular e de cisalhamento da biomassa com o escoamento da massa líquida é apresentada por RITTMANN (1982).

sendo r_{liq} a taxa de crescimento líquido do biofilme (M/L^3T) e L_f a espessura do biofilme (L).

Segundo RITTMANN & BRUNNER (1984), o membro direito da última expressão pode ser simplificado para $(Y J - b' X_f L_f)$; o lado esquerdo, por sua vez, pode ser simplificado para $dX_f L_f / dt$. Desta forma, a equação (4.19) pode ser rescrita da seguinte maneira:

$$\frac{dX_f L_f}{dt} = Y J - b' X_f L_f. \quad (4.20)$$

RITTMANN (1989) sugere ainda que o balanço de massa para as concentrações de substrato no interior de um reator com filme biológico fixo (ou no interior de um segmento deste reator) pode ser obtido a partir da seguinte expressão:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{V} S_i - \sum_{i=1}^m \frac{Q_o}{V} S_o - J A, \quad (4.21)$$

sendo :

- A: área coberta por biofilme (L^2);
- V: volume do reator ou de segmento do reator (L^3);
- Q_i : vazão afluente ao reator ou segmento do reator (L^3/T);
- Q_o : vazão efluente ao reator ou segmento do reator (L^3/T);
- S_i : concentração de substrato no afluente ao reator (M/L^3);
- S_o : concentração de substrato no afluente do reator (M/L^3);
- n : número de afluentes ao reator;
- m : número de efluentes do reator.

A formulação proposta por RITTMANN (1989), a partir do balanço de massa para as concentrações de biomassa ativa (equação (4.20)) e de substrato (equação (4.21)), baseia-se nas seguintes simplificações:

- A biomassa que eventualmente cresce dispersa no interior do reator não é considerada quando da avaliação do consumo de substrato ou da acumulação de filme biológico sobre o meio suporte;
- O reator (ou segmento do reator) é considerado completamente misturado.

O principal problema na adoção do modelo estabelecido a partir das equações (4.20) e (4.21) é a determinação do fluxo de substrato (J) como uma função apenas das concentrações de substrato na massa líquida e de parâmetros cinéticos. Caso a concentração de substrato na interface líquido-biofilme (S_s) e a espessura da camada de difusão (L) fossem conhecidas, o fluxo de substrato poderia ser calculado diretamente a partir da expressão (4.15); a determinação experimental de S_s , entretanto, é muito difícil e seu valor não é conhecido *a priori*. Adicionalmente, o valor de S_s não poderia ser determinado a partir de uma solução analítica da expressão (4.15), que é não-linear e exigiria o estabelecimento de condições de contorno. Tendo em vista estas limitações, diferentes modelos têm sido propostos para a avaliação do fluxo de substrato (RITTMANN & McCARTY (1978), RITTMANN & McCARTY (1981), SUIDAN & WANG (1985), SÁEZ & RITTMANN (1988), ANNACHHATRE & KHANNA (1987) e GRADY & LIM (1988)).

O modelo proposto por RITTMANN & McCARTY (1978), aplicável aos biofilmes profundos³, permite que o fluxo de substrato seja avaliado para biofilmes profundos, dada a concentração de substrato na massa líquida e os parâmetros cinéticos e constantes do processo. Já o trabalho de RITTMANN & McCARTY (1981), destinado aos biofilmes rasos e biofilmes completamente penetrados, permite que o valor do fluxo de substrato possa ser determinado diretamente a partir dos parâmetros cinéticos e constantes do processo, da concentração de substrato na

³ Os biofilmes podem ser classificados em profundos, rasos e completamente penetrados. Nos **biofilmes profundos**, a concentração de substrato (S_f) decresce assintoticamente até zero no interior do biofilme; o fluxo de substrato é máximo na superfície do biofilme, onde a concentração de substrato vale S_s . Nos **biofilmes completamente penetrados**, a concentração de substrato é constante ao longo de todo o biofilme ($S_f = S_s = c^{ic}$); todos os demais biofilmes são classificados como **rasos**; nestes últimos a concentração de substrato na superfície do meio suporte encontra-se no intervalo $0 < S_f < S_s$.

massa líquida e de uma dada espessura de biofilme. Estas duas formulações serão apresentadas a seguir.

4.6.2 - Modelo para o cálculo do fluxo de substrato em biofilmes profundos

RITTMANN & McCARTY (1978) propuseram um modelo de ordem variável aplicável à determinação do fluxo de substrato para o interior de biofilmes planos e profundos. O modelo proposto considera os processos de transporte de massa através da camada limite, a difusão molecular e o consumo de substrato no interior do biofilme. O transporte de substrato ao longo da camada limite é modelado a partir da primeira lei de Fick (equação (4.15)). Já a difusão e consumo de substrato no interior do biofilme são modelados, respectivamente, pela segunda lei de Fick e pela expressão cinética de Monod; como o modelo proposto assume condições estacionárias no interior do biofilme, permanece válida a igualdade estabelecida pela expressão (4.16).

O principal objetivo no modelo de ordem variável é a determinação do valor do fluxo de substrato diretamente a partir das concentrações de substrato na massa líquida e dos parâmetros cinéticos do processo. RITTMANN & McCARTY (1978) observam que para a construção do modelo foram assumidas as seguintes suposições:

- Um único substrato é limitante para as reações e difusões que ocorrem ao longo do biofilme;
- Os parâmetros k_s , μ , X_f e D_f são constantes ao longo de todo o biofilme;
- Como o perfil de concentrações no interior do filme biológico varia muito mais rapidamente do que a espessura do biofilme, o perfil de concentrações no interior do biofilme reproduz o comportamento do regime permanente, mesmo que a espessura esteja variando;
- O biofilme é considerado plano.

As expressões que constituem o modelo de ordem variável podem ser assim resumidas:

$$J^* = C^* \cdot (S^*)^q, \quad (4.22)$$

sendo:

$$q = 0,75 - 0,25 \cdot \tanh(0,477 \cdot \Lambda), \quad (4.23)$$

$$\Lambda = \ln(S^*) - \ln\left(2 + \frac{\ln D_f^*}{2,303}\right) - 1,8 \cdot (1 + 2 \cdot L^* \cdot D_f^*) + 0,353, \quad (4.24)$$

$$C^* = \frac{2 \cdot D_f^* \cdot [\sqrt{2} + 2 \cdot L^* \cdot D_f^*]^{(1-2q)}}{1 + (0,54) \cdot [1 + 0,0121 \cdot \ln(1 + 2 \cdot L^*) \cdot \left[1 - 8,325 \cdot \left(\ln \frac{q}{0,707}\right)^2\right]}. \quad (4.25)$$

As variáveis adimensionalizadas, identificadas nas expressões anteriores pelo uso do asterisco, foram assim definidas:

$$D_f^* = \frac{D_f}{D}, \quad (4.26)$$

$$L^* = \frac{L}{\tau}, \quad (4.27)$$

$$S^* = \frac{S}{k_s}, \quad (4.28)$$

$$J^* = J \cdot \frac{\tau}{D \cdot k_s}, \quad (4.29)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2 \cdot k_s \cdot D_f}{\mu \cdot X_f}}. \quad (4.30)$$

Desta forma, definido o valor do fluxo de substrato, o modelo originalmente propostas para descrever o comportamento transiente dos filtros deve ser retomado (expressões (4.20) e (4.21)), ficando, sua aplicação, dependente apenas dos parâmetros cinéticos e da concentração de substrato na massa líquida.

Segundo RITTMANN & McCARTY (1978), o modelo de ordem variável é uma aproximação matemática de um modelo físico fundamental, estabelecido a partir de conceitos que têm sido teórica e experimentalmente verificados. Assim, RITTMANN & McCARTY sugerem que a aplicação do modelo de ordem variável não está limitada a um sistema específico ou a um determinado tipo de substrato; assumidas as suposições que permitiram seu desenvolvimento, o modelo proposto é completamente geral.

4.6.3 - Modelo para o cálculo do fluxo de substrato em biofilmes rasos e biofilmes completamente penetrados

RITTMANN & McCARTY (1981) observam que para muitos processos de tratamento de efluentes, o biofilme é suficientemente espesso para que se possa considerá-lo um biofilme profundo; neste caso, o modelo de ordem variável apresentado anteriormente pode ser aplicado. RITTMANN & McCARTY definem ainda que os biofilmes devem ser tratados como profundos quando forem satisfeitas as seguintes condições:

$$\bullet \quad L_f^* = \frac{L_f}{\tau} \geq 5,5, \quad (4.31)$$

$$\bullet \quad S^* = \frac{S}{k_s} \leq 4 + 3,39L^*D_f^*. \quad (4.32)$$

Entretanto, quando a concentração de substrato é baixa (situação comum nos processos avançados de tratamento de esgotos, nos processos de tratamento de água para abastecimento público e nos corpos d'água naturais), o fluxo de substrato não consegue manter um biofilme profundo e os biofilmes devem ser modelados como biofilmes rasos ou completamente penetrados.

RITTMANN & McCARTY (1981) observam que as mesmas suposições que fundamentaram o modelo de ordem variável (RITTMANN & McCARTY (1978)) também fundamentaram o modelo aplicável ao cálculo do fluxo de substrato em biofilmes rasos ou completamente penetrados. Assim, este modelo considera um único substrato como limitante às reações de difusão e consumo, um biofilme plano, a constância dos parâmetros k_s , μ , X_f e D_f ao longo de todo o biofilme e um perfil de substrato em condição permanente mesmo que a espessura do biofilme esteja variando com o tempo. Além da difusão e consumo de substrato ao longo do biofilme (equação (4.16)), o modelo aplicável aos biofilmes rasos e completamente penetrados também considera a resistência ao transporte de massa ao longo da camada limite (equação (4.15)).

Conforme o desenvolvimento estabelecido por RITTMANN & McCARTY (1981), a utilização do modelo destinado aos biofilmes rasos e aos biofilmes completamente penetrados requer um procedimento iterativo, o qual pode ser sumarizado da seguinte forma:

1º) Estima-se um valor inicial para o fator de efetividade η :

$$\eta = \frac{\tanh(\sqrt{2} L_f^*)}{\sqrt{2} L_f^*}. \quad (4.33)$$

2º) Estima-se a concentração de substrato na interface líquido-biofilme (S_{sup}):

$$S_{sup} = \frac{(S^* - 1 - 2 \cdot L_f^* D_f^* \cdot L^* \cdot \eta + \sqrt{(S^* - 1 - 2 \cdot L_f^* D_f^* \cdot L^* \cdot \eta)^2 + 4 \cdot S^*})}{2}. \quad (4.34)$$

3º) Estima-se um valor para o fluxo adimensionalizado (J^*):

$$J^* = 2 \cdot D_f^* \cdot L^* \cdot \eta \cdot \frac{S_{sup}^*}{1 + S_{sup}^*}. \quad (4.35)$$

4º) Calcula-se S_{sup}^{**} :

$$S_{sup}^{**} = S^* - J^* \cdot L^*. \quad (4.36)$$

5º) A partir dos valores estimados para S_{sup}^{**} no último passo, calcula-se ϕ :

$$\phi = \sqrt{2} \cdot \frac{L_f^*}{(1 + 2 \cdot S_{sup}^{**})^{1/2}}. \quad (4.37)$$

6º) A partir do valor estimado para ϕ no passo anterior, determina-se η' com o auxílio das seguintes expressões:

$$\eta' = \begin{cases} 1 - \frac{\tanh(\sqrt{2} L_f^*)}{\sqrt{2} L_f^*} \cdot \left(\frac{\phi}{\tanh \phi} - 1 \right) & \text{se } \phi \leq 1 \\ \frac{1}{\phi} - \frac{\tanh(\sqrt{2} L_f^*)}{\sqrt{2} L_f^*} \cdot \left(\frac{\phi}{\tanh \phi} - 1 \right) & \text{se } \phi \geq 1 \end{cases}. \quad (4.38)$$

7º) Compara-se o valor estimado para η' com o valor inicialmente adotado para η . Aqui, duas situações podem ocorrer:

- a) η' e η estão bastante próximos, segundo algum critério pre-estabelecido (por exemplo, variação percentual de 1% entre seus valores). Neste caso, o fluxo adimensionalizado é calculado a partir da seguinte expressão:

$$J^* = 2 \cdot \eta \cdot D_f^* \cdot L_f^* \cdot \frac{S_{sup}^*}{1 + S_{sup}^*}, \quad (4.39)$$

lembrando que:

$$D_f^* = \frac{D_f}{D}, \quad (4.26)$$

$$L^* = \frac{L}{\tau}, \quad (4.27)$$

$$S^* = \frac{S}{k_s}, \quad (4.28)$$

$$J^* = J \cdot \frac{\tau}{D \cdot k_s}, \quad (4.29)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2 \cdot k_s \cdot D_f}{\mu \cdot X_f}}. \quad (4.30)$$

- b) Caso η' e η não estejam próximos o suficiente segundo o critério adotado, deve-se fazer $S_{sup}^* = S_{sup}'$ e retomar o procedimento de cálculo a partir do terceiro passo.

Os modelos apresentados ao longo das duas últimas seções permitem que o fluxo de substrato seja estimado para os diferentes tipos de biofilmes (biofilmes profundos, rasos ou completamente penetrados). Estes modelos, quando incorporados às expressões propostas por RITTMANN (1989),

$$\frac{dX_f L_f}{dt} = Y J - b' X_f L_f, \quad (4.20)$$

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{V} S_i - \sum_{i=1}^m \frac{Q_o}{V} S_o - J A, \quad (4.21)$$

definem um modelo dinâmico aplicável à descrição do comportamento dinâmico dos filtros biológicos.

CAPÍTULO 05

CONTROLE DE SISTEMAS DE TRATAMENTO DE ESGOTOS

5 - CONTROLE DE SISTEMAS DE TRATAMENTO DE ESGOTOS

5.1 – Considerações gerais

O controle operacional de uma estação de tratamento de esgotos tem como principais objetivos aumentar a capacidade de tratamento sem a expansão física dos sistema, reduzir os custos operacionais (principalmente aqueles relacionados com produtos químicos, mão de obra e energia elétrica) e produzir um efluente final cujas características atendam às restrições impostas pelos padrões ambientais.

Segundo VON SPERLING (1997), a grande variação na qualidade e quantidade dos efluentes brutos constitui a principal causa de diferenças entre o controle de um processo industrial e o controle de um sistema de tratamento de esgotos. Nos processos industriais, onde as técnicas de controle têm sido tradicionalmente empregadas, as características do efluente são determinísticas ou exibem pequenas variações em torno do valor de referência, sendo diretamente controláveis. A dinâmica dos sistemas biológicos, entretanto, é caracterizada por não-linearidades, faixas amplas de taxas de reação, cultura heterogênea de microrganismos metabolizando substrato heterogêneo, imprecisão e interrupção da estabilidade por falhas abruptas, o que torna o seu controle consideravelmente mais complexo.

VON SPERLING (1997) relaciona ainda algumas dificuldades adicionais que dificultam o uso do controle operacional automatizado nos sistemas de tratamento de esgotos. São elas:

- As características do efluente apresentam distúrbios desconhecidos e os ruídos de medição são superpostos às variações do processo;
- Os efeitos das ações de controle variam entre as diferentes variáveis do processo, tanto em termos de defasagem de tempo, quanto de magnitude de resposta;
- Ainda não existem sensores confiáveis para medição *on-line* de algumas das variáveis do processo;

- Algumas variáveis do processo não podem ser medidas diretamente;
- Restrições físicas e projetos pouco flexíveis dos sistemas usualmente limitam as ações de controle;
- Existem dificuldades em se incorporar modelos complexos dos processos nos algoritmos de controle e, de forma oposta, existem limitações nas estratégias de controle baseadas em modelos muito simplificados dos processos;

Apesar destas dificuldades, fatores como o estabelecimento de padrões ambientais mais restritivos, o rápido desenvolvimento de novos sensores, a disponibilidade de poderosos computadores, o aumento da complexidade das plantas de tratamento e a progressiva privatização dos sistemas de tratamento, tem provocado um crescente interesse pelo controle automatizado das estações de tratamento de esgotos.

Dentre os diversos processos biológicos de tratamento de esgotos, os processos de lodos ativados têm sido aqueles que mais têm despertado interesse e permitido o desenvolvimento de aplicações da Teoria de Controle. OLSSON (1985) relaciona alguns fatores que justificam o particular interesse pelos processos de lodos ativados:

- Os processos de lodos ativados são muito flexíveis e adaptáveis a quase todo tipo de problema que envolva o tratamento biológico de efluentes;
- São usualmente indicados para grandes estações de tratamento;
- Suas propriedades dinâmicas têm sido extensivamente estudadas nas últimas décadas, o que tem dado origem à produção e documentação de muitos trabalhos de modelagem do processo.

Os filtros biológicos, por sua vez, não tem recebido a mesma atenção da Teoria de Controle, quer pela falta de modelos dinâmicos que adequadamente descrevam o processo, quer pela menor flexibilidade operacional ou disponibilidade de alternativas de controle.

Ao longo das próximas seções, serão discutidas as estratégias usualmente empregadas para o controle dos processos de lodos ativados e dos filtros biológicos.

5.2 - Estratégias de controle dos processos de lodos ativados

Quando comparado com as linhas industriais de produção, o processo de lodos ativados apresenta limitadas alternativas de controle. Entretanto, é um dos mais flexíveis quando comparado com os demais processos biológicos de tratamento de esgotos. O controle dos níveis de oxigênio dissolvido (OD) no tanque de aeração, controle das vazões recirculação do lodo e o controle das vazões de lodo descartado são as principais estratégias de controle aplicadas aos processos de lodos ativados.

A quantidade de OD transferida no tanque de aeração deve ser teoricamente igual a quantidade de oxigênio necessária à oxidação biológica dos compostos orgânicos e à manutenção de níveis residuais mínimos de OD no sistema. Quando o crescimento é limitado pelos níveis de OD, podem predominar organismos filamentosos e a qualidade dos flocos biológicos pode não ser satisfatória. METCALF & EDDY(1991) observam que, na prática, os níveis de OD devem ser mantidos entre 1,5 e 4,0 mg/l, sendo 2,0 mg/l uma concentração de referência usualmente empregada na operação dos processos de lodos ativados. Concentrações superiores a 4,0 mg/l, além de aumentarem consideravelmente os custos operacionais, não melhoram de forma significativa o desempenho do sistema.

Segundo OLSSON (1976), basicamente dois esquemas de controle são empregados para o controle dos níveis de OD nos processos de lodos ativados. No primeiro deles, a vazão de ar é controlada em função da variação da vazão do afluente bruto, ou seja, a relação vazão de ar/vazão de afluente bruto é conservada constante. No segundo esquema de controle, as concentrações de OD são conservadas próximas de um valor de referência, o que é conseguido com a utilização de controladores conectados às sondas para OD.

O controle da quantidade de lodo recirculado tem por objetivo garantir concentrações de lodo no tanque de aeração que possibilitem a obtenção do grau de tratamento requerido no tempo desejado.

Quando a vazão de recirculação é totalmente controlável, a forma mais comum de controle consiste na variação da vazão de recirculação de lodo em função da vazão do afluente bruto, ou seja, a relação vazão de lodo recirculado/ vazão de afluente bruto é conservada constante. Uma outra estratégia de controle consiste na variação da vazão de recirculação em função da avaliação do índice volumétrico de lodo (ou de parâmetros similares); um elevado valor para esse índice indica uma pobre sedimentabilidade do lodo e, eventualmente, uma necessidade de se aumentar a vazão de recirculação. Uma terceira estratégia de controle tem por objetivo controlar a vazão de recirculação em função da altura da manta de lodo no decantador secundário; considerar a vazão de recirculação como uma função contínua da altura da manta de lodo traz alguns problemas operacionais, mas aumentá-la ou diminuí-la quando a manta de lodo atinge alturas de referência máximas e mínimas é uma solução usualmente adotada na prática.

O controle do lodo descartado tem por objetivo remover do sistema a quantidade de lodo diariamente produzida, o que garantirá a manutenção da relação concentração de substrato/concentração de microrganismos ou a manutenção da idade do lodo. Outra alternativa pode ser o controle do lodo descartado em função da altura da camada de lodo no decantador secundário; também aqui, as vazões de lodo descartado serão aumentadas ou diminuídas quando a manta de lodo atingir alturas de referência máximas e mínimas.

Entretanto, segundo OLSSON (1976), existe considerável diferença entre as estratégias de controle que manipulam as vazões de recirculação e de descarte do lodo. Em um sistema típico de lodos ativados, durante um longo período de operação, a vazão de lodo descartado representa apenas algo próximo a 3% da vazão de lodo recirculado. Alguns dos esquemas de controle sugerem a conservação da vazão de recirculação e a variação da vazão de lodo descartado. Como consequência das pequenas vazões de descarte de lodo, esta estratégia terá uma pequena influência sobre a eficiência do processo num curto horizonte de tempo. Sua influência será exercida lentamente e afetará o sistema apenas numa escala de dias. Portanto, para a manipulação da relação concentração de substrato/concentração de microrganismos

numa escala de horas, será também necessário o controle da vazão de recirculação do lodo.

Outras estratégias menos usuais de controle dos processos de lodos ativados envolvem o controle das vazões afluentes (o que exige um tanque de equalização), o armazenamento do lodo de retorno (o que exige um tanque adicional para o acondicionamento temporário do lodo) e a alimentação escalonada do tanque de aeração com a variação do ponto de entrada do afluente bruto.

5.2.1 - Controle Convencional dos processos de lodos ativados

Os métodos convencionais de controle¹ têm sido amplamente empregados nas tentativas de controle dos processos de lodos ativados. Ao longo desta seção, serão relacionados alguns trabalhos cujo principal objetivo foi melhorar a performance dos processos de lodos ativados a partir da aplicação dos métodos convencionais às estratégias de controle apresentadas na seção anterior.

O controle dos processos de lodos ativados a partir do controle do nível de aeração nos reatores foi discutido por ROESLER (1974), FLANAGAN (1977), CLIFFT & ANDREWS (1981), BERNARD & MEIRING (1988) e CLIFFT & GARRETT (1988). Nestes trabalhos foram apresentadas diferentes possibilidades de aplicação dos métodos convencionais para o controle das concentrações de OD no tanque de aeração. O nível de aeração foi definido a partir das variações de vazões afluentes ou a partir das variações das concentrações de OD em relação a uma concentração de referência pré-estabelecida. A vazão afluente e/ou as concentrações de OD foram normalmente avaliadas automaticamente e as ações de controle implementadas manual ou automaticamente.

¹ Algumas breves considerações sobre os métodos convencionais e modernos de controle foram apresentadas ao longo do capítulo 3.

Já os trabalhos de GARRET (1958), JENKINS & GARRISON (1968), KLER & SUNDSTROM (1974), FLANAGAM (1977) e LECH et al (1978) discutiram o controle do processo a partir do controle das concentrações de sólidos no sistema. Nestes trabalhos foram discutidas diferentes possibilidades de controle a partir da manipulação da vazão de recirculação de lodo e/ou da vazão de descarte de lodo. Nestes trabalhos, a avaliação das variáveis de controle e a implementação das ações de controle também foram realizadas manual ou automaticamente.

NOGITA & HIRAOKA (1981), por sua vez, discutem o acondicionamento temporário do lodo como estratégia de controle das concentrações de lodo no reator biológico. Nesta estratégia, o lodo armazenado deveria ser retornado ao processo nos momentos de aumento da carga afluente ao sistema. Segundo a proposta de NOGITA & HIRAOKA (1981), as medições de vazões afluentes e as ações de controle seriam realizadas automaticamente e a concentração de lodo no sistema avaliada a partir de modelos matemáticos.

5.2.2 - Controle Moderno dos processos de lodos ativados

Os métodos modernos de controle², desenvolvidos ao longo das últimas décadas, têm sido aplicados de forma crescente para o controle dos processos de lodos ativados em substituição aos métodos convencionais de controle. Nesta seção estão apresentados alguns esforços realizados neste sentido.

CHEN (1969)³, citado por KABOURIS & GEOGARKAKOS (1990), apresentou uma das primeiras tentativas de se aplicar as leis de Controle Ótimo no controle do processo de lodos ativados. CHEN (1969) modelou a dinâmica do tanque de aeração através do balanço de massa sobre as concentrações de biomassa ativa e substrato. As taxas de crescimento e decaimento da biomassa foram definidas a partir do modelo cinético de Monod-Herbert e, para o decantador, foi adotada uma eficiência

² Algumas breves considerações sobre os métodos convencionais e modernos de controle foram apresentadas ao longo do capítulo 3.

³ CHEN, M. (1969). Stochastic modeling and stochastic optimization of chemical engineering processes. Manhattan. Tese (Doutorado). Department of Chemical Engineering, Kansas State University.

constante de remoção de sólidos. O afluxo de substrato ao tanque de aeração variou segundo uma função senoidal. A vazão de recirculação de lodo, cujo valor foi variado entre limites máximos e mínimos pré-estabelecidos, foi adotada como variável de controle do processo. Um índice de desempenho quadrático, estabelecido a partir dos desvios das concentrações de substrato e vazões de recirculação em relação aos valores de equilíbrio destas variáveis no regime permanente, foi minimizado. Neste trabalho também foi formulado teoricamente o problema de controle estocástico do processo de lodos ativados. Entretanto, uma solução para este último problema não foi apresentada.

THIRIEN et al. (1976)⁴, também citados por KABOURIS & GEOGARKAKOS (1990), aplicaram o controle ótimo com o objetivo de minimizar a variação das concentrações de substratos não metabolizados no efluente final de um sistema de lodos ativados. O processo foi modelado a partir do balanço de massa sobre as concentrações de substrato e biomassa ativa no sistema. As taxas de crescimento e decaimento da biomassa foram obtidas a partir de um modelo cinético de duas fases (taxa de formação de biomassa proporcional ao produto das concentrações de substrato e biomassa). A taxa de recirculação de lodo e o fluxo de sólidos no decantador foram considerados constantes. A estratégia de controle baseou-se na injeção de pulsos de lodo no tanque de aeração. Segundo os autores, a aplicação do Controle Ótimo à estratégia proposta reduziu consideravelmente as concentrações de substrato no efluente final do sistema. Uma proposta de controle sub-ótimo também foi investigada; neste caso, o índice de desempenho utilizado foi função dos tempos de injeção de lodo no tanque de aeração (controle do tipo liga-desliga). Um algoritmo de pesquisa direta apresentou para o controle sub-ótimo basicamente a mesma seqüência de pulsos encontrada na solução ótima.

Já HARRIS (1977), para avaliar a condição ótima de operação do processo de lodos ativados, desenvolveu um modelo a partir de equações diferenciais estocásticas resultantes do balanço de massa sobre as concentrações de substrato, sólidos inertes e biomassa ativa no sistema. O crescimento e o decaimento da biomassa foram

⁴ THERIEN, N.; PERDIEUX, S.; HAIRINGTON, P. (1976). Near optimal effluent control for an existing activated sludge wastewater treatment process. In: Biological Wastewater Treatment.

avaliados a partir do modelo cinético de Monod-Herbert e o decantador operou em condições estacionárias. As vazões e concentrações de substrato e sólidos inertes afluentes ao sistema foram modelados como processos Markovianos estacionários. O índice de desempenho utilizado avaliou perturbações nas concentrações de substrato e biomassa ativa em relação aos valores de equilíbrio desejados para estas variáveis no regime permanente. A manipulação da vazão de recirculação foi a estratégia de controle analisada. O autor concluiu que, embora o controle ótimo da recirculação apresentasse bons resultados, o método proposto foi de difícil implementação.

O trabalho de HAMALAINEN et al. (1980) avaliou diferentes estratégias de operação de um sistema de lodos ativados através de um modelo construído a partir do balanço de massa sobre as concentrações de substrato e biomassa no sistema. No modelo proposto, as taxas de reação seguiram o modelo cinético de Monod-Herbert e o decantador foi considerando um tanque completamente misturado e defasado temporalmente. O modelo foi então linearizado e seus parâmetros estimados através de análises de regressão. A lei de controle foi obtida a partir da soma de duas parcelas: uma função periódica simulando o padrão de variação na vazão afluente e um termo de retroação de estados. O ganho obtido com a retroação foi representado por uma matriz constante, resultante da resolução do problema de controle para um horizonte de tempo infinito. Para que a lei de retroação fosse então aplicada, a concentração de biomassa, vazão afluente e vazão de recirculação foram consideradas variáveis mensuráveis e a concentração de substrato estimada por um observador de estados. Segundo HAMALAINEN et al. (1980), o controle do sistema a partir do controle da vazão de recirculação ficou prejudicado em função do escape de sólidos no decantador com o aumento da vazão de recirculação; a equalização da vazão afluente ao sistema demonstrou ser uma forma mais efetiva de controle das flutuações de demanda bioquímica de oxigênio (DBO) no efluente final.

YEUNG et al. (1980) aplicaram o Controle Ótimo com o objetivo de identificar estratégias de controle que reduzissem a variabilidade da DBO no efluente final de um processo de lodos ativados. O sistema analisado era constituído por dois tanques de aeração completamente misturados e dispostos em série, seguidos por um

decantador secundário. O processo biológico foi modelado a partir do modelo cinético proposto por BUSBY & ANDREWS (1975); para o decantador foi adotado um modelo simplificado, considerando que as concentrações de lodo recirculado eram invariantes no tempo e que as concentrações de substrato recirculado eram instantaneamente idênticas às concentrações observadas no efluente do segundo tanque de aeração. O afluxo de substrato ao sistema variou ao longo do tempo segundo uma função senoidal. A vazão de recirculação de lodo e a distribuição de afluente bruto entre os tanques de aeração foram as variáveis manipuladas durante as simulações realizadas. Para a implementação do Controle Ótimo, dois índices de desempenho foram definidos e minimizados: o primeiro deles foi destinado à minimização da variabilidade da DBO no efluente final e o segundo à minimização da própria DBO. Os resultados obtidos com a utilização do Controle Ótimo foram comparados aos resultados obtidos com a aplicação de um método convencional de controle, no qual a vazão de recirculação de lodo era ajustada em função da variação de carga afluente ao sistema (manutenção da relação concentração de substrato / concentração de microrganismos). YEUNG et al. (1980) concluíram que o Controle Ótimo permitiu reduzir tanto a variabilidade quanto as concentrações finais de DBO no efluente final e que os resultados obtidos foram mais expressivos que aqueles obtidos através dos métodos convencionais de controle.

Tendo em vista que o processo de lodos ativados é continuamente perturbado entorno das suas condições de equilíbrio, CHERUY et al. (1982), por sua vez, sustentaram que uma linearização a partir de um estado qualquer de operação não é uma forma adequada de se construir um modelo que descreva o processo. Alternativamente, CHERUY et al. (1982), utilizaram um modelo estocástico múltiplo. Foram utilizadas equações diferenciais lineares Gaussianas para descrever a dinâmica dos estados, resultantes da linearização entorno das três condições operacionais sugeridas pelo modelo proposto por HAMALAINEN et al. (1980). Foi formulado um índice de desempenho para cada uma das condições de operação consideradas, o que conduziu a três diferentes problemas de controle. Tais problemas de controle conduziram a diferentes leis de controle que, após avaliações probabilísticas, foram reunidas, determinando uma política final de controle. Como

resultado da aplicação desta política de controle, os autores observaram que tentativas de redução das concentrações de substrato no efluente final, a partir da manipulação da vazão de recirculação, produziram aumentos das concentrações de sólidos no efluente final como consequência do aumento das perturbações hidráulicas. Adicionalmente, concluíram que o modelo estocástico múltiplo apresentou resultados melhores do que aqueles obtidos a partir dos modelos mais simples. Entretanto, cada modelo linear adicionado aumentou substancialmente os requisitos computacionais, limitando a aplicação do método a processos com moderada variabilidade.

KABOURIS & GEORGAKAKOS (1990) utilizaram a Teoria do Controle Ótimo para o controle da concentração de sólidos no tanque de aeração através da variação das vazões de recirculação e descarte do lodo. O processo biológico foi modelado a partir de uma forma reduzida do modelo proposto por HENZE et al (1987) e, para o decantador, foi estabelecido um modelo dinâmico a partir das proposições originalmente apresentadas por DICK (1970). Para a implementação do controle foi estabelecido um índice de desempenho, cuja minimização tinha por objetivo garantir que as concentrações dos compostos orgânicos permanecessem abaixo dos limites impostos pelos padrões ambientais e que o consumo de energia para as operações de recirculação e descarte do lodo fosse o menor possível. Segundo os autores, o controle da vazão de lodo descartado mostrou-se muito mais efetivo que o controle do lodo recirculado para a redução da variabilidade das concentrações dos compostos orgânicos no efluente final do sistema.

Já KABOURIS et al. (1992) aplicaram o Controle Ótimo para avaliar o armazenamento temporário do lodo como estratégia de controle. Nesta estratégia, o lodo foi armazenado temporariamente num tanque e, nos períodos de aumento de carga afluyente ao sistema, reinjetado no reator biológico. O sistema modelado (exceto pela presença do tanque de armazenamento de lodo), o índice de desempenho e o método matemático de resolução do problema foram idênticos àqueles propostos por KABOURIS & GEORGAKAKOS (1990). Segundo KABOURIS et al. (1992), a presença do tanque de armazenamento do lodo melhorou de forma significativa o

desempenho do processo, reduzindo a variabilidade das concentrações de compostos orgânicos no efluente final. Entretanto, aumentos no volume do tanque reduziram a efetividade desta alternativa de controle.

LINDBERG & CARLSSON (1996a) apresentaram o projeto de um controlador não-linear para as concentrações de OD. Neste controlador, as concentrações de referência para os valores de OD eram variáveis e função das concentrações de amônia na última zona aeróbia do processo de lodos ativados. O controlador desenvolvido foi avaliado através de simulações e de sua aplicação numa planta de tratamento em escala piloto. Segundo os autores, a performance do controlador não-linear foi similar à performance dos controladores lineares usualmente projetados para os processos de lodos ativados. O controlador não-linear, entretanto, mostrou-se mais estável.

MORENO E BUITRÓN (1998) avaliaram as condições ótimas de operação de um processo de lodos ativados em reatores do tipo batelada. O afluente ao processo era constituído por efluentes industriais contendo compostos tóxicos. Num reator do tipo batelada, aumentos na eficiência são usualmente obtidos com a redução do tempo de ciclo; como as fase de decantação, esvaziamento do tanque e repouso do processo são pré-fixadas ou não controláveis pelo operador, o tempo de ciclo só pôde ser reduzido com a diminuição dos tempos de enchimento e reação. Para a solução de deste problema, MORENO e BUITRÓN (1998) utilizaram o Princípio de Pontryagin, um princípio fundamental para a Teoria do Controle Ótimo. Para a determinação da estratégia ótima de operação, o processo de biodegradação foi controlado a partir da aplicação de técnicas respirométricas. Segundo os autores, simulações da degradação de um efluente contendo fenol demonstraram que a estratégia ótima escolhida pode aumentar substancialmente a eficiência do sistema, uma vez que o tempo de ciclo estimado foi consideravelmente menor que aquele empregado nos modos usuais de operação.

A imposição de padrões ambientais mais restritivos tem forçado a avaliação de diferentes estratégias de controle de nutrientes (particularmente dos compostos de

nitrogênio) nos efluentes finais dos processos de lodos ativados. Diversas recentes aplicações das técnicas modernas de controle têm surgido com esse propósito.

ZHAO et al. (1994) avaliaram o desempenho de dois algoritmos de controle aplicáveis ao controle da remoção de nitrogênio num sistema de lodos ativados comercialmente conhecido como BIODENITRO. Este sistema é constituído por dois reatores biológicos interligados que, ao longo do período de operação, assumem alternadamente os estados aeróbio ou anóxico. Ambos os reatores recebem afluente bruto e são ligados ao decantador secundário. Os algoritmos foram desenvolvidos a partir de diferentes técnicas de controle (Controle Proporcional-Integral-Derivativo e Controle Preditivo) e tiveram por objetivo básico ajustar o tempo de ciclo para as etapas de nitrificação e desnitrificação. Segundo os autores, a aplicação destes algoritmos de controle a uma planta de tratamento em escala piloto melhorou significativamente a remoção de nitrogênio (os picos das concentrações de nitrogênio foram de 1 a 1,5 mg/l menores que os picos observados no sistema não controlado). Observaram ainda que o algoritmo de controle desenvolvido a partir do Controle Preditivo, embora tenha exigido maior esforço computacional, mostrou-se mais eficiente.

LINDBERG & CARLSSON (1996b) utilizaram o Controle Adaptativo para o controle de uma etapa de pré-desnitrificação num processo de lodos ativados. A estratégia de controle, cujo objetivo básico era conservar baixas concentrações de nitrato nas zonas anóxicas do reator através do controle de uma fonte externa de carbono, foi testada numa planta de tratamento em escala piloto. LINDBERG & CARLSSON (1996b) concluíram que a estratégia de controle apresentou bons resultados e que sua aplicação permitiu a manutenção das concentrações de nitrato próximas dos níveis desejados. Observaram, também, que sem o controle automatizado foi muito difícil a manutenção de baixas concentrações de nitrato sem um consumo excessivo de carbono. Entretanto, ressaltaram a necessidade de uma freqüente manutenção dos sensores de nitrato utilizados no esquema de controle proposto.

LUKASSE et al. (1998) avaliaram duas diferentes estratégias de aeração destinadas ao controle dos compostos de nitrogênio nos processos de lodos ativados. Foram simuladas a alternância entre os processos de nitrificação e desnitrificação e a nitrificação e desnitrificação simultâneas. Os autores observaram que ambas as estratégias poderiam ser ótimas, dependendo dos valores adotados para as constantes de saturação das biomassas heterotróficas e autotróficas. Entretanto, considerando a possibilidade de ocorrência do *bulking* de lodo quando o sistema é submetido a baixas concentrações de OD, a alternância entre os processos de nitrificação e desnitrificação mostrou-se mais interessante. A aplicação do *Receding Horizon Optimal Control (RHOC)* permitiu o desenvolvimento de um controlador para o processo, cujo comportamento era definido a partir das concentrações de amônia, concentrações de nitratos e vazão afluente ao sistema. LUKASSE et al. concluíram que o controlador proposto apresentou bons resultados tanto em simulações computacionais quanto durante a operação de uma planta de tratamento em escala piloto.

Num outro trabalho, LUKASSE et al. (1999a) avaliaram quatro diferentes estratégias para o controle das concentrações de nitrogênio nos processos de lodos ativados: controle da duração dos períodos aeróbios e anóxicos, controle da aeração em função dos baixos níveis de amônia e nitrato, controle da aeração em função dos limites máximos e mínimos aceitáveis para a amônia e o controle da remoção de nitrogênio a partir das concentrações de amônia, concentrações de nitrato e vazão afluente ao processo. O *Adaptive Receding Horizon Optimal Control (ARHOC)* permitiu a avaliação da última estratégia de controle. Também aqui o processo biológico foi modelado a partir do modelo proposto por HENZE et al (1987). Segundo os autores, simulações demonstraram que três diferentes estratégias de controle (controle dos períodos aeróbios e anóxicos, controle da aeração a partir dos níveis máximos e mínimos de amônia e o controle através das concentrações de amônia, concentrações de nitratos e vazão afluente) apresentaram resultados semelhantes quanto à qualidade final do efluente. Entretanto, apesar de exigir sensores mais complexos, o controle via método *ARHOC* mostrou-se menos sensível às mudanças de cargas afluentes e à seleção de sub-ótimos para o sistema.

Outra tentativa de controlar a remoção de nitrogênio em processos de lodos ativados foi apresentada por LUKASSE et al (1999b). Neste trabalho foi utilizado um modelo simplificado do processo que permitiu simular o comportamento das concentrações de amônia e nitratos num reator do tipo batelada alternando os estados aeróbio e anóxico. A dinâmica de acumulação de lodos no sistema (usualmente incerta, muito complexa e relativamente lenta) foi avaliada a partir da adoção dos parâmetros do modelo variantes no tempo, estimados recursivamente com a utilização do filtro de Kalman. O modelo foi validado a partir de simulações computacionais, cujos resultados foram comparados aos dados reais de operação de um sistema de lodos ativados operando em escala piloto. Segundo os autores, o modelo proposto, função de sua simplicidade e precisão nas previsões, mostrou-se uma ferramenta adequada para a otimização da operação de sistemas de tratamento.

Através do Controle Ótimo, LINDBERG (1998) estabeleceu e avaliou uma estratégia de controle para um sistema de lodos ativados com pré-desnitrificação. A partir do controle de uma fonte externa de carbono, do nível de aeração e da recirculação interna do efluente nitrificado, a estratégia proposta teve por objetivo conservar as concentrações de amônia e nitratos, na última zona aerada do reator, o mais próximas possíveis de valores de referência pré-estabelecidos. Simplificações no modelo proposto por HENZE et al. (1987) produziram o modelo utilizado para a avaliação do processo biológico; o decantador, por sua vez, foi modelado a partir de um modelo proposto por TAKÁSC (1991). Segundo LINDBERG, em simulações computacionais, o controlador proposto apresentou bom desempenho.

O trabalho de LUKASSE & KEESMAN (1999) teve por finalidade otimizar o projeto e as estratégias de controle do sistema BIODENITRO de lodos ativados. As estratégias avaliadas limitaram-se ao controle da distribuição do afluente bruto entre os reatores e ao controle do processo de aeração. O *Receding Horizon Optimal Control (RHOC)* foi o método utilizado para a avaliação da otimalidade das diferentes combinações de projetos e estratégias de controle. Segundo os autores, os resultados das simulações indicaram que a combinação ótima de projeto e estratégia de operação, principalmente quando o sistema era operado com curtos tempos de

ciclo, melhorou substancialmente a remoção de amônia e nitrato, além de reduzir a produção de lodo.

STEFFENS & LANT (1999) avaliaram o desempenho de diferentes algoritmos de controle aplicáveis ao controle multivariado da remoção de nutrientes em processos de lodos ativados com pré-desnitrificação. Os algoritmos foram desenvolvidos a partir de diferentes técnicas de controle (Controle Proporcional-Integral, Controle Linear Quadrático, Controle Matricial Dinâmico e Controle Preditivo Não-linear). Os resultados obtidos por cada algoritmo foram comparados com o desempenho do sistema de controle existente numa planta de tratamento existente em Brisbane, Austrália. Segundo STEFFENS & LANT (1999), o sistema de controle existente não atende as restrições ambientais impostas às concentrações finais de nitrogênio; o Controle Proporcional-Integral, embora melhore o desempenho do sistema, também não conseguiu conservar as concentrações de nitrogênio total abaixo dos limites impostos (10 mg/l); os demais algoritmos de controle, por sua vez, permitiram que as concentrações de nitrogênio total permanecessem abaixo de 10 mg/l. Entretanto, a implementação do Controle Linear Quadrático ou do Controle Matricial Dinâmico elevaria os custos de operação do sistema de tratamento, o que não foi verificado para o Controle Preditivo Não-linear.

LEE et al. (1999) aplicaram o *Generic Distributed Parameter Model Control (GDPMC)* para o controle da remoção biológica de nutrientes (nitrogênio e fósforo) em processos de lodos ativados. Neste trabalho, o modelo proposto por HENZE et al. (1999) foi utilizado para descrever o processo biológico. Diferentes estudos de caso (controle de acetato e fosfato solúvel dentro da zona anóxica, controle de amônia no efluente final, controle de nitrato dentro da zona anóxica e o controle simultâneo de amônia, nitrato e fosfato) demonstraram que o *GDPMC* é aplicável ao estabelecimento de estratégias para o controle de nutrientes específicos em diferentes zonas de reação do processo de lodos ativados, melhorando consideravelmente a performance do sistema.

KIM et al. (2000) estabeleceram uma metodologia para o controle e otimização de um sistema de lodos ativados tipo batelada operando em escala laboratorial. O sistema analisado alternava os estados aeróbio e anóxico com o objetivo de apresentar baixas concentrações de nitrogênio no efluente final. A metodologia proposta buscava selecionar os valores ótimos para o tempo total de ciclo e para o tempo de aeração, ao mesmo tempo em que garantia a manutenção de concentrações de amônia no efluente final abaixo do limite máximo permitido. Foram utilizados o modelo simplificado proposto por ANDERSON et al. (2000) e os dados mais recentes da operação do sistema para simular o comportamento do sistema e avaliar as concentrações médias diárias de amônia no efluente final. A partir daí, a rotina de otimização recomendava tempos totais de ciclo e tempos de aeração que eram aplicados na operação do sistema de tratamento. Segundo os autores a metodologia mostrou-se efetiva e produziu bons resultados, com remoções de nitrogênio total superiores a 76%.

5.3 - Estratégias de controle dos filtros biológicos

Quanto ao estabelecimento de estratégias de controle, os filtros biológicos são menos flexíveis que os processos de lodos ativados. Na prática, o controle dos filtros fica limitado ao controle da recirculação do efluente tratado, a qual pode se dar a partir do efluente do próprio filtro ou do decantador secundário que o sucede.

Segundo WEF & ASCE (1991), a recirculação do efluente do filtro biológico é uma conveniente ferramenta operacional que tem sido empregada para melhorar a eficiência do filtro em numerosas aplicações. O aumento da carga hidráulica obtida com o aumento da recirculação permite melhorar a distribuição do efluente sobre o meio suporte, diminuindo a ocorrência de zonas secas ou parcialmente umedecidas no interior do filtro; consegue-se, desta forma, garantir a máxima utilização do sistema de tratamento. Adicionalmente, elevadas cargas hidráulicas estabelecem forças de cisalhamento grandes o suficiente para permitir a remoção do excesso de biomassa que se desenvolve sobre o meio suporte, reduzindo, assim, os problemas de

colmatação associados com a acumulação de sólidos. Por fim, WEF & ASCE observam que a recirculação permite novas passagens pelo filtro da matéria orgânica não removida nas passagens anteriores. A contribuição deste último fator, entretanto, pode ser pouco representativa para a melhoria da eficiência do filtro se as cargas hidráulicas forem adequadas e se o filtro for mantido completamente umedecido.

Os benefícios referentes ao umedecimento uniforme do leito e à remoção do excesso de biomassa que se desenvolve sobre o meio suporte também são relacionados por METCALF & EDDY (1991) como conseqüências do controle da vazão de recirculação.

As estratégias de recirculação mais comumente empregadas podem ser assim sumarizadas (WEF & ASCE (1991)):

- Utilização da recirculação apenas nos períodos com baixas vazões afluentes;
- Vazões de recirculação constantes, independentemente das vazões afluentes;
- Vazões de recirculação variando na razão inversa das vazões afluentes;
- Adoção de duas ou mais diferentes vazões de recirculação, cujas aplicações são pré-determinadas pelo controle automático ou selecionadas pelo operador da planta de tratamento.

WEF & ASCE (1991) observam ainda que quando a recirculação é empregada, a razão de recirculação (relação entre a vazão de recirculação e a vazão afluente) usualmente varia entre $\frac{1}{2}$ e 4, podendo ser igual a ou maior que 10 para efluentes industriais altamente concentrados. Entretanto, razões de recirculação superiores a 4 não melhoram de forma substancial a eficiência do filtro e geralmente são anti-econômicas.

Outras interessantes observações sobre os possíveis efeitos da recirculação são apresentadas por GRADY & LIM (1988). Segundo estes autores, quando a recirculação é empregada, a concentração de substrato afluente ao filtro é

consideravelmente reduzida em função da diluição provocada pelo efluente recirculado. Como consequência, as taxas de reação no interior do filtro são reduzidas e a concentração de substrato no efluente do filtro biológico pode ser superior aquela que seria observada sem a utilização da recirculação.

CAPÍTULO 06

METODOLOGIA

6 - METODOLOGIA

6.1 - Considerações gerais

Na primeira seção deste capítulo serão definidos os modelos matemáticos utilizados para simular o comportamento dos filtros biológicos, dos processos de lodos ativados e dos processos combinados, bem como das alterações que se fizeram necessárias aos modelos quando da aplicação da Teoria do Controle Ótimo. Nas seções subsequentes serão apresentadas a Técnica da Perturbação, empregada para a linearização dos modelos matemáticos, o Método Inverso de Bryson, utilizado para a seleção das matrizes de ponderação que compõem o índice quadrático de desempenho, e as características dos sistemas de tratamento sobre os quais foram aplicados os modelos de simulação. Por fim, na última seção do capítulo, serão discutidas as simulações realizadas quando da avaliação do desempenho dos sistemas de controle propostos.

6.2 - Modelos matemáticos utilizados

6.2.1 - Processo de lodos ativados

Para a simulação do comportamento do tanque de aeração do processo de lodos ativados foi utilizado o modelo proposto por HENZE et al. (1987), apresentado e discutido ao longo da seção 4.5. As equações constantes do modelo podem ser obtidas a partir da TABELA 4.2.

O tanque de aeração foi caracterizado por seis diferentes variáveis de estado: concentração de biomassa heterotrófica ativa (X_b), concentração de substrato lentamente biodegradável (X_s), concentração de substrato rapidamente biodegradável (S_s), concentração de material particulado produzido pelo dcaimento da biomassa (X_p), concentração de substrato particulado inerte (X_i) e vazão efluente. Como o substrato solúvel inerte não é adsorvido ou metabolizado pelos flocos biológicos, o comportamento desta parcela do substrato não foi simulado.

Como neste trabalho avalia-se a degradação dos substratos sob condições aeróbias, apenas três dos processos que constituem o modelo proposto por HENZE et al. (1987) foram considerados para a simulação do comportamento das variáveis de estado que caracterizam o tanque de aeração: crescimento aeróbio de microrganismos heterotróficos, decaimento de microrganismos heterotróficos e hidrólise da matéria orgânica particulada. Desta forma, as equações que descrevem o comportamento das variáveis de estado (equações de (4.2) a (4.6)) tomaram a seguinte forma:

$$\frac{dX_b}{dt} = \frac{Q_i}{V} X_{bi} + \frac{Q_r}{V} X_{br} - \frac{Q_d}{V} X_b - \frac{Q_o}{V} X_b + \mu_H \frac{S_s}{k_s + S_s} \frac{S_o}{k_o + S_o} X_b - b_H X_b, \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_s}{dt} = & \frac{Q_i}{V} S_{si} + \frac{Q_r}{V} S_{sr} - \frac{Q_d}{V} S_s - \frac{Q_o}{V} S_s - \frac{1}{Y_H} \mu_H \frac{S_s}{k_s + S_s} \frac{S_o}{k_o + S_o} X_b - \dots \\ & \dots + k_H \frac{\frac{X_s}{X_b}}{k_x + \left(\frac{X_s}{X_b}\right)} \frac{S_o}{k_o + S_o} X_b, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_s}{dt} = & \frac{Q_i}{V} X_{si} + \frac{Q_r}{V} X_{sr} - \frac{Q_d}{V} X_s - \frac{Q_o}{V} X_s + (1 - f_p) b_H X_b - \dots \\ & \dots - k_H \frac{\frac{X_s}{X_b}}{k_x + \left(\frac{X_s}{X_b}\right)} \frac{S_o}{k_o + S_o} X_b, \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\frac{dX_p}{dt} = \frac{Q_i}{V} X_{pi} + \frac{Q_r}{V} X_{pr} - \frac{Q_d}{V} X_p - \frac{Q_o}{V} X_p + f_p b_H X_b, \quad (6.4)$$

$$\frac{dX_i}{dt} = \frac{Q_i}{V} X_{ii} + \frac{Q_r}{V} X_{ir} - \frac{Q_d}{V} X_i - \frac{Q_o}{V} X_i. \quad (6.5)$$

A equação que descreve a variação da vazão efluente do tanque de aeração foi obtida diretamente a partir do balanço de massa entre as vazões afluentes e efluentes do tanque de aeração. Desta forma:

$$\frac{dQ_o}{dt} = Q_i + Q_r - Q_d - Q_o. \quad (6.6)$$

Na última expressão Q_i representa a vazão de afluente bruto (L^3/T), Q_r a vazão de recirculação do lodo (L^3/T), Q_d a vazão de descarte do lodo (L^3/T) e Q_o a vazão efluente do tanque de aeração (L^3/T).

O comportamento do decantador, importante para a avaliação das características do lodo que retorna ao tanque de aeração, foi avaliado a partir da versão simplificada do modelo proposto por VITASOVIC (1989) (equações (4.9), (4.13) e (4.14)). Convém observar, entretanto, que o cálculo do fluxo de sólidos provocado pela sedimentação das partículas sólidas envolve um processo de minimização, necessário para que se determine o fluxo mínimo de sólidos entre duas camadas consecutivas do decantador. Este processo de minimização introduz descontinuidades no sistema de equações que constituem o modelo original, o que é indesejável quando da aplicação da Teoria do Controle Ótimo.

Para que esta dificuldade fosse superada, permitindo a obtenção de uma versão contínua do modelo estabelecido por VITASOVIC (1989), foi empregada uma modificação proposta por KABOURIS & GEORGAKAKOS (1990). Esta modificação permitiu que o procedimento de minimização necessário à determinação do fluxo mínimo de sólidos entre duas camadas consecutivas do decantador (por exemplo, $J_{u,i} = \min(J_{s,i}; J_{s,i-1})$) pudesse ser substituído pela seguinte equação:

$$J_{u,i} = (1 - F_i) J_{s,i} + F_i J_{s,i-1}, \quad (6.8)$$

sendo

$$F_i = \frac{1}{1 + \exp[-\alpha(J_{s,i} - J_{s,i-1})]}, \quad (6.9)$$

onde o parâmetro α indica quão rapidamente a função estabelecida a partir das expressões (6.8) e (6.9) aproxima-se da função originalmente proposta ($J_{u,i} = \min(J_{s,i}; J_{s,i-1})$). A partir das proposições de KABOURIS & GEORGAKAKOS (1990), o parâmetro α assumiu o valor $10 \text{ m}^2\text{min/g}$.

É conveniente destacar que o processo de clarificação não é avaliado pelo modelo utilizado para simular o comportamento do decantador e que é adotada a divisão do decantador em cinco camadas, conforme trabalho proposto por KABOURIS & GEORGAKAKOS (1990).

6.2.2 - Filtros Biológicos

Para avaliação do comportamento dinâmico do filtro biológico foi empregado o modelo proposto por RITTMANN (1989), apresentado e discutido ao longo da seção 4.6. Desta forma, as variações na espessura do biofilme foram avaliadas a partir da equação (4.20); as variações nas concentrações de substrato no interior do filtro, por sua vez, a partir da equação (4.21).

Admitindo-se que as concentrações no interior do filtro biológico fossem grandes o suficiente para que ali se desenvolvesse um biofilme plano e profundo, o fluxo de substrato foi avaliado, a princípio, com o modelo de ordem variável proposto por RITTMANN & McCARTY (1978). Este modelo, capaz de estimar o fluxo de substrato a partir dos parâmetros cinéticos do processo e das concentrações de substrato na massa líquida, foi definido com base nas equações de (4.22) a (4.30).

A incorporação do modelo de ordem variável ao modelo proposto por RITTMANN (1989) produziu, entretanto, um modelo final para os filtros biológicos cujas equações tornam laborioso o trabalho de linearização¹. Optou-se, então, pela substituição do modelo de ordem variável por um polinômio de sexta ordem. Este polinômio foi obtido a partir da análise de regressão realizada sobre os resultados numéricos do modelo proposto por RITTMANN & McCARTY (1978), onde os valores de fluxo de substrato são apresentados em função das concentrações de substrato. Desta forma, o fluxo passou a ser avaliado a partir da seguinte expressão:

$$J = 2,7 \cdot S^4 + 14,0 \cdot S^3 - 26,0 \cdot S^2 + 32,0 \cdot S + 0,41 \quad (6.10)$$

¹ A obtenção de modelos lineares, necessários à aplicação da Teoria do Controle Ótimo nos moldes discutidos ao longo do Capítulo 3, será discutida em seção subsequente.

O coeficiente de correlação entre os valores estimados pelo modelo de ordem variável e o pelo polinômio ficou muito próximo da unidade ($r^2 = 0,99$). Uma representação gráfica da regressão e os valores estimados pelo modelo de ordem variável está apresentada na FIGURA 6.1.

FIGURA 6.1 – Valores de fluxo de substrato estimados pelos modelos de ordem variável e pelo polinômio de sexta ordem.

O filtro biológico não foi considerado, entretanto, um único reator de mistura completa; assumiu-se a idealização de que o filtro poderia ser dividido em vários reatores completamente misturados e dispostos em série. Esta idealização já foi utilizada por diversos autores (RITTMANN (1982), KISSEL et al (1984), JACOB et al (1997), VAYENAS & LYBERATOS (1994), VAYENAS et al. (1997) e WIK (1999)) quando da avaliação do comportamento dinâmico de reatores com filme biológico fixo.

Considerando-se a divisão do filtro biológico em n camadas, o modelo proposto por RITTMANN (1989) tomou a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{dS_1}{dt} &= \frac{Q}{V} \cdot S_1 - \frac{Q}{V} \cdot S_1 - J_1 \cdot A; & \frac{d(A \cdot X_f \cdot L_{f,1})}{dt} &= A \cdot Y \cdot J_1 - b' \cdot X_f \cdot L_{f,1} \cdot A \\
\frac{dS_2}{dt} &= \frac{Q}{V} \cdot S_1 - \frac{Q}{V} \cdot S_2 - J_2 \cdot A; & \frac{d(A \cdot X_f \cdot L_{f,2})}{dt} &= A \cdot Y \cdot J_2 - b' \cdot X_f \cdot L_{f,2} \cdot A \\
&\vdots \\
\frac{dS_n}{dt} &= \frac{Q}{V} \cdot S_{n-1} - \frac{Q}{V} \cdot S_n - J_n \cdot A; & \frac{d(A \cdot X_f \cdot L_{f,n})}{dt} &= A \cdot Y \cdot J_n - b' \cdot X_f \cdot L_{f,n} \cdot A
\end{aligned} \quad (6.11)$$

Em seção subsequente será discutido o procedimento utilizado para a determinação do número de camadas adotadas durante as simulações do comportamento dinâmico dos filtros biológicos.

6.2.3 – Processos combinados

Embora os filtros biológicos e os processos de lodos ativados permitam o estabelecimento de diferentes arranjos operacionais², os processos combinados discutidos neste trabalho foram constituídos pelo agrupamento, em série, de um filtro biológico grosseiro, um tanque de aeração e um decantador secundário. Assumiu-se que a recirculação do filtro biológico se daria a partir do efluente do próprio filtro e o descarte de lodo no processo de lodos ativados a partir do tanque de aeração.

A construção de um modelo que descreva o comportamento dos processos combinados, a partir dos modelos apresentados nas duas últimas seções, necessita que os seguintes aspectos sejam considerados:

- No modelo proposto por HENZE et al. (1987) para a descrição do comportamento do tanque de aeração, o substrato é dividido em diferentes parcelas (rápida e lentamente biodegradável, solúvel e particulado inerte), individualmente analisadas. No modelo utilizado para os filtros biológicos, as diferentes parcelas que constituem o substrato não são isoladamente consideradas;
- A biomassa desprendida ao longo do meio suporte do filtro biológico pode ser realojada no próprio filtro ou alcançar o tanque de aeração do processo de lodos ativados. Chegando ao tanque de aeração, pode

² Os possíveis arranjos para os sistemas combinados foram discutidos ao longo da seção 4.4.

continuar ativa ou decair. Decaindo, pode ser convertida em substrato ou em material particulado inerte;

- Quando elevadas concentrações de material particulado inerte alcançam o filtro biológico, o processo de colmatação do meio suporte pode ser acelerado e todo o funcionamento do sistema de tratamento comprometido.

Desta forma, para a definição do modelo dinâmico, foram adotadas as seguintes suposições acerca do funcionamento dos processos combinados:

- Todo o substrato presente no efluente do filtro biológico é biodegradável. No tanque de aeração, 80% deste substrato é considerado lentamente biodegradável, sendo o restante tratado como substrato rapidamente biodegradável;
- A hidrólise do substrato lentamente biodegradável não é considerada a etapa limitante de degradação dos compostos orgânicos no interior do filtro biológico;
- Toda a biomassa desprendida do meio suporte entre a primeira e a antepenúltima camada do filtro biológico é realojada no próprio filtro; apenas a biomassa perdida pelas duas últimas camadas do filtro chega ao tanque de aeração;
- Da biomassa que chega ao tanque de aeração, apenas uma pequena parcela (10%) permanece ativa, metabolizando os compostos orgânicos. O restante da biomassa afluenta ao tanque de aeração é dividido em duas parcelas: uma parcela é tratada como resíduo endógeno (20%) e a outra como substrato lentamente biodegradável;
- O afluenta ao filtro biológico não apresenta a fração particulada inerte do substrato. Considerou-se, desta forma, a existência de um eficiente pré-tratamento à montante dos processos combinados.

Tendo em vista estas suposições, as equações que descrevem a dinâmica do tanque de aeração (equações de (6.1) a (6.4)) foram alteradas, tomando a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{dX_b}{dt} = & \frac{Q_r}{V} X_{br} + \xi_v b' X_f A (L_{f,n} + L_{f,n-1}) - \frac{Q_o}{V} X_b - \frac{Q_d}{V} X_b - \dots \\ & \dots - b_H X_b - \mu_H \frac{S_s}{k_s + S_s} \frac{S_o}{k_o + S_o} X_b, \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_s}{dt} = & \frac{Q_r}{V} S_{sr} + \frac{Q_i}{V} S_n \phi_s - \frac{Q_o}{V} S_s - \frac{Q_d}{V} S_s - \dots \\ & \dots - \frac{1}{Y_H} \mu_H \frac{S_s}{k_s + S_s} \frac{S_o}{k_o + S_o} X_b + \dots \\ & \dots + k_H \frac{\frac{X_s}{X_b}}{k_x + \left(\frac{X_s}{X_b}\right)} \frac{S_o}{k_o + S_o} X_b, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_s}{dt} = & \frac{Q_r}{V} X_{sr} + \frac{Q_i}{V} S_n \phi_p + \xi_l b' X_f A (L_{f,n} + L_{f,n-1}) - \dots \\ & \dots - \frac{Q_o}{V} X_s - \frac{Q_d}{V} X_s + (1 - f_p) b_H X_b - \dots \\ & \dots - k_H \frac{\frac{X_s}{X_b}}{k_x + \left(\frac{X_s}{X_b}\right)} \frac{S_o}{k_o + S_o} X_b, \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_p}{dt} = & \frac{Q_r}{V} X_{pr} + \xi_E b' X_f A (L_{f,n} + L_{f,n-1}) - \frac{Q_o}{V} X_p - \dots \\ & \dots - \frac{Q_d}{V} X_p + f_p b_H X_b. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Nestas equações:

- ξ_v : fração de biomassa desprendida do filtro biológico que permanece ativa no tanque de aeração (adimensional);
- ξ_l : fração de biomassa desprendida do filtro biológico tratada como substrato lentamente biodegradável no tanque de aeração (adimensional);
- ξ_E : fração de biomassa desprendida do filtro biológico tratada como resíduo endógeno no tanque de aeração (adimensional);
- ϕ_s : fração solúvel do substrato efluente do filtro biológico (adimensional);
- ϕ_p : fração particulada do substrato efluente do filtro biológico (adimensional);
- Q_i : vazão afluente ao tanque de aeração (L^3/T);
- Q_o : vazão efluente do tanque de aeração (L^3/T);

- Q_r : vazão de recirculação de lodo (L^3/T);
- Q_d : vazão de descarte de lodo (L^3/T);
- S_n : concentração de substrato efluente do filtro biológico (M/L^3);
- L_n : espessura de biofilme na última camada do filtro biológico (L);
- L_{n-1} : espessura de biofilme na penúltima camada do filtro biológico (L);

Os demais parâmetros e variáveis constantes das de (6.12) a (6.15) foram definidos na seção 4.5.

Já as equações que definem o comportamento dinâmico do filtro biológico (sistema de equações (6.11)) e do decantador secundário (equações (4.9), (4.13) e (4.14)) permaneceram inalteradas quando da sua aplicação aos processos combinados.

6.3 - Linearização dos modelos dinâmicos

Os modelos apresentados ao longo da seção anterior foram linearizados com o emprego da Técnica da Perturbação. Esta técnica consiste basicamente de uma expansão do modelo, em série de Taylor, em torno dos valores de equilíbrio das variáveis de interesse (GARCIA, 1997).

Para apresentação da técnica, considere-se um sistema dinâmico descrito pela seguinte equação:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]. \quad (6.16)$$

Considere-se, adicionalmente, que $\mathbf{x}_0(t)$ e $\mathbf{u}_0(t)$ correspondam, respectivamente, a trajetória e entrada de equilíbrio do sistema. Suponha-se também que o sistema opere nas proximidades das suas condições de equilíbrio, o que significa que $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$ apresentam pequenos desvios em relação a $\mathbf{x}_0(t)$ e $\mathbf{u}_0(t)$ ³. Assim, pode-se escrever:

³ Segundo BALOGUN (1985) e SOUZA (1998) são aceitáveis desvios que não superem 20% dos valores de equilíbrio das variáveis de estado e de controle do sistema.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \hat{\mathbf{x}}(t), \quad (6.17)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0(t) + \hat{\mathbf{u}}(t), \quad (6.18)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0(t_0) + \hat{\mathbf{x}}(t_0), \quad (6.19)$$

sendo $\hat{\mathbf{u}}(t)$ e $\hat{\mathbf{x}}(t)$ pequenas perturbações no entorno dos valores nominais das variáveis de controle e de estado do sistema. Substituindo-se $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$ (equações (6.17) e (6.18)) na equação de estado do sistema e realizando-se uma expansão em série de Taylor obtém-se:

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) + \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t] + \mathbf{J}_x[\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t] \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{J}_u[\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t] \hat{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{h}(t). \quad (6.20)$$

Na expressão anterior $\mathbf{J}_x$ e $\mathbf{J}_u$ representam, respectivamente, as matrizes Jacobianas com relação a $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$ avaliadas nas condições de equilíbrio do sistema e $\mathbf{h}(t)$ os termos de ordem mais alta produzidos com a expansão. As matrizes $\mathbf{J}_x$ e $\mathbf{J}_u$ são construídas da seguinte forma:

$$\mathbf{J}_x = \frac{\partial \mathbf{f}_{k,k=1..i}}{\partial \mathbf{x}_{l,l=1..j}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \frac{\partial f_i}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}, \quad (6.21)$$

$$\mathbf{J}_u = \frac{\partial \mathbf{f}_{k,k=1..i}}{\partial \mathbf{u}_{l,l=1..m}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial u_1} & \frac{\partial f_i}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial u_m} \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Negligenciando-se o termo $\mathbf{h}(t)$ da expressão (6.20), a partir da suposição que seu valor é pequeno em relação a $\mathbf{x}_0(t)$ e $\mathbf{u}_0(t)$, a equação de estado do sistema toma a seguinte forma:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(t) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}(t) \hat{\mathbf{u}}(t), \quad (6.23)$$

sendo $\mathbf{A}(t) = \mathbf{J}_x[\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t]$ e $\mathbf{B}(t) = \mathbf{J}_u[\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t]$. A equação (6.23) representa a equação de estado linearizada do sistema. Para os sistemas invariantes no tempo, têm-se:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}(t), \quad (6.24)$$

sendo $\mathbf{A} = \mathbf{J}_x[\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0]$ e $\mathbf{B} = \mathbf{J}_u[\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0]$. Considerada a ação dos distúrbios externos procede-se de forma similar para a determinação da matriz de distúrbios. Neste caso, a equação de estado linearizada para o sistema invariante no tempo toma a seguinte forma:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{D}_w \hat{\mathbf{w}}(t), \quad (6.25)$$

sendo $\mathbf{D}_w = \mathbf{J}_w[\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_0]$ e $\mathbf{w}_0(t)$ o valor nominal considerado para o distúrbio externo ao sistema.

Para exemplificar o processo de linearização, as equações que definem as matrizes de estado (matriz $\mathbf{A}$) e de entrada (matriz $\mathbf{B}$) e de transmissão de distúrbios (matriz $\mathbf{D}_w$), dos modelos utilizados para descrever o comportamento dos processos de lodos ativados e dos filtros biológicos, estão apresentadas no ANEXO I.

6.4 - Definição das matrizes de ponderação do índice quadrático de desempenho

As matrizes de ponderação que compõem o índice quadrático de desempenho (matrizes **Q** e **R** das equações (3.29), (3.34) e (3.42)) foram definidas a partir da aplicação do Método Inverso Quadrático de Bryson (BRYSON & HO, 1969). Segundo GRIMBLE & JOHNSON (1988), a despeito do declínio do interesse pelos métodos heurísticos de determinação das matrizes de ponderação, o Método Inverso Quadrático de Bryson continua sendo largamente empregado para a seleção das matrizes de ponderação dos índices quadráticos de desempenho.

O conceito que fundamenta a técnica é a normalização das contribuições das variáveis de estado e de controle dentro do índice de desempenho; esta normalização comumente se dá com a fixação de valores máximos aceitáveis para os desvios das diferentes variáveis de estado e de controle do sistema.

Para a apresentação da técnica, admita-se que as matrizes de ponderação **Q** e **R** sejam matrizes diagonais. Considere-se, adicionalmente, a fixação dos desvios máximos aceitáveis para as diferentes variáveis de estado ($x_{i,(max)}$, $i = 1, 2, \dots, n$) e de controle ($u_{j,(max)}$, $j = 1, 2, \dots, m$) do sistema. No Método Inverso Quadrático de Bryson, a determinação dos elementos das matrizes de ponderação se dá a partir das seguintes expressões:

$$q_i = \frac{1}{(x_{i,(max)})^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.26)$$

$$r_j = \frac{1}{(u_{j,(max)})^2}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (6.27)$$

Assim, as matrizes de ponderação assumem o seguinte aspecto:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(x_{1(\max)})^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(x_{2(\max)})^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(x_{n(\max)})^2} \end{bmatrix}, \quad (6.28)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(u_{1(\max)})^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(u_{2(\max)})^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(u_{j(\max)})^2} \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Pelo Método Inverso Quadrático de Bryson, definidas as matrizes de ponderação, resolve-se o problema de controle. Sendo os resultados obtidos insatisfatórios, os valores dos elementos das matrizes de ponderação podem ser individualmente alterados ou, o que é mais comum, pode-se alterar o balanço entre as matrizes de ponderação $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$; feito isso, o problema de controle é então novamente resolvido. Este procedimento é repetido até que se estabeleçam as respostas desejadas para o sistema.

Outras técnicas disponíveis para a seleção das matrizes de ponderação (Controle Ótimo Modal, fixação de uma estrutura modal ótima e, além do Método Inverso Quadrático de Bryson, outras técnicas heurísticas) são apresentadas e detalhadamente discutidas por GRIMBLE & JOHNSON (1988).

6.5 - Descrição dos sistemas de tratamento estudados

6.5.1 – Lodos ativados

Para o estabelecimento de um sistema de controle aplicável ao processo de lodos ativados foi utilizado, como exemplo, o sistema de tratamento proposto por VAN HAANDEL & MARAIS (1999). Neste sistema, o processo de lodos ativados é constituído por um tanque de aeração considerado completamente misturado seguido por um decantador secundário. Embora, na prática, houvesse a necessidade de um pré-tratamento para a separação dos sólidos grosseiros e da areia, estas unidades não foram consideradas pelos autores. Já as unidades de adensamento e digestão anaeróbia do lodo excedente, originalmente incluídas nos sistemas propostos por VAN HAANDEL & MARAIS, não foram considerados para o estabelecimento dos sistemas de controle discutidos neste trabalho. Na TABELA 6.1 estão reunidos os parâmetros empregados quando da modelagem do processo de lodos ativados.

TABELA 6.1 - Parâmetros empregados na modelagem do processo de lodos ativados

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Fator de produção de biomassa heterotrófica	Y	gDQO _{formada} /gDQO _{oxidada}	0,45
Fração de biomassa que produz particulados	f _p	adimensional	0,20
Constante de decaimento da biomassa heterotrófica	b _H	dia ⁻¹	0,24
Taxa de crescimento específico máxima da biomassa heterotrófica*	μ _H	dia ⁻¹	6,00
Constante de saturação para o oxigênio	k _{OH}	gO ₂ /m ³	0,10
Constante de saturação para o substrato	k _S	gDQO/m ³	160
Taxa de hidrólise específica máxima do material lentamente biodegradável*	k _H	gDQO/gDQO.dia	2,20
Constante de saturação para hidrólise do material lentamente biodegradável*	k _x	gDQO/gDQO.dia	0,15
Constantes de sedimentabilidade	n	l/g	0,46
	v	m/h	6,00

Fonte: adaptado de VAN HAANDEL & MARAIS (1999).

* Valores adotados a partir de HENZE et al. (1987).

Os dados referentes às características do material orgânico presente no afluente ao sistema estão apresentados na TABELA 6.2. Nesta tabela, VAN HAANDEL & MARAIS (1999) indicam a concentração de material orgânico afluente e a sua distribuição entre as frações biodegradável e não biodegradável, solúvel e particulada. As características físicas do tanque de aeração e do decantador

secundário, bem como as vazões esperadas para o sistema quando condições estacionárias de funcionamento forem estabelecidas, estão apresentadas na TABELA 6.3.

TABELA 6.2 - Características do material orgânico presente no afluente ao processo

Parâmetro	Unidade	Valor
DBO afluente	mg/l	650,00
Fração não biodegradável e solúvel afluente	admensional	0,10
Fração não biodegradável e particulada afluente	admensional	0,08
Fração biodegradável e solúvel afluente	admensional	0,21
Fração biodegradável e particulada afluente	admensional	0,61

Fonte: VAN HAANDEL & MARAIS (1999).

TABELA 6.3 - Características físicas das unidades e as vazões, em regime permanente, para cada uma das unidades que constituem o sistema

Item	Unidade	Valor
Volume do tanque de aeração	m ³	3699,00
Área do decantador	m ³	577,00
Profundidade do decantador	m	4,00
Vazão afluente ao tanque de aeração	m ³ /dia	12000,00
Vazão efluente do tanque de aeração	m ³ /dia	15938,00
Vazão de recirculação de lodo	m ³ /dia	5160,00
Vazão de descarte de lodo	m ³ /dia	1232,00

Fonte: VAN HAANDEL & MARAIS (1999).

6.5.2 - Filtro biológico

Para o estabelecimento de um sistema de controle aplicável aos filtros biológicos foi utilizado o sistema de tratamento apresentado por METCALF & EDDY (1991). Neste sistema, o filtro biológico é preenchido com meio suporte em material plástico e o afluente ao filtro é submetido à decantação primária. Conforme discutido nas seções anteriores, um eficiente pré-tratamento é importante para que se reduza a possibilidade de colmatção do meio suporte, evitando-se, por consequência, o comprometimento do funcionamento do filtro. A dinâmica do decantador primário, entretanto, não foi considerada para a definição dos controladores propostos neste trabalho. Adicionalmente, admitiu-se que a recirculação ocorre a partir do efluente do próprio filtro.

Na TABELA 6.4 estão reunidos os parâmetros utilizados para a modelagem do sistema. A TABELA 6.5, por sua vez, reúne as características do afluente ao filtro biológico e as características físicas do reator.

TABELA 6.4 - Parâmetros empregados na modelagem do processo do filtro biológico

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Fator de produção de biomassa	Y	$\text{gDQO}_{\text{formada}}/\text{gDQO}_{\text{oxidada}}$	0,50
Constante de decaimento da biomassa	b'	dia^{-1}	0,25
taxa de utilização do substrato específica máxima	μ	dia^{-1}	8,00
Concentração de biomassa ativa no interior do biofilme	X_f	g/m^3	40000,00
Constante de saturação para o substrato	k_s	g/m^3	10,00
Coefficiente de difusão do substrato no interior do biofilme	D_f	cm^2/dia	0,64
Coefficiente de difusão do substrato na massa líquida	D	cm^2/dia	0,80

Fonte: RITTMANN & McCARTY (1981) e SÁEZ & RITTMANN (1988).

TABELA 6.5 - Características do material orgânico presente no afluente, características físicas do reator e vazões, em regime permanente, afluentes e efluente do filtro biológico

Item	Unidade	Valor
DBO afluente	g/m^3	450,00
Vazão afluente*	m^3/dia	7571,00
Vazão de recirculação*	m^3/dia	7571,00
Vazão efluente*	m^3/dia	15142,00
Altura do reator**	m	9,00
Seção transversal do reator***	m^2	186,00
Superfície específica do meio suporte****	m^2/m^3	79,00

Fonte: METCALF & EDDY (1991).

* Valores originalmente apresentados em gal/min;

** Valores originalmente apresentados em ft;

*** Valores originalmente apresentados em ft^2 ;

**** Valores originalmente apresentados em ft^2/ft^3 .

6.5.3 – Processos combinados

Para a definição de um sistema de controle aplicável aos processos combinados foi considerada uma planta de tratamento com as características apresentadas na TABELA 6.6.

TABELA 6.6 - Características físicas das unidades e as vazões, em regime permanente, para cada uma das unidades que constituem o processo combinado

Item	Unidade	Valor
Volume do filtro biológico	m ³	1687,50
Volume do tanque de aeração	m ³	855,50
Área do decantador	m ³	2462,00
Profundidade do decantador	m	3,70
Vazão afluyente ao filtro biológico	m ³ /dia	21600,00
Razão de recirculação para o filtro biológico	m ³ /dia	1
Vazão afluyente ao tanque de aeração	m ³ /dia	21600,00
Vazão de recirculação de lodo	m ³ /dia	9257,10
Vazão de descarte de lodo	m ³ /dia	443,70

Para a definição das características físicas listadas na tabela anterior, considerou-se que os processos combinados receberiam um efluente bruto com uma DBO₅ de 250 mg/l e que deveriam apresentar um efluente tratado com uma DBO₅ de, no máximo, 20 mg/l. Estas condições de contorno são idênticas àquelas utilizadas por METCALF & EDDY (1991), quando do dimensionamento de um processo de lodos ativados convencional. Outras informações utilizadas por METCALF & EDDY e que também foram utilizadas para o dimensionamento dos processos combinados estão listadas na TABELA 6.7.

TABELA 6.7 – Informações adicionais utilizadas para o dimensionamento dos processos combinados

Item	Unidade	Valor
Concentração de sólidos suspensos totais no lodo recirculado	mg/l	10000,00
Concentração de sólidos suspensos totais no tanque de aeração	mg/l	3000,00
Relação sólidos suspensos voláteis / sólidos suspensos totais	-	0,80
Concentração de sólidos suspensos totais no efluente tratado	mg/l	22,00
Fração biodegradável dos sólidos suspensos totais no efluente final	-	0,65
Relação DBO ₅ /DBO _{última}	-	0,68
Temperatura	°C	20

Fonte: METCALF & EDDY (1991).

Para o dimensionamento dos processos combinados empregou-se a metodologia estabelecida por WFE & ASCE (1991). Os parâmetros necessários ao dimensionamento do filtro biológico e do tanque de aeração estão relacionados nas tabelas 6.8 e 6.9. Adicionalmente admitiu-se que o filtro biológico proposto para o sistema combinado possuiria meio suporte em material plástico e que a recirculação se daria a partir do efluente do próprio filtro. Para o dimensionamento do decantador

secundário foram consideradas as curvas de fluxo de sólidos e de velocidade de sedimentação apresentadas por METCALF & EDDY (1991).

TABELA 6.8 - Parâmetros empregados no dimensionamento dos filtros biológicos

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Carga hidráulica	-	$\text{l/m}^2\text{s}$	0,70
Carga orgânica	-	$\text{kg/m}^3\text{dia}$	3,20
Constante de tratabilidade	k_{20}	$(\text{l/s})^{0.5}$	0,016

TABELA 6.9 - Parâmetros empregados na modelagem do processo de lodos ativados

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Coefficiente de produção de biomassa heterotrófica	Y	$\text{gDQO}_{\text{formada}}/\text{gDQO}_{\text{oxidada}}$	0,50
Constante de decaimento da biomassa heterotrófica	b_H	dia^{-1}	0,06
Idade do lodo	θ_C	dia	2,00

Outros parâmetros necessários às simulações do comportamento do tanque de aeração e do decantador secundário, quando do estabelecimento e avaliação dos sistemas de controle aplicáveis aos processos combinados, estão reunidas na TABELA 6.10.

TABELA 6.10 - Parâmetros empregados na modelagem do tanque de aeração e do decantador secundário

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Fração de biomassa que produz particulados	f_P	adimensional	0,20
Taxa de crescimento específico máxima da biomassa heterotrófica	μ_H	dia^{-1}	6,00
Constante de saturação para o oxigênio	k_{OH}	gO^2/m^3	0,10
Constante de saturação para o substrato	k_S	gDQO/m^3	160
Taxa de hidrólise específica máxima do material lentamente biodegradável	k_H	$\text{gDQO}/\text{gDQO}.\text{dia}$	2,20
Constante de saturação para hidrólise do material lentamente biodegradável	k_x	$\text{gDQO}/\text{gDQO}.\text{dia}$	0,15
Constantes de sedimentabilidade	n	l/g	0,46
	v	m/h	0,37

6.6 – Simulações Computacionais

Durante a operação dos sistemas de tratamento de esgotos, o padrão de variação apresentado pela vazão afluente não é conhecido *a priori*; é de caráter aleatório e seus valores não podem ser expressos analiticamente. Desta forma, durante as simulações computacionais utilizadas para a avaliação do desempenho dos sistemas de controle propostos, a vazão afluente variou segundo três diferentes padrões:

- Variação segundo a função pulso;
- Variação segundo a função degrau;
- Variação segundo a função senoidal.

Estes padrões de variação, que de fato constituem funções temporais muito simples, são entradas típicas de teste, comumente utilizadas durante o estabelecimento e avaliação do desempenho dos sistemas de controle. Segundo OGATA (1982), os sistemas de controle projetados com base nos sinais de teste usualmente apresentam desempenho satisfatório quando submetidos a entradas reais; adicionalmente, OGATA observa que os sinais de teste permitem comparar o desempenho de todos os sistemas de controle projetados com relação a uma mesma base.

As funções pulso, degrau e senoidal podem ser matematicamente representados da seguinte maneira:

- Função degrau : $w(t) = \begin{cases} A, & \text{para } t > 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases}$ (6.30)

- Função pulso: $w(t) = \begin{cases} A, & \text{para } 0 < t < t_0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \text{ e } t_0 < t \end{cases}$ (6.31)

- Função senoidal : $w(t) = \begin{cases} A \cdot \sin \omega t, & \text{para } t > 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases}$ (6.32)

Nas expressões anteriores A , t_0 e ω representam constantes. Uma representação gráfica das funções degrau, pulso e senoidal está apresentada na FIGURA 6.2.

FIGURA 6.2 – Representação gráfica das funções degrau (a), pulso (b) e senoidal (c).

Durante as simulações computacionais realizadas neste trabalho assumiu-se para a constante A 10% do valor nominal da vazão afluyente e para t_0 o valor de 60 segundos. Um resumo das simulações realizadas para cada um dos sistemas de tratamento de esgotos estudados neste trabalho está apresentado na FIGURA 6.3.

Por fim, convém observar que todas as simulações utilizadas para a avaliação da performance dos sistemas de controle estabelecidos foram realizadas com auxílio do programa MATLAB[®], versão 6.0.

FIGURA 6.3 - Simulações realizadas para os diferentes sistemas de tratamento de esgotos estudados

CAPÍTULO 07

RESULTADOS E DISCUSSÃO

7 – RESULTADOS E DISCUSSÃO

7.1 – Considerações Gerais

Ao longo deste capítulo, os sistemas de controle estabelecidos para os processos de lodos ativados, para os filtros biológicos e para os processos combinados serão apresentados e discutidos. Serão apresentadas as matrizes que constituem os modelos empregados para descrever o comportamento dinâmico dos sistemas de tratamento, as características de controlabilidade e observabilidade destes modelos, as matrizes de ganho dos sistemas de controle e os resultados das simulações computacionais que permitiram avaliar o desempenho dos sistemas de controle propostos. A parte final do capítulo será dedicada à apresentação dos observadores de estado estabelecidos para os diferentes sistemas de tratamento analisados.

7.2 – Processo de lodos ativados

Para o processo de lodos ativados, duas diferentes opções de controle foram avaliadas: *a)* a atuação do sistema de controle simultaneamente sobre o tanque de aeração e decantador secundário e *b)* a atuação do sistema de controle apenas sobre o tanque de aeração. Neste último caso, as concentrações de biomassa ativa e de substrato no lodo recirculado foram consideradas constantes e idênticas às aquelas observadas na situação em que o tanque de aeração e o decantador secundário atingem condições estacionárias de operação. Na sequência, cada uma destas opções de controle é discutida.

7.2.1 – Tanque de aeração

Nas simulações apresentadas neste item, avalia-se apenas a ação do controlador sobre o tanque de aeração do processo de lodos ativados. As concentrações de biomassa ativa e das diferentes parcelas de substrato no lodo recirculado são constantes e iguais aquelas que deveriam ser observadas quando do estabelecimento

de condições estacionárias para o funcionamento conjunto do tanque de aeração e decantador secundário.

Seis variáveis de estado caracterizam o comportamento do tanque de aeração: concentração de biomassa heterotrófica ativa (X_b), concentração de substrato rapidamente biodegradável (S_s), concentração de substrato lentamente biodegradável (X_s), concentração de material particulado produzido a partir do decaimento da biomassa (X_p), concentração de substrato particulado inerte (X_i) e vazão efluente do tanque de aeração. As vazões de recirculação e de descarte do lodo constituem as variáveis de controle do processo. A vazão de afluente bruto ao tanque de aeração (ou simplesmente vazão afluente), embora tratada como variável de controle num primeiro grupo de simulações, é considerada um distúrbio externo atuante sobre o processo de lodos ativados.

- **Sistema contínuo no tempo sem distúrbio externo**

A equação de estado que descreve o comportamento do tanque de aeração para o caso contínuo, obtida a partir da linearização do modelo estabelecido pelas equações de (6.1) a (6.6) e da hipótese de que nenhum distúrbio externo age sobre o processo de lodos ativados, é construída pelas seguintes matrizes de estado (a matriz **A** na equação (3.5)) e de entrada (matriz **B**):

$$A = \begin{bmatrix} -4,8278 & 96,2648 & 0 & 0 & 0 & -0,8217 \\ -0,5707 & -218,8425 & 0,0024 & 0 & 0 & -0,0027 \\ 0,3612 & 0 & -4,9231 & 0 & 0 & -0,0489 \\ 0,0480 & 0 & 0 & -4,9208 & 0 & -0,1469 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4,9208 & -0,1369 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,0000 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,0606 & 2,7028 & -0,8217 \\ 0,0369 & 0,0088 & -0,0027 \\ 0,1072 & 0,1609 & -0,0489 \\ 0,0029 & 0,4830 & -0,1469 \\ 0,0141 & 0,4503 & -0,1369 \\ 1,0000 & 1,0000 & -1,0000 \end{bmatrix}.$$

O sistema estabelecido a partir destas matrizes, além de completamente controlável, apresentou-se estável; todos os autovalores do sistema $([-4,92; -218,59; -5,09; -4,92; -4,92; -1,00])$ estão situados no semi-plano esquerdo do plano complexo, conforme pode ser observado na FIGURA 7.1.

FIGURA 7.1 – Autovalores do sistema que descreve o comportamento do tanque de aeração do processo de lodos ativados – resultados para o caso contínuo.

A matriz de ganho de realimentação do sistema de controle, obtida a partir das equações (3.30) e (3.31), apresenta a seguinte forma:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.0571 & 119.9243 & 32.2356 & -0.4126 & 0.0155 & 0.3460 \\ 14.9935 & 5.9388 & 3.1330 & 0.8775 & 0.9037 & -0.2671 \\ -0.2552 & -0.0995 & -0.0389 & -0.0152 & -0.0152 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considerando-se que todas as variáveis de estado estão disponíveis para realimentação do sistema de controle, o desempenho do sistema de controle proposto foi avaliado a partir da resposta do processo a condições iniciais arbitrárias. Assumindo-se que, inicialmente, todas as variáveis de estado encontravam-se 25% acima dos seus valores de equilíbrio, as respostas apresentadas pelo tanque de aeração estão ilustradas nas figuras 7.2 e 7.3. Na FIGURA 7.2 estão apresentados os resultados obtidos na situação em que o controlador não atua sobre o processo de lodos ativados; já a FIGURA 7.3 ilustra o comportamento das variáveis que caracterizam o tanque de aeração após a incorporação do controlador.

FIGURA 7.2 – Resposta a condições iniciais arbitrárias dos desvios das variáveis de estados que caracterizam o tanque de aeração, sem a ação do controlador – resultados para o caso contínuo.

FIGURA 7.3 – Resposta a condições iniciais arbitrárias dos desvios das variáveis de estados que caracterizam o tanque de aeração, com a ação do controlador – resultados para o caso contínuo.

Como o sistema de equações que descreve o comportamento do tanque de aeração é estável, os desvios apresentados pelas variáveis de estado em relação aos seus valores de equilíbrio progressivamente tendem a anular-se; a ação do controlador, entretanto, além de reduzir os desvios, diminui substancialmente o tempo necessário para que as condições de equilíbrio sejam novamente alcançadas. Os desvios apresentados pelas variáveis de controle do processo, por sua vez, estão ilustrados na FIGURA 7.4.

FIGURA 7.4 – Desvios apresentados pelas variáveis de controle do processo na simulação em que se avalia a resposta a condições iniciais arbitrárias das variáveis de estados – resultados para o caso contínuo.

• Sistema contínuo no tempo com distúrbio externo

Considerando-se, agora, que a vazão afluyente ao tanque de aeração atua como um distúrbio externo do processo de lodos ativados, a equação de estado para o caso contínuo (neste caso, a equação (3.48)) é construída a partir da matriz de estado apresentada anteriormente e das seguintes matrizes de entrada (matriz **B**) e de transmissão de distúrbio (matriz **D_w**):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2,7028 & -0,8217 \\ 0,0088 & -0,0027 \\ 0,1609 & -0,0489 \\ 0,4830 & -0,1469 \\ 0,4503 & -0,1369 \\ 1,0000 & -1,0000 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_w = \begin{bmatrix} 0,0606 \\ 0,0369 \\ 0,1072 \\ 0,0029 \\ 0,0141 \\ 1,0000 \end{bmatrix}.$$

Conforme observado ao longo da seção (3.11), a influência dos distúrbios externos não é considerada para o projeto do controlador, ficando inalteradas as expressões empregadas para o cálculo da matriz de ganho de realimentação do sistema de controle (equações (3.30) e (3.31)). Desta forma, a matriz de ganho assume os seguintes valores:

$$K = \begin{bmatrix} 1,9436 & 1,6731 & 255,9364 & 0,5447 & 0,5689 & -0,2786 \\ -0,0304 & -0,0276 & -4,3900 & -0,0093 & -0,0098 & -0,0004 \end{bmatrix}$$

Definida a matriz de ganho, o desempenho do controlador foi então avaliado a partir da imposição de diferentes padrões de variação temporal à vazão afluyente ao tanque de aeração (a vazão afluyente variou segundo as funções degrau, pulso e senoidal). Os resultados obtidos com a variação da vazão afluyente segundo a função degrau¹ estão apresentados nas figuras 7.5 e 7.6. Os desvios apresentados pelas variáveis de estado sem a ação do controlador estão ilustrados na primeira figura; a FIGURA 7.6, por sua vez, apresenta o comportamento das variáveis de estado a partir da incorporação do controlador.

FIGURA 7.5 – Desvios das variáveis de estado, sem a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

¹ Conforme discutido na seção 6.7, a variação degrau da vazão afluyente equivale a um aumento de 10% de seu valor de equilíbrio.

FIGURA 7.6 – Desvios das variáveis de estado, com a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

Quando o controlador não atua sobre o processo de lodos ativados (resultados apresentados na FIGURA 7.5), as concentrações de equilíbrio estabelecidas para as variáveis de estado, após a perturbação da vazão afluyente, são inferiores aquelas que eram observadas antes da variação segundo o degrau (deve-se observar que os desvios em relação as condições de equilíbrio originais são negativos). Para as concentrações de biomassa heterotrófica ativa (X_b) e de substrato particulado inerte (X_i) as reduções são causadas fundamentalmente pela diluição provocada com o aumento da vazão afluyente; no esgoto bruto, as concentrações de X_b e X_i são substancialmente menores que as concentrações destas variáveis no lodo recirculado e no interior do tanque de aeração.

As novas concentrações de equilíbrio para o material particulado produzido com o decaimento da biomassa (X_p) são o resultado da sobreposição de dois fatores: *a)* diluições provocadas com o aumento da vazão afluyente e *b)* as menores concentrações de biomassa no tanque de aeração; sendo menores as concentrações de biomassa no tanque de aeração, as concentrações dos produtos do seu decaimento (X_p , por exemplo) são também diminuídas.

Para o entendimento do comportamento da parcela lentamente biodegradável do substrato (X_s), dois aspectos devem ser considerados conjuntamente: *a)* a maior

parcela da DQO presente no afluente bruto está sob a forma particulada² (de fato, as concentrações de X_s são maiores no afluente do que, em condições de equilíbrio, no tanque de aeração) e *b)* a maior parte do material produzido com o decaimento da biomassa³ é considerada substrato lentamente biodegradável. As elevadas concentrações afluentes justificam o aumento nas concentrações de X_s logo após a variação da vazão segundo a função degrau; entretanto, com a redução nas concentrações de biomassa no tanque de aeração e, por conseguinte, nos produtos do seu decaimento, as concentrações de X_s são progressivamente diminuídas até o estabelecimento de novas condições de equilíbrio.

Com a incorporação do controlador ao processo de lodos ativados, o aumento na vazão afluente é seguido, a despeito de uma pequena e breve redução inicial, por elevações na vazão de recirculação do lodo; a vazão de descarte do lodo, por sua vez, permanece sempre muito próxima da sua condição de equilíbrio. O comportamento das variáveis de controle do processo está ilustrado na FIGURA 7.7.

FIGURA 7.7 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, em resposta a uma variação degrau da vazão afluente – resultados para o caso contínuo.

² As características consideradas para o material orgânico presente no afluente ao tanque de aeração foram sumarizadas na TABELA 6.2.

³ Conforme o valor fixado para a constante f_p na TABELA 6.1, 80% da biomassa que decai é considerada substrato lentamente biodegradável.

Conforme pode ser observado a partir da FIGURA 7.6, aumentos na vazão de recirculação do lodo produzem aumentos nas concentrações de todas as variáveis de estado (os desvios negativos são reduzidos e os desvios positivos aumentados). Adicionalmente, com aumentos nas concentrações da biomassa, as concentrações dos produtos do seu decaimento (X_s e X_p) são também aumentadas. Desta forma, com a ação do controlador, X_b , X_p e X_i têm suas concentrações aproximadas das condições originais de equilíbrio; para X_s , entretanto, o mesmo comportamento não é observado. Por fim, deve-se observar que, com a ação do controlador, o tempo necessário para que novas concentrações de equilíbrio sejam estabelecidas é substancialmente reduzido.

Os resultados obtidos quando da variação da vazão afluyente segundo a função pulso estão reunidos nas figuras 7.8 e 7.9. Na FIGURA 7.8 estão apresentados os desvios das variáveis de estado quando o controlador não atua sobre o processo de lodos ativados; já o efeito do controlador sobre as variáveis de estado é ilustrado na FIGURA 7.9.

FIGURA 7.8 – Desvios das variáveis de estado, sem a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

FIGURA 7.9 – Desvios das variáveis de estado, com a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

A análise qualitativa que se desenvolveu sobre o comportamento das variáveis de estados quando da variação da vazão afluyente segundo a função degrau também é válida para se analisar os efeitos da variação segundo o pulso⁴. Também neste caso, o controlador reduziu substancialmente os desvios apresentados pelas variáveis de estado e o tempo necessário para que o equilíbrio fosse restabelecido. No caso do pulso, como a variação da vazão afluyente não é permanente, as variáveis de estado retornam invariavelmente a condição original de equilíbrio.

As variáveis de controle também reproduzem o padrão de comportamento observado quando da aplicação do degrau a vazão afluyente: as vazões de descarte do lodo são sempre mantidas muito próximas de seus valores nominais; as variações nas vazões de recirculação do lodo, por sua vez, garantem o restabelecimento das condições de equilíbrio do sistema. Os desvios apresentados pelas variáveis de controle estão ilustrados na FIGURA 7.10.

⁴ Conforme discutido na seção 6.7, a variação pulso da vazão afluyente equivale a um aumento de 10% de seu valor de equilíbrio durante 60 segundos.

FIGURA 7.10 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, em resposta a uma variação pulso da vazão afluente – resultados para o caso contínuo.

As figuras 7.11 e 7.12 ilustram os desvios apresentados pelas variáveis de estado quando a vazão afluente varia periodicamente⁵ entorno de seu valor de equilíbrio. Os resultados obtidos para o sistema não controlado estão apresentados na FIGURA 7.11; os efeitos do controlador, por sua vez, estão apresentados na FIGURA 7.12.

A ação do controlador permite que os desvios nas concentrações de X_b , X_p e X_i sejam reduzidos. Entretanto, aumentos nas concentrações de biomassa no tanque de aeração (redução dos desvios negativos) impedem que reduções substanciais sejam observadas nas concentrações de X_s ; da mesma forma, reduções nas concentrações de X_b (redução dos desvios positivos) provocam diminuições nas concentrações de X_s , dificultando a aproximação das suas concentrações dos valores observados nas condições de equilíbrio. Como observado anteriormente, as elevadas concentrações de material lentamente biodegradável na vazão afluente também dificultam as reduções nos desvios apresentados pelas concentrações de X_s .

⁵ A variação periódica da vazão afluente foi estabelecida a partir da função seno, conforme discutido na seção 6.7.

FIGURA 7.11 – Desvios das variáveis de estado, sem a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluente.

FIGURA 7.12 – Desvios das variáveis de estado, com a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluente.

O comportamento das vazões de recirculação e descarte do lodo, considerada a variação periódica da vazão afluente, está apresentado na FIGURA 7.13. Também neste caso, os desvios em relação a condição de equilíbrio apresentados pela vazão de descarte de lodo foram pouco expressivos, cabendo a vazão de recirculação praticamente todo o esforço de controle.

FIGURA 7.13 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, em resposta a uma variação periódica da vazão afluenta.

As baixas concentrações apresentadas pela parcela rapidamente biodegradável do substrato, observadas para o processo de lodos ativados em equilíbrio (tanto no tanque de aeração quanto no lodo recirculado), e o fato de que esta parcela é prontamente metabolizada pela biomassa justificam os pequenos desvios apresentados nas concentrações de S_s após a perturbação do processo, independentemente do padrão de variação imposto a vazão afluenta ou da ação do controlador.

Nas simulações precedentes, a matriz de ganho do controlador foi calculada considerando-se as matrizes de ponderação definidas segundo o critério apresentado na seção 6.4. Os resultados apresentados nas figuras de 7.5 a 7.13 foram obtidos a partir de matrizes de ponderação dos desvios das variáveis de estado (matrizes Q) que privilegiavam a ponderação das concentrações de biomassa (o elemento da matriz Q responsável pela ponderação dos desvios apresentados pelas concentrações de biomassa foi majorado). Nas tentativas de controle em que não se privilegiou quaisquer das variáveis de estado ou nas tentativas em que outras variáveis de estado tiveram seus coeficientes de ponderação aumentados, o esforço de controle foi substancialmente maior e os resultados obtidos para as variáveis de estado geralmente insatisfatório.

Nas figuras de 7.14 a 7.16 são ilustrados os desvios apresentados pelas variáveis de estado quando a vazão afluyente varia periodicamente entorno do seu valor de equilíbrio considerando-se que nenhuma variável de estado foi privilegiada (FIGURA 7.14), que apenas o coeficiente de ponderação da biomassa foi aumentado (FIGURA 7.15) e que, por fim, apenas o coeficiente de ponderação da fração lentamente biodegradável do substrato foi aumentado (FIGURA 7.16). O esforço de controle para cada uma destas alternativas está ilustrado nas figuras de 7.17 a 7.19.

FIGURA 7.14 – Desvios das variáveis de estado, com a ação do controlador, considerando que nenhuma variável de estado foi privilegiada.

FIGURA 7.15 – Desvios das variáveis de estado, com a ação do controlador, considerando a majoração do coeficiente de ponderação da biomassa.

FIGURA 7.16 – Desvios das variáveis de estado, com a ação do controlador, considerando a majoração do coeficiente de ponderação da fração lentamente biodegradável do substrato.

FIGURA 7.17 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, considerando que nenhuma variável de estado foi privilegiada.

FIGURA 7.18 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, considerando a majoração do coeficiente de ponderação da biomassa.

FIGURA 7.19 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, considerando a majoração do coeficiente de ponderação da fração lentamente biodegradável do substrato.

• Sistema discreto no tempo

A representação no espaço de estados de sistemas discretos no tempo é muito próxima daquela que se emprega para o caso contínuo, conforme discutido na seção 3.5. Nos sistemas discretos, o comportamento do sistema dinâmico não é observado em todos os instantes do tempo, mas apenas numa sequência de instantes separados pelo período de amostragem. Considerando-se, então, um período de amostragem de 1 hora, as matrizes de estado (matriz **G**), de entrada (matriz **H**) e de transmissão de distúrbios (matriz **D_w**) assumem os seguintes valores:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0,8100 & 0,3647 & 0 & 0 & 0 & -0,0303 \\ -0,0022 & -0,0009 & 0 & 0 & 0 & 0,0001 \\ 0,0122 & 0,0049 & 0,8145 & 0 & 0 & -0,0020 \\ 0,0016 & 0,0006 & 0 & 0,8146 & 0 & -0,0054 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8146 & -0,0050 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9592 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0,1011 & -0,0303 \\ -0,0002 & 0,0001 \\ 0,0068 & -0,0020 \\ 0,0182 & -0,0054 \\ 0,0169 & -0,0050 \\ 0,0408 & -0,0408 \end{bmatrix}, \quad D_w = \begin{bmatrix} 0,0022 \\ 0,0002 \\ 0,0040 \\ 0 \\ 0,0004 \\ 0,0408 \end{bmatrix}.$$

O sistema discreto estabelecido a partir das três últimas matrizes, além de completamente controlável, apresentou-se estável; como pode ser observado da FIGURA 7.20, todos os autovalores do sistema ([0,8146; 0;0001; 0,8090; 0,8146; 0,8146; 0,9592]) estão situados, no plano complexo, no interior de um círculo unitário.

FIGURA 7.20 – Autovalores do sistema que descreve o comportamento do tanque de aeração do processo de lodos ativados – resultados para o caso discreto.

A partir da aplicação das equações (3.43) e (3.44), a matriz de ganho de realimentação do sistema de controle toma a seguinte forma:

$$K = \begin{bmatrix} 6,9518 & 3,1175 & 1,8872 & 0,4196 & 0,4196 & -0,2738 \\ -0,1175 & -0,0527 & -0,0319 & -0,0071 & -0,0071 & -0,0004 \end{bmatrix}.$$

Assim como se fez para o caso contínuo, o desempenho do controlador proposto para o caso discreto foi avaliado a partir da imposição de diferentes padrões de variação a vazão afluyente (variações segundo as funções degrau, pulso e senoidal). O

comportamento apresentado pelas diferentes variáveis de estado, com e sem a ação do controlador e para os diferentes padrões de variação da vazão afluente, estão ilustrados na FIGURA 7.21. Já o comportamento apresentado pelas variáveis de controle, função do padrão de variação da vazão afluente, está resumido na FIGURA 7.22.

FIGURA 7.21 – Desvios apresentados pelas variáveis de estado, considerados os sistemas não controlados (esquerda) e controlados (direita), a partir de diferentes padrões de variação da vazão afluente – resultados para o caso discreto.

FIGURA 7.22 – Desvios apresentados pelas variáveis de controle, a partir da imposição de diferentes padrões de variação da vazão afluenta – resultados para o caso discreto.

Das figuras 7.21 e 7.22 percebe-se que os resultados obtidos para os casos contínuo e discreto são muito próximos; desta forma, toda a análise qualitativa que se desenvolveu para o caso contínuo pode ser reproduzida para a análise dos resultados obtidos a partir do sistema discreto. Os diferentes valores escolhidos para o período de amostragem (1 hora) e para a duração do pulso (60 segundos) explicam as diferenças observadas nos desvios das variáveis de estado e de controle entre os casos contínuo e discreto, quando da variação da vazão afluente segundo a função pulso; embora o pulso tenha a duração de 60 segundos, a discretização utilizada induziu a consideração de um pulso de 3600 segundos, ampliando, no caso discreto, os desvios das variáveis de estado e, por consequência, o esforço de controle.

7.2.2 – Tanque de aeração e decantador secundário

Ao longo desta seção serão apresentadas simulações nas quais o tanque de aeração e o decantador secundário são conjuntamente avaliados.

Conforme discutido na seção anterior, seis variáveis de estado caracterizam o tanque de aeração: concentração de biomassa heterotrófica ativa (X_b), concentração de substrato rapidamente biodegradável (S_s), concentração de substrato lentamente biodegradável (X_s), concentração de material particulado produzido a partir do decaimento da biomassa (X_p), concentração de substrato particulado inerte (X_i) e vazão efluente do tanque de aeração.

O comportamento do decantador, importante para a avaliação das características do lodo que retorna ao tanque de aeração, é caracterizado a partir das mesmas variáveis que descrevem o comportamento da biomassa e das diferentes parcelas de substrato no tanque de aeração (X_b , S_s , X_s , X_p e X_i). Conforme observado na seção 6.2.1, assume-se uma divisão do decantador em cinco camadas.

As vazões de descarte e de recirculação do lodo novamente constituem as variáveis de controle do sistema; a vazão afluente, por sua vez, o distúrbio externo atuante sobre o processo de lodos ativados.

A equação de estado que descreve o comportamento do processo de lodos ativados para o caso contínuo (equação (3.47)) é construída a partir das seguintes matrizes de estado (matriz **A**), de entrada (matriz **B**) e de transmissão de distúrbios (matriz **D_w**):

[illegible]

[illegible]

[illegible]

O sistema assim constituído apresenta-se estável; como pode ser observado a partir da FIGURA 7.23, todos os autovalores do sistema estão situados no semi-plano esquerdo do plano complexo.

FIGURA 7.23 – Autovalores do sistema que descreve o comportamento do processo de lodos ativados, incluída a dinâmica do decantador secundário – resultados para o caso contínuo.

A matriz de ganho de realimentação do sistema de controle, por sua vez, definida a partir das equações (3.30) e (3.31), assume os seguintes valores:

$$K^T = \begin{bmatrix} 143092 & -09168 \\ 49608 & -03960 \\ 02843 & -00268 \\ 00225 & -00027 \\ 00205 & -00026 \\ 02541 & 00020 \\ -00554 & -00419 \\ -06413 & -00365 \\ -00008 & -00021 \\ -00047 & -00003 \\ -00052 & -00003 \\ -03584 & -02647 \\ -04123 & -00288 \\ 00788 & -00100 \\ 00001 & -00009 \\ -00012 & -00008 \\ -04644 & -02819 \\ -02241 & -00235 \\ 00778 & -00094 \\ 00006 & -00007 \\ -00006 & -00007 \\ -05095 & -02829 \\ -00762 & -00268 \\ 00796 & -00092 \\ 00013 & -00006 \\ 00001 & -00006 \\ -00697 & -02749 \\ 00624 & -00209 \\ 00874 & -00093 \\ 00029 & -00007 \\ 00018 & -00006 \end{bmatrix}$$

Definida a matriz de ganho de realimentação, o desempenho do sistema de controle foi avaliado a partir da imposição de diferentes padrões de variação à vazão afluente. Conforme a metodologia adotada, foram consideradas variações da vazão afluente segundo as funções degrau, pulso e senoidal para a avaliação da efetividade dos controladores propostos. O comportamento das variáveis de estados para o tanque de aeração e para a camada de fundo do decantador, considerando uma variação degrau da vazão afluente, está ilustrado nas figuras 7.24 e 7.25. O comportamento das variáveis de estado, sem a ação do controlador sobre o processo de lodos ativados, está ilustrado na FIGURA 7.24; já os ganhos produzidos com a incorporação do controlador podem ser avaliados a partir da FIGURA 7.25.

FIGURA 7.24 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluente – resultados para o caso contínuo.

FIGURA 7.25 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador em resposta a uma variação degrau da vazão afluente – resultados para o caso contínuo.

Com o aumento da vazão afluyente, a quantidade de sólidos no fundo do decantador e, por consequência, no lodo recirculado progressivamente é aumentada. Como aumentos na vazão afluyente são seguidos por elevações nas vazões de recirculação do lodo (elevações, embora menores, são também observadas na vazão de descarte do lodo), as novas concentrações de equilíbrio para a biomassa e para as diferentes parcelas de substrato no tanque de aeração são superiores aquelas que eram observadas para o sistema não perturbado (ver FIGURA 7.24). Convém relembrar que quando a dinâmica do decantador não foi considerada (simulações apresentadas ao longo da seção 7.2.1), as concentrações de X_b , X_p e X_i foram diminuídas após a variação da vazão afluyente segundo a função degrau (da FIGURA 7.5 pode-se observar que foram estabelecidos desvios negativos para X_b , X_p e X_i após a elevação da vazão afluyente).

Com a incorporação da dinâmica do decantador, os tempos necessários para o estabelecimento de novas condições de equilíbrio para o processo de lodos ativados, após as variações na vazão afluyente, foram substancialmente aumentados. Nas simulações apresentadas na seção 7.2.1, alterações ocorridas no tanque de aeração não afetavam as concentrações de sólidos no lodo recirculado; com a incorporação da dinâmica do decantador, entretanto, as concentrações das diferentes variáveis de estado do tanque de aeração e do decantador secundário interagem, exigindo intervalos de tempo substancialmente maiores para que se restabeleça o equilíbrio do processo.

Com a incorporação do controlador ao processo de lodos ativados (resultados apresentados na FIGURA 7.25), os desvios das variáveis de estado e o tempo necessário para que novas condições de equilíbrio sejam estabelecidas são reduzidos. A ação do controlador reduz substancialmente os desvios nas concentrações de X_b e X_i e, como consequência das reduções nas concentrações de X_b , reduções são também observadas nas concentrações de X_s e X_p . As reduções nas concentrações de X_s , entretanto, são menos significativas, função dos aspectos já mencionados anteriormente: a) as concentrações de X_s no afluyente são maiores que aquelas observadas nas condições iniciais de equilíbrio do tanque de aeração (para a

biomassa e demais parcelas do substrato ocorre o inverso) e *b*) a maior parcela da biomassa decaída (80%, conforme a TABELA 6.1) é convertida em substrato lentamente biodegradável.

O comportamento das variáveis de controle do processo de lodos ativados (vazões de recirculação e descarte do lodo) está ilustrado na FIGURA 7.26. Desta figura pode-se observar que elevações na vazão afluyente são seguidas por elevações nas vazões de recirculação e de descarte do lodo; nesta última, entretanto, as variações são menores.

FIGURA 7.26 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

Os resultados obtidos com a variação da vazão afluyente segundo a função pulso são qualitativamente similares àqueles obtidos quando da aplicação de uma variação segundo a função degrau. No caso do pulso, entretanto, como a vazão afluyente retorna as condições iniciais, as variáveis de estado progressivamente retornam aos valores que apresentavam antes da aplicação do pulso. Os desvios apresentados pelas variáveis de estado no tanque de aeração e no fundo do decantador, com e sem a ação do controlador, estão apresentados nas figuras 7.27 e 7.28. O comportamento das variáveis de controle, por sua vez, está ilustrado na FIGURA 7.29; desta última figura observa-se que as variáveis de controle também tendem para as condições originais de equilíbrio e que as variações apresentadas pelas vazões de descarte de lodo são menos acentuadas que aquelas apresentadas pela vazão de recirculação.

FIGURA 7.27 – fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

FIGURA 7.28 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

FIGURA 7.29 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

A comparação das figuras 7.5 e 7.24 permite observar que a ocorrência de uma variação na vazão afluyente na forma de um degrau, considerada a dinâmica do decantador, produziu desvios para as variáveis de estado no tanque de aeração substancialmente diferentes daquelas que foram observadas quando a dinâmica do decantador foi ignorada. No entanto, quando a vazão afluyente varia periodicamente, a incorporação da dinâmica do decantador não provocou mudanças sensíveis no padrão de comportamento das variáveis de estado que caracterizam o comportamento do tanque de aeração. Os resultados obtidos para o tanque de aeração e para a última camada do decantador, a partir da variação periódica da vazão afluyente, estão apresentados nas figuras 7.30 e 7.31. Na primeira figura estão ilustrados os resultados obtidos sem a ação do controlador sobre o processo de lodos ativados; na segunda, o comportamento das variáveis de estado após a incorporação do controlador.

FIGURA 7.30 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

FIGURA 7.31 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

Das figuras anteriores pode-se observar que as variações periódicas da vazão afluyente não provocam aumentos consideráveis nas concentrações de sólidos recirculados para o tanque de aeração; as oscilações observadas na camada de fundo do decantador são pouco expressivas quando comparadas com as concentrações de equilíbrio das diferentes variáveis de estado no lodo recirculado. A ação do controlador reduz estes desvios, tornando ainda menor a influência da dinâmica do decantador sobre as concentrações das variáveis de estado no tanque de aeração.

O comportamento das variáveis de controle do processo está apresentado na FIGURA 7.32. Percebe-se, desta figura, que o sistema reage às elevações na vazão afluyente com aumentos nas vazões de recirculação e descarte do lodo; da mesma forma, às reduções na vazão afluyente com reduções nos valores das variáveis de controle. Como nas demais situações simuladas, os desvios são mais expressivos na vazão de recirculação do lodo.

Assim como se fez na seção 7.2.1, onde foram apresentados os controladores propostos para o tanque de aeração, um sistema discreto é estabelecido a partir do sistema contínuo originalmente utilizado para descrever o comportamento conjunto do tanque de aeração e do decantador secundário. Considerando-se um período de amostragem de 1 hora, as matrizes de estado (matriz $\mathbf{G}$), de entrada (matriz $\mathbf{H}$) e de entrada de distúrbios (matriz $\mathbf{D}_w$) são assim definidas:

	Q3100	Q3648	0	0	0	-Q0303	0	0	0	0	0	0	Q0003	0	0	0	Q0002	Q0014	0	0	0	Q0037	Q0052	0	0	0	Q0486	Q0139	0	0	0
	-Q0022	-Q0008	0	0	0	-Q0001	0	Q0001	0	0	0	0	Q0003	0	0	0	0	Q0010	0	0	0	Q0023	0	0	0	-Q0001	Q0028	0	0	0	0
	Q0122	Q0049	Q3145	0	0	-Q0020	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q0002	0	0	0	Q0037	0	0	0	Q0004	Q0001	Q0487	0	0	0
	Q0016	Q0006	0	Q3146	0	-Q0054	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q0002	0	0	0	0	Q0037	0	0	0	0	Q0487	0
	0	0	0	0	Q3146	-Q0050	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q0002	0	0	0	0	Q0037	0	0	0	0	Q0487
	0	0	0	0	0	Q3592	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	1.7691	Q7303	0	0	0	Q3125	Q3939	0	0	0	0	0	Q0002	0	0	0	Q0001	Q0009	0	0	0	Q0031	Q0045	0	0	0	Q0588	Q0170	0	0	0
	-Q0043	Q1456	0	0	0	Q0012	0	Q3939	0	0	0	0	Q0002	0	0	0	Q0009	0	0	0	0	Q0031	0	0	0	-Q0001	Q0007	0	0	0	0
	Q0119	Q0055	1.7738	0	0	Q0184	0	0	Q3939	0	0	0	0	0	0	0	Q0001	0	0	0	0	Q0031	0	0	0	Q0003	Q0001	Q0589	Q0589	0	0
	Q0020	Q0007	0	1.7739	0	Q0558	0	0	0	Q3939	0	0	0	0	0	0	0	Q0001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q0589
	0	0	0	0	0	1.7739	Q0521	0	0	0	Q3939	0	0	0	0	0	0	0	0	Q0001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Q1508	Q0553	0	0	0	Q0268	Q0891	0	0	0	0	Q3615	0	0	0	0	0	0	0	0	Q0001	Q0002	0	0	0	Q0031	Q0009	0	0	0	0
	-Q0016	Q1159	0	0	0	Q0005	0	Q3760	0	0	0	0	Q3940	0	0	0	Q0002	0	0	0	Q0009	0	0	0	0	0	Q0031	0	0	0	0
	Q0008	Q0003	Q1510	0	0	Q0016	0	0	Q3991	0	0	0	Q3615	0	0	0	0	0	0	0	0	Q0001	0	0	0	0	0	Q0031	0	0	0
	Q0001	0	0	Q1510	0	Q0048	0	0	0	Q3991	0	0	0	Q3615	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q0001	0	0	0	0	Q0031
G=	0	0	0	0	0	Q1510	Q0045	0	0	0	Q3991	0	0	0	Q3615	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q0001	0	0	0	0	Q0031
	Q0080	Q0027	0	0	0	Q0014	Q00750	1.709	0	0	0	Q1284	0	0	0	Q3615	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q0001	0	0	0	0	0
	-Q0004	Q0501	0	0	0	Q0001	0	0	Q0075	0	0	Q3670	0	0	0	Q3940	0	0	0	0	Q0002	0	0	0	0	Q0009	0	0	0	0	0
	0	0	0	Q0080	0	Q0001	0	0	0	Q0075	0	0	Q1284	0	0	0	Q3615	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q0001	0	0	0	0
	0	0	0	0	Q0080	Q0003	0	0	0	Q0075	0	0	Q1284	0	0	0	Q3615	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q0001	Q0001	0	0
	0	0	0	0	0	Q0080	Q0002	0	0	0	0	0	Q1284	0	0	0	Q3615	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Q0003	Q0001	0	0	0	Q0001	Q0004	0	0	0	0	Q0096	0	0	0	Q1284	0	0	0	Q3615	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-Q0001	Q0141	0	0	0	0	0	Q0531	0	0	0	Q1709	0	0	0	Q3670	0	0	0	Q3940	0	0	0	0	0	Q0002	0	0	0	0	0
	0	0	0	Q0003	0	0	0	0	Q0004	0	0	0	Q0096	0	0	0	Q1284	0	0	0	Q3615	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	Q0003	0	0	0	0	Q0004	0	0	Q0096	0	0	0	Q1284	0	0	0	Q3615	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	Q0030	0	0	0	0	Q0004	0	0	Q0096	0	0	0	Q1284	0	0	0	Q3615	0	0	0	Q3615	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q0005	0	0	0	Q0096	0	0	Q1284	0	0	0	Q3615	0	0	0	Q3615	0	0	0	0	0
	0	Q0030	0	0	0	0	0	Q0124	0	0	0	Q0531	0	0	0	Q1709	0	0	0	Q3670	0	0	0	0	0	Q3940	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q0005	0	0	0	Q0096	0	0	0	Q1284	0	0	0	0	0	Q3615	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q0005	0	0	0	Q0096	0	0	0	Q1284	0	0	0	0	0	Q3615	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Q0005	0	0	Q0096	0	0	0	Q1284	0	0	0	0	0	Q3615	0	0	0	0	0

[illegible]

Os autovalores do sistema assim definido, todos eles localizados no interior de um círculo unitário do plano complexo, garantem a estabilidade do sistema. Os autovalores do sistema discreto estão plotados na FIGURA 7.33.

FIGURA 7.33 – Autovalores do sistema que descreve o comportamento do processo de lodos ativados no caso discreto, incluída a dinâmica do decantador secundário – resultados para o caso discreto

A partir das expressões (3.43) e (3.44), foram estimados os seguintes valores para a matriz de ganho de realimentação do sistema de controle:

$$K^T = \begin{bmatrix} 6.5599 & -0.7796 \\ 2.8147 & -0.3563 \\ 0.1328 & -0.0248 \\ 0.0072 & -0.0027 \\ 0.0059 & -0.0026 \\ -0.2741 & 0.0023 \\ -0.0353 & -0.0419 \\ -0.2833 & -0.0368 \\ 0.0021 & -0.0019 \\ -0.0015 & -0.0003 \\ -0.0017 & -0.0003 \\ -0.2282 & -0.2649 \\ -0.1722 & -0.0288 \\ 0.0403 & -0.0093 \\ -0.0001 & -0.0009 \\ -0.0007 & -0.0008 \\ -0.2827 & -0.2815 \\ -0.0797 & -0.0235 \\ 0.0400 & -0.0087 \\ 0.0003 & -0.0007 \\ -0.0004 & -0.0006 \\ -0.2771 & -0.2821 \\ 0.0024 & -0.0210 \\ 0.0412 & -0.0085 \\ 0.0007 & -0.0006 \\ 0.0001 & -0.0006 \\ 0.1498 & -0.2746 \\ 0.0900 & -0.0210 \\ 0.0457 & -0.0086 \\ 0.0016 & -0.0007 \\ 0.0010 & -0.0006 \end{bmatrix}.$$

Definidos os ganhos de realimentação, assim como se procedeu para o caso contínuo, o desempenho do controlador foi avaliado a partir da aplicação de entradas de teste típicas à vazão afluyente. Os desvios apresentados pelas variáveis de estado, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente, estão apresentados nas figuras 7.34 e 7.35. A FIGURA 7.34 apresenta os desvios no tanque de aeração e no fundo do decantador quando o controlador não atua sobre o processo de lodos ativados; a FIGURA 7.35, por sua vez, apresenta o comportamento das variáveis de estado após a introdução do controlador. A confrontação dos desvios apresentados pelas duas últimas figuras com aqueles ilustrados nas figuras 7.24 e 7.25 permite observar que os resultados obtidos a partir dos sistemas contínuos e discretos são muito próximos.

FIGURA 7.34 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – respostas para o caso discreto.

FIGURA 7.35 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – respostas para o caso discreto.

Quando a vazão afluyente varia segundo a função pulso, o comportamento das variáveis de estado é similar nos casos contínuo e discreto. A diferença na magnitude dos desvios apresentados nos casos contínuo e discreto, assim como observado ao longo da seção 7.2.1, é consequência dos diferentes valores assumidos para a duração do pulso (60 segundos) e para o intervalo de discretização empregado para a definição do sistema discreto (1 hora). Os desvios apresentados pelas variáveis de estado após a variação da vazão afluyente segundo a função pulso, sem a ação do controlador, estão apresentados na FIGURA 7.36; os desvios observados com a incorporação do controlador estão ilustrados na FIGURA 7.37.

FIGURA 7.36 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – respostas para o caso discreto.

FIGURA 7.37 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – respostas para o caso discreto.

Os resultados obtidos com a ocorrência de uma variação periódica na vazão afluyente estão reunidos nas figuras 7.38 e 7.39. Estes resultados e, por consequência, as análises que suscitam, são similares aqueles obtidos para o sistema contínuo (ver figuras 7.30 e 7.31).

FIGURA 7.38– Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – respostas para o caso discreto.

FIGURA 7.39– Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – respostas para o caso discreto.

As variações apresentadas pelas variáveis de controle do processo de lodos ativados no caso discreto, considerados os diferentes padrões de variação apresentados pela vazão afluyente, estão ilustrados na FIGURA 7.40. Em todos os casos, as oscilações na vazão de recirculação são maiores que aquelas apresentadas pela vazão de descarte do lodo.

FIGURA 7.40 – Desvios apresentados pelas variáveis de controle, em resposta aos diferentes padrões de variação da vazão afluyente.

7.3 – Filtros biológicos

O modelo dinâmico utilizado para descrever o comportamento dos filtros biológicos, conforme discutido ao longo da seção 6.2.2, adota a idealização de que o filtro pode ser dividido em várias camadas (reatores) completamente misturadas e dispostos em série. Para descrever o comportamento de cada camada e, por consequência, de todo o filtro, duas variáveis de estado são consideradas: *a*) a concentração de substrato efluente de cada camada (cada camada é tratada como um reator completamente misturado e, portanto, a concentração de substrato efluente é idêntica a concentração prevalente na camada) e *b*) a espessura do biofilme que se desenvolve sobre o meio suporte.

A vazão de recirculação do efluente tratado é considerada a variável de controle do sistema, supondo-se que a recirculação ocorre a partir do efluente do próprio filtro. Assim como se fez para o processo de lodos ativados, a vazão de afluente bruto é considerada o distúrbio externo agindo sobre o sistema.

- **Sistema contínuo no tempo**

Previamente ao desenvolvimento dos sistemas de controle, avalia-se a influência do número de camadas assumidas para o filtro biológico sobre as respostas apresentadas pelo próprio filtro. Considerando-se os parâmetros cinéticos, as características do material orgânico afluente, as vazões afluente e efluente e as características físicas do filtro listados na seção 6.6.2, o sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares que descreve o comportamento das concentrações de substrato e das espessuras de biofilme (ver sistema de equações (6.11)) é numericamente resolvido. Em diferentes resoluções do sistema de equações, consideram-se 1, 2, 5, 10, 20 e 40 camadas para o filtro biológico. Os valores de equilíbrio para cada variável de estado na camada de fundo do filtro, adimensionalizados a partir dos valores que seriam obtidos no filtro considerando-o um reator completamente misturado, estão apresentados nas figuras 7.41 e 7.42.

FIGURA 7.41 – Concentrações adimensionalizadas de substrato na camada de fundo do filtro, função do número de camadas adotadas nas diferentes simulações.

FIGURA 7.42 – Espessuras adimensionalizadas de biofilme no fundo do filtro, função do número de camadas adotadas nas diferentes simulações.

Para o desenvolvimento dos sistemas de controle o filtro é dividido em 20 camadas; das duas últimas figuras pode-se observar que, a partir de 20 camadas, há pouca redução nos valores de equilíbrio das variáveis de estado com o aumento do número de camadas. Para a obtenção de observadores de estado, objetivando maior facilidade na avaliação das concentrações de substrato com a garantia de completa observabilidade de estados, o número de camadas no filtro é reduzido pela metade. Esta discussão será retomada em seção posterior, quando da proposição de sistemas de controle com a inclusão de observadores de estado.

A equação de estado que descreve o comportamento do filtro biológico para o caso contínuo (equação (3.47)), obtida a partir da representação matricial do modelo apresentado no sistema de equações (6.11) e da hipótese de que a vazão afluyente é tratada como o distúrbio externo atuante sobre o sistema, é estabelecida a partir das seguintes matrizes de estado (matriz **A**), de entrada (matriz **B**) e de transmissão de distúrbio (matriz **D_w**):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -2043763 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 178.0670 & 0 & -2045500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 178.0670 & 0 & -2054613 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 178.0670 & 0 & -2059141 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 178.0670 & 0 & -2063131 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 178.0670 & 0 & -2066631 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 178.0670 & 0 & -2069688 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 178.0670 & 0 & -2072350 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 178.0670 & 0 & -2074661 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 178.0670 & 0 & -0.2500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 178.0670 & 0 & -2076660 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2500 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -2.3054 \\ 0 \\ 0.2905 \\ 0 \\ 0.2626 \\ 0 \\ 0.2361 \\ 0 \\ 0.2112 \\ 0 \\ 0.1880 \\ 0 \\ 0.1666 \\ 0 \\ 0.1470 \\ 0 \\ 0.1292 \\ 0 \\ 0.1131 \\ 0 \\ 0.0987 \\ 0 \\ 0.0859 \\ 0 \\ 0.0745 \\ 0 \\ 0.0645 \\ 0 \\ 0.0557 \\ 0 \\ 0.0481 \\ 0 \\ 0.0414 \\ 0 \\ 0.0356 \\ 0 \\ 0.0306 \\ 0 \\ 0.0262 \\ 0 \end{bmatrix} \quad D_u = \begin{bmatrix} 2.9445 \\ 0 \\ 0.2905 \\ 0 \\ 0.2626 \\ 0 \\ 0.2361 \\ 0 \\ 0.2112 \\ 0 \\ 0.1880 \\ 0 \\ 0.1666 \\ 0 \\ 0.1470 \\ 0 \\ 0.1292 \\ 0 \\ 0.1131 \\ 0 \\ 0.0987 \\ 0 \\ 0.0859 \\ 0 \\ 0.0745 \\ 0 \\ 0.0645 \\ 0 \\ 0.0557 \\ 0 \\ 0.0481 \\ 0 \\ 0.0414 \\ 0 \\ 0.0356 \\ 0 \\ 0.0306 \\ 0 \\ 0.0262 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema definido a partir da três últimas matrizes mostrou-se estável. Como pode ser observado da FIGURA 7.41, todos os autovalores da matriz de estado estão localizadas no semi-plano esquerdo do plano complexo.

FIGURA 7.43 – Autovalores do sistema que descreve o comportamento dos filtros biológicos – resultados para o caso contínuo.

Definidas as matrizes de ponderação para as variáveis de estado e de controle segundo o procedimento estabelecido na seção 6.4, a matriz de ganho de retroalimentação do sistema de controle, definida, por sua vez, a partir das equações (3.30) e (3.31), assume os seguintes valores:

$$K^T = 10^6 \begin{bmatrix} -0.0000 \\ -0.0428 \\ -0.0000 \\ -0.0424 \\ -0.0000 \\ -0.0399 \\ -0.0000 \\ -0.0279 \\ -0.0000 \\ -0.0154 \\ 0.0000 \\ 0.0045 \\ 0.0000 \\ 0.0304 \\ 0.0000 \\ 0.0795 \\ 0.0000 \\ 0.1047 \\ 0.0000 \\ 0.1748 \\ 0.0001 \\ 0.2094 \\ 0.0001 \\ 0.3238 \\ 0.0001 \\ 0.4029 \\ 0.0001 \\ 0.6594 \\ 0.0001 \\ 1.7669 \\ 0.0002 \\ 0.9608 \\ 0.0002 \\ 1.2224 \\ 0.0003 \\ 1.6654 \\ 0.0004 \\ 2.1737 \\ 0.0004 \\ 1.4065 \end{bmatrix}$$

A avaliação do comportamento das variáveis de estado e de controle e, por consequência, dos ganhos obtidos com a ação do controlador sobre o filtro biológico, foi realizada a partir das respostas apresentadas pelo filtro aos diferentes padrões de perturbação da vazão afluyente. Assim como se fez para o processo de lodos ativados, a vazão afluyente variou segundo as funções degrau, pulso e senoidal.

As alterações produzidas nas concentrações de substrato e na espessura de biofilme, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente e considerando-se que o controlador não atua sobre o filtro biológico, estão ilustradas na FIGURA 7.44. Desta figura percebe-se que as concentrações de substrato são aumentadas em todas as camadas que constituem o filtro; os maiores desvios, entretanto, são observados na porção superior da unidade. Como consequência da maior disponibilidade de substrato, novas (e maiores) espessuras de biofilme são estabelecidas sobre o meio suporte. É relevante observar ainda que o tempo necessário para o estabelecimento de novas condições de equilíbrio para as espessuras de biofilme é substancialmente maior que o tempo necessário para a obtenção das novas concentrações de equilíbrio do substrato.

FIGURA 7.44 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

Com a incorporação do controlador, a vazão de recirculação (a variável de controle do processo) é substancialmente reduzida, diminuindo os efeitos da diluição no topo do filtro. Como consequência, as concentrações de substrato e as espessuras de

biofilme são aumentadas na porção superior do filtro; as elevações nas concentrações de substrato, por produzirem maiores fluxos de substrato, conduzem a menores disponibilidades de substrato (e, por consequência, menores aumentos na espessura de biofilme) nas porções intermediária e inferior do filtro, mais especificamente entre a sétima e a vigésima camada. Como pode ser observado na FIGURA 7.45, a ação do controlador permite que a concentração de substrato e a espessura do biofilme permaneçam praticamente inalterados no fundo do filtro após a aplicação do degrau a vazão afluente. A ação do controlador sobre a vazão de recirculação, por sua vez, é ilustrada na FIGURA 7.46.

FIGURA 7.45 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluente – resultados para o caso contínuo.

FIGURA 7.46 – Desvios da vazão de recirculação do filtro biológico, em resposta a uma variação degrau da vazão afluente – resultados para o caso contínuo.

Com o objetivo de facilitar a interpretação das simulações realizadas, os gráficos apresentados até o final desta seção ilustrarão apenas o comportamento das variáveis de estado no topo e no fundo do filtro. Os desvios apresentados nestas camadas usualmente estabelecem os limites para as flutuações das variáveis de estado nas camadas intermediárias do filtro.

O comportamento das variáveis de estado quando a vazão afluyente é submetida a um pulso está ilustrado nas figuras 7.47 e 7.48. Na FIGURA 7.47 o controlador não atua sobre o processo; já a FIGURA 7.48 ilustra os efeitos produzidos com a incorporação do controlador.

FIGURA 7.47 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

FIGURA 7.48 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

A análise que se segue é qualitativamente similar a que se desenvolveu quando da ocorrência de uma variação degrau na vazão afluyente e pode ser pontuada da seguinte maneira: *a)* para o sistema não controlado, os desvios apresentados pelas variáveis de estado no topo do filtro são superiores aqueles observados no fundo do filtro; *b)* com a ação do controlador, os desvios são ampliados no topo do filtro, sendo praticamente nulos na camada de fundo.

Como na aplicação do pulso a elevação da vazão afluyente é temporária (a duração do pulso é de 60 segundos, conforme estabelecido na seção 6.7), as variáveis de estado invariavelmente tendem às condições originais de equilíbrio, considerada ou não a ação do controlador; no entanto, a incorporação do controlador reduz significativamente o tempo necessário para que, no fundo do filtro, as concentrações de substrato e espessura de biofilme recobrem seus valores originais de equilíbrio.

Assim como ocorreu com a aplicação do degrau à vazão afluyente, após um pulso, a ação de controle reduz imediatamente a vazão de recirculação do filtro. Entretanto, cessado o pulso, a vazão de recirculação do filtro progressivamente retoma sua condição de equilíbrio. Os desvios observados na vazão de recirculação estão ilustrados na FIGURA 7.49.

FIGURA 7.49 – Desvios da vazão de recirculação do filtro biológico, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

Em resposta a uma variação periódica na vazão afluyente, as variáveis de estado e as de controle passam também a oscilar entorno de seus valores de equilíbrio. As oscilações na concentração de substrato e na espessura de biofilme, sem a ação do controlador sobre o filtro biológico, estão apresentadas na FIGURA 7.50. Como era de se esperar, as oscilações, para ambas as variáveis de estado, são maiores no topo do que no fundo do filtro biológico.

FIGURA 7.50 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

Assim como foi observado com a imposição de variações do tipo pulso e degrau à vazão afluyente, também para a variação periódica a incorporação do controlador aumenta os desvios no topo do filtro. Na camada de fundo, entretanto, os desvios para as concentrações de substrato e espessuras de biofilme são praticamente nulos. Os efeitos produzidos com a incorporação do controlador, em resposta à variação periódica da vazão afluyente, estão apresentados pela FIGURA 7.51.

O comportamento da vazão de recirculação, por sua vez, está ilustrado na FIGURA 7.52. Desta figura pode-se observar que o padrão estabelecido pelo controlador para a vazão de recirculação aproxima-se de uma imagem em espelho da vazão afluyente ao filtro. Elevações na vazão afluyente produzem reduções na vazão de recirculação; como consequência, a diluição na entrada do filtro é diminuída, o fluxo de substrato na porção superior do filtro é aumentado e os desvios nas concentrações de substrato e espessura de biofilme nas porções intermediária e inferior do filtro substancialmente

reduzidos. Já nos períodos em que a vazão de recirculação é aumentada, os desvios nas concentrações de substrato e espessura de biofilme são reduzidos, agora, como consequência do aumento da diluição no afluente ao sistema.

FIGURA 7.51 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluente – resultados para o caso contínuo.

FIGURA 7.52 – Desvios da vazão de recirculação do filtro biológico, em resposta a uma variação periódica da vazão afluente – resultados para o caso contínuo.

• Sistema discreto no tempo

Assim como se fez para o processo de lodos ativados, um modelo discreto é estabelecido para o controle dos filtros biológicos. Considerando-se um intervalo de discretização de 1 hora, as matrizes de estado (matriz $\mathbf{G}$), de entrada (matriz $\mathbf{H}$) e de transmissão de distúrbios (matriz $\mathbf{D}_w$) assumem a seguinte forma:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$G_{22} = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0001 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0004 & 0 & 0.0009 & 0 & 0.0019 & 0 & 0.0037 & 0 & 0.0066 & 0 & 0.0109 & 0 \\ 0.0000 & 0.9896 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 \\ 0.0015 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0001 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0004 & 0 & 0.0009 & 0 & 0.0019 & 0 & 0.0037 & 0 & 0.0067 & 0 \\ 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0.9896 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 \\ 0.0054 & 0 & 0.0014 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0001 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0004 & 0 & 0.0010 & 0 & 0.0020 & 0 & 0.0037 & 0 \\ 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0.9896 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 \\ 0.0132 & 0 & 0.0053 & 0 & 0.0014 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0001 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0004 & 0 & 0.0010 & 0 & 0.0020 & 0 \\ 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0.9896 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 \\ 0.0242 & 0 & 0.0129 & 0 & 0.0052 & 0 & 0.0014 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0001 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0004 & 0 & 0.0010 & 0 \\ 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0.9896 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 \\ 0.0356 & 0 & 0.0238 & 0 & 0.0127 & 0 & 0.0051 & 0 & 0.0014 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0001 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0004 & 0 \\ 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0.9896 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 \\ 0.0437 & 0 & 0.0350 & 0 & 0.0234 & 0 & 0.0125 & 0 & 0.0050 & 0 & 0.0013 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0001 & 0 & 0.0002 & 0 \\ 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0.9896 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 \\ 0.0460 & 0 & 0.0430 & 0 & 0.0345 & 0 & 0.0230 & 0 & 0.0123 & 0 & 0.0050 & 0 & 0.0013 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0.9896 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 \\ 0.0424 & 0 & 0.0453 & 0 & 0.0423 & 0 & 0.0340 & 0 & 0.0227 & 0 & 0.0122 & 0 & 0.0049 & 0 & 0.0013 & 0 & 0.0002 & 0 & 0.0000 & 0 \\ 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0.9896 & 0.0000 & 0 \\ 0.0347 & 0 & 0.0417 & 0 & 0.0446 & 0 & 0.0418 & 0 & 0.0336 & 0 & 0.0225 & 0 & 0.0121 & 0 & 0.0049 & 0 & 0.0013 & 0 & 0.0002 & 0 \\ 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0 & 0.0000 & 0.9896 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -0.0114 \\ 0 \\ -0.0088 \\ 0 \\ -0.0066 \\ 0 \\ -0.0046 \\ 0 \\ -0.0027 \\ 0 \\ -0.0010 \\ 0 \\ 0.0005 \\ 0 \\ 0.0016 \\ 0 \\ 0.0024 \\ 0 \\ 0.0029 \\ 0 \\ 0.0030 \\ 0 \\ 0.0030 \\ 0 \\ 0.0028 \\ 0 \\ 0.0025 \\ 0 \\ 0.0022 \\ 0 \\ 0.0020 \\ 0 \\ 0.0017 \\ 0 \\ 0.0015 \\ 0 \\ 0.0013 \\ 0 \\ 0.0011 \\ 0 \end{bmatrix} \quad D_n = \begin{bmatrix} 0.0155 \\ 0 \\ 0.0154 \\ 0 \\ 0.0151 \\ 0 \\ 0.0144 \\ 0 \\ 0.0133 \\ 0 \\ 0.0119 \\ 0 \\ 0.0104 \\ 0 \\ 0.0087 \\ 0 \\ 0.0072 \\ 0 \\ 0.0059 \\ 0 \\ 0.0048 \\ 0 \\ 0.0040 \\ 0 \\ 0.0033 \\ 0 \\ 0.0028 \\ 0 \\ 0.0024 \\ 0 \\ 0.0020 \\ 0 \\ 0.0017 \\ 0 \\ 0.0015 \\ 0 \\ 0.0013 \\ 0 \\ 0.0011 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema discreto definido a partir das três últimas matrizes apresenta-se estável; todos os autovalores da matriz de estado estão localizados, no plano complexo, no interior de um círculo unitário (FIGURA 7.53).

FIGURA 7.53 – Autovalores do sistema que descreve o comportamento dos filtros biológicos – resultados para o caso discreto.

A matriz de ganho de retroalimentação do sistema de controle, definida, por sua vez, a partir do procedimento apresentado na seção 3.10, assume os seguintes valores:

$$K^T = 10^4 \begin{bmatrix} 0.0000132 \\ -0.1179899 \\ 0.0000252 \\ -0.1095530 \\ 0.0000391 \\ -0.0955305 \\ 0.0000549 \\ -0.0740869 \\ 0.0000725 \\ -0.0429466 \\ 0.0000918 \\ 0.0000982 \\ 0.0001125 \\ 0.0003159 \\ 0.0001342 \\ 0.1401702 \\ 0.0001561 \\ 0.2455128 \\ 0.0001772 \\ 0.3827768 \\ 0.0001962 \\ 0.5598648 \\ 0.0002114 \\ 0.7864196 \\ 0.0002209 \\ 1.0742583 \\ 0.0002229 \\ 1.4377419 \\ 0.0002161 \\ 5.1459401 \\ 0.0001995 \\ 2.4656000 \\ 0.0001729 \\ 3.1772089 \\ 0.0001369 \\ 4.0605556 \\ 0.0000930 \\ 5.1538791 \\ 0.0000458 \\ 4.2814442 \end{bmatrix}$$

Independentemente do padrão de variação apresentado pela vazão afluyente ou da ação do controlador, os resultados obtidos a partir dos sistemas discretos são muito próximos dos resultados obtidos com a utilização dos sistemas contínuos. Desta forma, a análise que se desenvolveu na primeira parte desta seção pode ser replicada quando da análise dos resultados obtidos nas simulações realizadas com os sistemas discretos no tempo.

As alterações nas variáveis de estado devido a uma perturbação em degrau na vazão afluyente, no topo e no fundo do filtro, estão apresentadas nas figuras 7.54 e 7.55. Na FIGURA 7.54 estão ilustrados os desvios das concentrações de substrato e de espessuras de biofilme sem a ação do controlador. Os resultados produzidos com a ação do controlador podem ser avaliados a partir da FIGURA 7.55.

FIGURA 7.54 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso discreto.

FIGURA 7.55 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso discreto.

Os desvios nas concentrações de substrato e espessuras de biofilme, nas simulações em que a vazão afluyente é submetida a um pulso, estão ilustrados nas figuras 7.56 e 7.57. Os resultados produzidos com a incorporação do controlador podem ser avaliados a partir da análise da última figura. Da mesma forma, os desvios apresentados pelas variáveis de estado, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente, estão ilustrados nas figuras 7.58 e 7.59.

FIGURA 7.56 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso discreto.

FIGURA 7.57 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso discreto.

FIGURA 7.58 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso discreto.

FIGURA 7.59 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso discreto.

As variações apresentadas na variável de controle (a vazão de recirculação do filtro), como consequência dos diferentes padrões de variação da vazão afluyente, estão apresentadas na FIGURA 7.60. No caso da variação da vazão afluyente segundo a função pulso, os desvios necessários à vazão de recirculação para o controle ótimo dos filtros biológicos a partir do sistema discreto são superiores aos desvios necessários no caso contínuo; esta diferença é consequência dos diferentes valores adotados para a duração do pulso e para o intervalo de discretização.

FIGURA 7.60 – Desvios apresentados pela vazão de recirculação do filtro, em resposta aos diferentes padrões de variação da vazão afluente – resultados para o caso discreto.

7.4 – Processos combinados

Os sistemas combinados discutidos neste trabalho são constituídos pela combinação, em série, de um filtro biológico grosseiro, um tanque de aeração e um decantador secundário. A recirculação do filtro ocorre a partir do efluente do próprio filtro e o descarte do processo de lodos ativados a partir do tanque de aeração.

Como extensão natural da análise que se desenvolveu para os filtros biológicos e para os processos de lodos ativados, a vazão de recirculação do filtro e as vazões de recirculação e descarte do lodo constituem as variáveis de controle dos processos combinados; a vazão afluyente, por sua vez, o distúrbio externo atuante sobre o sistema.

As variáveis de estado dos processos combinados também são definidas a partir do agrupamento das variáveis que, isoladamente, caracterizam o comportamento dos filtros biológicos e dos processos de lodos ativados. Para os processos combinados, entretanto, o afluyente ao filtro biológico não mais apresenta a fração particulada inerte do substrato; conforme observado anteriormente (ver seção 6.2.3), quando consideráveis concentrações de material particulado inerte chegam ao filtro biológico, o processo de colmatação do meio suporte pode ser acelerado e todo o funcionamento do sistema de tratamento pode ser comprometido. Desta forma, como os filtros aparecem à montante do tanque de aeração no arranjo adotado para os processos combinados, a fração de substrato particulado inerte (X_i) não é mais considerada uma variável de estado do processo de lodos ativados.

Para caracterizar o comportamento do tanque de aeração e do decantador secundário, são consideradas as seguintes variáveis de estado: concentração de biomassa heterotrófica ativa (X_b), concentração de substrato rapidamente biodegradável (S_s), concentração de substrato lentamente biodegradável (X_s), concentração de material particulado produzido a partir do decaimento da biomassa (X_p) e vazão efluente. O comportamento do filtro biológico, por sua vez, é caracterizado a partir das

concentrações de substrato e das espessuras de biofilme nas diferentes camadas que constituem o filtro.

Para o estabelecimento do modelo dinâmico que descreve o comportamento do tanque de aeração nos processos combinados (equações de (6.12) a (6.15)), diferentes suposições foram feitas sobre a composição do substrato e biomassa efluentes do filtro biológico. Estas suposições podem ser assim sumarizadas:

- Apenas 10% da biomassa desprendida do filtro biológico permanece ativa no tanque de aeração, metabolizando os compostos orgânicos disponíveis. Do restante da biomassa afluenta ao tanque de aeração, 20% é tratado como resíduo endógeno e 80% como substrato lentamente biodegradável;
- Todo o substrato afluenta ao filtro é considerado biodegradável; 80% é considerado substrato lentamente biodegradável e o restante substrato rapidamente biodegradável.

Previamente ao desenvolvimento de sistemas de controle, a influência destas suposições sobre as variáveis de estado que caracterizam o tanque de aeração e o decantador secundário foi avaliada. O sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares que descreve o comportamento dos processos combinados é numericamente resolvido para diferentes condições de contorno, determinando-se os valores de equilíbrio das variáveis de estado do tanque de aeração e decantador secundário.

Num primeiro grupo de simulações, são fixadas as características do substrato e variada a fração de biomassa ativa afluentes ao tanque de aeração; adota-se que 80% do substrato afluenta é lentamente biodegradável e que a fração de biomassa ativa perdida pelas duas últimas camadas do filtro (fração de biomassa afluenta ao tanque de aeração) varia entre 0 e 100%. Os valores de equilíbrio obtidos para X_b , X_s e S_s estão apresentados na FIGURA 7.61. Desta figura percebe-se, tanto para o tanque de aeração, quanto para a camada de fundo do decantador secundário, uma tendência de crescimento aproximadamente linear dos valores de X_b com o crescimento da fração de biomassa ativa afluenta ao tanque de aeração. Já os valores de X_s tendem a

decrecer com os aumentos da fração de biomassa ativa; deve-se lembrar que a maior parcela da biomassa afluenta considerada inativa é tratada como substrato lentamente biodegradável e que esta parcela é naturalmente reduzida com os aumentos da fração ativa da biomassa. As concentrações de equilíbrio de S_s , por sua vez, apresentam-se sempre muito baixas, independentemente dos valores assumidos para a fração de biomassa ativa.

FIGURA 7.61 – Concentrações de equilíbrio para as diferentes variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e decantador secundário (direita), função da fração de biomassa ativa afluenta ao tanque de aeração.

Num segundo grupo de simulações, a fração de biomassa ativa permanece constante (10%), sendo variada a fração de substrato rapidamente biodegradável afluenta ao tanque de aeração (a fração de S_s variou entre 0 e 100%). Os resultados deste grupo de simulações, ilustrados na FIGURA 7.62, indicam que aumentos na fração de S_s produzem elevações nas concentrações de equilíbrio de X_b no tanque de aeração e no decantador secundário; como era de se esperar, as concentrações de equilíbrio da fração lentamente biodegradável são reduzidas (aumentos na fração de S_s implicam necessariamente em reduções na fração de X_s). As concentrações de equilíbrio de S_s , por sua vez, novamente apresentam-se muito baixas, independentemente cenário simulado.

FIGURA 7.62 – Concentrações de equilíbrio para as diferentes variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e decandador secundário (direita), função da fração de substrato rapidamente biodegradável afluente ao tanque de aeração.

Como o procedimento de linearização dos modelos dinâmicos e, por consequência, a aplicação da Teoria de Controle Ótimo nos moldes apresentados no Capítulo 3, depende das condições de equilíbrio do sistema para o qual se propõe o desenvolvimento de um controlador, das duas últimas figuras percebe-se que o estabelecimento e a implementação de sistemas de controle aplicáveis aos processos combinados exigirá esforços no sentido de se determinar as características do efluente do filtro biológico.

Assim como ocorreu para o processo de lodos ativados (seção 7.2) e para os filtros biológicos (seção 7.3), os resultados obtidos a partir dos modelos contínuos e discretos no tempo são muito próximos entre si também para os processos combinados. Desta forma, para simplificar a análise que se segue, serão apresentados apenas os resultados referentes ao caso contínuo.

• Sistema contínuo no tempo

Com a linearização do modelo dinâmico que descreve o comportamento dos processos combinados, as matrizes de estado (matriz **A**), de entrada (matriz **B**) e de transmissão de distúrbio (matriz **D_w**) assumem os seguintes valores:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix},$$

[illegible]

[illegible]

Os autovalores da matriz de estado indicam que o sistema empregado para descrever os processos combinados é estável. Como pode ser observado a partir da FIGURA 7.63, todos os autovalores estão situados no semi-plano esquerdo do plano complexo.

FIGURA 7.63 – Autovalores do sistema que descreve o comportamento dos processos combinados – resultados para o caso contínuo.

A matriz de ganho do controlador, definida a partir do procedimento estabelecido ao longo da seção 3.8, é estabelecida a partir dos seguintes valores:

$$K^T = 10^4 \begin{bmatrix} -0.0034708 & -0.0003658 & 0.0000001 \\ -0.9283423 & 0.1965900 & -0.0034254 \\ -0.0026037 & -0.0004914 & 0.0000001 \\ -0.7859045 & 0.0642676 & -0.0007034 \\ 0.0000239 & -0.0006169 & 0.0000001 \\ -0.5353079 & -0.0863635 & 0.0023898 \\ 0.0052070 & -0.0007203 & 0.0000002 \\ -0.6737630 & 0.1927752 & -0.0035009 \\ 0.0134368 & -0.0007779 & 0.0000002 \\ -0.4176536 & 0.3055438 & -0.0059131 \\ 0.0246542 & -0.0007783 & 0.0000002 \\ 0.1211294 & -0.3053167 & 0.0062059 \\ 0.0271795 & -0.0007509 & 0.0000002 \\ 0.0810506 & 0.1159152 & -0.00269045 \\ 0.0261632 & -0.0007113 & 0.0000002 \\ 0.3592506 & 0.2449874 & -0.0055311 \\ 0.0212707 & -0.0006468 & 0.0000002 \\ 1.5289480 & -0.7713406 & 0.0153238 \\ 0.0113279 & -0.0004806 & 0.0000001 \\ -1.3696963 & 6.5257495 & -0.0910692 \\ 0.0000395 & 0.0001776 & -0.0000001 \\ -0.0437497 & 0.0018412 & -0.0000007 \\ -0.0000114 & 0.0000421 & -0.0000000 \\ 0.0000201 & 0.0005387 & -0.0000003 \\ -0.0000183 & -0.0000136 & 0.0000000 \\ -0.0000009 & -0.0000007 & -0.0000000 \\ -0.0003471 & -0.0003670 & -0.0000000 \\ -0.0000038 & -0.0000010 & 0.0000000 \\ 0.0000063 & -0.0000025 & -0.0000000 \\ -0.0000061 & -0.0000043 & -0.0000003 \\ -0.0002726 & -0.0002503 & -0.0000001 \\ -0.0000192 & 0.0000129 & 0.0000001 \\ 0.0000476 & -0.0000150 & -0.0000006 \\ -0.0000027 & -0.0000044 & -0.0000003 \\ -0.0002605 & -0.0002025 & -0.0000000 \\ -0.0000175 & 0.0000125 & 0.0000001 \\ 0.0000552 & -0.0000176 & -0.0000006 \\ 0.0000027 & -0.0000032 & -0.0000003 \\ -0.0003042 & -0.0003725 & 0.0000001 \\ -0.0000166 & 0.0000128 & 0.0000001 \\ 0.0000636 & -0.0000203 & -0.0000006 \\ 0.0000147 & 0.0000250 & -0.0000003 \\ -0.0007605 & -0.0011473 & 0.0000003 \\ -0.0000199 & 0.0000209 & 0.0000001 \\ 0.0000656 & 0.0000446 & -0.0000006 \end{bmatrix}$$

Para a avaliação do desempenho do controlador, as mesmas variações típicas de teste (degrau, pulso e senoidal) apresentadas pelas vazões afluentes aos filtros biológicos e aos processos de lodos ativados também figuraram na vazão afluente aos processos combinados.

Com uma variação em degrau na vazão afluente, na ausência do controle dos processos, as variáveis de estado que caracterizam o comportamento do filtro biológico, do tanque de aeração e do decantador secundário apresentam os desvios ilustrados nas figuras 7.64 e 7.65. Na FIGURA 7.64 estão ilustrados, respectivamente, os desvios apresentados pelas concentrações de substrato no topo e na camada de fundo e os desvios apresentados pela espessura de biofilme no topo e

nas duas últimas camadas do filtro biológico (a penúltima camada foi incluída função da hipótese de que a biomassa perdida pelas duas últimas camadas do filtro alcança o tanque de aeração). Já a FIGURA 7.65 apresenta os desvios das variáveis de estado que caracterizam o tanque de aeração e o decantador secundário.

FIGURA 7.64 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau na vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

FIGURA 7.65 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

Com a incorporação do controlador, os desvios das concentrações de substrato e espessuras de biofilme são aumentados no topo e diminuídos no fundo do filtro, conforme ilustrado na FIGURA 7.66. Este mesmo padrão de comportamento e, por consequência, os fatores que condicionam sua existência, já foi observado quando do

estabelecimento de controladores aplicáveis aos filtros biológicos figurando como única unidade para o tratamento dos esgotos (ver figuras 7.44 e 7.45).

FIGURA 7.66 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

No tanque de aeração e no decantador secundário, a atuação do controlador reduz substancialmente os desvios nas concentrações de biomassa e, por consequência, nas concentrações de material particulado produzido com o seu decaimento. A parcela rapidamente biodegradável do substrato, por sua vez, permanece sempre muito próxima da sua concentração de equilíbrio. Já as reduções nas concentrações de X_s são mais modestas; além dos fatores relacionados na seção 7.2 e que permanecem válidos para os processos combinados, deve-se observar que a maior parte do material biológico perdido pelas duas últimas camadas do filtro é tratada, no tanque de aeração, como substrato lentamente biodegradável. Os efeitos produzidos pelo controlador sobre o tanque de aeração e sobre a camada de fundo do decantador estão ilustrados na FIGURA 7.67. Uma comparação entre as figuras 7.67 e 7.25 permite observar que o comportamento das variáveis de estado no tanque de aeração e no fundo do decantador dos processos combinados é muito próximo daquele apresentado pelas variáveis de estado que caracterizam o processo de lodos ativados, quando este figura como única unidade de tratamento de esgotos.

FIGURA 7.67 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

As variáveis de controle dos processos combinados também apresentam comportamento semelhante ao das variáveis de controle dos filtros biológicos e dos processos de lodos ativados, quando da análise isolada destes sistemas de tratamento. A ocorrência de um degrau na vazão afluyente é seguida por reduções na vazão de recirculação do filtro e por aumentos nas vazões de recirculação de lodo para o tanque de aeração; a vazão de descarte do lodo, por sua vez, permanece sempre muito próxima de seus valores de equilíbrio. O comportamento das variáveis de controle está ilustrado na FIGURA 7.68.

FIGURA 7.68 – Desvios apresentados pelas variáveis de controle dos processos combinados, em resposta a uma variação degrau da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

A ocorrência de um pulso na vazão afluyente produz desvios nas variáveis de estado que, além de transitórias, são substancialmente menores que aquelas produzidas com a imposição de um degrau. Os desvios observados com a imposição de um pulso a vazão afluyente, não considerada a ação do controlador sobre os processos combinados, estão ilustrados nas figuras 7.69 e 7.70. Na primeira figura estão apresentados os desvios das concentrações de substrato e espessura de biofilme no topo e fundo do filtro; a FIGURA 7.70, por sua vez, ilustra o comportamento das variáveis de estado que caracterizam o tanque de aeração e a camada de fundo do decantador.

FIGURA 7.69 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

FIGURA 7.70 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

A partir da incorporação do controlador, um pulso na vazão afluenta produz imediatas reduções na vazão de recirculação do filtro. Desta forma, o efeito de diluição no topo é reduzido (a diluição é consequência das menores concentrações de substrato no efluente recirculado) e as concentrações de substrato e espessuras de biofilme na porção superior da unidade são aumentadas; aumentos na concentração de substrato, por sua vez, produzem aumentos no fluxo de substrato, o que justifica as menores variações nas concentrações de substrato e espessuras de biofilme na porção inferior do filtro biológico. Como pode ser observado a partir da FIGURA 7.71, a ação do controlador torna praticamente nulos os desvios nas concentrações de substrato no fundo do filtro e reduz substancialmente as variações (já pouco expressiva) nas espessuras de biofilme.

FIGURA 7.71 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluenta – resultados para o caso contínuo.

Como a ação do controlador sobre o filtro biológico praticamente anula os desvios das variáveis de estado no fundo da unidade, o afluenta ao tanque de aeração, mesmo após a ocorrência do pulso, apresenta características muito próximas daquelas esperadas nas condições nominais de operação dos processos combinados. Desta forma, os desvios apresentados pelas variáveis de estado no tanque de aeração e no decantador secundário tendem a valores extremamente baixos; estes desvios estão ilustrados na FIGURA 7.72.

FIGURA 7.72 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

As mudanças nas variáveis de controle, frente à variação em forma de pulso na vazão afluyente, estão apresentadas na FIGURA 7.73. Desta figura percebe-se que praticamente todo o esforço de controle dos processos combinados fica por conta da vazão de recirculação do filtro. Como os desvios nas concentrações de substrato e espessuras de biofilme são substancialmente reduzidos no fundo do filtro biológico em função das variações nas vazões de recirculação do próprio filtro, as vazões de descarte e de recirculação do lodo, responsáveis pelo controle do tanque de aeração e do decantador, apresentam-se muito próximas de seus valores nominais.

FIGURA 7.73 – Desvios apresentados pelas variáveis de controle dos processos combinados, em resposta a uma variação pulso da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

As variações periódicas na vazão afluyente dos processos combinados produzem, nas variáveis de estado, os desvios ilustrados nas figuras de 7.74 a 7.77. Os desvios apresentados na ausência de controle sobre os processos combinados estão ilustrados nas duas primeiras figuras; já as figuras 7.76 e 7.77 permitem avaliar os efeitos da ação do controlador sobre o filtro biológico e sobre as diferentes unidades que constituem o processo de lodos ativados.

FIGURA 7.74 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

FIGURA 7.75 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

FIGURA 7.76 – Desvios das concentrações de substrato (esquerda) e espessura de biofilme (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

FIGURA 7.77 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

Das últimas quatro figuras, pode-se observar que a ação do controlador reduz substancialmente os desvios nas concentrações de substrato e nas espessuras de biofilme no fundo do filtro biológico; por consequência, os desvios apresentados pelas variáveis de estados que caracterizam o tanque de aeração e o decantador secundário são também consideravelmente reduzidos.

A vazão de recirculação do filtro, assim como foi observado quando a vazão afluyente variou segundo as funções degrau e pulso, apresenta os maiores desvios em relação à condição nominal de operação. Os desvios das variáveis de controle do tanque de

aeração e decantador secundário reproduzem, por sua vez, o padrão observado na seção 7.2: a vazão de recirculação reproduz o padrão de variação da vazão afluyente e a vazão de descarte do lodo permanece próxima da sua condição nominal de operação. O comportamento das variáveis de controle dos processos combinados (vazão de recirculação do filtro e vazões de recirculação e descarte do lodo) está ilustrado na FIGURA 7.78.

FIGURA 7.78 – Desvios apresentados pelas variáveis de controle dos processos combinados, em resposta a uma variação periódica da vazão afluyente – resultados para o caso contínuo.

7.5 – Observadores de estado

Nas seções anteriores foram propostos sistemas de controle para diferentes combinações de unidades de tratamento de esgotos a partir da suposição de que todas as variáveis de estado estavam sendo medidas e, portanto, disponíveis para realimentação. Na prática, entretanto, nem todas as variáveis de estado estão disponíveis, tornando-se necessária a estimativa das variáveis não mensuradas. Conforme discutido no capítulo 3, a estimativa das variáveis de estado não disponíveis para realimentação é usualmente denominada “observação” de estados e o dispositivo (ou programa de computador) que estima as variáveis de estado, por sua vez, “observador” de estados.

Serão apresentados e discutidos nesta seção os observadores de estado estabelecidos para os diferentes sistemas de tratamento em estudo. Todos os observadores estabelecidos serão de ordem plena e aplicáveis aos sistemas discretos no tempo. A definição destes observadores envolverá a utilização de modelos simplificados, construídos a partir de um menor número de variáveis de estado; os modelos simplificados serão apresentados e comparados com os modelos empregados nas seções anteriores (os modelos empregados até a seção anterior serão denominados modelos completos durante o restante deste texto). As respostas às condições iniciais arbitrárias serão utilizadas para avaliar o desempenho dos observadores propostos.

7.5.1 – Tanque de aeração

Conforme observado na seção 3.12, a condição necessária e suficiente para o estabelecimento de observadores de estados que reconstituem todas as variáveis de estado do sistema é que este sistema seja completamente observável. Desta forma, foram avaliadas as diferentes combinações de variáveis de estado que, se disponíveis para realimentação, garantem o atendimento da condição de completa observabilidade⁶. Estas combinações estão reunidas no QUADRO 7.1.

⁶ Para a determinação das matrizes de saída que garantem a completa observabilidade de estado, um programa computacional avaliou todas as possíveis combinações das variáveis de estado, construiu as matrizes de observabilidade referentes às combinações produzidas e avaliou o posto destas matrizes. Conforme discutido na seção 3.6.2, um sistema é completamente observável quando a matriz de observabilidade (definida pela equação (3.21)) possui posto pleno.

QUADRO 7.1 – Combinação das variáveis de estado que garantem a completa observabilidade de estados para os processos de lodos ativados excluía a dinâmica do decantador.

Combinação	Variáveis de estado
1	X_p, X_i
2	X_b, X_p, X_i
3	S_s, X_p, X_i
4	X_s, X_p, X_i
5	X_p, X_i, Q_o
6	X_b, X_s, X_p, X_i
7	X_b, X_p, X_i, Q_o
8	S_s, X_s, X_p, X_i
9	S_s, X_p, X_i, Q_o
10	X_s, X_p, X_i, Q_o
11	X_b, S_s, X_p, X_i, Q_o
12	X_b, X_s, X_p, X_i, Q_o
13	S_s, S_s, X_p, X_i, Q_o
14	$X_b, X_s, S_s, X_p, X_i, Q_o$

Nota : Q_o = vazão efluente do tanque de aeração

Da simples inspeção do QUADRO 7.1 pode-se observar que qualquer uma das alternativas que garante a completa observabilidade de estados envolve a medição do material particulado produzido com o decaimento da biomassa e da parcela de substrato particulado inerte. Estas variáveis, além de não poderem ser isoladamente monitoradas, não influenciam diretamente no comportamento das demais variáveis de estado; das equações (6.4) e (6.5) observa-se que alterações nas concentrações de X_p e X_i não provocam mudanças nas concentrações das variáveis de estado que caracterizam o tanque de aeração.

Desta forma, avaliou-se o desenvolvimento de controladores para sistemas em que apenas X_b , S_s , X_s e Q_o figuram como variáveis de estado. As vazões de recirculação e de descarte do lodo continuam atuando como as variáveis de controle do sistema e a vazão de afluente bruto como o distúrbio externo agindo sobre o sistema. Assim, as matrizes de estado (matriz **G**), de entrada (matriz **H**) e de transmissão de distúrbio (matriz **D_w**) apresentam os seguintes valores:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0,8100 & 0,3647 & 0 & -0,0303 \\ -0,0022 & -0,0009 & 0 & 0,0001 \\ 0,0122 & 0,0049 & 0,8145 & -0,0020 \\ 0 & 0 & 0,96 & 0,9592 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,1011 & -0,0303 \\ -0,0002 & 0,0001 \\ 0,0068 & -0,0020 \\ 0,0408 & -0,0408 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_w = \begin{bmatrix} 0,0022 \\ 0,0002 \\ 0,0040 \\ 0,0408 \end{bmatrix}.$$

A matriz de ganho de realimentação do sistema de controle, por sua vez, assume os seguintes valores:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 7,0553 & 3,1640 & 1,9155 & -0,2733 \\ -0,1192 & -0,0535 & -0,0324 & -0,0004 \end{bmatrix}$$

Uma variação degrau na vazão afluyente produz os desvios nas variáveis de estado apresentados pelas figuras 7.79 e 7.80. Os desvios introduzidos após a introdução do controlador podem ser avaliados a partir da última delas. Já os desvios estabelecidos pelo controlador nas vazões de recirculação e descarte do lodo estão ilustrados na FIGURA 7.81. A comparação das três últimas figuras com as figuras 7.21 e 7.22, permite observar que a supressão das variáveis X_p e X_i não altera de forma significativa o balanço entre as matrizes de ponderação das variáveis de estado e de controle do sistema; os desvios apresentados pelas variáveis de estado e de controle, obtidos com a utilização do modelo simplificado, são muito próximos dos desvios apresentados pelas variáveis de estado quando do emprego do modelo completo.

FIGURA 7.79 – Desvios das variáveis de estado, sem a ação do controlador e com a utilização do modelo simplificado, em resposta a uma variação degrau na vazão afluyente – resultados para o caso discreto.

FIGURA 7.80 – Desvios das variáveis de estado, com a ação do controlador e com a utilização do modelo simplificado, em resposta a uma variação degrau na vazão afluyente – resultados para o caso discreto.

FIGURA 7.81 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, com a utilização do modelo simplificado, em resposta a uma variação degrau na vazão afluyente – resultados para o caso discreto.

Para a definição do observador de estado, adota-se como variável disponível para a realimentação do sistema de controle a concentração da parcela biodegradável de substrato, obtida a partir da soma das parcelas rápida e lentamente biodegradáveis. O sistema assim definido, além de estável, apresenta-se completamente controlável e observável: as matrizes de controlabilidade e de observabilidade, definidas a partir das equações (3.18) e (3.21), possuem posto igual a 4.

Para a definição da matriz de ganho do observador de estados, os pólos do observador foram escolhidos de tal forma que as suas respostas fossem mais rápidas que as respostas apresentadas pelo controlador. A partir da alocação dos pólos do observador em diferentes posições do plano complexo e da avaliação das diferentes matrizes de ganho assim definidas, a matriz de ganho do observador adotada assume os seguintes valores:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 5,0222 \\ -0,0128 \\ 0,5294 \\ -27,7672 \end{bmatrix}.$$

Estabelecidas as matrizes de ganho do controlador e do observador de estados, o desempenho do sistema de controle é avaliado a partir da resposta das variáveis de estado a condições iniciais arbitrárias. Assumindo-se que todas as variáveis de estado apresentam, inicialmente, concentrações 25% menores que os seus valores de equilíbrio, as respostas obtidas a partir das diferentes condições de controle estão apresentadas nas figuras de 7.82 a 7.84. Na FIGURA 7.82 nenhum controlador atua sobre o processo de lodos ativados. Na FIGURA 7.83 são ilustrados os efeitos produzidos com a incorporação do controlador; neste caso, no entanto, todas as variáveis de estado estão disponíveis para a realimentação, não existindo observação de estados. Já a FIGURA 7.84 ilustra os desvios apresentados pelas variáveis de estado após a incorporação de um controlador com realimentação de estados observados.

FIGURA 7.82 – Resposta a condições iniciais arbitrárias das variáveis de estados que caracterizam o tanque de aeração, sem a ação do controlador.

FIGURA 7.83 – Resposta a condições iniciais arbitrárias das variáveis de estados que caracterizam o tanque de aeração, com a ação do controlador e sem observador de estados.

FIGURA 7.84 – Resposta a condições iniciais arbitrárias das variáveis de estados que caracterizam o tanque de aeração, com a ação do controlador e com observador de estados.

Como o sistema que descreve o comportamento do processo de lodos ativados é estável, as variáveis de estado tendem progressivamente às suas concentrações de equilíbrio mesmo sem a atuação de um controlador sobre o processo (FIGURA 7.81). Com a incorporação do controlador (FIGURA 7.83), os desvios apresentados pelas variáveis de estado e o tempo necessário para que as concentrações de equilíbrio sejam restabelecidas são substancialmente reduzidos. Com a introdução de um observador de estados ao sistema de controle (FIGURA 7.84), o tempo de acomodação e os desvios apresentados são aumentados se considerados os resultados

obtidos a partir da hipótese de que nenhuma variável de estado é estimada. No entanto, se considerados os resultados obtidos a partir do sistema não controlado, a incorporação de um controlador com reconstrução de estados permite melhorar substancialmente o desempenho do processo de lodos ativados.

7.5.2 – Tanque de aeração e decantador secundário

Com a inclusão da dinâmica do decantador, o número de combinações de variáveis de estado que garante a completa observabilidade de estados cresce consideravelmente. A partir do modelo utilizado para descrever a dinâmica do conjunto tanque de aeração e decantador secundário, foram identificadas 3577 possíveis combinações de variáveis de estado que, se assumidas como variáveis de saída do sistema de controle, garantem o estabelecimento de um sistema completamente observável. No QUADRO 7.2 estão reunidas, a título de exemplo, 20 destas combinações.

QUADRO 7.2 – Combinação das variáveis de estado que garantem a completa observabilidade de estados para o processo de lodos ativados incluída a dinâmica do decantador.

Combinação	Variáveis de estado
1	X_b, X_s, X_p, X_i
2	$X_b, X_{s1}, X_{p1}, X_{i1}$
3	$X_b, X_{s2}, X_{p2}, X_{i2}$
4	$X_b, X_{s3}, X_{p3}, X_{i3}$
5	$X_b, X_{s4}, X_{p4}, X_{i4}$
6	$X_b, X_{s5}, X_{p5}, X_{i5}$
7	S_s, X_s, X_p, X_i
8	$S_s, X_{s1}, X_{p1}, X_{i1}$
9	$S_s, X_{s2}, X_{p2}, X_{i2}$
10	$S_s, X_{s3}, X_{p3}, X_{i3}$
11	$S_s, X_{s4}, X_{p4}, X_{i4}$
12	$S_s, X_{s5}, X_{p5}, X_{i5}$
13	$X_s, X_{s1}, X_{p1}, X_{i1}$
14	$X_s, X_{p1}, X_{i1}, X_{p2}$
15	$X_s, X_{s2}, X_{p2}, X_{i2}$
16	$X_s, X_{p2}, X_{i2}, X_{p3}$
17	$X_s, X_{s3}, X_{p3}, X_{i3}$
18	$X_s, X_{p3}, X_{i3}, X_{p4}$
19	$X_s, X_{s4}, X_{p4}, X_{i4}$
20	$X_s, X_{p4}, X_{i4}, X_{p5}$

Nota : o número subscrito indica a camada do decantador a qual se refere a variável.

Das alternativas que garantem a completa observabilidade de estados, as concentrações de X_p e/ou X_i , no tanque de aeração ou no decantador secundário, devem estar disponíveis para realimentação. Conforme observou-se na seção anterior, estas variáveis, além de não poderem ser isoladamente monitoradas, não influenciam diretamente no comportamento das demais variáveis de estado. Desta forma, avaliou-se o desenvolvimento de controladores nos quais o tanque de aeração e o decantador secundário são caracterizados a partir das concentrações de X_b , S_s e X_s e da vazão efluente do tanque de aeração. As vazões de recirculação e de descarte do lodo continuam como as variáveis de controle do sistema e a vazão de afluente bruto como o distúrbio externo agindo sobre o sistema.

As matrizes de estado (matriz **G**), de entrada (matriz **H**) e de transmissão de distúrbio (matriz **D_w**) para o modelo simplificado apresentam os seguintes valores:

$$G = \begin{bmatrix} 0.8100 & 0.3648 & 0.0000 & -0.0303 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0003 & 0.0000 & 0.0002 & 0.0014 & 0.0000 & 0.0037 & 0.0052 & 0.0000 & 0.0486 & 0.0139 & 0.0000 \\ -0.0022 & -0.0008 & 0.0000 & 0.0001 & -0.0000 & 0.0001 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0003 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0010 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0023 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0028 & 0.0000 \\ 0.0122 & 0.0049 & 0.8145 & -0.0020 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0002 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0037 & 0.0004 & 0.0001 & 0.0487 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.9592 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 1.7691 & 0.7303 & 0.0000 & 0.3125 & 0.3939 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0002 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0009 & 0.0000 & 0.0031 & 0.0045 & 0.0000 & 0.0588 & 0.0170 & 0.0000 \\ -0.0043 & 0.1456 & 0.0000 & 0.0012 & -0.0000 & 0.3940 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0002 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0009 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0031 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0075 & 0.0000 \\ 0.0149 & 0.0055 & 1.7738 & 0.0184 & 0.0000 & 0.0000 & 0.3939 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0031 & 0.0003 & 0.0001 & 0.0589 \\ 0.1508 & 0.0553 & 0.0000 & 0.0268 & 0.0891 & 0.0000 & 0.0000 & 0.8615 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0002 & 0.0000 & 0.0031 & 0.0009 & 0.0000 \\ -0.0016 & 0.1199 & 0.0000 & 0.0005 & -0.0000 & 0.3670 & 0.0000 & -0.0000 & 0.3940 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0002 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0009 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0031 & 0.0000 \\ 0.0008 & 0.0003 & 0.1510 & 0.0016 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0591 & 0.0000 & 0.0000 & 0.8615 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0080 & 0.0027 & 0.0000 & 0.0014 & 0.0075 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1284 & 0.0000 & 0.0000 & 0.8615 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0004 & 0.0501 & 0.0000 & 0.0001 & -0.0000 & 0.1709 & 0.0000 & -0.0000 & 0.3670 & 0.0000 & -0.0000 & 0.3940 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0002 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0009 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0080 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0075 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1284 & 0.0000 & 0.0000 & 0.8615 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0003 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0004 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0096 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1284 & 0.0000 & 0.0000 & 0.8615 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0001 & 0.0141 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0531 & 0.0000 & -0.0000 & 0.1709 & 0.0000 & -0.0000 & 0.3670 & 0.0000 & -0.0000 & 0.3940 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0002 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0003 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0004 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0096 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1284 & 0.0000 & 0.0000 & 0.8615 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0005 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0096 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1284 & 0.0000 & 0.0000 & 0.8615 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0030 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0124 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0531 & 0.0000 & -0.0000 & 0.1709 & 0.0000 & -0.0000 & 0.3670 & 0.0000 & -0.0000 & 0.3940 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0005 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0096 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1284 & 0.0000 & 0.0000 & 0.8615 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.1011 & -0.0303 \\ -0.0002 & 0.0001 \\ 0.0068 & -0.0020 \\ 0.0408 & -0.0408 \\ -1.0460 & -0.0445 \\ -0.0040 & 0.0000 \\ -0.0616 & -0.0028 \\ -0.0890 & -0.0023 \\ -0.0015 & 0.0000 \\ -0.0053 & -0.0001 \\ -0.0047 & -0.0001 \\ -0.0004 & 0 \\ -0.0003 & 0 \\ -0.0002 & 0 \\ -0.0001 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_w = \begin{bmatrix} 0.0022 \\ 0.0002 \\ 0.0040 \\ 0.0408 \\ 0.0112 \\ 0.0003 \\ 0.0053 \\ 0.0006 \\ 0.0001 \\ 0.0003 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz de ganho de realimentação do sistema de controle, por sua vez, assume os seguintes valores:

$$K^T = \begin{bmatrix} 8,9439 & -4,9437 \\ 3,6346 & -2,7871 \\ 0,1677 & -0,1611 \\ -0,3000 & 0,0005 \\ -0,0972 & -0,2957 \\ -0,9279 & -1,7785 \\ -0,0103 & -0,0463 \\ -0,6557 & -1,9883 \\ -0,5751 & -1,1032 \\ 0,0447 & -0,0677 \\ -0,9791 & -2,8814 \\ -0,3018 & -0,6062 \\ 0,0493 & -0,0480 \\ -1,1154 & -3,2661 \\ -0,1014 & -0,3085 \\ 0,0570 & -0,0262 \\ -0,4645 & -2,6873 \\ 0,0675 & -0,1875 \\ 0,0686 & -0,0093 \end{bmatrix}$$

Com a variação da vazão afluyente segundo a função degrau, as variáveis de estado apresentam os desvios ilustrados pelas figuras 7.85 e 7.86. Os resultados obtidos com a incorporação do controlador podem ser avaliados a partir da FIGURA 7.86. Já a FIGURA 7.87 apresenta os desvios estabelecidos pelo controlador para as vazões de controle do processo. Assim como ocorreu nas simulações referentes apenas ao tanque de aeração (seção 7.5.1), os desvios apresentados pelas variáveis de estado e de controle, obtidos com a utilização do modelo simplificado, são muito próximos dos desvios apresentados quando do emprego do modelo completo (ver figuras 7.34, 7.35 e 7.40).

FIGURA 7.85 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), sem a ação do controlador e com a utilização do modelo simplificado, em resposta a uma variação degrau na vazão afluyente – resultados para o caso discreto.

FIGURA 7.86 – Desvios das variáveis de estado no tanque de aeração (esquerda) e na camada de fundo do decantador (direita), com a ação do controlador e com a utilização do modelo simplificado, em resposta a uma variação degrau na vazão afluyente – resultados para o caso discreto.

FIGURA 7.87 – Desvios das variáveis de controle do processo de lodos ativados, com a utilização do modelo simplificado, em resposta a uma variação degrau na vazão afluyente – resultados para o caso discreto.

Para a definição do observador de estado, as parcelas biodegradáveis de substrato (soma das concentrações das frações rápida e lentamente biodegradáveis do substrato) no tanque de aeração e em cada uma das camadas do decantador constituem as variáveis disponíveis para a realimentação do sistema de controle. O sistema definido com estas variáveis de saída apresentou-se completamente controlável e observável (posto das matrizes de controlabilidade e observabilidade igual 19).

Para a definição da matriz de ganho do observador de estados, os pólos do observador foram escolhidos de tal maneira que as respostas fossem mais rápidas que aquelas apresentadas pelo controlador. Desta forma, a partir da alocação dos pólos do observador em diferentes posições do plano complexo e da avaliação das diferentes matrizes de ganho assim produzidas, a seguinte matriz de ganho do observador foi adotada:

$$K_e = 10^3 \begin{bmatrix} 0.0015 & 0.0087 & -0.0060 & 0.0051 & -0.0039 & -0.0126 \\ -0.0001 & 0.0000 & -0.0001 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0003 & 0.0003 & -0.0002 & 0.0002 & -0.0001 & -0.0003 \\ -0.0048 & 0.0036 & -0.0002 & 0.0002 & -0.0014 & -0.0001 \\ 2.0115 & 0.4052 & -1.1396 & -5.1879 & -4.2775 & 0.4705 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & -0.0000 & 0.0001 \\ 0.0010 & 0.0007 & -0.0004 & 0.0004 & -0.0004 & -0.0005 \\ -0.3783 & -0.0591 & 0.2077 & 0.9956 & 0.8066 & -0.1101 \\ -0.0001 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & -0.0000 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0002 & 0.0001 & -0.0001 & -0.0001 & 0.0000 \\ 0.0629 & 0.0308 & -0.0352 & -0.1837 & -0.1603 & -0.0262 \\ -0.0001 & -0.0000 & 0.0003 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0001 \\ -0.0276 & 0.0329 & -0.0002 & 0.0524 & 0.0145 & -0.0771 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & 0.0003 & -0.0001 & -0.0001 \\ 0.0001 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0004 & 0.0004 & -0.0000 \\ -0.0043 & 0.0432 & -0.0193 & 0.0130 & -0.0258 & -0.0716 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0000 & 0.0001 & 0.0000 \\ 0.0001 & -0.0001 & -0.0000 & 0.0001 & 0.0002 & 0.0004 \end{bmatrix}.$$

O desempenho do sistema de controle é avaliado, então, a partir da resposta das variáveis de estado à condições iniciais arbitrárias. Considerando-se que todas as variáveis de estado apresentam concentrações 25% acima dos seus valores de equilíbrio, as respostas obtidas com as diferentes possibilidades de controle estão ilustradas nas figuras 7.88, 7.89 e 7.90. Na primeira figura, as vazões de recirculação e descarte do lodo permanecem constantes. Na FIGURA 7.89 são ilustrados os efeitos produzidos com a incorporação do controlador, não existindo observação de estados (neste caso, todas as variáveis de estado estão disponíveis para realimentação). A FIGURA 7.90, por sua vez, ilustra o comportamento das variáveis de estado após a incorporação de um controlador com realimentação de estados observados.

FIGURA 7.88 – Resposta a condições iniciais arbitrárias das variáveis de estados que caracterizam o tanque de aeração (esquerda) e última camada do decantador secundário (direita), sem a ação do controlador.

FIGURA 7.89 – Resposta a condições iniciais arbitrárias das variáveis de estados que caracterizam o tanque de aeração (esquerda) e última camada do decantador secundário (direita), com a ação do controlador e sem observador de estados.

FIGURA 7.90 – Resposta a condições iniciais arbitrárias das variáveis de estados que caracterizam o tanque de aeração (esquerda) e última camada do decantador secundário (direita), com a ação do controlador e com observador de estados.

A análise das três últimas figuras pode ser pontuada da seguinte maneira: *a)* Como o sistema dinâmico que descreve o comportamento do tanque de aeração e do decantador secundário é estável, as concentrações de equilíbrio das variáveis de estado são restabelecidas mesmo sem a atuação de um controlador (FIGURA 7.88); *b)* a incorporação do controlador reduz considerável e rapidamente os desvios apresentados pelas variáveis de estado e o tempo necessário para que as concentrações de equilíbrio sejam restabelecidas (FIGURA 7.89); *c)* A introdução do observador de estados aumentou o tempo de acomodação e os desvios das variáveis de estado, se considerados os resultados obtidos com a ação do controlador sem a observação de estados; no entanto, se considerados os resultados ilustrados na FIGURA 7.88 (sistema sem a ação do controlador), a incorporação de um controlador com reconstrução de estados (FIGURA 7.90) melhora substancialmente o desempenho do processo de lodos ativados.

7.5.3 – Filtros biológicos

Para o estabelecimento do sistema de controle aplicável aos filtros biológicos adotou-se a idealização de que o filtro poderia ser dividido em vários reatores completamente misturados e dispostos em série. As concentrações de substrato e espessuras de biofilme no interior de cada reator (camada) foram as variáveis de estado que caracterizaram o comportamento do filtro.

Considerando-se a divisão do filtro biológico em 10 camadas, apenas três combinações das variáveis de estado garantem o estabelecimento de um sistema completamente observável. Estas combinações estão reunidas no QUADRO 7.3.

QUADRO 7.3 – Combinação das variáveis de estado que garantem a completa observabilidade de estados para os filtros biológicos.

Combinação	Variáveis de estado
1	$L_1, L_2, S_3, L_3, S_4, L_4, S_5, L_5, S_6, L_6, S_7, L_7, S_8, L_8, S_9, L_9, S_{10}, L_{10}$
2	$L_1, S_2, L_2, S_3, L_3, S_4, L_4, S_5, L_5, S_6, L_6, S_7, L_7, S_8, L_8, S_9, L_9, S_{10}, L_{10}$
3	$S_1, L_1, S_2, L_2, S_3, L_3, S_4, L_4, S_5, L_5, S_6, L_6, S_7, L_7, S_8, L_8, S_9, L_9, S_{10}, L_{10}$

Notas: 1) L : Espessura de biofilme;

2) S : Concentração de substrato;

3) O número subscrito indica a camada do decantador a qual se refere a variável.

Do quadro anterior pode-se observar que a condição de completa observabilidade só é atendida a partir da medição da espessura de biofilme em todas as camadas do filtro biológico. Em função da impossibilidade de medição desta variável de estado e do fato de que no modelo utilizado as alterações nas espessuras de biofilme não alteram diretamente as concentrações de substrato (ver sistemas de equações 6.11), avalia-se a possibilidade do estabelecimento de sistemas de controle para os filtros biológicos a partir de modelos que considerem apenas as concentrações de substrato como variáveis de estado. Neste caso, as matrizes de estado (matriz **G**), de entrada (matriz **H**) e de transmissão de distúrbios (matriz **D_w**) assumem os seguintes valores:

$$G = \begin{bmatrix} 0,0122 & 0,0016 & 0,0037 & 0,0079 & 0,0147 & 0,0237 & 0,0321 & 0,0352 & 0,0295 & 0,0173 \\ 0,0413 & 0,0113 & 0,0016 & 0,0037 & 0,0080 & 0,0152 & 0,0248 & 0,0341 & 0,0383 & 0,0332 \\ 0,0731 & 0,0381 & 0,0104 & 0,0016 & 0,0038 & 0,0081 & 0,0156 & 0,0257 & 0,0359 & 0,0410 \\ 0,0867 & 0,0676 & 0,0354 & 0,0098 & 0,0016 & 0,0038 & 0,0083 & 0,0159 & 0,0265 & 0,0374 \\ 0,0774 & 0,0805 & 0,0631 & 0,0331 & 0,0092 & 0,0016 & 0,0038 & 0,0084 & 0,0162 & 0,0272 \\ 0,0554 & 0,0722 & 0,0754 & 0,0593 & 0,0314 & 0,0088 & 0,0016 & 0,0038 & 0,0084 & 0,0164 \\ 0,0332 & 0,0520 & 0,0680 & 0,0713 & 0,0564 & 0,0300 & 0,0085 & 0,0016 & 0,0038 & 0,0085 \\ 0,0171 & 0,0312 & 0,0491 & 0,0646 & 0,0681 & 0,0541 & 0,0289 & 0,0082 & 0,0016 & 0,0038 \\ 0,0077 & 0,0162 & 0,0297 & 0,0469 & 0,0619 & 0,0656 & 0,0523 & 0,0281 & 0,0080 & 0,0016 \\ 0,0031 & 0,0073 & 0,0154 & 0,0284 & 0,0451 & 0,0598 & 0,0637 & 0,0510 & 0,0274 & 0,0079 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} -0,0089 \\ -0,0047 \\ -0,0015 \\ 0,0007 \\ 0,0019 \\ 0,0024 \\ 0,0023 \\ 0,0020 \\ 0,0016 \\ 0,0013 \end{bmatrix}, \quad D_w = \begin{bmatrix} 0,0152 \\ 0,0138 \\ 0,0116 \\ 0,0090 \\ 0,0067 \\ 0,0048 \\ 0,0034 \\ 0,0024 \\ 0,0018 \\ 0,0013 \end{bmatrix}.$$

Considerando o procedimento estabelecido na seção 3.10, a matriz de ganho do sistema de controle assume os seguintes valores:

$$K^T = \begin{bmatrix} 4,2298 \\ 8,9789 \\ 14,7585 \\ 21,2728 \\ 27,8710 \\ 33,4438 \\ 36,4540 \\ 35,2053 \\ 28,4039 \\ 16,1094 \end{bmatrix}.$$

Assim como se fez para a avaliação do desempenho do processo de lodos ativados a partir de modelos simplificados, a vazão afluenta foi submetida a uma variação segundo a função degrau. Os desvios apresentados pelas concentrações de substrato após a introdução de um degrau na vazão afluenta estão ilustrados nas figuras 7.91 e

7.92. Já as oscilações na vazão de recirculação do filtro estão ilustradas na FIGURA 7.92. Também para os filtros biológicos, os resultados apresentados pelos modelos simplificado e completo são muito próximos (comparar as três últimas figuras com as figuras 7.54, 7.55 e 7.60).

Para a definição do observador de estado considera-se que as concentrações de substrato no topo e no fundo do filtro definem as variáveis de saída do sistema de controle⁷. O sistema definido com estas variáveis de saída apresentou-se completamente controlável (posto da matriz de controlabilidade igual 20) e observável (posto da matriz de observabilidade igual 20).

FIGURA 7.91 – Desvios das concentrações de substrato, sem a ação do controlador e com a utilização do modelo simplificado, em resposta a uma variação degrau na vazão afluyente – resultados para o caso discreto.

⁷ Considerando-se a divisão do filtro biológico em 20 camadas, a completa observabilidade é garantida se as concentrações de substrato no topo, no fundo e em três camadas intermediárias do filtro constituírem as variáveis de saída do sistema. Com a redução do número de camadas para 10, o sistema já apresenta-se completamente observável com a medição das concentrações de substrato no topo e fundo do filtro.

FIGURA 7.92 – Desvios das concentrações de substrato, com a ação do controlador e com a utilização do modelo simplificado, em resposta a uma variação degrau na vazão afluyente – resultados para o caso discreto.

FIGURA 7.93 – Desvios da vazão de recirculação do filtro, e com a utilização do modelo simplificado, em resposta a uma variação degrau na vazão afluyente – resultados para o caso discreto.

Para a definição da matriz de ganho do observador de estados, os pólos do observador foram escolhidos de tal forma a apresentar respostas mais rápidas que as respostas apresentadas pelo controlador. A partir da avaliação de diferentes possíveis matrizes de ganho são assumidos os seguintes valores:

$$K_e = \begin{bmatrix} 0,1044 & -0,0017 \\ 0,1196 & 0,0301 \\ 0,1448 & 0,0454 \\ 0,1643 & 0,0429 \\ 0,1653 & 0,0310 \\ 0,1526 & 0,0126 \\ 0,1462 & -0,0160 \\ 0,1595 & -0,0509 \\ 0,1799 & -0,0719 \\ 0,1866 & -0,0573 \end{bmatrix}$$

Estabelecidas as matrizes de ganho do controlador e do observador de estados, o desempenho do sistema de controle é avaliado a partir da resposta das variáveis de estado a condições iniciais arbitrárias. Considerando-se que as concentrações de substrato apresentam valores iniciais 25% menores que os seus valores de equilíbrio, as respostas obtidas a partir das diferentes opções de controle estão apresentadas nas figuras de 7.94 a 7.96. Na FIGURA 7.94 o controlador não atua sobre o filtro. Na FIGURA 7.95 são ilustrados os efeitos produzidos com a incorporação do controlador, não existindo observação de estados. Já a FIGURA 7.96 ilustra os desvios apresentados pelas variáveis de estado após a incorporação de um controlador com realimentação de estados observados.

FIGURA 7.94 – Resposta a condições iniciais arbitrárias das concentrações de substrato, sem a ação do controlador.

FIGURA 7.95 – Resposta a condições iniciais arbitrárias das concentrações de substrato, com a ação do controlador e sem observador de estados.

FIGURA 7.96 – Resposta a condições iniciais arbitrárias das concentrações de substrato, com a ação do controlador e com observador de estados.

Da FIGURA 7.94 pode-se observar que as concentrações de equilíbrio do substrato são restabelecidas, independentemente da ação do controlador (o sistema utilizado para descrever o comportamento dos filtros biológicos é estável). Com a incorporação do controlador, considerando-se que todas as variáveis de estado estão disponíveis para realimentação, os desvios e o tempo necessários ao restabelecimento das condições de equilíbrio são substancialmente reduzidos (FIGURA 7.95). A introdução do observador de estados (FIGURA 7.96) aumentou o tempo de acomodação e os desvios no fundo do filtro, se considerados os resultados obtidos a partir da ação do controlador sem a observação de estados; no entanto, se

considerados os resultados obtidos para o sistema não controlado, a incorporação de um controlador com reconstrução de estados permite melhorar o desempenho da porção inferior do filtro biológico.

7.5.4 – Processos combinados

Os modelos utilizados para a descrição do comportamento dinâmico dos processos combinados não podem prescindir da avaliação das espessuras de biofilme no interior do filtro biológico; conforme o modelo estabelecido no Capítulo 6, a biomassa desprendida das duas camadas de fundo do filtro biológico chega ao filtro biológico onde, em sua maior parte, é tratada como substrato lentamente biodegradável. Não são aplicáveis aos processos combinados, portanto, modelos simplificados que não avaliem a variação da espessura de biofilme no interior do filtro. Como a condição de completa observabilidade não é atendida pelo modelo completo e como também não é possível o estabelecimento de modelos simplificados, não foram propostos sistemas de controle com observação de estados para os processos combinados.

CAPÍTULO 08

CONCLUSÕES

8 - CONCLUSÕES

A avaliação da viabilidade do controle automático de três importantes sistemas aeróbios de tratamento de esgotos – os filtros biológicos, os processos de lodos ativados e os processos combinados constituídos pela combinação, em série, dos filtros biológicos e lodos ativados – constituiu a principal finalidade deste trabalho.

Para a definição dos sistemas de controle, foram necessários modelos dinâmicos que descrevessem o comportamento das diferentes combinações das unidades de tratamento de esgotos. A partir da literatura, foram adotados os modelos dinâmicos destinados à descrição do comportamento do tanque de aeração e do decantador secundário que constituem o processo de lodos ativados. Para o filtro biológico, foi proposto um modelo que combina a equação do balanço de massa do reator e o modelo de ordem variável, este último destinado ao cálculo do fluxo de substrato para o interior de biofilmes profundos. Já os modelos utilizados para a descrição do comportamento dos processos combinados foram definidos a partir do agrupamento dos modelos utilizados para descrever individualmente os filtros biológicos e processos de lodos ativados.

Em todos os casos, os modelos apresentaram-se como sistemas de equações diferenciais ordinárias não-lineares. Destes sistemas de equações, foram obtidos sistemas de equações diferenciais lineares e invariantes no tempo utilizados para simular o comportamento das diferentes unidades de tratamento de esgotos e para definir os ganhos de realimentação dos sistemas de controle. Estabelecidos os ganhos de realimentação, diferentes grupos de simulações computacionais permitiram comparar os desempenhos dos sistemas de tratamento com e sem a atuação dos sistemas de controle propostos.

Dos modelos utilizados para descrever o comportamento dos sistemas de tratamento de esgoto e dos resultados das diferentes simulações realizadas, podem ser apresentadas as seguintes observações e conclusões:

- Os modelos lineares e invariantes no tempo utilizados para a descrição do comportamento dinâmico dos filtros biológicos, dos processos de lodos ativados e dos processos combinados mostraram-se estáveis e adequados à definição dos sistemas de controle;
- Os sistemas de controle propostos para o tanque de aeração dos processos de lodos ativados permitiram reduzir de forma substancial as oscilações apresentadas pelas concentrações de biomassa, de material particulado produzido com o decaimento da biomassa e de substrato particulado inerte. As reduções nas oscilações da parcela lentamente biodegradável, entretanto, foram menores; a diferença nas composições do afluente bruto, do lodo recirculado e do conteúdo do tanque de aeração e as intrincadas relações entre as variáveis tornaram difícil o estabelecimento de uma estratégia de controle que aproximasse todas as variáveis de estado de seus valores de equilíbrio. A parcela rapidamente biodegradável, por sua vez, apresentou um comportamento diferenciado em todas as simulações realizadas; esta parcela, prontamente removida da massa líquida pela ação dos microrganismos, apresentou-se sempre em concentrações muito baixas, independentemente da ação do controlador ou do padrão de variação imposto à vazão afluente. Adicionalmente, convém observar que a ação do controlador permitiu diminuir o tempo necessário para que novas condições de equilíbrio fossem estabelecidas após as variações impostas à vazão afluente;
- Com a incorporação da dinâmica do decantador, o tempo necessário para que novas condições de equilíbrio fossem estabelecidas no processo de lodos ativados, após as variações impostas à vazão afluente, foi consideravelmente aumentado. Nas simulações em que a vazão afluente variou segundo as funções pulso e degrau, a introdução da dinâmica do decantador alterou o comportamento ou o valor dos desvios das variáveis de estado no tanque de aeração. No entanto, com a imposição de variações periódicas à vazão afluente, a consideração da dinâmica do decantador não produziu variações significativas no comportamento das variáveis de estado que caracterizam o tanque de aeração;

- Nas simulações do comportamento do tanque de aeração do processo de lodos ativados, o esforço de controle ficou por conta da vazão de recirculação do lodo, independentemente do padrão de variação da vazão afluyente; a vazão de descarte do lodo, por sua vez, permaneceu sempre muito próxima dos seus valores de equilíbrio. Com a incorporação da dinâmica do decantador, a ação do decantador produziu variações nas vazões de recirculação e descarte do lodo; nesta última, entretanto, as variações foram menos significativas;
- O modelo dinâmico proposto para avaliar o comportamento dos filtros biológicos permitiu a simulação de fenômenos normalmente observados durante a operação destes sistemas de tratamento. Nas condições de equilíbrio, a concentração de substrato e a espessura de biofilme estimados pelo modelo decresceram ao longo da profundidade do reator. Nas simulações em que a vazão afluyente ao filtro apresentou diferentes padrões de perturbação, as variações de concentração de substrato e espessura de biofilme também foram reduzidas do topo para o fundo do filtro. Outro importante efeito que pode ser observado com a aplicação do modelo foi a diferença entre os intervalos de tempo necessários ao estabelecimento das condições de equilíbrio para as concentrações de substrato e espessura de biofilme; o tempo necessário ao estabelecimento de concentrações de substrato constantes no interior do reator foi consideravelmente menor que o tempo necessário à obtenção de um biofilme com espessura constante;
- A implementação dos sistemas de controle pôde conduzir a sensíveis reduções na concentração de substrato no efluente final do filtro biológico. Nas simulações, a manipulação da vazão de recirculação permitiu interferir na diluição da vazão afluyente ao sistema e nas taxas das reações que deveriam se desenvolver no interior do reator. Como consequência, as oscilações das variáveis de estado entorno das suas condições de equilíbrio claramente aumentaram no topo do reator, se consideradas as oscilações estimadas para o caso não controlado; nas camadas de fundo, entretanto, os valores das variáveis de estado permaneceram substancialmente mais próximas dos seus valores de equilíbrio. Este comportamento no interior do filtro biológico pôde ser verificado para os

diferentes padrões de variação impostos à vazão afluyente ao sistema de tratamento;

- O modelo utilizado para simular o comportamento dos processos combinados foi definido a partir do agrupamento dos modelos empregados para individualmente descrever o comportamento dos filtros biológicos e dos processos de lodos ativados. No entanto, os resultados apresentados pelo modelo dos processos combinados ficaram condicionados a definição das características da biomassa e do substrato efluentes do filtro biológico;
- Os controladores propostos para os processos combinados reproduziram alternativas de controle que já haviam sido estabelecidas individualmente para os filtros biológicos e processos de lodos ativados. Com o sistema de controle, aumentos na vazão afluyente produziram reduções na vazão de recirculação do filtro e aumentos nas vazões de recirculação de lodo para o tanque de aeração; as vazões de descarte do lodo, por sua vez, permaneceram muito próximas de seus valores de equilíbrio. Na maior parte das simulações, a ação do controlador reduziu de forma substancial os desvios apresentados pelas concentrações de substrato e espessuras de biofilme no fundo do filtro biológico; como consequência, os desvios apresentados pelas variáveis de estado, que caracterizam o tanque de aeração e o decantador secundário, foram também consideravelmente reduzidos;
- Para fazer frente a impossibilidade de se medir todas as variáveis de estado, necessárias à realimentação dos controladores propostos, foram empregados observadores de estado. Para a definição de observadores de estado foram empregados modelos simplificados, nos quais um menor número de variáveis de estado é utilizado para descrever o comportamento dos processos de lodos ativados e filtros biológicos. Estes modelos, além de garantirem a completa observabilidade de estados (condição necessária e suficiente para a definição de observadores de estado de ordem plena), permitiram o estabelecimento de

sistemas de controle que apresentaram resultados muito próximos daqueles obtidos pelos sistemas de controle definidos a partir dos modelos completos;

- Para a definição dos observadores de estado aplicáveis aos processos de lodos ativados, as concentrações da parcela biodegradável de substrato estavam disponíveis para a realimentação do sistema de controle. Já para a definição dos observadores de estado destinados aos filtros biológicos, estavam disponíveis para a realimentação as concentrações de substrato no topo e no fundo do filtro. Os controladores com observação de estados assim estabelecidos permitiram melhorar de forma significativa o desempenho dos filtros biológicos e processos de lodos ativados, diminuindo os desvios das variáveis de estado em relação aos seus valores nominais e o tempo necessário para que as condições de equilíbrio fossem restabelecidas após a imposição de perturbações à vazão afluyente.

Como sugestões para futuras pesquisas que envolvam o desenvolvimento de sistemas de controle aplicáveis aos sistemas de tratamento de esgotos, podem ser relacionadas:

- Os modelos lineares utilizados para a definição dos controladores foram obtidos a partir da suposição de que apenas pequenos distúrbios ocorreriam no entorno das variáveis de estado e de controle. A acurácia destes modelos deve ser avaliada a partir da comparação dos resultados das simulações do comportamento dos sistemas de tratamento com resultados experimentais de campo ou laboratório;
- Os distúrbios considerados para o desenvolvimento dos controladores ficaram limitados aqueles causados pela variação da vazão afluyente aos filtros biológicos e processos de lodos ativados. Outros distúrbios, eventualmente relevantes para os sistemas de tratamento de esgotos, devem ser investigados;

- A determinação das matrizes de ponderação se deu a partir do Método Inverso Quadrático de Bryson. A utilização de outras técnicas de determinação das matrizes de ponderação (Controle Ótimo Modal, Fixação de uma estrutura modal ótima além de outras técnicas heurísticas) deve ser investigada.
- Deve ser investigado o estabelecimento de controladores para os sistemas de tratamento de esgotos a partir de outras técnicas de controle como, por exemplo, o Controle Não-linear, o Controle H_∞ e o Controle Robusto. Adicionalmente, devem ser investigados controladores que combinem o Controle Ótimo eo Controle Integral.
- Para o processo de lodos ativados devem ser estabelecidos sistemas de controle que permitam, além do controle da remoção da fração carbonácea da matéria orgânica, o controle da remoção de nutrientes;
- Embora o controle dos níveis de oxigênio dissolvido no tanque de aeração do processo de lodos ativados já tenha sido objeto de diversas aplicações das técnicas convencionais de controle, devem ser avaliados controladores que permitam manipular, simultaneamente, os níveis de oxigênio dissolvido e as vazões de recirculação e descarte do lodo;
- Para os filtros biológicos devem ser propostos controladores a partir de modelos que considerem a resistência externa a transferência de massa;
- O modelo empregado para o cálculo do fluxo de substrato em biofilmes profundos permite a obtenção do fluxo diretamente a partir das concentrações de substrato da massa líquida. Para biofilmes rasos e completamente penetrados modelos similares devem ser investigados;
- Os controladores propostos para os processos combinados consideravam o agrupamento, em série, de um filtro biológico, um tanque de aeração e um decantador secundário; neste arranjo, a recirculação para o filtro biológico

ocorreria a partir do efluente do próprio filtro. Controladores para outras configurações daquelas unidades de tratamento podem ser investigados;

- Para os processos combinados devem ser investigados controladores que possam ser estabelecidos a partir de modelos mais simples do comportamento do tanque de aeração, nos quais as diferentes parcelas do substrato não sejam separadamente avaliadas.

ANEXO I

MODELOS LINEARIZADOS

ANEXO I – MODELOS LINEARIZADOS

I.1 – Considerações gerais

Nas duas próximas seções serão apresentadas as equações utilizadas para definir as matrizes de estado (matriz **A**), de entrada (matriz **B**) e de transmissão de distúrbios (matriz **D_w**) dos modelos lineares que descrevem o comportamento dos filtros biológicos e dos tanques de aeração dos processos de lodos ativados. As variáveis e os parâmetros cinéticos ou estequiométricos que figuram nas expressões que se seguem foram definidos ao longo dos capítulos 4 e 6 e estão relacionados na lista de símbolos constante deste trabalho.

I.1 – Processo de lodos ativados excluía a dinâmica do decantador

Para a definição das matrizes de estado, de entrada e de transmissão de distúrbios do modelo que descreve o comportamento do tanque de aeração, devem ser consideradas as seguintes constantes:

$$c_1 = \mu \left(\frac{S_0}{K_0 + S_0} \right),$$

$$c_2 = K_s,$$

$$c_3 = b_h,$$

$$c_4 = \frac{1}{V},$$

$$c_5 = \frac{\bar{X}_{xi}}{V},$$

$$c_6 = \frac{\bar{X}_{ix}}{V},$$

$$c_7 = -\frac{1}{Y} \mu \left(\frac{S_0}{K_0 + S_0} \right),$$

$$c_8 = K_h \left(\frac{S_0}{K_0 + S_0} \right),$$

$$c_9 = K_x,$$

$$c_{10} = \frac{\bar{S}_{si}}{V},$$

$$c_{11} = \frac{\bar{S}_{sr}}{V},$$

$$c_{12} = (1 - f_b) b_h,$$

$$c_{13} = \frac{\bar{X}_{si}}{V},$$

$$c_{14} = \frac{\bar{X}_{sf}}{V},$$

$$c_{15} = f_b b_h,$$

$$c_{16} = \frac{\bar{X}_{pl}}{V},$$

$$c_{17} = \frac{\bar{X}_{pf}}{V},$$

$$c_{18} = \frac{\bar{S}_{ii}}{V},$$

$$c_{19} = \frac{\bar{S}_{sf}}{V},$$

$$c_{20} = \frac{\bar{X}_{ii}}{V},$$

$$c_{21} = \frac{\bar{X}_{ir}}{V}.$$

As equações que descrevem o comportamento do tanque de aeração deram origem aos seguintes elementos da matriz de estado:

$$A(1,1) = \left(\frac{c_1 \bar{S}_s}{c_2 + \bar{S}_s} \right) - c_3 - c_4 \bar{Q}_o - c_4 \bar{Q}_d,$$

$$A(2,2) = \left(\frac{(c_2 + \bar{S}_s) c_1 \bar{X}_b - c_1 \bar{X}_b \bar{S}_s}{(c_2 + \bar{S}_s)^2} \right),$$

$$A(1,6) = -c_4 \bar{X}_b,$$

$$A(1,7) = c_4 \bar{Q}_d,$$

$$A(2,1) = \left(\frac{c_7 \bar{S}_s}{c_2 + \bar{S}_s} \right) + \left(\frac{c_8 \left(\frac{\bar{X}_s}{\bar{X}_b} \right)}{c_9 + \left(\frac{\bar{X}_s}{\bar{X}_b} \right)} \right) + \frac{\left(\frac{c_8 \bar{X}_s^2}{\bar{X}_b} + \frac{\bar{X}_s}{\bar{X}_b} + c_0 \right) \left(-c_8 \frac{\bar{X}_s}{\bar{X}_b^2} \right)}{\left(c_9 + \left(\frac{\bar{X}_s}{\bar{X}_b} \right)^2 \right)} \bar{X}_b,$$

$$A(2,2) = \left(\frac{c_7 \bar{X}_b (c_2 + \bar{S}_s) - c_7 \bar{X}_b \bar{S}_s}{(c_2 + \bar{S}_s)^2} \right) - c_4 \bar{Q}_o - c_4 \bar{Q}_d,$$

$$A(2,3) = \frac{\frac{c_8}{\bar{X}_b} \left(c_9 + \frac{\bar{X}_s}{\bar{X}_b} \right) - \left(c_8 \frac{\bar{X}_s}{\bar{X}_b^2} \right)}{\left(c_9 + \frac{\bar{X}_s}{\bar{X}_b} \right)^2},$$

$$A(2,6) = -c_4 \bar{S}_s,$$

$$A(2,7) = c_4 \bar{Q}_d,$$

$$A(3,1) = c_{12} - \frac{\left(c_8 \left(\frac{\bar{X}_s}{\bar{X}_b} \right) \right)}{\left(c_9 + \left(\frac{\bar{X}_s}{\bar{X}_b} \right) \right)} + \frac{\left(\frac{c_8 \bar{X}_s^2}{\bar{X}_b^3} + \frac{\bar{X}_s}{\bar{X}_b} + c_9 \right) \left(c_8 \frac{\bar{X}_s}{\bar{X}_b^2} \right)}{\left(c_9 + \left(\frac{\bar{X}_s}{\bar{X}_b} \right) \right)^2} \bar{X}_b,$$

$$A(3,3) = \frac{\frac{c_8}{\bar{X}_b} \left(c_9 + \frac{\bar{X}_s}{\bar{X}_p} \right) + \left(c_8 \frac{\bar{X}_s}{\bar{X}_b^2} \right)}{\left(c_9 + \frac{\bar{X}_s}{\bar{X}_b} \right)^2} - c_4 \bar{Q}_o - c_4 \bar{Q}_d,$$

$$A(3,6) = -c_4 \bar{X}_s,$$

$$A(3,29) = c_4 \bar{Q}_d,$$

$$A(4,1) = c_{15},$$

$$A(4,4) = -c_4 \bar{Q}_o - c_4 \bar{Q}_d,$$

$$A(4,6) = -c_4 \bar{X}_p,$$

$$A(4,30) = c_4 \bar{Q}_d,$$

$$A(5,5) = -c_4 \bar{Q}_o - c_4 \bar{Q}_d,$$

$$A(5,6) = -c_4 \bar{X}_i,$$

$$A(5,31) = c_4 \bar{Q}_d,$$

$$A(6,6) = -1,$$

As equações utilizadas para descrever o comportamento do decantador secundário, por sua vez, definiram dos elementos da matriz de estado apresentados na sequência. As variáveis auxiliares $\hat{k}$ e $\bar{L}$ são repetidamente calculadas para cada uma das variáveis de estado consideradas ou para as diferentes camadas adotadas para o decantador, simplificando as expressões referentes aos elementos das matrizes de estado. Adicionalmente, convém observar que os índices subscritos que acompanham as variáveis de estados indicam o número da camada caracterizada pela variável; já o subscrito r indica as variáveis de estado na camada de fundo do decantador, cujos valores caracterizam o lodo recirculado ao tanque de aeração. Desta forma:

$$\hat{k} = h e^{\left[-\alpha \bar{X}_{b2} v e^{(-b \bar{X}_{b2})} + \alpha \bar{X}_{b1} v e^{(-b \bar{X}_{b1})} \right]},$$

$$A(7,1) = \frac{\bar{Q}_o}{A_s h},$$

$$A(7,6) = \frac{\bar{X}_b}{A_s h},$$

$$A(7,7) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ \frac{\left[\bar{X}_{b2} v e^{(-b \bar{X}_{b2})} \right] k \left[\alpha v e^{(-b \bar{X}_{b1})} - \alpha v \bar{X}_{b1} b e^{(-b \bar{X}_{b1})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{(h + \hat{k}) \left[v e^{(-b \bar{X}_{b1})} - v \bar{X}_{b1} b e^{(-b \bar{X}_{b1})} \right] - \left[\bar{X}_{b1} v e^{(-b \bar{X}_{b1})} \right] k \left[\alpha v e^{(-b \bar{X}_{b1})} - \alpha v \bar{X}_{b1} b e^{(-b \bar{X}_{b1})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\},$$

$$A(7,11) = -\frac{v e^{(-b\bar{X}_{b2})}}{h} + \frac{v \bar{X}_{b2} b e^{(-b\bar{X}_{b2})}}{h} + \left\{ \frac{(h+\hat{k}) \left[v e^{(-b\bar{X}_{b2})} - v \bar{X}_{b1} b e^{(-b\bar{X}_{b2})} \right] - \left[\bar{X}_{b2} v e^{(-b\bar{X}_{b2})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(-b\bar{X}_{b2})} + \alpha v \bar{X}_{b2} b e^{(-b\bar{X}_{b2})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{-\left[\bar{X}_{b1} v e^{(-b\bar{X}_{b1})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(-b\bar{X}_{b2})} + \alpha v \bar{X}_{b2} b e^{(-b\bar{X}_{b2})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\},$$

$$A(8,2) = \frac{\bar{Q}_o}{A_s h},$$

$$A(8,6) = \frac{\bar{S}_s}{A_s h},$$

$$A(8,8) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h},$$

$$\hat{k} = h e^{\left[-\alpha \bar{X}_{s2} v e^{(-b\bar{X}_{s2})} + \alpha \bar{X}_{s1} v e^{(-b\bar{X}_{s1})} \right]},$$

$$A(9,3) = \frac{\bar{Q}_o}{A_s h},$$

$$A(9,6) = \frac{\bar{X}_s}{A_s h},$$

$$A(9,9) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ \frac{\left[\bar{X}_{s2} v e^{(-b\bar{X}_{s2})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(-b\bar{X}_{s1})} - \alpha v \bar{X}_{s1} b e^{(-b\bar{X}_{s1})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{(h+\hat{k}) \left[v e^{(-b\bar{X}_{s1})} - v \bar{X}_{s1} b e^{(-b\bar{X}_{s1})} \right] - \left[\bar{X}_{s1} v e^{(-b\bar{X}_{s1})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(-b\bar{X}_{s1})} - \alpha v \bar{X}_{s1} b e^{(-b\bar{X}_{s1})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\},$$

$$A(9,14) = -\frac{v e^{(-b\bar{X}_{s2})}}{h} + \frac{v \bar{X}_{s2} b e^{(-b\bar{X}_{s2})}}{h} + \left\{ \frac{(h+\hat{k}) \left[v e^{(-b\bar{X}_{s2})} - v \bar{X}_{s1} b e^{(-b\bar{X}_{s2})} \right] - \left[\bar{X}_{s2} v e^{(-b\bar{X}_{s2})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(-b\bar{X}_{s2})} + \alpha v \bar{X}_{s2} b e^{(-b\bar{X}_{s2})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{-\left[\bar{X}_{s1} v e^{(-b\bar{X}_{s1})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(-b\bar{X}_{s2})} + \alpha v \bar{X}_{s2} b e^{(-b\bar{X}_{s2})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\},$$

$$\hat{k} = h e^{\left[-\alpha \bar{X}_{p2} v e^{(-b\bar{X}_{p2})} + \alpha \bar{X}_{p1} v e^{(-b\bar{X}_{p1})} \right]},$$

$$A(10,4) = \frac{\bar{Q}_o}{A_s h},$$

$$A(10,6) = \frac{\bar{X}_p}{A_s h},$$

$$A(10,10) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ \frac{\left[\bar{X}_{p2} v e^{(-b\bar{X}_{p2})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(-b\bar{X}_{p1})} - \alpha v \bar{X}_{p1} b e^{(-b\bar{X}_{p1})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{(h+\hat{k}) \left[v e^{(-b\bar{X}_{p1})} - v \bar{X}_{p1} b e^{(-b\bar{X}_{p1})} \right] - \left[\bar{X}_{p1} v e^{(-b\bar{X}_{p1})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(-b\bar{X}_{p1})} - \alpha v \bar{X}_{p1} b e^{(-b\bar{X}_{p1})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\},$$

$$A(10,15) = -\frac{v e^{(b\bar{x}_{p2})}}{h} + \frac{v \bar{x}_{p2} b e^{(b\bar{x}_{p2})}}{h} + \left\{ \frac{(h+\hat{k}) \left[v e^{(b\bar{x}_{p2})} - v \bar{x}_{p1} b e^{(b\bar{x}_{p2})} \right] - \left[\bar{x}_{p2} v e^{(b\bar{x}_{p2})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b\bar{x}_{p2})} + \alpha v \bar{x}_{p2} b e^{(b\bar{x}_{p2})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{-\left[\bar{x}_{p1} v e^{(b\bar{x}_{p1})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b\bar{x}_{p2})} + \alpha v \bar{x}_{p2} b e^{(b\bar{x}_{p2})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\},$$

$$\hat{k} = h e^{\left[-\alpha \bar{x}_{12} v e^{(b\bar{x}_{12})} + \alpha \bar{x}_{11} v e^{(b\bar{x}_{11})} \right]},$$

$$A(11,5) = \frac{\bar{Q}_o}{A_s h},$$

$$A(11,6) = \frac{\bar{x}_i}{A_s h},$$

$$A(11,11) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ \frac{\left[\bar{x}_{i2} v e^{(b\bar{x}_{i2})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b\bar{x}_{i1})} - \alpha v \bar{x}_{i1} b e^{(b\bar{x}_{i1})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{(h+\hat{k}) \left[v e^{(b\bar{x}_{i1})} - v \bar{x}_{i1} b e^{(b\bar{x}_{i1})} \right] - \left[\bar{x}_{i1} v e^{(b\bar{x}_{i1})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b\bar{x}_{i1})} - \alpha v \bar{x}_{i1} b e^{(b\bar{x}_{i1})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\},$$

$$A(11,15) = -\frac{v e^{(b\bar{x}_{i2})}}{h} + \frac{v \bar{x}_{i2} b e^{(b\bar{x}_{i2})}}{h} + \left\{ \frac{(h+\hat{k}) \left[v e^{(b\bar{x}_{i2})} - v \bar{x}_{i1} b e^{(b\bar{x}_{i2})} \right] - \left[\bar{x}_{i2} v e^{(b\bar{x}_{i2})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b\bar{x}_{i2})} + \alpha v \bar{x}_{i2} b e^{(b\bar{x}_{i2})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{-\left[\bar{x}_{i1} v e^{(b\bar{x}_{i1})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b\bar{x}_{i2})} + \alpha v \bar{x}_{i2} b e^{(b\bar{x}_{i2})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\},$$

$$\hat{k} = h e^{\left[-\alpha \bar{x}_{b2} v e^{(b\bar{x}_{b2})} + \alpha \bar{x}_{b1} v e^{(b\bar{x}_{b1})} \right]},$$

$$\hat{L} = h e^{\left[-\alpha \bar{x}_{b3} v e^{(b\bar{x}_{b3})} + \alpha \bar{x}_{b2} v e^{(b\bar{x}_{b2})} \right]},$$

$$A(12,7) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ \frac{\left[\bar{x}_{b2} v e^{(b\bar{x}_{b2})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b\bar{x}_{b1})} - \alpha v \bar{x}_{b1} b e^{(b\bar{x}_{b1})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$\dots + \left\{ \frac{(h+\hat{k}) \left[v e^{(b\bar{x}_{b1})} - v \bar{x}_{b1} b e^{(b\bar{x}_{b1})} \right] - \left[\bar{x}_{b1} v e^{(b\bar{x}_{b1})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b\bar{x}_{b1})} - \alpha v \bar{x}_{b1} b e^{(b\bar{x}_{b1})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\},$$

$$A(12,12) = -\frac{Q_r}{A_s h} + \frac{v e^{(b\bar{x}_{b2})}}{h} - \frac{v \bar{x}_{b2} b e^{(b\bar{x}_{b2})}}{h} - \left\{ \frac{(h+\hat{k}) \left[v e^{(b\bar{x}_{b2})} - v \bar{x}_{b2} b e^{(b\bar{x}_{b2})} \right] - \left[\bar{x}_{b2} v e^{(b\bar{x}_{b2})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b\bar{x}_{b2})} + \alpha v \bar{x}_{b2} b e^{(b\bar{x}_{b2})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$\dots + \left\{ \frac{-\left[\bar{x}_{b1} v e^{(b\bar{x}_{b1})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b\bar{x}_{b2})} + \alpha v \bar{x}_{b2} b e^{(b\bar{x}_{b2})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\} + \left\{ \frac{-\left[\bar{x}_{b3} v e^{(b\bar{x}_{b3})} \right] \hat{L} \left[\alpha v e^{(b\bar{x}_{b2})} + \alpha v \bar{x}_{b2} b e^{(b\bar{x}_{b2})} \right]}{(h+\hat{L})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{(h+\hat{L}) \left[v e^{(b\bar{x}_{b2})} - v \bar{x}_{b2} b e^{(b\bar{x}_{b2})} \right] - \left[\bar{x}_{b2} v e^{(b\bar{x}_{b2})} \right] \hat{L} \left[\alpha v e^{(b\bar{x}_{b2})} - \alpha v \bar{x}_{b2} b e^{(b\bar{x}_{b2})} \right]}{(h+\hat{L})^2} \right\},$$

$$A(12,17) = -\frac{v e^{(b\bar{x}_{b3})}}{h} + \frac{v \bar{x}_{b3} b e^{(b\bar{x}_{b3})}}{h} - \left\{ \frac{(h+\hat{L}) \left[v e^{(b\bar{x}_{b3})} - v \bar{x}_{b3} b e^{(b\bar{x}_{b3})} \right] - \left[\bar{x}_{b3} v e^{(b\bar{x}_{b3})} \right] \hat{L} \left[-\alpha v e^{(b\bar{x}_{b3})} + \alpha v \bar{x}_{b3} b e^{(b\bar{x}_{b3})} \right]}{(h+\hat{L})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{-\left[\bar{x}_{b2} v e^{(b\bar{x}_{b2})} \right] \hat{L} \left[-\alpha v e^{(b\bar{x}_{b3})} + \alpha v \bar{x}_{b3} b e^{(b\bar{x}_{b3})} \right]}{(h+\hat{L})^2} \right\},$$

$$A(13,8) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h},$$

$$A(13,13) = -\frac{\bar{Q}_r}{A_s h}$$

$$\hat{k} = h e^{\left[-\alpha \bar{X}_{s2} v e^{(-b \bar{X}_{s2})} + \alpha \bar{X}_{s1} v e^{(-b \bar{X}_{s1})} \right]},$$

$$\hat{L} = h e^{\left[-\alpha \bar{X}_{s3} v e^{(-b \bar{X}_{s3})} + \alpha \bar{X}_{s2} v e^{(-b \bar{X}_{s2})} \right]},$$

$$A(14,9) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ -\frac{\left[\bar{X}_{s2} v e^{(-b \bar{X}_{s2})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b \bar{X}_{s1})} - \alpha v \bar{X}_{s1} b e^{(b \bar{X}_{s1})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$\dots + \left\{ \frac{(h + \hat{k}) \left[v e^{(b \bar{X}_{s1})} - v \bar{X}_{s1} b e^{(b \bar{X}_{s1})} \right] - \left[\bar{X}_{s1} v e^{(-b \bar{X}_{s1})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b \bar{X}_{s1})} - \alpha v \bar{X}_{s1} b e^{(b \bar{X}_{s1})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\},$$

$$A(14,14) = -\frac{\bar{Q}_r}{A_s h} + \frac{v e^{(b \bar{X}_{s2})}}{h} - \frac{v \bar{X}_{s2} b e^{(b \bar{X}_{s2})}}{h} - \left\{ \frac{(h + \hat{k}) \left[v e^{(b \bar{X}_{s2})} - v \bar{X}_{s2} b e^{(b \bar{X}_{s2})} \right] - \left[\bar{X}_{s2} v e^{(-b \bar{X}_{s2})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b \bar{X}_{s2})} + \alpha v \bar{X}_{s2} b e^{(b \bar{X}_{s2})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$\dots + \left\{ \frac{-\left[\bar{X}_{s1} v e^{(-b \bar{X}_{s1})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b \bar{X}_{s2})} + \alpha v \bar{X}_{s2} b e^{(b \bar{X}_{s2})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \left\{ \frac{-\left[\bar{X}_{s3} v e^{(-b \bar{X}_{s3})} \right] \hat{L} \left[\alpha v e^{(b \bar{X}_{s2})} + \alpha v \bar{X}_{s2} b e^{(b \bar{X}_{s2})} \right]}{(h + \hat{L})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{(h + \hat{L}) \left[v e^{(b \bar{X}_{s2})} - v \bar{X}_{s2} b e^{(b \bar{X}_{s2})} \right] - \left[\bar{X}_{s2} v e^{(-b \bar{X}_{s2})} \right] \hat{L} \left[\alpha v e^{(b \bar{X}_{s2})} - \alpha v \bar{X}_{s2} b e^{(b \bar{X}_{s2})} \right]}{(h + \hat{L})^2} \right\},$$

$$A(14,19) = -\frac{v e^{(b \bar{X}_{s3})}}{h} + \frac{v \bar{X}_{s3} b e^{(b \bar{X}_{s3})}}{h} - \left\{ \frac{(h + \hat{L}) \left[v e^{(b \bar{X}_{s3})} - v \bar{X}_{s3} b e^{(b \bar{X}_{s3})} \right] - \left[\bar{X}_{s3} v e^{(-b \bar{X}_{s3})} \right] \hat{L} \left[-\alpha v e^{(b \bar{X}_{s3})} + \alpha v \bar{X}_{s3} b e^{(b \bar{X}_{s3})} \right]}{(h + \hat{L})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{-\left[\bar{X}_{s2} v e^{(-b \bar{X}_{s2})} \right] \hat{L} \left[-\alpha v e^{(b \bar{X}_{s3})} + \alpha v \bar{X}_{s3} b e^{(b \bar{X}_{s3})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\},$$

$$\hat{k} = h e^{\left[-\alpha \bar{X}_{p2} v e^{(-b \bar{X}_{p2})} + \alpha \bar{X}_{p1} v e^{(-b \bar{X}_{p1})} \right]},$$

$$\hat{L} = h e^{\left[-\alpha \bar{X}_{p3} v e^{(-b \bar{X}_{p3})} + \alpha \bar{X}_{p2} v e^{(-b \bar{X}_{p2})} \right]},$$

$$A(15,10) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ -\frac{\left[\bar{X}_{p2} v e^{(-b \bar{X}_{p2})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b \bar{X}_{p1})} - \alpha v \bar{X}_{p1} b e^{(b \bar{X}_{p1})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$\dots + \left\{ \frac{(h + \hat{k}) \left[v e^{(b \bar{X}_{p1})} - v \bar{X}_{p1} b e^{(b \bar{X}_{p1})} \right] - \left[\bar{X}_{p1} v e^{(-b \bar{X}_{p1})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b \bar{X}_{p1})} - \alpha v \bar{X}_{p1} b e^{(b \bar{X}_{p1})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\},$$

$$\begin{aligned}
A(15,15) &= -\frac{Q_r}{A_s h} + \frac{v e^{(b\bar{X}_{p2})}}{h} - \frac{v \bar{X}_{p2} b e^{(b\bar{X}_{p2})}}{h} - \left\{ \frac{(h+\hat{k}) \left[v e^{(b\bar{X}_{p2})} - v \bar{X}_{p2} b e^{(b\bar{X}_{p2})} \right] - [\bar{X}_{p2} v e^{(b\bar{X}_{p2})}] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b\bar{X}_{p2})} + \alpha v \bar{X}_{p2} b e^{(b\bar{X}_{p2})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\} + \dots \\
&\dots + \left\{ \frac{-[\bar{X}_{p1} v e^{(b\bar{X}_{p1})}] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b\bar{X}_{p2})} + \alpha v \bar{X}_{p2} b e^{(b\bar{X}_{p2})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\} + \left\{ \frac{-[\bar{X}_{p3} v e^{(b\bar{X}_{p3})}] \hat{L} \left[\alpha v e^{(b\bar{X}_{p2})} + \alpha v \bar{X}_{p2} b e^{(b\bar{X}_{p2})} \right]}{(h+\hat{L})^2} \right\} - \dots \\
&\dots - \left\{ \frac{(h+\hat{L}) \left[v e^{(b\bar{X}_{p2})} - v \bar{X}_{p2} b e^{(b\bar{X}_{p2})} \right] - [\bar{X}_{p2} v e^{(b\bar{X}_{p2})}] \hat{L} \left[\alpha v e^{(b\bar{X}_{p2})} - \alpha v \bar{X}_{p2} b e^{(b\bar{X}_{p2})} \right]}{(h+\hat{L})^2} \right\}, \\
A(15,20) &= -\frac{v e^{(b\bar{X}_{p3})}}{h} + \frac{v \bar{X}_{p3} b e^{(b\bar{X}_{p3})}}{h} - \left\{ \frac{(h+\hat{L}) \left[v e^{(b\bar{X}_{p3})} - v \bar{X}_{p3} b e^{(b\bar{X}_{p3})} \right] - [\bar{X}_{p3} v e^{(b\bar{X}_{p3})}] \hat{L} \left[-\alpha v e^{(b\bar{X}_{p3})} + \alpha v \bar{X}_{p3} b e^{(b\bar{X}_{p3})} \right]}{(h+\hat{L})^2} \right\} - \dots \\
&\dots - \left\{ \frac{-[\bar{X}_{p2} v e^{(b\bar{X}_{p2})}] \hat{L} \left[-\alpha v e^{(b\bar{X}_{p3})} + \alpha v \bar{X}_{p3} b e^{(b\bar{X}_{p3})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\},
\end{aligned}$$

$$\hat{k} = h e^{\left[-a\bar{X}_{12} v e^{(b\bar{X}_{12})} + a\bar{X}_{11} v e^{(b\bar{X}_{11})} \right]},$$

$$\hat{L} = h e^{\left[-a\bar{X}_{13} v e^{(b\bar{X}_{13})} + a\bar{X}_{12} v e^{(b\bar{X}_{12})} \right]},$$

$$\begin{aligned}
A(16,11) &= \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ \frac{[\bar{X}_{12} v e^{(b\bar{X}_{12})}] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b\bar{X}_{11})} - \alpha v \bar{X}_{11} b e^{(b\bar{X}_{11})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\} + \dots \\
&\dots + \left\{ \frac{(h+\hat{k}) \left[v e^{(b\bar{X}_{11})} - v \bar{X}_{11} b e^{(b\bar{X}_{11})} \right] - [\bar{X}_{11} v e^{(b\bar{X}_{11})}] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b\bar{X}_{11})} - \alpha v \bar{X}_{11} b e^{(b\bar{X}_{11})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(16,16) &= -\frac{Q_r}{A_s h} + \frac{v e^{(b\bar{X}_{12})}}{h} - \frac{v \bar{X}_{12} b e^{(b\bar{X}_{12})}}{h} - \left\{ \frac{(h+\hat{k}) \left[v e^{(b\bar{X}_{12})} - v \bar{X}_{12} b e^{(b\bar{X}_{12})} \right] - [\bar{X}_{12} v e^{(b\bar{X}_{12})}] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b\bar{X}_{12})} + \alpha v \bar{X}_{12} b e^{(b\bar{X}_{12})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\} + \dots \\
&\dots + \left\{ \frac{-[\bar{X}_{11} v e^{(b\bar{X}_{11})}] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b\bar{X}_{12})} + \alpha v \bar{X}_{12} b e^{(b\bar{X}_{12})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\} + \left\{ \frac{-[\bar{X}_{13} v e^{(b\bar{X}_{13})}] \hat{L} \left[\alpha v e^{(b\bar{X}_{12})} + \alpha v \bar{X}_{12} b e^{(b\bar{X}_{12})} \right]}{(h+\hat{L})^2} \right\} - \dots \\
&\dots - \left\{ \frac{(h+\hat{L}) \left[v e^{(b\bar{X}_{12})} - v \bar{X}_{12} b e^{(b\bar{X}_{12})} \right] - [\bar{X}_{12} v e^{(b\bar{X}_{12})}] \hat{L} \left[\alpha v e^{(b\bar{X}_{12})} - \alpha v \bar{X}_{12} b e^{(b\bar{X}_{12})} \right]}{(h+\hat{L})^2} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(16,21) &= -\frac{v e^{(b\bar{X}_{13})}}{h} + \frac{v \bar{X}_{13} b e^{(b\bar{X}_{13})}}{h} - \left\{ \frac{(h+\hat{L}) \left[v e^{(b\bar{X}_{13})} - v \bar{X}_{13} b e^{(b\bar{X}_{13})} \right] - [\bar{X}_{13} v e^{(b\bar{X}_{13})}] \hat{L} \left[-\alpha v e^{(b\bar{X}_{13})} + \alpha v \bar{X}_{13} b e^{(b\bar{X}_{13})} \right]}{(h+\hat{L})^2} \right\} - \dots \\
&\dots - \left\{ \frac{-[\bar{X}_{12} v e^{(b\bar{X}_{12})}] \hat{L} \left[-\alpha v e^{(b\bar{X}_{13})} + \alpha v \bar{X}_{13} b e^{(b\bar{X}_{13})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\},
\end{aligned}$$

$$\hat{k} = h e^{\left[-a\bar{X}_{b3} v e^{(b\bar{X}_{b3})} + a\bar{X}_{b2} v e^{(b\bar{X}_{b2})} \right]},$$

$$\hat{L} = h e^{\left[-a\bar{X}_{b4} v e^{(b\bar{X}_{b4})} + a\bar{X}_{b3} v e^{(b\bar{X}_{b3})} \right]},$$

$$\begin{aligned}
A(17,12) &= \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ \frac{[\bar{X}_{b3} v e^{(b\bar{X}_{b3})}] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b\bar{X}_{b2})} - \alpha v \bar{X}_{b2} b e^{(b\bar{X}_{b2})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\} + \dots \\
&\dots + \left\{ \frac{(h+\hat{k}) \left[v e^{(b\bar{X}_{b2})} - v \bar{X}_{b2} b e^{(b\bar{X}_{b2})} \right] - [\bar{X}_{b2} v e^{(b\bar{X}_{b2})}] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b\bar{X}_{b2})} - \alpha v \bar{X}_{b2} b e^{(b\bar{X}_{b2})} \right]}{(h+\hat{k})^2} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(17,17) &= -\frac{Q_r}{A_s h} + \frac{v e^{(b\bar{X}_{b3})}}{h} - \frac{v \bar{X}_{b3} b e^{(b\bar{X}_{b3})}}{h} - \left\{ \frac{(h+\hat{k})[v e^{(b\bar{X}_{b3})} - v \bar{X}_{b3} b e^{(b\bar{X}_{b3})}] - [\bar{X}_{b3} v e^{(b\bar{X}_{b3})}] \hat{k} [-\alpha v e^{(b\bar{X}_{b3})} + \alpha v \bar{X}_{b3} b e^{(b\bar{X}_{b3})}]}{(h+\hat{k})^2} \right\} + \dots \\
&\dots + \left\{ \frac{-[\bar{X}_{b2} v e^{(b\bar{X}_{b2})}] \hat{k} [-\alpha v e^{(b\bar{X}_{b3})} + \alpha v \bar{X}_{b3} b e^{(b\bar{X}_{b3})}]}{(h+\hat{k})^2} \right\} + \left\{ \frac{-[\bar{X}_{b4} v e^{(b\bar{X}_{b4})}] \hat{L} [\alpha v e^{(b\bar{X}_{b3})} + \alpha v \bar{X}_{b3} b e^{(b\bar{X}_{b3})}]}{(h+\hat{L})^2} \right\} - \dots \\
&\dots - \left\{ \frac{(h+\hat{L})[v e^{(b\bar{X}_{b3})} - v \bar{X}_{b3} b e^{(b\bar{X}_{b3})}] - [\bar{X}_{b3} v e^{(b\bar{X}_{b3})}] \hat{L} [\alpha v e^{(b\bar{X}_{b3})} - \alpha v \bar{X}_{b3} b e^{(b\bar{X}_{b3})}]}{(h+\hat{L})^2} \right\}, \\
A(17,22) &= -\frac{v e^{(b\bar{X}_{b4})}}{h} + \frac{v \bar{X}_{b4} b e^{(b\bar{X}_{b4})}}{h} - \left\{ \frac{(h+\hat{L})[v e^{(b\bar{X}_{b4})} - v \bar{X}_{b4} b e^{(b\bar{X}_{b4})}] - [\bar{X}_{b4} v e^{(b\bar{X}_{b4})}] \hat{L} [-\alpha v e^{(b\bar{X}_{b4})} + \alpha v \bar{X}_{b4} b e^{(b\bar{X}_{b4})}]}{(h+\hat{L})^2} \right\} - \dots \\
&\dots - \left\{ \frac{-[\bar{X}_{b3} v e^{(b\bar{X}_{b3})}] \hat{L} [-\alpha v e^{(b\bar{X}_{b4})} + \alpha v \bar{X}_{b4} b e^{(b\bar{X}_{b4})}]}{(h+\hat{k})^2} \right\},
\end{aligned}$$

$$A(18,13) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h},$$

$$A(18,18) = -\frac{\bar{Q}_r}{A_s h}$$

$$\hat{k} = h e^{\left[-\alpha \bar{X}_{s3} v e^{(b\bar{X}_{s3})} + \alpha \bar{X}_{s2} v e^{(b\bar{X}_{s2})} \right]},$$

$$\hat{L} = h e^{\left[-\alpha \bar{X}_{s4} v e^{(b\bar{X}_{s4})} + \alpha \bar{X}_{s3} v e^{(b\bar{X}_{s3})} \right]},$$

$$\begin{aligned}
A(19,14) &= \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ \frac{[\bar{X}_{s3} v e^{(b\bar{X}_{s3})}] \hat{k} [\alpha v e^{(b\bar{X}_{s2})} - \alpha v \bar{X}_{s2} b e^{(b\bar{X}_{s2})}]}{(h+\hat{k})^2} \right\} + \dots \\
&\dots + \left\{ \frac{(h+\hat{k})[v e^{(b\bar{X}_{s2})} - v \bar{X}_{s2} b e^{(b\bar{X}_{s2})}] - [\bar{X}_{s2} v e^{(b\bar{X}_{s2})}] \hat{k} [\alpha v e^{(b\bar{X}_{s2})} - \alpha v \bar{X}_{s2} b e^{(b\bar{X}_{s2})}]}{(h+\hat{k})^2} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(19,19) &= -\frac{Q_r}{A_s h} + \frac{v e^{(b\bar{X}_{s3})}}{h} - \frac{v \bar{X}_{s3} b e^{(b\bar{X}_{s3})}}{h} - \left\{ \frac{(h+\hat{k})[v e^{(b\bar{X}_{s3})} - v \bar{X}_{s3} b e^{(b\bar{X}_{s3})}] - [\bar{X}_{s3} v e^{(b\bar{X}_{s3})}] \hat{k} [-\alpha v e^{(b\bar{X}_{s3})} + \alpha v \bar{X}_{s3} b e^{(b\bar{X}_{s3})}]}{(h+\hat{k})^2} \right\} + \dots \\
&\dots + \left\{ \frac{-[\bar{X}_{s2} v e^{(b\bar{X}_{s2})}] \hat{k} [-\alpha v e^{(b\bar{X}_{s3})} + \alpha v \bar{X}_{s3} b e^{(b\bar{X}_{s3})}]}{(h+\hat{k})^2} \right\} + \left\{ \frac{-[\bar{X}_{s4} v e^{(b\bar{X}_{s4})}] \hat{L} [\alpha v e^{(b\bar{X}_{s3})} + \alpha v \bar{X}_{s3} b e^{(b\bar{X}_{s3})}]}{(h+\hat{L})^2} \right\} - \dots \\
&\dots - \left\{ \frac{(h+\hat{L})[v e^{(b\bar{X}_{s3})} - v \bar{X}_{s3} b e^{(b\bar{X}_{s3})}] - [\bar{X}_{s3} v e^{(b\bar{X}_{s3})}] \hat{L} [\alpha v e^{(b\bar{X}_{s3})} - \alpha v \bar{X}_{s3} b e^{(b\bar{X}_{s3})}]}{(h+\hat{L})^2} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(19,24) &= -\frac{v e^{(b\bar{X}_{s4})}}{h} + \frac{v \bar{X}_{s4} b e^{(b\bar{X}_{s4})}}{h} - \left\{ \frac{(h+\hat{L})[v e^{(b\bar{X}_{s4})} - v \bar{X}_{s4} b e^{(b\bar{X}_{s4})}] - [\bar{X}_{s4} v e^{(b\bar{X}_{s4})}] \hat{L} [-\alpha v e^{(b\bar{X}_{s4})} + \alpha v \bar{X}_{s4} b e^{(b\bar{X}_{s4})}]}{(h+\hat{L})^2} \right\} - \dots \\
&\dots - \left\{ \frac{-[\bar{X}_{s3} v e^{(b\bar{X}_{s3})}] \hat{L} [-\alpha v e^{(b\bar{X}_{s4})} + \alpha v \bar{X}_{s4} b e^{(b\bar{X}_{s4})}]}{(h+\hat{k})^2} \right\},
\end{aligned}$$

$$\hat{k} = h e^{\left[-a\bar{x}_{p3}v e^{(-b\bar{x}_{p3})} + a\bar{x}_{p2}v e^{(-b\bar{x}_{p2})} \right]},$$

$$\hat{L} = h e^{\left[-a\bar{x}_{p4}v e^{(-b\bar{x}_{p4})} + a\bar{x}_{p3}v e^{(-b\bar{x}_{p3})} \right]},$$

$$A(20,15) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ \frac{\left[\bar{x}_{p3} v e^{(-b\bar{x}_{p3})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b\bar{x}_{p2})} - \alpha v \bar{x}_{p2} b e^{(b\bar{x}_{p2})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$+ \dots + \left\{ \frac{(h + \hat{k}) \left[v e^{(b\bar{x}_{p2})} - v \bar{x}_{p2} b e^{(b\bar{x}_{p2})} \right] - \left[\bar{x}_{p2} v e^{(-b\bar{x}_{p2})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b\bar{x}_{p2})} - \alpha v \bar{x}_{p2} b e^{(b\bar{x}_{p2})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\},$$

$$A(20,20) = -\frac{Q_r}{A_s h} + \frac{v e^{(b\bar{x}_{p3})}}{h} - \frac{v \bar{x}_{p3} b e^{(b\bar{x}_{p3})}}{h} - \left\{ \frac{(h + \hat{k}) \left[v e^{(b\bar{x}_{p3})} - v \bar{x}_{p3} b e^{(b\bar{x}_{p3})} \right] - \left[\bar{x}_{p3} v e^{(-b\bar{x}_{p3})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b\bar{x}_{p3})} + \alpha v \bar{x}_{p3} b e^{(b\bar{x}_{p3})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$+ \dots + \left\{ \frac{-\left[\bar{x}_{p2} v e^{(-b\bar{x}_{p2})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b\bar{x}_{p3})} + \alpha v \bar{x}_{p3} b e^{(b\bar{x}_{p3})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \left\{ \frac{-\left[\bar{x}_{p4} v e^{(-b\bar{x}_{p4})} \right] \hat{L} \left[\alpha v e^{(b\bar{x}_{p3})} + \alpha v \bar{x}_{p3} b e^{(b\bar{x}_{p3})} \right]}{(h + \hat{L})^2} \right\} - \dots$$

$$- \dots - \left\{ \frac{(h + \hat{L}) \left[v e^{(b\bar{x}_{p3})} - v \bar{x}_{p3} b e^{(b\bar{x}_{p3})} \right] - \left[\bar{x}_{p3} v e^{(-b\bar{x}_{p3})} \right] \hat{L} \left[\alpha v e^{(b\bar{x}_{p3})} - \alpha v \bar{x}_{p3} b e^{(b\bar{x}_{p3})} \right]}{(h + \hat{L})^2} \right\},$$

$$A(20,25) = -\frac{v e^{(b\bar{x}_{p4})}}{h} + \frac{v \bar{x}_{p4} b e^{(b\bar{x}_{p4})}}{h} - \left\{ \frac{(h + \hat{L}) \left[v e^{(b\bar{x}_{p4})} - v \bar{x}_{p4} b e^{(b\bar{x}_{p4})} \right] - \left[\bar{x}_{p4} v e^{(-b\bar{x}_{p4})} \right] \hat{L} \left[-\alpha v e^{(b\bar{x}_{p4})} + \alpha v \bar{x}_{p4} b e^{(b\bar{x}_{p4})} \right]}{(h + \hat{L})^2} \right\} - \dots$$

$$- \dots - \left\{ \frac{-\left[\bar{x}_{p3} v e^{(-b\bar{x}_{p3})} \right] \hat{L} \left[-\alpha v e^{(b\bar{x}_{p4})} + \alpha v \bar{x}_{p4} b e^{(b\bar{x}_{p4})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\},$$

$$\hat{k} = h e^{\left[-a\bar{x}_{i3}v e^{(-b\bar{x}_{i3})} + a\bar{x}_{i2}v e^{(-b\bar{x}_{i2})} \right]},$$

$$\hat{L} = h e^{\left[-a\bar{x}_{i4}v e^{(-b\bar{x}_{i4})} + a\bar{x}_{i3}v e^{(-b\bar{x}_{i3})} \right]},$$

$$A(21,16) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ \frac{\left[\bar{x}_{i3} v e^{(-b\bar{x}_{i3})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b\bar{x}_{i2})} - \alpha v \bar{x}_{i2} b e^{(b\bar{x}_{i2})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$+ \dots + \left\{ \frac{(h + \hat{k}) \left[v e^{(b\bar{x}_{i2})} - v \bar{x}_{i2} b e^{(b\bar{x}_{i2})} \right] - \left[\bar{x}_{i2} v e^{(-b\bar{x}_{i2})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b\bar{x}_{i2})} - \alpha v \bar{x}_{i2} b e^{(b\bar{x}_{i2})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\},$$

$$A(21,21) = -\frac{Q_r}{A_s h} + \frac{v e^{(b\bar{x}_{i3})}}{h} - \frac{v \bar{x}_{i3} b e^{(b\bar{x}_{i3})}}{h} - \left\{ \frac{(h + \hat{k}) \left[v e^{(b\bar{x}_{i3})} - v \bar{x}_{i3} b e^{(b\bar{x}_{i3})} \right] - \left[\bar{x}_{i3} v e^{(-b\bar{x}_{i3})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b\bar{x}_{i3})} + \alpha v \bar{x}_{i3} b e^{(b\bar{x}_{i3})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$+ \dots + \left\{ \frac{-\left[\bar{x}_{i2} v e^{(-b\bar{x}_{i2})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b\bar{x}_{i3})} + \alpha v \bar{x}_{i3} b e^{(b\bar{x}_{i3})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \left\{ \frac{-\left[\bar{x}_{i4} v e^{(-b\bar{x}_{i4})} \right] \hat{L} \left[\alpha v e^{(b\bar{x}_{i3})} + \alpha v \bar{x}_{i3} b e^{(b\bar{x}_{i3})} \right]}{(h + \hat{L})^2} \right\} - \dots$$

$$- \dots - \left\{ \frac{(h + \hat{L}) \left[v e^{(b\bar{x}_{i3})} - v \bar{x}_{i3} b e^{(b\bar{x}_{i3})} \right] - \left[\bar{x}_{i3} v e^{(-b\bar{x}_{i3})} \right] \hat{L} \left[\alpha v e^{(b\bar{x}_{i3})} - \alpha v \bar{x}_{i3} b e^{(b\bar{x}_{i3})} \right]}{(h + \hat{L})^2} \right\},$$

$$A(21,26) = -\frac{v e^{(b\bar{x}_{i4})}}{h} + \frac{v \bar{x}_{i4} b e^{(b\bar{x}_{i4})}}{h} - \left\{ \frac{(h + \hat{L}) \left[v e^{(b\bar{x}_{i4})} - v \bar{x}_{i4} b e^{(b\bar{x}_{i4})} \right] - \left[\bar{x}_{i4} v e^{(-b\bar{x}_{i4})} \right] \hat{L} \left[-\alpha v e^{(b\bar{x}_{i4})} + \alpha v \bar{x}_{i4} b e^{(b\bar{x}_{i4})} \right]}{(h + \hat{L})^2} \right\} - \dots$$

$$- \dots - \left\{ \frac{-\left[\bar{x}_{i3} v e^{(-b\bar{x}_{i3})} \right] \hat{L} \left[-\alpha v e^{(b\bar{x}_{i4})} + \alpha v \bar{x}_{i4} b e^{(b\bar{x}_{i4})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\},$$

$$\hat{k} = h e^{\left[-a\bar{x}_{b4} v e^{(-b\bar{x}_{b4})} + a\bar{x}_{b3} v e^{(-b\bar{x}_{b3})} \right]},$$

$$\hat{L} = h e^{\left[-a\bar{x}_{tr} v e^{(-b\bar{x}_{tr})} + a\bar{x}_{b4} v e^{(-b\bar{x}_{b4})} \right]},$$

$$A(22,17) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ \frac{[\bar{x}_{b4} v e^{(-b\bar{x}_{b4})}] \hat{k} [\alpha v e^{(b\bar{x}_{b3})} - \alpha v \bar{x}_{b3} b e^{(b\bar{x}_{b3})}]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$\dots + \left\{ \frac{(h + \hat{k}) [v e^{(b\bar{x}_{b3})} - v \bar{x}_{b3} b e^{(b\bar{x}_{b3})}] - [\bar{x}_{b3} v e^{(-b\bar{x}_{b3})}] \hat{k} [\alpha v e^{(b\bar{x}_{b3})} - \alpha v \bar{x}_{b3} b e^{(b\bar{x}_{b3})}]}{(h + \hat{k})^2} \right\}.$$

$$A(22,22) = -\frac{\bar{Q}_r}{A_s h} + \frac{v e^{(b\bar{x}_{b4})}}{h} - \frac{v \bar{x}_{b4} b e^{(b\bar{x}_{b4})}}{h} - \left\{ \frac{(h + \hat{k}) [v e^{(b\bar{x}_{b4})} - v \bar{x}_{b4} b e^{(b\bar{x}_{b4})}] - [\bar{x}_{b4} v e^{(-b\bar{x}_{b4})}] \hat{k} [-\alpha v e^{(b\bar{x}_{b4})} + \alpha v \bar{x}_{b4} b e^{(b\bar{x}_{b4})}]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$\dots + \left\{ \frac{[-\bar{x}_{b3} v e^{(-b\bar{x}_{b3})}] \hat{k} [-\alpha v e^{(b\bar{x}_{b4})} + \alpha v \bar{x}_{b4} b e^{(b\bar{x}_{b4})}]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \left\{ \frac{[-\bar{x}_{tr} v e^{(-b\bar{x}_{tr})}] \hat{L} [\alpha v e^{(b\bar{x}_{b4})} + \alpha v \bar{x}_{b4} b e^{(b\bar{x}_{b4})}]}{(h + \hat{L})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{(h + \hat{L}) [v e^{(b\bar{x}_{b4})} - v \bar{x}_{b4} b e^{(b\bar{x}_{b4})}] - [\bar{x}_{b4} v e^{(-b\bar{x}_{b4})}] \hat{L} [\alpha v e^{(b\bar{x}_{b4})} - \alpha v \bar{x}_{b4} b e^{(b\bar{x}_{b4})}]}{(h + \hat{L})^2} \right\}.$$

$$A(22,27) = -\frac{v e^{(b\bar{x}_{tr})}}{h} + \frac{v \bar{x}_{tr} b e^{(b\bar{x}_{tr})}}{h} - \left\{ \frac{(h + \hat{L}) [v e^{(b\bar{x}_{tr})} - v \bar{x}_{tr} b e^{(b\bar{x}_{tr})}] - [\bar{x}_{tr} v e^{(-b\bar{x}_{tr})}] \hat{L} [-\alpha v e^{(b\bar{x}_{tr})} + \alpha v \bar{x}_{tr} b e^{(b\bar{x}_{tr})}]}{(h + \hat{L})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{[-\bar{x}_{b4} v e^{(-b\bar{x}_{b4})}] \hat{L} [-\alpha v e^{(b\bar{x}_{tr})} + \alpha v \bar{x}_{tr} b e^{(b\bar{x}_{tr})}]}{(h + \hat{L})^2} \right\}.$$

$$A(23,18) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h},$$

$$A(23,23) = -\frac{\bar{Q}_r}{A_s h},$$

$$\hat{k} = h e^{\left[-a\bar{x}_{s4} v e^{(-b\bar{x}_{s4})} + a\bar{x}_{s3} v e^{(-b\bar{x}_{s3})} \right]},$$

$$\hat{L} = h e^{\left[-a\bar{x}_{tr} v e^{(-b\bar{x}_{tr})} + a\bar{x}_{s4} v e^{(-b\bar{x}_{s4})} \right]},$$

$$A(24,19) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ \frac{[\bar{x}_{s4} v e^{(-b\bar{x}_{s4})}] \hat{k} [\alpha v e^{(b\bar{x}_{s3})} - \alpha v \bar{x}_{s3} b e^{(b\bar{x}_{s3})}]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$\dots + \left\{ \frac{(h + \hat{k}) [v e^{(b\bar{x}_{s3})} - v \bar{x}_{s3} b e^{(b\bar{x}_{s3})}] - [\bar{x}_{s3} v e^{(-b\bar{x}_{s3})}] \hat{k} [\alpha v e^{(b\bar{x}_{s3})} - \alpha v \bar{x}_{s3} b e^{(b\bar{x}_{s3})}]}{(h + \hat{k})^2} \right\},$$

$$A(24,24) = -\frac{\bar{Q}_r}{A_s h} + \frac{v e^{(b\bar{x}_{s4})}}{h} - \frac{v \bar{x}_{s4} b e^{(b\bar{x}_{s4})}}{h} - \left\{ \frac{(h + \hat{k}) [v e^{(b\bar{x}_{s4})} - v \bar{x}_{s4} b e^{(b\bar{x}_{s4})}] - [\bar{x}_{s4} v e^{(-b\bar{x}_{s4})}] \hat{k} [-\alpha v e^{(b\bar{x}_{s4})} + \alpha v \bar{x}_{s4} b e^{(b\bar{x}_{s4})}]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$\dots + \left\{ \frac{[-\bar{x}_{s3} v e^{(-b\bar{x}_{s3})}] \hat{k} [-\alpha v e^{(b\bar{x}_{s4})} + \alpha v \bar{x}_{s4} b e^{(b\bar{x}_{s4})}]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \left\{ \frac{[-\bar{x}_{tr} v e^{(-b\bar{x}_{tr})}] \hat{L} [\alpha v e^{(b\bar{x}_{s4})} + \alpha v \bar{x}_{s4} b e^{(b\bar{x}_{s4})}]}{(h + \hat{L})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{(h + \hat{L}) [v e^{(b\bar{x}_{s4})} - v \bar{x}_{s4} b e^{(b\bar{x}_{s4})}] - [\bar{x}_{s4} v e^{(-b\bar{x}_{s4})}] \hat{L} [\alpha v e^{(b\bar{x}_{s4})} - \alpha v \bar{x}_{s4} b e^{(b\bar{x}_{s4})}]}{(h + \hat{L})^2} \right\}.$$

$$A(24,29) = -\frac{v e^{(b\bar{x}_{tr})}}{h} + \frac{v \bar{x}_{tr} b e^{(b\bar{x}_{tr})}}{h} - \left\{ \frac{(h + \hat{L}) [v e^{(b\bar{x}_{tr})} - v \bar{x}_{tr} b e^{(b\bar{x}_{tr})}] - [\bar{x}_{tr} v e^{(-b\bar{x}_{tr})}] \hat{L} [-\alpha v e^{(b\bar{x}_{tr})} + \alpha v \bar{x}_{tr} b e^{(b\bar{x}_{tr})}]}{(h + \hat{L})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{[-\bar{x}_{s4} v e^{(-b\bar{x}_{s4})}] \hat{L} [-\alpha v e^{(b\bar{x}_{tr})} + \alpha v \bar{x}_{tr} b e^{(b\bar{x}_{tr})}]}{(h + \hat{L})^2} \right\}.$$

$$\hat{k} = h e^{\left[-a\bar{x}_{p4} v e^{(-b\bar{x}_{p4})} + a\bar{x}_{p3} v e^{(-b\bar{x}_{p3})} \right]},$$

$$\hat{L} = h e^{\left[-a\bar{x}_{pr} v e^{(-b\bar{x}_{pr})} + a\bar{x}_{p4} v e^{(-b\bar{x}_{p4})} \right]},$$

$$A(25.20) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ -\frac{[\bar{x}_{p4} v e^{(-b\bar{x}_{p4})}]\hat{k}[\alpha v e^{(-b\bar{x}_{p3})} - \alpha v \bar{x}_{p3} b e^{(-b\bar{x}_{p3})}]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$\dots + \left\{ \frac{(h + \hat{k})[v e^{(-b\bar{x}_{p3})} - v \bar{x}_{p3} b e^{(-b\bar{x}_{p3})}] - [\bar{x}_{p3} v e^{(-b\bar{x}_{p3})}]k[\alpha v e^{(-b\bar{x}_{p3})} - \alpha v \bar{x}_{p3} b e^{(-b\bar{x}_{p3})}]}{(h + \hat{k})^2} \right\}.$$

$$A(25.25) = -\frac{Q_r}{A_s h} + \frac{v e^{(-b\bar{x}_{p4})}}{h} - \frac{v \bar{x}_{p4} b e^{(-b\bar{x}_{p4})}}{h} - \left\{ \frac{(h + \hat{k})[v e^{(-b\bar{x}_{p4})} - v \bar{x}_{p4} b e^{(-b\bar{x}_{p4})}] - [\bar{x}_{p4} v e^{(-b\bar{x}_{p4})}]\hat{k}[-\alpha v e^{(-b\bar{x}_{p4})} + \alpha v \bar{x}_{p4} b e^{(-b\bar{x}_{p4})}]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$\dots + \left\{ \frac{-[\bar{x}_{p3} v e^{(-b\bar{x}_{p3})}]\hat{k}[-\alpha v e^{(-b\bar{x}_{p4})} + \alpha v \bar{x}_{p4} b e^{(-b\bar{x}_{p4})}]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \left\{ \frac{-[\bar{x}_{pr} v e^{(-b\bar{x}_{pr})}]\hat{L}[\alpha v e^{(-b\bar{x}_{p4})} + \alpha v \bar{x}_{p4} b e^{(-b\bar{x}_{p4})}]}{(h + \hat{L})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{(h + \hat{L})[v e^{(-b\bar{x}_{p4})} - v \bar{x}_{p4} b e^{(-b\bar{x}_{p4})}] - [\bar{x}_{p4} v e^{(-b\bar{x}_{p4})}]\hat{L}[\alpha v e^{(-b\bar{x}_{p4})} - \alpha v \bar{x}_{p4} b e^{(-b\bar{x}_{p4})}]}{(h + \hat{L})^2} \right\}.$$

$$A(25.30) = -\frac{v e^{(-b\bar{x}_{pr})}}{h} + \frac{v \bar{x}_{pr} b e^{(-b\bar{x}_{pr})}}{h} - \left\{ \frac{(h + \hat{L})[v e^{(-b\bar{x}_{pr})} - v \bar{x}_{pr} b e^{(-b\bar{x}_{pr})}] - [\bar{x}_{pr} v e^{(-b\bar{x}_{pr})}]\hat{L}[-\alpha v e^{(-b\bar{x}_{pr})} + \alpha v \bar{x}_{pr} b e^{(-b\bar{x}_{pr})}]}{(h + \hat{L})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{-[\bar{x}_{p4} v e^{(-b\bar{x}_{p4})}]\hat{L}[-\alpha v e^{(-b\bar{x}_{pr})} + \alpha v \bar{x}_{pr} b e^{(-b\bar{x}_{pr})}]}{(h + \hat{k})^2} \right\}.$$

$$\hat{k} = h e^{\left[-a\bar{x}_{i4} v e^{(-b\bar{x}_{i4})} + a\bar{x}_{i3} v e^{(-b\bar{x}_{i3})} \right]},$$

$$\hat{L} = h e^{\left[-a\bar{x}_{ir} v e^{(-b\bar{x}_{ir})} + a\bar{x}_{i4} v e^{(-b\bar{x}_{i4})} \right]},$$

$$A(26.21) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ -\frac{[\bar{x}_{i4} v e^{(-b\bar{x}_{i4})}]\hat{k}[\alpha v e^{(-b\bar{x}_{i3})} - \alpha v \bar{x}_{i3} b e^{(-b\bar{x}_{i3})}]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$\dots + \left\{ \frac{(h + \hat{k})[v e^{(-b\bar{x}_{i3})} - v \bar{x}_{i3} b e^{(-b\bar{x}_{i3})}] - [\bar{x}_{i3} v e^{(-b\bar{x}_{i3})}]k[\alpha v e^{(-b\bar{x}_{i3})} - \alpha v \bar{x}_{i3} b e^{(-b\bar{x}_{i3})}]}{(h + \hat{k})^2} \right\}.$$

$$A(26.26) = -\frac{Q_r}{A_s h} + \frac{v e^{(-b\bar{x}_{i4})}}{h} - \frac{v \bar{x}_{i3} b e^{(-b\bar{x}_{i4})}}{h} - \left\{ \frac{(h + \hat{k})[v e^{(-b\bar{x}_{i4})} - v \bar{x}_{i4} b e^{(-b\bar{x}_{i4})}] - [\bar{x}_{i4} v e^{(-b\bar{x}_{i4})}]\hat{k}[-\alpha v e^{(-b\bar{x}_{i4})} + \alpha v \bar{x}_{i4} b e^{(-b\bar{x}_{i4})}]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$\dots + \left\{ \frac{-[\bar{x}_{i3} v e^{(-b\bar{x}_{i3})}]\hat{k}[-\alpha v e^{(-b\bar{x}_{i4})} + \alpha v \bar{x}_{i4} b e^{(-b\bar{x}_{i4})}]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \left\{ \frac{-[\bar{x}_{ir} v e^{(-b\bar{x}_{ir})}]\hat{L}[\alpha v e^{(-b\bar{x}_{i4})} + \alpha v \bar{x}_{i4} b e^{(-b\bar{x}_{i4})}]}{(h + \hat{L})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{(h + \hat{L})[v e^{(-b\bar{x}_{i4})} - v \bar{x}_{i4} b e^{(-b\bar{x}_{i4})}] - [\bar{x}_{i4} v e^{(-b\bar{x}_{i4})}]\hat{L}[\alpha v e^{(-b\bar{x}_{i4})} - \alpha v \bar{x}_{i4} b e^{(-b\bar{x}_{i4})}]}{(h + \hat{L})^2} \right\}.$$

$$A(26.31) = -\frac{v e^{(-b\bar{x}_{ir})}}{h} + \frac{v \bar{x}_{ir} b e^{(-b\bar{x}_{ir})}}{h} - \left\{ \frac{(h + \hat{L})[v e^{(-b\bar{x}_{ir})} - v \bar{x}_{ir} b e^{(-b\bar{x}_{ir})}] - [\bar{x}_{ir} v e^{(-b\bar{x}_{ir})}]\hat{L}[-\alpha v e^{(-b\bar{x}_{ir})} + \alpha v \bar{x}_{ir} b e^{(-b\bar{x}_{ir})}]}{(h + \hat{L})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{-[\bar{x}_{i4} v e^{(-b\bar{x}_{i4})}]\hat{L}[-\alpha v e^{(-b\bar{x}_{ir})} + \alpha v \bar{x}_{ir} b e^{(-b\bar{x}_{ir})}]}{(h + \hat{k})^2} \right\}.$$

$$\hat{k} = h e^{\left[-\alpha \bar{X}_{tr} v e^{(-b \bar{X}_{tr})} + \alpha \bar{X}_{b4} v e^{(-b \bar{X}_{b4})} \right]},$$

$$A(27,22) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ \frac{\left[\bar{X}_{tr} v e^{(-b \bar{X}_{tr})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b \bar{X}_{b4})} - \alpha v \bar{X}_{b4} b e^{(b \bar{X}_{b4})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$\dots + \left\{ \frac{(h + \hat{k}) \left[v e^{(b \bar{X}_{b4})} - v \bar{X}_{b4} b e^{(b \bar{X}_{b4})} \right] - \left[\bar{X}_{b4} v e^{(-b \bar{X}_{b4})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b \bar{X}_{tr})} - \alpha v \bar{X}_{tr} b e^{(b \bar{X}_{tr})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\},$$

$$A(27,27) = -\frac{\bar{Q}_r}{A_s h} + \frac{v e^{(b \bar{X}_{tr})}}{h} - \frac{v \bar{X}_{tr} b e^{(b \bar{X}_{tr})}}{h} + \left\{ -\frac{\left[\bar{X}_{b4} v e^{(-b \bar{X}_{b4})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b \bar{X}_{tr})} + \alpha v \bar{X}_{tr} b e^{(b \bar{X}_{tr})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{(h + \hat{k}) \left[v e^{(b \bar{X}_{tr})} - v \bar{X}_{tr} b e^{(b \bar{X}_{tr})} \right] - \left[\bar{X}_{tr} v e^{(-b \bar{X}_{tr})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b \bar{X}_{b4})} + \alpha v \bar{X}_{b4} b e^{(b \bar{X}_{b4})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\},$$

$$A(28,23) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h},$$

$$A(28,28) = -\frac{\bar{Q}_r}{A_s h},$$

$$\hat{k} = h e^{\left[-\alpha \bar{X}_{sr} v e^{(-b \bar{X}_{sr})} + \alpha \bar{X}_{s4} v e^{(-b \bar{X}_{s4})} \right]},$$

$$A(29,24) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ \frac{\left[\bar{X}_{sr} v e^{(-b \bar{X}_{sr})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b \bar{X}_{s4})} - \alpha v \bar{X}_{s4} b e^{(b \bar{X}_{s4})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$\dots + \left\{ \frac{(h + \hat{k}) \left[v e^{(b \bar{X}_{s4})} - v \bar{X}_{s4} b e^{(b \bar{X}_{s4})} \right] - \left[\bar{X}_{s4} v e^{(-b \bar{X}_{s4})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b \bar{X}_{sr})} - \alpha v \bar{X}_{sr} b e^{(b \bar{X}_{sr})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\},$$

$$A(29,29) = -\frac{\bar{Q}_r}{A_s h} + \frac{v e^{(b \bar{X}_{sr})}}{h} - \frac{v \bar{X}_{sr} b e^{(b \bar{X}_{sr})}}{h} + \left\{ -\frac{\left[\bar{X}_{s4} v e^{(-b \bar{X}_{s4})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b \bar{X}_{sr})} + \alpha v \bar{X}_{sr} b e^{(b \bar{X}_{sr})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{(h + \hat{k}) \left[v e^{(b \bar{X}_{sr})} - v \bar{X}_{sr} b e^{(b \bar{X}_{sr})} \right] - \left[\bar{X}_{sr} v e^{(-b \bar{X}_{sr})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b \bar{X}_{s4})} + \alpha v \bar{X}_{s4} b e^{(b \bar{X}_{s4})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\},$$

$$\hat{k} = h e^{\left[-\alpha \bar{X}_{pr} v e^{(-b \bar{X}_{pr})} + \alpha \bar{X}_{p4} v e^{(-b \bar{X}_{p4})} \right]},$$

$$A(30,25) = \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ \frac{\left[\bar{X}_{pr} v e^{(-b \bar{X}_{pr})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b \bar{X}_{p4})} - \alpha v \bar{X}_{p4} b e^{(b \bar{X}_{p4})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \dots$$

$$\dots + \left\{ \frac{(h + \hat{k}) \left[v e^{(b \bar{X}_{p4})} - v \bar{X}_{p4} b e^{(b \bar{X}_{p4})} \right] - \left[\bar{X}_{p4} v e^{(-b \bar{X}_{p4})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b \bar{X}_{pr})} - \alpha v \bar{X}_{pr} b e^{(b \bar{X}_{pr})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\},$$

$$A(30,30) = -\frac{\bar{Q}_r}{A_s h} + \frac{v e^{(b \bar{X}_{pr})}}{h} - \frac{v \bar{X}_{pr} b e^{(b \bar{X}_{pr})}}{h} + \left\{ -\frac{\left[\bar{X}_{p4} v e^{(-b \bar{X}_{p4})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b \bar{X}_{pr})} + \alpha v \bar{X}_{pr} b e^{(b \bar{X}_{pr})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\} - \dots$$

$$\dots - \left\{ \frac{(h + \hat{k}) \left[v e^{(b \bar{X}_{pr})} - v \bar{X}_{pr} b e^{(b \bar{X}_{pr})} \right] - \left[\bar{X}_{pr} v e^{(-b \bar{X}_{pr})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b \bar{X}_{p4})} + \alpha v \bar{X}_{p4} b e^{(b \bar{X}_{p4})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\},$$

$$\begin{aligned}\hat{k} &= h e^{\left[-\alpha \bar{X}_{ir} v e^{(-b \bar{X}_{ir})} + \alpha \bar{X}_{i4} v e^{(-b \bar{X}_{i4})} \right]}, \\ A(31,26) &= \frac{\bar{Q}_r}{A_s h} - \left\{ -\frac{\left[\bar{X}_{ir} v e^{(-b \bar{X}_{ir})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b \bar{X}_{i4})} - \alpha v \bar{X}_{i4} b e^{(b \bar{X}_{i4})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\} + \dots \\ &\dots + \left\{ \frac{(h + \hat{k}) \left[v e^{(b \bar{X}_{i4})} - v \bar{X}_{i4} b e^{(b \bar{X}_{i4})} \right] - \left[\bar{X}_{i4} v e^{(-b \bar{X}_{i4})} \right] \hat{k} \left[\alpha v e^{(b \bar{X}_{ir})} - \alpha v \bar{X}_{ir} b e^{(b \bar{X}_{ir})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\}, \\ A(31,31) &= -\frac{\bar{Q}_r}{A_s h} + \frac{v e^{(b \bar{X}_{ir})}}{h} - \frac{v \bar{X}_{ir} b e^{(b \bar{X}_{ir})}}{h} + \left\{ -\frac{\left[\bar{X}_{i4} v e^{(-b \bar{X}_{i4})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b \bar{X}_{ir})} + \alpha v \bar{X}_{ir} b e^{(b \bar{X}_{ir})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\} - \dots \\ &\dots - \left\{ \frac{(h + \hat{k}) \left[v e^{(b \bar{X}_{ir})} - v \bar{X}_{ir} b e^{(b \bar{X}_{ir})} \right] - \left[\bar{X}_{ir} v e^{(-b \bar{X}_{ir})} \right] \hat{k} \left[-\alpha v e^{(b \bar{X}_{i4})} + \alpha v \bar{X}_{i4} b e^{(b \bar{X}_{i4})} \right]}{(h + \hat{k})^2} \right\},\end{aligned}$$

A matriz de entrada empregada para caracterizar o comportamento conjunto do tanque de aeração e do decantador secundário foi definida a partir das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}B(1,1) &= c_4 \bar{X}_{tr}, \\ B(1,2) &= -c_4 \bar{X}_b, \\ B(2,1) &= c_4 \bar{S}_{sr}, \\ B(2,2) &= -c_4 \bar{S}_s, \\ B(3,1) &= c_4 \bar{X}_{sr}, \\ B(3,2) &= -c_4 \bar{X}_s, \\ B(4,1) &= c_4 \bar{X}_{pr}, \\ B(4,2) &= -c_4 \bar{X}_p, \\ B(5,1) &= c_4 \bar{X}_{ir}, \\ B(5,2) &= -c_4 \bar{X}_i, \\ B(6,1) &= 1, \\ B(6,2) &= -1, \\ A(7,1) &= -\frac{\bar{X}_{b1}}{A_s h}, \\ A(8,1) &= -\frac{\bar{S}_{s1}}{A_s h}, \\ A(9,1) &= -\frac{\bar{X}_{s1}}{A_s h}, \\ A(10,1) &= -\frac{\bar{X}_{p1}}{A_s h}, \\ A(11,1) &= -\frac{\bar{X}_{i1}}{A_s h}, \\ A(12,1) &= \frac{\bar{X}_{b1} - \bar{X}_{b2}}{A_s h}, \\ A(13,1) &= \frac{\bar{S}_{s1} - \bar{S}_{s2}}{A_s h},\end{aligned}$$

$$A(14,1) = \frac{\bar{X}_{s1} - \bar{X}_{s2}}{A_s h},$$

$$A(15,1) = \frac{\bar{X}_{p1} - \bar{X}_{p2}}{A_s h},$$

$$A(16,1) = \frac{\bar{X}_{i1} - \bar{X}_{i2}}{A_s h},$$

$$A(17,1) = \frac{\bar{X}_{b2} - \bar{X}_{b3}}{A_s h},$$

$$A(18,1) = \frac{\bar{S}_{s2} - \bar{S}_{s3}}{A_s h},$$

$$A(19,1) = \frac{\bar{X}_{s2} - \bar{X}_{s3}}{A_s h},$$

$$A(20,1) = \frac{\bar{X}_{p2} - \bar{X}_{p3}}{A_s h},$$

$$A(21,1) = \frac{\bar{X}_{i2} - \bar{X}_{i3}}{A_s h},$$

$$A(22,1) = \frac{\bar{X}_{b3} - \bar{X}_{b4}}{A_s h},$$

$$A(23,1) = \frac{\bar{S}_{s3} - \bar{S}_{s4}}{A_s h},$$

$$A(24,1) = \frac{\bar{X}_{s3} - \bar{X}_{s4}}{A_s h},$$

$$A(25,1) = \frac{\bar{X}_{p3} - \bar{X}_{p4}}{A_s h},$$

$$A(26,1) = \frac{\bar{X}_{i3} - \bar{X}_{i4}}{A_s h},$$

$$A(27,1) = \frac{\bar{X}_{b4} - \bar{X}_{b5}}{A_s h},$$

$$A(28,1) = \frac{\bar{S}_{s4} - \bar{S}_{s5}}{A_s h},$$

$$A(29,1) = \frac{\bar{X}_{s4} - \bar{X}_{s5}}{A_s h},$$

$$A(30,1) = \frac{\bar{X}_{p4} - \bar{X}_{p5}}{A_s h},$$

$$A(31,1) = \frac{\bar{X}_{i4} - \bar{X}_{i5}}{A_s h},$$

A matriz de transmissão de distúrbios, por sua vez, foi estabelecida a partir das seguintes equações:

$$D_w(1,1) = c_5,$$

$$D_w(2,1) = c_{10},$$

$$D_w(3,1) = c_{13},$$

$$D_w(4,1) = c_{16},$$

$$D_w(5,1) = c_{20},$$

$$D_w(6,1) = 1.$$

I.2 – Filtros biológicos

A matriz de estado constante do modelo linear utilizado para descrever o comportamento dos filtros biológicos foi construída da seguinte maneira:

$$A(1,1) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_r}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_1^5 - 9,50^{-13} A \bar{S}_1^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_1^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_1^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_1 - 0,38 A ,$$

$$A(1,39) = \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_r + \bar{Q}_r^2}{V(\bar{Q}_i + \bar{Q}_r)} ,$$

$$A(2,1) = -1,68^{-16} A \bar{S}_1^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_1^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_1^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_1^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_1 \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f} ,$$

$$A(2,2) = -b' ,$$

$$A(3,1) = \frac{\bar{Q}_i + \bar{Q}_r}{V} ,$$

$$A(3,3) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_r}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_2^5 - 9,50^{-13} A \bar{S}_2^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_2^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_2^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_2 - 0,38 A ,$$

$$A(4,3) = -1,68^{-16} A \bar{S}_2^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_2^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_2^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_2^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_2 \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f} ,$$

$$A(4,4) = -b' ,$$

$$A(5,3) = \frac{\bar{Q}_i + \bar{Q}_r}{V} ,$$

$$A(5,5) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_r}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_3^5 - 9,50^{-13} A \bar{S}_3^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_3^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_3^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_3 - 0,38 A ,$$

$$A(6,5) = -1,68^{-16} A \bar{S}_3^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_3^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_3^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_3^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_3 \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f} ,$$

$$A(6,6) = -b' ,$$

$$A(7,5) = \frac{\bar{Q}_i + \bar{Q}_r}{V} ,$$

$$A(7,7) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_r}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_4^5 - 9,50^{-13} A \bar{S}_4^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_4^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_4^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_4 - 0,38 A ,$$

$$A(8,7) = -1,68^{-16} A \bar{S}_4^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_4^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_4^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_4^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_4 \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f} ,$$

$$A(8,8) = -b' ,$$

$$A(9,7) = \frac{\bar{Q}_i + \bar{Q}_r}{V} ,$$

$$A(9,9) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_r}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_5^5 - 9,50^{-13} A \bar{S}_5^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_5^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_5^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_5 - 0,38 A ,$$

$$A(10,9) = -1,68^{-16} A \bar{S}_5^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_5^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_5^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_5^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_5 \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f} ,$$

$$A(10,10) = -b' ,$$

$$A(11,9) = \frac{\bar{Q}_i + \bar{Q}_r}{V} ,$$

$$A(11,11) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_r}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_6^5 - 9,50^{-13} A \bar{S}_6^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_6^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_6^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_6 - 0,38 A ,$$

$$A(12,11) = -1,68^{-16} A \bar{S}_6^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_6^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_6^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_6^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_6 \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f} ,$$

$$A(12,12) = -b' ,$$

$$A(13,11) = \frac{\bar{Q}_i + \bar{Q}_r}{V} ,$$

$$A(13,13) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_r}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_7^5 - 9,50^{-13} A \bar{S}_7^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_7^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_7^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_7 - 0,38 A ,$$

$$A(14,13) = -1,68^{-16} A \bar{S}_7^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_7^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_7^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_7^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_7 \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f} ,$$

$$A(14,14) = -b' ,$$

$$A(15,13) = \frac{\bar{Q}_i + \bar{Q}_r}{V} ,$$

$$A(15,15) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_r}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_8^5 - 9,50^{-13} A \bar{S}_8^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_8^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_8^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_8 - 0,38 A ,$$

$$A(16,15) = -1,68^{-16} A \bar{S}_8^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_8^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_8^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_8^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_8 \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f} ,$$

$$A(16,16) = -b' ,$$

$$A(17,15) = \frac{\bar{Q}_i + \bar{Q}_r}{V} ,$$

$$A(17,17) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_r}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_9^5 - 9,50^{-13} A \bar{S}_9^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_9^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_9^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_9 - 0,38 A ,$$

$$A(18,17) = -1,68^{-16} A \bar{S}_9^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_9^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_9^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_9^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_9 \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f} ,$$

$$A(18,18) = -b' ,$$

$$A(19,17) = \frac{\bar{Q}_i + \bar{Q}_r}{V} ,$$

$$A(19,19) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_r}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_{10}^5 - 9,50^{-13} A \bar{S}_{10}^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_{10}^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_{10}^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_{10} - 0,38 A ,$$

$$A(20,19) = -1,68^{-16} A \bar{S}_{10}^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_{10}^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_{10}^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_{10}^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_{10} \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f} ,$$

$$A(20,20) = -b' ,$$

$$A(21,19) = \frac{\bar{Q}_i + \bar{Q}_r}{V} ,$$

$$A(21,21) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_r}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_{11}^5 - 9,50^{-13} A \bar{S}_{11}^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_{11}^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_{11}^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_{11} - 0,38 A ,$$

$$A(22,21) = -1,68^{-16} A \bar{S}_{11}^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_{11}^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_{11}^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_{11}^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_{11} \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f} ,$$

$$A(22,22) = -b' ,$$

$$A(23,21) = \frac{\bar{Q}_i + \bar{Q}_r}{V} ,$$

$$A(23,23) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_r}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_{12}^5 - 9,50^{-13} A \bar{S}_{12}^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_{12}^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_{12}^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_{12} - 0,38 A ,$$

$$A(24,23) = -1,68^{-16} A \bar{S}_{12}^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_{12}^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_{12}^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_{12}^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_{12} \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f},$$

$$A(24,24) = -b',$$

$$A(25,23) = \frac{\bar{Q}_i + \bar{Q}_r}{V},$$

$$A(25,25) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_r}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_{13}^5 - 9,50^{-13} A \bar{S}_{13}^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_{13}^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_{13}^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_{13} - 0,38 A,$$

$$A(26,25) = -1,68^{-16} A \bar{S}_{13}^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_{13}^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_{13}^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_{13}^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_{13} \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f},$$

$$A(26,26) = -b',$$

$$A(27,25) = \frac{\bar{Q}_i + \bar{Q}_r}{V},$$

$$A(27,27) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_r}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_{14}^5 - 9,50^{-13} A \bar{S}_{14}^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_{14}^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_{14}^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_{14} - 0,38 A,$$

$$A(28,27) = -1,68^{-16} A \bar{S}_{14}^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_{14}^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_{14}^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_{14}^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_{14} \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f},$$

$$A(28,28) = -b',$$

$$A(29,27) = \frac{\bar{Q}_i + \bar{Q}_r}{V},$$

$$A(29,29) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_r}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_{15}^5 - 9,50^{-13} A \bar{S}_{15}^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_{15}^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_{15}^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_{15} - 0,38 A,$$

$$A(30,29) = -1,68^{-16} A \bar{S}_{15}^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_{15}^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_{15}^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_{15}^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_{15} \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f},$$

$$A(30,30) = -b',$$

$$A(31,29) = \frac{\bar{Q}_i + \bar{Q}_r}{V},$$

$$A(31,31) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_r}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_{16}^5 - 9,50^{-13} A \bar{S}_{16}^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_{16}^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_{16}^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_{16} - 0,38 A,$$

$$A(32,31) = -1,68^{-16} A \bar{S}_{16}^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_{16}^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_{16}^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_{16}^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_{16} \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f},$$

$$A(32,32) = -b',$$

$$A(33,31) = \frac{\bar{Q}_i + \bar{Q}_r}{V},$$

$$A(33,33) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_r}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_{17}^5 - 9,50^{-13} A \bar{S}_{17}^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_{17}^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_{17}^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_{17} - 0,38 A,$$

$$A(34,33) = -1,68^{-16} A \bar{S}_{17}^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_{17}^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_{17}^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_{17}^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_{17} \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f},$$

$$A(34,34) = -b',$$

$$A(35,33) = \frac{\bar{Q}_i + \bar{Q}_r}{V},$$

$$A(35,35) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_r}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_{18}^5 - 9,50^{-13} A \bar{S}_{18}^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_{18}^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_{18}^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_{18} - 0,38 A,$$

$$A(36,35) = -1,68^{-16} A \bar{S}_{18}^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_{18}^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_{18}^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_{18}^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_{18} \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f},$$

$$A(36,36) = -b',$$

$$A(37,35) = \frac{\bar{Q}_i + \bar{Q}_f}{V},$$

$$A(37,37) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_f}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_{19}^3 - 9,50^{-13} A \bar{S}_{19}^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_{19}^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_{19}^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_{19} - 0,38 A,$$

$$A(38,37) = -1,68^{-16} A \bar{S}_{19}^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_{19}^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_{19}^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_{19}^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_{19} \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f},$$

$$A(38,38) = -b',$$

$$A(39,37) = \frac{\bar{Q}_i + \bar{Q}_f}{V},$$

$$A(39,39) = -\frac{\bar{Q}_i}{V} - \frac{\bar{Q}_f}{V} + 1,68^{-16} A \bar{S}_{20}^3 - 9,50^{-13} A \bar{S}_{20}^4 + 2,12^{-9} A \bar{S}_{20}^3 - 2,19^{-6} A \bar{S}_{20}^2 + 1,16^{-3} A \bar{S}_{20} - 0,38 A,$$

$$A(40,39) = -1,68^{-16} A \bar{S}_{20}^5 \frac{Y}{X_f} + 9,50^{-13} A \bar{S}_{20}^4 \frac{Y}{X_f} - 2,12^{-9} A \bar{S}_{20}^3 \frac{Y}{X_f} + 2,19^{-6} A \bar{S}_{20}^2 \frac{Y}{X_f} - 1,16^{-3} A \bar{S}_{20} \frac{Y}{X_f} + 0,38 \frac{Y}{X_f},$$

$$A(40,40) = -b'.$$

Os elementos que constituem a matriz de entrada que caracteriza o comportamento do filtro biológico foram definidos a partir das seguintes expressões:

$$B(1,1) = \frac{\bar{S}_{20}}{V} - \frac{\bar{S}_1}{V},$$

$$B(3,1) = \frac{\bar{S}_1}{V} - \frac{\bar{S}_2}{V},$$

$$B(5,1) = \frac{\bar{S}_2}{V} - \frac{\bar{S}_3}{V},$$

$$B(7,1) = \frac{\bar{S}_3}{V} - \frac{\bar{S}_4}{V},$$

$$B(9,1) = \frac{\bar{S}_4}{V} - \frac{\bar{S}_5}{V},$$

$$B(11,1) = \frac{\bar{S}_5}{V} - \frac{\bar{S}_6}{V},$$

$$B(13,1) = \frac{\bar{S}_6}{V} - \frac{\bar{S}_7}{V},$$

$$B(15,1) = \frac{\bar{S}_7}{V} - \frac{\bar{S}_8}{V},$$

$$B(17,1) = \frac{\bar{S}_8}{V} - \frac{\bar{S}_9}{V},$$

$$B(19,1) = \frac{\bar{S}_9}{V} - \frac{\bar{S}_{10}}{V},$$

$$B(21,1) = \frac{\bar{S}_{10}}{V} - \frac{\bar{S}_{11}}{V},$$

$$B(23,1) = \frac{\bar{S}_{11}}{V} - \frac{\bar{S}_{12}}{V},$$

$$B(25,1) = \frac{\bar{S}_{12}}{V} - \frac{\bar{S}_{13}}{V},$$

$$B(27,1) = \frac{\bar{S}_{13}}{V} - \frac{\bar{S}_{14}}{V},$$

$$B(29,1) = \frac{\bar{S}_{14}}{V} - \frac{\bar{S}_{15}}{V},$$

$$B(31,1) = \frac{\bar{S}_{15}}{V} - \frac{\bar{S}_{16}}{V},$$

$$B(33,1) = \frac{\bar{S}_{16}}{V} - \frac{\bar{S}_{17}}{V},$$

$$B(35,1) = \frac{\bar{S}_{17}}{V} - \frac{\bar{S}_{18}}{V},$$

$$B(37,1) = \frac{\bar{S}_{18}}{V} - \frac{\bar{S}_{19}}{V},$$

$$B(39,1) = \frac{\bar{S}_{19}}{V} - \frac{\bar{S}_{20}}{V}.$$

A matriz de transmissão de distúrbios, por sua vez, foi definida a partir das seguintes equações:

$$D_w(1,1) = \frac{\bar{S}_1}{V} - \frac{\bar{S}_1}{V},$$

$$D_w(3,1) = \frac{\bar{S}_1}{V} - \frac{\bar{S}_2}{V},$$

$$D_w(5,1) = \frac{\bar{S}_2}{V} - \frac{\bar{S}_3}{V},$$

$$D_w(7,1) = \frac{\bar{S}_3}{V} - \frac{\bar{S}_4}{V},$$

$$D_w(9,1) = \frac{\bar{S}_4}{V} - \frac{\bar{S}_5}{V},$$

$$D_w(11,1) = \frac{\bar{S}_5}{V} - \frac{\bar{S}_6}{V},$$

$$D_w(13,1) = \frac{\bar{S}_6}{V} - \frac{\bar{S}_7}{V},$$

$$D_w(15,1) = \frac{\bar{S}_7}{V} - \frac{\bar{S}_8}{V},$$

$$D_w(17,1) = \frac{\bar{S}_8}{V} - \frac{\bar{S}_9}{V},$$

$$D_w(19,1) = \frac{\bar{S}_9}{V} - \frac{\bar{S}_{10}}{V},$$

$$D_w(21,1) = \frac{\bar{S}_{10}}{V} - \frac{\bar{S}_{11}}{V},$$

$$D_w(23,1) = \frac{\bar{S}_{11}}{V} - \frac{\bar{S}_{12}}{V},$$

$$D_w(25,1) = \frac{\bar{S}_{12}}{V} - \frac{\bar{S}_{13}}{V},$$

$$D_w(27,1) = \frac{\bar{S}_{13}}{V} - \frac{\bar{S}_{14}}{V},$$

$$D_w(29,1) = \frac{\bar{S}_{14}}{V} - \frac{\bar{S}_{15}}{V},$$

$$D_w(31,1) = \frac{\bar{S}_{15}}{V} - \frac{\bar{S}_{16}}{V},$$

$$D_w(33,1) = \frac{\bar{S}_{16}}{V} - \frac{\bar{S}_{17}}{V},$$

$$D_w(35,1) = \frac{\bar{S}_{17}}{V} - \frac{\bar{S}_{18}}{V},$$

$$D_w(37,1) = \frac{\bar{S}_{18}}{V} - \frac{\bar{S}_{19}}{V},$$

$$D_w(39,1) = \frac{\bar{S}_{19}}{V} - \frac{\bar{S}_{20}}{V}.$$

Nas matrizes anteriores, quer para o processo de lodos ativados, quer para o filtro biológico, os elementos para os quais não foi indicada uma expressão são considerados nulos. Conforme discutido ao longo da seção 6.3, as variáveis de estado que figuraram nas expressões anteriores assumiram seus valores nominais quando da definição das matrizes de estado, de entrada ou de transmissão de distúrbios.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANNACHHATRE, A. P.; KHANNA, P. (1987). Unsteady-state biofilm kinetics. *Journal of Environmental Engineering*, v.113, n. 2, p. 429-433.
- ANDERSON, J. S., et al (2000). Control of an alternating aerobic-anoxic activated sludge system - Part I: Development of linearization-based modeling approach. *Control Engineering Practice*, v. 8, p. 271-278.
- BABARY, J. P.; BOURREL, S. (1999). Sliding mode control of a denitrifying biofilter. *Applied Mathematical Modeling*, v. 23, p. 609-620.
- BLOGUN, O. S. (1985). Design of real time feedback control for canal systems using Linear Quadratic Regulator Theory. *Tese (Doutorado)*. Universidade da Califórnia. Califórnia.
- BERNARD, J. L.; MEIRING, P. G. J. (1988). Dissolved oxygen control in the activated sludge process. *Water Science Technology*, v. 20, n. 4-5, p. 93-100.
- BRYSON, A. E.; HO, Y. C. (1969). *Applied Optimal Control*. Massachussets, Ginn & Co.
- BUSBY, J. B.; ANDREWS, J. F. (1975). Dynamic modeling and control strategies for the activated sludge process. *Journal of Water Pollution Control Federation*, v. 47, n. 5, p. 1055-1079.
- CHERUY, A.; PANZARELA, L.; DENAT, J.P. (1982). Multimodel simulation and adaptive stochastic control of an activated sludge process. In : *Modeling and Control of Biotechnological Process*, Helsinque, Finlândia. Anais. Simpósio IFAC.

- CLIFFT, R. C.; ANDREWS, J. F. (1981). Aeration control for reducing energy consumption in small activated sludge plants. *Water Science Technology*, v. 13, p. 371-379.
- CLIFFT, R. C.; GARRETT, M. T. (1988). Improved oxygen dissolution control for oxygen activated sludge. *Water Science Technology*, v. 20, n. 4-5, p. 101-108.
- D'AZZO, J. J. ; HOUPIS, C. H. (1984). *Análise e Projeto de Sistemas de Controle Lineares*. Trad. por Bernardo Severo da Silva Filho. Rio de Janeiro, Guanabara Dois.
- DICK, R. I. (1970). Role of activated final settling tanks. *Journal of the Sanitary Engineering Division*, v. SA2, p. 423-436.
- DISTEFANO, J. H.; STRIBBERUD, A. R.; WILLIAMS, I. J. (1972). *Sistemas de Controle e Retroação*. Trad. por Ostend Abelhõa Cardim . São Paulo, McGraw-Hill do Brasil.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. (1998). *Sistemas de Controle Modernos*. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos.
- DUPPONT, R.; HENZE, M. (1992). Modeling of the secondary clarifier combined with the Activated Sludge Model nº 1. *Water Science Technology*, v.25, n. 6, p. 285-300.
- FLANAGAN, M. J. (1977). Control strategies for the activated sludge process. *Instrumentation Technology*, v. 24, p. 35-43.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINE, A. (1994). *Feedback Control of Dynamic Systems*. 3 ed. New York, Anddison-Wesley Publishing Company.

- GARCIA, C. (1997). *Modelagem e Simulação*. São Paulo, EDUSP.
- GARRETT, M. T. (1958). Hydraulic control of activated sludge growth rate. *Sewage and Industrial wastes*, v. 30, p. 253-261.
- GRADY, C. L. P. Jr.; LIM, H. C. (1988). *Biological Wastewater Treatment – Theory and Applications*. New York, Marcel Dekker.
- GRADY, C. L. P. Jr. (1989). Dynamic Modeling of Suspended Growth Biological Wastewater Treatment Process. In: PATRY, G. G.; CHAPMAN, D. (org). *Dynamic Modeling and Expert Systems in Wastewater Engineering*. Michigan, Lewis Publishers, p. 59-81.
- GRIMBLE, M. J.; JOHNSON, M. A. (1988). *Optimal Control and Stochastic Estimation. Theory and Applications*. New York, John Wiley & Sons.
- GUJER, W., et al. (1999). Activated sludge model n° 3. *Water Science Technology*, v. 39, n. 1, p. 1-38.
- HAMALAINEN, R. P.; HALNE, A.; GYLLENBERG, A. (1980). A control model for activated sludge wastewater treatment process. In: *Anais do VI Congresso Mundial da IFAC*.
- HARRIS, C. J. (1977). Modeling and adaptive control of a urban wastewater Treatment plants. In: *Environmental Systems Planning, Design and Control*, Kyoto, Japão. Anais Simpósio IFAC.
- HARRISON, J. R. ; DAIGGER, G. T.; FILBERT, J. W. (1984). A survey of combined trickling filter and activated sludge process. *Journal of Water Pollution Control Federation*, v. 56, n. 10, p. 1073-1079.

HÄRTEL, L.; PÖPEL, H. J. (1992). A dynamic secondary clarifier model including process of sludge thickening. *Water Science Technology*, v.25, n. 6, p. 267-284.

HASSELBLAD, S.; BJÖRLENIUS, B.; CARLSSON, B (1998). Use of dynamic models to study secondary clarifier performance. *Water Science Technology*, v.37, n. 12, p. 207-212.

HENZE M., et al. (1987). General sludge model for single sludge wastewater treatment. *Water Science Technology*, v. 21, n. 5, p. 505-515.

HENZE M., et al. (1999). Activated sludge model n° 2, ASM2D. *Water Science Technology*, v. 39, n. 1, p. 165-182.

JACOB, J.; LANN J. M.; PINGAUD, H.; CAPDEVILLE, B. (1997). A generalized approach for dynamic modeling and simulation os biofilters: application to waste-water denitrification. *Chemical Engineering Journal*, v. 65, p. 133-143.

JENKINS, D.; GARRISON, W. E. (1968). Control of activated sludge by mean cell residence time. *Journal of Water Pollution Control Federation*, v. 40, n. 11, p. 1905-1919.

JEPPSSON, U.; DIEHL, S. (1996a). An evaluation of a dynamic model of the secondary clarifier. *Water Science Technology*, v.34, n. 5-6, p. 19-26.

JEPPSSON, U.; DIEHL, S. (1996b). On the modeling of the dynamic propagation of biological components in the secondary clarifier. *Water Science Technology*, v.34, n. 5-6, p. 85-92.

KABOURIS, J. C.; GEORGAKAKOS, A. P. (1990). Optimal control of the activated sludge Process. *Water Research*, v. 24, n.10, p. 1197-1208.

- KABOURIS, J. C.; GEORGAKAKOS, A. P.; CÂMARA, A. (1992). Optimal control of the activated sludge Process: effect of sludge storage. *Water Research*, v. 26, n. 4, p. 507-517.
- KIM, H., et al (2000). Control of an alternating aerobic-anoxic activated sludge system - Part II: optimization using a linearized model. *Control Engineering Practice*, v. 8, p. 271-278.
- KISSEL, J. C., et al. (1984). Numerical simulation of mixed-culture biofilm. *Journal of Environmental Engineering*, v.110, n. 2, p. 393-411.
- KLER, H. E.; SUNDSTRON, D. W. (1974). Automatic control of a activated sludge reactor. *Journal of Water Pollution Control Federation*, v. 46, n. 5, p. 993-998.
- KWAKERNAAK, H.; SIVAN, R. (1972). Linear Optimal Control Systems. New York, John Wiley & Sons.
- LECH, R. F., et al. (1978). Automatic control of the activated sludge process - II. Efficacy of control strategies. *Water Research*, v. 12, p. 91-99.
- LEE, T. T., et al (1999). Generic Distributed Parameter Model Control of a biological nutrient removal (BNR) activated sludge process. *Journal of process control*, v.9, p. 505-525.
- LEWIS, F. L. (1992). *Applied Optimal Control & Estimation: Digital Design & Implementation*. New Jersey, Prentice-Hall.
- LINDBERG, C. F.; CARLSSON, B. (1996a). Nonlinear and set-point control of the dissolved oxygen concentration in an activated sludge process. *Water Science Technology*, v.34, n. 3-4, p. 135-142.

- LINDBERG, C. F.; CARLSSON, B. (1996b). Adaptiv control of external carbon flow rate in an activated sludge process. *Water Science Technology*, v.34, n. 3-4, p. 173-180.
- LINDBERG, C. F. (1998). Multivariable modeling and control of an activated sludge process. *Water Science Technology*, v.37, n. 12, p. 149-156.
- LUKASSE, L. J. S., et al (1998). Optimal control of N-removal in ASPs. *Water Science Technology*, v.38, n. 3, p. 255-262.
- LUKASSE, L. J. S., KEESMAN, K. J. (1999). Optimized operation and design of alternating activated sludge processes for N-removal. *Water Research*, v.33, n. 11, p. 2651-2659.
- LUKASSE, L. J. S., et al (1999a). A comprison of NH_4/NO_3 control strategies for alternating activated sludge processes. *Water Science Technology*, v.39, n. 4, p. 93-102.
- LUKASSE, L. J. S., et al (1999b). A recursively identified model for short-term predictions of NH_4/NO_3 concentrations in alternating activated sludge process. *Journal of process control*, v.9, p. 87-100.
- MATASCI, R. N.; KAEMPER, C.; HEIDMAN, J. A. (1986). Full-scale studies of the trickling filter / solid contact process. *Journal of Water Pollution Control Federation*, v. 58, n. 11, p. 1043-1049.
- METCALF & EDDY (1991). *Wastewater Engineering: treatment, disposal and reuse*. 3 ed. New York, Metcalf & Eddy Inc.
- MORENO, J; BUITRÓN, G. (1998). Respirometry based optimal control of an aerobic bioreactor for the industrial wastewater treatment. *Water Science Technology*, v.38, n. 3, p. 219-226.

- NEWBRY, B. W.; DAIGGER, G. T.; DENNIS, D. T. (1988). Unit process tradeoffs for combined trickling filter and activated sludge process. *Journal of Water Pollution Control Federation*, v. 60, n. 10, p. 1813-1821.
- NOGITA, S.; HIRAOKA, M. (1981). Calculation of sludge reservoir volume for MLSS control. *Water Science Technology*, v. 13, p. 433-438.
- OGATA, K. (1982). *Engenharia de Controle Moderno*. Trad. por Bernardo Severo da Silva Filho. 3 ed. Rio de Janeiro, Prentice-Hall do Brasil.
- OGATA, K. (1987). *Discrete-Time Control Systems*. New Jersey, Printice-Hall.
- OLSSON, G. (1976). State of the art in sewage treatment plant control. *Chemical Process Control - AIChE Symp. Series*, v. 72, n. 159, p. 52-76.
- OLSSON, G. (1985). *Comprehensive Biotechnology*. Oxford, Pergamon Press. Cap. 65, p. 1107-1119: Control strategies for the activated sludge process.
- PARKER, D. S. (1999). Trickling filter mythology. *Journal of Environmental Engineering*, v. 125, n. 7, p. 618-625.
- PARKER, D. S.; BRATBY, J. R. (2001). Review of two decades of experience with TF/SC process. *Journal of Environmental Engineering*, v. 127, n. 5, p. 380-387.
- RITTMANN, B. E.; McCARTY, P. L. (1978). Variable-Order model of bacterial-film kinetics. *Journal of Environmental Engineering Division*, v. 104, n. EE5, p. 889-900.
- RITTMANN, B. E. (1982). The effect of shear stress on biofilm loss rate. *Biotechnology and Bioengineering*, v. 10, p. 501-506.

- RITTMANN, B. E.; BRUNNER, C. W. (1984). The nonsteady-state-biofilm process for advanced organic removal. *Journal of Water Pollution Control Federation*, v. 56, n. 7, p. 847-880.
- RITTMANN, B. E. (1989). Mathematical modeling of fixed-film growth. In: PATRY, G. G.; CHAPMAN, D. (org). *Dynamic Modeling and Expert Systems in Wastewater Engineering*. Michigan: Lewis Publishers, p. 39-57.
- RITTMANN, B. E.; McCARTY, P. L. (1981). Substrate flux into biofilms of any thickness. *Journal of Environmental Engineering Division*, v. 107, n. EE4, p. 831-849.
- ROESLER, J. F. (1974). Plant performance using dissolved oxygen control. *Journal of Environmental Engineering Division*, v. 100, n. EE5, p. 1069-1076.
- ROSKOPF, R. F.; YOUNG, J. C.; BAUMANN, R. (1976). Trickling filter-activated sludge combinations. *Journal of Environmental Engineering Division*, v. 102, n. EE5, p. 1005-1018.
- SÁEZ, P. B.; RITTMANN, B. E. (1988). Improved pseudoanalytical solution for steady-state biofilm kinetics. *Biotechnology and Bioengineering*, v. 32, p. 379-385.
- SEGELKE, K.; OBENAU, F.; ROSEMWINKEL, K. H. (1999). Dynamic simulation of a low loaded trickling filter for nitrification. *Water Science Technology*, v. 39, n. 4, p. 163-169.
- SOUZA, R. S. (1998). Controle operacional otimizado de redes de distribuição de água usando a Teoria do Regulador Quadrático Linear. Tese (Doutorado em Hidráulica e Saneamento). Programa de Pós-graduação em Hidráulica e Saneamento, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos.

- STEFFENS, M. A.; LANT, P. A. (1999). Multivariable control of nutrient-removing activated sludge systems. *Water Research*, v. 33, n.12, p. 2864-2878.
- STENGEL, R. F. (1994). *Optimal Control and Estimation*. London, Dover Publications.
- STREJC, V. (1981). *State Space Theory of Discrete Linear Control*. Prague, John Wiley & Sons.
- SUIDAN, M. T.; WANG, Y. (1985). Unified Analysis of Biofilm Kinetics. *Journal of Environmental Engineering*, v. 111, n. 5, p. 634-646.
- TAKÁSC, I.; PATRY, G. G.; NOLASCO, D. (1991). A dynamic model of the clarification-thickening process. *Water Research*, v. 25, n. 10, p. 1263-1271.
- VAN HAANDEL, A.; MARAIS, G. (1999). *O comportamento do sistema de lodo ativado – Teoria e aplicações para projeto e operação*. Campina Grande, Epgraf.
- VAYENAS, D. V.; LIBERTAOS, G. (1994). A novel model for nitrifying trickling filters. *Water Research*, v. 28, n. 6, p. 1275 – 1284.
- VAYENAS, D. V.; PAVLOU, S.; LIBERTAOS, G. (1997). Development of a dynamic model describing nitrification and nitrification in trickling filters. *Water Research*, v. 31, n. 5, p. 1135 – 1147.
- VITASOVIC, Z. (1989). Continuous settler operation: a dynamic model. In: PATRY, G. G.; CHAPMAN, D. (org). *Dynamic Modeling and Expert Systems in Wastewater Engineering*. Michigan: Lewis Publishers, p. 59-81.

- VON SPERLING, M. (1995). *Princípios do tratamento biológico de águas residuárias – Introdução a Qualidade das Águas e ao Tratamento dos Esgotos*. Belo Horizonte, DESA/UFMG.
- VON SPERLING, M. (1997). *Princípios do tratamento biológico de águas residuárias - Lodos Ativados*. Belo Horizonte, DESA/UFMG.
- WATER ENVIRONMENTAL FEDERATION; AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERING (1991). *Design of Municipal Wastewater Treatment Plants*. Vermont, Book Press.
- WESTPHAL, L. C. (1995). *Sourcebook of Control Systems Engineering*. Cambridge, Chappman & Hall.
- WIK, T. (1999). Rational transfer function models for nitrifying trickling filters. *Water Science Technology*, v. 39, n. 4, p. 121-128.
- YEUNG, S. Y. S.; SINCIC, D.; BAILEY, J. E. (1980). Optimal periodic control of activated sludge process: II. Comparison with conventional control for structured sludge kinetics. *WaterResearch*, v.14, p. 77-83.
- ZHAO, H., et al. (1994). A novel control strategy for improved nitrogen removal in an alternating sludge process - Part II: Control Development. *Water Research*, v. 28, n. 3, p. 535-542.