

# USP

## Campus de São Carlos

AVALIAÇÃO DE SOLUÇÕES ANALÍTICAS  
PARA ESCOAMENTOS TURBULENTOS

**Karine Cristiane de Oliveira Souza**

Orientador: Prof. Tit. Harry Edmar Schulz

### UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO



### ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

# AVALIAÇÃO DE SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA ESCOAMENTOS TURBULENTOS

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP  
EXEMPLAR REVISADO  
Data de entrada no Serviço: 04, 05, 04  
Ass.: Leonardo Corioli

**Karine Cristiane de Oliveira Souza**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Hidráulica e Saneamento.

ORIENTADOR: Prof. Tit. Harry Edmar Schulz

DEDALUS - Acervo - EESC



São Carlos  
2004

Class. TESE-EESC

Cott. 5750

Tombo T125/04

Sysno 1375052

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

S729a

Souza, Karine Cristiane de Oliveira

Avaliação de soluções analíticas para escoamentos  
turbulentos / Karine Cristiane de Oliveira Souza. --  
São Carlos, 2004.

Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia de  
São Carlos-Universidade de São Paulo, 2004.

Área: Hidráulica e Saneamento.

Orientador: Prof. Tit. Harry Edmar Schulz.

1. Modelo k- $\epsilon$ . 2. Turbulência. 3. Grades  
oscilantes. I. Título.

**FOLHA DE JULGAMENTO**

Candidata: Engenheira **KARINE CRISTIANE DE OLIVEIRA SOUZA**

Dissertação defendida e julgada em 06-04-2004 perante a Comissão Julgadora:



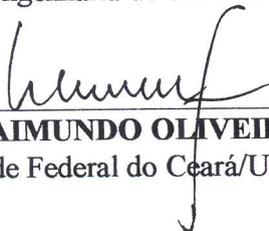
Prof. Tit. **HARRY EDMAR SCHULZ (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado



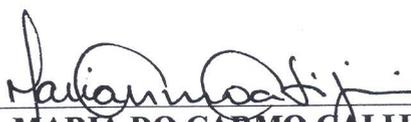
Prof. Dr. **NIVALDO APARECIDO CORRÊA**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado



Prof. Dr. **RAIMUNDO OLIVEIRA DE SOUZA**  
(Universidade Federal do Ceará/UFC)

Aprovado



Prof. Associada **MARIA DO CARMO CALIJURI**  
Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia (Hidráulica e Saneamento) e  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Aos meus pais, Darimá e Argemiro, por todo o amor, incentivo e dedicação.

Aos meus irmãos Charles e Patricia.

As minhas sobrinhas Mariana, Ana Clara e Beatriz.

Ao meu amor, João Marcelo.

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus, pela fé e pela vida, por todas as oportunidades e por ter acalmado meu coração.

À minha mãe, Darimá, fonte de sabedoria e compreensão. Digna de toda a minha admiração. Por não ter me deixado ir embora de São Carlos e desistido dos meus sonhos mesmo que isso acarretasse ter uma filha longe de si. Por ter acreditado em mim e por ser mãe e pai ao mesmo tempo.

Ao meu pai, Argemiro, por sua dedicação e seu jeito de ser pai.

Aos meus irmãos, Charles e Patricia, por sempre torcerem pelo meu sucesso.

As minhas sobrinhas, Mariana, Ana Clara e Beatriz, fontes de alegrias, ternura, ingenuidade e diversão.

A todos da minha família, pelo amor, crença e incentivo.

Ao Professor Dr. Harry Edmar Schulz, por ter mantido uma relação de pai e filha sem esquecer de sua função de orientador, pelo incentivo, por sua delicadeza, pela excelente orientação, por sua incrível didática. Pelas conversas e renovações de ânimo, mostrando sempre as descobertas positivas.

Ao Professor Dr. Fasal Hussain Chaudhry, por sua generosidade e por ter acreditado em mim.

Ao Professor Dr. Edson Cesar Wendland, pelo acolhimento, discussões e ajudas.

À Professora Dra. Ruth de Gouvêa Duarte, pelas correções.

Ao meu futuro marido João Marcelo Dias Ferreira, pelo amor, paciência, companheirismo, solidariedade, amizade e por ter sido a minha âncora na permanência em São Carlos porque sem ele tudo seria bem mais difícil.

Aos amigos Licinius Dimitri Sá de Alcântara e Valtemir Emerêncio do Nascimento pelas horas de ajuda e por terem permitido usar os seus computadores.

Aos amigos Leonardo Barra Santana de Souza e Johannes Gerson Janzen, pelo incentivo e colaboração.

As minhas amigas de casa Ignez Santiago Alencar, Lara Steil e Luciana Pallone Hespanholo, pela amizade, companhia e pelas muitas contas divididas, pelo aprendizado da convivência. Será difícil me acostumar sem elas.

À minha amiga Denise Conceição de Gois Santos, por seus conselhos e amizade.

Ao André Canale Garcia, que sempre me ajudava quando eu precisava com os computadores.

Aos amigos Rosemeire Aparecida de Jesus (Rose) e Fábio Pereira, pela colaboração, pelas conversas e, principalmente, pelas muitas risadas.

Aos amigos do laboratório de Hidráulica Computacional pelo acolhimento e horas de descontração.

A todos que de uma forma ou de outra contribuíram para o meu aprendizado e para o término desse trabalho.

A todos os colegas, professores e funcionários do Departamento de Hidráulica e Saneamento da EESC/USP pela colaboração.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, pela bolsa de estudo concedida.

Tentei, da melhor forma, agradecer a todos a grande contribuição que cada pessoa deixou em minha vida e em meu trabalho, mas as palavras ainda não podem traduzir totalmente os reais sentimentos e as emoções. Obrigada!

*“[...] ou nos conformamos com a falta de algumas coisas na nossa vida ou lutamos para realizar todas as nossas loucuras [...]”*

Mário Quintana.

*“Ainda que eu falasse as línguas do homem e anjos, mas não tiver o amor, soa como bronze que soa o tímpano que retine. E se possuir o dom da profecia e conhecer todos os mistérios e toda a ciência e alcançar tanta fé que chegue a transportar montanhas, mas não tiver o amor, nada sou. E se repartir toda minha fortuna e entregar meu corpo ao fogo, mas não tiver amor, nada disso me aproveita”.*

São Paulo, apóstolo.

# Sumário

LISTA DE FIGURAS .....	i
LISTA DE TABELAS.....	ii
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS.....	iii
LISTA DE SÍMBOLOS.....	iv
RESUMO .....	vii
<i>ABSTRACT</i> .....	viii
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>2 OBJETIVOS.....</b>	<b>3</b>
<b>3 FUNDAMENTOS DA TURBULÊNCIA.....</b>	<b>4</b>
3.1 TURBULÊNCIA .....	4
3.2 FLUIDO TURBULENTO E “CAOS” .....	6
3.3 TURBULÊNCIA ISOTRÓPICA.....	7
3.4 EQUAÇÕES DE REYNOLDS.....	9
3.5 MODELO DE TURBULÊNCIA $k$ - $\varepsilon$ .....	11
<b>4 TANQUE DE GRADES OSCILANTES DO SHS-EESC-USP .....</b>	<b>13</b>
4.1 TANQUE DE DUAS GRADES OSCILANTES .....	13
4.1.1 GRADES .....	14
4.1.2 MECANISMO DE OSCILAÇÃO DA GRADE.....	15
4.1.3 CAMPO TURBULENTO GERADO POR DUAS GRADES OSCILANTES EM FLUIDO EM REPOUSO.....	16
<b>5 MODELO DE TURBULÊNCIA DE SCHULZ &amp; CHAUDHRY(1998) .....</b>	<b>18</b>
5.1 PROCEDIMENTOS GERAIS .....	18
5.2 CÁLCULO OTIMIZADO DOS COEFICIENTES ( $k_i$ , $\varepsilon_i$ ).....	22
5.2.1 PROGRAMA <i>MATHEMATICA</i> .....	22
5.2.2 COEFICIENTES $k_i$ E $\varepsilon_i$ .....	23
5.3 VISCOSIDADE TURBULENTO ( $\nu_t$ ) .....	24
5.4 CASO PARTICULAR: COMPARAÇÃO TERMO A TERMO DAS SÉRIES ( $k$ , $\varepsilon$ ) .....	24
5.5 SOLUÇÃO LINEAR PARA $\varepsilon = \varepsilon(\bar{k})$ .....	26
<b>6 RESULTADOS NUMÉRICOS.....</b>	<b>30</b>
6.1 VISCOSIDADE TURBULENTO ( $\nu_t$ ) .....	30
6.2 SOLUÇÃO LINEAR PARA $\varepsilon = \varepsilon(\bar{k})$ .....	35

CONCLUSÕES.....	39
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	41
APÊNDICE A – PROGRAMA CÁLCULO <i>OTIMIZADO</i> DOS COEFICIENTES DE $k$ E $\varepsilon$ .....	46
APÊNDICE B – COEFICIENTES <i>OTIMIZADOS</i> DE $k$ .....	48
APÊNDICE C – COEFICIENTES <i>OTIMIZADOS</i> DE $\varepsilon$ .....	49

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 01 – Visualização de uma seção horizontal da turbulência em um tanque girando rapidamente sobre um eixo vertical: os vórtices mostrados são quase bidimensionais devido ao efeito de rotação (cortesia E.J. Hopfinger, <i>Institut de Mécanique de Grenoble</i> ). Fonte: LESIEUR, 1997.....	05
FIGURA 02 – Tanque com duas grades oscilantes. Fonte: JANZEN, 2003.....	14
FIGURA 03 – Grade composta de 9 x 9 barras (cotas em cm).....	15
FIGURA 04 – Representação esquemática da situação de duas grades oscilantes e do processo de difusão-dissipação da energia cinética turbulenta. Fonte: SCHULZ, 2001.....	17
FIGURA 05 – Raio de convergência.....	32
FIGURA 06 – Raio de convergência para a equação da viscosidade turbulenta adimensionalizada.....	33
FIGURA 07 – Raio de convergência para a viscosidade turbulenta adimensionalizada para a aproximação que considera apenas $h$ .....	35
FIGURA 08 – Família de curvas tendo como parâmetro $a$ .....	38
FIGURA 09 – Solução linear para $\varepsilon = \varepsilon(\bar{k})$ e dados experimentais de JANZEN (2003).....	38

## LISTA DE TABELAS

TABELA 01 – Raio de convergência para a viscosidade turbulenta adimensionalizada.....	33
TABELA 02 – Raio de convergência para a viscosidade turbulenta adimensionalizada para a aproximação que considera apenas $h$ .....	34

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DPIV – *Digital Particle Image Velocimetry*

RAM – *Random Access Memory*

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$  – Constante

$A$  – Área transversal à direção  $x$

$B_1$  – Constante

$B_2$  – Constante

$C_1$  – Constante empírica do modelo  $k$ - $\varepsilon$

$C_2$  – Constante empírica do modelo  $k$ - $\varepsilon$

$C_1'$  – Constante

$C_2'$  – Constante

$C_\mu$  – Constante empírica do modelo  $k$ - $\varepsilon$

$e$  – Taxa de dissipação de energia adimensional

$f$  – Frequência de oscilação

$F$  – Função relacionada à solução linear para  $\varepsilon = \varepsilon(\bar{k})$

$F_i$  – Componente instantânea das forças de campo na direção  $i$

$F'_i$  – Flutuação das forças de campo na direção  $i$

$\overline{F}_i$  – Componente das forças de campo médias

${}_2F_1(a, b, c, z)$  – Função hipergeométrica (expansão em série)

$h$  – Energia cinética turbulenta adimensional

$j$  – Constante

$k$  – Energia cinética turbulenta

$\bar{k}$  – Grandeza relacionada à solução linear para  $\varepsilon = \varepsilon(\bar{k})$

$L$  – Comprimento característico

$M$  – Malha da grade (distância entre o centro de duas barras consecutivas)

$N_x$  – Número de coeficientes de  $k$  e  $\varepsilon$

$p$  – Pressão estática instantânea

$p'$  – Flutuação de pressão

$\bar{p}$  – Pressão média

$S$  – Amplitude oscilação

$S_e$  – Constante do modelo SCHULZ & CHAUDHRY

$S_k$  – Constante do modelo SCHULZ & CHAUDHRY

$u$  – Velocidade na direção  $x$

$U_i$  – Velocidade instantânea nas três direções coordenadas

$u'_i$  – Flutuação de velocidade na direção  $i$

$\bar{u}_i$  – Componentes da velocidade média nas três direções coordenadas

$\rho(\overline{u'_i u'_j})$  – Tensões de Reynolds

$v$  – Velocidade na direção  $y$

$w$  – Velocidade na direção  $z$

$w_1$  – Constante

$\dot{W}$  – Potência dissipada entre as duas grades

$x$  – Eixo coordenado

$z$  – Eixo coordenado

$y$  – Eixo coordenado

$\varepsilon$  – Taxa de dissipação de energia

$\mu$  – Viscosidade dinâmica do fluido

$\nu$  – Viscosidade cinemática

$\nu_t$  – Viscosidade turbulenta

$\rho$  – Massa específica do fluido

$\sigma_k$  – Constante empírica do modelo k- $\epsilon$

$\sigma_\epsilon$  – Constante empírica do modelo k- $\epsilon$

## RESUMO

SOUZA, K. C. O. (2004). *Avaliação de soluções analíticas para escoamentos turbulentos*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

A partir da solução analítica obtida para o campo turbulento gerado por duas grades oscilantes em fluido em repouso, considerados os casos de viscosidade constante e viscosidade variável, foram estudados escoamentos turbulentos complexos. A partir de proposta de equação governante linear ainda não publicada de SCHULZ (2003a), foram obtidas soluções promissoras e exploradas possibilidades de generalização. As equações em questão baseiam-se no modelo  $k-\varepsilon$ . A ferramenta de trabalho no estudo das soluções teóricas foi o programa *Mathematica*. Embora essa ferramenta simplifique o trabalho mecânico decorrente da busca de soluções viáveis, vale lembrar que a construção do problema depende da criatividade do estudioso. Os objetivos propostos foram atingidos: reproduzir e ampliar os resultados para grades oscilantes de SCHULZ (2001). Adicionalmente, os equacionamentos governantes lineares mostraram possuir soluções compatíveis com a observação.

Palavras-chave: grades oscilantes, modelo  $k-\varepsilon$ , turbulência.

## ***ABSTRACT***

SOUZA, K. C. O (2004). *Evaluation of analytical solutions for turbulent flows*. M.Sc. Dissertation – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

From the analytical solution of turbulent field generated by two oscillating grids in fluid in rest, complex turbulent flows have been studied considering the cases of constant and variable viscosities. Promising solutions as well as some turbulence generalization possibilities were obtained considering SCHULZ's (2003) non-published proposal of linear governing equations. The solutions are based on the  $k$ - $\varepsilon$  model. The *Mathematica* program was used as a tool in the study of the theoretical solutions. Although this tool simplifies the work derived from the search for viable solutions, it is important to remember that the construction of the problem depends on the researcher's skills. The aims of reproducing and extending SCHULZ's (2001) model for oscillating grids have been achieved. Additionally, the linear governing equations have shown to have compatible solutions with the observation.

Keywords: oscillating grids,  $k$ - $\varepsilon$  model, turbulence.

# 1 INTRODUÇÃO

Desde muito, a compreensão e a modelagem dos fenômenos turbulentos têm desafiado a imaginação e a criatividade de cientistas e engenheiros. A própria definição de turbulência é assunto em aberto e, usualmente, a ela tem sido atribuída uma série de características próprias à sua identificação. (SCHULZ, 2001).

Por sua natureza, a turbulência é parte da Física Clássica sem solução, por envolver um “efeito de desordem” que se desenvolve nas escalas humanas de tempo e espaço. Apesar das gigantescas dificuldades que a turbulência apresenta para se conseguir solução teórica completa, a literatura mostra constante interesse na busca de soluções para situações específicas. Espera-se, idealmente, que tais soluções específicas possam permitir vislumbrar generalizações no futuro.

A turbulência faz parte do dia-a-dia de todo ser humano. Ela está presente na maioria das atividades que executamos ou simplesmente observamos. Têm-se como exemplos simples: a fumaça que sai de uma chaminé ou o movimento de mistura de uma colher em uma xícara com café, nas quais facilmente se percebe a ação de mistura decorrente da turbulência, aumentando a transferência de calor e massa. Assim, a turbulência caracteriza-se como um fenômeno complexo no movimento dos fluidos, mas encontrada na maioria das ocorrências naturais desses fluidos. <sup>1</sup>RODI (1980), apud SOUZA FILHO (1994), afirmou que na Hidráulica, assim como em outras áreas da Mecânica dos Fluidos, os escoamentos de relevância prática são turbulentos. Trata-se de uma afirmativa que transmite empolgação mas que, sem dúvida, não representa sempre a realidade em todas as áreas. Mencionam-se como exemplos: botânica, biologia, medicina (a circulação sanguínea, de seiva e de demais líquidos em organismos costuma

---

<sup>1</sup> RODI, W. (1980). Turbulence models and their application in hydraulics. IAHR, Delft.

ser laminar) e robótica (movimentos mecânicos finos e lentos podem ser controlados por sistemas hidráulicos contendo óleo viscoso em movimento laminar).

Esta apresentação pode estender-se um pouco para um contexto mais amplo, considerando a realidade hídrica atual. Menciona-se seguidamente a escassez pontual de recursos hídricos e a possibilidade dessa escassez generalizar-se. Essa perspectiva futura solicita que desde já sejam efetuadas ações de planejamento, monitoramento e controle com ferramentas científicas adequadas. Os modelos de turbulência interessantemente se inserem neste quadro, como ferramenta potencial de entendimento e previsão dos fenômenos hidrodinâmicos que envolvem a previsão da qualidade de águas naturais, como canais e lagos (SOUZA FILHO, 1994).

A turbulência atua como acelerador dos processos de mistura. Dessa forma, a transferência de oxigênio para corpos de água como rios, lagos ou qualquer outro corpo hídrico, dependem do nível de turbulência presente. Processos industriais de extração de gases nocivos de efluentes também estão relacionados ao nível de agitação turbulenta imposta aos fluidos. Esses são alguns exemplos, vinculados à qualidade do meio-ambiente, que nos permitem entender a importância da quantificação da turbulência. Desenvolver modelos conceituais e teóricos que busquem soluções específicas são importantes procedimentos no atual contexto do nosso conhecimento em turbulência, sendo sua necessidade mais do que evidente. O assunto atualmente é tratado de formas alternativas, complexas e heurísticas, principalmente por engenheiros, que estão sempre em busca de soluções para problemas práticos (SCHULZ, 2001). Certamente, passos isolados com resultados corretos, observados de forma integrada, permitirão ampliar o entendimento geral da turbulência. O presente trabalho representa um desses passos isolados.

A turbulência desperta a curiosidade sobre o que ela pode proporcionar e qual seu espectro de utilidade na vida prática, uma vez convenientemente quantificada. Esta curiosidade também é a causa motora do presente trabalho, no qual se usam soluções específicas, para avaliar aplicações mais gerais.

## 2 OBJETIVOS

O objetivo precípua do trabalho foi ampliar o conhecimento em torno das existentes soluções de SCHULZ (2001, 2003) para turbulência utilizando o modelo  $k-\varepsilon$ , bem como explorar a possibilidade de generalização e ampliação das respostas obtidas ou dos métodos utilizados.

Objetivos específicos:

1. Estudar a solução em série existente para campo turbulento gerado por grades oscilantes, com relação à convergência das mesmas e à evolução espacial da viscosidade turbulenta. Verificar as tendências analíticas por meio dos resultados de experimentos anteriormente feitos, encontrados na literatura da área e em trabalhos de mestrado realizados neste departamento.
2. Avaliar a possibilidade de generalização da aplicação das soluções por meio do programa *Mathematica* (o mais utilizado programa pelo grupo de pesquisa), disponibilizado na Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos.
3. Aplicar o modelo  $k-\varepsilon$  diretamente, ou equações já existentes e dele decorrentes, ao campo turbulento gerado por grades oscilantes, com vistas a avaliar a viabilidade das abordagens utilizadas.

## 3 FUNDAMENTOS DA TURBULÊNCIA

### 3.1 TURBULÊNCIA

*“O Brasil deveria estar preparado para enfrentar as ondas de incerteza como parte da vida rotineira, disse o professor Carlos Langoni, diretor do Centro de Economia Mundial da Fundação Getúlio Vargas e ex-presidente do Banco Central (BC)[...] A turbulência entrou na rotina dos mercados globais [...]” (Estado de São Paulo, 20/02/2003).*

Desordem, agitação, movimentos aleatórios intensos, estado de deslocamento errático de um líquido ou gás, instabilidade, perturbação da ordem, comportamento violento, selvageria etc, são as diferentes conotações para a palavra turbulência; são mais numerosos ainda os contextos de seu uso. Não é preciso criar ou imaginar um fenômeno turbulento; diariamente encontramos esses fenômenos nas mais diferentes situações, sempre visíveis ou percebidos pelas diferentes áreas do conhecimento.

Considerando a situação prática dos meios fluidos, a literatura em geral (por exemplo, MUNSON *et al.*, 1997) classifica os escoamentos como laminares ou turbulentos. Existe, para qualquer escoamento, pelo menos um parâmetro adimensional que indica em qual estado o escoamento se encontra. Geralmente esse adimensional é construído de forma que, se seu valor for menor do que um valor de referência, o escoamento é laminar. Parâmetros adimensionais relevantes para a descrição do movimento são, por exemplo, entre outros, o número de Reynolds, o número de Mach; e seus valores críticos (de referência), dependem da geometria específica do escoamento. Por exemplo, para escoamentos em tubos, o escoamento será laminar se o número de

Reynolds for menor do que aproximadamente 2100 e turbulento se o número de Reynolds for maior do que aproximadamente 4000.

SHAMES (1973) discorre que o escoamento laminar, embora tenha movimentos moleculares irregulares, é macroscopicamente bem ordenado. Já o escoamento turbulento apresenta-se como escoamento irregular em nível macroscópico, existindo o efeito de uma observável flutuação de velocidade superposta ao escoamento médio, geralmente definido de forma a ser ordenado.

Talvez valha a afirmação que o escoamento turbulento possui, em sua complexidade, a dificuldade de sua própria definição. Os cientistas utilizam suas características para melhor qualificar o movimento e estabelecer metodologias de quantificação.

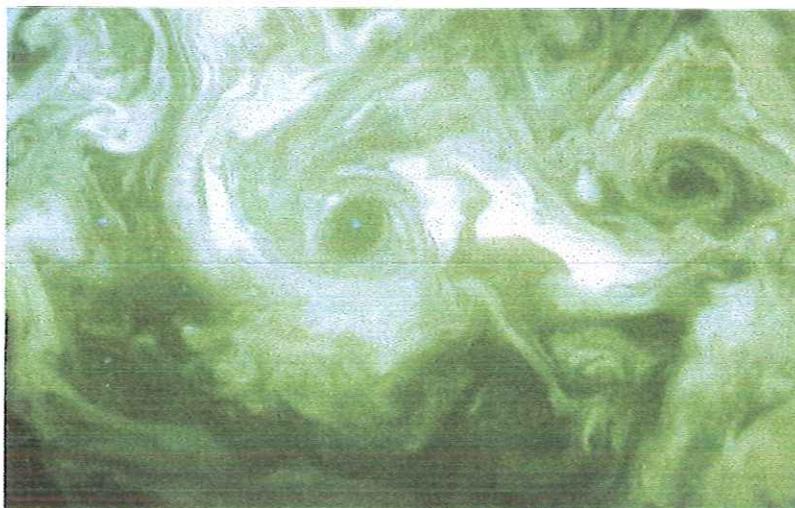


FIGURA 01 – Visualização de uma seção horizontal da turbulência em um tanque girando rapidamente sobre um eixo vertical: os vórtices mostrados são quase bidimensionais devido ao efeito de rotação (E.J. Hopfinger, *Institut de Mécanique de Grenoble*).

Fonte: LESIEUR, 1997.

A busca do entendimento em turbulência (talvez até tornando sua definição mais precisa), decorre do valor prático desse desafio: existem problemas técnicos, industriais e ambientais que envolvem turbulência e que cada vez mais requerem melhores e mais precisas soluções que, em sua apresentação, incluam características detalhadas do

movimento turbulento. Em outras palavras, há necessidade de avanço no entendimento da turbulência para que esses problemas reais possam ser modelados com melhor qualidade (SOUZA, 2002).

DAILY *et al.*(1969) argumentam que um estado de turbulência pode ser visto como o resultado de uma “falha” (descontinuidade) no escoamento, previamente uniforme, que forma redemoinhos, os quais se propagam até “contaminar” uma região de escoamento, produzindo movimentos irregulares. Se as condições são propícias, a turbulência persiste como um estado de movimento “quase” permanente. Uma fonte de redemoinhos e turbulência pode ser a interface entre “correntes” de fluido que escoam lado a lado com alguma discrepância entre suas velocidades (o exemplo dos Rios Negro e Amazonas pode ilustrar a argumentação).

Como mencionado, a propriedade importante da turbulência, de misturar componentes muito mais rapidamente do que processos moleculares de difusão, atrai muitos pesquisadores com o intuito de desenvolver projetos industriais.

### 3.2 FLUIDO TURBULENTO E “CAOS”

Segundo CORRÊA (2002), o termo *chaos* era usado pelos gregos com o sentido de vasto abismo ou fenda. Mais ou menos seguindo este sentido inicial, a palavra também alude ao estado da matéria sem forma e ao espaço infinito que existia antes do universo ordenado (um grande abismo, ou uma grande fenda), evidentemente segundo uma interpretação cosmológico-religiosa. E, finalmente, tem-se o sentido atualmente mais usual de caos: desordem, confusão.

A questão etimológica é interessante porque condiciona a imagem transmitida pelos conceitos físicos e matemáticos que dela se utilizam. Foi com essas interpretações semânticas que se denominou um estudo matemático, “teoria do caos”. Segundo pesquisadores, a Teoria do Caos é a teoria matemática que se ocupa dos sistemas que apresentam comportamentos “imprevisíveis” e aparentemente aleatórios, embora regidos por leis estritamente determinísticas. Desde que foi concebida, na década de 1970, a Teoria do Caos tornou-se uma das mais florescentes áreas da pesquisa

matemática. Algumas versões sobre o desenvolvimento da física consideram que, mesmo incluídos os avanços da teoria quântica, ela havia lidado quase que exclusivamente com sistemas de comportamento previsível, pelo menos em larga escala, antes do advento da Teoria do Caos. Mas o mundo natural mostra uma tendência ao comportamento caótico (também se trata de uma interpretação). Por exemplo, sistemas climáticos de grande escala tendem a desenvolver padrões aleatórios à medida que interagem com sistemas locais. Outros exemplos incluem a sempre variável taxa de gotejamento de uma torneira, a turbulência das moléculas em uma coluna de fumaça e o ritmo das batidas do coração humano. Embora até os anos 60, os sistemas caóticos lhes fossem familiares, os cientistas não dispunham dos meios matemáticos necessários para estudá-los e, portanto, a tendência foi evitá-los em seu trabalho teórico. A partir dos anos 70, porém, com o desenvolvimento de modernos computadores, alguns físicos começaram a procurar maneiras de dominar o caos. Um de seus principais teóricos foi o físico Mitchell Feigenbaum que, com base em estudos de May, um ecólogo teórico, descreveu mais adequadamente a existência de certos padrões de comportamento em sistemas que tendem para o caos. Esses padrões envolvem quantidades agora conhecidas como números de Feigenbaum. Os padrões do comportamento caótico estão relacionados aos observados na geometria fractal e têm afinidades com a teoria das catástrofes (esta última desenvolvida por René Thom). Continuando neste breve relato histórico, vale lembrar que Benoit Mandelbrot adotou o termo fractal para descrever um objeto geométrico que nunca perde a sua estrutura, qualquer que seja a distância de visão. Quando os fractais surgiram, pouco ou nada estavam relacionados ao caos. Com o tempo veio a se descobrir que são “primos matemáticos”. Na realidade, os fractais são “a linguagem” que nos permite descrever o caos. Benoit Mandelbrot é, em grande parte, responsável pelo presente interesse em geometria de fractais. Ele mostrou como fractais podem ocorrer em muitas situações teóricas e práticas, como em matemática e na natureza.

### **3.3 TURBULÊNCIA ISOTRÓPICA**

O estudo de turbulência isotrópica teve início com TAYLOR (1935) que a definiu como condição em que todos os valores médios das funções de variáveis de escoamento são independentes de translação, rotação e reflexão dos eixos de referência. Desde

então, por ser teoricamente a classe mais simples de turbulência, a qual é descrita pelo menor número de parâmetros e relações básicas, a turbulência isotrópica tem sido largamente utilizada na busca de melhor entendimento da turbulência em si. A partir dela obtiveram-se expressões matemáticas para aspectos dos processos de mistura entre líquidos, entre sólidos e líquidos, entre gases e líquidos e, por fim, entre sólidos, líquidos e gases. Além disso, a existência de características comuns a todos os escoamentos turbulentos permite que a compreensão da turbulência isotrópica esclareça questões referentes às formas mais complexas de turbulência (<sup>2</sup>TOWNSEND, 1976 apud SOUZA, 2002).

A isotropia impõe que todas as componentes da velocidade turbulenta média em um ponto sejam iguais (raiz quadrada da média quadrática) e, como as flutuações são aleatórias, não existe relação entre as componentes em diferentes eixos de coordenadas. Isto impõe que a média das tensões de cisalhamento turbulentas, também conhecidas como tensões de Reynolds, seja igual a zero. Em outras palavras, um escoamento isotrópico é isento de tensões de cisalhamento turbulentas, em toda sua extensão. Esta situação já se mostra “irreal” porque para que haja escoamento de qualquer espécie, um esforço deve ser aplicado ao fluido, que escoar com relação às paredes que o contém e, portanto, gera cisalhamento. HINZE (1959) afirma que a turbulência isotrópica é teoricamente o tipo mais simples da turbulência. Entretanto, é também um tipo de turbulência hipotética, porque nenhum escoamento real turbulento mostra isotropia verdadeira, embora possam ser obtidas condições tais que a isotropia seja mais ou menos aproximada.

Devido à sua relativa simplicidade, a turbulência isotrópica é mais amena ao tratamento teórico fundamental do que os outros tipos de turbulência (camada-limite, jatos, esteiras etc, todos anisotrópicos). Adicionalmente, experimentos devidamente conduzidos em escoamentos “quase-isotrópicos” permitem testar soluções obtidas teoricamente. Finalmente, extensões das soluções obtidas para escoamentos isotrópicos podem ser feitas para escoamentos anisotrópicos, uma vez que há situações de “isotropia local” (no sentido de Kolmogoroff) também nesses escoamentos.

---

<sup>2</sup> TOWNSEND, A. A. (1976). Homogeneous turbulent flows. In: THE STRUCTURE of turbulent shear flow. Cambridge University Press. Cap.3, p.45-103.

### 3.4 EQUAÇÕES DE REYNOLDS

Toda a literatura em Mecânica dos Fluidos (por exemplo, MUNSON *et al.*, 1997) afirma que as equações (3.1), conhecidas como as equações de Navier-Stokes (em honra ao matemático francês L.M.H. Navier, 1758-1836, e ao físico inglês G.G. Stokes, 1819-1903, responsáveis por sua formulação), combinadas à equação (3.2), que representa a conservação de massa, denominada “equação da continuidade”, fornecem uma descrição matemática completa do escoamento incompressível de um fluido Newtoniano.

Equações de Navier-Stokes: Conservação de quantidade de movimento

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + F_i \quad (3.1)$$

$U_i$  é a velocidade instantânea na direção coordenada  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $x_i$  é o eixo coordenado ( $i = 1, 2, 3$ ),  $p$  é a pressão estática instantânea,  $F_i$  é a componente instantânea  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) da resultante das forças de campo,  $\rho$  é a massa específica do fluido e  $\nu$  é a viscosidade cinemática.

Equação da continuidade: Conservação de Massa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

Neste caso, as componentes de velocidade estão representadas por  $u$ ,  $v$  e  $w$  e os eixos coordenados por  $x$ ,  $y$  e  $z$ . As duas notações são comuns em Mecânica dos Fluidos.

Segundo DAILY *et al.* (1969), as equações de movimento de fluido viscoso, aplicam-se de forma geral, tanto a fluidos turbulentos como não turbulentos. A dificuldade em obter apenas uma solução impondo as condições de contorno – note-se que as instabilidades tipo erráticas conduzem a diferentes perfis de velocidade ao longo do tempo para as mesmas condições de contorno – fez com que se buscasse a descrição

do escoamento médio, efetuando uma divisão entre este escoamento médio e as flutuações a ele superpostas (equações 3.3).

$$U_i = \bar{u}_i + u'_i \quad p = \bar{p} + p' \quad F_i = \bar{F}_i + F'_i \quad (3.3)$$

Na maior parte dos problemas hidráulicos realmente não há interesse em conhecer os valores das variáveis envolvidas a cada instante, mas apenas o comportamento médio do escoamento descrito pelos valores médios das variáveis. Assim, efetua-se a divisão descrita nas equações (3.3) e introduz-se essas variáveis (divididas) nas equações de Navier-Stokes. Posteriormente, efetua-se a média da equação resultante utilizando as assim denominadas “condições de Reynolds para as médias” (ver SCHULZ, 2003). As equações resultantes deste processo são chamadas equações de Reynolds (SOUZA FILHO, 1994), apresentadas na equação (3.4).

#### Equações de Reynolds

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u'_i u'_j} \right) + \bar{F}_i \quad (3.4)$$

Nesta equação,  $\bar{u}_i$  são as componentes da velocidade média nas três direções coordenadas ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\bar{p}$  é a pressão média,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido,  $\bar{F}_i$  são as componentes das forças de campo médias ( $i = 1, 2, 3$ ) e  $u'_i$ , as flutuações de velocidade ( $i = 1, 2, 3$ ). A barra horizontal representa uma operação de média temporal. A equação (3.4) mostra as equações de Reynolds em sua forma usual para escoamentos incompressíveis.

O termo  $\overline{\rho u'_i u'_j}$  é conhecido como tensões de Reynolds, representando fisicamente o transporte de quantidade de movimento devido ao movimento turbulento.

### 3.5 MODELO DE TURBULÊNCIA $k$ - $\varepsilon$

De acordo com SOUZA FILHO (1994), o modelo  $k$ - $\varepsilon$  é um modelo de viscosidade turbulenta ( $\nu_t$ ), a qual é obtida a partir da equação de Kolmogoroff-Prandtl ( $\nu_t = C_\mu \cdot \sqrt{k} \cdot L$ ) com a substituição do comprimento característico ( $L$ ) pela equação  $k^{3/2} / L = \varepsilon$ . Deste conjunto de definições resulta:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.5)$$

$C_\mu$  é uma constante de proporcionalidade,  $k$  é a energia cinética turbulenta e  $\varepsilon$  é a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta. Trata-se de um modelo de duas equações, assim denominado porque na definição da equação (3.5) são utilizadas duas novas variáveis, ou seja, a própria energia cinética turbulenta  $k$ ; e sua taxa de dissipação  $\varepsilon$ . Assim, para quantificar essas duas novas variáveis necessitam-se duas equações adicionais de transporte, uma para  $k$  e outra para  $\varepsilon$ . Normalmente, nessas aproximações utiliza-se como escala para as flutuações turbulentas de velocidade, a raiz quadrada da energia cinética turbulenta.

Segundo RODI (1980), a equação completa da conservação da energia cinética turbulenta é escrita como:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ u'_i \left( \frac{u'_i u'_j}{2} + \frac{p'}{\rho} \right) \right] - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \quad (3.7)$$

A equação diferencial para  $\varepsilon$  no modelo  $k$ - $\varepsilon$  é, geralmente, expressa por:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.8)$$

Nas equações (3.6), (3.7) e (3.8),  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $u_i$  e  $u'_i$ ,  $\nu$  e  $\nu_t$ ,  $p$  e  $p'$  têm o mesmo significado já descrito nas equações precedentes.  $C_1$  e  $C_2$  são constantes do modelo. Essas equações representam uma aproximação conveniente, que tem produzido resultados satisfatórios em vários tipos de escoamentos. Vale sempre lembrar que se utilizou a definição de viscosidade turbulenta (hipótese de Boussinesq) para superar as dificuldades que surgem das parcelas que possuem produtos de flutuações de velocidade e produtos que envolvem flutuações de pressão.

## 4 TANQUE DE GRADES OSCILANTES DO SHS-EESC-USP

### 4.1 TANQUE DE DUAS GRADES OSCILANTES

O presente trabalho tem abordagem estritamente teórica. Contudo, as soluções estudadas devem ser comparadas a dados obtidos em escoamentos turbulentos reais (com o uso de equipamentos adequados). Um desses equipamentos foi construído no Laboratório de Hidráulica Ambiental do Centro de Recursos Hídricos do Departamento de Hidráulica e Saneamento – EESC-USP. Trata-se de um tanque no qual se produz turbulência em água com o uso de grades oscilantes. Segundo SOUZA (2002), o tanque possui 50cm x 50cm de área superficial e 115cm de altura (FIGURA 02). As paredes do tanque foram feitas de acrílico para permitir visualização de seu volume interno e utilização de equipamento laser para medições de velocidade turbulenta. Para tanto implementou-se, no laboratório, a técnica *Digital Particle Image Velocimetry* (DPIV), que permite a obtenção das velocidades turbulentas e o posterior cálculo das grandezas estatísticas turbulentas, entre elas a viscosidade turbulenta.



FIGURA 02 – Tanque com duas grades oscilantes.

Fonte: JANZEN, 2003.

O tanque permite a colocação de duas grades idênticas posicionadas horizontalmente à uma distância de 31,6cm uma da outra (de eixo a eixo). A turbulência assim gerada tem propriedades quase-isotrópicas e os resultados experimentais foram utilizados para validar as propostas teóricas decorrentes dos estudos nesta linha de pesquisa, entre os quais esta pesquisa.

Nos experimentos conduzidos por outros autores, nesse equipamento, as grades foram osciladas em fase com frequência de oscilação variando de 1 a 4Hz e a amplitude de oscilação de 2 a 5cm, JANZEN (2003).

#### 4.1.1 GRADES

Uma descrição mais detalhada do equipamento é aqui feita para elucidar que tipo de dado está sendo comparado ao estudo teórico. Segundo JANZEN (2003), as duas grades idênticas foram construídas de aço inoxidável compostas de 9 x 9 barras de seção quadrada de 1cm x 1cm. Elas possuem espaçamento  $M$  (Mesh) de 5,1cm com solidez

(relação entre a área horizontal ocupada pelas barras da grade e a área total da superfície do tanque) de 32%. As duas grades possuem distância de separação de 31,6cm, sendo o centro de oscilação da grade inferior posicionado a 55cm do fundo do tanque. Segundo HOPFINGER & TOLY (1976), solidez inferior a 40% gera turbulência quase-isotrópica, capaz de evitar escoamentos secundários.

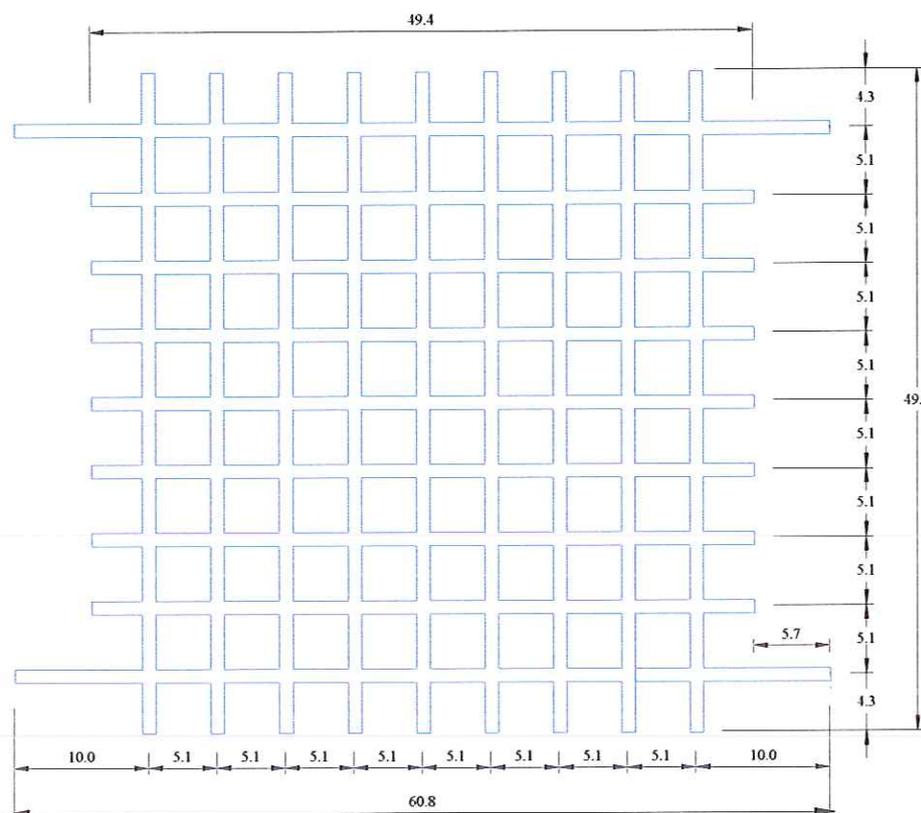


FIGURA 03 – Grade composta de 9 x 9 barras (cotas em cm).

#### 4.1.2 MECANISMO DE OSCILAÇÃO DA GRADE

É interessante valorizar as soluções construtivas desenvolvidas no próprio Laboratório de Simulação Computacional. Assim, vale mencionar que um novo mecanismo de oscilação da grade foi desenvolvido por SOUZA (2002) para seu mestrado, no qual a maior parte desse equipamento foi concebida. O tanque possui fixação do sistema de oscilação por meio da parede lateral, para que sejam evitadas fontes de escoamentos preferenciais, oscilação do nível de água e eventuais vazamentos.

Os componentes do mecanismo de oscilação da grade são motor, conjunto de rolamentos, mancais, eixos, polias e correias. O motor utilizado foi de 4Hp, de corrente contínua, cuja rotação pode ser variada por controle acionado manualmente, JANZEN (2003).

Todos os detalhes construtivos foram descritos por SOUZA (2002) e JANZEN (2003).

#### **4.1.3 CAMPO TURBULENTO GERADO POR DUAS GRADES OSCILANTES EM FLUIDO EM REPOUSO**

A formulação estudada no presente trabalho é unidimensional (na vertical). Para a comparação efetuada com o tanque de duas grades oscilantes, é preciso que se diga que, em um processo essencialmente unidimensional, as grades deveriam ter dimensões infinitas nos planos perpendiculares ao eixo  $x$  (FIGURA 04). Evidentemente esta condição é impossível, mas a experiência mostra que os efeitos de borda são desprezíveis para as regiões centrais do tanque.

A origem do eixo está no centro do espaçamento entre as grades. Com este arranjo, a energia cinética fornecida ao meio por intermédio das grades e dissipada no espaço entre as mesmas, passa por um mínimo em  $x = 0$  (para oscilações iguais das duas grades, evidentemente com características geométricas idênticas) (SCHULZ, 2001).

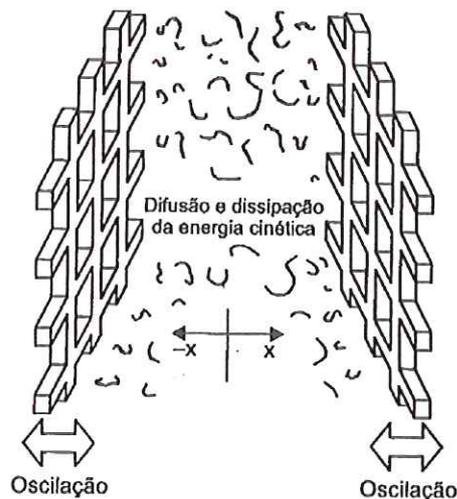


FIGURA 04 – Representação esquemática da situação de duas grades oscilantes e do processo de difusão-dissipação da energia cinética turbulenta.

Fonte: SCHULZ (2001).

Equipamentos semelhantes, com características também semelhantes, têm sido utilizados em literatura da área. Assim, por exemplo, SHY *et al* (1997), utilizaram um par de grades oscilando verticalmente para experimentalmente produzir uma região de turbulência estacionária quase-isotrópica em um fluido homogêneo (água) contido em um tanque (situação análoga àquela descrita para o equipamento do Laboratório de Hidráulica Ambiental). Segundo os autores mencionados, de acordo com a escolha apropriada dos parâmetros que compõem o meio e o equipamento de geração de turbulência, são geradas duas regiões de escoamento distintas: uma altamente turbulenta perto de cada grade e uma com turbulência estacionária, aproximadamente isotrópica, localizada na região de núcleo entre as grades. Esta pesquisa estudou os modelos que descrevem a evolução de parâmetros da turbulência, considerando o espaço existente entre as grades oscilantes (domínio de aplicação deste estudo).

## 5 MODELO DE TURBULÊNCIA DE SCHULZ & CHAUDHRY(1998)

### 5.1 PROCEDIMENTOS GERAIS

Considerando situação de escoamento estacionário e fluido em repouso (isto é, sem escoamento médio), SCHULZ & CHAUDHRY (1998) partiram das equações (3.6) e (3.7), para obter a forma de evolução da energia cinética turbulenta em sistemas difusivo-dissipativos unidimensionais. A equação para a energia cinética turbulenta unidimensional é obtida diretamente do caso geral, resultando em:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \overline{u'_i \left( \frac{u'_i u'_j}{2} + \frac{p}{\rho} \right)} \right] = -\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \quad (5.1)$$

O termo entre colchetes, sem equacionamento definitivo, é substituído, no modelo  $k$ - $\varepsilon$ , pelo produto do coeficiente de Boussinesq (viscosidade turbulenta) com o gradiente da energia cinética turbulenta e uma constante de proporcionalidade ( $\sigma_k$ ). Obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) = \varepsilon \quad (5.2)$$

A equação diferencial para  $\varepsilon$  pelo modelo  $k$ - $\varepsilon$ , equação (3.8), para o caso difusivo-dissipativo, torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) = C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (5.3)$$

Para obter a viscosidade turbulenta geral teórica para uma situação que reproduza o escoamento turbulento gerado por duas grades oscilantes, partiram das equações (3.5) e (5.2), que permitem obter uma relação envolvendo apenas energia cinética turbulenta e sua taxa de dissipação de energia:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{C_\mu}{\sigma_k} k^2 \frac{\partial k}{\partial x} \right) = \varepsilon \quad (5.4)$$

SCHULZ & CHAUDHRY (1998) integraram a equação (5.4), obtendo o seguinte conjunto de equações, válido para sistemas difusivo-dissipativos:

$$k^3 = \frac{3}{2} \frac{\sigma_k}{C_\mu} \left\{ \int \varepsilon \cdot dx + B_1 \right\}^2 + B_2 \quad (5.5)$$

$$\varepsilon = \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{C_\mu}{\sigma_k} (k^3 - B_2)} \quad (5.6)$$

$$\dot{W} = 2 \rho A \left( \sqrt{\frac{2}{3} \frac{C_\mu}{\sigma_k} (k_{ref}^3 - B_2)} - \sqrt{\frac{2}{3} \frac{C_\mu}{\sigma_k} (k_0^3 - B_2)} \right) \quad (5.7)$$

$B_1$  e  $B_2$  são constantes de integração,  $\rho$  é a massa específica do fluido e  $A$  é a área transversal à direção  $x$ ,  $\dot{W}$  é a potência dissipada entre as duas grades. Admite-se que, em uma posição  $x = 0$ , a energia cinética turbulenta assume o valor  $k_0$  e que em uma posição genérica  $x$ , a energia cinética turbulenta assume um valor de referência para o espaço considerado ( $k = k_{ref}$ ).

Para a obtenção de uma avaliação dos perfis de  $k$  e  $\varepsilon$ , SCHULZ & CHAUDHRY (1998) adotam expansões em séries de potências para as duas variáveis.

As variáveis  $k$  e  $\varepsilon$  são expressas conforme indicado nas equações (5.8).

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i x^i \qquad k = \sum_{j=0}^{\infty} k_j x^j \qquad (5.8)$$

O uso dessas relações na equação (5.5), comparando termo a termo os coeficientes de mesma ordem de  $x$  para os dois membros da equação expandida, resultam nas seguintes equações para os primeiros coeficientes da série:

- Energia cinética turbulenta (APÊNDICE B):

$$\text{Ordem zero:} \quad k_0 = B_2^{1/3} \text{ ou } B_2 = k_0^3 \qquad (5.9a)$$

$$\text{Ordem 1:} \quad k_1 = 0 \qquad (5.9b)$$

$$\text{Ordem 2:} \quad k_2 = \frac{S_k}{3k_0^2} (\varepsilon_0^2) \qquad S_k = \frac{3}{2} \frac{\sigma_k}{C_\mu} \qquad (5.9c)$$

$$\text{Ordem 3:} \quad k_3 = 0 \qquad (5.9d)$$

$$\text{Ordem 4:} \quad k_4 = \frac{S_k}{3k_0^2} \left( \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon_2}{3} \right) - \frac{k_2^2}{k_0} \qquad (5.9e)$$

$$\text{Ordem 5:} \quad k_5 = 0 \qquad (5.9f)$$

Observa-se que cada coeficiente  $k_i$  depende dos coeficientes anteriores na série para energia cinética turbulenta, assim como para a taxa de dissipação de energia.

Reescrevendo-se a equação (5.3) utilizando a equação (3.5) para  $\varepsilon$ , tem-se uma equação mais apropriada para a taxa de dissipação de energia, que assume a forma,

$$2k^2 \varepsilon \frac{dk}{dz} \frac{d\varepsilon}{dz} - k^3 \frac{d\varepsilon}{dz} \frac{d\varepsilon}{dz} + k^3 \varepsilon \frac{d^2 \varepsilon}{dz^2} = S_\varepsilon \varepsilon^4 \qquad S_\varepsilon = \frac{C_2 \sigma_\varepsilon}{C_\mu} \qquad (5.10)$$

Utilizam-se as equações (5.8) na equação (5.10), o que conduz aos seguintes coeficientes para o caso de duas grades oscilantes:

- Taxa de dissipação de energia (APÊNDICE C):

$$\text{Ordem zero:} \quad \varepsilon_2 = \frac{S_\varepsilon \varepsilon_0^3}{2k_0^3} \quad S_\varepsilon = C_2 \frac{\sigma_\varepsilon}{C_\mu} \quad (5.11a)$$

$$\text{Ordem 1:} \quad \varepsilon_3 = 0 \quad (5.11b)$$

$$\text{Ordem 2:} \quad \varepsilon_4 = \frac{2S_\varepsilon \varepsilon_0^3 \varepsilon_2 - 7k_0^2 k_2 \varepsilon_0 \varepsilon_2 + k_0^3 \varepsilon_2^2}{6k_0^3 \varepsilon_0} \quad (5.11c)$$

$$\text{Ordem 3:} \quad \varepsilon_5 = 0 \quad (5.11d)$$

Ordem 4:

$$\varepsilon_6 = \frac{S_\varepsilon (3\varepsilon_0^2 \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_0^3 \varepsilon_4) - 11k_0 k_2^2 \varepsilon_0 \varepsilon_2 - 11k_0^2 k_4 \varepsilon_0 \varepsilon_2 - 26k_0^2 k_2 \varepsilon_0 \varepsilon_4 + k_0^3 \varepsilon_2 \varepsilon_4 - k_0^2 k_2 \varepsilon_2^2}{15k_0^3 \varepsilon_0} \quad (5.11e)$$

$$\text{Ordem 5:} \quad \varepsilon_7 = 0 \quad (5.11f)$$

Vê-se que apenas  $k_0$  e  $\varepsilon_0$  necessitam ser determinados, isto é, o valor da energia cinética turbulenta na origem e o valor da taxa de dissipação de energia na origem, ambos obtidos experimentalmente.

Os autores mencionados também adimensionalizaram as equações. Assim, as equações para a energia cinética turbulenta adimensional,  $k/k_0$  ( $= h$ ), e taxa de dissipação de energia adimensional,  $\varepsilon/\varepsilon_0$  ( $= e$ ), apresentam-se da seguinte forma:

$$h = 1 + \frac{S_k}{3} \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^2 + \frac{S_k}{9} (S_\varepsilon - S_k) \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^4 + \dots \quad (5.12)$$

$$e = 1 + \frac{S_\varepsilon}{2} \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^2 + \frac{S_\varepsilon}{6} \left( \frac{5S_\varepsilon}{4} - \frac{7S_k}{6} \right) \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^4 + \dots \quad (5.13)$$

O uso dos valores experimentais  $C_\mu = 0.09$ ,  $C_2 = 1.92$ ,  $\sigma_k = 1.0$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.3$  nas equações (5.8), (5.9) e (5.11) (RODI, 1980) resulta em:

$$h \approx 1 + 5.56 \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^2 + 20.5 \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^4 + \dots \quad (5.14)$$

$$e \approx 1 + 13.9 \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^2 + 70.4 \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^4 + \dots \quad (5.15)$$

A viscosidade turbulenta obtida das equações (3.5), (5.14) e (5.15) produz:

$$\frac{\nu_t}{\nu_{i0}} \approx \frac{1 + 11.1 \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^2 + 71.8 \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^4 + \dots}{1 + 13.9 \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^2 + 70.4 \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^4 + \dots} \quad \nu_{i0} = C_\mu \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} \quad (5.16)$$

Esta apresentação também consta em SCHULZ (2001).

## 5.2 CÁLCULO OTIMIZADO DOS COEFICIENTES ( $k_b$ , $\varepsilon_i$ )

### 5.2.1 PROGRAMA *MATHEMATICA*

Resoluções teóricas envolvem o conhecimento prévio de ferramentas de cálculo e uso de tabelas matemáticas extensas. Parte dessas exigências foi muito facilitada com o advento de programas computacionais que armazenam os procedimentos de resolução e as mencionadas tabelas. Desta forma, ao pesquisador/profissional resta bom senso na formulação do problema em estudo e o estabelecimento da equação governante em questão. Um desses programas é o *Mathematica*.

Segundo CARMO *et al.* (1999), o sistema do *Mathematica* disponibiliza uma grande quantidade de funções previamente definidas e permite a visualização de elementos gráficos. Estas características favorecem a motivação e auto-aprendizagem dos usuários do sistema. O *Mathematica* auxilia a identificação e compreensão de problemas de engenharia e ciência e permite rápida resolução de soluções desses problemas.

Há que mencionar a riqueza de conceitos disponibilizados por este sistema. Por um lado, a computação efetuada pelo sistema *Mathematica* é também simbólica e não apenas numérica. Por outro lado, em um mesmo ambiente, estão disponíveis diversos paradigmas de programação, a saber: a programação funcional, a programação recursiva, a programação imperativa e a programação por regras de reescrita.

### 5.2.2 COEFICIENTES $k_i$ E $\varepsilon_i$

Verifica-se que os coeficientes  $k_i$  e  $\varepsilon_i$  são calculados seguindo os procedimentos do item 5.1, que são os procedimentos gerais propostos pelos autores. Por esses coeficientes se tornarem extensos demais à medida que se avança (“em  $i$ ”) nos termos das séries de  $k$  e  $\varepsilon$ , ficou evidente a necessidade da criação de um programa que, de maneira rápida e eficiente, auxiliasse os procedimentos de cálculo. O número de operações de cada novo termo torna-se rapidamente impraticável sem auxílio computacional.

Estudado o programa *Mathematica*, como ferramenta para otimização dos cálculos de  $k_i$  e  $\varepsilon_i$  para o presente mestrado, foi criado um programa para o ambiente *Mathematica* denominado *Cálculo Otimizado dos Coeficientes de  $k$  e  $\varepsilon$* . O programa tem como variável inicial o número de coeficientes que se quer calcular para  $k$  e  $\varepsilon$ , ( $N_x$ ). Outras variáveis também são nomeadas no início do programa, quais sejam:  $S_k$ ,  $S_\varepsilon$ ,  $k_0$  e  $\varepsilon_0$ . É possível atribuir valores à essas variáveis e obter valores numéricos dos coeficientes de  $k$  e  $\varepsilon$ .

Esse programa encontra-se no APÊNDICE A.

### 5.3 VISCOSIDADE TURBULENTA ( $\nu_t$ )

A partir da ampliação dos coeficientes de  $k$  e  $\varepsilon$ , por meio do cálculo otimizado permitido pelo programa aqui desenvolvido, foi possível realizar a análise da viscosidade turbulenta ( $\nu_t$ ), ou seja, o estudo geral da viscosidade turbulenta adimensionalizada.

A análise foi efetuada a partir das equações (3.5), (5.12) e (5.13), com as quais se obtém a expressão geral para viscosidade turbulenta adimensionalizada (5.17):

$$\frac{\nu_t}{\nu_o} = \frac{1 + \frac{2S_k}{3} \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^2 - \frac{S_k}{9} (S_k - 2S_\varepsilon) \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^4 + \frac{S_k}{405} (20S_k^2 - 51S_k S_\varepsilon + 30S_\varepsilon^2) \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^6 + \dots}{1 + \frac{S_\varepsilon}{2} \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^2 - \frac{S_\varepsilon}{72} (14S_k - 15S_\varepsilon) \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^4 + \frac{S_\varepsilon}{6480} (728S_k^2 - 1290S_k S_\varepsilon + 549S_\varepsilon^2) \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^6 + \dots} \quad (5.17)$$

Percebe-se que o termo entre parênteses,  $\left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)$ , é um termo adimensionalizado que pode ser substituído por  $x^*$ .

Através do programa *Cálculo Otimizado dos Coeficientes de  $k$  e  $\varepsilon$* , a viscosidade turbulenta adimensionalizada pode ser determinada para  $n$  termos.

### 5.4 CASO PARTICULAR: COMPARAÇÃO TERMO A TERMO DAS SÉRIES ( $k$ , $\varepsilon$ )

Após a verificação e ampliação dos coeficientes de  $k_i$  e  $\varepsilon_i$ , foram reescritas as equações para a energia cinética turbulenta adimensional,  $k/k_0$  ( $= h$ ), e a taxa de dissipação de energia adimensional,  $\varepsilon/\varepsilon_0$  ( $= e$ ), que se apresentam da seguinte forma, de acordo com as equações (5.12) e (5.13):

$$h = 1 + \frac{S_k}{3} \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^2 + \frac{S_k}{9} (S_\varepsilon - S_k) \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^4 + \dots \quad (5.18)$$



$$e = 1 + \frac{S_\varepsilon}{2} \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^2 + \frac{S_\varepsilon}{6} \left( \frac{5S_\varepsilon}{4} - \frac{7S_k}{6} \right) \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^4 + \dots \quad (5.19)$$

Em uma primeira análise, verificou-se que a comparação, termo a termo de mesma ordem, das equações (5.18) e (5.19), resulta nas seguintes proposições:

$$S_k = \frac{3S_\varepsilon}{2} \quad (5.20)$$

ou

$$S_\varepsilon = \frac{2S_k}{3} \quad (5.21)$$

Substitui-se a equação (5.20) na equação (5.18) e verifica-se que:

$$h = e = 1 + \frac{S_\varepsilon}{2} \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^2 - \frac{S_\varepsilon^2}{12} \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^4 + \dots \quad (5.22)$$

Substitui-se a equação (5.21) na equação (5.19) e verifica-se que:

$$h = e = 1 + \frac{S_k}{3} \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^2 - \frac{S_k^2}{27} \left( \frac{\varepsilon_0 x}{k_0^{3/2}} \right)^4 + \dots \quad (5.23)$$

Ou seja, com a substituição das equações (5.20) e (5.21) nas equações (5.18) e (5.19), respectivamente, verifica-se que as equações para a energia cinética turbulenta adimensional,  $k/k_0$  ( $= h$ ), e a taxa de dissipação de energia adimensional,  $\varepsilon/\varepsilon_0$  ( $= e$ ), tornam-se iguais de acordo com as variáveis substituídas. Interessante verificar que esta igualdade é possível, uma vez que as relações (5.20) e (5.21) se mantêm para todos os coeficientes.

Assim com esta igualdade, as equações têm coeficientes que dependem exclusivamente de uma única variável, de  $S_k$  ou de  $S_\varepsilon$ . Atribuindo-se valores

experimentais  $C_\mu = 0.09$ ,  $C_2 = 1.92$ ,  $\sigma_k = 1.0$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.3$  (RODI, 1980) às variáveis  $S_k$  e  $S_\varepsilon$  nas equações (5.9c) e (5.10), novamente reproduzidas pelas equações (5.24) e (5.25), respectivamente, percebe-se que as constantes não seguem a regra estabelecida por (5.20) e (5.21). Têm-se:

$$S_k = \frac{3 \sigma_k}{2 C_\mu} \quad (5.24)$$

e

$$S_\varepsilon = \frac{C_2 \sigma_\varepsilon}{C_\mu} \quad (5.25)$$

Considerando a viscosidade turbulenta ( $\nu_t$ ),

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5.26)$$

com as condições (5.20) e (5.21), esta passa a ser representada também por:

$$\frac{\nu_t}{\nu_{to}} = h \quad (5.27)$$

Ou seja, o modelo  $k$ - $\varepsilon$  transforma-se em um modelo exclusivamente em  $h$  ( $= k/k_o$ ).

## 5.5 SOLUÇÃO LINEAR PARA $\varepsilon = \varepsilon(\bar{k})$

O item 5.4 serviu para criar sensibilidade no trato com as equações expandidas, permitindo obter relações que, contudo, são muito particulares.

Os trabalhos passaram então a considerar os procedimentos de SCHULZ & CHAUDHRY (1998) e MATSUNAGA *et al* (1999), que motivaram o uso conjunto das definições desses trabalhos. Segundo <sup>3</sup>SCHULZ (2003), decorrente dos trabalhos

<sup>3</sup> SCHULZ, H. E. (2003). Informação pessoal, ainda não publicada.

conjuntos nessa linha de pesquisa, apresenta uma proposta de equacionamento linear para a equação governante da taxa de dissipação de energia como função da energia cinética turbulenta. Esse desenvolvimento é apresentado em detalhes no presente texto, adicionado da proposta de solução aqui desenvolvida.

MATSUNAGA *et al* (1999) definiram:

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\sigma_k}{\nu_l} \quad (5.28)$$

A função  $F$  é definida apenas como uma variável auxiliar. Insere-se a equação (5.28) na equação (5.2), eliminando-se  $dz$ , o que resulta em:

$$\frac{d}{dF} \left( \frac{dk}{dF} \right) = \frac{C_\mu}{\sigma_k} k^2 \quad (5.29)$$

Rearranjando-se as equações (5.3), (5.26) e (5.28), tem-se que:

$$\frac{d}{dF} \left( \frac{d\varepsilon}{dF} \right) = \left( \frac{\sigma_\varepsilon C_2 C_\mu}{\sigma_k^2} \right) \varepsilon \cdot k \quad (5.30)$$

Definem-se as seguintes variáveis:

$$\bar{k} = \frac{C_\mu}{\sigma_k} k \quad (5.31)$$

e

$$j = \frac{C_2 \sigma_\varepsilon}{\sigma_k} \quad (5.32)$$

MATSUNAGA *et al* (1999) demonstraram que:

$$\frac{d^2 \bar{k}}{dF^2} = \bar{k}^{-2} \quad (5.33)$$

e

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dF^2} = j \varepsilon \bar{k} \quad (5.34)$$

Segundo a abordagem de SCHULZ & CHAUDHRY (1998), aplicada agora para  $F$  e não para  $x$ , a primeira integração da equação (5.33) produz:

$$\frac{d\bar{k}}{dF} = \pm \sqrt{w_1 + \frac{2}{3} \bar{k}^{-3}} \quad (5.35)$$

Na equação (5.35),  $w_1$  é uma constante de integração. Considerando que apenas se pode dissipar o que já existe, foi sugerido que a taxa de dissipação de energia pode ser expressa como função da energia cinética turbulenta. Em outros termos, impõe-se:

$$\varepsilon = \varepsilon(\bar{k}) \quad (5.36)$$

e

$$\bar{k} = \bar{k}(F) \quad (5.37)$$

As proposições das equações (5.36) e (5.37) são decorrentes de considerações físicas e exigem comprovação a partir da forma da equação obtida para a taxa de dissipação de energia ( $\varepsilon$ ), a ser expressa em função da energia cinética turbulenta ( $\bar{k}$ ). Esta comprovação deve ser verificada em nível experimental.

Sendo a dissipação de energia função da energia cinética turbulenta, então:

$$\frac{d\varepsilon}{dF} = \frac{d\varepsilon}{d\bar{k}} \frac{d\bar{k}}{dF} \quad (5.38)$$

e

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dF^2} = \frac{d^2 \varepsilon}{d\bar{k}^2} \left( \frac{d\bar{k}}{dF} \right)^2 + \frac{d\varepsilon}{d\bar{k}} \frac{d^2 \bar{k}}{dF^2} \quad (5.39)$$

Utilizando-se das equações (5.33), (5.34) e (5.35) na equação (5.39), obtém-se:

$$\left( w_1 + \frac{2}{3} \bar{k}^{-3} \right) \frac{d^2 \varepsilon}{d\bar{k}^2} + \bar{k}^{-2} \frac{d\varepsilon}{d\bar{k}} - j\varepsilon \bar{k} = 0 \quad (5.40)$$

Definindo-se  $\varepsilon = y$ ,  $\bar{k} = x$  e  $a = \frac{3}{2} w_1$ , na equação (5.40), apenas para simplificação de notação, tem-se:

$$\left( a + x^3 \right) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{3}{2} x^2 \frac{dy}{dx} - \frac{3}{2} jxy = 0 \quad (5.41)$$

Na equação (5.41),  $a$  é uma constante de integração. Esta é a equação governante originalmente proposta por SCHULZ (2003). Note-se que a vantagem desta equação reside no fato de *ser linear e admitir solução segundo as ferramentas tradicionais do cálculo*. Em outros termos: "o problema de turbulência isotrópica, considerado do ponto de vista do modelo  $k$ - $\varepsilon$ , quando tratado no espaço  $k$ - $\varepsilon$ , admite equacionamento governante linear". Este fato é um progresso importante na área, porque o problema de duas equações diferenciais não-lineares acopladas foi transformado em um problema de uma única equação linear. O presente trabalho de mestrado foi então direcionado para a obtenção da solução deste problema linear. De forma resumida, resolve-se a equação (5.41) e obtém-se  $\varepsilon = \varepsilon(\bar{k})$ .

## 6 RESULTADOS NUMÉRICOS

### 6.1 VISCOSIDADE TURBULENTA ( $\nu_t$ )

Como primeiro resultado deste mestrado, são apresentados os estudos de convergência das séries de  $k$  e  $\varepsilon$ . Verificou-se o comportamento do raio de convergência da viscosidade turbulenta adimensionalizada, acrescentando-se passo a passo os termos das séries.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (6.1)$$

Espera-se que a série de potências que representa um fenômeno físico, usando como exemplo a equação (6.1), possui um raio de convergência  $r^*$  tal que a série converge quando  $|x| < r^*$  e diverge quando  $|x| > r^*$ . Em outras palavras, a soma dos infinitos termos que compõem a série assumirá valor finito “dentro” do raio de convergência. Diz-se que a série convergiu no intervalo delimitado por esse raio. Análises teóricas tradicionais utilizam métodos que permitem, através da análise de termos sucessivos, atestar pela convergência ou não. Em alguns casos utilizam-se métodos assintóticos.

De qualquer forma, é preciso conhecer o termo geral, ou seja, aquele que expressa a formação de toda a série. No presente problema, não se conseguiu exprimir esse termo geral, em decorrência da não-linearidade do conjunto acoplado de equações diferenciais. Como é possível uma análise assintótica, adotou-se um ponto de vista de engenharia, ou seja, estabeleceu-se um horizonte “de igualdade” para duas avaliações sucessivas da grandeza física em questão, a segunda com um termo a mais do que a

primeira. A partir desse horizonte de igualdade, foram obtidos e comparados valores numéricos.

Em termos práticos, o que se fez foi avaliar inicialmente a série (6.1) para o termo de ordem 0, obtendo-se:

$$f(x) = c_0 \quad (6.2)$$

Posteriormente, avaliou-se para o termo de ordem 1, obtendo-se:

$$f(x) = c_0 + c_1x \quad (6.3)$$

Comparou-se o gráfico da aproximação de ordem zero e de ordem 1, e estabeleceu-se como horizonte de igualdade 99%, ou seja, a segunda aproximação é considerada igual à primeira para um erro relativo de 1% entre as avaliações. Neste primeiro caso, o raio de convergência (limite no qual se verifica o horizonte de igualdade) é basicamente nulo.

Posteriormente, reavaliou-se a referida série para o termo de ordem 2, obtendo-se:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 \quad (6.4)$$

Comparou-se então o gráfico da aproximação de ordem 2 e de ordem 1, com o mesmo erro relativo de 1% entre as avaliações. Neste segundo caso, o raio de convergência cresceu em relação ao primeiro. Este procedimento foi seguido até se obter uma tendência assintótica para o raio de convergência.

Graficamente, o raio de convergência é determinado conforme representado na FIGURA 05. Para análise da viscosidade turbulenta adimensionalizada, equação (5.17), o eixo  $x$  foi substituído pelo  $x^*$ .

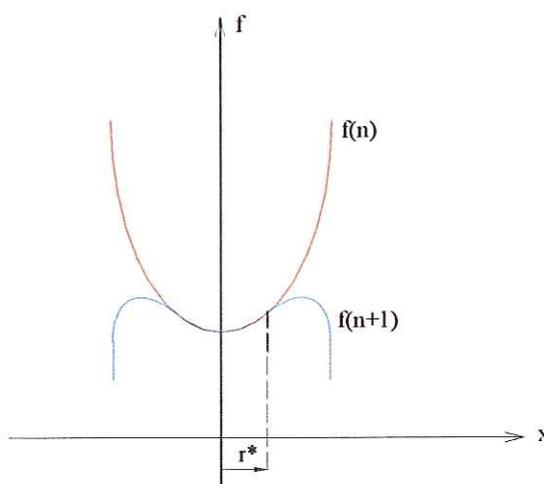


FIGURA 05 – Raio de convergência.

A TABELA 01 apresenta os valores encontrados para o raio de convergência da equação (5.17), ou seja, para a equação da viscosidade turbulenta adimensionalizada, variando-se o número de termos de coeficientes na equação (numerador e denominador ao mesmo tempo). Foi efetuada a análise para o raio de convergência até o limite de 60 termos (pares e ímpares) nas séries. O programa desenvolvido para o cálculo dos coeficientes de  $k$  e  $\varepsilon$  não possui limitações quanto ao número de  $N_x$ . Mas vale ressaltar que quando  $N_x$  é grande, o programa exige muita memória RAM (*Random Access Memory*) do meio computacional para cálculos relativamente rápidos. Os valores para o raio de convergência foram registrados com 4 dígitos significativos. A viscosidade turbulenta adimensionalizada (ponto a ponto) foi registrada com 6 dígitos significativos. O raio de convergência para a região difuso-dissipativa encontrado na análise direta da viscosidade turbulenta (comparação entre cálculos de viscosidade turbulenta), após a inclusão de 60 termos (pares e ímpares, lembrando que os termos ímpares anulam-se no presente estudo) nas séries foi de aproximadamente 0,33 sobre o eixo da variável  $x^*$ .

TABELA 01 – Raio de convergência para a viscosidade turbulenta adimensionalizada.

N.º de Termos Pares	Raio de Convergência	N.º de Termos Pares	Raio de Convergência
2	0,0000	17	0,2900
3	0,0173	18	0,2900
4	0,0361	19	0,3050
5	0,0796	20	0,3090
6	0,1231	21	0,3090
7	0,1500	22	0,3151
8	0,1919	23	0,3200
9	0,2001	24	0,3006
10	0,2008	25	0,3102
11	0,2400	26	0,3219
12	0,2400	27	0,3217
13	0,2409	28	0,3292
14	0,2813	29	0,3313
15	0,2610	30	0,3233
16	0,2719	31	0,3299

A visualização gráfica da TABELA 01 está apresentada na FIGURA 06.

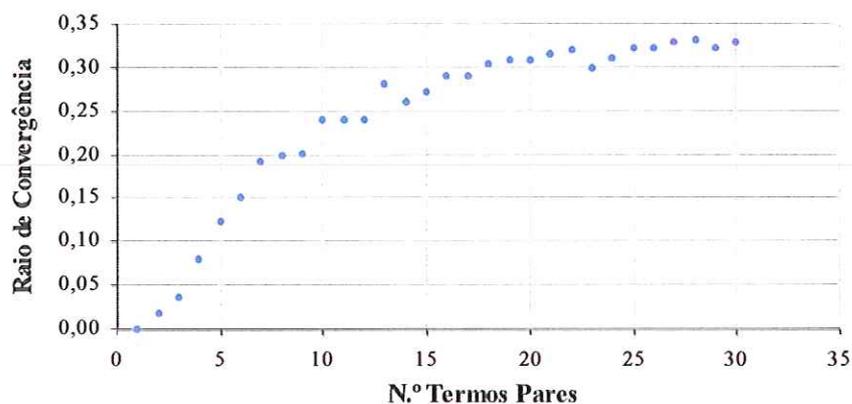


FIGURA 06 – Raio de convergência para a equação da viscosidade turbulenta adimensionalizada.

Como ilustração acerca da possível variação do raio de convergência considerando diferentes aproximações no modelo  $k-\varepsilon$ , efetuou-se análise adicional considerando o caso idealizado da equação (5.27). A TABELA 02 apresenta os valores dos raios de convergência para a equação da viscosidade turbulenta adimensionalizada, segundo as equações (5.27) e (5.18), isto é, para o caso particular em que toda a descrição do fenômeno é feita a partir do cálculo de  $h$ . Foi efetuada análise para o raio de

convergência até o limite de 56 termos na série (pares e ímpares, lembrando que os termos ímpares se anulam). Vale novamente ressaltar que essa análise somente seria verdadeira se as constantes usuais do modelo  $k-\varepsilon$ , como descritas em RODI (1980), seguissem as condições das equações (5.20) e (5.21). Os valores para o raio de convergência foram registrados com 4 dígitos significativos e a viscosidade turbulenta adimensionalizada (ponto a ponto) com 6 dígitos significativos. O raio de convergência para a região difuso-dissipativa encontrado para 56 termos (pares e ímpares) na série foi aproximadamente 0,23. Verifica-se, portanto, que o valor obtido depende da forma como as equações são utilizadas.

Não obstante, verificou-se haver, também, uma região de convergência que, no caso de uso da equação na forma geral, com as constantes existentes na literatura, situa-se até um valor de raio de 0,33 (para  $x^*$ ). A abrangência deste valor para cada caso prático depende das variáveis  $k_0$  e  $\varepsilon_0$  de cada caso.

TABELA 02 – Raio de convergência para a viscosidade turbulenta adimensionalizada para a aproximação que considera apenas  $h$ .

N.º de Termos Pares	Raio de Convergência	N.º de Termos Pares	Raio de Convergência
2	0,0000	16	0,2140
3	0,0201	17	0,2172
4	0,0501	18	0,2172
5	0,0901	19	0,2193
6	0,1100	20	0,2194
7	0,1221	21	0,2194
8	0,1500	22	0,2194
9	0,1501	23	0,2194
10	0,1708	24	0,2194
11	0,1811	25	0,2239
12	0,1900	26	0,2292
13	0,1911	27	0,2320
14	0,1930	28	0,2339
15	0,1988	29	0,2339

A visualização gráfica da TABELA 02 está apresentada na FIGURA 07.

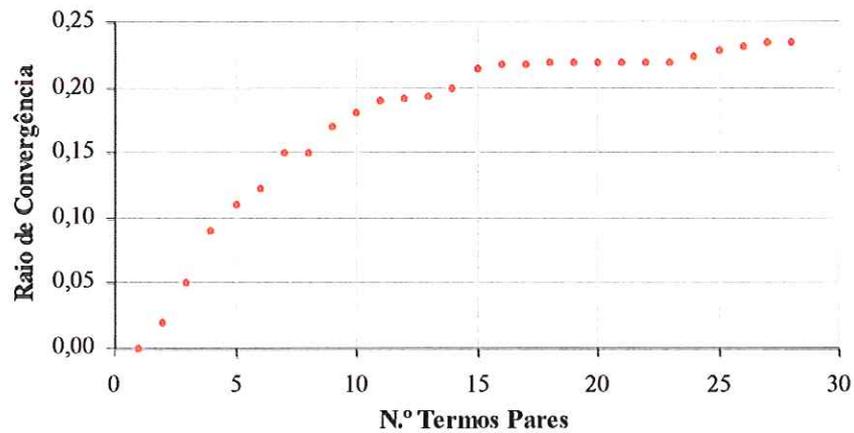


FIGURA 07 – Raio de convergência para a viscosidade turbulenta adimensionalizada para a aproximação que considera apenas  $h$ .

Independente da manipulação efetuada no modelo, conclui-se, pelas FIGURAS 06 e 07, que os gráficos tendem à estabilidade.

## 6.2 SOLUÇÃO LINEAR PARA $\varepsilon = \varepsilon(\bar{k})$

Através do programa *Mathematica*, utilizado como ferramenta para auxílio de resoluções de equações complexas, foi possível obter-se uma solução para a equação (5.41). Esta solução assume a forma:

$$y = C'_1 \text{Hypergeometric2F1}[A] + \frac{1}{a^{1/3}} (xC'_2 \text{Hypergeometric}[B]) \quad (6.5)$$

$$[A] = \left[ \frac{1}{12} - \frac{1}{12} \sqrt{1+24j}, \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \sqrt{1+24j}, \frac{2}{3}, -\frac{x^3}{a} \right] \quad (6.6)$$

$$[B] = \left[ \frac{5}{12} - \frac{1}{12} \sqrt{1+24j}, \frac{5}{12} + \frac{1}{12} \sqrt{1+24j}, \frac{4}{3}, -\frac{x^3}{a} \right] \quad (6.7)$$

$\text{Hypergeometric2F1}[a,b,c,z]$  é uma função hipergeométrica  ${}_2F_1(a,b,c,z)$ . A função  ${}_2F_1$  tem uma expansão em série:

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} \quad (6.8)$$

ou

$${}_2F_1(a, b, c, z) = 1 + \frac{abz}{c} + \frac{a(1+a)b(1+b)z^2}{2c(1+c)} + \frac{a(1+a)(2+a)b(1+b)(2+b)z^3}{6c(1+c)(2+c)} + \dots \quad (6.9)$$

Para considerarmos a equação (6.5) como solução da equação (5.41) no conjunto dos números reais, é preciso analisar a raiz que se encontra nas equações (6.6) e (6.7).

$$\sqrt{1 + 24j} \quad (6.10)$$

A equação (6.10) terá solução real se for satisfeita a seguinte análise:

$$1 + 24j \geq 0 \quad (6.11)$$

Para que a equação (6.11) seja verdadeira, tem-se que:

$$j \geq -\frac{1}{24} \quad (6.12)$$

A partir da equação (5.32), tem-se que todas as variáveis pertencentes à equação são maiores que zero, portanto, ter-se-á sempre  $j > 0$ , o que satisfaz a equação (6.12).

O valor de  $j$  igual a 2,496, determinado pela equação (5.32) através das constantes descritas, por exemplo, em RODI (1980), foi inserido nas equações (6.6) e (6.7).

Para o estudo do comportamento da equação (6.5), devem ser estabelecidas condições de contorno. As seguintes condições foram consideradas adequadas:

$$k = 0 \rightarrow \varepsilon = 0 \quad (6.13)$$

$$k = 0,0000139534256077076 \text{ m}^2/\text{s}^2, \varepsilon = 0,0000002514897253536 \text{ m}^2/\text{s}^3$$

$$\text{em } z = 2,512\text{cm} \quad (6.14)$$

Para os experimentos considerados nesta análise, foram observadas algumas assimetrias. Assim, em  $z = 2,512\text{cm}$ , a energia cinética e a taxa de dissipação de energia são mínimas e iguais a  $k_0$  e  $\varepsilon_0$ , respectivamente. Sabe-se que em situação ideal, a energia cinética e a taxa de dissipação de energia passam por um mínimo em  $z = 0$ , para um tanque com duas grades oscilantes (a origem do eixo está localizada no centro do espaçamento entre as grades). Os valores da condição de contorno da equação (6.14) foram retirados dos dados experimentais para o tanque com duas grades oscilantes de JANZEN (2003) descrito anteriormente, para frequência de oscilação ( $f$ ) igual a 4Hz e amplitude de oscilação ( $S$ ) igual a 2cm. Trata-se, portanto, de um caso particular. O deslocamento de 2,512cm da origem decorre da assimetria nas condições de contorno de topo e de fundo do tanque (superfície livre e fundo imóvel, além das diferentes distâncias até a superfície e o fundo), em relação às duas grades, (JANZEN, 2003).

Após a aplicação das condições de contorno das equações (6.13) e (6.14) na equação (6.5), foram obtidas as seguintes constantes desta equação:

$$C'_1 = 0 \quad (6.15)$$

e

$$C'_2 = \frac{0.200261 a^{0.333333}}{\text{Hypergeometric2F1}\left[-0.233675, 1.06701, 1.33333, -\frac{1.98048 \cdot 10^{-18}}{a}\right]} \quad (6.16)$$

Com a substituição das equações (6.15) e (6.16), a equação (6.5) reduz-se a:

$$y = \frac{0.200261 x \text{Hypergeometric2F1}\left[-0.233675, 1.06701, 1.33333, -\frac{x^3}{a}\right]}{\text{Hypergeometric2F1}\left[-0.233675, 1.06701, 1.33333, -\frac{1.98048 \cdot 10^{-18}}{a}\right]} \quad (6.17)$$

Diferentes valores de  $a$  foram atribuídos à equação (6.17) e foi obtida uma família de curvas, FIGURA 08. O menor valor de  $a$  foi de  $10^{-20}$ . A partir desta família de curvas foi obtida a equação (um gráfico, se melhor aprouver) que melhor representa os dados experimentais de JANZEN (2003) para o tanque de grades oscilantes com frequência igual a 4Hz e amplitude de oscilação igual a 2cm, com posição de mínimo deslocada. Através da FIGURA 09 verificou-se haver boa aproximação para esse caso particular dos dados experimentais de JANZEN (2003). Trabalhou-se com a alteração dos valores de  $k$  para  $\bar{k}$  e a solução linear para  $\varepsilon = \varepsilon(\bar{k})$ . O valor de  $a$  para o melhor ajuste foi  $10^{-20}$  (ajuste visual).

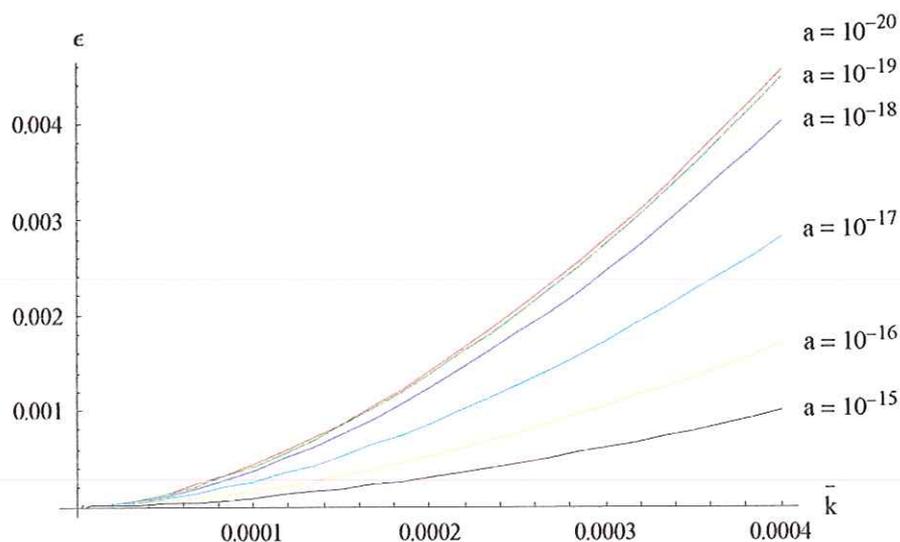


FIGURA 08 – Família de curvas tendo como parâmetro  $a$ .

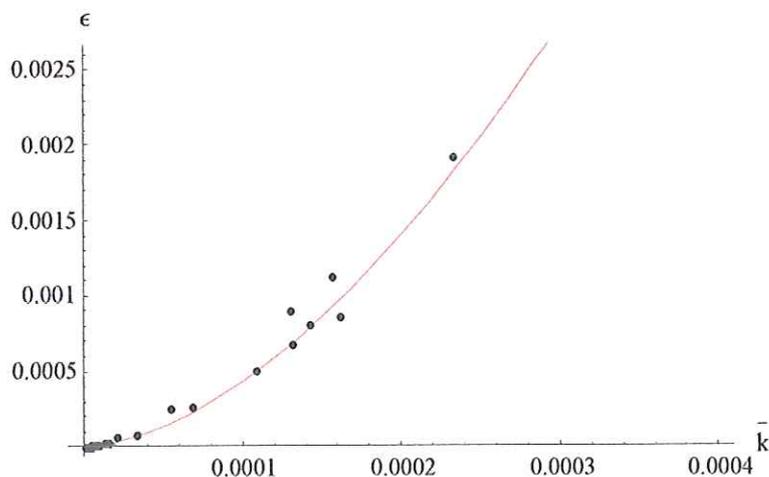


FIGURA 09 – Solução linear para  $\varepsilon = \varepsilon(\bar{k})$  e dados experimentais de JANZEN (2003).

## CONCLUSÕES

As presentes conclusões consideram os objetivos inicialmente traçados para este trabalho.

O grande volume de cálculo referente à resolução dos coeficientes de  $k$  e  $\varepsilon$  nas soluções em série existentes na literatura da área impede o desenvolvimento manual. Portanto, foi desenvolvida uma rotina no ambiente do programa *Mathematica*, utilizada como ferramenta para simplificar o trabalho mecânico. Devido à limitação de memória RAM dos computadores disponibilizados para a pesquisa, foi possível chegar a 60 termos (pares e ímpares, o que implica em 31 termos diferentes de zero) dos coeficientes de  $k$  e  $\varepsilon$ .

Um caso especial dos coeficientes de  $k$  e  $\varepsilon$  foi estudado como abordagem inicial, ou seja, a situação na qual as equações expandidas de  $h$  ( $= k/k_0$ ) e de  $e$  ( $= \varepsilon/\varepsilon_0$ ) tornar-se-iam iguais. O modelo  $k$ - $\varepsilon$  transforma-se em um modelo exclusivamente dependente de  $h$ , desde que as constantes do modelo seguissem as condições das equações (5.20) e (5.21).

O valor do raio de convergência obtido para a viscosidade turbulenta foi 0,33 (adimensional), através de método numérico com erro relativo de 1% aceito entre avaliações sucessivas da viscosidade.

A partir de proposta de SCHULZ (2003) não publicada, que sugere uma equação governante linear para  $\varepsilon = \varepsilon(\bar{k})$ , verifica-se haver a possibilidade de seguir outro caminho para determinação das variáveis relevantes aos processos difusivo-dissipativos.

Sugere-se que a possibilidade  $\varepsilon = \varepsilon(\bar{k})$  seja utilizada em outras situações. Foi aqui obtida uma solução na forma de funções hipergeométricas. Verificou-se que o comportamento desta solução produz boa aproximação para o caso particular de dados experimentais de JANZEN (2003), em uma análise comparativa na qual foi gerada uma família de curvas teóricas.

A partir da hipótese que originou a pesquisa e dos objetivos estabelecidos para o trabalho, os resultados alcançados indicam que a proposta foi plenamente desenvolvida e os objetivos cabalmente atingidos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Citadas:

- CARMO, J.; SERNADAS, A.; SERNADAS, C.; DIONÍSIO, F. M.; CALEIRO, C. (1999). *Introdução à programação em Mathematica*. Lisboa, Instituto Superior Técnico.
- DAILY, J. W.; HARLEMAN, D. R. F. (1969). *Dinámica de los fluidos: Con aplicaciones en ingeniería*. México, Editorial F. Trilhas S.A.
- HINZE, J. O. (1959). *Turbulence: An introduction to its mechanism and theory*. New York, McGraw-Hill.
- HOPFINGER, E. J.; TOLY, J. A. (1976). Spatially decaying turbulence and its relation to mixing across density interfaces. *Journal of Fluid Mechanics*, v.78, part 1, p.155-175.
- JANZEN, J. G. (2003). *Detalhamento das propriedades turbulentas em água agitada por grades oscilantes*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MATSUNAGA, N.; SUGIHARA, Y.; KOMATSU, T.; MASUDA, A. (1999). Quantitative properties of oscillating-grid turbulence fluid. *Fluid Dynamics Research*. v.25, p.147-165.

- MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. (1997). *Fundamentos da mecânica dos fluidos*; tradução, Euryale de Jesus Zerbini. 2 ed. São Paulo, Edgard Blücher. v.1 e 2.
- RODI, W. (1980). *Turbulence models and their application in hydraulics*. IAHR, Delft.
- SHAMES, I. H. (1973). *Mecânica dos fluidos*; tradução, Mauro O. C. Amorelli. São Paulo, Edgard Blücher. v.2.
- SCHULZ, H. E.; CHAUDHRY, F. H. (1998). Uma aproximação para turbulência gerada por grelhas oscilantes. Primeira Escola de Transição e Turbulência, COPPE, Rio de Janeiro, setembro/98.
- SCHULZ, H. E. (2001). *Alternativas em turbulência*. São Carlos, EESC-USP.
- SCHULZ, H. E. (2003). *Desenvolvimento de equação governante linear para o problema de turbulência do ponto de vista do espaço  $k-\epsilon$* , Texto não publicado, informação pessoal do autor, fornecida no contexto da linha de pesquisa em escoamentos turbulentos, desenvolvida no SHS/EESC/USP.
- SHY, S. S.; TANG, C. Y., FANN, S. Y. (1997). A nearly isotropic turbulence generated by a pair of vibrating grids. *Experimental Thermal and Fluid Science*. v.14, p.251-262.
- SOUZA, L. B. S. (2002). *Estudo de estrutura turbulenta em escoamentos gerados por grelhas oscilantes*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

- SOUZA FILHO, F. A. (1994). *Modelação numérica da hidrodinâmica em canais utilizando modelos de turbulência*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- TAYLOR, G. I. (1935b). *Statistical theory of turbulence*. Proceedings of the Royal Society of London A. v.151.
- TOWNSEND, A. A. (1976). Homogeneous turbulent flows. In: THE STRUCTURE of turbulent shear flow. Cambridge, Cambridge University Press. Cap.3, p.45-103.
- A turbulência como rotina. *O Estado de São Paulo*, São Paulo, 20 mar. Disponível em: <http://txt.estado.com.br/editorias/2003/02/20/editoriais001.html>. Acesso em: 24 jul 2003.
- CORRÊA, R. W. (2002). *Teoria do caos: Introdução*. Geocities. Disponível em: <http://www.geocities.com/inthechaos/intro.htm>. Acesso em: 24 jul. 2003.

---

#### Consultadas:

- BENNETT, C. O. (1978). *Fenômenos de transporte de quantidade de movimento, calor e massa*; tradução, Eduardo Walter Leser. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. (1970). *Introduction to differential equations*. Wiley & Sons, Inc.
- DICK, S.; RIDDLE, A.; STEIN, D. (1997). *Mathematica in the laboratory*. Cambridge University Press.

- KAPLAN, W. (1972). *Cálculo avançado*; tradução, Frederic Tsu. 2 ed. São Paulo, Edgard Blücher.
- LAUNDER, B. E.; SPALDING, D. B. (1972). *Lectures in mathematical models of turbulence*. Academic Press.
- LEITHOLD, L. (1982). *O Cálculo com geometria analítica*. v.2, 2.<sup>a</sup> edição, São Paulo, Editora Harper & Row do Brasil Ltda.
- LESIEUR, M. (1997). *Turbulence in fluids*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.
- MARKATOS, N. C. (1986). *The mathematical modelling of turbulent flow*. Applied Math. Modelling, june, p.190-220.
- MATSUNAGA, N.; SUGIHARA, Y.; KOMATSU, T. (1991). A numerical simulation of oscillating-grid turbulence by using the  $k-\varepsilon$  model, In: LEE, J. H. W.; CHEUNG, Y. K., eds. *Environmental Hydraulics*, The Netherlands, A. A. Balkema. v.1, p.427-432.
- SCHULZ, H. E. (1989). *Investigação do mecanismo de reoxigenação da água em escoamento e sua correlação com o nível de turbulência junto à superfície*. São Carlos. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SCHULZ, H. E.; CHAUDHRY, F. H. (1999). Resultados teóricos para turbulência gerada por duas grelhas oscilantes. Publicado em CD-ROM, ISBN-85-85769-03-3. *XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*. Águas de Lindóia, SP

- SPIEGEL, M. R. (1972). *Cálculo avançado*; tradução, Alfredo A. de Farias e Francisco A. Bastos. Coleção Schaum. 2 ed. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil.

## APÊNDICE A – PROGRAMA CÁLCULO *OTIMIZADO* DOS COEFICIENTES DE $k$ E $\varepsilon$

O programa descrito abaixo é uma exemplificação para o número de coeficientes que se quer calcular para  $k$  e  $\varepsilon$  ( $N_x$ ) igual a 18. Nos APÊNDICES B e C estão os resultados do programa com 18 coeficientes de  $k$  e  $\varepsilon$ , respectivamente.

```

Nx = 18;
n = Nx + 2;
Sk = Sk;
Se = Se;
k0 = k0;
e0 = e0;
Do[ki = ., {i, 1, Nx, 1}];
Do[εi = ., {i, 1, Nx, 1}];

XX :=  $\left( \sum_{i=0}^n k_i x^i \right)^3$ ;
Do[ki = 0, {i, 1, n, 2}];
ExpandAll[XX];
Collect[XX, x];
CoefficientList[XX, x];

YY := Sk  $\left( \sum_{i=0}^n \left( \frac{\varepsilon_i x^{i+1}}{i+1} \right) + B_1 \right)^2 + B_2$ ;
Do[εi = 0, {i, 1, n, 2}];
B1 = 0;
ExpandAll[YY];
Collect[YY, x];
CoefficientList[YY, x];

```

$$\begin{aligned}
 WW := & 2 \left( \sum_{i=0}^n (k_i * x^i) \right)^2 \left( \sum_{i=0}^n (\epsilon_i * x^i) \right) \left( \sum_{i=0}^n (i * k_i * x^{i-1}) \right) \left( \sum_{i=0}^n (i * \epsilon_i * x^{i-1}) \right) - \\
 & \left( \sum_{i=0}^n (k_i * x^i) \right)^3 \left( \sum_{i=0}^n (i * \epsilon_i * x^{i-1}) \right) \left( \sum_{i=0}^n (i * \epsilon_i * x^{i-1}) \right) + \\
 & \left( \sum_{i=0}^n (k_i * x^i) \right)^3 \left( \sum_{i=0}^n (\epsilon_i * x^i) \right) \left( \sum_{i=0}^n (i * (i-1) * \epsilon_i * x^{i-2}) \right); \text{ Do}[k_i = 0, \{i, 1, n, 2\}];
 \end{aligned}$$

Do[ $\epsilon_i = 0, \{i, 1, n, 2\}$ ];

ExpandAll[WW];

Collect[WW, x];

CoefficientList[WW, x];

$$SS := S_e \left( \sum_{i=0}^n (\epsilon_i * x^i) \right)^4;$$

Do[ $\epsilon_i = 0, \{i, 1, n, 2\}$ ];

$B_1 = 0$ ;

ExpandAll[SS];

Collect[SS, x];

CoefficientList[SS, x];

lista1 = Coefficient[XX, x, 2] == Coefficient[YY, x, 2];

Eqk2 = Solve[lista1, k2]

lista2 = Coefficient[WW, x, 0] == Coefficient[SS, x, 0];

Eqe2 = Solve[lista2, e2]

Do[auxk = Coefficient[XX, x, i] == Coefficient[YY, x, i];

Do[auxk = auxk / Eqk<sub>ii-2</sub>[[1]] / Eqe<sub>ii-2</sub>[[1]], {ii, 4, i, 2}];

Eqk<sub>i</sub> = Simplify[Solve[auxk, k<sub>i</sub>]];

auxe = Coefficient[WW, x, i-2] == Coefficient[SS, x, i-2];

Do[auxe = auxe / Eqk<sub>ii-2</sub>[[1]] / Eqe<sub>ii-2</sub>[[1]], {ii, 4, i, 2}];

Eqe<sub>i</sub> = Simplify[Solve[auxe, e<sub>i</sub>]];

Print[Eqk<sub>i</sub>]; Print[Eqe<sub>i</sub>], {i, 4, Nx, 2}]

Do [k<sub>i</sub> = k<sub>i</sub> / Eqk<sub>i</sub>[[1]]; e<sub>i</sub> = e<sub>i</sub> / Eqe<sub>i</sub>[[1]], {i, 2, Nx, 2}]

## APÊNDICE B – COEFICIENTES *OTIMIZADOS* DE *k*

$$k_2 \rightarrow \frac{S_k \epsilon_0^2}{3 k_0^2}$$

$$k_4 \rightarrow \frac{S_k (-S_k + S_\epsilon) \epsilon_0^4}{9 k_0^3}$$

$$k_6 \rightarrow \frac{S_k (50 S_k^2 - 81 S_k S_\epsilon + 30 S_\epsilon^2) \epsilon_0^6}{810 k_0^8}$$

$$k_8 \rightarrow \frac{S_k (-350 S_k^3 + 763 S_k^2 S_\epsilon - 513 S_k S_\epsilon^2 + 108 S_\epsilon^3) \epsilon_0^8}{8505 k_0^{11}}$$

$$k_{10} \rightarrow \frac{S_k (92400 S_k^4 - 251230 S_k^3 S_\epsilon + 239301 S_k^2 S_\epsilon^2 - 95460 S_k S_\epsilon^3 + 13680 S_\epsilon^4) \epsilon_0^{10}}{3061800 k_0^{14}}$$

$$k_{12} \rightarrow \frac{S_k (-592900 S_k^5 + 1925595 S_k^4 S_\epsilon - 2355251 S_k^3 S_\epsilon^2 + 1363242 S_k^2 S_\epsilon^3 - 377142 S_k S_\epsilon^4 + 40518 S_\epsilon^5) \epsilon_0^{12}}{25259850 k_0^{17}}$$

$$k_{14} \rightarrow \frac{1}{165502537200 k_0^{20}} (S_k (3144741600 S_k^6 - 11858200900 S_k^5 S_\epsilon + 17653081208 S_k^4 S_\epsilon^2 - 13324108707 S_k^3 S_\epsilon^3 + 5411780910 S_k^2 S_\epsilon^4 - 1132810488 S_k S_\epsilon^5 + 96791760 S_\epsilon^6) \epsilon_0^{14})$$

$$k_{16} \rightarrow \frac{1}{155158628625 k_0^{23}} (S_k (-2456829375 S_k^7 + 10540254725 S_k^6 S_\epsilon - 18458150847 S_k^5 S_\epsilon^2 + 17141117530 S_k^4 S_\epsilon^3 - 9154572516 S_k^3 S_\epsilon^4 + 2830652388 S_k^2 S_\epsilon^5 - 473663484 S_k S_\epsilon^6 + 33485724 S_\epsilon^7) \epsilon_0^{16})$$

$$k_{18} \rightarrow \frac{1}{3038626582992000 k_0^{26}} (S_k (4098646552000 S_k^8 - 197024665328400 S_k^7 S_\epsilon + 396365190569932 S_k^6 S_\epsilon^2 - 436509394028100 S_k^5 S_\epsilon^3 + 288647516043321 S_k^4 S_\epsilon^4 - 117898501670856 S_k^3 S_\epsilon^5 + 29240565228864 S_k^2 S_\epsilon^6 - 4061131492608 S_k S_\epsilon^7 + 244334880000 S_\epsilon^8) \epsilon_0^{18})$$

## APÊNDICE C – COEFICIENTES OTIMIZADOS DE $\varepsilon$

$$\varepsilon_2 \rightarrow \frac{S_\varepsilon \varepsilon_0^3}{2 k_0^3}$$

$$\varepsilon_4 \rightarrow - \frac{(14 S_k - 15 S_\varepsilon) S_\varepsilon \varepsilon_0^5}{72 k_0^6}$$

$$\varepsilon_6 \rightarrow \frac{S_\varepsilon (728 S_k^2 - 1290 S_k S_\varepsilon + 549 S_\varepsilon^2) \varepsilon_0^7}{6480 k_0^9}$$

$$\varepsilon_8 \rightarrow \frac{S_\varepsilon (-27664 S_k^3 + 65820 S_k^2 S_\varepsilon - 50172 S_k S_\varepsilon^2 + 12465 S_\varepsilon^3) \varepsilon_0^9}{362880 k_0^{12}}$$

$$\varepsilon_{10} \rightarrow \frac{S_\varepsilon (5532800 S_k^4 - 16313776 S_k^3 S_\varepsilon + 17362068 S_k^2 S_\varepsilon^2 - 7998372 S_k S_\varepsilon^3 + 1364067 S_\varepsilon^4) \varepsilon_0^{11}}{97977600 k_0^{15}}$$

$$\varepsilon_{12} \rightarrow \frac{1}{38799129600 k_0^{18}} (S_\varepsilon (-1715168000 S_k^5 + 6000356704 S_k^4 S_\varepsilon - 8096740392 S_k^3 S_\varepsilon^2 + 5311914228 S_k^2 S_\varepsilon^3 - 1711435878 S_k S_\varepsilon^4 + 218923965 S_\varepsilon^5) \varepsilon_0^{13})$$

$$\varepsilon_{14} \rightarrow \frac{1}{7061441587200 k_0^{21}} (S_\varepsilon (253844864000 S_k^6 - 1024739183488 S_k^5 S_\varepsilon + 1665279872000 S_k^4 S_\varepsilon^2 - 1402972079688 S_k^3 S_\varepsilon^3 + 651160163628 S_k^2 S_\varepsilon^4 - 159188355702 S_k S_\varepsilon^5 + 16148239461 S_\varepsilon^6) \varepsilon_0^{15})$$

$$\varepsilon_{16} \rightarrow \frac{1}{5084237942784000 k_0^{24}} (S_\varepsilon (-152814608128000 S_k^7 + 698063274666240 S_k^6 S_\varepsilon - 1322833230896000 S_k^5 S_\varepsilon^2 + 1354186401250224 S_k^4 S_\varepsilon^3 - 813421542033792 S_k^3 S_\varepsilon^4 + 288586899832824 S_k^2 S_\varepsilon^5 - 56385533013768 S_k S_\varepsilon^6 + 4712137451235 S_\varepsilon^7) \varepsilon_0^{17})$$

$$\varepsilon_{18} \rightarrow \frac{1}{4667330431475712000 k_0^{27}} (S_\varepsilon (119806652772352000 S_k^8 - 610321897598945280 S_k^7 S_\varepsilon + 1318993170667563776 S_k^6 S_\varepsilon^2 - 1584983763757348992 S_k^5 S_\varepsilon^3 + 1163404154435930640 S_k^4 S_\varepsilon^4 - 536925847452179328 S_k^3 S_\varepsilon^5 + 153025605228762792 S_k^2 S_\varepsilon^6 - 24769462080751992 S_k S_\varepsilon^7 + 1753157283396489 S_\varepsilon^8) \varepsilon_0^{19})$$