



**ANÁLISE FRACTAL
DE REDES DE CANAIS
DE BACIAS HIDROGRÁFICAS
NA ESCALA 1:50.000**

Maria Helena Rodrigues Gomes

Dissertação apresentada à
Escola de Engenharia de São
Carlos da Universidade de São
Paulo, como parte dos requisitos
para obtenção do título de
Mestre em Hidráulica e
Saneamento.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Fazal Hussain Chaudhry

São Carlos

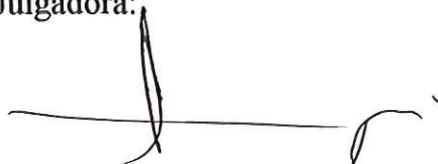
1997



FOLHA DE APROVAÇÃO

Candidata: Engenheira **MARIA HELENA RODRIGUES GOMES**

Dissertação defendida e aprovada em 14-11-1997
pela Comissão Julgadora:



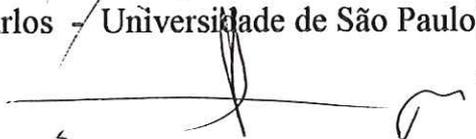
Prof. Titular **FAZAL HUSSAIN CHAUDHRY (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Profa. Doutora **LUISA FERNANDA RIBEIRO REIS**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Associado **LAZARO VALENTIN ZUQUETTE**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



Prof. Titular **FAZAL HUSSAIN CHAUDHRY**
Coordenador da Área de Hidráulica e Saneamento



JOSÉ CARLOS A CINTRA
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*Foi preciso que, humilde
ele andasse na terra,
Ele que era do Céu,
Senhor e Majestade.
Dizendo quanto amor
o amor de Deus encerra.*

Emílio de Menezes

*A meus pais, José e Helena,
minha irmã Mônica e
minha avó Henriqueta por
todo amor e apoio..*

AGRADECIMENTOS

À Escola de Engenharia de São Carlos e ao Curso de Pós-Graduação em Hidráulica e Saneamento;

Ao Professor Fazal Hussain Chaudhry, pela dedicação, amizade, e orientação;

Ao Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) pela bolsa concedida;

Aos meus amigos Márcia Peiter e Attus Moreira, pela amizade e auxílio na finalização deste trabalho;

A todos os colegas, funcionários e professores do Departamento de Hidráulica e Saneamento que contribuíram para a realização deste trabalho, meus sinceros agradecimentos.

3.2.4 - Dimensões Fractais e as Razões de Horton.....	15
3.2.5 - Dimensões Fractais Diversas	23
3.2.6- Influência da Área Suporte no Cálculo da Dimensão Fractal.....	28
3.2.7 - Dimensão Fractal e Resposta Hidrológica de uma Bacia Hidrográfica.....	30
3.3 - Auto-Similaridade e Auto Afinidade de Bacias Hidrográficas.....	35
4 - METODOLOGIA	38
4.1 - Escolha das Bacias de Drenagem.....	38
4.1.1 - Extração das Redes de Drenagem.....	39
4.2 - Análise Geomorfológica	39
4.3 - Análise Fractal.....	40
4.3.1 - Método de Richardson	40
4.3.2 - Método "Box-Counting"	41
4.3.3 - Método da Distribuição de Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais	41
4.4 - Estimativa da Análise Fractal através das Razões de Horton	42
4.5 - Análise da Auto-Similaridade e da Auto-Afinidade	42
5 - BACIAS HIDROGRÁFICAS	43
5.1 - Geomorfologia	43
5.2 - Descrição das Bacias Hidrográficas	46
5.2.1- Bacia do Ribeirão Do Palmital.....	46
5.2.2- Bacia do Ribeirão Pirapitingui.....	46
5.2.3- Bacia do Ribeirão Feijão	47
6 - RESULTADOS E DISCUSSÃO	48
6.1 - Parâmetros Físicos	48
6.2 - Parâmetros Geomorfológicos	49
6.3. Cálculo da Dimensão Fractal pelos Métodos Gráficos.....	51
6.3.1 - Método de Richardson	52
6.3.2 - Método de Box-Counting	55

6.3.3 - Método da Distribuição da Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais	58
6.4 - Dimensão Fractal através das Razões de Horton.....	63
6.4.1 - Comparação dos Valores da Dimensão Fractal obtida pelas diferentes análises.....	67
6.5 - Análise da Auto-Similaridade e da Auto-Afinidade	69
7 - CONCLUSÕES	71
ANEXO A	73
ANEXO B	75
ANEXO C	77
ANEXO D	79
8 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	81
9 - OBRAS CONSULTADAS	83
APÊNDICE I	
APÊNDICE II	
APÊNDICE III	
GLOSSÁRIO	

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Bacia de 4a ordem segundo o método de ordenação de Strahler.....	6
FIGURA 2 - Dimensão Fractal obtida pelo Método de Richardson.....	13
FIGURA 3 - Dimensão Fractal obtida pelo Método de "Box-Counting"	14
FIGURA 4 - Dimensão Fractal obtida pelo Método da Distribuição da Probabilidade de Excedência	16
FIGURA 5 - Análise dos valores de R_B e R_L	19
FIGURA 6 - Modelo Simplificado da relação L_n e a escala η	25
FIGURA 7 - Estrutura Fractal das Redes de Canais.....	27
FIGURA 8 - Bacia de Peano	30
FIGURA 9 - Diagrama de Horton para a Razão de Bifurcação (R_B) das Bacias Hidrográficas	50
FIGURA 10 - Diagrama de Horton para a Razão de Comprimento (R_L) das Bacias Hidrográficas	50
FIGURA 11 - Diagrama de Horton para a Razão de Área de Drenagem (R_A) das Bacias Hidrográficas	51
FIGURA 12 - Dimensão Fractal D obtida pelo Método de Richardson para a Bacia do Ribeirão do Palmital	53
FIGURA 13 - Dimensão Fractal D obtida pelo Método de Richardson para a Bacia do Ribeirão do Pirapitingui	53
FIGURA 14 - Dimensão Fractal D obtida pelo Método de Richardson para a Bacia do Ribeirão do Feijão	54
FIGURA 15 - Dimensão Fractal D obtida pelo Método de Box-Counting para a Bacia do Ribeirão do Palmital	56
FIGURA 16 - Dimensão Fractal D obtida pelo Método de Box-Counting para a Bacia do Ribeirão do Pirapitingui	56

FIGURA 17 - Dimensão Fractal D obtida pelo Método de Box-Counting para a Bacia do Ribeirão do Feijão	57
FIGURA 18 - Dimensão Fractal obtida pelo Método da Distribuição da Probabilidade da Excedência do Comprimento de Canais para a Bacia do Ribeirão do Palmital	59
FIGURA 19 - Dimensão Fractal obtida pelo Método da Distribuição da Probabilidade da Excedência do Comprimento de Canais para a Bacia do Ribeirão do Pirapitingui	60
FIGURA 20 - Dimensão Fractal obtida pelo Método da Distribuição da Probabilidade da Excedência do Comprimento de Canais para a Bacia do Ribeirão do Feijão	61
FIGURA 21 - Análise dos Valores de R_B e R_L	64

LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1 - Dimensões Fractais para as Redes de Canais de MORISAWA	28
TABELA 6.1 - Parâmetros Físicos da Bacia do Ribeirão do Palmital.....	48
TABELA 6.2- Parâmetros Físicos da Bacia do Ribeirão Pirapitingui.	49
TABELA 6.3- Parâmetros Físicos da Bacia do Ribeirão do Feijão.....	49
TABELA 6.4 - Parâmetros Geomorfológicos das Bacias Hidrográficas	51
TABELA 6.5. - Valores da Dimensão Fractal pelo Método de Richardson para as Bacias de Drenagem.	54
TABELA 6.6 - Valores da Dimensão Fractal pelo Método de Box-Counting para as Bacias de Drenagem.	55
TABELA 6.7 - Valores da Dimensão Fractal Pelo Método Distribuição da Probabili- dade de Excedência do Comprimento de Canais para as Bacias de Drenagem.....	62
TABELA 6.8 - Valores de Dimensão Fractal obtidos pelos Métodos Gráficos	62
TABELA 6.9 - Valores de Dimensão Fractal calculada a partir da eq.(3.21a) e da Figura 21	63
TABELA 6.10 - Valores da Dimensão Fractal para o Canal Principal e a Rede de Drenagem	65
TABELA 6.11 - Valores das Diversas Dimensões Fractais	66
TABELA 6.12 - Valores da Dimensão Fractal para a Rede de Drenagem	68
TABELA 6.13 - Valores da Igualdade $R_B = R_L^{D_S} = R_W^{D_S} = R_A^{D_S/2}$	69
TABELA 6.14 - Valores de Igualdade $R_B = R_L^{D_{long}} = R_W^{D_W} = R_A^{D_{long} \cdot D_W / (D_{long} + D_W)}$	70

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

HUI	- Hidrograma Unitário Instantâneo
HUG	- Hidrograma Unitário Geomorfológico
MED	- Modelo de Elevação Digital
RCTD	- Redes de Canais Topologicamente Distintas
TMH	- Trecho Morfologicamente Homogêneo

LISTA DE SÍMBOLOS

$a_1, a_2, c_1, c_2, C, K_1$ e θ	- Constantes empíricas.
A	- Área da bacia de drenagem.
A_S	- Área suporte.
\bar{A}_{x_i}	- Área de drenagem média dos canais de ordem x_i .
\bar{A}_{x_i-1}	- Área de drenagem média dos canais de ordem x_i-1 .
A_1	- Área média dos canais de ordem 1.
B	- Largura do canal.
b	- Expoente ajustado da relação entre o comprimento da rede de drenagem Z e a área de drenagem A .
B_g	- Largura da faixa contendo a sinuosidade do vale.
B_o	- Largura do fundo do canal.
d	- Diâmetro das esferas n -dimensionais.
\underline{d}	- Espaço d -dimensional.
D	- Dimensão fractal de toda rede de drenagem.
D_A	- Dimensão fractal da área de drenagem da bacia.
D_c	- Dimensão fractal de canais individuais.
D_{cp}	- Dimensão fractal do canal principal.
D_m	- Dimensão fractal do caminho mínimo.
D_{long}	- Expoente ajustado para direção longitudinal.
D_L	- Coeficiente de dispersão da distribuição da função Delta de Dirac.
D_G	- Dimensão de lacunaridade.
D_{SIM}	- Dimensão de similaridade.
D_{tr}	- Expoente ajustado para direção transversal.
D_r	- Dimensão fractal da estrutura ramificada.

D_s	- Dimensão espectral da rede de drenagem.
D_t	- Dimensão fractal topológica da rede de drenagem.
D_v	- Dimensão fractal do vale.
D_z	- Dimensão fractal do comprimento total da rede de drenagem.
D_w	- Expoente de difusão.
F	- Medida obtida que descreve uma forma geométrica irregular.
G^*	- Produto adimensional de pico e tempo de pico no HUI.
H	- Índice de Hurst.
K_o	- Constante dependente do diâmetro da bacia.
k	- Número de vezes em que se repete a menor escala espacial.
K^{-1}	- Coeficiente de similaridade.
l_*	- Comprimento médio dos canais de ordem 1.
l	- Comprimento dos canais.
$l(l)$	- Comprimento dos canais de ordem 1.
L	- Comprimento aproximado da rede de drenagem.
L_{cp}	- Comprimento do canal principal.
L_m/L_M	- Representação da sinuosidade de um rio.
L_η/η	- Número de segmentos de dado comprimento.
L_o/η	- Número de segmentos característicos da forma.
L_{j,x_i}	- Comprimento do j-ésimo canal de ordem x_i .
L_r	- Comprimento limite da linha axial do leito do rio para escalas menores que L_1 e L_2 .
L_{TMH}	- Comprimento do trecho morfologicamente homogêneo.
\bar{L}_{x_i}	- Comprimento médio dos canais de ordem x_i .
\bar{L}_{x_i-1}	- Comprimento médio dos canais de ordem x_i-1 .
L_{i,x_i}	- Comprimento do i-ésimo canal de ordem x_i .

L_1	- Escala fractal interna.
L_2	- Escala fractal externa.
L_η	- Comprimento dos canais medidos com a escala η .
m	- Número de pontos do conjunto (N, r) .
\bar{m}	- Ordenação de um canal qualquer em uma lista ordenada do canal.
n	- Número total de canais na rede.
N	- Número de réguas r .
N_ε	- Unidade de medida necessária para cobrir o conjunto de canais.
N_e	- Número de esferas n-dimensionais.
N_{eff}	- Número de ligações até a saída da bacia.
N_S	- Número de partes similares.
$N_{\varepsilon(\Omega)}$	- Número de réguas necessárias para cobrir o conjunto de canais.
$N(\Omega)$	- Número de cubos d-dimensionais.
$N(\Omega, \Omega)$	- Número de canais de determinado comprimento.
N_Ω^*	- Notação para o conjunto $N_1, N_2, \dots, N_{\Omega+1}, 1$.
$N_{\Omega+1}$	- Número de canais de ordem $\Omega+1$.
$N_{\bar{\alpha}(\Omega)}$	- Número de áreas de drenagem de canais de 1ª ordem para bacia de ordem Ω .
N_{x_i}	- Número de canais de ordem x_i .
N_{x_i-1}	- Número de canais de ordem x_i-1 .
$N_1, N_2, \dots, N_{\Omega+1}, 1$.	- Número de fontes de uma RCTD.
$p(\varepsilon)$	- Inclinação da reta.
$p(N_\Omega^*, N_1)$	- Probabilidade de se amostrar uma rede com N_Ω^* números de canais de uma população topologicamente aleatória com N_1 fontes.
p	- Probabilidade de ocorrência de r .
$p(\theta, \Omega)$	- Inclinação da reta do gráfico que associa $\varepsilon_1, \varepsilon_2, Z_1$ e Z_2 .

P	- Probabilidade de excedência do comprimento de canais.
r	- Tamanho da régua.
R	- Raio da rede de drenagem.
R_A	- Razão de Horton para área de drenagem.
R_B	- Razão de Horton para bifurcação.
R_L	- Razão de Horton para comprimento.
R_{tr}	- É a relação entre R_A e R_L .
R_L^θ	- Fator de ajuste de escala.
r^d	- Volume de cubos d-dimensionais.
S	- Inclinação local do vale.
$\frac{S}{\rho}$	- Lei de Melton.
t	- Tempo de percurso da partícula.
T_{xi}	- Notação para o conjunto $N_1, N_2, \dots, N_{\Omega+1}, 1$.
x_i	- Ordem do i-ésimo.
$z(\theta, \Omega)$	- Comprimento dos canais adicionais.
Z	- Comprimento dos canais de uma rede.
$Z_f(\Omega)$	- Comprimento fractal dos canais de uma rede.
$Z(\Omega, \Omega)$	- Comprimento euclideano total da bacia.
$W(N_1)$	- Número total das rede de canais com N_1 fontes.
$w(N_\Omega^*)$	- Conjunto do número total das redes de RCTD com N_1^* fontes.
$w(N_1^*)$	- Conjunto do número total das redes de canais com N_1^* .
α	- Expoente da relação entre L_{cp} e A .
α^*	- Parâmetro de formato do modelo de Nash no HUI.
$\bar{\alpha}(\Omega)$	- Áreas de drenagem de canais de ordem 1 para uma bacia de ordem Ω .
$\alpha_{HL}(\gamma)$	- Expoente de Holder-Lipschitz.
β	- Razão entre R_L e R_B .
δ	- Densidade de drenagem.

ε	- Unidade de medida de características geométricas da bacia.
ε_1	- Unidade de medida.
ε_2	- Unidade de medida após o uso do fator de ajuste R_L^θ .
η	- Unidade de escala.
v	- Velocidade da partícula no canal.
Λ	- Medida geométrica.
Ω	- Ordem da bacia de drenagem ou rede de canais.

RESUMO

GOMES, M. H. R. (1997). *Análise Fractal de Redes de Drenagem de Bacias Hidrográficas*. São Carlos, 1997. 83p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Pesquisas têm sido realizadas visando a investigação das características fractais das redes de drenagem de bacias hidrográficas, com base na geomorfologia clássica propostos por HORTON (1945). A dimensão fractal foi introduzida na hidrologia por MANDELBROT (1977) e usada por vários autores, com intuito de analisar as características das redes de drenagem. O presente trabalho explora este conceito, utilizando três bacias hidrográficas do estado de São Paulo. Analisaram-se os mapas topográficos das bacias a fim de obter-se os parâmetros geomorfológicos necessários. Realizou-se a análise da dimensão fractal por métodos gráficos, como também a relação entre a dimensão fractal e as razões de Horton. Os resultados obtidos foram comparados com aqueles encontrados na literatura e verificou-se que as bacias hidrográficas, usadas nesta pesquisa, podem ser vistas como objetos fractais com uma dimensão fractal característica.

PALAVRAS-CHAVE: Dimensão fractal, geomorfologia, bacias hidrográficas

ABSTRACT

GOMES, M.H.R. (1997). *Fractal Analysis of Hydrographic Basin Drainage Network*. São Carlos, 1997. 83p. Dissertation (Master's) - São Carlos School of Engineering, University of São Paulo.

There have been a number of investigations on the fractal characteristics of hydrographic basin drainage networks on the basis in the classical geomorphological proposed by HORTON (1945). The fractal dimension was introduced in hydrology by MANDELBROT (1977) and used by various authors in order to analyse drainage network characteristics. This study explores this concept in three hydrographic basins in the State of São Paulo. The topographic maps were employed to obtain the geomorphological parameters and fractal dimensions. Fractal analysis was performed by graphical methods and the relationship between fractal dimensions and Horton geomorphological laws was studied. The results obtained in this study are compared to those found in literature. It is verified that the basin employed in this research may be considered as fractal objects with a characteristic fractal dimension.

KEY-WORDS: Fractal Dimension, Geomorphology, Hydrographic Basin.

1 - INTRODUÇÃO

A análise quantitativa das redes de drenagem de bacias hidrográficas envolvendo as características destas redes têm sido objeto de constantes estudos. O precursor deste trabalho foi HORTON (1945) que sugeriu a classificação dos canais de redes de drenagem segundo um sistema ordenado. A classificação das redes de drenagem foi, posteriormente, simplificada para facilitar a sua utilização (STRAHLER, 1952), viabilizando, desta forma, as pesquisas dos sistemas naturais de drenagem.

Recentemente, um novo conceito denominado teoria dos fractais foi introduzido por MANDELBROT (1977). Este autor investigou a aplicabilidade da geometria fractal em sistemas naturais e, em especial, à hidrologia. Assim, uma nova característica geométrica foi introduzida no estudo das redes de drenagem de bacias hidrográficas: a dimensão fractal.

Após a introdução do conceito de dimensão fractal na hidrologia, várias pesquisas foram realizadas, com base nos modelos de elevação digital (MED's). Estas pesquisas envolveram redes de drenagem que possuíam características topográficas, geomorfológicas e litológicas distintas. Na fase inicial da investigação da natureza fractal das redes de drenagem, três métodos gráficos foram usados por TARBOTON et al. (1988). A aplicação destes métodos possibilitou, segundo os autores, a confirmação da natureza fractal das redes de drenagem, bem como forneceu uma primeira estimativa da dimensão fractal.

Baseando-se na verificação da estrutura fractal das redes de drenagem de bacias hidrográficas é possível: (i) relacionar a dimensão fractal às características já existentes, como por exemplo, as Razões de Horton; (ii) caracterizar melhor as redes de drenagem através das diversas dimensões fractais; e, (iii) associar a dimensão fractal ao hidrograma unitário geomorfológico (HUG) e à resposta hidrológica.

Alguns indicadores do comportamento fractal das bacias hidrográficas foram avaliados por NIKORA (1994) que considerou a possibilidade de auto-similaridade e auto-afinidade das redes de drenagem. Segundo esta análise, o autor mostrou que as bacias hidrográficas são objetos fractais. Foi também observado que na natureza a auto-afinidade é mais provável do que a auto-similaridade.

Os estudos envolvendo a teoria dos fractais foram utilizados até agora apenas em bacias hidrográficas de outros países como Estados Unidos, Canadá e Rússia. Torna-se, portanto, necessária a avaliação destes métodos em bacias brasileiras. Esta pesquisa tem por finalidade introduzir a análise fractal às redes de drenagem brasileiras. Sendo assim, procurou-se analisar três bacias do estado de São Paulo através de algumas de suas características.

2 - OBJETIVOS

Esta pesquisa teve por objetivo a análise de três redes de drenagem do estado de São Paulo - Bacia do Ribeirão do Palmital, Bacia do Ribeirão do Pirapitingui e Bacia do Ribeirão do Feijão - para revelar a natureza fractal. Especificamente, tem como objetivos:

- i. analisar a estrutura geomorfológica das redes para obter os parâmetros como razões de Horton, densidade de drenagem, área total da bacia;
- ii. estimar dimensões fractais diversas das redes de drenagem analisadas e interpretá-las através da comparação com os resultados reportados na bibliografia;
- iii. investigar métodos alternativos para estimativa das dimensões fractais;
- iv. investigar a propriedade de auto-afinidade e auto-similaridade de bacias brasileiras;
- v. avaliar o efeito do sistema de ordenação de canais sobre as propriedades fractais das redes.

3 - REVISÃO DA LITERATURA

O interesse pelos aspectos quantitativos das redes de drenagem de bacias hidrográficas têm sido alvo de constantes estudos envolvendo várias características destas redes. Pesquisas mais recentes introduziram o aspecto de fractalidade às redes, buscando relacionar características já conhecidas (como por exemplo: as Leis de Horton) a uma nova característica: *a dimensão fractal*.

3.1 - Geomorfologia Clássica

3.1.1 - Conceitos e Definições

Geomorfólogos e hidrólogos, mesmo possuindo objetivos diferentes, apontaram a importância do estudo quantitativo de redes de drenagem e consideraram necessário escolher uma unidade básica para o estudo do conjunto de todos os canais que contribuem para descarga em um dado ponto. Esse conjunto de canais interligados foi denominado na literatura por rede de drenagem (SMART, 1972).

A terminologia usada para o estudo das redes de drenagem de bacias hidrográficas é essencialmente aquela proposta por SHREVE* apud SMART (1972):

- **Fontes:** são os pontos mais distantes a montante da rede de drenagem;
- **Saída:** é o ponto mais distante a jusante da rede de drenagem;
- **Junção:** é o ponto onde dois canais se encontram e formam um novo canal;
- **Ligação Exterior:** é um segmento de canal da rede de drenagem entre a fonte e a

* SHREVE, R. L. (1966). Statistical law of stream numbers, *J. Geol.* apud SMART, J. S., Channel Networks, *Advances in Hydroscience*. v.8, 1972, p.306.

primeira junção à jusante;

- **Ligação Interior:** é um segmento de canal da rede de drenagem entre duas junções sucessivas ou entre a saída e a primeira à junção montante.

- **Magnitude de uma Ligação:** é o número de fontes a montante;

- **Diâmetro:** é o comprimento do canal principal.

3.1.2 - Classificação das Redes de Drenagem

Um dos precursores do estudo quantitativo das redes de canais naturais foi HORTON* apud SMART (1972) que classificou os canais por ordem. Posteriormente o método de Horton foi modificado por STRAHLER** apud SMART (1972), que o tornou mais simples oferecendo maior liberdade nas decisões subjetivas. O método de Strahler consiste em definir:

- i. canais com origem nas fontes, são classificados como de 1ª ordem;
- ii. quando 2 canais de ordem x_i se unem, formam um canal de ordem $(x_i + 1)$;
- iii. quando 2 canais de ordens diferentes se unem, o segmento de canal imediatamente a jusante tem a ordem do canal de maior ordem.

A ordem da rede de canais ou bacia de drenagem corresponde a ordem mais alta do canal que a constitui.

A Figura 1 mostra uma rede de drenagem segundo classificação de Strahler.

3.1.3 - Leis de Horton para as Redes de Drenagem

Além da classificação das redes de drenagem, HORTON apud SMART (1972), deduziu a Lei do Número de Canais e a Lei do Comprimento de Canais. O comprimento médio de um canal de ordem x_i é definido como:

* HORTON, R. E. (1945). Erosional development of streams and their drainage basins: hydrophysical approach to quantitative morphology. *Bull. Geol. Soc. Am.* apud SMART, J. S., Channel Networks, *Advances in Hydroscience*. v.8, 1972, p.307.

** STRAHLER, A. N. (1952). Hypsometric (area-altitude) analysis of erosional topography. *Bull. Geol. Soc. Am.* apud SMART, J. S., Channel Networks, *Advances in Hydroscience*. v.8, 1972, p.307.

$$\bar{L}_{x_i} = \frac{\left(\sum_j L_{j,x_i} \right)}{N_{x_i}} \quad (3.1)$$

onde: L_{j,x_i} é o comprimento do j -ésimo canal de ordem x_i ; N_{x_i} é o número de canais de ordem x_i .

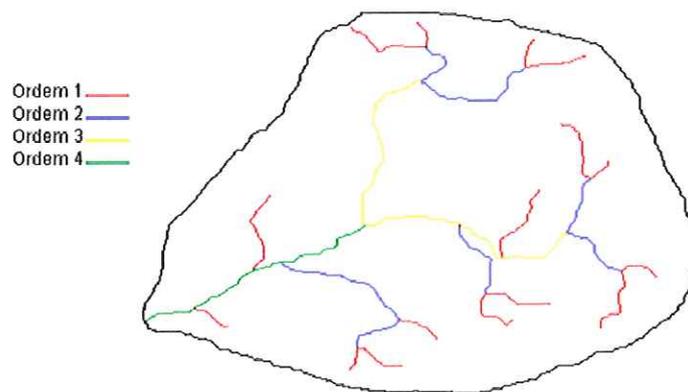


FIGURA 1- Bacia de 4ª ordem segundo o método de ordenação de Strahler.

As expressões quantitativas das Leis de Horton são:

Lei do Número de Canais:

$$\frac{N_{x_i-1}}{N_{x_i}} \cong R_B \quad (3.2)$$

Lei do Comprimento de Canais:

$$\frac{\bar{L}_{x_i}}{\bar{L}_{x_i-1}} \cong R_L \quad (3.3)$$

com $x_i = 2, 3, \dots, \Omega$, onde Ω é a ordem do canal de ordem mais elevada que fornece a ordem da bacia de drenagem.

R_B e R_L são respectivamente, denominados de Razão de Bifurcação de Horton e Razão de Comprimento de Horton, e são parâmetros característicos para uma rede de drenagem particular. A eq.(3.2) representa a estrutura geológica da rede e a

eq.(3.3), a estrutura geométrica. Apesar de R_B e R_L , não serem as mesmas para diferentes ordens, para se obter um valor constante, plota-se em um diagrama, denominado Diagrama de Horton, N_{x_i} e \bar{L}_{x_i} em função de x_i de onde os valores de R_B e R_L podem ser obtidos. Segundo Strahler, R_B assume valores que usualmente entre 3 e 5, e os de R_L , entre 1,5 e 3,5.

SCHUMM* apud SMART (1972) continuando o trabalho de Horton propôs a Lei da Área de Drenagem:

$$\frac{\bar{A}_{x_i}}{\bar{A}_{x_i-1}} \cong R_A \quad (3.4)$$

com $x_i = 2, 3, \dots, \Omega$. Nesta definição \bar{A}_{x_i} denota a área média total da bacia e R_A é denominada Razão de Área de Drenagem. R_A também pode ser plotada no Diagrama de Horton de maneira similar a R_L e R_B . Os valores de R_A de Strahler normalmente estão na faixa de 3 a 6.

3.1.4 - Conceito de Redes de Canais Topologicamente Aleatórias

SHREVE** apud SMART (1972) em um trabalho clássico, propôs uma nova conceituação para o estudo quantitativo das redes de drenagem na qual:

- i. fez a introdução na geomorfologia do importante conceito de população topologicamente aleatória para redes de canais aleatórias;
- ii. forneceu a fórmula da probabilidade relativa de diferentes conjuntos de canais para cada população;
- iii. apresentou qual a rede mais provável que estaria em conformidade com as leis de Horton;

* SCHUMM, S. A. (1956). Evolution of drainage systems and slopes in badlands at Perth Ambo, New Jersey. *Geol. Soc. Amer. Bull.* apud SMART, J. S., Channel Networks, *Advances in Hydroscience*. v.8, 1972, p.310.

** SHREVE, R. L. (1966). Statistical law of stream numbers, *J. Geol.* apud SMART, J. S., Channel Networks, *Advances in Hydroscience*. v.8, 1972, p.314.

iv. levantou e testou a hipótese na qual uma população de redes de canais naturais seria topologicamente aleatória, quando ausentes os controles geológicos; e
v. mostrou que o conjunto de número de canais de redes naturais podem ser extraídos de uma população topologicamente aleatória.

Dentro desta conceituação, definiu-se população topologicamente aleatória como aquela em que todas as redes de canais topologicamente distintas (RCTD's), com um dado número de fontes, são igualmente prováveis

O resultado obtido para o número de RCTD's com N_1 fontes é:

$$W(N_1) = \frac{1}{2N_1 - 1} \binom{2N_1 - 1}{N_1} \quad (3.5)$$

Para um dado N_1 , as RCTD's podem possuir o mesmo conjunto de números de canais. O número de RCTD's com $N_1, N_2, \dots, N_{\Omega+1}, 1$, canais é:

$$w(N_{\Omega}^*) = \frac{\Omega - 1}{\prod_{x_i=1}^{\Omega} T_{x_i}} \binom{N_{x_i}}{T_{x_i}} \quad (3.6)$$

onde: $T_{x_i} = N_{x_i} - 2N_{x_i + 1}$; N_{Ω}^* é a notação para o conjunto $N_1, N_2, \dots, N_{\Omega+1}, 1$;
 $W(N_1)$ é o número total das redes de canais com N_1 fontes e $w(N_1^*)$ é o conjunto de número total das redes de canais com N_1^* fontes.

A probabilidade de se amostrar uma rede com N_{Ω}^* número de canais de uma população topologicamente aleatória com N_1 fontes é:

$$P(N_{\Omega}^*; N_1) = \frac{w(N_{\Omega}^*)}{W(N_1)} \quad (3.7)$$

SMART (1972) cita uma série de estudos indicando uma relação, entre área da bacia e comprimento total do canal em regiões de litologia uniforme, aproximadamente linear.

De acordo com STRAHLER* apud SMART (1972), existe similaridade entre as bacias de drenagem se todas as propriedades correspondentes a bacia que possuem dimensão de comprimento tem a mesma razão, ou seja, duas redes de drenagem tem similitude geométrica estatística se todas as variáveis adimensionais (bifurcação, comprimento, etc.) correspondentes tem a mesma função de distribuição.

Segundo SMART (1972), se as redes de canais se desenvolvem em regiões cuja litologia é uniforme estas podem ser consideradas como tendo topologia e distribuição do comprimento das ligações aleatórias. Nesse caso, os modelos aleatórios colaboram com os estudos envolvendo a geometria da rede e a topologia.

3. 2 - Dimensão Fractal

A palavra fractal foi criada por MANDELBROT (1977) com a finalidade de denominar uma grande classe de objetos. Uma grande revolução de idéias separa a matemática do século XIX da matemática moderna do século XX. A matemática clássica baseia-se nas estruturas geométricas de Euclides e envolve as dinâmicas de Newton. A matemática moderna tem início com a teoria do conjunto de Cantor e a curva de Peano. Historicamente, as revoluções de idéias têm gerado descobertas de estruturas matemáticas que não se ajustam aos padrões euclidianos e newtonianos. Estas novas estruturas geométricas são analisadas pela geometria fractal. De onde vem o termo fractal? Tal termo foi criado a partir do adjetivo latino fractus. O verbo latino correspondente - frangere - significa quebrar: criar fragmentos irregulares. Segundo o autor, os objetos não fractais são irreais, abstratos e distantes de nossa realidade. Estes objetos da geometria clássica possuem dimensão igual a dimensão fractal. Já os objetos fractais seriam, então, objetos que possuem dimensão fractal maior que sua dimensão clássica. Sendo assim uma característica nova foi dada aos objetos fractais: a dimensão fractal.

* STRAHLER, A. N. (1958). Dimensional analysis applied to fluvially eroded landforms. *Geol. Soc. Amer., Bull.* apud SMART, J. S. (1972), Channel Networks, *Advances in Hydroscience*. v.8, p.315.

3.2.1 - Dimensão Fractal e as Redes de Drenagem

MANDELBROT (1977) foi o primeiro a utilizar o conceito de fractais na hidrologia, como parte de um esforço da ampliação do uso da teoria dos fractais, a fim de mostrar como esta poderá ser usada em vários sistemas naturais. Em um dos seus exemplos, o autor mostrou a dependência empírica do comprimento do canal principal e área da bacia hidrográfica, o que poderá resultar na natureza fractal dos rios. Subsequentemente, a aproximação fractal tem sido usada para investigação da estrutura geométrica de sistemas de rios, o que introduz uma nova característica às redes de drenagem: *a dimensão fractal*.

3.2.2 - Definição de Dimensão Fractal

A dimensão fractal é definida como sendo a medida das irregularidades (ou melhor, do grau de irregularidades) de um objeto em diferentes escalas. Esta dimensão está relacionada ao aumento da medida de um objeto enquanto a escala do instrumento de medida diminui. Um objeto fractal possui dimensão maior do que sua dimensão clássica. (PETERSON & BRANDERHORST, 1993).

Segundo MANDELBROT (1977), a dimensão fractal D (também chamada de dimensão Hausdorff) é uma característica básica de objetos fractais, podendo ser compreendida da seguinte forma: *assume-se que para cobrir um certo objeto no espaço n -dimensional, requer-se N_e esferas n -dimensionais de diâmetros d . N_e e d são relacionados através da equação:*

$$N_e(d) \sim d^{-D} \quad (3.8)$$

3.2.3 - Cálculo da Dimensão Fractal

Após a introdução do conceito de dimensão fractal na hidrologia por MANDELBROT* apud TARBOTON et al. (1988), uma série de pesquisas envolvendo as redes de drenagem e a sua estrutura fractal tem sido realizados. Os autores, partindo dos modelos de elevação digital (MED's), compararam as dimensões fractais de algumas redes de drenagem, obtidas por métodos diferentes.

3.2.3.1 - Método de Richardson

Inicialmente, TARBOTON et al. (1988) utilizaram o método proposto por Richardson ** para extração do comprimento da rede de drenagem. Este método consiste na medida de linhas (por exemplo: linhas costeiras ou canais) através de um instrumento de medida (compasso ou régua). O comprimento aproximado é dado por $L=Nr$, onde N é o número de réguas e r é o tamanho das réguas. Para uma melhor exatidão é ideal que $r \rightarrow 0$, daí:

$$L = \lim_{r \rightarrow 0} Nr \quad (3.9)$$

ou ainda:

$$N \cong Lr^{-1} \quad (3.10)$$

Para o caso geral, o expoente de r da eq.(3.10) deve ser diferente de 1. Sendo o expoente um valor fracionário D , o qual descreve uma propriedade de uma forma geométrica irregular, é obtida uma medida F :

$$F = Nr^D = cte \quad (3.11)$$

* MANDELBROT, B. B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, New York, apud TARBOTON et al. (1988), *The Fractal Nature of River Networks*, *Water Resour. Res.*, v.24, n.8, p.1317-1322.

** RICHARDSON, L. F. (1961). The problem of contiguity: An appendix of statistics of deadly quarrels, *Gen. Syst. Yearb.*, v.6 apud TARBOTON et al. (1988), *The Fractal Nature of River Networks*, *Water Resour. Res.*, v.24, n.8, p.1317-1322.

com $D > 1$. D é denominado dimensão fractal (MANDELBROT apud TARBOTON et al., 1988), o que implica em:

$$N \approx r^{-D} \quad (3.12)$$

ou equivalente, podendo exprimir o comprimento L como:

$$L \approx r^{1-D} \quad (3.13)$$

A eq.(3.13) relaciona os comprimentos da rede de drenagem medidos e o tamanho das réguas que pode ser representada por um gráfico di-log. Assim dimensão fractal é obtida a partir da inclinação da reta ajustada. Os resultados pelo método de Richardson podem ser verificados na Figura 2, na qual TARBOTON et al. (1988) analisaram diversas redes dos Estados Unidos e observaram que existe um mesmo padrão para todas as redes, ou seja, uma suave linha com inclinação em torno de 0,05 para canais de pequenos comprimentos, seguido de uma súbita inclinação para comprimentos de réguas maiores. A primeira dimensão 1,05 deve-se à sinuosidade individual dos canais, e a segunda, com D próximo de 2, às características de ramificação das redes de canais.

3.2.3.2 - Método de “Box-Counting”

O segundo método usado foi proposto por LOVEJOY et al.* apud TARBOTON et al. (1988), denominado método de ‘box-counting’. Este método é desenvolvido com base em um conjunto de pontos embutidos no espaço euclidiano de dimensão d . Utilizou-se uma malha com cubos d -dimensionais de volume r^d , onde r é o lado do cubo.

Seja $N(r)$ o número de cubos necessários para envelopar o objeto em estudo. Uma função potência da seguinte forma é indicada para descrever uma linha reta através do conjunto de pontos (N, r) num papel di-log para se obter a dimensão fractal do objeto, ou seja:

* LOVEJOY, S., SCHERTZER, D. & TSONIS, A. A. (1987). Functional box-counting and multiple elliptical dimensions in rain, *Science*, n°235, apud TARBOTON et al. (1988), The Fractal Nature of River Networks, *Water Resour. Res.*, v.24, n.8, p.1317-1322.

$$N(r) \approx r^{-D} \quad (3.14)$$

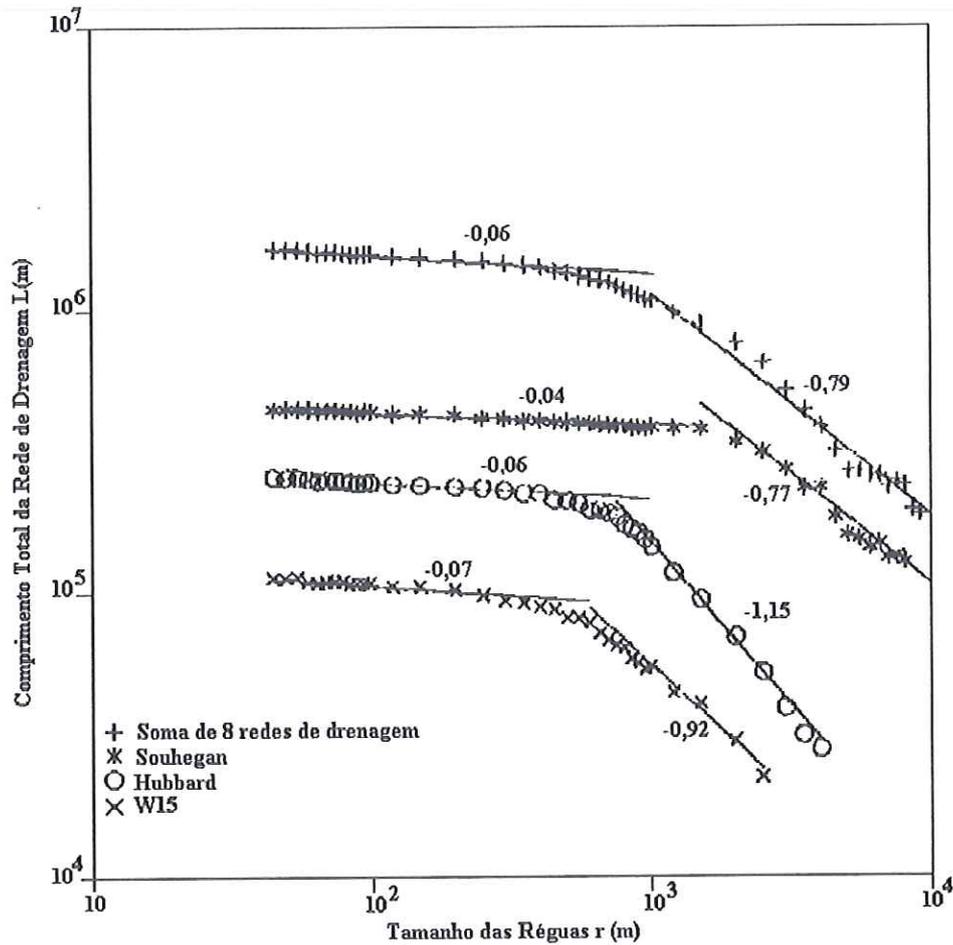


FIGURA 2 - Dimensão Fractal obtida pelo Método de Richardson (TARBOTON et al., 1988)

Este tipo de análise está baseada na definição de dimensão fractal dada por HENTSCHEL & PROCACCIA* apud TARBOTON et al. (1988) como:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log N(r)}{\log r} \quad (3.15)$$

onde m é o número de pontos do conjunto.

* HENTSCHEL, H. G. E., & PROCACCIA I. (1983), The Infinite Number of Dimensions of Fractals and Strange Attractors, *Physica*, 8d apud TARBOTON et al. (1988), The Fractal Nature of River Networks, *Water Resources Research*, v.24, nº8, p.1317-1322.

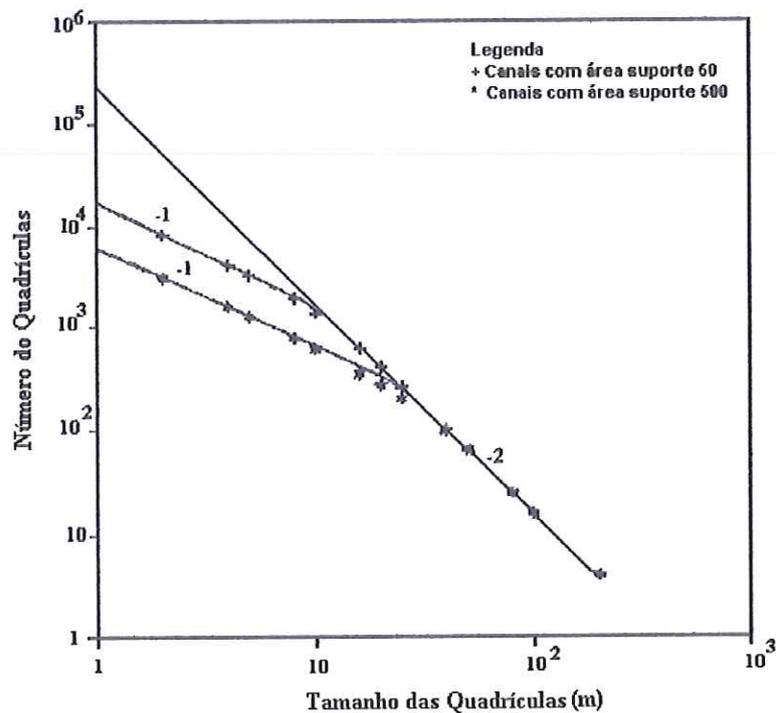


FIGURA 3 - Dimensão fractal obtida pelo Método de “Box-Counting” (TARBOTON et al.,1988).

Os autores puderam observar que para pequenas quadrículas, a dimensão está próxima da linha reta e para quadrículas maiores, a dimensão tem valor igual a 2, o que significa que todas as quadrículas são interceptadas por canais

3.2.3.3 - Método da Distribuição da Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais

Neste método, TARBOTON et al. (1988) observaram que a probabilidade de ocorrência de r é proporcional a r^{-D} , denotando uma distribuição hiperbólica escrita como:

$$p = \text{Pr ob}[\text{comprimento} > l] \approx l^{-D} \quad (3.16)$$

onde D é a dimensão fractal e l é o comprimento dos canais. As distribuições hiperbólicas satisfazem a propriedade de auto-similaridade.

A probabilidade de excedência em várias bacias é dada por:

$$P = \frac{\bar{m}}{n+1} \quad (3.17)$$

onde \bar{m} é a ordem de um canal qualquer em uma lista ordenada do canal mais longo para o mais curto e n é o número total de canais da rede de drenagem. A partir da análise do gráfico de P em função de l , representado pela Figura 4, obtém-se a dimensão fractal D .

De acordo com esse método os autores observaram que a inclinação da reta é próxima de 2, o que segundo os autores sugere a dimensão $D \cong 2$. Isto torna válida a hipótese das redes de canais possuírem um padrão de ramificação que cobre todo o espaço.

TARBOTON et al. (1988) verificaram a natureza fractal das redes de canais e indicaram que o valor da dimensão fractal próxima ao valor 2 é consistente com a geomorfologia fluvial clássica e o modelo de população topologicamente aleatória, o que pode ser significativamente importante para a hidrologia quantitativa.

3.2.4 - Dimensões Fractais e as Razões de Horton

Após a introdução da dimensão como uma nova característica para as redes de drenagem, alguns pesquisadores tentaram relacionar esta nova característica com aquelas já existentes.

LA BARBERA & ROSSO (1989) utilizaram o conceito de fractais para analisar a dimensão das redes de canais, através de padrões similares dentro de uma classe de escalas. Algumas restrições foram avaliadas tais como, geológicas, climáticas e hidrológicas, a fim de se compreender a teoria quantitativa das redes de canais com o intuito de estabelecer uma relação entre a dimensão fractal de uma rede e as razões de Horton. Os autores desenvolveram expressões para comprimento de canais de diversas ordens e sua dependência sobre uma escala linear característica conforme se vê a seguir:

$$Z(\Omega) = l_* R_B^{\Omega} - 1 \frac{(\beta^{\Omega} - 1)}{\beta - 1} \quad (3.18)$$

onde: Ω é a ordem da rede de canais; $\beta = R_L / R_B$ e l^* , o comprimento médio dos canais de 1ª ordem, foi interpretado pelos autores como uma unidade de medida ε_1 , onde $\varepsilon_1 = l^*$.

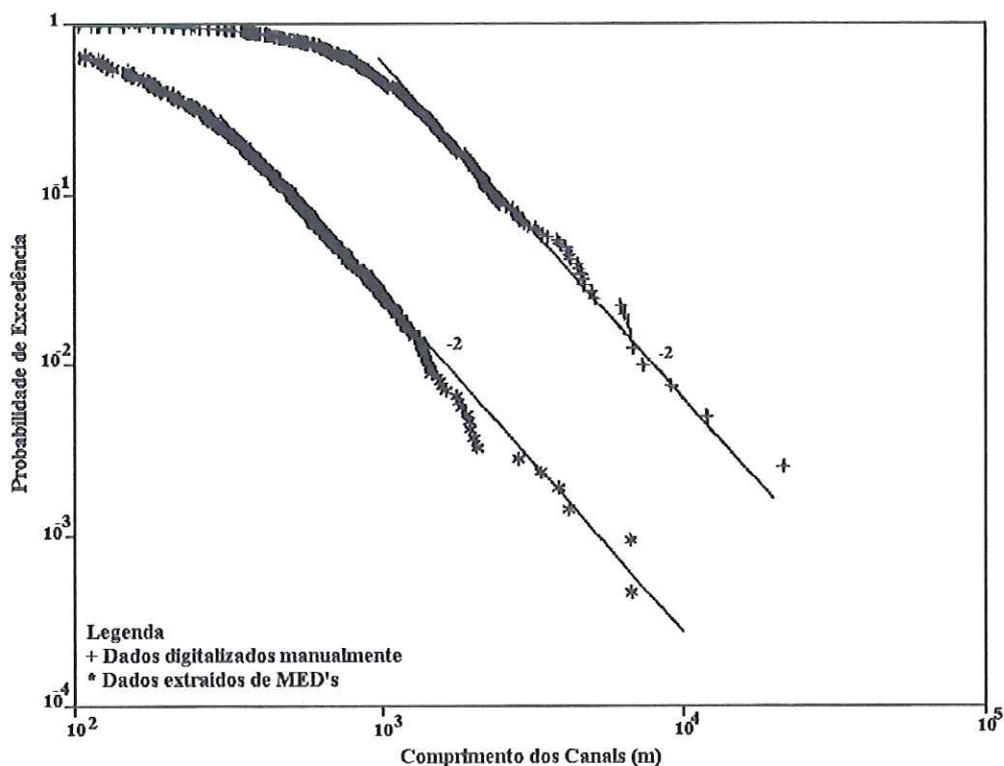


FIGURA 4 - Dimensão Fractal obtida pelo Método da Distribuição da Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais (TARBOTON et al., 1988)

Os autores demonstraram que além das variações causadas pela unidade de medida, as redes de canais variam de acordo com a escala de análise do mapa e que, quando comparadas densidades de drenagem retiradas de fotos aéreas, mapas e de MED's estas foram influenciadas pela malha utilizada. Além disto as variações podem aumentar devido à dinâmica natural das redes de canais na geração do escoamento superficial. Devido a isto, houve a necessidade de se ajustar a unidade de medida ε_1 de um fator R_L^θ ($\theta \geq 1$), afim de aumentar a precisão da análise das redes, gerando uma unidade de medida $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 R_L^\theta$. LA BARBERA & ROSSO (1989) observaram que se, após tal mudança do padrão de escala, as leis de comprimento de canais e número de canais mantêm-se constantes, o comprimento dos canais adicionais chamados de $z(\theta, \Omega)$ aumenta a ordem da bacia θ vezes.

Os autores compararam os comprimento de unidades de medidas diferentes, e introduziram o conceito de uma função de medida, que é proveniente da relação entre o comprimento Z e a unidade de medida ε em termos de valores logarítmicos transformados. A inclinação da reta no gráfico que associa ε_1 e ε_2 , com $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, e o comprimento Z estimado em termos de Z_1 e Z_2 foi denotada por:

$$p(\theta, \Omega) = p(\varepsilon) = \frac{\log Z_2 - \log Z_1}{\log \varepsilon_2 - \log \varepsilon_1} = - \frac{\log \left[\frac{\beta^{\theta + \Omega} - 1}{\beta^\theta (\beta^\Omega - 1)} \right]}{\theta \log R_L} \quad (3.19)$$

onde β depende da razão de comprimento de canais e da razão de bifurcação.

A dimensão fractal é dada por:

$$D = 1 - P \quad (3.20)$$

com $P = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p(\varepsilon)$

A dimensão fractal D foi caracterizada pela propriedade de escalas das redes de canais associadas à mudança no comprimento dos canais após mudança de escala. Segundo LA BARBERA & ROSSO (1989), a dimensão fractal D tem valor unitário para dimensão euclidiana da linha no plano, e valor igual a 2 para áreas de padrão espacial. Logo para se obter a dimensão fractal, os autores consideraram que as leis de número de canais e comprimento de canais mantém-se invariáveis para diversas escalas. Assim, tomaram $\theta \rightarrow \infty$ que corresponde a $\varepsilon \rightarrow 0$ chegaram à seguinte função:

$$D = \frac{\log R_B}{\log R_L} \quad R_B > R_L \quad (3.21a)$$

$$D = 1 \quad R_B \leq R_L \quad (3.21b)$$

A equação (3.21a) também pode ser deduzida por argumentos intuitivos sob a hipótese de que sistemas de drenagem ordenados descritos pelas leis de Horton apresentam a propriedade de auto-similaridade (LA BARBERA & ROSSO, 1987).

Na Figura 5, os autores analisaram um grande número de observações empíricas dos valores de R_B e R_L . Os dados que foram utilizados são de diferentes origens e de diferentes localizações geográficas. Foi observado que redes de canais naturais mostram dimensões fractais variadas, com valores geralmente entre 1,5 e 2.

A estimativa do valor 2 para a dimensão fractal pode ser aplicada à topologia aleatória, como uma primeira tentativa na compreensão do fundamento físico da fractalidade. Porém os efeitos das restrições geológicas, topográficas e hidrológicas podem reduzir o valor da dimensão fractal, já que as redes de canais possuem uma capacidade reduzida para desenvolver-se como um processo de ramificação simples. Este argumento é sustentado pela simulação de escoamentos para formação de redes de canais por ROTH et al.* apud LA BARBERA & ROSSO (1989), com base no modelo hidrodinâmico bi-dimensional para escoamento superficial e escoamento de sedimentos sobre um talude simples. O desenvolvimento erosional, no processo de canalização, devido aos mecanismos estocásticos de agrupamento e sedimentação, ocorre para progressivamente incrementar a fractalidade das redes de canais auto-formadas. A estrutura das redes tende para dimensão fractal com valor 2 quando estas alcançam maturidade. Estes experimentos numéricos controlados são executados para um campo homogêneo sem nenhuma restrição sedimentar ou topográfica, exceto para condições de contorno fixas na saída da bacia. Por outro lado, os autores observaram que as redes de canais naturais raramente desenvolvem-se sem restrições externas e que o estágio do desenvolvimento de redes de canais tem raramente atingido a maturidade. Portanto, uma boa estimativa do valor da dimensão fractal média deve ser menor que 2 para redes de canais naturais.

LA BARBERA & ROSSO (1989) verificaram a relação entre o comprimento Z e área da bacia A e posteriormente investigaram a relação entre o expoente b e a densidade de drenagem. A relação entre o comprimento Z e a área A foi expresso da seguinte forma:

$$Z \sim A^b \quad (3.22)$$

onde b é um expoente ajustado e o seu valor obtido de experimentos empíricos tem em geral valor médio igual a 0,83, mas pode variar de 0,5 a 1 dependendo de variações locais. MANDELBROT apud LA BARBERA & ROSSO (1989),

* ROTH, G., F. SICCARDI & R. ROSSO (1989). Hydrodynamic description of the structure of the erosional development of drainage patterns, *Water Resour. Res.*, v.25 n°2, 1989.apud LA BARBERA & ROSSO (1989), On the fractal dimension of stream networks, *Water Resour. Res.*, v.25, n°4, p.735-741.

relacionaram o expoente b à dimensão fractal e a densidade de drenagem, sugerindo que o valor de b igual a $D/2$ corresponderia aos valores da dimensão D variando entre 1 e 2, o expoente b teria seus valores entre 0,5 e 1. Sendo assim, a densidade de drenagem δ ($\delta = A^{(D/2)-1}$) decresce com a área da bacia segundo potência de $b-1$. Os autores observaram que D igual a 2 implica que a densidade de drenagem é independente da área da bacia, conclusão esta que não achou apoio nas evidências empíricas.

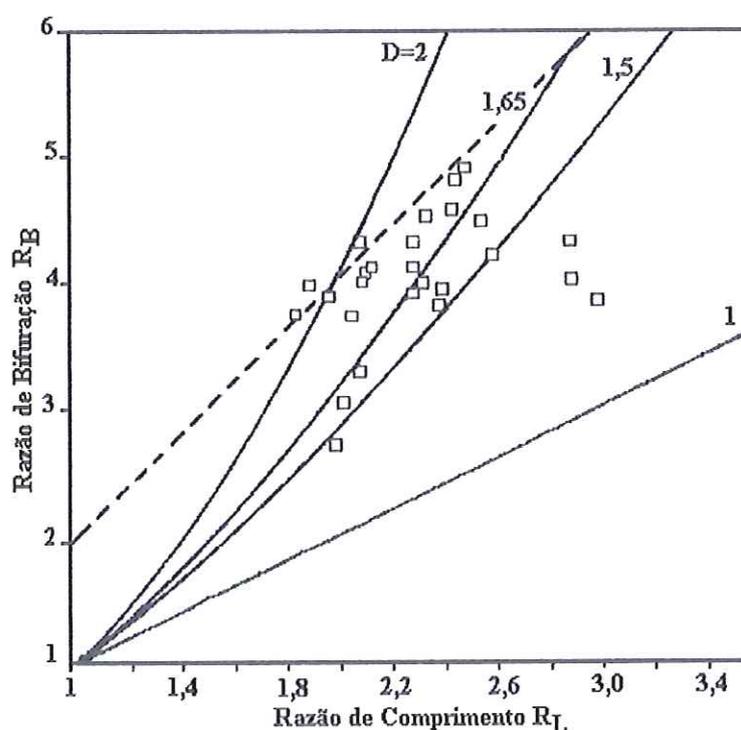


FIGURA 5 - Análise dos valores de R_B e R_L (LA BARBERA & ROSSO, 1989)

A identificação das redes de canais naturais, segundo LA BARBERA & ROSSO (1989), foi executada por meio de técnicas de filtragem digital. Outro aspecto da fractalidade diz respeito a medida de comprimento de linhas irregulares, as quais produzem o comprimento de canais variando com a escala do mapa. As relações empíricas entre o comprimento observado do canal principal L_{cp} e área da bacia tem a forma:

$$L_{cp} \propto A^{\alpha} \quad (3.23)$$

onde α possui um valor maior que 0,5. Assumindo este valor para o expoente,

MANDELBROT* apud LA BARBERA & ROSSO (1989) especulou que os comprimentos de rios podem ser vistos como fractais.

LA BARBERA & ROSSO (1989) concluíram que medidas como comprimento de sistemas de drenagem e densidade de drenagem podem ser tratadas como fractais, e que a dimensão fractal é útil para compreender a propriedade de escalas destes parâmetros. Além disso, a fractalidade de uma rede pode colaborar com melhor compreensão da formação do escoamento superficial recentemente formulada por GUPTA et al. (1986) em termos das razões de Horton, já que estas demonstram uma relação entre si por meio da dimensão fractal D.

Os autores obtiveram a dimensão fractal para o canal principal e a rede de drenagem a partir da equação (3.23). A dimensão fractal para o canal principal D_{cp} é dada pela seguinte equação:

$$D_{cp} = \max\left(1, 2 \frac{\log R_L}{\log R_A}\right) \quad (3.24)$$

Segundo NIKORA* apud ROSSO et al. (1991), a auto similaridade ocorre na natureza e “a fortiori” em objetos hidrológicos. Portanto, a dedução mostrada acima pode ser observada como uma descrição matemática a qual foi aplicada para uma classe de escalas associada com as Leis de Horton para composição das redes de drenagem.

De acordo com ROSSO et al. (1991), a eq.(24) mostra a dimensão fractal do canal principal (D_{cp}), cuja variação na natureza reflete na dispersão dos valores observados de R_L e R_A . Para os autores, as propriedades de escala da rede de drenagem como um todo podem ser vistas como o produto da composição estrutural do sistema de drenagem e o efeito de pequenas irregularidades refletida em D

* MANDELBROT, B. B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, New York apud LA BARBERA, P & ROSSO, R. (1989). On the Fractal Dimension of Stream Networks, *Water Resour. Res.*, v.25, n°4, p.735-741.

* NIKORA, V. (1989). *Fractal Properties of some hydrology objects* (in Russian), report, 43 pp., Inst. of Geophys. and Geol. Acad. of Sci. of the Moldavian SSR, Kishinev apud ROSSO, R., BACCHI, B. & LA BARBERA, P (1991). Fractal Relation orf Mainstream Lenght to Catchment Area in River Networks, *Water Resour. Res.*, v.27, n°3, p. 381-387.

(TARBOTON et al.(1990)** , LA BARBERA & ROSSO(1990)***). Partindo desta idéia ROSSO et al. (1991) chegaram à seguinte formulação:

$$D = \min\left(2, 2 \frac{\log R_B}{\log R_A}\right) \quad (3.25)$$

ROSSO et al. (1991) concluíram que o comprimento dos canais pode ser visto como uma medida fractal. A dimensão fractal para o canal principal D_{cp} foi apresentada como uma função das Razões de Comprimento e Área de Drenagem, R_L e R_A , respectivamente (eq.(3.26)).

A dimensão fractal em termos das Razões de Horton foi deduzida também por LIU (1992). O autor relacionou algumas características da rede de drenagem, tais como: comprimento total dos canais Z ($Z = l_* R_B^{\Omega-1} (\beta^\Omega - 1) / (\beta - 1)$), comprimento do canal principal L_{cp} ($L_{cp} = l_* R_L^{\Omega-1}$), raio da rede de drenagem R ($R = K_0 A^{1/2}$) e a relação entre área total de drenagem A ($A = A_1 R_A^{\Omega-1}$). Essas relações foram associadas e a seguinte formulação obtida para a dimensão fractal total das redes de drenagem por meio de uma transformação logarítmica:

$$D = \frac{\log\left[\frac{l_* R_B^{\Omega-1} (\beta^\Omega - 1)}{\beta - 1}\right] - \log K_1}{\log\left[K_0 (A_1 R_A^{\Omega-1})^{1/2}\right]} \quad (3.26)$$

com:

D sendo uma função de Ω ;

K_1 é uma constante;

R_A é a Razão de Horton para Área de Drenagem;

** TARBOTON, D.G., BRAS, R. L. & RODRIGUEZ-ITURBE, I. (1990). Comment on "On the Fractal Dimension of Stream Networks" by P. La Barbera & R. Rosso, *Water Resour. Res.*, v.26, n°9, p. 2243-2244. apud ROSSO, R., BACCHI, B. & LA BARBERA, P (1991). Fractal Relation of Mainstream Length to Catchment Area in River Networks, *Water Resour. Res.*, v.27, n.3, p. 381-387.

*** LA BARBERA, P & ROSSO, R. (1990). Comment on "On the Fractal Dimension of Stream Networks" by D.G Tarboton, R. L Bras., & I. Rodriguez-Iturbe, *Water Resour. Res.*, v.26, n°9, p. 2245-2248. apud ROSSO, R., BACCHI, B. & LA BARBERA, P (1991). Fractal Relation of Mainstream Length to Catchment Area in River Networks, *Water Resour. Res.*, v.27, n.3, p.381-387.

K_0 é uma constante dependente do diâmetro da bacia de drenagem

A_1 é a área média de drenagem dos canais de 1ª ordem;

l_* é o comprimento médio dos canais de 1ª ordem;

$$\beta = \frac{R_L}{R_B} < 1:$$

O autor definiu a dimensão fractal para ordens infinitamente altas ($\Omega \rightarrow \infty$), obtendo:

$$D = 2 \frac{\log R_B}{\log R_A} \quad (3.27)$$

A qual vem a ser uma equação análoga à eq.(3.25) apresentada por ROSSO et al. (1991)*.

As dimensões topológica (D_t) e do caminho mínimo (D_m) foram também deduzidas por LIU (1992) e relacionadas às razões de Horton. A dimensão topológica (D_t) foi definida como o comprimento total dos canais Z proporcional à distância hortoniana do comprimento do canal principal L ($Z \approx R^{D_t}$); e a dimensão do caminho mínimo (D_m), como a distância hortoniana L proporcional à distância geométrica (ou raio das redes de canais) R ($L \approx R^{D_m}$), da seguinte forma:

$$D_t = \frac{\log R_B}{\log R_L} \quad (3.28)$$

e

$$D_m = 2 \frac{\log R_L}{\log R_A} \quad (3.29)$$

LIU(1992) relacionou as dimensões D_t e D_m à dimensão D da seguinte forma:

$$D_t D_m = D = 2 \frac{\log R_L}{\log R_A} \quad (3.30)$$

* ROSSO, R., BACCHI, B. & LA BARBERA, P. (1991). Fractal Relation of Mainstream Length to Catchment Area in River Networks, *Water Resour. Res.*, v.27, n.3, apud LIU, T.(1992) Fractal Structure and Properties of Stream Networks, *Water Resour. Res.*, v.28, n.11, p.2981-2988.

Estes mesmos resultados apresentados por LIU (1991) foram obtidos por TARBOTON et al.(1990) ** baseando-se em argumentos da teoria fractal.

Outras duas dimensões foram deduzidas pelo autor e relacionadas às dimensões D_t e D_m , e posteriormente às Razões de Horton, o expoente de difusão (D_w) e a dimensão espectral (D_s) da rede de drenagem, definidas respectivamente como uma propriedade do transporte hidrodinâmica da rede e a conectividade das redes de canais, reconhecidas como importantes parâmetros que caracterizam a dinâmica das redes de canais pelas equações:

$$D_w = D + D_m = D + \frac{D}{D_t} = \frac{2\log(R_B R_L)}{\log R_A} \quad (3.31)$$

e

$$D_s = \frac{2D_t}{1 + D_t} = \frac{2\log R_B}{\log(R_B R_L)} \quad (3.32)$$

Além de relacionar as dimensões D_w , D_s e D_m com as Razões de Horton, LIU (1990) sugeriu a influência destas dimensões na resposta hidrológica da bacia.

3.2.5 - Dimensões Fractais Diversas

NIKORA(1991) retoma o estudo da estrutura fractal das formas espaciais de rios, analisando a geometria da rede de canais como uma estrutura de níveis variada (veios individuais, microformas, mesoformas, macroformas, e seções de rios morfologicamente homogêneos). As microformas são definidas como as características provenientes do nível de partículas individuais, onde o principal processo constitui-se do arraste, suspensão, etc. das partículas, gerando pequenas formas planas, aliadas à escala e à profundidade do escoamento. As mesoformas referem-se às características com dimensão da ordem de largura do canal. Já o nível macroformas inclui características mistas que envolvem formas de todos os níveis

** TARBOTON, D. G., BRAS, R. L. & RODRIGUEZ-ITURBE, I. (1990). Comment on "On the Fractal Dimension of Stream Networks" by P. La Barbera & R. Rosso, *Water Resour. Res.*, v.26, n.9, p.2243-2244 apud LIU, T.(1992) Fractal Structure and Properties of Stream Networks, *Water Resour. Res.*, v.28, n.11, p.2981-2988.

estruturais. Os meandros de rios com suas margens de inundação são exemplo desta estrutura. A totalidade das macroformas que são estatisticamente homogêneas em um trecho compreendem o nível mais elevado, denominado de trecho morfologicamente homogêneo (TMH). A hipótese do comportamento fractal vem da presença de características hierárquicas, como por exemplo, a sobreposição da sinuosidade em várias escalas. NIKORA (1991) sugere a introdução das noções de escalas fractais internas e externas no qual existe um limite para o comportamento fractal. As escalas interna e externa são, respectivamente, a largura do canal, B , e a largura do fundo do canal, B_0 .

O conceito de fractais foi aplicado às redes de drenagem de rios, a partir do reconhecimento de níveis estruturais por NIKORA (1991). Para o autor, a natureza fractal das redes se manifesta de duas maneiras: de um lado, o padrão bifurcado típico da maioria das redes de drenagem é considerado uma estrutura fractal; por outro, o padrão espacial dos cursos de canais individuais da rede pode possuir características fractais próprias. NIKORA (1991) estudou este segundo aspecto da geometria fluvial e definiu a dependência do comprimento total de um rio sobre a escala de medição da forma adimensional, da seguinte forma:

$$\frac{L_\eta}{\eta} = \left(\frac{L_0}{\eta} \right)^D \quad (3.33)$$

O primeiro termo da eq.(3.33) pode ser entendido como número de segmentos de dado comprimento e o termo entre parênteses como sendo número de segmentos característico da forma. O autor diferencia como escala fractal interna, $L_1 = a_1B$ e escala fractal externa, $L_2 = c_2B_0$, onde a_1 e c_2 são constantes empíricas.

A relação entre L_η e a escala η foi representada pelo modelo simplificado da Figura 6, onde L_r é o comprimento limite da linha axial do leito do rio para escalas menores que L_1 e L_{TMH} é o comprimento do TMH. A variação de L_r na faixa entre L_1 e L_2 é representada por:

$$\frac{L_r}{L_{TMH}} = \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^{1-D} \quad (3.34)$$

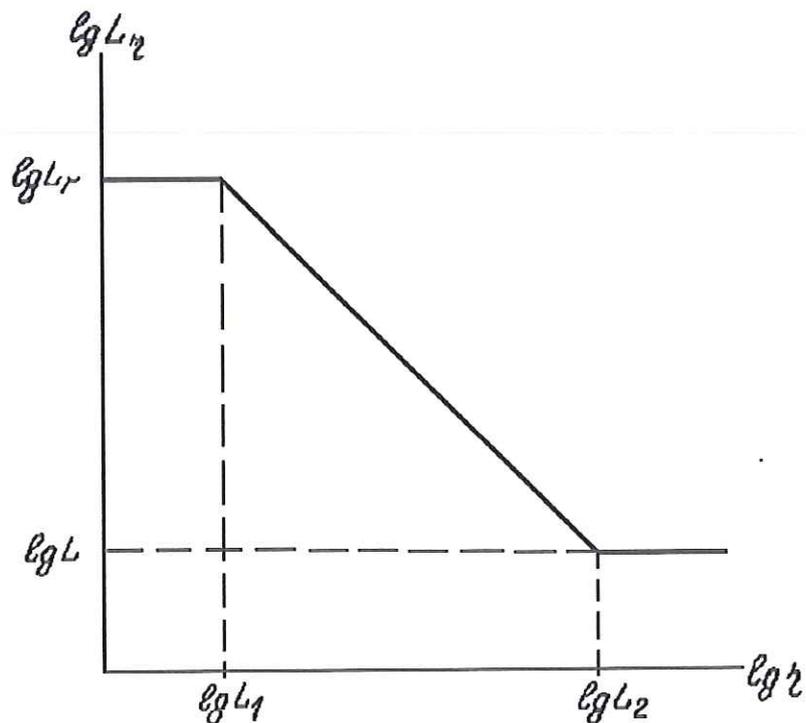


FIGURA 6 - Modelo simplificado da relação L_η e a escala η (NIKORA, 1991)

Na eq.(3.34), NIKORA (1991) introduziu as definições de L_1 e L_2 , mostradas acima. Para um rio anastomosado, o autor escreveu uma equação semelhante, na qual o primeiro termo foi modificado para um termo análogo, que representa a sinuosidade de um rio (L_m/L_M) e as escalas fractais interna e externa assumiram a forma $L_1=a_2B$ e $L_2=c_2B_0$ (a_2 e c_2 como constantes empíricas). Com base nos dados empíricos, NIKORA(1991) adotou $(a_1/c_1) = (a_2/c_2) = 1$ permitindo que as deduções envolvendo a eq.(3.34) sejam simplificadas, chegando às seguintes equações:

$$\frac{L_r}{L} = \left(\frac{B_0}{B} \right)^{D-1} \quad (3.35)$$

$$\frac{L_m}{L_M} = \left(\frac{B_0}{B} \right)^{D-1} \quad (3.36)$$

Ainda para TMH com rios de leito simples é introduzida a relação:

$$\frac{L_r}{L_g} = \left(\frac{B_g}{B_0} \right)^{D_V-1} \quad (3.37)$$

onde B_g é a largura de uma faixa contendo a sinuosidade do vale e D_v é a dimensão fractal do vale

NIKORA (1991) analisou quarenta e seis TMH de rios na Moldavia para determinar as dimensões fractais, utilizando o método de Richardson para os rios de leito simples e “box counting” para rios de leito anastomosado. A validade das equações (3.35) e (3.37) foi verificada, comparando-se os valores das dimensões D e D_v calculados pelo método de Richardson e aqueles obtidos destas equações. Os quais concordaram satisfatoriamente entre si.

NIKORA (1991) discute ainda o desvio do expoente da relação eq.(3.13) do valor 0,5 dado por HACK (1957)*. Contrariamente às discussões dos autores como MANDELBORT (1977)** e ROBERT & ROY (1990)***, NIKORA (1991) não atribui estes desvios às propriedades fractais da forma espacial do rio, especulando outras razões, como a relação entre B , B_0 , a área da bacia e o índice de forma, além da falta de precisão de dados.

A diversidade de dimensões fractais, foi estudada por LIU (1992) através da estrutura fractal e das propriedades das redes de canais. Para isso, o autor comparou as redes de canais e as árvores com meandros aleatoriamente agregadas, geradas a partir de simulações computacionais.

Cinco dimensões fractais foram reconhecidas por LIU (1992) para redes de drenagem: a dimensão fractal D da rede de canais (eq. 3.27), a dimensão topológica D_t (eq. 3.28), a dimensão do caminho mínimo D_m (eq. 3.29), a dimensão de difusão D_w (eq. 3.31), e a dimensão espectral D_s (eq. 3.32). As deduções e definições são provenientes de uma base matemática para algumas relações empíricas reconhecidas na geomorfologia da bacia de drenagem.

O autor relacionou estas dimensões entre si e também entre as Razões de

* HACK, J. T.,(1957). Studies of Longitudinal Stream Profiles In Virginia Maryland, *U.S. Geol. Surv. Prof. Pap.*, 294-B, apud NIKORA, V. I. (1991), Fractal structure of river plan forms, *Water Resour. Res.*, v.27, n.6, p.1327-1333.

** MANDELBROT, B. B., (1977). *Fractals: Form, Chance and Dimension*, W. H. Freeman, New York apud NIKORA, V. I. (1991), Fractal structure of river plan forms, *Water Resour. Res.*, v.27, n.6, p.1327-1333.

*** ROBERT, A. & ROY, A. G. (1990) On Fractal Interpretation of the Mainstem Length-drainage Area Relationship, *Water Resour. Res.*, v.26, n.5 apud NIKORA, V. I. (1991), Fractal structure of river plan forms, *Water Resour. Res.*, v.27, n.6, p.1327-1333.

Horton, como mostrado anteriormente. Além disso, mostrou que a eq.(3.30) implica na estrutura geométrica das redes de canais naturais podendo ser tratada como uma combinação da estrutura topológica das redes e a estrutura geométrica dos segmentos de canais das várias ordens apresentadas nas redes de canais. Este tratamento revela melhor a estrutura fractal das redes de drenagem (Figura 7).

Dentro do conceito de fractalidade, o autor mostrou através da Figura 7 a eq.(3.30). A Figura 7a representa a rede de canais com dimensão fractal D ; decomposta da seguinte maneira: a estrutura topológica (Figura 7b) e a estrutura geométrica (Figura 7c).

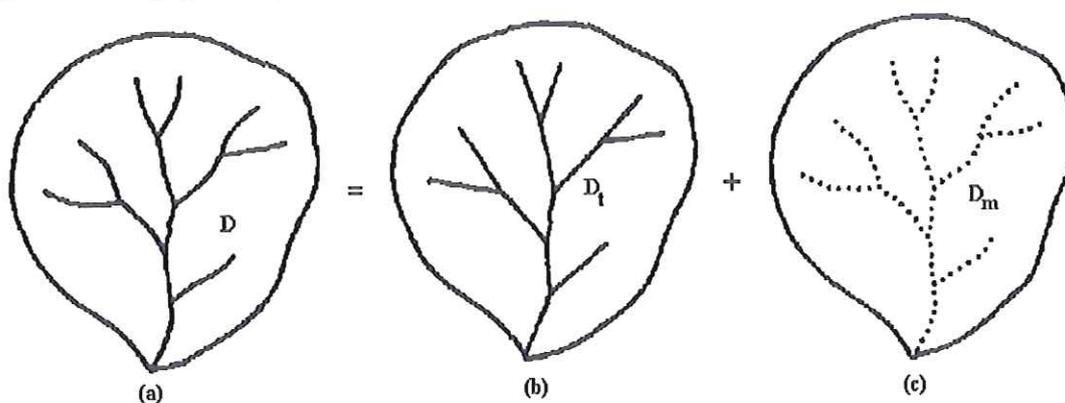


FIGURA 7 - Estrutura Fractal das Redes de Canais (Liu, 1992)

LIU (1992), afim de estimar a dimensão fractal para as redes de canais naturais através das Leis de Horton, usou 12 redes de canais naturais analisadas por MORISAWA*. O autor observou que em algumas redes de drenagem aparecia uma certa distorção dos valores das dimensões fractais calculadas (exceto para D_w). Tal distorção refere-se aos valores das dimensões fractais maiores que 2 ou menores que 1. Teoricamente, as redes de canais são objetos fractais cuja dimensão tem valores entre 1 e 2. Essa distorção foi analisada pelo autor como sendo decorrente de fatores tais como litologia do leito rochoso e estruturas geológicas da rede, etc. LIU (1992) obteve valores médios para as dimensões fractais, D , D_w e D_s , das redes de canais naturais de MORISAWA. Esses valores, apresentados na Tabela 3.1, foram

* MORISAWA, M. E. (1962). Quantitative geomorfology of some watersheds in the Appalachian Plateau, *Geol. Soc. Am. Bull.* apud LIU, T. (1991), Fractal structure of river networks, *Water Resour. Res.*, v.28, n.11, p.2981-2988.

utilizados por LIU (1992) por serem considerados representativos para as redes de canais naturais.

LIU (1992) concluiu que as dimensões D , D_t e D_m podem ser reconhecidas para caracterizar a estrutura desordenada das redes de canais, já que estas três dimensões são parâmetros estáticos, que caracterizam as estruturas geométricas e topológicas das redes de canais. As outras duas dimensões, D_w e D_s , são parâmetros dinâmicos que caracterizam as propriedades de transporte hidrodinâmico e a conectividade da rede de canais.

TABELA 3.1 - Dimensões Fractais para as Redes de Canais de MORISAWA.

D	$1,82 \pm 0,07$
D_t	$1,55 \pm 0,28$
D_m	$1,20 \pm 0,20$
D_w	$3,02 \pm 0,20$
D_s	$1,21 \pm 0,09$

3.2.6 - Influência da Área Suporte no Cálculo da Dimensão Fractal

HELMLINGER et al. (1993) utilizaram as pesquisas de MONTGOMERY & DIETRICH*, as quais sugerem que a área suporte crítica (área mínima para formação de um canal de 1ª ordem) não é constante, pois é uma função das inclinações locais e portanto, varia dentro da bacia. As pesquisas dos autores identificaram uma relação empírica entre a área suporte e a inclinação local (que é, $A_s = CS^{-\theta}$, onde C e θ são constantes empíricas e S é a inclinação local do vale). Esta relação indica que quanto maior a inclinação local, menor será a área suporte que definirá o início do canal..

Alguns estudos têm sido realizados buscando identificar um método para determinação dos parâmetros A_s e S , a partir de propriedades morfométricas e/ou solo-climáticas da bacia hidrográfica.

* MONTGOMERY, D. R. & DIETRICH, W. E. (1989). Sources areas, drainage density, and channel initiation, *Water Resour. Res.*, v.25, n.8 apud HELMLINGER, K. R., KUMAR, P. & FOUFOULA-GEORGIO, E. (1993), On the use of digital elevation model data for Hortonian and fractal analyses of channels networks, *Water Resour. Res.*, v.29, n.8, p.2599-2613.

Os resultados do efeito da área suporte nas propriedades morfométricas e de escala da bacia foram mostrados por HELMLINGER et al. (1993). Embora estes tenham sido os esperados, as propriedades morfométricas foram consideravelmente afetadas pela escolha da área suporte, enquanto que as propriedades de escala não sofreram alterações em uma rede de drenagem Hortoniana. Entretanto, as redes de canais reais não são um sistema Hortoniano perfeito, logo os autores mostraram que as estimativas das razões de Horton são significativamente afetadas pela área suporte usada para extração das redes de canais. Ao analisar estes desvios como uma variabilidade estatística, HELMLINGER et al. (1993) perceberam que a variabilidade da dimensão fractal estimada (baseada nas razões de Horton) devido a seleção da área suporte para a mesma rede de drenagem poderá ser de magnitude comparável àquelas expostas na literatura para diferentes redes de canais.

Além de observarem as relações entre área suporte e inclinação local, HELMLINGER et al. (1993) também analisaram o efeito desta área nas Leis de Horton e na dimensão fractal. A dimensão fractal foi estimada através dos parâmetros de Horton ou diretamente pelo método de “box-counting”. Quando os autores estimaram a dimensão fractal em função dos parâmetros de Horton puderam observar que a área suporte influencia no número de canais da rede reduzindo a ordem e conseqüentemente alterando o valor de $D (= \log R_b / \log R_L)$. Já no método “box-counting”, a estimativa de D feita através do gráfico foi coerente com aquela mencionada na literatura.

HELMLINGER et al. (1993) compararam os valores da dimensão D obtidos pelas estimativas hortonianas e “box-counting” e chegaram a conclusão que há uma consistência entre estas estimativas. Além disso, os autores puderam observar que é necessário estudos mais cuidadosos a respeito do problema de representação da ordem dos canais por meio de MED's, os quais poderão apontar uma área suporte apropriada para extração das redes e conseqüentemente estimar as propriedades morfométricas .

3.2.7 - Dimensão Fractal e Resposta Hidrológica de uma Bacia Hidrográfica

MARANI et al. (1991) com intuito de investigar as relações entre diversas características geomorfológicas de uma bacia hidrográfica, adotaram uma bacia modelo denominada de Bacia de Peano (Figura 8). Esta bacia tem uma estrutura fractal simples de tal sorte que pode-se induzir relações geomorfológicas importantes para a hidrologia e, posteriormente, generalizá-las através de conjecturas e deduções. Os autores consideram a relação entre uma medida geométrica (Λ) de uma rede, a unidade desta medida ϵ e o número de unidades necessária para cobrir o conjunto em estudo N_ϵ , sejam canais ou áreas de drenagem. Para isso, adotaram a “conjectura de conectividade” entre comprimento e área expressa da seguinte forma:

$$N_\epsilon(\Omega) = N_\alpha(\Omega) \quad (3.38)$$

onde : $N_\epsilon(\Omega)$ é o número de réguas necessárias para cobrir o conjunto de canais e $N_\alpha(\Omega)$ é o número de áreas de drenagem de canais de ordem 1 para cobrir uma bacia de ordem Ω .

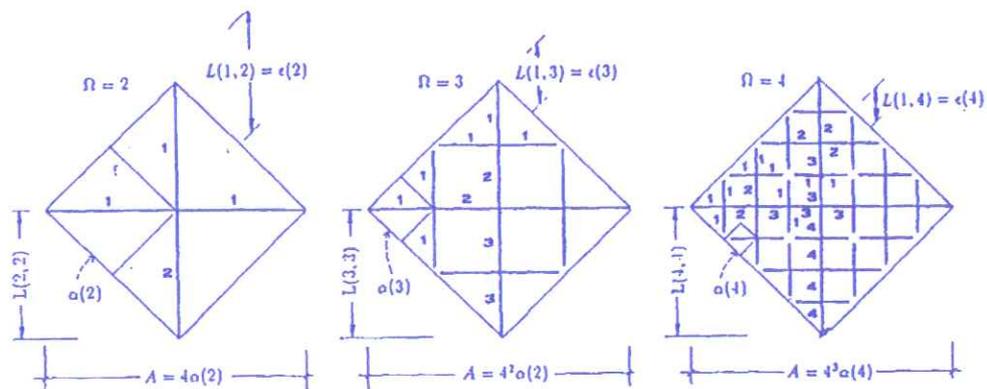


FIGURA 8 - Bacia de Peano (MARANI et al., 1991)

Para o autor, conjectura de conectividade, permite equacionar em termos das razões de Horton e dimensão fractal, algumas características geomorfológicas e físicas das bacias de drenagem, da seguinte forma:

densidade de drenagem:

$$\rho = \frac{\varepsilon(\Omega)^{D_Z}}{\alpha(\Omega)^{D_A}} \quad (3.39)$$

onde D_Z é a dimensão fractal do comprimento total da bacia e D_A dimensão fractal da área da bacia.

número de réguas necessário para cobrir uma rede de drenagem:

$$N_\varepsilon(\Omega, \Omega) = \frac{R_B^\Omega - R_L^\Omega}{R_B - R_L} \quad (3.40)$$

comprimento Euclidiano total da bacia:

$$Z(\Omega, \Omega) = L(\Omega, \Omega) \frac{\left(\frac{R_B}{R_L}\right)^\Omega - 1}{\left(\frac{R_B}{R_L}\right) - 1} \quad (3.41)$$

comprimento fractal:

$$Z_F(\Omega) = \frac{R_B^{D_1}}{R_B - R_L} L(\Omega, \Omega)^{D_Z} \quad (3.42)$$

área total da bacia:

$$A = \frac{1}{\rho} \frac{R_L^{D_1}}{R_B - R_L} L(\Omega, \Omega)^{D_Z} \quad (3.43)$$

relação entre razões diversas de Horton:

$$R_A = R_B \frac{1 - \left(\frac{R_L}{R_L}\right)^\omega}{1 - \left(\frac{R_L}{R_B}\right)^{\omega-1}} \quad (3.44)$$

onde R_A é a razão de área de Horton e quando $\omega \rightarrow \infty$: $R_A \approx R_B$.

comprimento do canal principal:

$$L_{cp}(\Omega, \Omega) = \left[\rho \frac{R_B - R_L}{R_B^{D_f}} A \right]^{1/D_f} \quad (3.45)$$

lei de Melton:

$$\frac{S}{\rho} = \frac{R_B - R_L}{R_B - 1} \quad (3.46)$$

A conectividade mostra uma definição teórica da razão ρ no caso em que a área A é uma medida fractal e o comprimento Z é uma medida Euclidiana. Segundo a lei de Melton o valor da relação eq.(3.46) tem valor igual a 0,69 e o calculado por MARANI et al.(1991) é 0,67. Quando comparados verifica-se uma boa aproximação o que vem validar a conjectura de conectividade.

Outro objetivo de MARANI et al.(1991) diz respeito à dedução por meio da Bacia de Peano da resposta hidrológica da bacia em termos de parâmetros geomorfológicos. Baseando-se na teoria de mecânica estatística e nos resultados de GUPTA et al.* e GUPTA & MESA** apud MARANI et al. (1991) chegaram à seguinte formulação para a função da resposta hidrológica:

$$f(t) = \frac{vN_{eff}(vt, \Omega)}{Z(\Omega)} \quad (3.47)$$

onde: v velocidade da partícula no canal; N_{eff} é número de ligações até a saída da bacia e t é o tempo de percurso.

Utilizando tal resultado para bacia modelo, MARANI et al. (1991) apresentam a seguinte forma para hidrograma unitário hidrológico:

* GUPTA, V. K., WAYMIRE, E. & RODRIGUEZ-ITURBE, I. (1986). *On scale, gravity and networks structure in basin runoff, in Scale problems in hydrology*, edited by V. K. Gupta, I. Rodriguez-Iturbe, and E. F. Wood, D. Reidel, Higham. Mass. apud MARANI, A., RIGON, R. & RINALDO, A. (1991). A note on fractal channel networks. *Water Resour. Res.*, v.27, n°12, 3041-3049.

** GUPTA, V. K. & MESA, O. (1988). Runoff generation and hydrologic response via channel networks geomorfology - recent progress and open problems, *J. Hydrol.* apud MARANI, A., RIGON, R. & RINALDO, A. (1991). A note on fractal channel networks. *Water Resour. Res.*, v.27, n°12, 3041-3049.

$$f(t) = \frac{L_{cp}}{(R_B R_L)^{\Omega-1} (\pi D_L t^3)^{1/2}} \sum_{\gamma=1}^{R_L^{\Omega-1}} \gamma \left(\frac{1}{R_L^{\Omega-1}} \right)^{\alpha_{HL}(\gamma)} \cdot \exp \left(- \frac{\left(\frac{2\gamma L_{cp}}{R_L^{\Omega-1}} - vt \right)^2}{4D_L t} \right) \quad (3.48)$$

onde: L_{cp} é o comprimento do canal principal; R_B é a razão de bifurcação de Horton; R_L é a razão de comprimento de Horton; D_L coeficiente de dispersão da distribuição da função Delta de Dirac; Ω é a ordem da bacia de drenagem; t é o tempo de percurso da partícula; $\alpha_{HL}(\gamma)$ é o expoente de Holpder-Lipschitz.

Os autores observaram que o resultado da eq.(3.48) é idêntico à dedução da resposta hidrológica geomorfológica de RINALDO et al.(1991) encontrada por diferente procedimento. Os autores observam que para pequenos tempos de percurso e/ou pequenas dispersões ($D_L \approx 0$) a distribuição degenera na distribuição Delta de Dirac gerando uma formulação para função do Hidrograma Unitário Geomorfológico (HUG), o qual é então, visto como um caso particular de eq.(3.48). Os autores observaram que a contribuição geométrica explica completamente o principal tempo de percurso, enquanto a variância é afetada pelas distribuições hidrodinâmicas e geomorfológicas. Um interessante resultado para aplicação da Bacia de Peano é dado, com $R_L = R_e = 2$; $R_\alpha = R_B = 4$; e $L_{cp}(1, \Omega) = L_{cp}(2, \Omega)$, $L_{cp}(\omega, \Omega) = R_L^{\omega-\Omega} L_{cp}(\Omega, \Omega)$, com $\omega > 2$:

$$E(T) = \frac{3L_{cp}(\Omega, \Omega)}{2v} \quad (3.49)$$

$$\text{Var}(T) = \frac{3D_L L_{cp}(\Omega, \Omega)}{v^3} + \frac{L_{cp}^2(\Omega, \Omega)}{4v^2} \quad (3.50)$$

O resultado acima é comparado com as equações de TROUTMAN & KARLINGER (1985), dadas pela seguinte forma:

$$E(T) = \pi^{1/2} \frac{L(\Omega, \Omega)}{v} \quad (3.51)$$

$$Var(T) = (4 - \pi) \frac{L^2(\Omega, \Omega)}{v^2} \quad (3.52)$$

Os autores concluíram que a relação da geometria de redes de canais fractais e a compreensão da resposta hidrológica tem sido discutida no suporte do Hidrograma Unitário Geomorfológico (HUG) mais provável na simplificação do contexto dinâmico. A investigação sobre características multifractais da dinâmica das áreas contribuintes possuem relevante interesse, o que segundo os autores poderá ser objetos de pesquisas futuras.

Da mesma forma que outros pesquisadores, LIU (1992) verificou a implicação das dimensões fractais, D_m , D_w e D , na resposta hidrológica da bacia fazendo uma ligação entre o escoamento superficial e parâmetros geomorfológicos da rede de canais através do Hidrograma Unitário Instantâneo (HUI):

$$G_* = 0,58 \left(\frac{R_B}{R_A} \right)^{0,55} R_L^{0,05} \quad (3.53)$$

$$\alpha_* = 3,29 \left(\frac{R_B}{R_A} \right)^{0,78} R_L^{0,07} \quad (3.54)$$

onde: o parâmetro G_* é o produto adimensional de pico e tempo de pico no HUI e α_* é o parâmetro de formato do modelo de Nash do HUI.

Os parâmetros G_* e α_* caracterizam o formato da resposta hidrológica das redes de canais e dependem somente da geomorfologia da bacia hidrográfica. Se há alguma conexão entre agregados aleatórios e redes de canais e se o expoente de difusão D_w e a dimensão espectral D_s caracterizam a propriedade de transporte dinâmico e a conectividade das redes de canais, respectivamente, ambos devem refletir a resposta hidrológica da bacia de drenagem, ou HUI. É interessante relacionar D_w e D_s aos parâmetros G_* e α_* :

$$D_w = \alpha \quad (3.55)$$

$$\frac{D_s}{2} = G_* \quad (3.56)$$

Considerando: $D_s = \frac{2D}{D_w}$, e obtendo de (3.55) e (3.56):

$$D = \alpha_* G_* \quad (3.57)$$

As equações (3.55) e (3.56) sugerem que a dimensão fractal das redes de drenagem podem influenciar na resposta hidrológica das redes de canais devido a escala da bacia e pode ser usada na análise da similaridade hidrológica das bacias. As dimensões D_w e D_s , hipoteticamente, foram relacionados aos parâmetros G_* e α_* do HUI. A comprovação destas hipóteses representam um progresso relevante na forma de identificação da similaridade de bacias.

3.3 - AUTO-SIMILARIDADE E AUTO AFINIDADE DE BACIAS HIDROGRÁFICAS

NIKORA (1994) analisou alguns indicadores do comportamento fractal das bacias de drenagem considerando a possibilidade de auto-similaridade e auto afinidade das redes de canais.

A auto-similaridade é aplicada quando um objeto pode ser subdividido em N_s partes, cada uma sendo similar ao todo com um coeficiente de similaridade K^{-1} . A equação abaixo determina a dimensão de objetos similares:

$$D_{SIM} = \frac{\ln N_s}{\ln K} \quad (3.58)$$

onde : N_s é o número de partes similares ao todo e K é o número de vezes em que se repete a menor escala espacial.

Com $D_{SIM} > D_t$ (sendo D_t a dimensão topológica de um objeto), o objeto é fractal e a dimensão D_{SIM} é chamada de dimensão fractal de auto-similaridade .

Segundo MANDELBROT (1986) são necessários dois índices que caracterizem as propriedades geométricas de um objeto na determinação da propriedade de auto-afinidade, são eles D_{long} e D_{tr} que podem ser definidos como expoentes ajustados para as direções longitudinal e transversal do objeto. Para caracterizar a estrutura de objetos auto-afins foi proposto o uso do índice de Hurst

(H , que caracteriza o grau de auto-afinidade do objeto) e a dimensão de lacunaridade, D_G (que define a lacunaridade ou o grau de compacidade do objeto), definidos da seguinte maneira:

$$H = \frac{D_{long}}{D_{tr}} \quad (3.59)$$

$$D_G = \frac{2D_{long}D_{tr}}{(D_{long} + D_{tr})} \quad (3.60)$$

No caso de auto-similaridade tem-se que $H=1$, $D_{long} = D_{tr} = D_G = D_{SIM}$.

Para o auto-similaridade D_{SIM} , D_{tr} e D_{long} podem ser expressas em termos de razões de Horton. No caso de auto-similaridade das bacias de drenagem $R_L = R_{tr}$ ($R_{te} = R_A/R_L$) e a estrutura fractal das bacias será caracterizada pela dimensão D_{SIM} :

$$D_{SIM} = \frac{\ln R_B}{\ln R_L} \quad (3.61)$$

Também são apresentadas as relações de conexão entre R_L , R_{tr} , R_B e R_A no caso da auto-similaridade:

$$R_B = R_L^{D_{SIM}} = R_{tr}^{D_{SIM}} = R_A^{D_{SIM}/2} \quad (3.62)$$

Se esta igualdade é violada, perde-se a característica de auto-similaridade das bacias hidrográficas.

A auto-afinidade é definida com uma propriedade de objetos que, quando analisados, independente de sua posição no espaço, permanecem com suas características inalteradas.

Já para o caso da auto-afinidade das bacias de drenagem, a dimensão fractal será caracterizada pelas seguintes relações:

$$D_L = \frac{\ln R_B}{\ln R_L} \quad (3.63)$$

$$D_{tr} = \frac{\ln R_B}{\ln R_{tr}} \quad (3.64)$$

$$H = \frac{D_{long}}{D_{tr}} = \frac{\ln R_A}{\ln R_L} - 1 \quad (3.65)$$

$$D_G = 2 \frac{\ln R_B}{\ln R_A} \quad (3.66)$$

Há também uma relação de conexão entre R_L , R_{tr} , R_B e R_A :

$$R_B = R_L^{D_{long}} = R_{tr}^{D_{tr}} = R_A^{\frac{D_{long} D_{tr}}{(D_{long} + D_{tr})}} \quad (3.67)$$

Os expoentes D_{long} , D_{tr} e D_{SIM} são os mesmos nas equações (3.62) e (3.67). Assim na transição da auto-similaridade para auto-afinidade, dois novos parâmetros, D_{long} e D_{tr} , aparecem em vez de um índice único da estrutura fractal, D_{SIM} . NIKORA (1994) concluiu em suas análises de dados de bacias de drenagem dos Estados Unidos, Itália, Rússia e România, que as bacias são geralmente objetos fractais não compactos ($D_G < 2$) e auto-afins ($H < 1$). As considerações feitas por NIKORA (1994) mostravam posições comuns das propriedades de auto-similaridade e auto-afinidade das bacias de drenagem. Ele introduziu índices na estrutura fractal dessas bacias (D_{SIM} no caso da auto-similaridade e D_{long} , D_{tr} , H e D_G no caso da auto-afinidade) como também substanciou a hipótese de auto-afinidade nas bacias de drenagem tendo bases nas Leis de Horton .

4 - METODOLOGIA

Verificou-se da literatura que a estrutura fractal das redes de drenagem permite compreender a interação entre as características de uma bacia hidrográfica em termos de algumas propriedades tais como geológicas, topográficas, e que, as propriedades geomorfológicas tais como: razões de Horton e área da bacia podem ser relacionadas por meio de uma dimensão fractal.

Tendo em vista a relação entre a dimensão fractal e as características da bacia, baseou-se a análise quantitativa em três métodos gráficos para o cálculo da dimensão fractal (D). Posteriormente, calculou-se D também em função das Leis de Horton, e analisaram-se estes resultados comparado-os com aqueles encontrados na literatura.

4.1 - Escolha das Bacias de Drenagem

A metodologia empregada tem como ponto de partida a escolha das bacias hidrográficas, tendo em vista a dependência das propriedades da rede sobre fatores geológicos, topográficos e geomorfológicos. Considerando que as bacias possuem litologias distintas, foi dada preferência àquelas que favoressessem a formação de redes de ordens elevadas. As bacias a serem analisadas localizam-se no estado de São Paulo:

- Bacia do Ribeirão do Palmital;
- Bacia do Ribeirão Pirapitingui;
- Bacia do Ribeirão Feijão.

As bacias do Ribeirão do Palmital e Ribeirão Pirapitingui foram inicialmente escolhidas para testar a aplicabilidade dos métodos gráficos a serem usados. Parte da

bacia do Ribeirão do Feijão foi escolhida, para complementar a pesquisa, por possuir maior heterogeneidade interna com características distintas em toda sua área.

4.1.1 - Extração das Redes de Drenagem

Para extração das redes de drenagem das bacias hidrográficas, foram utilizados os mapas do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) na escala 1:50.000. Inicialmente, foram aceitos todos os canais indicados por linha azuis nestes mapas. É necessário observar que os mapas do IBGE não representam de forma fiel a rede de drenagem, já que os canais de ordem 1 não são representados nestes mapas. Isto deve-se de que as nascentes estarem encobertas pela vegetação e não serem visíveis nas fotografias aéreas que dão origem a estes mapas. Antes porém, realizou-se uma análise preliminar onde foram usadas as Bacias do Ribeirão do Pirapitingui e Ribeirão do Palmital e as redes de drenagem obtidas do trabalho de CARVALHO (1995)*, em uma escala reduzida.

4.2 - Análise Geomorfológica

Algumas características físicas das bacias foram obtidas, após a extração das redes de drenagem, tais como o número e o comprimento dos canais, ordem da bacia de drenagem, área total da bacia e área média dos canais da bacia. Para obtenção da ordem da bacia de drenagem, usou-se o sistema de ordenação apresentado por Strahler, além do número de canais de cada ordem. Os comprimentos dos canais foram medidos com auxílio de instrumento de medida (régua ou compasso) conforme foi mostrado no método de Richardson usado para cálculo da dimensão fractal D.

Com base nestes dados foram calculados os parâmetros geomorfológicos da rede: Razões de Horton (R_B , R_L e R_A). As Razões de Horton foram calculadas a partir do Diagrama proposto por Horton. Neste Diagrama são plotados os valores dos logaritmos das área médias, dos canais, dos comprimentos médios dos canais e o

* CARVALHO, M. A. (1995). *Aplicação de hidrogramas unitários geomorfológicos na previsão de respostas hidrológicas*. São Carlos. 203p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

número de canais de cada ordem, em função da ordem de canais, a partir da reta ajustada e por um método de regressão linear. Desta maneira, as características físicas e geomorfológicas foram obtidas para as bacias em estudo.

Para as Bacias do Ribeirão do Palmital e Ribeirão Pirapitingui, o valor das áreas para cada ordem e as respectivas áreas médias foram obtidas do trabalho de CARVALHO (1995), que também utilizou os mapas do IBGE em escala 1:50.000. Para a Bacia do Ribeirão do Feijão, o valor das áreas para os canais de todas as ordens foi obtido com o auxílio de um planímetro.

4.3 - Análise Fractal

Desde que MANDELBROT (1977) introduziu o conceito de fractais na hidrologia, um grande número de estudos envolvendo as redes de drenagem e a sua estrutura fractal têm sido realizados. Nesta pesquisa foram utilizados os métodos propostos por TARBOTON et al. (1988), porém com algumas adaptações. Os métodos usados foram: o Método de Richardson, “Box-Counting” e o Método da Probabilidade da Excedência do Comprimento de Canais. Os resultados obtidos foram analisados e comparados com aqueles encontrados na literatura.

4.3.1 - Método de Richardson

O primeiro método usado foi o Método de Richardson que consiste na medida de todos os canais da rede de drenagem através de um instrumento de medida (aqui utilizou-se de um compasso). O comprimento total dos canais de uma rede aproximado é dado pela equação $L = \lim_{r \rightarrow 0} Nr$, de onde tem-se que os comprimentos dos canais são iguais ao número de réguas N multiplicado pelo tamanho de cada régua r (entende-se por régua, o tamanho da abertura do compasso, segundo a escala adotada).

Nesta pesquisa, estipularam-se os tamanhos das réguas, partindo-se de um tamanho de régua pequeno (1mm=50m) até um tamanho de régua maior (180mm=9.000m). Com o compasso percorreu-se todos os canais da rede de drenagem, contando-se as réguas e seguiu-se as considerações, quanto a medida de

comprimentos de canais, feitas por TARBOTON et al. (1988): se na extremidade de um canal, o comprimento do última régua for maior ou igual à metade da régua r , essa medida deveria ser contada no

comprimento final do canal como sendo do tamanho de uma régua, e em caso contrário, essa medida deveria ser desprezada.

A eq.(3.13), que relaciona os comprimentos dos canais de uma rede de drenagem medidos com o tamanho da régua, pode ser representada por uma curva em papel log-log, de onde a dimensão fractal pode ser obtida a partir da inclinação da reta i ajustada tangente à curva, com $D = 1 - i$. No gráfico, observa-se uma linha com inclinação suave para os comprimentos de réguas pequenas, seguido de uma súbita inclinação para comprimentos de réguas maiores. A dimensão que corresponde à suave inclinação (D superior a 1) deve-se à sinuosidade individual dos canais, e a segunda, com D próximo de 2, às características de ramificação da rede de canais (Figura 2).

4.3.2 - Método “Box-Counting”

O segundo método utilizado foi o Método de “Box-Counting” proposto por LOVEJOY et al. apud TARBOTON et al. (1988) e consiste na formação de uma malha de quadrículas que cobre toda a rede de drenagem. O método foi adaptado da seguinte forma: os tamanhos das quadrículas foram estipulados, partindo-se de quadrículas de área 50x50m até áreas de 3.500x3.500m. O método consiste em contar e somar o número de quadrículas que possuem trechos de canais. A eq.(3.14) relaciona o número de quadrículas e o tamanho de quadrículas, e é representada por uma curva plotada em papel di-log, de onde a dimensão fractal é obtida, diretamente, pela inclinação da reta (Figura 3).

4.3.3 - Método da Distribuição de Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais

A dimensão fractal também foi obtida através do Método da Distribuição de Probabilidade de Excedência dos Comprimentos de Canais, e consiste em medir os

comprimentos dos canais do ponto inicial ao final com o auxílio de um instrumento de medida (régua), e ordená-los do canal mais longo ao mais curto. Nesta pesquisa aplicou-se o método da maneira usada por **TARBOTON et al. (1988)**. A probabilidade de excedência aproximada pela eq.(3.17) em função dos comprimentos dos canais forneceu uma reta cuja inclinação é a dimensão fractal.

4.4 - Estimativa da Análise Fractal através das Razões de Horton

Muitos pesquisadores analisaram a possibilidade de associar a dimensão fractal e às razões de Horton e chegaram a algumas formulações. Baseando-se nestas formulações, a dimensão fractal das redes de drenagem foi calculada e comparada com os valores encontrados nesta pesquisa pelos métodos gráficos e por aqueles da literatura. A dimensão fractal foi calculada partindo-se das equações (3.21a) e (3.22b), (3.25) e (3.27) apresentadas nos trabalhos de **LA BARBERA & ROSSO (1989)**, **ROSSO et al. (1991)** e **LIU (1992)**, respectivamente.

4.5 - Análise da Auto-Similaridade e da Auto-Afinidade

Baseando-se no trabalho de **NIKORA (1994)** e utilizando se os valores de R_B , R_L e R_A encontrados, foram analisadas as características de auto-similaridade e auto-afinidade, a partir da comparação entre os resultados das relações (3.62) e (3.67).

5 - BACIAS HIDROGRÁFICAS

5.1 - Geomorfologia

Como critério básico para escolha das bacias hidrográficas foram utilizadas as características topográficas, geomorfológicas, litológicas, etc. As bacias escolhidas localizam-se todas no estado de São Paulo (ANEXO A).

Geomorfologicamente, as Bacias do Ribeirão do Palmital e do Ribeirão Pirapitingui estão localizadas na região do Planalto Atlântico possui área de 41.468Km², o que corresponde a 17% da área do Estado de São Paulo, é caracterizada geomorfologicamente como uma região de terras altas, constituída predominantemente por rochas cristalinas pré-cambrianas e cambro-ordovicianas, cortadas por intrusivas básicas e alcalinas mesozóico-terciárias, e pelas coberturas das bacias sedimentares de São Paulo e Taubaté. Limita-se a sudeste pelas escarpas paleozóicas da Bacia do Paraná, que definem seu limite com a Depressão Periférica Paulista.

Em sua litologia predominam migmatitos, gnaises, granitos e granitoídes. Subordinadamente ocorrem xistos, filitos, calcáreos e dolomitos metamórficos, rochas metabásicas, sedimentos do grupo Taubaté, granulitos e quartzitos.

Recobrimo mesmo que parcialmente as litologias, ocorrem depósitos coluvionares. Tais depósitos podem ser agrupados, conforme o seu modo de ocorrência associado ao tipo de relevo, em dois tipos:

1º grupo: está associado a relevos suaves e os depósitos são de constituição predominantemente argilosa, com espessura atingindo até 8 metros. Podem apresentar concreções ferruginosas na forma de crostas liminíticas centimétricas distribuídas em vários níveis de profundidade. Geralmente ocorre uma camada de

seixos que marca a base deste tipo de depósito;

2º grupo: está associado a relevos acidentados e pode ser subdividido em três tipos:

- rampas de colúvio: são constituídas por materiais finos e apresentam espessura variada podendo atingir até dezenas de metros. Ocorrem no sopé das vertentes;
- corpos de talus: são constituídos por grande quantidade de matacões imersos em matriz fina. Apresentam espessuras variadas podendo atingir até dezenas de metros. Ocorrem comumente desde os sopés até as partes médias das vertentes;
- cobertura coluvionar de encostas: corresponde mais apropriadamente aos solos superficiais das litologias das encostas e não tipicamente a um depósito coluvionar, constituindo em materiais em processo de rastejo, sendo a principal fonte de detritos para formação de rampas de colúvio e corpos de talus. Tal material é predominantemente argiloso com quantidades variáveis de fragmentos líticos de dimensões, forma e composição extremamente diversificada. Espessura geralmente inferiores a 1 metro. Ocorre predominantemente à meia encosta.

Os depósitos coluvionares associados a relevos suaves (1º grupo) apresentam qualidades satisfatória como material para a construção de obras de terra constituindo-se naquele preferencialmente utilizado em suas áreas de ocorrências. Os depósitos do 2º grupo por apresentarem granulometria e composição extremamente variável, além de serem de difícil desmonte devido a sua estabilidade precária, não são levados em conta como material de construção.

Como característica climática, a Zona do Médio Vale do Paraíba, apresenta pluviosidade anual entre 1200 e 1300 milímetros; a temperatura média anual situa-se em torno de 20°C e clima do tipo Cwa (mesotérmico com inverno seco e verão quente).

A Bacia do Ribeirão do Feijão localiza-se na Província Geomorfológica das Cuestas Basálticas. Esta região ocupa uma área de 23.324 Km², correspondendo a 10% da área do estado. Morfologicamente, esta província caracteriza-se por apresentar relevo escarpado nos limites com a Depressão Periférica, seguido de uma sucessão de grandes plataformas estruturais de relevo suavizado, inclinadas para o

interior em direção à calha do Rio Paraná. Estas duas feições principais constituem a escarpa e o reverso das cuestas.

Em sua litologia predominam:

- Rochas do grupo Botucatu e Pirambóia: solo superficial de grande espessura, correspondente na sua maior parte aos depósitos coluvionares, consiste em areia fina com pequenas porcentagens de silte e argila. O solo de alteração apresenta-se predominantemente arenoso (na formação Botucatu) e areno-argiloso (na formação Pirambóia), com espessuras registradas em 2 a 15 metros.
- Basaltos: solo superficial que corresponde, na sua maior parte, aos depósitos coluvionares; é de natureza argilosa com porcentagens variadas de areia e coloração vermelha escura característica (terra roxa). O solo de alteração de basalto é geralmente de caráter argiloso, sendo observadas espessuras de até 15 metros.

Subordinadamente, ocorrem:

- Rochas do grupo Bauru: solo superficial corresponde, na sua maior parte, aos depósitos coluvionares. é de natureza arenosa e pode atingir grandes espessuras. O solo de alteração é de caráter arenoso e de pequeno desenvolvimento.
- Diabásios: solo superficial que corresponde, na sua maior parte, aos depósitos coluvionares. É de natureza argilosa e de coloração vermelha escura característica (terra roxa) e pode atingir espessuras superiores a 10 metros.

Os depósitos coluvionares ocorrem em toda província, dentro da qual constituem-se nos materiais mais laterizados, apresentando porosidade e permeabilidade relativamente altas. São relativamente pouco estudados e, dividem-se em três tipos:

- depósitos coluvionares extensos: associam-se a relevos suaves e recobrem parcialmente as litologias existentes na província,
- depósitos coluvionares diferenciados: constituem corpos sedimentares que ocupam antigas áreas deprimidas,
- corpus de talus: ocorrem de forma restrita a partir dos sopés até as partes médias das encostas de transição. Possui grande quantidade de matações.

5.2 - Descrição das Bacias Hidrográficas

5.2.1 - Bacia do Ribeirão do Palmital

A Bacia do Ribeirão do Palmital (Anexo B) possui área de drenagem de 38Km², está localizada no município de Cachoeira Paulista, situa-se na Subzona dos Morros Cristalinos (Subzona 5a). A Subzona dos Morros Cristalinos é uma região de morros desenvolvidos sobre rochas pré-cambrianas, assim denominada em função do embasamento rochoso do relevo que era pressuposto como de natureza essencialmente granito-gnásica. É definida como de montanhas complexas, maturamente dissecadas e está disposta ao redor da Bacia do Taubaté, emoldurando os relevos de colinas.

A Bacia do Ribeirão do Palmital localiza-se no Relevo de Morros, mais especificamente Mar dos Morros, onde há predominância de declividade variando entre médias e altas, acima de 15% (2º grupo) e amplitudes locais de 100 a 300 metros, topos arredondados, vertentes com perfis convexos e retilíneos. Drenagem de alta densidade, padrão dendrítico a retangular, vales abertos a fechados, planícies aluvionares interiores desenvolvidas. Constitui geralmente um conjunto de formas em “meia laranja”.

A principal ocupação desta área é de fazendas com campos (pastos - cerca de 85%), algumas florestas (cerca de 10%) e culturas ribeirinhas.

5.2.2 - Bacia do Ribeirão Pirapitingui

A Bacia do Ribeirão do Pirapitingui (Anexo C) possui área de drenagem de 67Km², localizada nos municípios de Moreira César e Roseira e situa-se em sua maior parte na Subzona dos Morros Cristalinos (Subzona 5a), da mesma forma que a Bacia do Ribeirão do Palmital, porém o trecho da cabeceira localiza-se na Subzona das Colinas Sedimentares (Subzona 5b), apresentando uma delgada cobertura sedimentar.

A Subzona das Colinas Sedimentares coincide com a área de ocorrência do pacote mais espesso de sedimentos terciários da Bacia do Taubaté. Os relevos são de Degradação, em Planaltos Dissecados apresentando-se Colinoso, onde predominam baixas declividades, até 15% (1º grupo), e amplitudes locais inferiores a 100 metros. Mais especificamente, o relevo se apresenta de Colinas Amplas, onde predominam interflúvios com área superior a 4 Km², topos extensos e aplainados, vertentes com perfis retilíneos à convexos. Drenagem de baixa densidade, padrão subdedrítico, vales abertos, planícies aluviais interiores restritas, presença eventual de lagoas perenes ou intermitentes.

A principal ocupação do solo é de fazendas com campos (cerca de 75%), florestas (cerca de 20%), e o restante macega e mata rala.

5.2.3 - Bacia do Ribeirão Feijão

A Bacia do Ribeirão do Feijão (Anexo D) possui área de drenagem de 142,85 Km², localiza-se entre os municípios de São Carlos e Itirapina e situa-se na Província das Cuesta Basálticas. Possui relevo colinoso (colinas amplas, colinas médias, colinas pequenas com espigões locais) onde predominam amplitudes inferiores a 100 metros e declividades de encostas superiores a 15%, e relevo de morrotes (morrotes alongados e espigões), onde predominam amplitudes locais inferiores a 100 metros e declividades de encostas superiores

A bacia hidrográfica é caracterizada por grandes rios e por pequenos afluentes.

A ocupação da região se deu devido a cultura cafeeira, que promoveu o aparecimento das ferrovias para escoar a produção. Ao longo da malha ferroviária surgiram cidades como São Carlos, Itirapina, Brotas entre outras. Atualmente, além da cultura do café, ocorre em grande escala o plantio da cana-de-açúcar.

6 - RESULTADOS E DISCUSSÃO

6.1 - Parâmetros Físicos

As bacias hidrográficas são classificadas segundo o esquema de ordenação de STRAHLER apud SMART (1972) Os dados foram obtidos diretamente dos mapas topográficos do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) em escala 1:50000.

Obedecendo a ordenação de Strahler temos que:

- Bacia do Ribeirão do Palmital: 4ª ordem,
- Bacia do Ribeirão Pirapitingui: 4ª ordem, e
- Bacia do Ribeirão do Feijão: 5ª ordem.

Os parâmetros físicos das bacias hidrográficas citadas foram organizados nas Tabelas 6.1, 6.2 e 6.3, e posteriormente utilizados para determinar os parâmetros geomorfológicos (R_B - Razão de Bifurcação de Horton, R_L - Razão de Comprimento de Horton e R_A - Razão de Área).

TABELA 6.1 - Parâmetros Físicos da Bacia do Ribeirão do Palmital.

Ordem x_i	Nº de Canais	Áreas* $\sum A_{x_i}$ (Km ²)	\bar{A}_{x_i} (Km ²)*	Comp.Total $\sum L_{x_i}$ (Km)	\bar{L}_{x_i} (Km)
4	1	38.00	38.00	12.30	12.30
3	4	19.78	4.95	7.25	1.82
2	18	19.83	1.10	15.30	0.85
1	82	20.39	0.25	55.50	0.68

Obs: Os dados marcados com (*) foram obtidos do trabalho de CARVALHO (1995).

TABELA 6.2- Parâmetros Físicos da Bacia do Ribeirão Pirapitingui.

Ordem x_i	Nº de Canais	Áreas* $\sum A_{x_i}$ (Km ²)	\bar{A}_{x_i} (Km ²)*	Comp.Total $\sum L_{x_i}$ (Km)	\bar{L}_{x_i} (Km)
4	1	67.00	67.00	10.20	10.20
3	6	51.55	8.59	25.85	4.31
2	33	32.55	0.99	31.55	0.96
1	145	36.34	0.25	93.45	0.64

Obs: Os dados marcados com (*) foram obtidos do trabalho de CARVALHO (1995).

TABELA 6.3 - Parâmetros Físicos da Bacia do Ribeirão do Feijão.

Ordem x_i	Nº de Canais	Áreas $\sum A_{x_i}$ (Km ²)	\bar{A}_{x_i} (Km ²)	Comp.Total $\sum L_{x_i}$ (Km)	\bar{L}_{x_i} (Km)
5	1	142.85	142.85	9.90	9.90
4	3	96.05	32.05	20.75	6.92
3	9	54.67	6.07	16.15	1.79
2	40	198.27	4.96	37.30	0.93
1	172	269.47	1.57	119.30	0.69

6.2 - Parâmetros Geomorfológicos

Os parâmetros geomorfológicos, R_L , R_B e R_A , das bacias hidrográficas são obtidos através dos Diagramas de Horton, representados pelas Figuras 9, 10 e 11, plotando-se o logaritmo neperiano do número de canais, dos valores médios dos comprimentos e das áreas em função da ordem dos canais. Os valores dos parâmetros R_L , R_B e R_A estão reunidos na Tabela 6.3⁴ e são comparados com aqueles obtidos da literatura. Os valores de R_L , R_B e R_A obtidos para as bacias do Ribeirão do Palmital, Ribeirão do Pirapitingui e Ribeirão do Feijão estão dentro dos limites, normalmente, observados na natureza, segundo SMART (1972). Verifica-se que para a Bacia do Ribeirão Pirapitingui, os valores de R_L , R_B e R_A são maiores do que para as Bacias do Ribeirão do Palmital e Ribeirão do Feijão, o que provavelmente ocorre devido a seus canais de ordens mais elevadas apresentarem-se ao longo de toda a bacia de drenagem, exagerando sua importância dentro da análise.

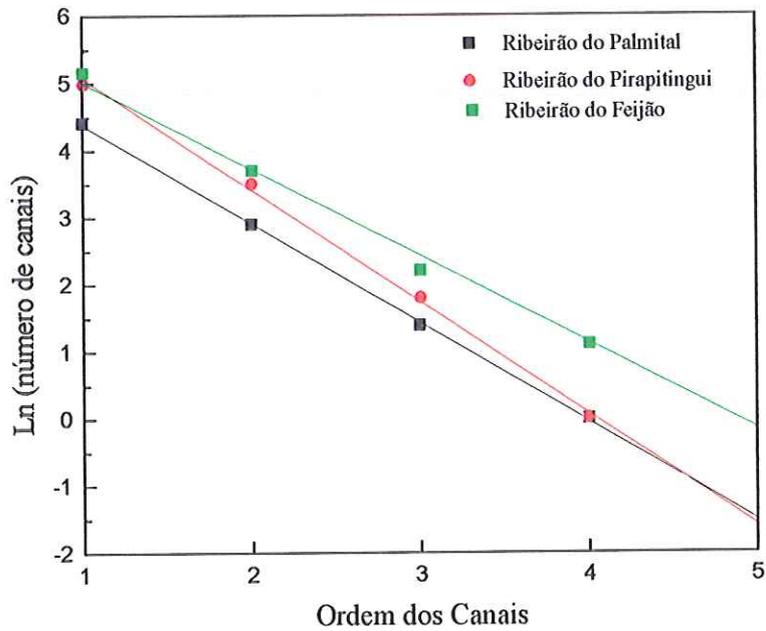


Figura 9 - Diagrama de Horton para a Razão de Bifurcação (R_B) das Bacias Hidrográfica.

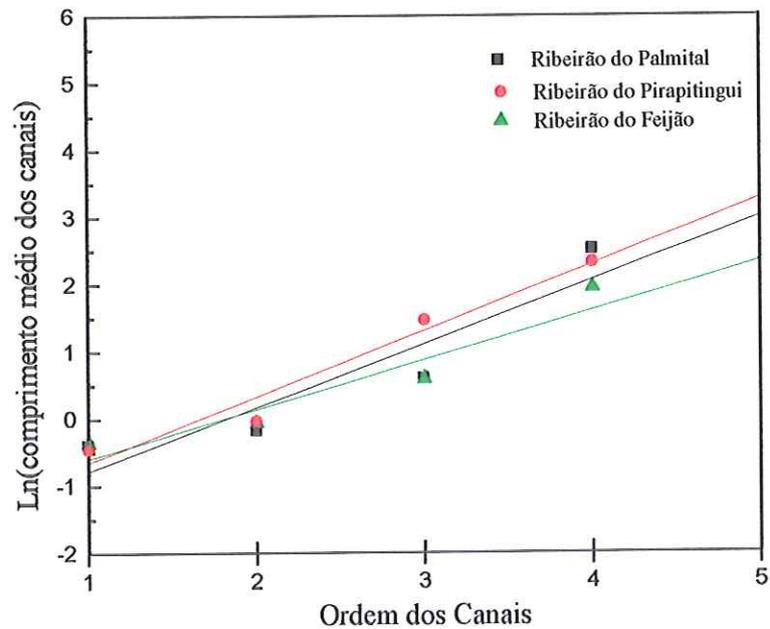


FIGURA 10 - Diagrama de Horton para a Razão de Comprimento (R_L) Bacias Hidrográficas.



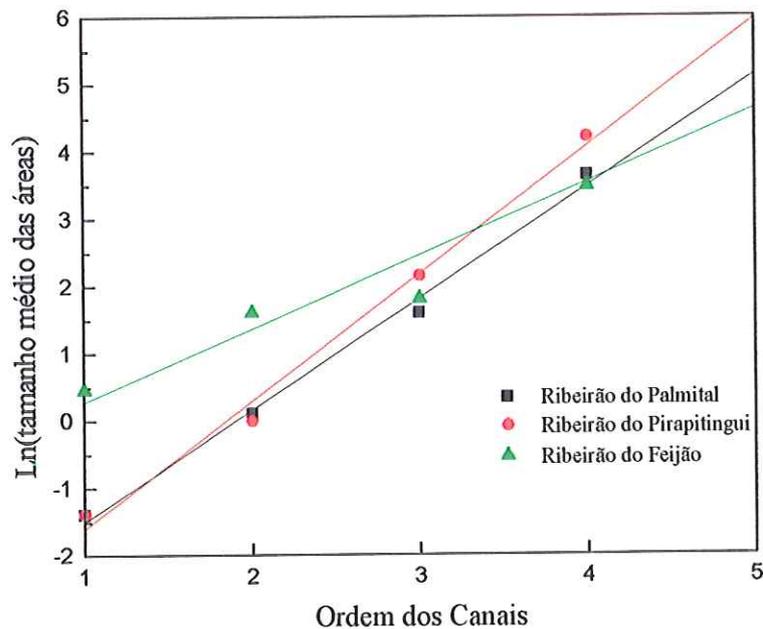


FIGURA 11 - Diagrama de Horton para a Razão de Área de Drenagem (R_A) Bacias Hidrográficas.

TABELA 6.4 - Parâmetros Geomorfológicos das Bacias Hidrográficas.

Bacias Hidrográficas	Razão de Bifurcação (R_B)	Razão de Área (R_A)	Razão de Comprimento (R_L)
Ribeirão do Palmital	4.35	5.26	2.56
Ribeirão Pirapitingui	5.31	6.62	2.66
Ribeirão do Feijão	3.63	3.10	1.95
Faixa de Variação segundo Smart(1972)	3,0 a 5,0	3,0 a 6,0	1,5 a 3,5

6.3 - Cálculo da Dimensão Fractal pelos Métodos Gráficos

A análise fractal das redes de drenagem foi realizada tendo por base os métodos gráficos (Método de Richardson, Método de Box-Counting e Método da Distribuição da Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais) apresentados no trabalho de TARBOTON et al. (1988). Os dados obtidos foram tabelados e plotados em gráficos di-log, e comparados com valores da literatura.

6.3.1 - Método de Richardson

De acordo com este método obteve-se, primeiramente, o comprimento total da rede de drenagem, segundo os tamanhos das réguas estipulados, fazendo-se as considerações necessárias citadas na metodologia, conforme apresentado por TARBOTON et al. (1988). O comprimento total da rede medido com diferentes tamanhos de réguas foi analisado. Verificou-se que o número de canais das diversas ordens reduzia-se à medida que o tamanho da régua aumentava, o que provocou uma redução na ordem da bacia. Porém, para tamanhos de réguas muito próximos, o número de canais não se alterava, logo na análise final considerou-se apenas um dos valores do comprimento total da redes de drenagem, para elaboração e análise do gráfico.

Os dados obtidos estão reunidos no Apêndice I, II e III e plotados no gráfico di-log (Figuras 12, 13 e 14) que relaciona o comprimento total da rede de drenagem e o tamanho das réguas usado, de onde obtêm-se os coeficientes angulares i das retas ajustadas às curvas. A dimensão fractal D é obtida através do expoente da eq.(3.13), ou seja, $D=1-i$. Os valores da dimensão D estão reunidos na Tabela 6.5 e são comparados com aqueles, encontrados por TARBOTON et al. (1988).

TARBOTON et al. (1988) observaram dos gráficos para o método de Richardson que existem duas regiões distintas. A primeira, com $D_1 \approx 1,05$, deve-se à sinuosidade individual dos canais. Isto ocorre em função dos pequenos tamanhos das réguas que percorrem cada canal de forma minuciosa. A segunda, com D_2 próximo de 2, ocorre devido as características de ramificação da rede de canais, o que vem a ser uma consequência dos comprimentos dos canais menores que $r/2$ que não são somados no comprimento final, reduzindo a ordem da bacia. Isto ocorre quando o tamanho da régua aumenta, já que alguns canais são desprezados.

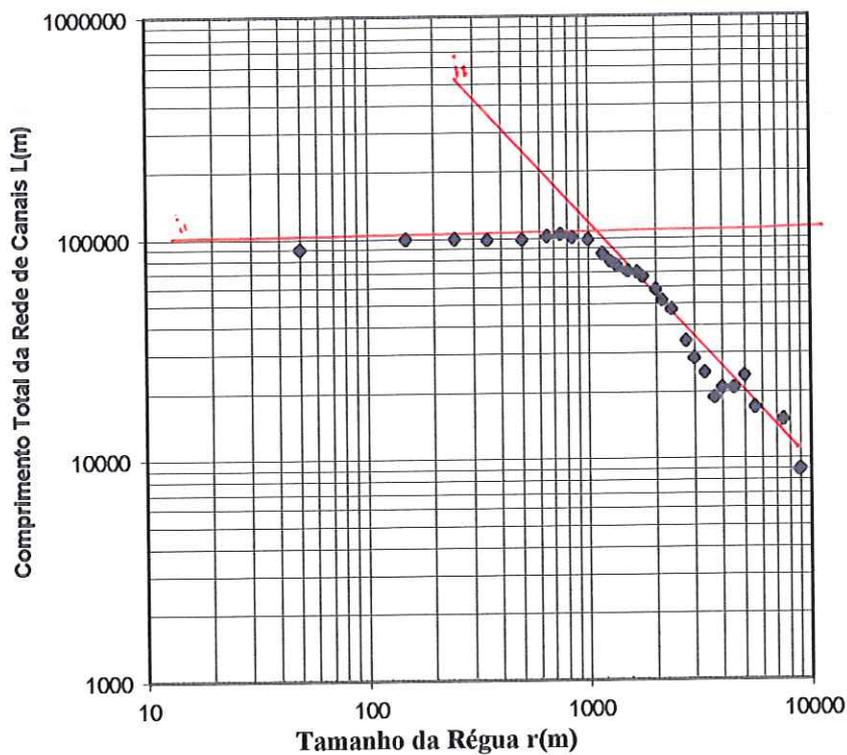


FIGURA 12 - Dimensão fractal D obtida pelo Método de Richardson para a Bacia do Ribeirão do Palmital.

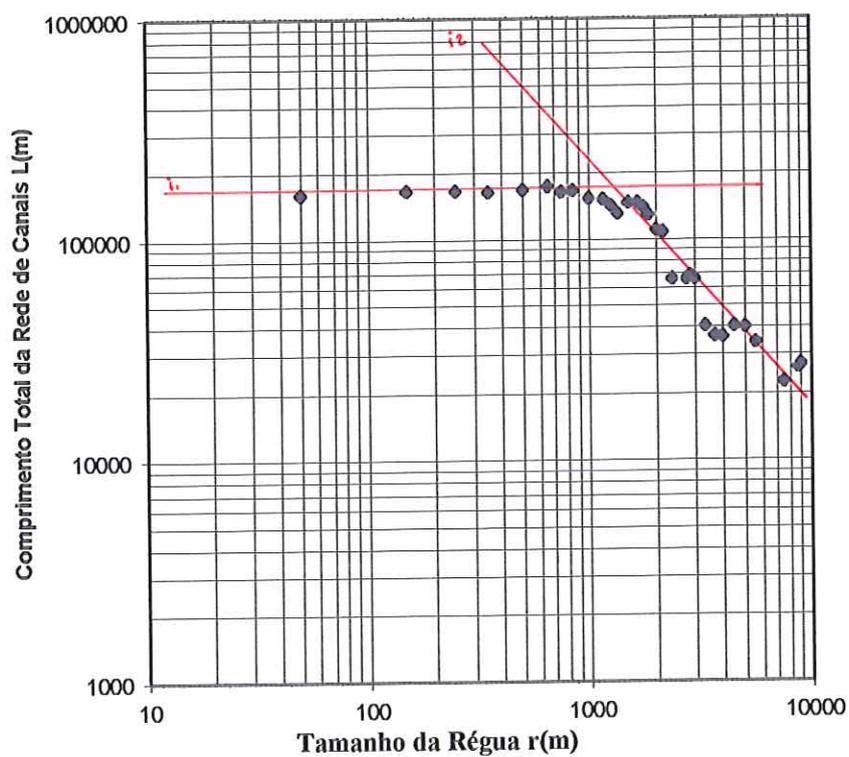


FIGURA 13 - Dimensão fractal D obtida Método de Richardson para a Bacia do Ribeirão Pirapitingui.

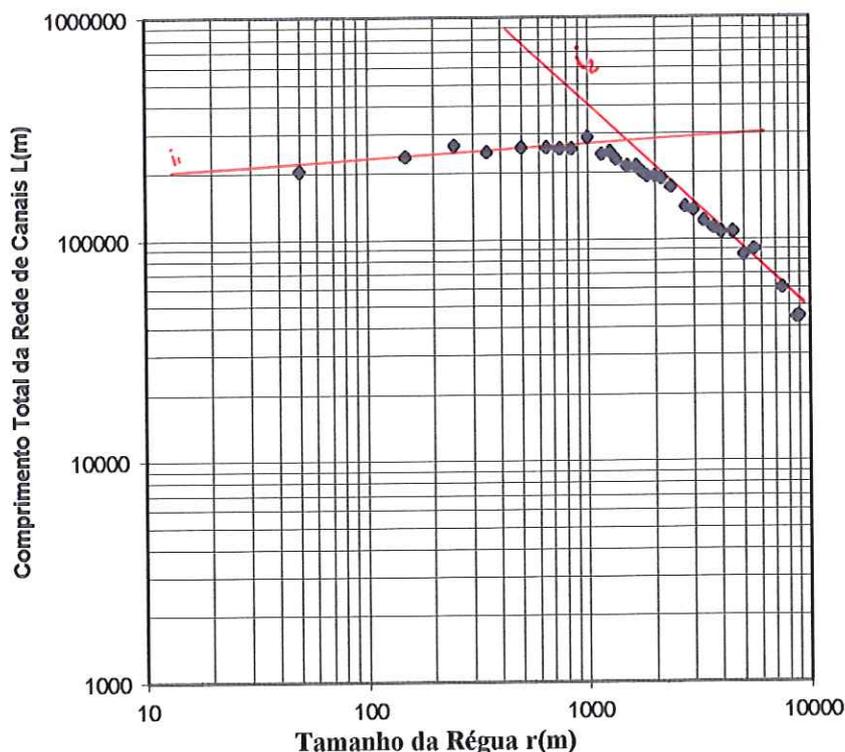


FIGURA 14 - Dimensão fractal D obtida pelo Método de Richardson para a Bacia do Ribeirão do Feijão.

TABELA 6.5 - Valores da Dimensão Fractal pelo Método de Richardson para as Bacias de Drenagem.

Bacias de Drenagem	Coeficiente Angular i		Dimensão Fractal		Dimensão Fractal Total D
	i_1	i_2	D_1	D_2	
Ribeirão do Palmital	0.05	-1.07	0.95	2.07	1.97
Ribeirão Pirapitingui	0.03	-1.04	0.97	2.04	1.98
Ribeirão do Feijão	0.05	-0.87	0.95	1.87	1.78
Soma de 8 redes*	-0.06	-0.79	1.06	1.79	1.90
Souhegan*	-0.04	-0.77	1.04	1.77	1.84
Hubbard*	-0.06	-1.15	1.06	2.15	2.28
W15*	-0.07	-0.92	1.07	1.92	2.20

*Bacias analisadas por TARBOTON et al. (1988).

A dimensão fractal total ou da rede de drenagem, para as Bacias do Ribeirão Pirapitingui ($D=1,98$) e do Ribeirão do Palmital ($D=1,97$) mostram que as redes de drenagem possuem estrutura ramificada distribuída em toda área da bacia hidrográfica. A Bacia do Ribeirão do Feijão, apesar da rede de drenagem cobrir inteiramente sua área, tem o valor da dimensão fractal ($D=1,78$) menor do que aqueles encontrados para as outras duas bacia. Isto, provavelmente ocorre devido as

características heterogêneas da bacia (por exemplo, topografia, solo). Além destas características, pode-se observar através das redes de drenagem apresentadas nos Anexo A, B e C que a rede de drenagem é menos densa na parte inferior da bacia, o que também pode influenciar no cálculo da dimensão fractal.

6.3.2 - Método de Box-Counting

As Figuras 15, 16 e 17 representam os gráficos di-log que relacionam o número de quadrículas necessário para cobrir a rede de drenagem e o tamanho destas quadrículas. Os dados foram reunidos no Apêndice I. A dimensão fractal é obtida a partir do coeficiente angular da reta ajustada e os valores apresentados na Tabela 6.6 são analisados e comparados com aqueles obtidos por **TARBOTON et al. (1988)** pelo método de Box-Counting.

De acordo com este método **TARBOTON et al. (1988)** observaram que ocorrem dois coeficientes angulares distintos para as retas ajustadas. O primeiro, próximo de -1, para as quadrículas de tamanhos pequenos, significando que os canais possuem dimensão próxima da linha reta. Para quadrículas maiores, o coeficiente angular é próximo de 2, significando que praticamente todas as quadrículas estão interceptadas por canais e caracterizando a propriedade da rede ser altamente ramificada.

TABELA 6.6 - Valores da Dimensão Fractal pelo Método de Box-Counting para as Bacias de Drenagem.

Bacias de Drenagem	Inclinação da Reta Ajustada		Dimensão Fractal Total D
	i_1	i_2	
Ribeirão do Palmital	-1.00	-1.42	1.42
Ribeirão do Pirapitingui	-1.00	-1.60	1.60
Ribeirão do Feijão	-1.00	-1.45	1.45
Valores de D segundo TARBOTON et al. (1988)	-1.00	-2.00	2.00

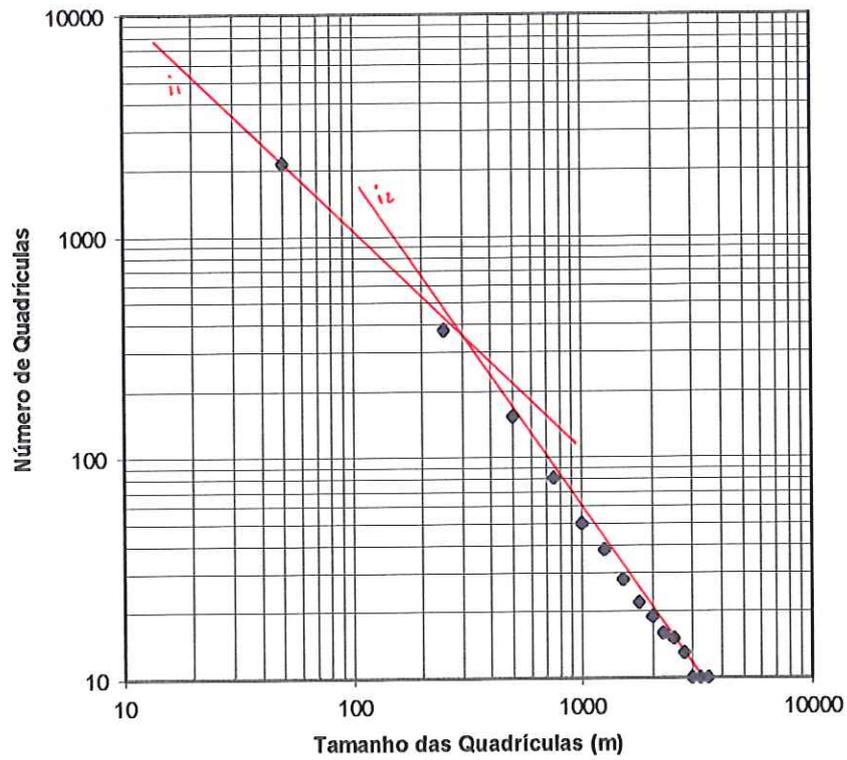


FIGURA 15 - Dimensão fractal D obtida pelo Método Box-counting para a Bacia do Ribeirão do Palmital.

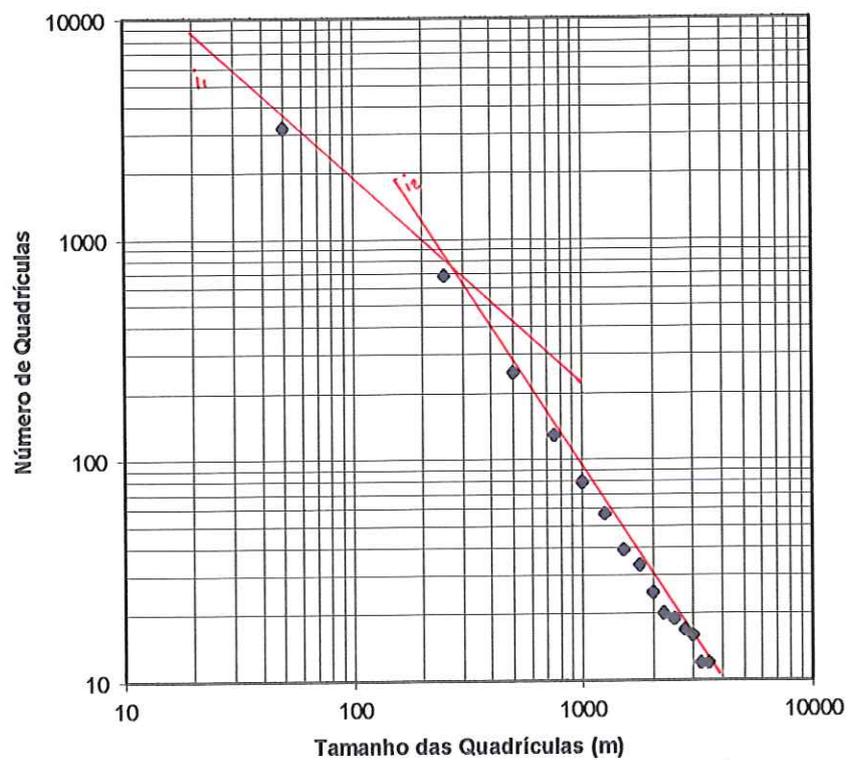


FIGURA 16 - Dimensão fractal D pelo Método de Box-Counting para a Bacia do Ribeirão do Pirapitingui.

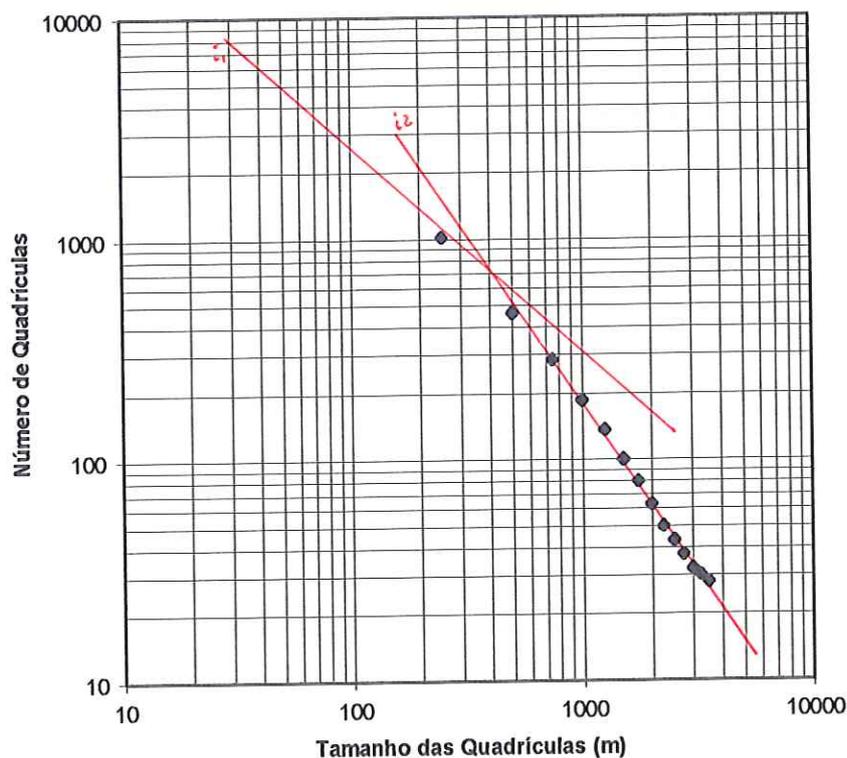


FIGURA 17 - Dimensão fractal obtida pelo Método de Box-counting para a Bacia do Ribeirão do Feijão.

No caso das bacias do Ribeirão do Palmital, Ribeirão do Pirapitingui e Ribeirão do Feijão, os valores da dimensão fractal D discordam daqueles obtidos pelos autores e pelos outros dois métodos aqui utilizados. Conforme sugerido por **TARBOTON (1997)*** analisou-se as rede de drenagem das três bacias, considerando-se apenas as quadrículas da malha que possuísem canais cobrindo totalmente ou pelo menos metade do tamanho da quadrícula. Em seguida estes dados foram plotados. Após a aplicação deste procedimento, observou-se que não ocorreu nenhuma alteração nos valores da dimensão D , em relação àqueles anteriormente calculados. Esta discordância provavelmente é devida ao fato de **TARBOTON et al. (1988)** terem utilizado mapas extraídos de MED's. Assim, todos os dados foram obtidos de pacotes computacionais. Nesta pesquisa, os dados foram obtidos através de mapas do IBGE e retirados manualmente, o que acarretou uma série de pequenas imprecisões. Pode-se concluir que o uso deste método não é indicado para locais onde o mapeamento não

* **TARBOTON, D. (1997). Método de Box-Counting.** E-mail (31/07/1997). *Comunicação pessoal.*

tenha sido feito por MED's. Portanto, em locais onde os mapas sigam os antigos procedimentos de levantamento, deve-se fazer uso de métodos mais robustos.

6.3.3 - Método da Distribuição da Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais

Os Apêndices I, II e III reúnem os dados medidos de comprimentos dos canais de todas as ordens usados na confecção do gráfico di-log (Figura 18, 19 e 20) que relaciona a probabilidade de excedência e o comprimento dos canais da rede de drenagem. A dimensão fractal é o coeficiente angular da reta ajustada a estes dados na parte referente aos grandes comprimentos. Os valores da dimensão D estão reunidos na Tabela 6.7, e são comparados com os valores de *TARBOTON et al. (1988)*.

Pode-se observar que os valores da dimensão fractal D da rede de drenagem são próximos de 2, o que segundo *TARBOTON et al. (1988)*, confirma a hipótese das redes de canais serem vistas como objetos fractais. Para as bacias do Ribeirão do Pirapitingui, Ribeirão do Palmital e Ribeirão do Feijão, os valores da dimensão fractal são 1,97, 1,95 e 1,83, respectivamente. Tais resultados estão dentro da faixa considerada por *LA BARBERA & ROSSO (1989)*, estabelecida para valores entre 1,5 e 2. Entretanto observa-se que o valor da dimensão D para a bacia do Ribeirão do Feijão possui valor menor do que aqueles encontrados para as outras duas bacias. Tal comportamento é resultado da heterogeneidade das propriedades da superfície da bacia, solo arenoso e declividades baixas nos trechos de jusante, conforme observado no Método de Richardson.

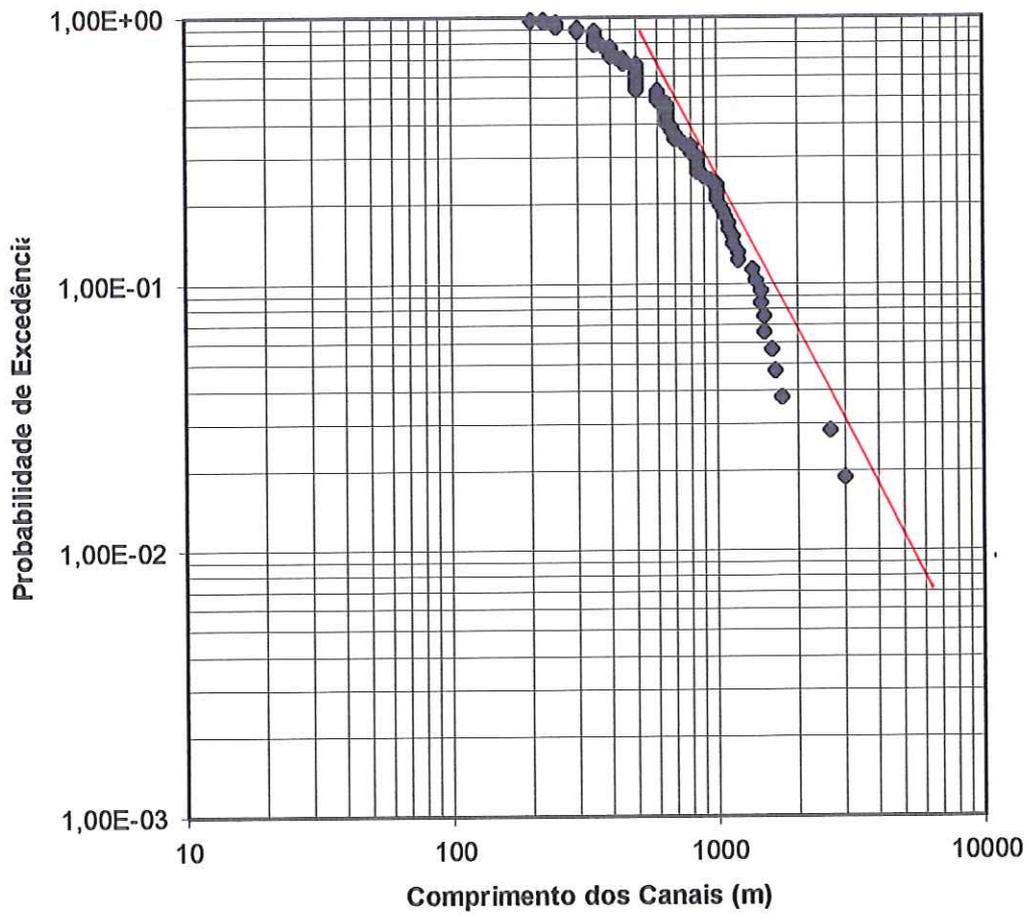


FIGURA 18 - Dimensão fractal obtida pelo Método da Distribuição da Probabilidade da Excedência do Comprimento de Canais para a Bacia do Ribeirão do Palmital.

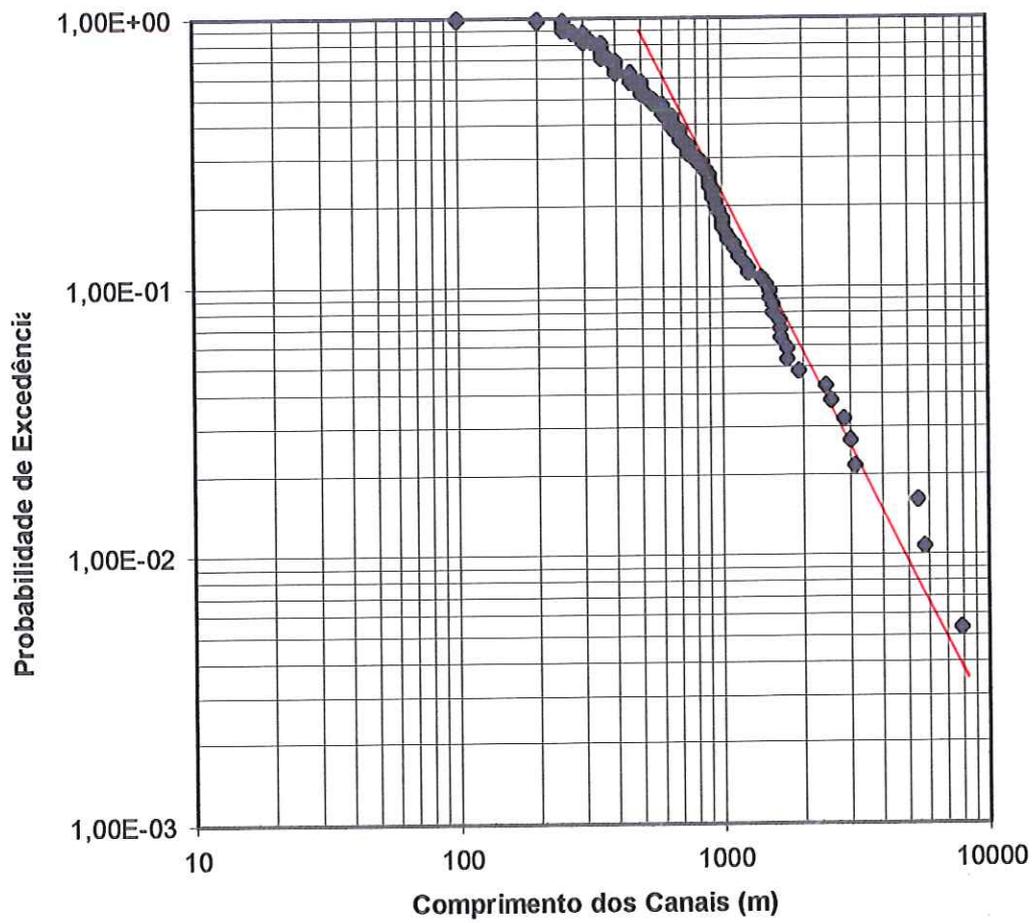


FIGURA 19 - Dimensão fractal obtida pelo Método da Distribuição da Probabilidade da Excedência do Comprimento de Canais para a Bacia do Ribeirão Pirapitingui.

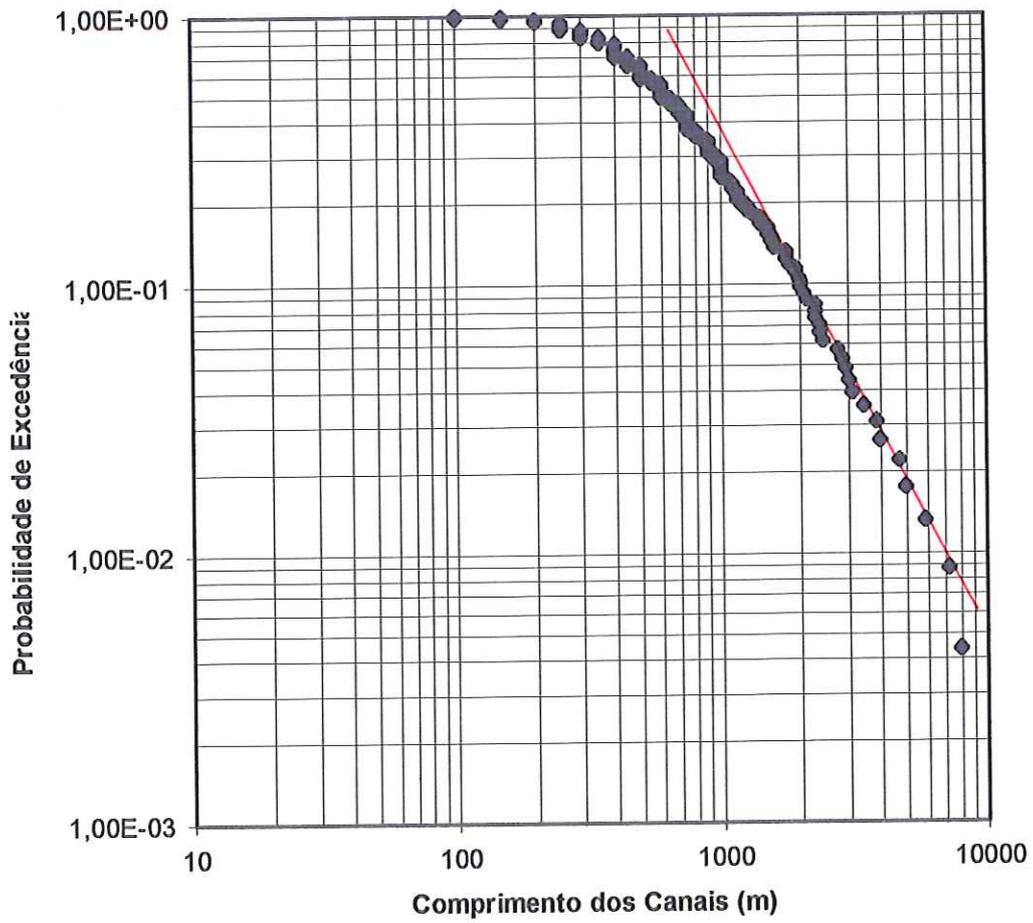


FIGURA 20 - Dimensão fractal obtida pelo Método da Distribuição da Probabilidade da Excedência do Comprimento de Canais para a Bacia do Ribeirão do Feijão.

TABELA 6.7 - Valores da Dimensão Fractal Pelo Método Distribuição da Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais para as Bacias de Drenagem.

Bacias Hidrográficas	Dimensão Fractal Total D
Ribeirão do Palmital	1,97
Ribeirão do Pirapitingui	1,95
Ribeirão do Feijão	1.83

Na Tabela 6.7 encontram-se os resultados obtidos pelos Métodos de Richardson, Método de Box-counting e Método da Distribuição da Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais para as bacias investigadas nesta pesquisa. A dimensão fractal obtida pelos Métodos de Richardson e da Distribuição da Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais para a rede de canais é próxima de 2 para as bacias do Ribeirão do Palmital e Ribeirão Pirapitingui, o que significa que as respectivas redes de canais possuem padrões de ramificação que preenche toda a bacia de drenagem. Para o Bacia do Ribeirão Feijão, o valor de D é menor que 2, porém está dentro da faixa considerada por LA BARBERA & ROSSO (1989). Isto é devido as características heterogêneas desta bacia, o que reduzirá a dimensão D. Analisando os resultados obtidos para bacias do Ribeirão do Palmital, Ribeirão Pirapitingui e Ribeirão Feijão e, comparando-os com aqueles apresentados por TARBOTON et al. (1988) pode-se concluir que as redes de canais, aqui utilizadas, podem ser vistas como objetos fractais. A dimensão fractal, quando estimada pelos diferentes métodos gráficos possuem valores aproximadamente iguais e em alguns casos, tende à dimensão fractal $D=2$. Tal resultado, segundo TARBOTON et al. (1988) é consistente com o fato das redes de canais apresentarem-se cobrindo todo o espaço. Tal afirmação é coerente com a geomorfologia fluvial clássica e com o modelo topologicamente aleatório.

Tabela 6.8 - Valores da Dimensão Fractal obtidos pelos Métodos Gráficos.

Método	Bacias Hidrográficas		
	Ribeirão Palmital	Ribeirão Pirapitingui	Ribeirão do Feijão
Richardson	1.97	1.98	1.78
Box-Counting *	1.42	1.60	1.45
Distr. Probab. de Excedência do Comprimento de Canais	1.97	1.95	1.83

* Valores não considerados na análise das redes de drenagem.

A avaliação do método gráfico ideal para a obtenção da dimensão fractal D é discutível. Qualquer método poderá ser utilizado e seus resultados concordam com aqueles obtidos quando analisados outras redes de drenagem. Porém, o método para a estimativa da dimensão fractal de Box-Counting, deve ser utilizado com cautela como procedimento para determinação da dimensão fractal D , devido a sua inconsistência observada nesta pesquisa.

6.4 - Dimensão Fractal através das Razões de Horton

A dimensão fractal D para as redes de drenagem é também obtida a partir das equações (3.21a) e (3.21b) apresentadas por LA BARBERA & ROSSO (1989). No caso das bacias do Ribeirão do Pirapitingui, Ribeirão do Palmital e Ribeirão do Feijão, os valores de R_B são maiores que os valores de R_L . Logo, para o cálculo da dimensão fractal D foi usada a eq.(3.21a). Os valores da dimensão fractal estão reunidos na Tabela 6.9. Tal equação provém de uma relação da dimensão fractal D e a razão de comprimento R_L . Observa-se o decréscimo da dimensão fractal D quando ocorre o acréscimo de R_L . A Figura 21 mostra as curvas de R_L em função de R_B traçadas para valores de D variando entre 1 e 2. Os valores de R_L e R_B para as bacias do Ribeirão do Pirapitingui, Ribeirão do Palmital e Ribeirão do Feijão estão também plotados na Figura 21.

TABELA 6.9 - Valores da dimensão fractal calculada a partir da eq.(3.21a) e da Figura (21).

Bacias Hidrográficas	Dimensão Fractal	
	Valor Calculado	Valor Gráfico
Ribeirão do Palmital	1.56	1.53
Ribeirão Pirapitingui	1.71	1.60
Ribeirão Feijão	1.93	1.70
Faixa de valores da dimensão fractal observados da Figura (23) segundo LA BARBERA & ROSSO (1989).	1,5 a 2,0	

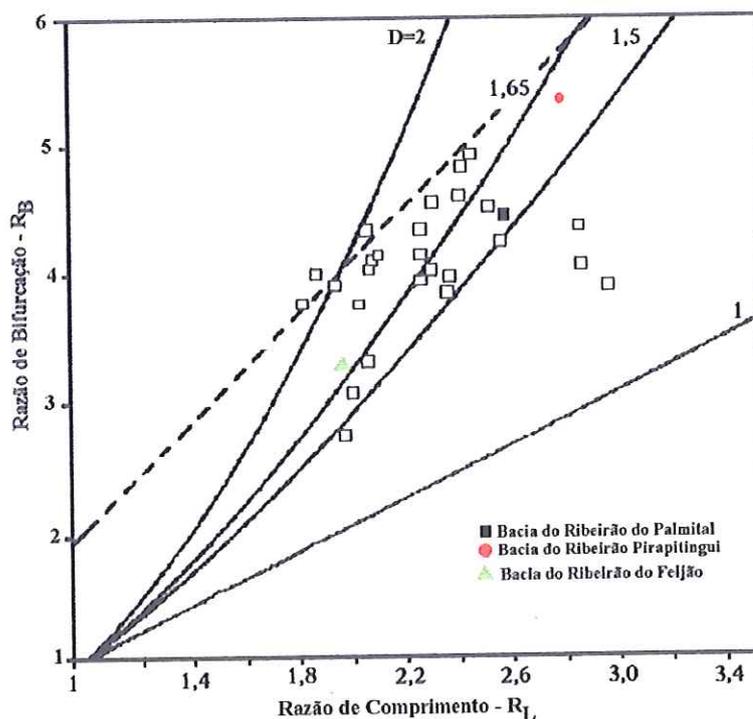


FIGURA 21 - Análise dos valores de R_B e R_L .

Tal observação é também verdadeira para as bacias do Ribeirão do Palmital, Ribeirão Pirapitingui e Ribeirão do Feijão (Figura 21), que possuem seus valores confinados dentro desta faixa.

Observa-se que a dimensão fractal é igual a 2 para $R_L = R_B^{1/2}$. A curva tracejada representa a relação entre a razão de comprimento R_L e a razão de bifurcação R_B como sendo $R_L \cong R_B/2$. É possível verificar que a dimensão fractal não tende a um valor constante mas seu valor está confinado entre 1,5 e 2.

Os dados plotados na Figura 21 foram reproduzidos de LA BARBERA & ROSSO (1989) e representam dados de diferentes origens e localizações geográficas. Observando o gráfico percebe-se que as redes de canais naturais têm dimensão fractal D , geralmente, entre 1,5 e 2.

A dimensão fractal D foi estimada como 2 por LA BARBERA & ROSSO (1989) como uma tentativa inicial de compreender o suporte da fractalidade das redes de canais. Os autores verificaram que as restrições topográficas, geológicas e hidrológicas podem reduzir o grau de fractalidade das redes. Este fato é observado quando analisou-se as bacias em estudo, já que os valores obtidos estão entre 1,5 e 2

(1,56; 1,71 e 1,93). Porém, para as bacias do Ribeirão do Palmital e Ribeirão do Pirapitingui, o valor da dimensão D decresce em função do acréscimo da razão de comprimento R_L . Para a bacia do Ribeirão do Feijão tem o valor da dimensão fractal D superior àqueles encontrados para as outras bacias devido ao valor de R_L ser inferior aos demais. Além disso, esta bacia possui uma maior heterogeneidade em suas características superficiais (por exemplo, solo arenoso e baixas declividades nas áreas a jusante, o que segundo LIU (1992) pode fazer com que haja decréscimo no valor de D).

O valor para a dimensão fractal igual a 2 descreve a rede de drenagem com características de ramificação em todo o espaço. Este resultado corresponde aos valores modais das razões de ordenação de Horton para topologia aleatória. Porém, o modelo aleatório para composição das redes de canais (SMART, 1968, 1972) mostra a rede de drenagem preenche todo o espaço, quando não há nenhum tipo de restrição. Entretanto, as restrições estão presentes nas redes de canais naturais, logo a dimensão fractal da rede de drenagem é menor que 2. Os resultados apresentados provêm de uma representação matemática simples das propriedades de escala das redes de canais sobre o padrão de escalas. Isso direciona o conceito de dimensão fractal para limites assintóticos de comprimentos infinitamente pequenos.

ROSSO et al. (1991) obtiveram a dimensão fractal para o canal principal (D_{cp}) e para a rede de drenagem (D) das bacias analisadas por meio das razões de Horton. As bacias do Ribeirão do Palmital, Ribeirão Pirapitingui e Ribeirão do Feijão são analisadas a partir das observações feitas pelos autores. Os valores da dimensão D para o canal principal e para a rede de drenagem estão reunidos na Tabela 6.10.

TABELA 6.10 - Valores da Dimensão Fractal para o canal principal e a rede de drenagem.

Bacias Hidrográficas	Dimensão Fractal do Canal Principal D_{cp}	Dimensão Fractal da Rede de Drenagem D
Ribeirão do Palmital	1.13	1.77
Ribeirão Pirapitingui	1.04	1.77
Ribeirão do Feijão	1.35	2.00

Os valores das dimensões D_{cp} e D , calculados através das eq.(3.24) e (3.25), são compatíveis com os valores encontrados por ROSSO et al. (1991). Os resultados

de D_{cp} obtidos para as bacias do Ribeirão do Palmital, Ribeirão Pirapitingui e Ribeirão do Feijão são coerentes aos valores obtidos por ROSSO et al. (1991), que estão dentro da faixa $1,12 \pm 0,08$. A dimensão fractal D para as redes de drenagem em estudo mostra valores compatíveis com aqueles apresentados por outros autores. As redes de drenagem podem ser consideradas objetos fractais como sugerido por MANDELBROT apud ROSSO et al. (1991). E, podem ser associadas às razões de Horton. Observando-se os valores da dimensão D para a bacia do Ribeirão do Palmital, Ribeirão do Pirapitingui e Ribeirão do Feijão, verificou-se que estes estão dentro da faixa estimada por LA BARBERA & ROSSO (1989). Porém a bacia do Ribeirão do Feijão apresenta a dimensão D superior (Tabela 6.10) às demais. Pode-se justificar tal comportamento ao analisar-se as características de cada bacia. Então, observa-se que a bacia do Ribeirão do Feijão possui heterogeneidade em suas características, influenciando no valor da dimensão fractal D , como mostrado anteriormente. A dimensão fractal D pode ser relacionada a uma dedução analítica que reúne pequenas irregularidades e a estrutura de composição das redes de drenagem.

A análise da dimensão fractal das redes de drenagem através das razões de Horton foi também realizada a partir do trabalho de LIU (1992). Várias dimensões fractais foram calculadas para as bacias do Ribeirão do Palmital, Ribeirão Pirapitingui e Ribeirão do Feijão e comparadas com os valores médios apresentados por LIU (1992). Os resultados estão na Tabela 6.11.

TABELA 6.11 - Valores das Diversas Dimensões Fractais

Bacias Hidrográficas	Valores das Diversas Dimensões Fractal					
	D (eq.3.28)	D_t	D_m	D_w	D_s	$D=D_t D_m$
Ribeirão do Palmital	1.77	1.56	1.13	2.90	1.22	1.77
Ribeirão Pirapitingui	1.77	1.71	1.04	2.8	1.26	1.77
Ribeirão do Feijão	2.28	1.95	1.18	3.48	1.32	2.30
Valores médios das dimensões fractais LIU (1992)	1,82 \pm 0,07	1,55 \pm 0,28	1,20 \pm 0,20	3,20 \pm 0,20	1,21 \pm 0,09	-

LIU (1992) pesquisou algumas redes de canais naturais, analisadas por MORISAWA (1962) e, observou uma certa distorção nos valores da dimensão fractal

para determinadas redes de drenagem. Tal distorção é também verificada para as redes de drenagem do Ribeirão do Palmital, Ribeirão Pirapitingui e Ribeirão do Feijão e refere-se a valores da dimensão fractal (exceto D_w) maiores que 2. Pode-se observar tal fato para a bacia do Ribeirão do Feijão que apresenta os valores da dimensão fractal maiores que 2.

Teoricamente, as redes de canais são fractais embutidos em um espaço bidimensional e suas dimensões fractais podem ser iguais ou maiores que 1 e iguais ou menores que 2. Baseando-se nas observações do autor, concluiu-se que a distorção nos valores da dimensão fractal é devido a fatores tais como litologia das rochas e estruturas geológicas da bacia. No caso das bacias do Ribeirão do Palmital e Ribeirão do Pirapitingui, os valores das dimensões fractais estão dentro da faixa de valores médios apresentados na Tabela 6.11. Para a bacia do Ribeirão do Feijão ocorrem valores das dimensões fractais maiores que 2. É possível verificar que esta possui características heterogêneas (litologia, solo, declividade) em toda a área de drenagem. Tais fatores afetam a estimativa das dimensões fractais, fazendo com que seus valores sejam maiores.

Pode-se verificar a validade desta observação através da Tabela 6.9, que apresenta os valores de D segundo LA BARBERA & ROSSO (1991). Onde verifica-se que para a bacia do Ribeirão do Feijão, o valor da dimensão D é maior do que os valores obtidos para as outras duas bacias. Porém este valor permanece dentro da faixa estimada (1,5 e 2).

6.4.1 - Comparação dos Valores da Dimensão Fractal obtida pelas Diferentes Análises

As dimensões fractais para as redes de drenagem, apresentadas nas Tabelas 6.1 a 6.11, são obtidas por diferentes análises. Apesar disto, é possível verificar que existe uma aproximação entre os resultados, pois em sua maioria estão dentro de uma mesma faixa de valores. A Tabela 6.12 apresenta o conjunto de valores obtidos pelas diferentes análises.

Nota-se que os métodos gráficos de Richardson e da Distribuição da Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais sugerem que as rede de

canais possuem uma estrutura ramificada distribuída em toda sua área. A dimensão fractal é próxima de 2 para as bacias do Ribeirão do Palmital e Ribeirão do Pirapitingui. A bacia do Ribeirão do Feijão possui o valor da dimensão fractal reduzido, o que provavelmente ocorre como consequência de suas características distintas e também pela pouca densidade de canais na parte inferior à jusante. Apesar da aplicação do método de box-counting ter sido feita de forma correta, houve uma distorção nos valores estimados da dimensão fractal. Logo os resultados encontrados por este método não foram comparados nesta pesquisa com os demais.

TABELA 6.12 - Valores da Dimensão Fractal para a Rede de Drenagem.

Métodos de Obtenção da Dimensão Fractal	Valores da Dimensão Fractal		
	Bacia do Ribeirão do Palmital	Bacia do Ribeirão Pirapitingui	Bacia do Ribeirão do Feijão
Richardson	1.97	1.98	1.78
Box-counting	1.42	1.60	1.45
Distr. da Probab. de Excedência do Comp. de Canais	1.97	1.95	1.83
$D = \frac{\log R_B}{\log R_L}$ (eq.(3.21))	1.56	1.71	1.93
$D = \min\left(2, 2 \frac{\log R_B}{\log R_A}\right)$ (eq.(3.25))	1.77	1.77	2.00
Figura (21): Gráfico dos Valores de R_L em função de R_B	1.53	1.60	1.70
$D = 2 \frac{\log R_B}{\log R_A}$ eq.(3.27)	1.77	1.77	2.28
$D = D_l D_m$	1.77	1.77	2.30

A análise fractal das redes de drenagem foi realizada também através das Leis de Horton e, forneceu valores da dimensão fractal D coerentes com aqueles apresentados na literatura. Porém, verifica-se que para a bacia do Ribeirão do Feijão, os valores da dimensão D são maiores que aqueles encontrados para as outras duas bacias. Entretanto, encontram-se dentro da faixa estimada por LA BARBERA & ROSSO (1989). Tal observação é confirmada quando, analisa-se as bacias segundo estes autores, através da eq.(3.21) ou do gráfico de R_L em função de R_B . Observa-se que a faixa de valores, apresentada pelos autores, é aquela na qual localizam-se as redes de canais naturais. Os resultados obtidos para dimensão fractal D , via razões de Horton e métodos gráficos, são comparáveis entre si. Entretanto, LIU (1992) explica

a razão pela qual a dimensão fractal D , obtida via razões de Horton, é maior para certas bacias, como por exemplo, a bacia do Ribeirão do Feijão. Segundo este autor, a estimativa de D superior a 2 é consequência das características da bacia como, litologia do leito rochoso e geologia.

Conclui-se, então, que a análise, pelos métodos gráficos e via razões de Horton, para bacias de drenagem viabiliza a identificação das bacias hidrográficas como objetos fractais.

6.5 - Análise da Auto-Similaridade e da Auto-Afinidade

Baseando-se no trabalho de NIKORA (1994), a análise da auto-similaridade e da auto-afinidade das bacias do Ribeirão do Palmital, Ribeirão do Pirapitingui e Ribeirão do Feijão foi realizada. Na Tabela 6.13 acham-se os valores das relações entre as razões de Horton (R_B , R_L , R_A) e as dimensões de similaridade e lacunaridade, D_s e D_L .

Para analisar a auto-similaridade utiliza-se a igualdade $R_B = R_L^{D_s} = D_w^{D_s} = R_A^{D_s/2}$. Verifica-se a auto-similaridade quando $R_w = R_L$ e, a igualdade não é violada.

TABELA 6.13 - Valores da igualdade $R_B = R_L^{D_s} = R_w^{D_s} = R_A^{D_s/2}$.

Bacias Hidrográficas	R_w	D_s	R_B	$R_L^{D_s}$	$R_w^{D_s}$	$R_A^{D_s/2}$
Ribeirão do Palmital	2.05	1.56	4.35	4.35	4.35	3.66
Ribeirão do Pirapitingui	2.49	1.71	5.31	5.31	5.31	5.02
Ribeirão do Feijão	1.59	1.93	3.63	3.63	3.63	1.91

Analisando-se a tabela acima, observa-se que a igualdade é apenas parcialmente validada para as bacias em estudo. Logo a auto-similaridade não é confirmada de forma clara.

A auto-afinidade é testada utilizando-se a igualdade $R_B = R_L^{D_{long}} = R_w^{D_w} = R_A^{D_{long} D_w / (D_{long} + D_w)}$, onde $D_{long} = D_w = D_s$. Na Tabela 6.14 reúnem-se os valores para verificação desta a igualdade. Observa-se que a validade da igualdade é comprovada, apesar de existir uma pequena e desprezível variação entre

os termos. A auto-afinidade é também confirmada quando analisa-se o índice de Hurst H que deve ser menor que 1.

TABELA 6.14 - Valores da igualdade $R_B = R_L^{D_{long}} = R_w^{D_w} = R_A^{D_{long}D_w/(D_{long}+D_w)}$

Bacias Hidrográficas	H	D_w	D_{long}	R_B	$R_L^{D_{long}}$	$R_w^{D_w}$	$R_A^{D_{long}D_w/(D_{long}+D_w)}$
Ribeirão do Palmital	0.76	2.05	1.56	4.35	4.33	4.36	4.35
Ribeirão do Pirapitingui	0.93	1.83	1.71	5.31	5.33	5.31	5.32
Ribeirão do Feijão	0.69	2.78	1.93	3.63	3.63	3.63	3.63

Considerando que o processo de formação da bacia de drenagem é determinado pela força de gravidade, pode-se esperar que a auto-afinidade entre as bacias de drenagem seja mais provável que a auto-similaridade. Segundo NIKORA (1991), não existem regras que garantam a observação da auto-similaridade para determinados padrões de escala, o que poderá vir a ser objeto de pesquisas futuras.

7 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Nesta pesquisa foram analisadas três redes de drenagem do estado de São Paulo - Bacia do Ribeirão do Palmital, Bacia do Ribeirão do Pirapitingui e Bacia do Ribeirão do Feijão, com a finalidade de revelar a natureza fractal dessas redes. Assim, pode-se concluir que:

- i. Os resultados obtidos pelos Métodos de Richardson e da Distribuição de Probabilidades de Excedência do Comprimento de Canais, para as redes de canais do Ribeirão do Palmital e Ribeirão do Pirapitingui, possuem valores próximos de 2 sugerindo que essas redes possuem um padrão de ramificação que cobre toda a área de drenagem;
- ii. Para a Bacia do Ribeirão do Feijão, o valor da dimensão D é menor que 2, pelos métodos gráficos; entretanto, tal valor está dentro da faixa proposta por LA BARBERA & ROSSO (1989) - 1,5 e 2. A redução do valor da dimensão D deve-se às características locais heterogêneas dessa bacia;
- iii. Os resultados da dimensão fractal D , obtidos para as bacias hidrográficas pelo método de Box-Counting, discordam daqueles apresentados na literatura. Pode-se supor que essa discordância deve-se ao fato dos pesquisadores terem utilizado mapas elaborados por MED's e o processo ter sido executado por pacotes computacionais;
- iv. Os valores da dimensões fractais D obtidos para as Bacia do Ribeirão do Palmital, Bacia do Ribeirão do Pirapitingui e Bacia do Ribeirão do Feijão, quando comparados com aqueles encontrados por TARBOTON et al. (1988), sugerem que essas bacias podem ser vistas como objetos fractais;
- v. Os resultados obtidos são coerentes com a geomorfologia clássica e com o modelo topologicamente aleatório;

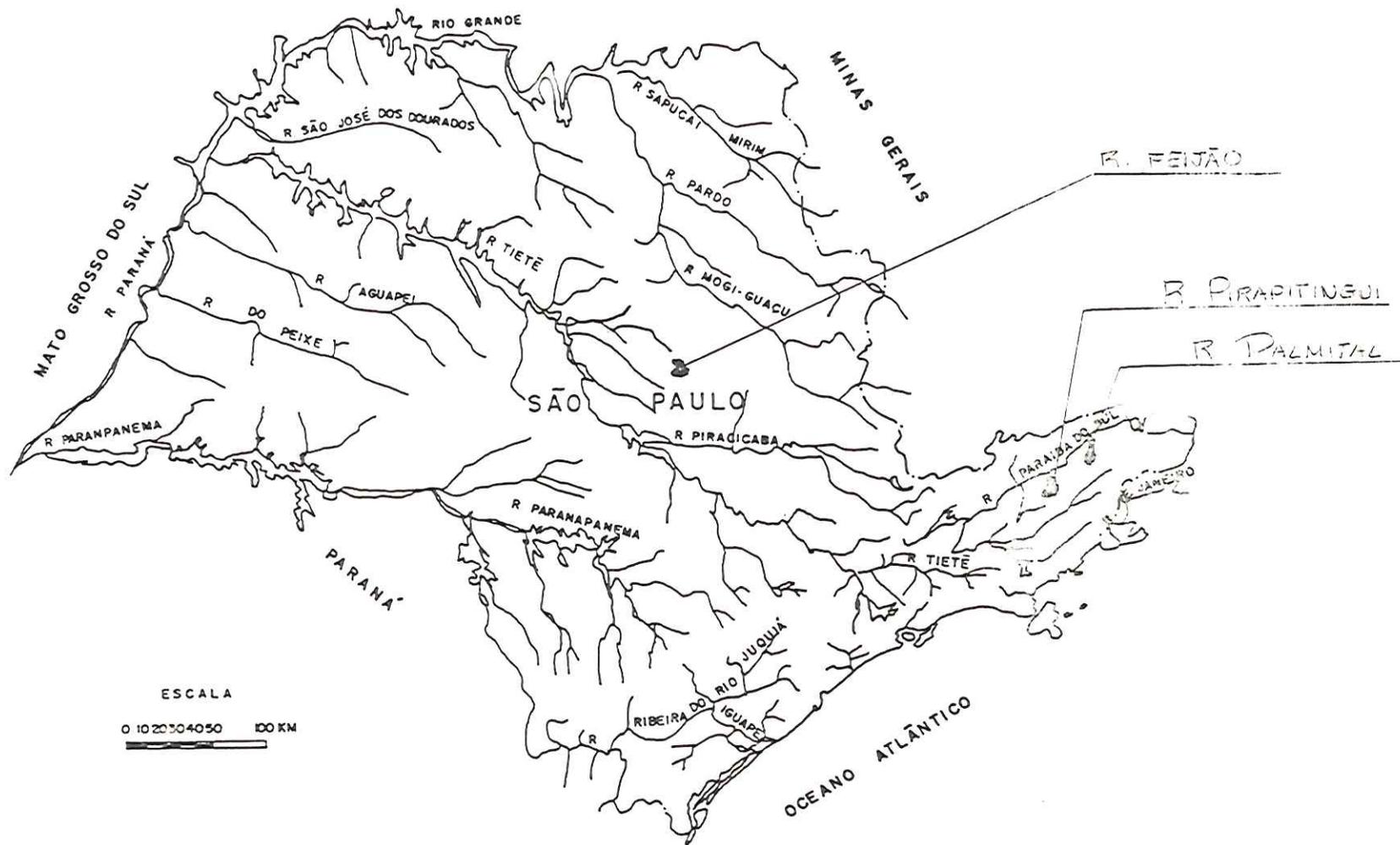
- vi. A dimensão fractal, calculada através das razões de Horton, para as bacias estudadas, está dentro da faixa de valores propostos por LA BARBERA & ROSSO (1989), para as redes de canais naturais;
- vii. Verificou-se que as restrições locais afetam o valor da dimensão fractal das redes de drenagem;
- viii. Comparando-se os valores das dimensões fractais D , calculados pelos métodos gráficos e pelas razões de Horton, verificou-se a possibilidade de analisar as bacias hidrográficas como objetos fractais;
- ix. Foram analisadas propriedades de auto-similaridade e auto-afinidade das bacias de drenagem, nessa análise e verificou-se que a ocorrência da auto-afinidade é mais provável na natureza do que a auto-similaridade.

Para futuros trabalhos de pesquisa em continuidade com a pesquisa aqui desenvolvida, sugere-se:

- i. Investigação mais aprofundada do Método de Box-Counting;
- ii. Estimativa das dimensões fractais das redes de drenagem avaliadas através de imagens de satélites;
- iii. Estimativa das dimensões fractais das redes de drenagem avaliadas através de fotografias aéreas;
- iv. Análise comparativa das estimativas de dimensões fractais obtidas por imagens de satélites, fotografias aéreas e mapas topográficos;
- v. Investigação da propriedade de auto-similaridade entre bacias de drenagem.

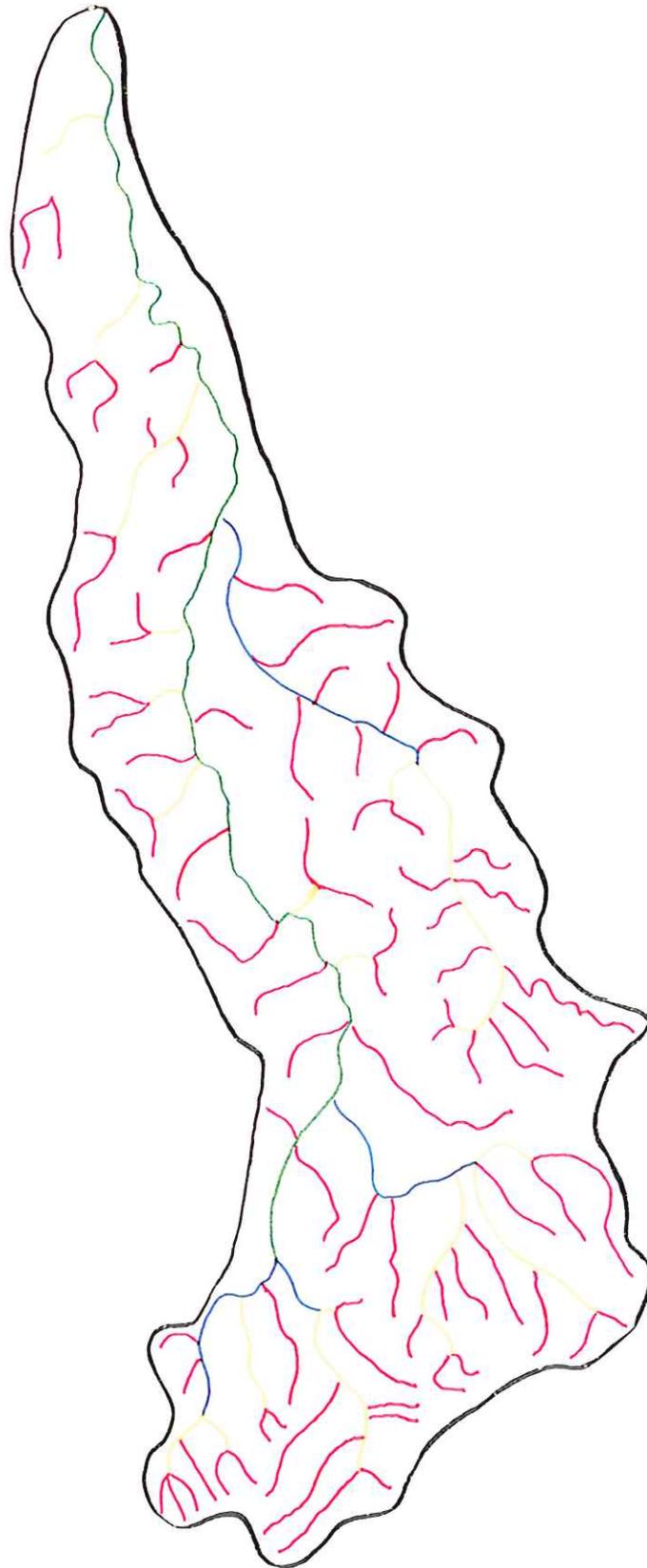
ANEXO A

Localização das Bacias Hidrográficas no Estado de São Paulo



ANEXO B

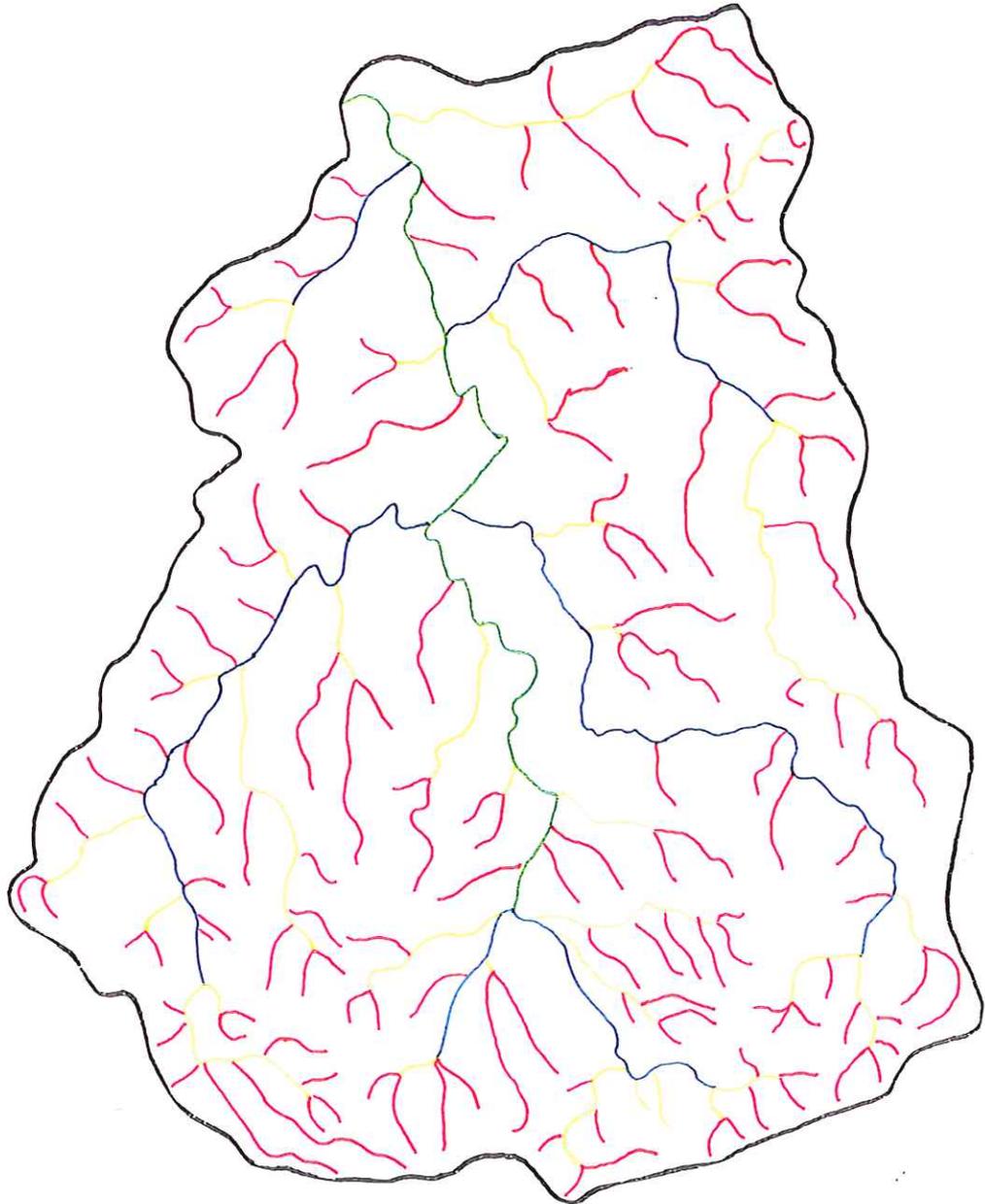
Rede de Drenagem da Bacia Hidrográfica do Ribeirão do Palmital



- 1ª Ordem
- 2ª Ordem
- 3ª Ordem
- 4ª Ordem

ANEXO C

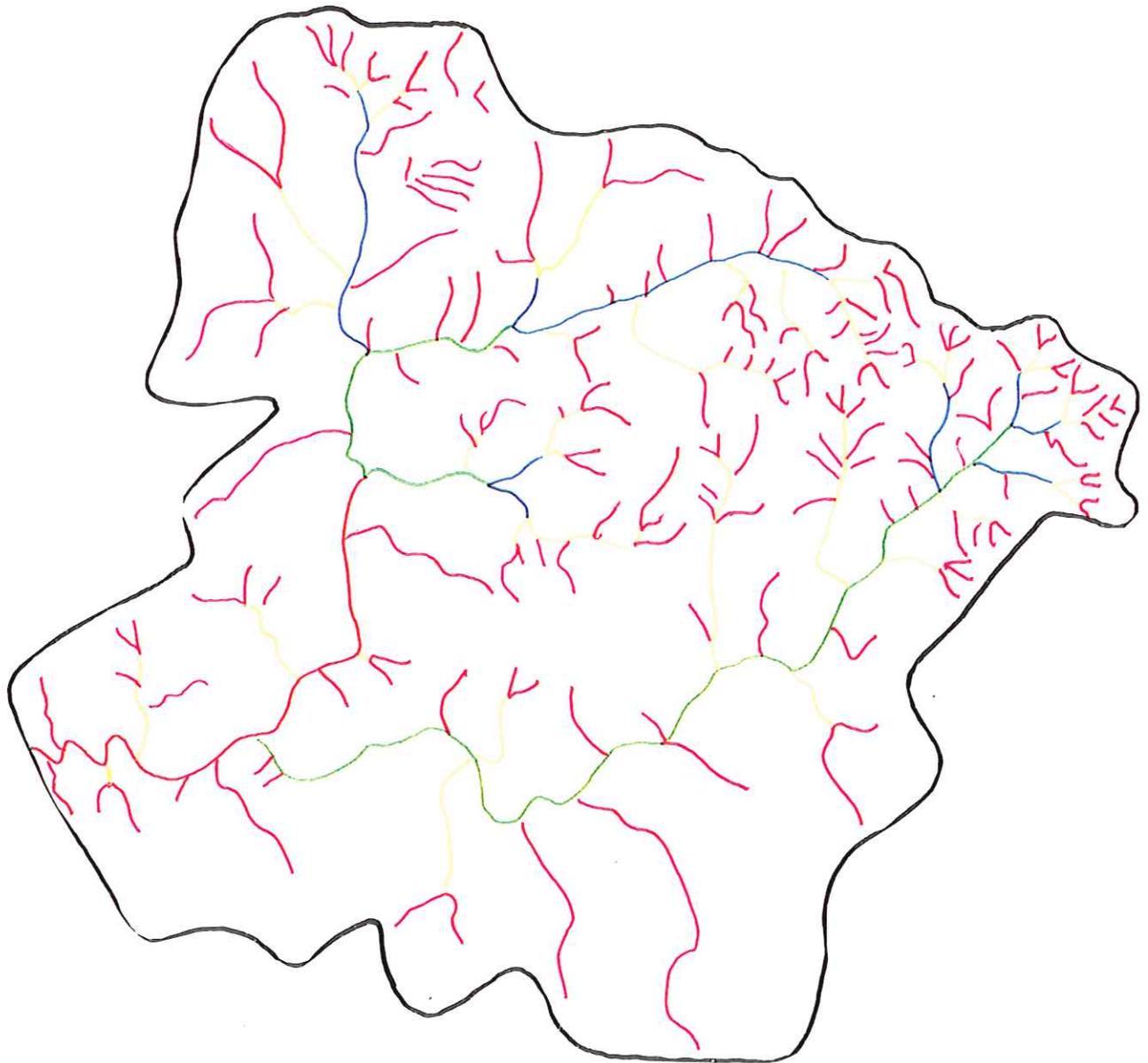
Rede de Drenagem da Bacia Hidrográfica do Ribeirão do Pirapitingui



- 1ª Ordem
- 2ª Ordem
- 3ª Ordem
- 4ª Ordem

ANEXO D

Rede de Drenagem da Bacia Hidrográfica do Ribeirão do Feijão



- 1ª Ordem
- 2ª Ordem
- 3ª Ordem
- 4ª Ordem
- 5ª Ordem

8 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BRANDERHORST, T. & PETERSON, W. (1993). *Fractais para Windows*. Rio de Janeiro. Berkeley Brasil Editora. 334p.
- BRASIL. Secretaria de Planejamento da Presidência da República. (1974). *Mapa Topográfico*: Folhas SF - 23 - Z - A -IV -1, SF - 23 - Y - D -III -1, SF - 23 - Y - B - VI - 3, SF - 23 - Z - A -IV - 3 e SF - 23 - Z - A -I -1. Rio de Janeiro, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) - Superintendência de Cartografia. Escala 1:50.000.
- CARVALHO, M. A. (1995). *Aplicação de hidrogramas unitários geomorfológicos na previsão de respostas hidrológicas*. São Carlos. 203p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- GUPTA, V. K., WAYMIRE, E.; RODRIGUEZ-ITURBE, I. (1986). Runoff generation and hydrologic response via channel network geomorphology; Recent progress and open problems. *J. Hydrol.*, v.102, n.1-4, p.3-28.
- HELMLINGER, K.R., KUMAR, P.; FOUFOULA-GEORGIU, E. (1993). On the use digital elevation model data for Hortonian and fractal dimension of stream networks. *Water Resour. Res.*, v.29, n8, p.2599-2613.
- LA BARBERA, P.; ROSSO, R. (1987) Fractal geometry of river networks. *Eos Trans.*, v.68, n:44, p.1276.
- LA BARBERA, P.; ROSSO, R. (1989). On Fractal Dimension of Stream Networks. *Water Resour. Res.*, v.25, n.4, p.753-741.
- LIU, T. (1992). Fractal Structure and Properties of Stream Networks. *Water Resour. Res.*, v.28, n.11, p.2981-2988.
- MANDELBROT, B.B. (1977). *The Fractal Geometry of Nature*. New York, W.H. Freeman and Company.
- MANDELBROT, B.B. (1986). *The fractal geometry of nature*. New York, W.H. Freeman and Company.
- MARANI, A., RIGON R.; RINALDO, A. (1991). A note on fractal channel networks. *Water Resource Research*, v.27, n.12, p.3041-3049.

- NIKORA, V.I. (1991). Fractal structure of river plan forms. *Water Resour. Res.*, v.27, n.6, p.1327-1333.
- NIKORA, V.I. (1991). On self-similarity and self-affinity of drainage basins. *Water Resour. Res.*, v.27, n.6, p.1327-1333.
- PONÇANO, W. L., CARNEIRO, C. D. R., BISTRICHI, C. A., ALMEIDA, F. F. M.; PRANDINI, F. L. (1981). *Mapa geomorfológico do estado de São Paulo*. v.1, Monografia. 94p. Divisão de Minas e Geologia Aplicada - Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo (IPT).
- PONÇANO, W. L., CARNEIRO, C. D. R., BISTRICHI, C. A., ALMEIDA, F. F. M.; PRANDINI, F. L. (1981). *Mapa geomorfológico do estado de São Paulo*. v.2, Monografia. Divisão de Minas e Geologia Aplicada - Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo (IPT).
- RINALDO, A., RIGON, R.; MARANI, M. (1991). Geomorphological dispersion. *Water Resour. Res.*, v.27, n.4, p.513-525.
- ROSSO, R., BACCHI, B.; LA BARBERA, P. (1991). Fractal relation of mainstem length to catchment area in river networks. *Water Resour. Res.*, v.27, n.3, p.381-387.
- SMART, J. S. (1968). Statistical properties of stream lengths. *Water Resour. Res.*, n.4, p.1001-1013.
- SMART, J. S. (1972). Channel networks. *Advances in Hydrosience*, v.8, p.308.
- TARBOTON, D.G., BRAS, R. L. RODRIGUEZ-ITURBE, I. (1988). The fractal nature of river networks. *Water Resour. Res.*, v.24, n.8, p.1317-1322..

9 - OBRAS CONSULTADAS

- BEER, T., (1991). Comment "On the fractal interpretation of the mainstream length-drainage area relationship" by A.Robert e A.G.Roy. *Water Resour. Res.*, v.27, n.9, p.2487-2488.
- CHRISTOFOLETTI, A. (1981). *Geomorfologia fluvial*. São Paulo, Blücher, v.1, 313p.
- FALCONER, J. (1990). *Fractal geometry - Mathematical foundations and applications*. England, John Wiley & Sons. 288p
- FALCONER, J.; LEYMARIE, P. (1991). Drainage networks form grid digital elevations models. *Water Resour. Res.*, v.27, n.10, p.2809.
- KARLINGER, M.R.; TROUTMAN, B. M. (1992). Fat fractal scaling of drainage networks from a random spatial network model, *Water Resour. Res.*, v.28, n.7, p.1975-1981.
- NIKORA, V.I.; SPOZHNIKOV, V. B. (1993). Fractal geometry of individual river channels and its computer simulation. *Water Resour. Res.*, v.29, n.10, p.3561-3568.
- NIKORA, V.I.; SPOZHNIKOV, V.B. (1993). River network fractal geometry and its computer simulation. *Water Resour. Res.*, v.29,n.10, p.3569-3575.
- PARKER, T. S.; CHUA, L. O. (1989). *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. New York, Springer. 238p.
- RODRIGUEZ-ITURBE, I, MARANI, M., RIGON, R.; RINALDO, A. (1994). Self-organized river basin landscapes; fractal and multifractal characteristics. *Water Resour. Res.* v.30, n.12, p.3531-3539.
- TARBOTON, D. G., BRAS, R. L.; RODRIGEZ-ITURBE, I. (1989). Scaling and elevation in river networks. *Water Resour. Res.* v.25, n.9, p.2037-2051.

APÊNDICE I

Bacia do Ribeirão do Palmital

Valores dos tamanhos de réguas e comprimentos totais da rede de drenagem para obtenção da dimensão fractal da Bacia do Ribeirão do Palmital - Escala: 1:50.000.

Tamanho das Réguas (mm)	Tamanho das Réguas (m)	Comprimento Total da Rede de Drenagem L(m)
1	50	90350
3	150	99150
5	250	99250
7	350	98350
10	500	99000
13	650	102050
15	750	104250
17	850	100300
20	1000	99000
23	1150	85000
25	1250	78300
27	1350	75000
30	1500	67650
33	1650	70950
35	1750	66600
40	2000	58050
43	2150	54000
47	2350	47500
55	2750	34200
60	3000	28350
67	3350	26800
73	3650	25550
80	4000	20000
90	4500	20750
100	5000	23750
113	5650	16950
150	7500	15000
175	8750	8750
180	9000	9000

Valores dos tamanhos de quadrículas para obtenção da dimensão fractal para a Bacia do Ribeirão do Palmital - Escala: 1:50000.

Quadrículas (mm)	Quadrículas (m)	Nº de Quadrículas
5	250	379
10	500	153
15	750	81
20	1000	50
25	1250	38
30	1500	28
35	1750	22
40	2000	19
45	2250	16
50	2500	15
55	2750	13
60	3000	10
65	3250	10
70	3500	10

Valores da probabilidade de excedência do comprimento de canais, da classe dos canais e do comprimento de cada canal para a Bacia do Ribeirão do Palmital - Escala: 1:50000.

Classe de Canais	Comprimento (cm)	Comprimento (m)	Probabilidade de Excedência
1	23,30	11650	943E-04
2	6,00	3000	189E-03
3	5,30	2650	283E-03
4	3,50	1750	377E-03
5	3,30	1650	472E-03
6	3,20	1600	566E-03
7	3,00	1500	660E-03
8	3,00	1500	755E-03
9	2,90	1450	849E-03
10	2,90	1450	943E-03
11	2,80	1400	104E-02
12	2,70	1350	113E-02
13	2,40	1200	123E-02
14	2,40	1200	132E-02
15	2,30	1150	142E-02
16	2,30	1150	151E-02
17	2,20	1100	160E-02
18	2,20	1100	170E-02
19	2,15	1075	179E-02
20	2,10	1050	189E-02
21	2,05	1025	198E-02
22	2,00	1000	208E-02
23	2,00	1000	217E-02
24	2,00	1000	226E-02
25	2,00	1000	236E-02
26	1,90	950	245E-02
27	1,80	900	255E-02
28	1,70	850	264E-02
29	1,70	850	274E-02
30	1,70	850	283E-02
31	1,70	850	292E-02
32	1,70	850	302E-02
33	1,60	800	311E-02
34	1,60	800	321E-02
35	1,60	800	330E-02
36	1,50	750	340E-02
37	1,40	700	349E-02
38	1,40	700	358E-02
39	1,40	700	368E-02

cont. - Valores da probabilidade de excedência do comprimento de canais, da classe dos canais e do comprimento de cada canal para a Bacia do Ribeirão do Palmital - Escala: 1:50000.

Classe de Canais	Comprimento (cm)	Comprimento (m)	Probabilidade de Excedência
40	1,35	675	377E-02
41	1,35	675	387E-02
42	1,30	650	396E-02
43	1,30	650	406E-02
44	1,30	650	415E-02
45	1,30	650	425E-02
46	1,30	650	434E-02
47	1,30	650	443E-02
48	1,30	650	453E-02
49	1,30	650	462E-02
50	1,30	650	472E-02
51	1,25	625	481E-02
52	1,20	600	491E-02
53	1,20	600	500E-02
54	1,20	600	509E-02
55	1,20	600	519E-02
56	1,20	600	528E-02
57	1,00	500	538E-02
58	1,00	500	547E-02
59	1,00	500	557E-02
60	1,00	500	566E-02
61	1,00	500	575E-02
62	1,00	500	585E-02
63	1,00	500	594E-02
64	1,00	500	604E-02
65	1,00	500	613E-02
66	1,00	500	623E-02
67	1,00	500	632E-02
68	1,00	500	642E-02
69	1,00	500	651E-02
70	1,00	500	660E-02
71	1,00	500	670E-02
72	0,90	450	679E-02
73	0,90	450	689E-02
74	0,90	450	698E-02
75	0,85	425	708E-02
76	0,80	400	717E-02
77	0,80	400	726E-02
78	0,80	400	736E-02

cont. - Valores da probabilidade de excedência do comprimento de canais, da classe dos canais e do comprimento de cada canal para a Bacia do Ribeirão do Palmital - Escala: 1:50000.

Classe de Canais	Comprimento (cm)	Comprimento (m)	Probabilidade de Excedência
79	0,80	400	745E-02
80	0,80	400	755E-02
81	0,80	400	764E-02
82	0,80	400	774E-02
83	0,75	375	783E-02
84	0,70	350	792E-02
85	0,70	350	802E-02
86	0,70	350	811E-02
87	0,70	350	821E-02
88	0,70	350	830E-02
89	0,70	350	840E-02
90	0,70	350	849E-02
91	0,70	350	858E-02
92	0,70	350	868E-02
93	0,70	350	877E-02
94	0,70	350	887E-02
95	0,60	300	896E-02
96	0,60	300	906E-02
97	0,60	300	915E-02
98	0,50	250	925E-02
99	0,50	250	934E-02
100	0,50	250	943E-02
101	0,50	250	953E-02
102	0,45	225	962E-02
103	0,45	225	972E-02
104	0,40	200	981E-02
105	0,15	75	991E-02

APÊNDICE II

Bacia do Ribeirão do Pirapitingui

Valores do tamanho das réguas e dos comprimentos totais da rede de drenagem para a obtenção da dimensão fractal da Bacia do Ribeirão do Pirapitingui. Escala: 1:50000.

Tamanho das Réguas (mm)	Tamanho das Réguas (m)	Comprimento Total da Rede de Drenagem L(m)
1	50	161050
3	150	167400
5	250	165750
7	350	163800
10	500	167500
13	650	174200
15	750	174000
17	850	167450
20	1000	154000
23	1150	151800
25	1250	142500
27	1350	135000
30	1500	147000
33	1650	146850
35	1750	140000
40	2000	108000
43	2150	107500
47	2350	65800
55	2750	66000
60	3000	69000
67	3350	40200
73	3650	36500
80	4000	36000
90	4500	40500
100	5000	45000
113	5650	22600
150	7500	22500
175	8750	26250
180	9000	27000

Valores dos tamanhos de quadriculas para obtenção da dimensão fractal para a Bacia do Ribeirão Pirapitingui - Escala: 1:50000.

Quadriculas (mm)	Quadriculas (m)	Nº de Quadriculas
5	250	684
10	500	247
15	750	129
20	1000	79
25	1250	57
30	1500	39
35	1750	33
40	2000	25
45	2250	20
50	2500	19
55	2750	17
60	3000	16
65	3250	12
70	3500	12

Valores da probabilidade de excedência do comprimento de canais, da classe dos canais e do comprimento de cada canal para a Bacia do Ribeirão Pirapitingui - Escala: 1:50000.

Classe de Canais	Comprimento (cm)	Comprimento (m)	Probabilidade de Excedência
1	15,70	7850	538E-04
2	11,40	5700	108E-03
3	10,80	5400	161E-03
4	6,30	3150	215E-03
5	6,00	3000	269E-03
6	5,70	2850	323E-03
7	5,10	2550	376E-03
8	4,90	2450	430E-03
9	3,85	1925	484E-03
10	3,50	1750	538E-03
11	3,50	1750	591E-03
12	3,30	1650	645E-03
13	3,30	1650	699E-03
14	3,25	1625	753E-03
15	3,10	1550	806E-03
16	3,10	1550	860E-03
17	3,00	1500	914E-03
18	3,00	1500	968E-03
19	2,90	1450	102E-02
20	2,80	1400	108E-02
21	2,50	1250	113E-02
22	2,50	1250	118E-02
23	2,40	1200	124E-02
24	2,30	1150	129E-02
25	2,30	1150	134E-02
26	2,20	1100	140E-02
27	2,20	1100	145E-02
28	2,10	1050	151E-02
29	2,10	1050	156E-02
30	2,05	1025	161E-02
31	2,00	1000	167E-02
32	2,00	1000	172E-02
33	2,00	1000	177E-02
34	2,00	1000	183E-02
35	1,95	975	188E-02
36	1,95	975	194E-02
37	1,90	950	199E-02
38	1,90	950	204E-02
39	1,90	950	210E-02

cont. - Valores da probabilidade de excedência do comprimento de canais, da classe dos canais e do comprimento de cada canal para a Bacia do Ribeirão Pirapitingui - Escala: 1:50000.

Classe de Canais	Comprimento (cm)	Comprimento (m)	Probabilidade de Excedência
40	1,85	925	215E-02
41	1,85	925	220E-02
42	1,85	925	226E-02
43	1,85	925	231E-02
44	1,80	900	237E-02
45	1,80	900	242E-02
46	1,80	900	247E-02
47	1,80	900	253E-02
48	1,80	900	258E-02
49	1,80	900	263E-02
50	1,75	875	269E-02
51	1,75	875	274E-02
52	1,70	850	280E-02
53	1,70	850	285E-02
54	1,70	850	290E-02
55	1,60	800	296E-02
56	1,60	800	301E-02
57	1,60	800	306E-02
58	1,50	750	312E-02
59	1,50	750	317E-02
60	1,50	750	323E-02
61	1,50	750	328E-02
62	1,50	750	333E-02
63	1,50	750	339E-02
64	1,45	725	344E-02
65	1,40	700	349E-02
66	1,40	700	355E-02
67	1,40	700	360E-02
68	1,40	700	366E-02
69	1,40	700	371E-02
70	1,40	700	376E-02
71	1,40	700	382E-02
72	1,30	650	387E-02
73	1,30	650	392E-02
74	1,30	650	398E-02
75	1,30	650	403E-02
76	1,30	650	409E-02
77	1,30	650	414E-02
78	1,30	650	419E-02

cont. - Valores da probabilidade de excedência do comprimento de canais, da classe dos canais e do comprimento de cada canal para a Bacia do Ribeirão Pirapitingui - Escala: 1:50000.

Classe de Canais	Comprimento (cm)	Comprimento (m)	Probabilidade de Excedência
79	1,30	650	425E-02
80	1,30	650	430E-02
81	1,25	625	435E-02
82	1,20	600	441E-02
83	1,20	600	446E-02
84	1,20	600	452E-02
85	1,20	600	457E-02
86	1,20	600	462E-02
87	1,20	600	468E-02
88	1,20	600	473E-02
89	1,20	600	478E-02
90	1,10	550	484E-02
91	1,10	550	489E-02
92	1,10	550	495E-02
93	1,10	550	500E-02
94	1,05	525	505E-02
95	1,05	525	511E-02
96	1,05	525	516E-02
97	1,00	500	522E-02
98	1,00	500	527E-02
99	1,00	500	532E-02
100	1,00	500	538E-02
101	1,00	500	543E-02
102	1,00	500	548E-02
103	1,00	500	554E-02
104	1,00	500	559E-02
105	1,00	500	565E-02
106	1,00	500	570E-02
107	1,00	500	575E-02
108	0,90	450	581E-02
109	0,90	450	586E-02
110	0,90	450	591E-02
111	0,90	450	597E-02
112	0,90	450	602E-02
113	0,90	450	608E-02
114	0,90	450	613E-02
115	0,90	450	618E-02
116	0,90	450	624E-02
117	0,80	400	629E-02

cont. - Valores da probabilidade de excedência do comprimento de canais, da classe dos canais e do comprimento de cada canal para a Bacia do Ribeirão Pirapitingui - Escala: 1:50000.

Classe de Canais	Comprimento (cm)	Comprimento (m)	Probabilidade de Excedência
118	0,80	400	634E-02
119	0,80	400	640E-02
120	0,80	400	645E-02
121	0,80	400	651E-02
122	0,80	400	656E-02
123	0,80	400	661E-02
124	0,80	400	667E-02
125	0,80	400	672E-02
126	0,80	400	677E-02
127	0,80	400	683E-02
128	0,80	400	688E-02
129	0,80	400	694E-02
130	0,75	375	699E-02
131	0,75	375	704E-02
132	0,70	350	710E-02
133	0,70	350	715E-02
134	0,70	350	720E-02
135	0,70	350	726E-02
136	0,70	350	731E-02
137	0,70	350	737E-02
138	0,70	350	742E-02
139	0,70	350	747E-02
140	0,70	350	753E-02
141	0,70	350	758E-02
142	0,70	350	763E-02
143	0,70	350	769E-02
144	0,70	350	774E-02
145	0,70	350	780E-02
146	0,70	350	785E-02
147	0,70	350	790E-02
148	0,70	350	796E-02
149	0,70	350	801E-02
150	0,70	350	806E-02
151	0,65	325	812E-02
152	0,60	300	817E-02
153	0,60	300	823E-02
154	0,60	300	828E-02
155	0,60	300	833E-02
156	0,60	300	839E-02

cont. - Valores da probabilidade de excedência do comprimento de canais, da classe dos canais e do comprimento de cada canal para a Bacia do Ribeirão Pirapitingui - Escala: 1:50000.

Classe de Canais	Comprimento (cm)	Comprimento (m)	Probabilidade de Excedência
157	0,60	300	844E-02
158	0,60	300	849E-02
159	0,60	300	855E-02
160	0,60	300	860E-02
161	0,60	300	866E-02
162	0,60	300	871E-02
163	0,60	300	876E-02
164	0,60	300	882E-02
165	0,55	275	887E-02
166	0,55	275	892E-02
167	0,50	250	898E-02
168	0,50	250	903E-02
169	0,50	250	909E-02
170	0,50	250	914E-02
171	0,50	250	919E-02
172	0,50	250	925E-02
173	0,50	250	930E-02
174	0,50	250	935E-02
175	0,50	250	941E-02
176	0,50	250	946E-02
177	0,50	250	952E-02
178	0,50	250	957E-02
179	0,50	250	962E-02
180	0,50	250	968E-02
181	0,50	250	973E-02
182	0,40	200	978E-02
183	0,40	200	984E-02
184	0,20	100	989E-02
185	0,20	100	995E-02

APÊNDICE III

Bacia do Ribeirão do Feijão

Valores do tamanho das réguas e dos comprimentos totais da rede de drenagem para a obtenção da dimensão fractal da Bacia do Ribeirão do Feijão. Escala: 1:50000.

Tamanho das Réguas (mm)	Tamanho das Réguas (m)	Comprimento Total da Rede de Drenagem L(m)
1	50	203400
3	150	237150
5	250	264500
7	350	249200
10	500	258500
13	650	261300
15	750	257250
17	850	255850
20	1000	288650
23	1150	241500
25	1250	248750
27	1350	229500
30	1500	214500
33	1650	214500
35	1750	201250
40	2000	194000
43	2150	189200
47	2350	171550
55	2750	140250
60	3000	135000
67	3350	120600
73	3650	113150
80	4000	108000
90	4500	108000
100	5000	85000
113	5650	90400
150	7500	60000
175	8750	44250
180	9000	45000

Valores dos tamanhos de quadrículas para obtenção da dimensão fractal para a Bacia do Ribeirão Feijão - Escala: 1:50000.

Quadrículas (mm)	Quadrículas (m)	Número de Quadrículas
5	250	1014
10	500	463
15	750	283
20	1000	185
25	1250	137
30	1500	100
35	1750	80
40	2000	63
45	2250	50
50	2500	43
55	2750	37
60	3000	32
65	3250	30
70	3500	28

Valores da probabilidade de excedência do comprimento de canais, da classe dos canais e do comprimento de cada canal para a Bacia do Ribeirão do Feijão - Escala: 1:50000.

Classe dos Canais	Comprimento (cm)	Comprimento (m)	Probabilidade de Excedência
1	15,80	7900	442E-04
2	14,40	7200	885E-04
3	11,60	5800	133E-03
4	9,80	4900	177E-03
5	9,30	4650	221E-03
6	7,90	3950	265E-03
7	7,70	3850	310E-03
8	6,80	3400	354E-03
9	6,20	3100	398E-03
10	6,00	3000	442E-03
11	5,90	2950	487E-03
12	5,70	2850	531E-03
13	5,50	2750	575E-03
14	4,80	2400	619E-03
15	4,70	2350	664E-03
16	4,70	2350	708E-03
17	4,50	2250	752E-03
18	4,50	2250	796E-03
19	4,50	2250	841E-03
20	4,20	2100	885E-03
21	4,10	2050	929E-03
22	4,00	2000	973E-03
23	4,00	2000	102E-02
24	3,90	1950	106E-02
25	3,80	1900	111E-02
26	3,80	1900	115E-02
27	3,60	1800	119E-02
28	3,50	1750	124E-02
29	3,50	1750	128E-02
30	3,50	1750	133E-02
31	3,20	1600	137E-02
32	3,15	1575	142E-02
33	3,10	1550	146E-02
34	3,10	1550	150E-02
35	3,00	1500	155E-02
36	3,00	1500	159E-02
37	3,00	1500	164E-02
38	2,80	1400	168E-02
39	2,80	1400	173E-02

cont. - Valores da probabilidade de excedência do comprimento de canais, da classe dos canais e do comprimento de cada canal para a Bacia do Ribeirão do Feijão - Escala: 1:50000.

Classe dos Canais	Comprimento (cm)	Comprimento (m)	Probabilidade de Excedência
40	2,80	1400	177E-02
41	2,70	1350	181E-02
42	2,60	1300	186E-02
43	2,50	1250	190E-02
44	2,50	1250	195E-02
45	2,40	1200	199E-02
46	2,40	1200	204E-02
47	2,30	1150	208E-02
48	2,30	1150	212E-02
49	2,30	1150	217E-02
50	2,30	1150	221E-02
51	2,20	1100	226E-02
52	2,20	1100	230E-02
53	2,20	1100	235E-02
54	2,20	1100	239E-02
55	2,15	1075	243E-02
56	2,10	1050	248E-02
57	2,00	1000	252E-02
58	2,00	1000	257E-02
59	2,00	1000	261E-02
60	2,00	1000	265E-02
61	2,00	1000	270E-02
62	2,00	1000	274E-02
63	2,00	1000	279E-02
64	2,00	1000	283E-02
65	2,00	1000	288E-02
66	1,90	950	292E-02
67	1,90	950	296E-02
68	1,90	950	301E-02
69	1,90	950	305E-02
70	1,80	900	310E-02
71	1,80	900	314E-02
72	1,80	900	319E-02
73	1,80	900	323E-02
74	1,80	900	327E-02
75	1,80	900	332E-02
76	1,80	900	336E-02
77	1,80	900	341E-02
78	1,70	850	345E-02

cont. - Valores da probabilidade de excedência do comprimento de canais, da classe dos canais e do comprimento de cada canal para a Bacia do Ribeirão do Feijão - Escala: 1:50000.

Classe dos Canais	Comprimento (cm)	Comprimento (m)	Probabilidade de Excedência
79	1,70	850	350E-02
80	1,70	850	354E-02
81	1,60	800	358E-02
82	1,60	800	363E-02
83	1,60	800	367E-02
84	1,60	800	372E-02
85	1,60	800	376E-02
86	1,50	750	381E-02
87	1,50	750	385E-02
88	1,50	750	389E-02
89	1,50	750	394E-02
90	1,50	750	398E-02
91	1,50	750	403E-02
92	1,50	750	407E-02
93	1,50	750	412E-02
94	1,50	750	416E-02
95	1,50	750	420E-02
96	1,50	750	425E-02
97	1,50	750	429E-02
98	1,40	700	434E-02
99	1,40	700	438E-02
100	1,40	700	442E-02
101	1,40	700	447E-02
102	1,40	700	451E-02
103	1,40	700	456E-02
104	1,40	700	460E-02
105	1,40	700	465E-02
106	1,30	650	469E-02
107	1,30	650	473E-02
108	1,30	650	478E-02
109	1,30	650	482E-02
110	1,30	650	487E-02
111	1,30	650	491E-02
112	1,30	650	496E-02
113	1,20	600	500E-02
114	1,20	600	504E-02
115	1,20	600	509E-02
116	1,20	600	513E-02
117	1,20	600	518E-02



cont. - Valores da probabilidade de excedência do comprimento de canais, da classe dos canais e do comprimento de cada canal para a Bacia do Ribeirão do Feijão - Escala: 1:50000.

Classe dos Canais	Comprimento (cm)	Comprimento (m)	Probabilidade de Excedência
118	1,20	600	522E-02
119	1,20	600	527E-02
120	1,20	600	531E-02
121	1,20	600	535E-02
122	1,20	600	540E-02
123	1,20	600	544E-02
124	1,20	600	549E-02
125	1,20	600	553E-02
126	1,20	600	558E-02
127	1,20	600	562E-02
128	1,10	550	566E-02
129	1,10	550	571E-02
130	1,10	550	575E-02
131	1,10	550	580E-02
132	1,10	550	584E-02
133	1,00	500	588E-02
134	1,00	500	593E-02
135	1,00	500	597E-02
136	1,00	500	602E-02
137	1,00	500	606E-02
138	1,00	500	611E-02
139	1,00	500	615E-02
140	1,00	500	619E-02
141	1,00	500	624E-02
142	1,00	500	628E-02
143	1,00	500	633E-02
144	1,00	500	637E-02
145	1,00	500	642E-02
146	1,00	500	646E-02
147	1,00	500	650E-02
148	1,00	500	655E-02
149	0,9	450	659E-02
150	0,90	450	664E-02
151	0,90	450	668E-02
152	0,90	450	673E-02
153	0,90	450	677E-02
154	0,90	450	681E-02
155	0,90	450	686E-02
156	0,90	450	690E-02

cont. -: Valores da probabilidade de excedência do comprimento de canais, da classe dos canais e do comprimento de cada canal para a Bacia do Ribeirão do Feijão - Escala: 1:50000.

Classe dos Canais	Comprimento (cm)	Comprimento (m)	Probabilidade de Excedência
157	0,90	450	695E-02
158	0,90	450	699E-02
159	0,80	400	704E-02
160	0,80	400	708E-02
161	0,80	400	712E-02
162	0,80	400	717E-02
163	0,80	400	721E-02
164	0,80	400	726E-02
165	0,80	400	730E-02
166	0,80	400	735E-02
167	0,80	400	739E-02
168	0,80	400	743E-02
169	0,80	400	748E-02
170	0,80	400	752E-02
171	0,80	400	757E-02
172	0,80	400	761E-02
173	0,80	400	765E-02
174	0,80	400	770E-02
175	0,80	400	774E-02
176	0,80	400	779E-02
177	0,80	400	783E-02
178	0,80	400	788E-02
179	0,70	350	792E-02
180	0,70	350	796E-02
181	0,70	350	801E-02
182	0,70	350	805E-02
183	0,70	350	810E-02
184	0,70	350	814E-02
185	0,70	350	819E-02
186	0,70	350	823E-02
187	0,70	350	827E-02
188	0,70	350	832E-02
189	0,60	300	836E-02
190	0,60	300	841E-02
191	0,60	300	845E-02
192	0,60	300	850E-02
193	0,60	300	854E-02
194	0,60	300	858E-02
195	0,60	300	863E-02

cont. - Valores da probabilidade de excedência do comprimento de canais, da classe dos canais e do comprimento de cada canal para a Bacia do Ribeirão do Feijão - Escala: 1:50000.

Classe dos Canais	Comprimento (cm)	Comprimento (m)	Probabilidade de Excedência
196	0,60	300	867E-02
197	0,60	300	872E-02
198	0,60	300	876E-02
199	0,60	300	881E-02
200	0,60	300	885E-02
201	0,50	250	889E-02
202	0,50	250	894E-02
203	0,50	250	898E-02
204	0,50	250	903E-02
205	0,50	250	907E-02
206	0,50	250	912E-02
207	0,50	250	916E-02
208	0,50	250	920E-02
209	0,50	250	925E-02
210	0,50	250	929E-02
211	0,50	250	934E-02
212	0,50	250	938E-02
213	0,50	250	942E-02
214	0,50	250	947E-02
215	0,40	200	951E-02
216	0,40	200	956E-02
217	0,40	200	960E-02
218	0,40	200	965E-02
219	0,40	200	969E-02
220	0,30	150	973E-02
221	0,30	150	978E-02
222	0,30	150	982E-02
223	0,30	150	987E-02
224	0,20	100	991E-02
225	0,20	100	996E-02

GLOSSÁRIO

Área suporte	- Área mínima para formação de um canal de ordem 1
Auto-afinidade	- Propriedade de objetos que, quando analisados independente de sua posição no espaço, permanecem com suas características inalteradas
Auto-similaridade	- Característica dos objetos fractais e pode ser entendido da seguinte forma: um objeto pode ser subdividido em várias partes, cada parte sendo similar ao todo
Bacia de Peano	- Bacia fictícia usada para investigação das propriedades e características de uma rede de drenagem.
Dimensão fractal	- É a medida do grau de irregularidades considerado em todas as escalas podendo assumir um valor maior do que a dimensão geométrica clássica do objeto.
Fractal	- Palavra criada por Mandelbrot em 1977 para denominar uma grande classe de objetos. É um objeto matemático que possui estrutura extremamente detalhada, não importando o tamanho da escala.
Grau de lacunaridade	- É o grau de compacidade do objeto fractal.
Objetos fractais	- Objeto que possui uma dimensão fractal maior que sua dimensão clássica.
Rede de drenagem	- Conjunto de canais interligados que contribuem para descarga em um dado ponto.